IOI-camp lecture Math

Meteor

February 7, 2017

Introduction

程式競賽中的數學：

- 數學知識
- 數學想法

Introduction

程式競賽中的數學：

- 數學知識
- 數學想法

Introduction

程式競賽中的數學：

- 數學知識
- 數學想法

Introduction – 數學知識例子

例題 (平方國的平方幣, TIOJ 1349)

給你一個正整數 n，請找出最小的 k，使得存在 k 個平方數 $a_1^2, a_2^2, \cdots, a_k^2$ 使得 $\sum a_i^2 = n$ 。$(n \leq 10^7)$

- 一個很極端的「結論題」。
- 所有正整數都可以寫成 4 個平方數的和 (Lagrange 1770)。
- 太結論也不是很有趣……

Introduction – 數學知識例子

例題 (平方國的平方幣, TIOJ 1349)

給你一個正整數 n，請找出最小的 k，使得存在 k 個平方數 $a_1^2, a_2^2, \cdots, a_k^2$ 使得 $\sum a_i^2 = n$ 。$(n \leq 10^7)$

- 一個很極端的「結論題」。
- 所有正整數都可以寫成 4 個平方數的和 (Lagrange 1770)。
- 太結論也不是很有趣……

Introduction – 數學知識例子

例題 (平方國的平方幣, TIOJ 1349)

給你一個正整數 n，請找出最小的 k，使得存在 k 個平方數 $a_1^2, a_2^2, \cdots, a_k^2$ 使得 $\sum a_i^2 = n$ 。$(n \leq 10^7)$

- 一個很極端的「結論題」。
- 所有正整數都可以寫成 4 個平方數的和 (Lagrange 1770)。
- 太結論也不是很有趣……

Introduction – 數學知識例子

例題 (平方國的平方幣, TIOJ 1349)

給你一個正整數 n，請找出最小的 k，使得存在 k 個平方數 $a_1^2, a_2^2, \cdots, a_k^2$ 使得 $\sum a_i^2 = n$ 。$(n \leq 10^7)$

- 一個很極端的「結論題」。
- 所有正整數都可以寫成 4 個平方數的和 (Lagrange 1770)。
- 太結論也不是很有趣……

Introduction – 數學知識例子 2

例題 (Taxes, Codeforces 735D)

在一個很古怪的國家，如果你賺了 x 元，你就要繳 d 塊錢的稅，其中 d 是 x 的因數且小於 n 裡最大的一個。

現在有一個人賺了 n 元，他想把 n 拆成 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 然後 n_i 各自繳稅，請問他最多可以逃過多少稅？$(n \leq 2 \times 10^9)$

- Goldbach's conjecture: 大於 2 的偶數都可以寫成兩個質數的和。

Introduction – 數學知識例子 2

例題 (Taxes, Codeforces 735D)

在一個很古怪的國家，如果你賺了 x 元，你就要繳 d 塊錢的稅，其中 d 是 x 的因數且小於 n 裡最大的一個。

現在有一個人賺了 n 元，他想把 n 拆成 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 然後 n_i 各自繳稅，請問他最多可以逃過多少稅？($n \leq 2 \times 10^9$)

- Goldbach's conjecture: 大於 2 的偶數都可以寫成兩個質數的和。

Introduction – 數學想法例子

但大部份還是屬於「數學想法」的問題。

例題 (2015 ICPC Daejeon regional pE)

給你一堆數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，你要找一個排列 σ，使得

$$\max\left(\left|a_{\sigma(1)} - a_{\sigma(2)}\right|, \left|a_{\sigma(2)} - a_{\sigma(3)}\right|, \cdots, \left|a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(1)}\right|\right)$$

最小。$(n \leq 10^4)$

定義

一個大小為 n 的**排列**是一個從 $[1, n]$ 打到自己的一一對應函數。

Introduction – 數學想法例子

但大部份還是屬於「數學想法」的問題。

例題 (2015 ICPC Daejeon regional pE)

給你一堆數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，你要找一個排列 σ，使得

$$\max\left(\left|a_{\sigma(1)} - a_{\sigma(2)}\right|, \left|a_{\sigma(2)} - a_{\sigma(3)}\right|, \cdots, \left|a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(1)}\right|\right)$$

最小。($n \leq 10^4$)

定義

一個大小為 n 的**排列**是一個從 $[1, n]$ 打到自己的一一對應函數。

Introduction – 數學想法例子

但大部份還是屬於「數學想法」的問題。

例題 (2015 ICPC Daejeon regional pE)

給你一堆數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，你要找一個排列 σ，使得

$$\max\left(\left|a_{\sigma(1)} - a_{\sigma(2)}\right|, \left|a_{\sigma(2)} - a_{\sigma(3)}\right|, \cdots, \left|a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(1)}\right|\right)$$

最小。($n \leq 10^4$)

定義

一個大小為 n 的**排列**是一個從 $[1, n]$ 打到自己的一一對應函數。

Introduction – 數學想法例子

解題四部曲：

1. 嘗試、觀察：在計算紙上多試試
2. 神猜結論
3. (稍微)證明
4. 寫 code

亂講的，多半要臨機應變，見招拆招。

Introduction – 數學想法例子

解題四部曲：

1. 嘗試、觀察：在計算紙上多試試
2. 神猜結論
3. (稍微)證明
4. 寫 code

亂講的，多半要臨機應變，見招拆招。

Introduction – 數學想法例子

解題四部曲：

1. 嘗試、觀察：在計算紙上多試試
2. 神猜結論
3. (稍微)證明
4. 寫 code

亂講的，多半要臨機應變，見招拆招。

Introduction – 數學想法例子

解題四部曲：

1. 嘗試、觀察：在計算紙上多試試
2. 神猜結論
3. (稍微)證明
4. 寫 code

亂講的，多半要臨機應變，見招拆招。

Introduction – 數學想法例子

解題四部曲：

1. 嘗試、觀察：在計算紙上多試試
2. 神猜結論
3. (稍微)證明
4. 寫 code

亂講的，多半要臨機應變，見招拆招。

Introduction – 數學想法例子

解題四部曲：

1. 嘗試、觀察：在計算紙上多試試
2. 神猜結論
3. (稍微)證明
4. 寫 code

亂講的，多半要臨機應變，見招拆招。

Introduction – 數學想法例子

解題四部曲：

1. 嘗試、觀察：在計算紙上多試試
2. 神猜結論
3. (稍微)證明
4. 寫 code

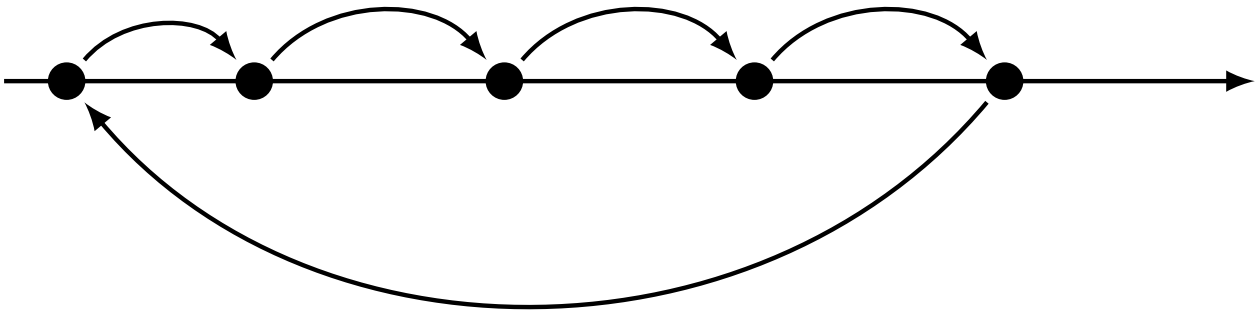
亂講的，多半要臨機應變，見招拆招。

Introduction – 數學想法例子

1. 嘗試、觀察
2. 神猜結論

Introduction – 數學想法例子

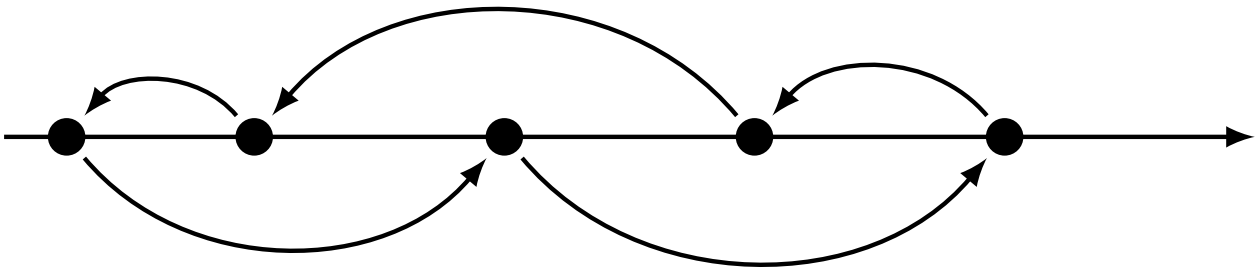
1. 嘗試、觀察
2. 神猜結論



應該不是⋯

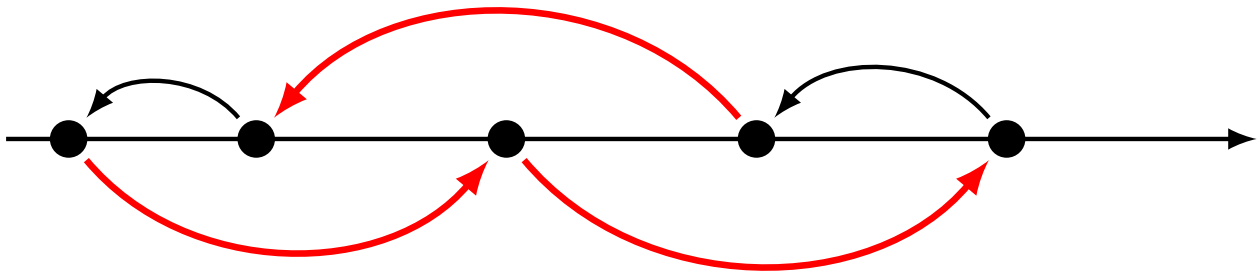
Introduction – 數學想法例子

1. 嘗試、觀察
2. 神猜結論



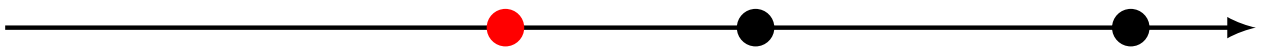
Introduction – 數學想法例子

1. 嘗試、觀察
2. 神猜結論



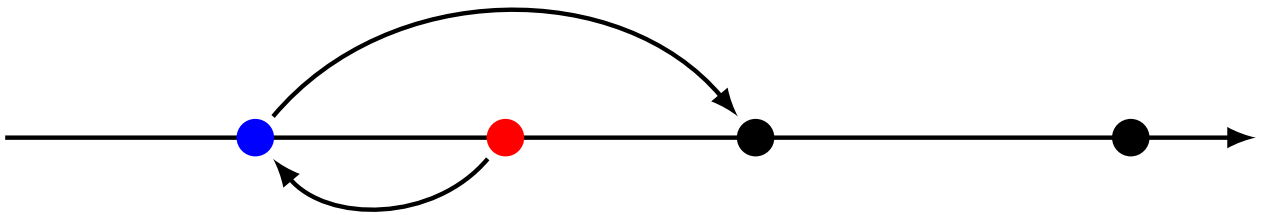
Introduction – 數學想法例子

3 證明



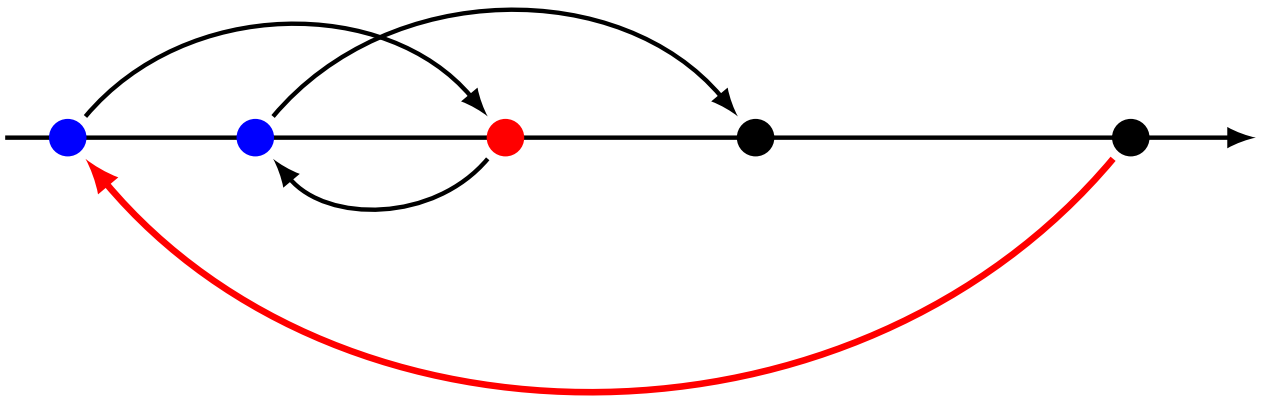
Introduction – 數學想法例子

3 證明



Introduction – 數學想法例子

3 證明



Introduction – 數學想法例子

4. 寫 code

```
1  sort(begin(a), end(a));
2  int ans = 0;
3  for (int i=0; i<n-2; i++)
4    ans = max(ans, a[i+2] - a[i]);
5  cout << ans << endl;
```

Very easy! — 有時漂亮的結論就會有很短的程式碼。

Introduction – 數學想法例子

4. 寫 code

```
1  sort(begin(a), end(a));
2  int ans = 0;
3  for (int i=0; i<n-2; i++)
4    ans = max(ans, a[i+2] - a[i]);
5  cout << ans << endl;
```

Very easy! — 有時漂亮的結論就會有很短的程式碼。

Introduction

相同的題目就不會在出現第二次了。

但用類似想法的題目有可能會在出現！

要有舉一反三的能力！

Introduction

相同的題目就不會在出現第二次了。

但用類似想法的題目有可能會在出現！

要有舉一反三的能力！

Introduction

相同的題目就不會在出現第二次了。

但用類似想法的題目有可能會在出現！

要有舉一反三的能力！

Introduction – 數學想法例子 2

例題 (2016 NTU PK pF)

給你一堆數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，你要找一個排列 σ，使得

$$\min_{1 \le i < n} \left| a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(i+1)} \right|$$

最大。$(n \le 2 \times 10^5)$

我們先想 n 是偶數的 case。

Introduction – 數學想法例子 2

例題 (2016 NTU PK pF)

給你一堆數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，你要找一個排列 σ，使得

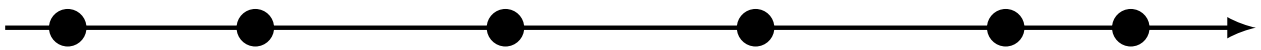
$$\min_{1 \le i < n} \left| a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(i+1)} \right|$$

最大。$(n \le 2 \times 10^5)$

我們先想 n 是偶數的 case。

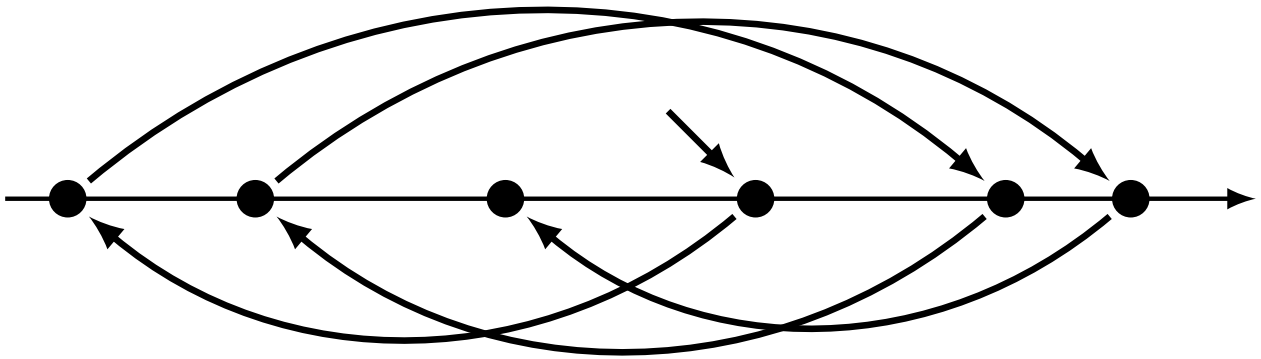
Introduction – 數學想法例子 2

1. 嘗試、觀察
2. 神猜結論



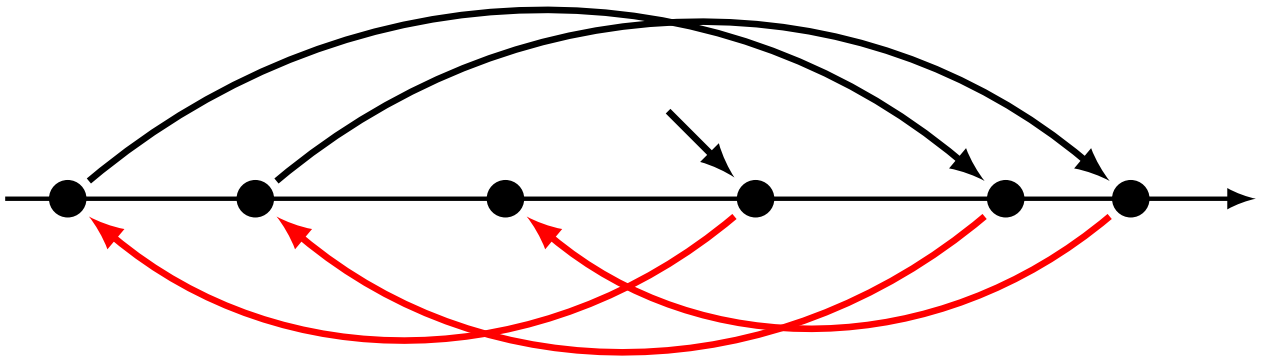
Introduction – 數學想法例子 2

1. 嘗試、觀察
2. 神猜結論



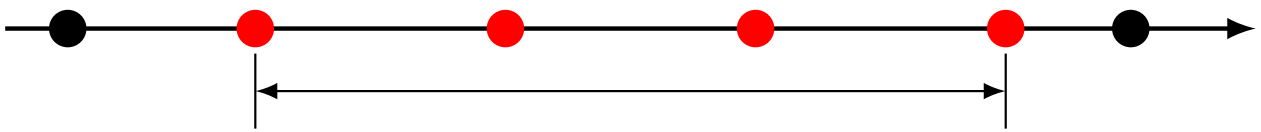
Introduction – 數學想法例子 2

1. 嘗試、觀察
2. 神猜結論



Introduction – 數學想法例子 2

3 證明



Introduction – 數學想法例子 2

習題

請完成奇數的情況。

數論

例題 (An Easy Problem, NTUJ 1423)

給你等式 $a^b \equiv c \pmod{d}$ 中的其中 3 個，請找出剩下的一個。

1. $a^b \equiv ? \pmod{d}$: 快速冪，$\mathcal{O}(\log b)$。

```
1  int fastpow(int a, int b, int m) {
2      if (!b) return 1%m;
3      int ret = fastpow(a*a%m, b/2, m);
4      if (b&1) (ret *= a) %= m;
5      return ret;
6  }
```

例題 (An Easy Problem, NTUJ 1423)

給你等式 $a^b \equiv c \pmod{d}$ 中的其中 3 個，請找出剩下的一個。

1. $a^b \equiv ? \pmod{d}$: 快速冪，$\mathcal{O}(\log b)$。

```
1  int fastpow(int a, int b, int m) {
2      if (!b) return 1%m;
3      int ret = fastpow(a*a%m, b/2, m);
4      if (b&1) (ret *= a) %= m;
5      return ret;
6  }
```

數論

例題 (An Easy Problem, NTUJ 1423)

給你等式 $a^b \equiv c \pmod{d}$ 中的其中 3 個，請找出剩下的一個。

1. $a^b \equiv ? \pmod{d}$: 快速冪，$\mathcal{O}(\log b)$。

```
1  int fastpow(int a, int b, int m) {
2      if (!b) return 1%m;
3      int ret = fastpow(a*a%m, b/2, m);
4      if (b&1) (ret *= a) %= m;
5      return ret;
6  }
```

數論

2. $a^b \equiv c \pmod{?} \implies ? \mid a^b - c$

3. $a^? \equiv c \pmod{p}$, p prime：$\mathcal{O}(\sqrt{p})$，有點難了。

$$a^{xk+y} \equiv c \pmod{p} \iff a^{xk} \equiv ca^{-y} \pmod{p}$$

問題

怎麼求出 $a^{-y} \bmod p$？

數論

2. $a^b \equiv c \pmod{?} \implies ? \mid a^b - c$

3. $a^? \equiv c \pmod{p}$, p prime：$\mathcal{O}(\sqrt{p})$，有點難了。

$$a^{xk+y} \equiv c \pmod{p} \iff a^{xk} \equiv ca^{-y} \pmod{p}$$

問題

怎麼求出 $a^{-y} \bmod p$？

數論

2. $a^b \equiv c \pmod{?} \implies ? \mid a^b - c$
3. $a^? \equiv c \pmod{p}$, p prime：$\mathcal{O}(\sqrt{p})$，有點難了。

$$a^{xk+y} \equiv c \pmod{p} \iff a^{xk} \equiv ca^{-y} \pmod{p}$$

問題

怎麼求出 $a^{-y} \bmod p$？

數論

2. $a^b \equiv c \pmod{?} \implies ? \mid a^b - c$
3. $a^? \equiv c \pmod{p}$, p prime：$\mathcal{O}(\sqrt{p})$，有點難了。

$$a^{xk+y} \equiv c \pmod{p} \iff a^{xk} \equiv ca^{-y} \pmod{p}$$

問題

怎麼求出 $a^{-y} \bmod p$？

數論

我們先離題一下。

數學上喜歡把東西抽象化，只留下「本質」，去掉多餘的東西。

問題

運算的「本質」是什麼？

數論

我們先離題一下。

數學上喜歡把東西抽象化，只留下「本質」，去掉多餘的東西。

問題

運算的「本質」是什麼？

數論

我們先離題一下。

數學上喜歡把東西抽象化，只留下「本質」，去掉多餘的東西。

問題

運算的「本質」是什麼？

數論 – 群

定義 (群)

一個**群**由一個集合 G 和一個運算 $\cdot$ 構成，滿足

- 運算 $\cdot$ 是一個函數 $(G, G) \to G$，也就是說 $x \cdot y \in G$。
- 有**結合律**：$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- 存在一個特別的元素 1 叫作**單位元**，滿足 $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$。
- 對每一個 x 存在 $x^{-1} \in G$ 叫作**反元素**，滿足 $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$。

數論 – 群的例子

- 整數對於加法 $(\mathbb{Z}, +)$ 是一個群。
- 旋轉是一個群，如 $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$。
- 模 m 下的加法，寫作 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$。
- 一個元素生成的群 $\langle a \rangle \triangleq \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$，我們把這種群叫作**循環群**。

數論 – 群的例子

- 整數對於加法 $(\mathbb{Z}, +)$ 是一個群。
- 旋轉是一個群，如 $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$。
- 模 m 下的加法，寫作 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$。
- 一個元素生成的群 $\langle a \rangle \triangleq \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$，我們把這種群叫作**循環群**。

數論 – 群的例子

- 整數對於加法 $(\mathbb{Z}, +)$ 是一個群。
- 旋轉是一個群，如 $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$。
- 模 m 下的加法，寫作 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$。
- 一個元素生成的群 $\langle a \rangle \triangleq \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$，我們把這種群叫作**循環群**。

數論 – 群的例子

- 整數對於加法 $(\mathbb{Z}, +)$ 是一個群。
- 旋轉是一個群，如 $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$。
- 模 m 下的加法，寫作 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$。
- 一個元素生成的群 $\langle a \rangle \triangleq \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$，我們把這種群叫作**循環群**。

數論 – 群的例子

- 整數對於加法 $(\mathbb{Z}, +)$ 是一個群。
- 旋轉是一個群，如 $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$。
- 模 m 下的加法，寫作 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$。
- 一個元素生成的群 $\langle a \rangle \triangleq \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$，我們把這種群叫作**循環群**。

問題

模 m 下的乘法 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 是一個群嗎？

數論 – $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

剛剛那樣問並不精確，關鍵應是模 m 下哪些元素有反元素？

2 在模 12 下就沒有反元素。

$$xy \equiv 1 \pmod{m} \implies xy = mt' + 1 \implies xy + mt = 1$$

問題

給定 a, b, c，$ax + by = c$ 什麼時候有整數解 (x, y)？

數論 – $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

剛剛那樣問並不精確，關鍵應是模 m 下哪些元素有反元素？

2 在模 12 下就沒有反元素。

$$xy \equiv 1 \pmod{m} \implies xy = mt' + 1 \implies xy + mt = 1$$

問題

給定 a, b, c，$ax + by = c$ 什麼時候有整數解 (x, y)？

數論 – $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

剛剛那樣問並不精確，關鍵應是模 m 下哪些元素有反元素？

2 在模 12 下就沒有反元素。

$$xy \equiv 1 \pmod{m} \implies xy = mt' + 1 \implies xy + mt = 1$$

問題

給定 a, b, c，$ax + by = c$ 什麼時候有整數解 (x, y)？

數論 – $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

剛剛那樣問並不精確，關鍵應是模 m 下哪些元素有反元素？

2 在模 12 下就沒有反元素。

$$xy \equiv 1 \pmod{m} \implies xy = mt' + 1 \implies xy + mt = 1$$

問題

給定 a, b, c，$ax + by = c$ 什麼時候有整數解 (x, y)？

數論 – $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

剛剛那樣問並不精確，關鍵應是模 m 下哪些元素有反元素？

2 在模 12 下就沒有反元素。

$$xy \equiv 1 \pmod{m} \implies xy = mt' + 1 \implies xy + mt = 1$$

問題

給定 a, b, c，$ax + by = c$ 什麼時候有整數解 (x, y)？

數論 – $ax + by = c$

定理

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \gcd(a, b)\mathbb{Z}$$

$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \supseteq \gcd(a, b)\mathbb{Z}$:

```
pair<int, int> extend_gcd(int a, int b) {
    if(b == 0) return {1, 0};
    else {
        int k = a/b;
        pair<int, int> xy = gcd(b, a%b);
        return {xy.second, xy.first - k * xy.second};
    }
}
```

數論 $-$ $ax + by = c$

定理

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \gcd(a, b)\mathbb{Z}$$

$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \supseteq \gcd(a, b)\mathbb{Z}$:

```
pair<int, int> extend_gcd(int a, int b) {
    if(b == 0) return {1, 0};
    else {
        int k = a/b;
        pair<int, int> xy = gcd(b, a%b);
        return {xy.second, xy.first - k * xy.second};
    }
}
```

數論 – $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

引理

$$x \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \iff \gcd(x, m) = 1$$

證明：

數論 – $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

引理

$$x \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \iff \gcd(x, m) = 1$$

證明：

$$xy \equiv 1 \pmod{m} \text{ 有解} \iff xy + mt = 1 \text{ 有解}$$

數論 – $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

引理

$$x \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \iff \gcd(x, m) = 1$$

證明：

$$\begin{aligned} xy \equiv 1 \pmod{m} \text{ 有解} &\iff xy + mt = 1 \text{ 有解} \\ &\iff \gcd(x, m) = 1 \end{aligned}$$

數論 – $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

問題

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 有多少元素？也就是 $[1,n]$ 中有幾個數和 n 互質？

定理 (Euler φ 函數)

$\varphi(n)$ 表示 $[1,n]$ 有幾個數和 n 互質，則如果 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，則

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

數論 – $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

問題

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 有多少元素？也就是 $[1,n]$ 中有幾個數和 n 互質？

定理 (Euler φ 函數)

$\varphi(n)$ 表示 $[1,n]$ 有幾個數和 n 互質，則如果 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，則

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

數論 – 子群

定義

如果 $H \subseteq G$ 且 H 中任兩個元素的乘積、任一個元素的反元素還在 H 裡，我們就說 H 是 G 的**子群**。

- 所有偶數 $2\mathbb{Z}$ 對於加法是 $\mathbb{Z}$ 的子群。
- $H \triangleq \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$ 對於乘法是 $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ 的子群。

數論 – Lagrange's Theorem

定理 (Lagrange's theorem)

如果 H 是 G 的子群，則 $|G| = |G/H|\,|H|$，因此有 $|H| \,|\, |G|$。

定理 (Euler's theorem)

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

數論 – Lagrange's Theorem

定理 (Lagrange's theorem)

如果 H 是 G 的子群，則 $|G| = |G/H|\,|H|$，因此有 $|H| \mid |G|$。

定理 (Euler's theorem)

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

數論 – Euler's Theorem

證明：
如果 n 是最小的正整數使得 $a^n \equiv 1 \pmod{m}$，那 $H \triangleq \langle a \rangle = \{1, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$ 有 n 個元素。
由 Lagrange's theorem，$n \mid |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times| = \varphi(m)$，可令 $\varphi(m) = nk$，因此 $a^{\varphi(m)} = a^{nk} \equiv 1 \pmod{m}$。

引理

$$\gcd(a, m) = 1 \implies a^{-1} \equiv a^{\varphi(m)-1} \pmod{m}$$

數論 – Tonelli-Shanks algorithm

回到一開始的題目：

4. $?^b \equiv c \pmod{p}$, p prime。

先看 $b = 2$ 的情況。

例題 (Square Roots in a Finite Group, 2013 大專院校 pJ)

給定一個質數 p 和 a，請求出 $x^2 \equiv a \pmod{p}$ 的解 x 或輸出無解。$(a, p < 2^{31})$

數論 – Tonelli-Shanks algorithm

回到一開始的題目：

4. $?^b \equiv c \pmod{p}$, p prime。

先看 $b = 2$ 的情況。

例題 (Square Roots in a Finite Group, 2013 大專院校 pJ)

給定一個質數 p 和 a，請求出 $x^2 \equiv a \pmod{p}$ 的解 x 或輸出無解。$(a, p < 2^{31})$

數論 – Tonelli-Shanks algorithm

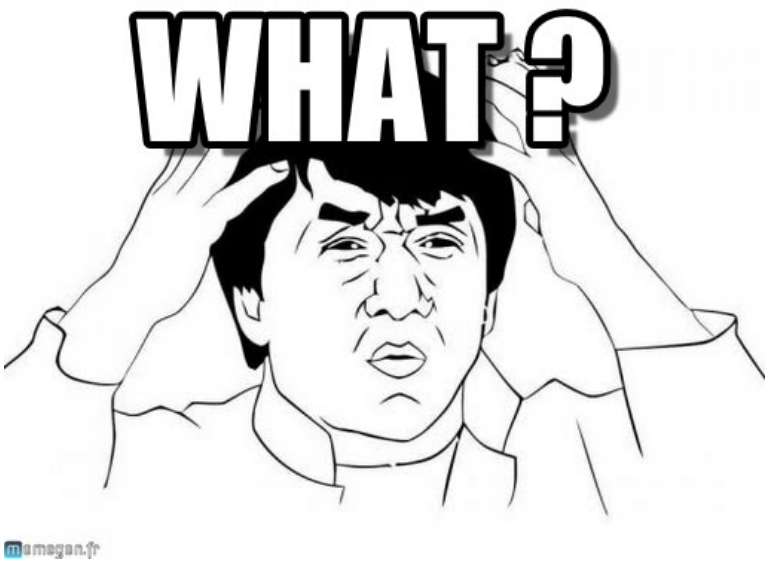
當時這一題有給一個小題示。

1. 把 $p-1$ 寫作 $p-1=2^s m$，其中 m 是奇數。
2. 找一個 b 使得 $x^2 \equiv b \pmod{p}$ 無解。
3. 令 $b \leftarrow b^m$, $x \leftarrow a^{(m+1)/2}$, $t \leftarrow a^m$，
   可以驗證 $x^2 \equiv at \pmod{p}$。
4. 想辦法把 t 調成 1 你就獲勝了。

數論 – Tonelli-Shanks algorithm

當時這一題有給一個小題示。

1. 把 $p-1$ 寫作 $p-1=2^s m$，其中 m 是奇數。
2. 找一個 b 使得 $x^2 \equiv b \pmod{p}$ 無解。
3. 令 $b \leftarrow b^m$, $x \leftarrow a^{(m+1)/2}$, $t \leftarrow a^m$，
   可以驗證 $x^2 \equiv at \pmod{p}$。
4. 想辦法把 t 調成 1 你就獲勝了。



數論 – 原根

要有一點先備知識。

定理

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 是一個循環群 $\iff m = 1, 2, 4, p^k, 2p^k$

定義

如果 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times = \langle a \rangle$，我們就說 a 是模 m 下的**原根**。

數論 – 原根

要有一點先備知識。

定理

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 是一個循環群 $\iff$ $m = 1, 2, 4, p^k, 2p^k$

定義

如果 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times = \langle a \rangle$，我們就說 a 是模 m 下的**原根**。

數論 – 原根

要有一點先備知識。

定理

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 是一個循環群 $\iff$ $m = 1, 2, 4, p^k, 2p^k$

定義

如果 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times = \langle a \rangle$，我們就說 a 是模 m 下的**原根**。

數論 – 原根

舉個例子，$m = 11, a = 2$。

$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6

$$\begin{array}{ccccc} 2 & + & 4 & \equiv & 6 \pmod{10} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 4 & \times & 5 & \equiv & 9 \pmod{11} \end{array}$$

可定義 $\log_a$，如 $\log_2(9) = 6$。

數論 – 原根

舉個例子，$m = 11, a = 2$。

$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & + & 4 & \equiv & 6 & & (\text{mod } 10) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 4 & \times & 5 & \equiv & 9 & & (\text{mod } 11) \end{array}$$

可定義 $\log_a$，如 $\log_2(9) = 6$。

數論 – 原根

舉個例子，$m = 11, a = 2$。

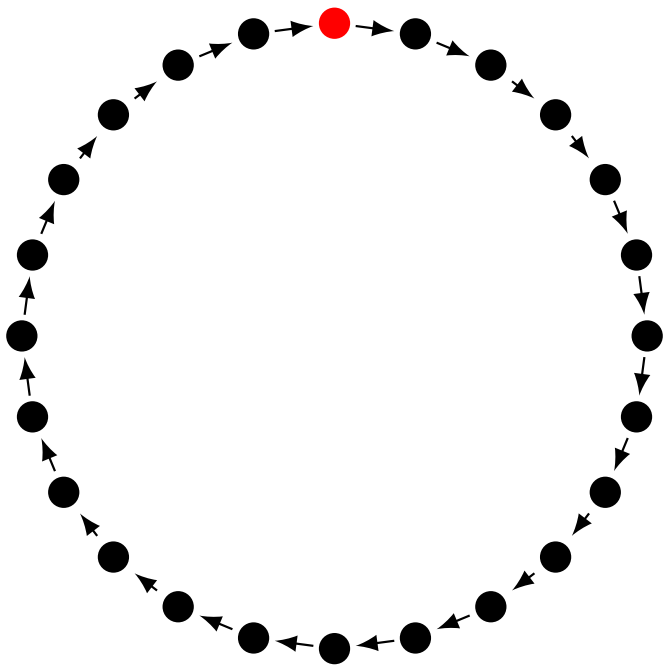
$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & + & 4 & \equiv & 6 & & (\text{mod } 10) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 4 & \times & 5 & \equiv & 9 & & (\text{mod } 11) \end{array}$$

可定義 $\log_a$，如 $\log_2(9) = 6$。

數論 – Tonelli-Shanks algorithm

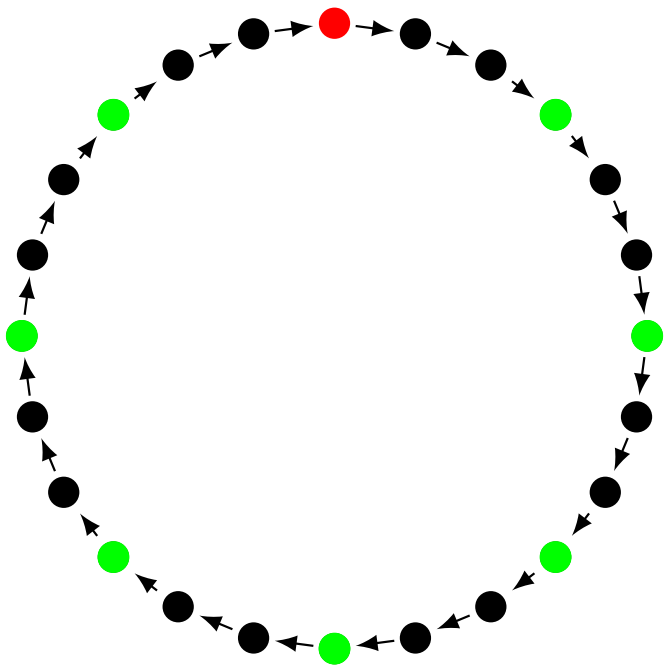
$p = 25,\ p - 1 = 2^s \cdot m = 2^3 \cdot 3$



數論 – Tonelli-Shanks algorithm

$p = 25,\ p - 1 = 2^s \cdot m = 2^3 \cdot 3$

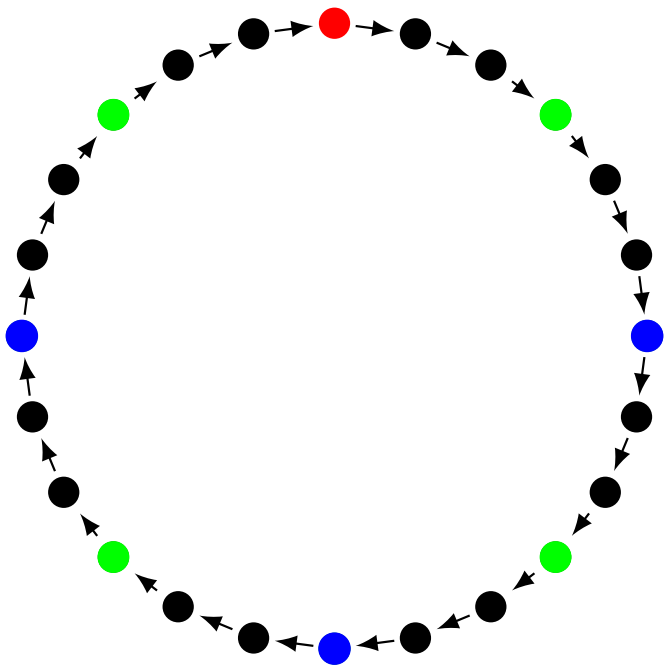
$\log(t) = \log(a^m) = m \log(a)$ ∘



數論 – Tonelli-Shanks algorithm

$p = 25,\ p - 1 = 2^s \cdot m = 2^3 \cdot 3$

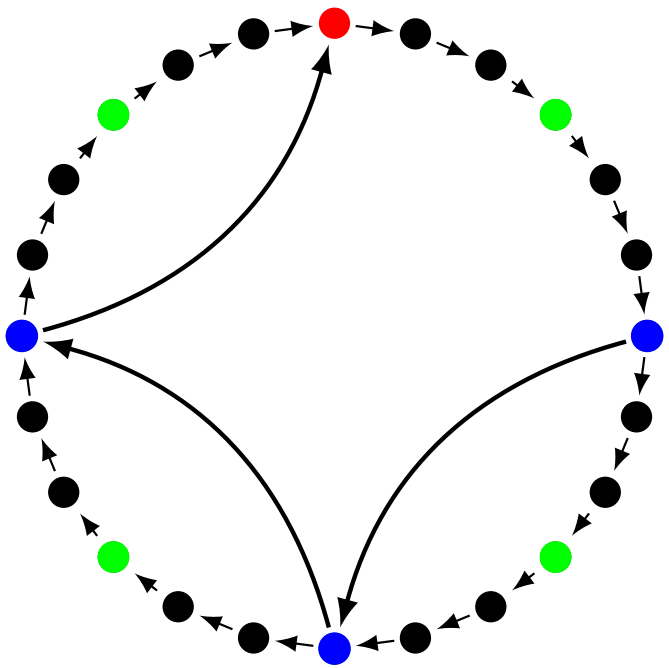
$\log(t) = \log(a^m) = m \log(a)$。如果 $x \leftarrow b$，那 $t \leftarrow b^2$。



數論 – Tonelli-Shanks algorithm

$p = 25,\ p - 1 = 2^s \cdot m = 2^3 \cdot 3$

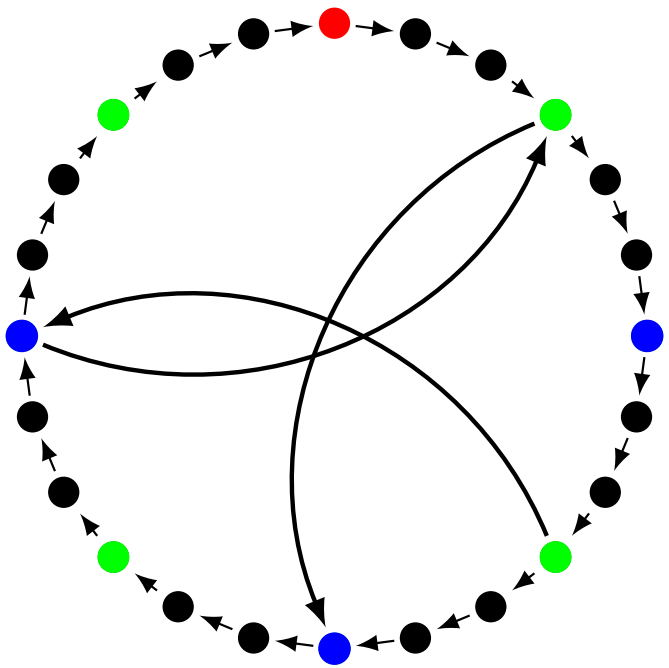
$\log(t) = \log(a^m) = m \log(a)$。如果 $x \leftarrow b$，那 $t \leftarrow b^2$。



數論 – Tonelli-Shanks algorithm

$p = 25,\ p - 1 = 2^s \cdot m = 2^3 \cdot 3$

$\log(t) = \log(a^m) = m \log(a)$。如果 $x \leftarrow b$，那 $t \leftarrow b^2$。



數論 – Tonelli-Shanks algorithm

```
1  while (t != 1) {
2      int k = 0, tp = t, tb = b;
3      while (tp != 1) tp = (tp * tp) % p, k++;
4      for (int i=0; i<s-k-1; i++) tb = (tb * tb) % p;
5      x = x * tb % p;
6      t = t * tb * tb % p;
7  }
```

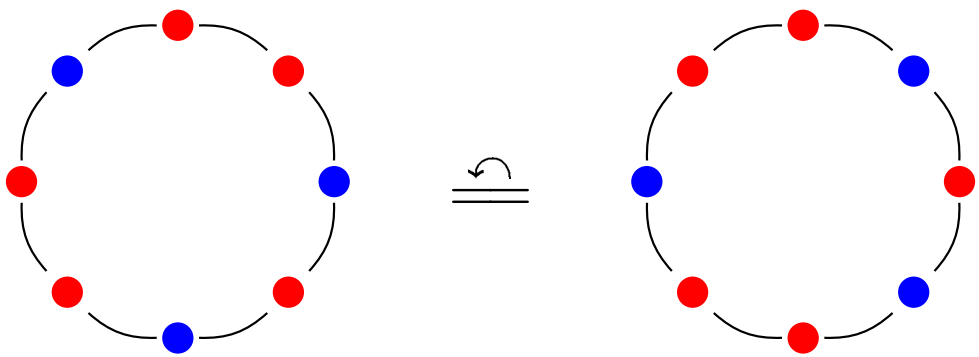
習題

把剩下的細節弄清楚！

Burnside's lemma

例題

用 M 種寶石可以做出多少 N 個寶石的項鍊，假設旋轉相同視為相同。



Burnside's lemma – 問題的數學描述

- 旋轉會構成一個群 $G \triangleq \langle g \rangle$。
- 物品（項鍊）會構成一個集合 X。
- 用 G 把 X 分門別類，寫作 X/G。

Burnside's lemma – 問題的數學描述

- 旋轉會構成一個群 $G \triangleq \langle g \rangle$。
- 物品（項鍊）會構成一個集合 X。
- 用 G 把 X 分門別類，寫作 X/G。

Burnside's lemma – 問題的數學描述

- 旋轉會構成一個群 $G \triangleq \langle g \rangle$。
- 物品（項鍊）會構成一個集合 X。
- 用 G 把 X 分門別類，寫作 X/G。

Burnside's lemma – 一些定義

定義

假設 X 是一個集合，我們說 G 透過一個運算 $\cdot$ 作用在 X 上，如果以下三點成立：

1. $g \cdot x \in X$。
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (hx)$。
3. 如果 1 是 G 的單位元，則 $1 \cdot x = x$。

Burnside's lemma – 一些定義

定義

假設 X 是一個集合，我們說 G 透過一個運算 $\cdot$ 作用在 X 上，如果以下三點成立：

1. $g \cdot x \in X$。
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (hx)$。
3. 如果 1 是 G 的單位元，則 $1 \cdot x = x$。

Burnside's lemma – 一些定義

定義

假設 X 是一個集合，我們說 G 透過一個運算 $\cdot$ 作用在 X 上，如果以下三點成立：

1. $g \cdot x \in X$。
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (hx)$。
3. 如果 1 是 G 的單位元，則 $1 \cdot x = x$。

Burnside's lemma – 一些定義

定義

假設 X 是一個集合，我們說 G 透過一個運算 $\cdot$ 作用在 X 上，如果以下三點成立：

1. $g \cdot x \in X$。
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (hx)$。
3. 如果 1 是 G 的單位元，則 $1 \cdot x = x$。

Burnside's lemma – 再一些定義

定義

1. $G_x \triangleq \{g \in G : gx = x\}$，也就是固定 x 下，所有不會動到 x 的作用。
2. $X^g \triangleq \{x \in X : gx = x\}$，也就是固定一個作用 g 下的**不動點**。
3. $Gx \triangleq \{gx : g \in G\}$，也被稱作是 x 在 G 下的**軌道**。
4. $X/G \triangleq \{Gx : x \in X\}$，也就是 X 在 G 下所有的軌道。

Burnside's lemma – 再一些定義

定義

1. $G_x \triangleq \{g \in G : gx = x\}$，也就是固定 x 下，所有不會動到 x 的作用。
2. $X^g \triangleq \{x \in X : gx = x\}$，也就是固定一個作用 g 下的**不動點**。
3. $Gx \triangleq \{gx : g \in G\}$，也被稱作是 x 在 G 下的**軌道**。
4. $X/G \triangleq \{Gx : x \in X\}$，也就是 X 在 G 下所有的軌道。

Burnside's lemma – 再一些定義

定義

1. $G_x \triangleq \{g \in G : gx = x\}$，也就是固定 x 下，所有不會動到 x 的作用。
2. $X^g \triangleq \{x \in X : gx = x\}$，也就是固定一個作用 g 下的**不動點**。
3. $Gx \triangleq \{gx : g \in G\}$，也被稱作是 x 在 G 下的**軌道**。
4. $X/G \triangleq \{Gx : x \in X\}$，也就是 X 在 G 下所有的軌道。

Burnside's lemma – 再一些定義

定義

1. $G_x \triangleq \{g \in G : gx = x\}$，也就是固定 x 下，所有不會動到 x 的作用。
2. $X^g \triangleq \{x \in X : gx = x\}$，也就是固定一個作用 g 下的**不動點**。
3. $Gx \triangleq \{gx : g \in G\}$，也被稱作是 x 在 G 下的**軌道**。
4. $X/G \triangleq \{Gx : x \in X\}$，也就是 X 在 G 下所有的軌道。

Burnside's lemma

定理 (Burnside's lemma)

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

也就是說把每一個旋轉下的不動點加起來，除以旋轉的數量，就是種類數！

Burnside's lemma

定理 (Burnside's lemma)

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

也就是說把每一個旋轉下的不動點加起來，除以旋轉的數量，就是種類數！

Burnside's lemma – 證明

證明：

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| = \frac{1}{|G|}\#\{(x,g)\mid x\in X, g\in G, xg=g\}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|G_x|$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}\frac{|G|}{|Gx|}$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{Gx\in X/G}\ \sum_{x\in Gx}\frac{1}{|Gx|} = \sum_{Gx\in X/G} 1$$

$$= |X/G|$$

Burnside's lemma – 證明

關鍵：

1. $|G| = |Gx|\,|G_x|$
2. $X = \bigsqcup_{Gx \in G/X} Gx$

Burnside's lemma – 應用

回到原本的例題，現在我們要算每個旋轉 g 下的不動點 X^g。

注意：不是只有 $\curvearrowleft$ 而已，有 $1, \curvearrowleft, \curvearrowleft^2, \cdots$。

問題

如果今天在平面上旋轉 $\pi/2$ 和對 x 軸鏡射要視為相同，要考慮哪些旋轉？

Burnside's lemma – 應用

回到原本的例題，現在我們要算每個旋轉 g 下的不動點 X^g。

注意：不是只有 $\curvearrowleft$ 而已，有 $1, \curvearrowleft, \curvearrowleft^2, \cdots$。

問題

如果今天在平面上旋轉 $\pi/2$ 和對 x 軸鏡射要視為相同，要考慮哪些旋轉？

Burnside's lemma – 應用

回到原本的例題，現在我們要算每個旋轉 g 下的不動點 X^g。

注意：不是只有 $\curvearrowleft$ 而已，有 $1, \curvearrowleft, \curvearrowleft^2, \cdots$。

問題

如果今天在平面上旋轉 $\pi/2$ 和對 x 軸鏡射要視為相同，要考慮哪些旋轉？

Burnside's lemma – 應用

哪些項鍊是旋轉 $\curvearrowleft^k$ 下的不動點？有幾個觀察：

1. 首先注意到 $X^{\curvearrowleft^k} = X^{\curvearrowleft^{\gcd(k,N)}}$

$k = 3$

$k = 9$

Figure: $n = 15$

Burnside's lemma – 應用

哪些項鍊是旋轉 $\curvearrowleft^k$ 下的不動點？有幾個觀察：

1. 首先注意到 $X^{\curvearrowleft^k} = X^{\curvearrowleft^{\gcd(k,N)}}$

$k = 3$

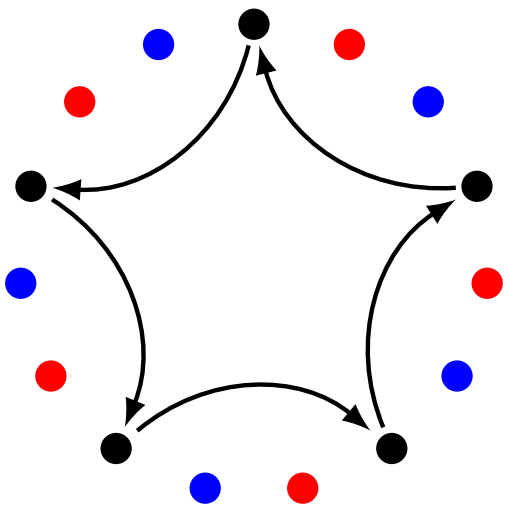
$k = 9$

Figure: $n = 15$

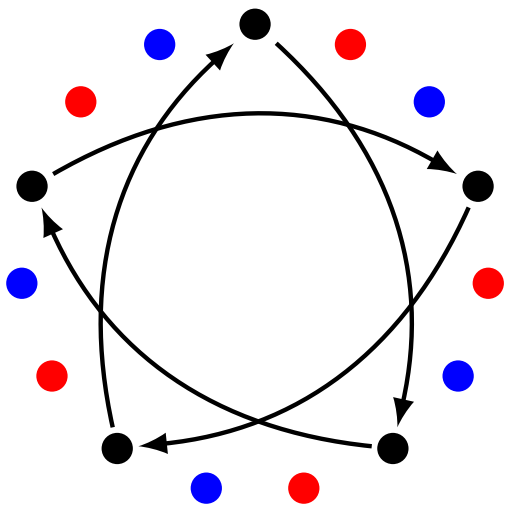
Burnside's lemma – 應用

哪些項鍊是旋轉 $\curvearrowleft^k$ 下的不動點？有幾個觀察：

1. 首先注意到 $X^{\curvearrowleft^k} = X^{\curvearrowleft^{\gcd(k,N)}}$



$k = 3$



$k = 9$

Figure: $n = 15$

Burnside's lemma – 應用

2. 如果 $d \triangleq \gcd(k, N)$，則

$$\left|X^{\curvearrowleft k}\right| = \left|X^{\curvearrowleft \gcd(k,N)}\right| = M^d$$

3. 用 Burnside's lemma 得出

$$|X/G| = \sum_{d|N} \#\{k \mid \gcd(k, N) = d\} M^d$$

問題

對於 $d \mid N$ 的 d，$\#\{k \mid \gcd(k, N) = d\}$ 如何求？

Burnside's lemma – 應用

2. 如果 $d \triangleq \gcd(k, N)$，則

$$\left|X^{\curvearrowleft k}\right| = \left|X^{\curvearrowleft \gcd(k,N)}\right| = M^d$$

3. 用 Burnside's lemma 得出

$$|X/G| = \sum_{d|N} \#\{k \mid \gcd(k, N) = d\} M^d$$

問題

對於 $d \mid N$ 的 d，$\#\{k \mid \gcd(k, N) = d\}$ 如何求？

Burnside's lemma – 應用

因為 $d \mid N$，

$$\#\{k \mid \gcd(k, N) = d\} = \#\{k \mid \gcd(k, N/d) = 1\} = \varphi(N/d)$$

總結答案：

$$\sum_{d \mid N} \varphi(N/d) M^d$$

Burnside's lemma – 應用

因為 $d \mid N$，

$$\#\{k \mid \gcd(k, N) = d\} = \#\{k \mid \gcd(k, N/d) = 1\} = \varphi(N/d)$$

總結答案：

$$\sum_{d \mid N} \varphi(N/d) M^d$$

C++17 Features 分享！

C++17

- Class template deduction

```
pair pr("hao"s, 123);
```

- Structure bindings

```
auto [a, b] = pair("hao"s, 123);
```

- Initializers in `if`

```
if (int x = fun(); x > 3) { ... }
```

- `std::clamp`

```
assert(clamp(a, low, high) == min(max(a, low), high));
```

C++17

- Class template deduction

```
pair pr("hao"s, 123);
```

- Structure bindings

```
auto [a, b] = pair("hao"s, 123);
```

- Initializers in `if`

```
if (int x = fun(); x > 3) { ... }
```

- `std::clamp`

```
assert(clamp(a, low, high) == min(max(a, low), high));
```

C++17

- Class template deduction

```
pair pr("hao"s, 123);
```

- Structure bindings

```
auto [a, b] = pair("hao"s, 123);
```

- Initializers in `if`

```
if (int x = fun(); x > 3) { ... }
```

- `std::clamp`

```
assert(clamp(a, low, high) == min(max(a, low), high));
```

C++17

- Class template deduction

```
pair pr("hao"s, 123);
```

- Structure bindings

```
auto [a, b] = pair("hao"s, 123);
```

- Initializers in `if`

```
if (int x = fun(); x > 3) { ... }
```

- `std::clamp`

```
assert(clamp(a, low, high) == min(max(a, low), high));
```

~~組合賽局~~ 線性代數

我們先看一題遊戲題。

例題 (Takeover Wars, ACM-ICPC World Final pL)

兩個人玩一個遊戲，A 有 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 個數字，B 有 $b_1, b_2, \cdots, b_h$ 個數字。由 A 先開始行動，每次行動可以選一個進行：

1. 融合：選兩個自己的數字 x, y，把 x, y 拿掉換成 $x + y$。
2. 吃掉：選一個自己的數字 x 和對方的數字 y，如果 $x > y$，可以把 y 拿掉。
3. 喵 PASS ～ヽ(`・д・´)

誰沒有數字了就輸了，問誰會贏？$(k, h \leq 10^5)$

有些題目沒想出來看到結論會氣死⋯

~~組合賽局~~ 線性代數

我們先看一題遊戲題。

例題 (Takeover Wars, ACM-ICPC World Final pL)

兩個人玩一個遊戲，A 有 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 個數字，B 有 $b_1, b_2, \cdots, b_h$ 個數字。由 A 先開始行動，每次行動可以選一個進行：

1. 融合：選兩個自己的數字 x, y，把 x, y 拿掉換成 $x + y$。
2. 吃掉：選一個自己的數字 x 和對方的數字 y，如果 $x > y$，可以把 y 拿掉。
3. 喵 PASS ～ヽ(`・д・´)

誰沒有數字了就輸了，問誰會贏？$(k, h \leq 10^5)$

有些題目沒想出來看到結論會氣死⋯

線性代數 – 例題

再看一題遊戲題。

例題 (Game on Bipartite Graph, 2015-2016 Saratov SU Contest)

給一個二分圖 G 和一個起點 v，兩人玩一個遊戲：輪流選一條和現在的點 v 相鄰的邊 (v, u)，並沿著這條邊走到 u。走過的邊就不能再走了，誰沒有辦法再走就輸了。問你先手贏還是後手贏。($|V| \leq 100$)

線性代數 – 例題

再看一題遊戲題。

例題 (Game on Bipartite Graph, 2015-2016 Saratov SU Contest)

給一個二分圖 G 和一個起點 v，兩人玩一個遊戲：輪流選一條和現在的點 v 相鄰的邊 (v, u)，並沿著這條邊走到 u。走過的邊就不能再走了，誰沒有辦法再走就輸了。問你先手贏還是後手贏。$(|V| \leq 100)$

線性代數 – 例題

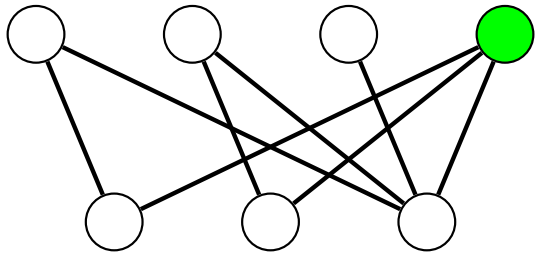
假設二分圖的兩個點集是 X, Y 每個人在他的回合一定是固定從某個點集出發。

想一想後手什麼時候會贏？

線性代數 – 例題

假設二分圖的兩個點集是 X, Y 每個人在他的回合一定是固定從某個點集出發。

想一想後手什麼時候會贏？



線性代數 – 例題

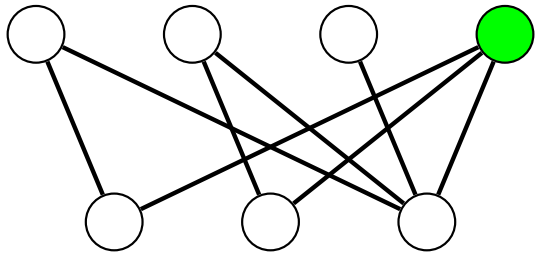
假設二分圖的兩個點集是 X, Y 每個人在他的回合一定是固定從某個點集出發。不妨假設先手出發的是 X。

想一想後手什麼時候會贏？

線性代數 – 例題

假設二分圖的兩個點集是 X, Y 每個人在他的回合一定是固定從某個點集出發。不妨假設先手出發的是 X。

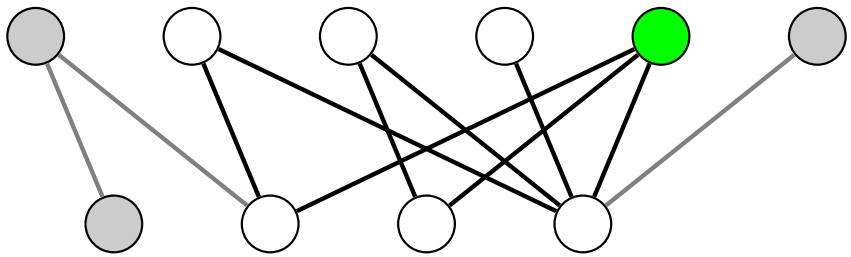
想一想後手什麼時候會贏？



線性代數 – 例題

假設二分圖的兩個點集是 X, Y 每個人在他的回合一定是固定從某個點集出發。不妨假設先手出發的是 X。

想一想後手什麼時候會贏？



線性代數 – 例題

現在對於 X 的第 i 個點，如果他連到下面 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 個點，就令 $v_i = \sum 2^{i_t}$。

從剛才的討論可以知道如果存在 $v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_m}$ 使得

$$v_s \in \{j_t\} \quad \text{且} \quad v_{i_1} \oplus v_{i_2} \oplus \ldots \oplus v_{i_m}$$

則後手會贏。

問題

1. 怎麼找 $j_1, j_2, \cdots, j_m$？
2. 這個條件是否也是**必要條件**？

線性代數 – 例題

現在對於 X 的第 i 個點，如果他連到下面 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 個點，就令 $v_i = \sum 2^{i_t}$。

從剛才的討論可以知道如果存在 $v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_m}$ 使得

$$v_s \in \{j_t\} \quad \text{且} \quad v_{i_1} \oplus v_{i_2} \oplus \ldots \oplus v_{i_m}$$

則後手會贏。

問題

1. 怎麼找 $j_1, j_2, \cdots, j_m$？
2. 這個條件是否也是**必要條件**？

線性代數 – 例題

現在對於 X 的第 i 個點，如果他連到下面 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 個點，就令 $v_i = \sum 2^{i_t}$。

從剛才的討論可以知道如果存在 $v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_m}$ 使得

$$v_s \in \{j_t\} \quad \text{且} \quad v_{i_1} \oplus v_{i_2} \oplus \ldots \oplus v_{i_m}$$

則後手會贏。

問題

1. 怎麼找 $j_1, j_2, \cdots, j_m$？
2. 這個條件是否也是**必要條件**？

線性代數 – 例題

這些 v_i 其實可以看作是 $\mathbb{F}_2^n$ 向量空間中的向量，其中 $n \triangleq |Y|$。
即 $1 \triangleq (1, 0, 0, \cdots, 0)$, $2 \triangleq (0, 1, 0, \cdots, 0)$ 等等。

而條件也可以改寫成找到 $\{j_t\}$, $v_s \neq j_t$ 使得

$$v_s = v_{j_1} + v_{j_2} + \ldots + v_{j_m}$$

在**向量空間**中我們會問更一般的問題：解

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m$$

線性代數 – 例題

這些 v_i 其實可以看作是 $\mathbb{F}_2^n$ 向量空間中的向量，其中 $n \triangleq |Y|$。
即 $1 \triangleq (1, 0, 0, \cdots, 0)$, $2 \triangleq (0, 1, 0, \cdots, 0)$ 等等。

而條件也可以改寫成找到 $\{j_t\}$, $v_s \neq j_t$ 使得

$$v_s = v_{j_1} + v_{j_2} + \ldots + v_{j_m}$$

在**向量空間**中我們會問更一般的問題：解

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m$$

線性代數 – 例題

這些 v_i 其實可以看作是 $\mathbb{F}_2^n$ 向量空間中的向量，其中 $n \triangleq |Y|$。
即 $1 \triangleq (1, 0, 0, \cdots, 0)$, $2 \triangleq (0, 1, 0, \cdots, 0)$ 等等。

而條件也可以改寫成找到 $\{j_t\}$, $v_s \neq j_t$ 使得

$$v_s = v_{j_1} + v_{j_2} + \ldots + v_{j_m}$$

在**向量空間**中我們會問更一般的問題：解

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m$$

線性代數 – 例題

其實就是

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \end{bmatrix} \boldsymbol{a}$$

因此追根到底就是要

問題

解 $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$。

這有一個大家都知道的高斯消去法。

線性代數 – 例題

其實就是

$$u = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} a$$

因此追根到底就是要

問題

解 $b = Ax$。

這有一個大家都知道的高斯消去法。

線性代數 – 例題

其實就是

$$u = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} a$$

因此追根到底就是要

問題

解 $b = Ax$。

這有一個大家都知道的高斯消去法。

線性代數 – 高斯消去法

```
void Gauss(int n, int **A) {
  for (int i=0; i<n; i++) {
    for (int j=i; j<n; j++) {
      if (abs(A[j][i]) > EPS) {
        swap(A[j], A[i]);
        break;
      }
      if (j == n-1) goto loop_end;
    }
    for (int j=0; j<n; j++) {
      if (j == i) continue;
      double r = A[j][i] / A[i][i];
      for (int k=i; k<n; k++) {
        A[j][k] -= A[i][k] * r;
      }
    }
loop_end: ;
  }
}
```

線性代數 – 高斯消去法

高斯消去法有很多應用：

1. 解 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$。
2. 計算矩陣 A 的**維度**。
3. 計算 A^{-1}。
4. 計算 $\det A$。

線性代數 – 高斯消去法

高斯消去法有很多應用：

1. 解 $Ax = b$。
2. 計算矩陣 A 的**維度**。
3. 計算 A^{-1}。
4. 計算 $\det A$。

線性代數 – 高斯消去法

高斯消去法有很多應用：

1. 解 $Ax = b$。
2. 計算矩陣 A 的**維度**。
3. 計算 A^{-1}。
4. 計算 $\det A$。

線性代數 – 高斯消去法

高斯消去法有很多應用：

1. 解 $Ax = b$。
2. 計算矩陣 A 的**維度**。
3. 計算 A^{-1}。
4. 計算 $\det A$。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{-1}{\underset{+}{\rightleftarrows}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mid \times(-1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{+}{\underset{-2}{\rightleftarrows}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

線性代數 – 高斯消去法

高斯消去法有很多應用：

1. 解 $Ax = b$。
2. 計算矩陣 A 的**維度**。
3. 計算 A^{-1}。
4. 計算 $\det A$。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{-1}{\underset{+}{\rightleftarrows}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mid \times(-1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{+}{\underset{-2}{\rightleftarrows}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

線性代數 – 高斯消去法

高斯消去法有很多應用：

1. 解 $Ax = b$。
2. 計算矩陣 A 的**維度**。
3. 計算 A^{-1}。
4. 計算 $\det A$。

線性代數

我們只剩下最後一個問題：為何剛剛那個條件是必要條件。

定義

對於向量 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ ，

1. 如果 $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0 \implies a_i = 0, \forall i$ ，也就是沒有一個向量可以用其他的向量「湊出來」，我們就說這些向量**線性獨立**。
2. 如果所有 V 裡的其他向量 v 都可以寫成 $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$ ，我們就說這些向量是 V 的一個**生成集**。
3. 如果這些向量同時是線性獨立並且生成 V ，我們就說這些向量是 V 的一個**基底**。

線性代數

我們只剩下最後一個問題：為何剛剛那個條件是必要條件。

定義

對於向量 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，

1. 如果 $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0 \implies a_i = 0, \forall i$，也就是沒有一個向量可以用其他的向量「湊出來」，我們就說這些向量**線性獨立**。
2. 如果所有 V 裡的其他向量 v 都可以寫成 $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$，我們就說這些向量是 V 的一個**生成集**。
3. 如果這些向量同時是線性獨立並且生成 V，我們就說這些向量是 V 的一個**基底**。

定理

一個向量空間中，任何基底的大小是固定的。因此這個向量空間的**維度**就定義成任一個基底的大小。

假設

$$v_s = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m$$

無解，就表示

$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m & v_s \end{bmatrix}$ 的維度比 $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}$ 多 1。

定理

一個向量空間中，任何基底的大小是固定的。因此這個向量空間的**維度**就定義成任一個基底的大小。

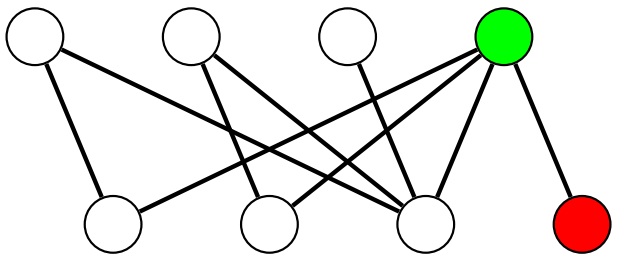
假設

$$\boldsymbol{v}_s = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_m\boldsymbol{v}_m$$

無解，就表示 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m & \boldsymbol{v}_s \end{bmatrix}$ 的維度比 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \end{bmatrix}$ 多 1。

線性代數

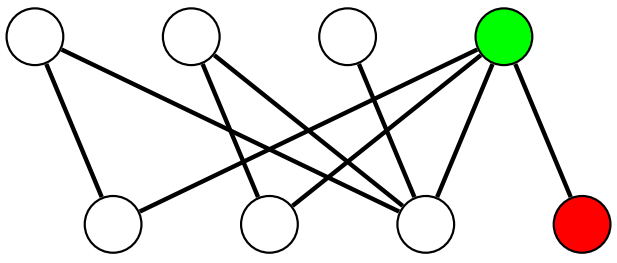
現在把圖上增加一個新點當起點，並且只連到本來的起點，然後先後手互換。



會對應到矩陣 $\begin{bmatrix} | & | & & | & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m & v_s \\ | & | & & | & | \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$

線性代數

現在把圖上增加一個新點當起點，並且只連到本來的起點，然後先後手互換。



會對應到矩陣 $\begin{bmatrix} | & | & & | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m & \boldsymbol{v}_s \\ | & | & & | & | \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$

線性代數

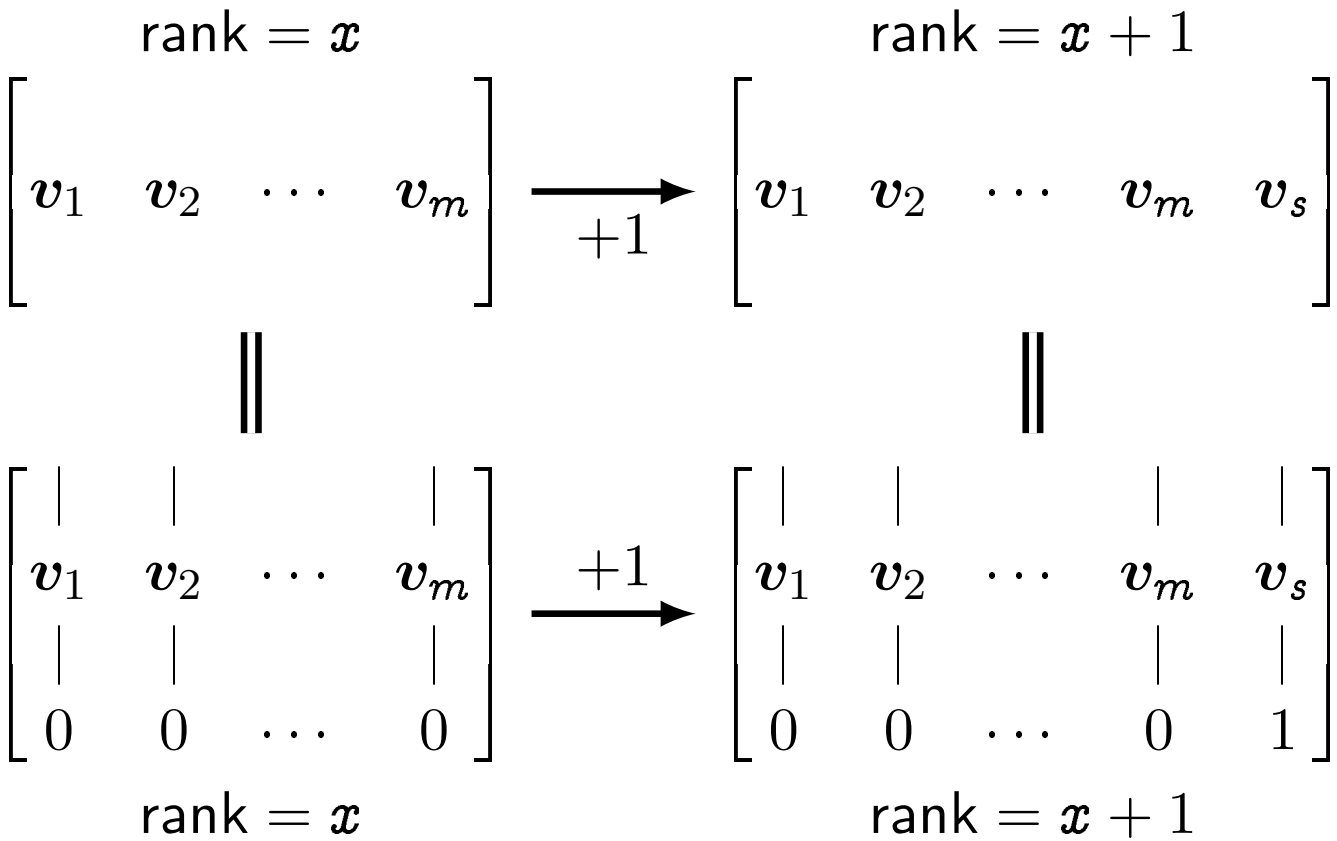
定理

用 $\mathrm{rank}(A)$ 表示矩陣 A 的維度，則 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^{\mathsf{T}})$。

線性代數

定理

用 $\mathrm{rank}(A)$ 表示矩陣 A 的維度，則 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^{\mathsf{T}})$。



加了 $(0, 0, \cdots, 0, 1)$ 以後 rank 不變，表示 $(0, 0, \cdots, 0, 1)$ 可被其他列向量線性組合出 $\Longrightarrow$ 原本的先手贏。

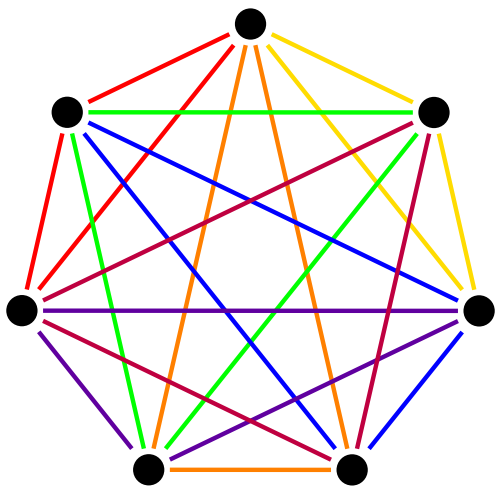
線性代數

加了 $(0, 0, \cdots, 0, 1)$ 以後 rank 不變，表示 $(0, 0, \cdots, 0, 1)$ 可被其他列向量線性組合出 $\Longrightarrow$ 原本的先手贏。

Others

例題 (均衡忍者出任務, 2015 ioi-camp)

請把 K_n 分解成互斥的三角形，其中 $n = 2^k - 1$。



Others

如果可以找到函數 $f(x,y)$ 使得 $x \neq y \implies f(x,y) \neq x,y$ 且 $f(x,f(x,y)) = y,\ f(f(x,y),y) = x$，我們就做完了！

Others – Prüfer sequence

例題

求 n 個有編號的點可以形成多少種不同的樹。

答案是 n^{n-2}。

Others – Prüfer sequence

例題

求 n 個有編號的點可以形成多少種不同的樹。

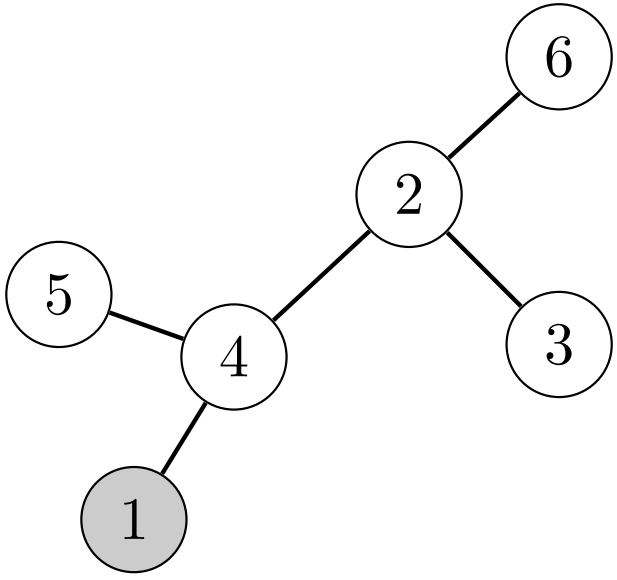
答案是 n^{n-2}。

Others – Prüfer sequence

每次找葉子中編號最小的點 u，假設他連出去的邊是 (u, v)，就記下 v 的編號，並把 v 和邊 (u, v) 從圖上刪除。重複直到圖上就只剩一個點了。

Others – Prüfer sequence

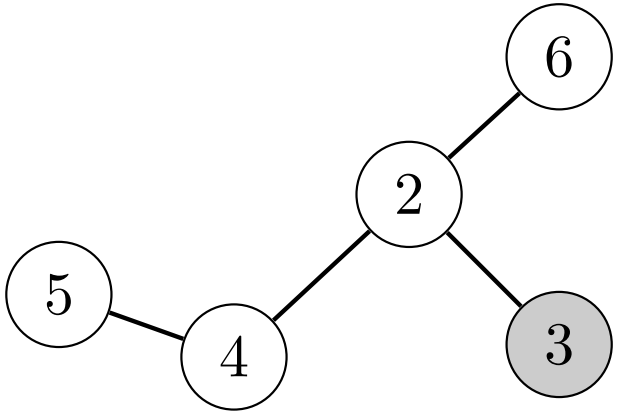
每次找葉子中編號最小的點 u，假設他連出去的邊是 (u, v)，就記下 v 的編號，並把 v 和邊 (u, v) 從圖上刪除。重複直到圖上就只剩一個點了。



4

Others – Prüfer sequence

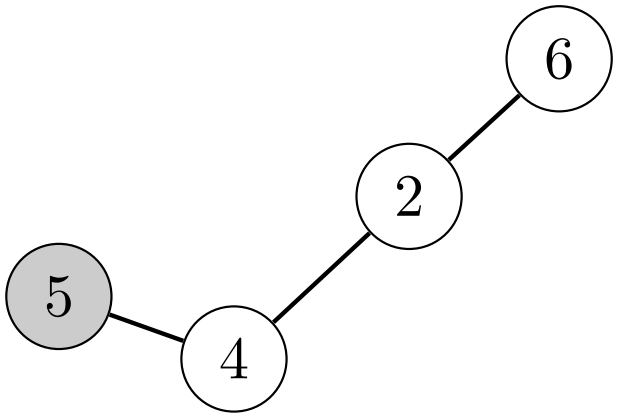
每次找葉子中編號最小的點 u，假設他連出去的邊是 (u, v)，就記下 v 的編號，並把 v 和邊 (u, v) 從圖上刪除。重複直到圖上就只剩一個點了。



$4 \to 2$

Others – Prüfer sequence

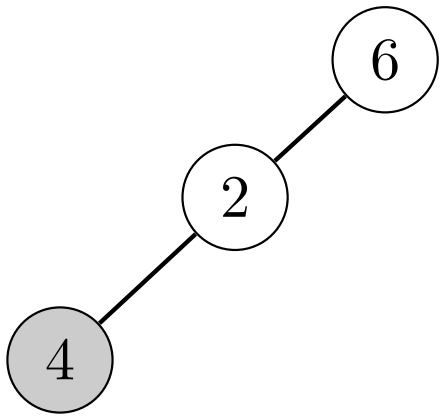
每次找葉子中編號最小的點 u，假設他連出去的邊是 (u, v)，就記下 v 的編號，並把 v 和邊 (u, v) 從圖上刪除。重複直到圖上就只剩一個點了。



$$4 \to 2 \to 4$$

Others – Prüfer sequence

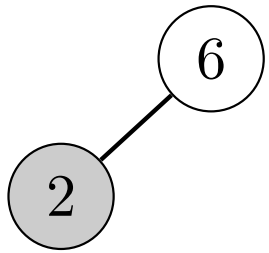
每次找葉子中編號最小的點 u，假設他連出去的邊是 (u, v)，就記下 v 的編號，並把 v 和邊 (u, v) 從圖上刪除。重複直到圖上就只剩一個點了。



$$4 \to 2 \to 4 \to 2$$

Others – Prüfer sequence

每次找葉子中編號最小的點 u，假設他連出去的邊是 (u, v)，就記下 v 的編號，並把 v 和邊 (u, v) 從圖上刪除。重複直到圖上就只剩一個點了。

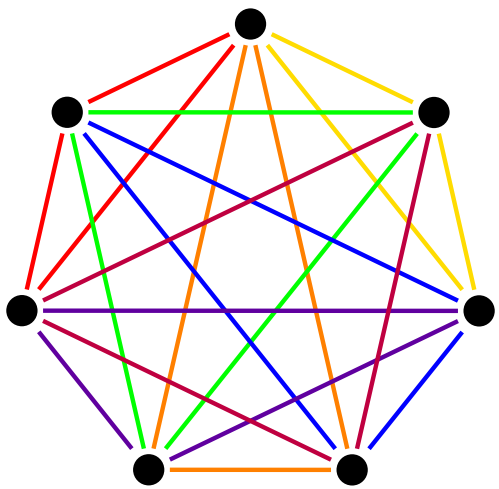


$$4 \to 2 \to 4 \to 2 \to 6$$

Others – 構造

例題 (均衡忍者出任務, 2015 ioi-camp)

請把 K_n 分解成互斥的三角形，其中 $n = 2^k - 1$。



Others – 構造

如果可以找到函數 $f(x,y)$ 使得 $x \neq y \implies f(x,y) \neq x,y$ 且 $f(x,f(x,y)) = y,\ f(f(x,y),y) = x$，我們就做完了！

事實上，只要 $n \equiv 1,3 \pmod 6$ 就會有解！

Others – 構造

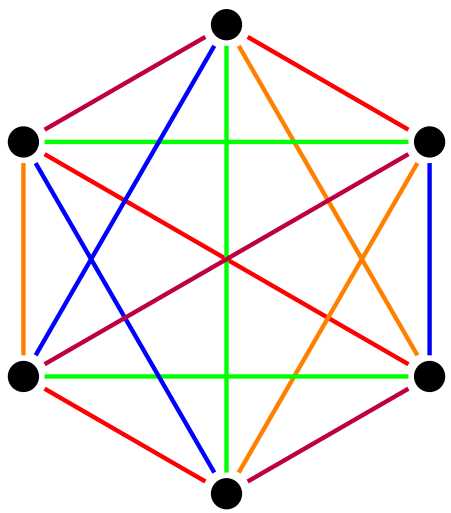
如果可以找到函數 $f(x,y)$ 使得 $x \neq y \implies f(x,y) \neq x,y$ 且 $f(x,f(x,y)) = y,\ f(f(x,y),y) = x$，我們就做完了！

事實上，只要 $n \equiv 1,3 \pmod 6$ 就會有解！

Others – 構造

例題 (Graph Factorization, ASC 35 pF)

請把 K_{2n} 分解成 $2n-1$ 個互斥的完美匹配。



Others – 機率

例題 (Graph Game, Codeforces 235D)

現在有一個遊戲：一開始的分數是 0，並且有一個 n 個點的樹，每次從剩下的點中隨機且等機率的選出一個點 v，並把分數加上 v 所在的連通塊的大小，且把 v 和與 v 相鄰的邊全部刪掉。一直進行到圖上沒有點為止，問你得到的分數的期望值。

機率有關的題目通常會玩一個梗：

引理

$$\mathbf{E}[X+Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$$

Others – 機率

例題 (Graph Game, Codeforces 235D)

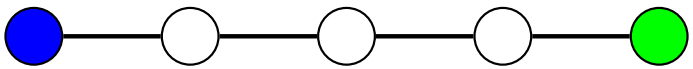
現在有一個遊戲：一開始的分數是 0，並且有一個 n 個點的樹，每次從剩下的點中隨機且等機率的選出一個點 v，並把分數加上 v 所在的連通塊的大小，且把 v 和與 v 相鄰的邊全部刪掉。一直進行到圖上沒有點為止，問你得到的分數的期望值。

機率有關的題目通常會玩一個梗：

引理

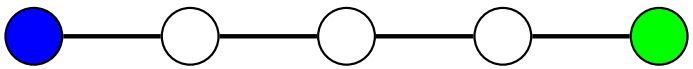
$$\mathbf{E}[X+Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$$

Others

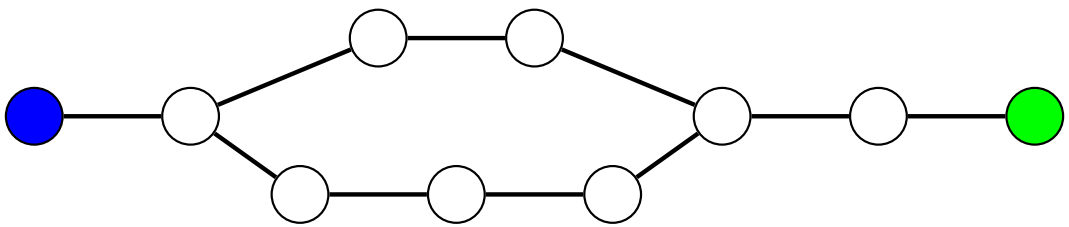


不過原本的題目其實是一棵水母。

Others



不過原本的題目其實是一棵水母。



Others

例題

給你許多點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$，請找一個線性函數 f 使得 $\sum (f(x_i) - y_i)^2$ 最小。

例題

給你許多點 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，請找一條線 l 使得 $\sum d(x_i, l)^2$ 最小。

Others

例題

給你許多點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$，請找一個線性函數 f 使得 $\sum (f(x_i) - y_i)^2$ 最小。

例題

給你許多點 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，請找一條線 l 使得 $\sum d(x_i, l)^2$ 最小。