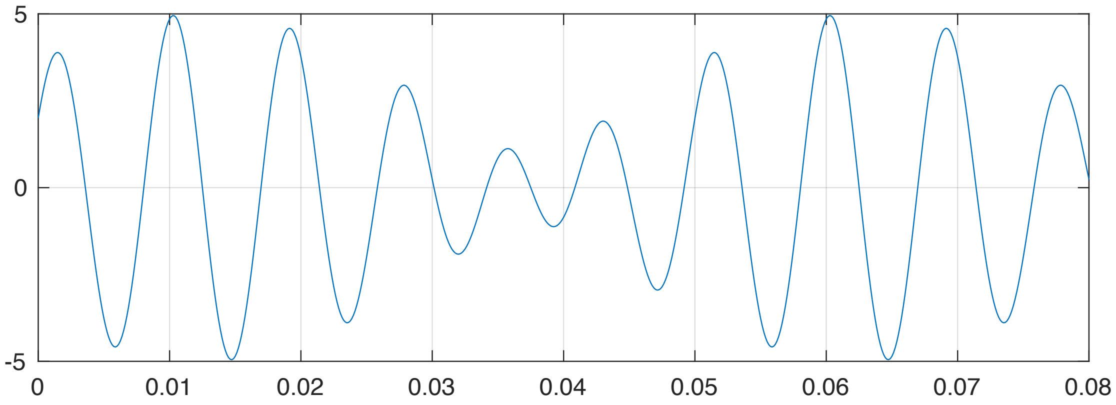
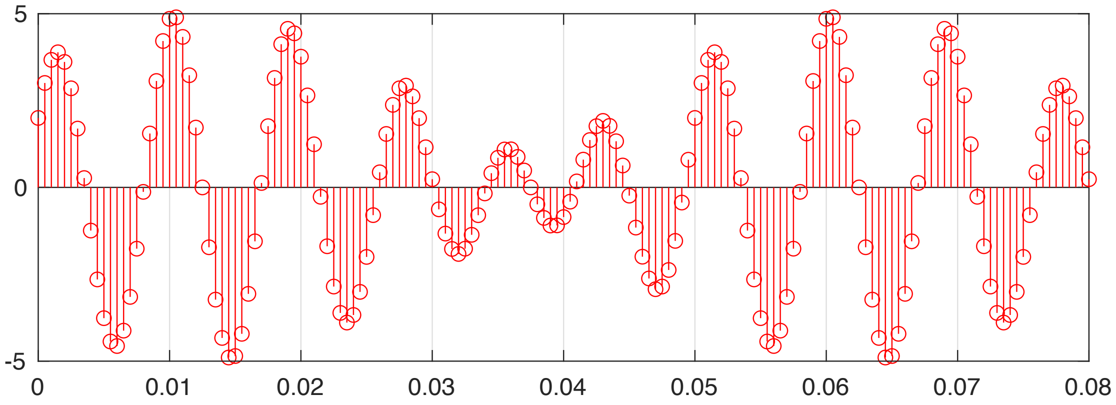
通訊實驗

第五組

電機112 林珮玉 E24084096
航太112 楊秉融 F44086181

步驟一





1. 開啟 Matlab 主程式並打開程式 example_1.m
2. 產生一波形 $x_1(t) = 2\cos(200\pi t) + 3\sin(240\pi t)$
3. 設定取樣頻率 f_s 為 2 kHz

   令 $t = \dfrac{1}{2000}n$ 代入 $x_1(t)$

   得 $y_1(n) = 2\cos(\dfrac{1}{10}\pi n) + 3\sin(\dfrac{3}{25}\pi n)$
4. 觀察原本訊號 $x_1(t)$ 和取樣後訊號 $y_1(n)$ 的相關性，並描述之。(能否以取樣定理解釋? 滿足取樣定理嗎?)

與預期結果相同。由取樣定理 $f_s \geq 2f_m$ 可知，

考慮有限頻寬的信號，至少需要其兩倍頻寬以上的

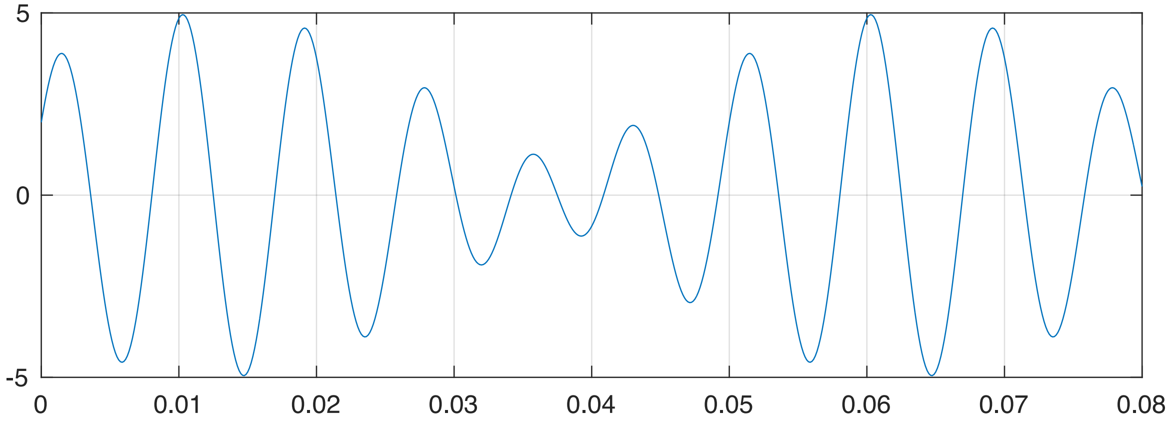
取樣頻率，才能進行有效取樣。

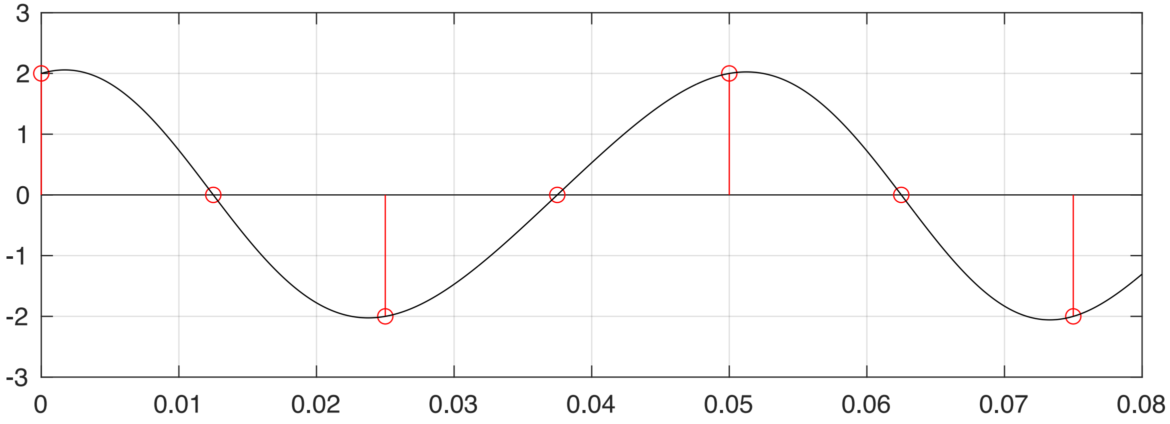
此題取樣頻率$f_s = 2000 \geq 2 * f_m = 240$。

故$y_1(n) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi n}{25}\right)$ 符合取樣定理，

可正確取樣還原訊號。

步驟二





1. 利用步驟一產生的波形 $x_1(t) = 2\cos(200\pi t) + 3\sin(240\pi t)$

2. 設定取樣頻率 f_s 為 80 Hz

   令 $t = \frac{1}{80} n$ 代入 $x_1(t)$

   得 $x_1(n) = 2\cos(\frac{5}{2}\pi n) + 3\sin(3\pi n) = 2\cos(\frac{1}{2}\pi n) + 3\sin(\pi n)$

3. 畫出根據 $x_1(n)$ 重建之訊號，觀察原本訊號 $x_1(t)$ 和重建後之訊號的相關性並描述之。(能否以取樣定理解釋? 滿足取樣定理嗎?)

與預期結果相同。由取樣定理 $f_s \geq 2f_m$ 可知，

考慮有限頻寬的信號，至少需要其兩倍頻寬以上的

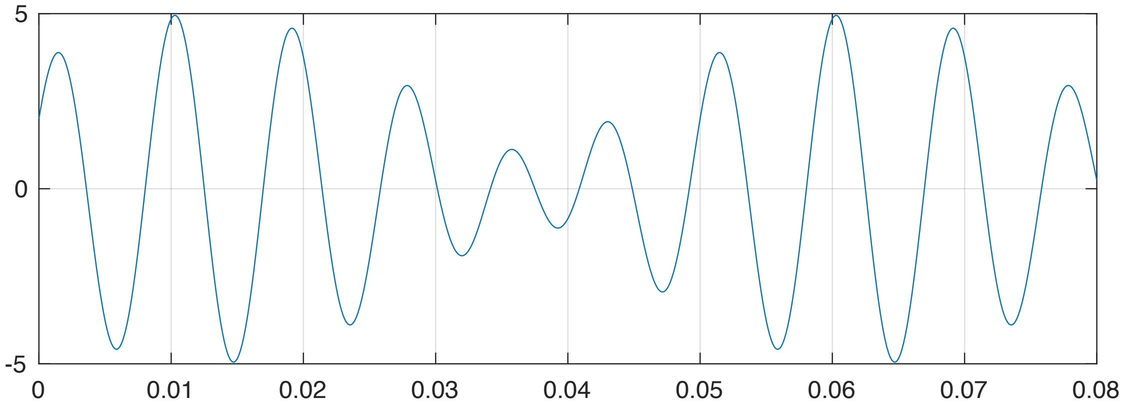
取樣頻率，才能進行有效取樣。

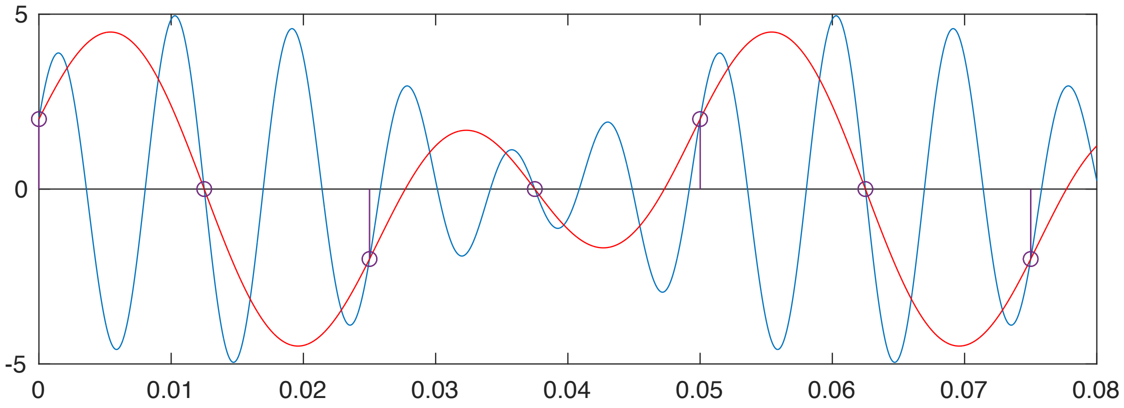
此題取樣頻率 $f_s = 80 \ \leq 2 * f_m = 240$。

故 $x_1(n) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 3\sin(\pi n)$ 不符合取樣定理，

無法正確取樣還原訊號。

步驟三





1. 開啟 Matlab 主程式並打開程式 example_2.m
2. 利用步驟一產生的波形 $x_1(t) = 2\cos(200\pi t) + 3\sin(240\pi t)$
3. 產生另一波形 $x_2(t) = 2\cos(40\pi t) + 3\sin(80\pi t)$
4. 設定取樣頻率 f_s 為 80 Hz

   令 $t = \frac{1}{80}n$ 分別代入 $x_1(t)$、$x_2(t)$得到 $x_1(n)$、$x_2(n)$
5. 觀察 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的關連，並描述之。請以取樣定理解釋之。

與預期結果相同。已知當取樣頻率$f_2 = f_1 + mf_m$

當$m \in \mathrm{Z}$，會因為贗頻效應無法分辨訊號。

此題$f_2 = (200,240) = 20$, $f_1 = (40,80) = 20$

符合當 $m = 0$, $f_2 = f_1 + mf_m$

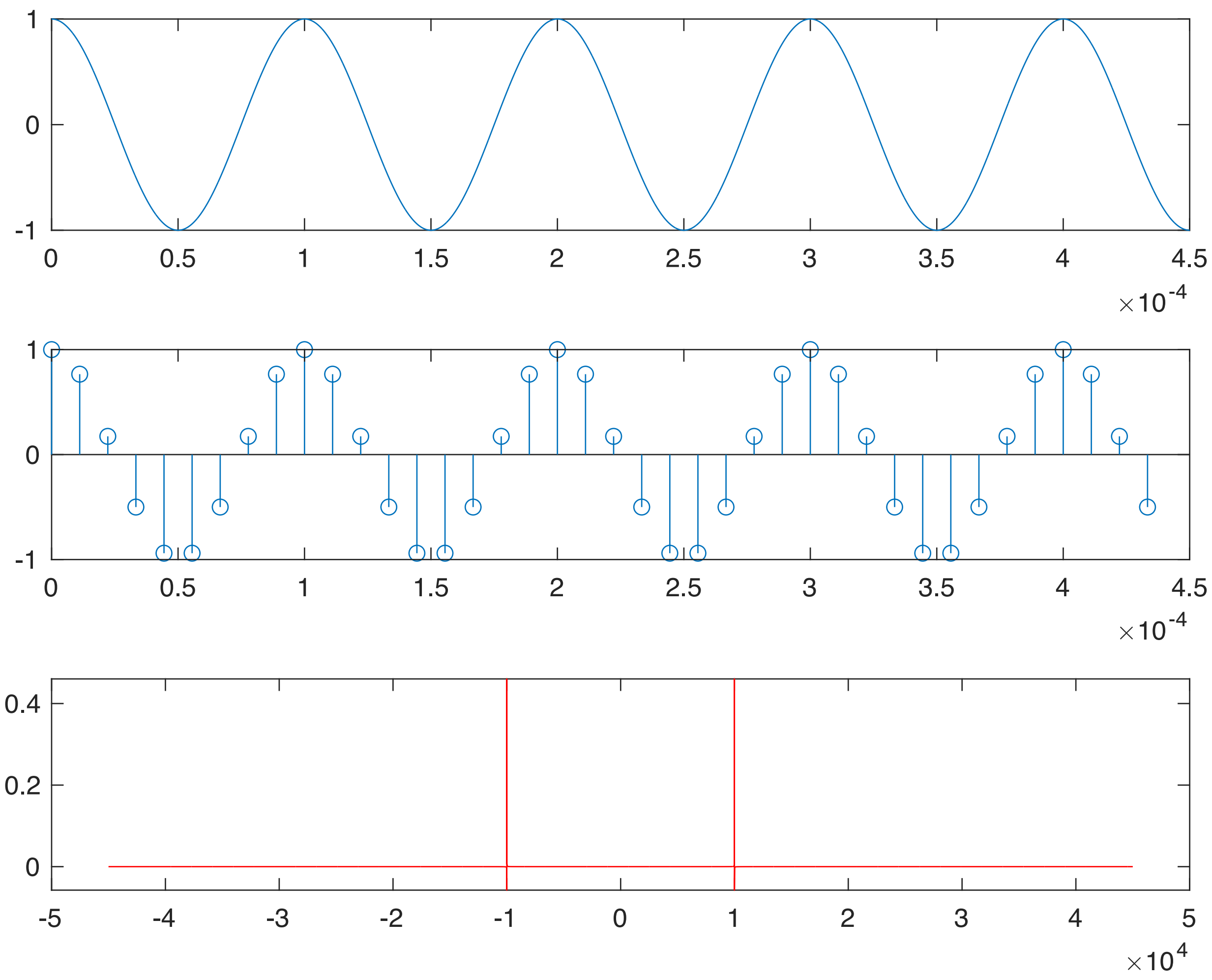
故$y_1(n) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 3\sin(\pi n)$ ，造成「 贗頻效應 」

無法正確取樣還原訊號。

補充： $f_s = 80 \leq 2f_m = 2 * 120$也會因為不符合取樣定理，

無法正確還原訊號

步驟四



1. 開啟 Matlab 主程式並打開程式 example_3.m
2. 產生一波形 $x_1(t) = \cos(2\pi f_m t)$，$f_m = 10$ kHz
3. 設定取樣頻率 f_s 為 90 kHz 得到 $x_1(n)$
4. 利用 Matlab 內建程式 fft 計算出 $x_1(n)$的頻譜 $X_1(f)$
5. 觀察頻譜 $X_1(f)$ 和訊號 $x_1(t)$的實際頻譜是否符合 。
   Hint: $x_1(t)$的實際頻譜乃指其Fourier transform的數學式所表示之理論值；而fft只是其數值運算得到之近似值。

與預期結果相同。

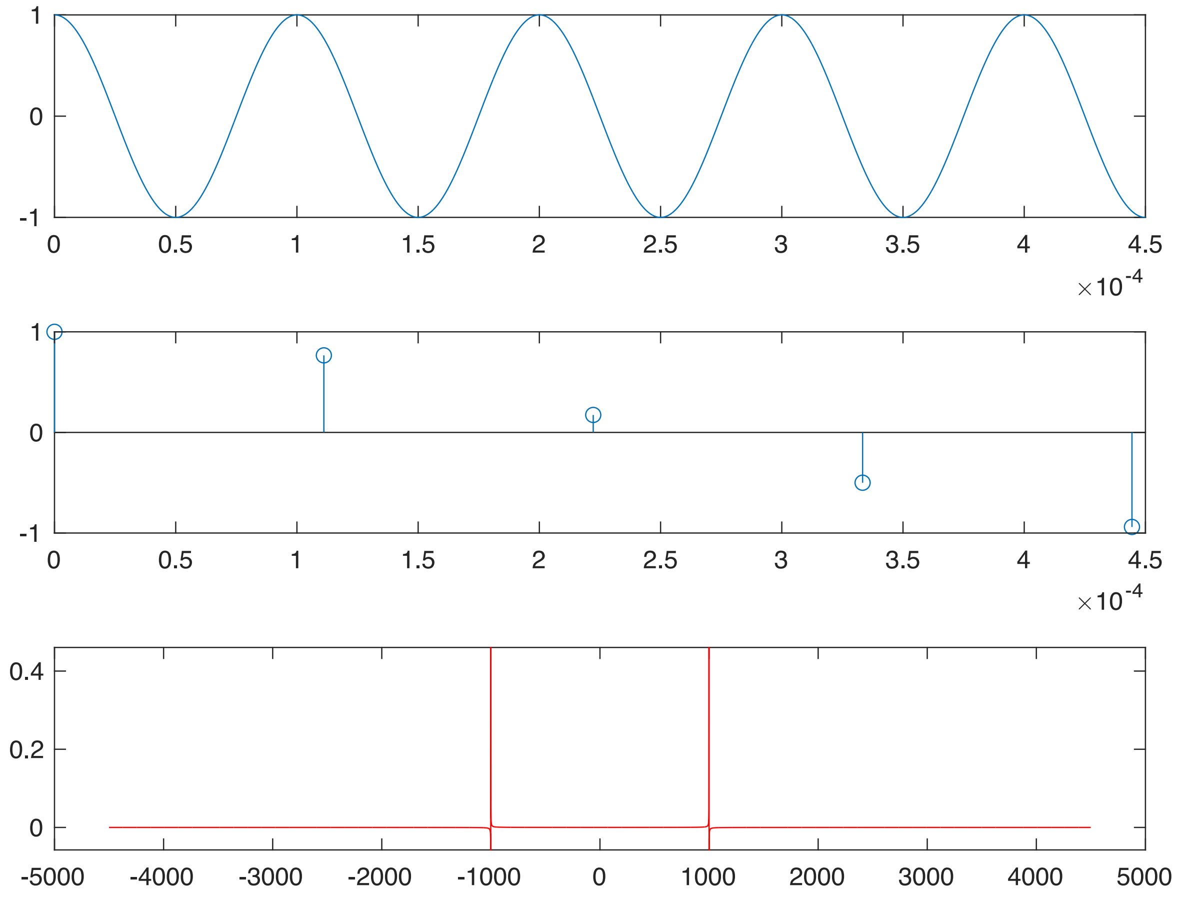
根據取樣定理 $f_s \geq 2f_m$，經計算得知此題符合取樣定理。

原本實際訊號$x_1(t)$的實際頻譜，透過數學推導後其頻譜

$$X_1(f) = \frac{1}{2}\{\delta(f-10000) + \delta(f+10000)\}$$

可知在 $\pm 10kHz$ 各有一個脈衝波。從圖中圖形得知其頻譜與實際頻譜相同。

步驟五

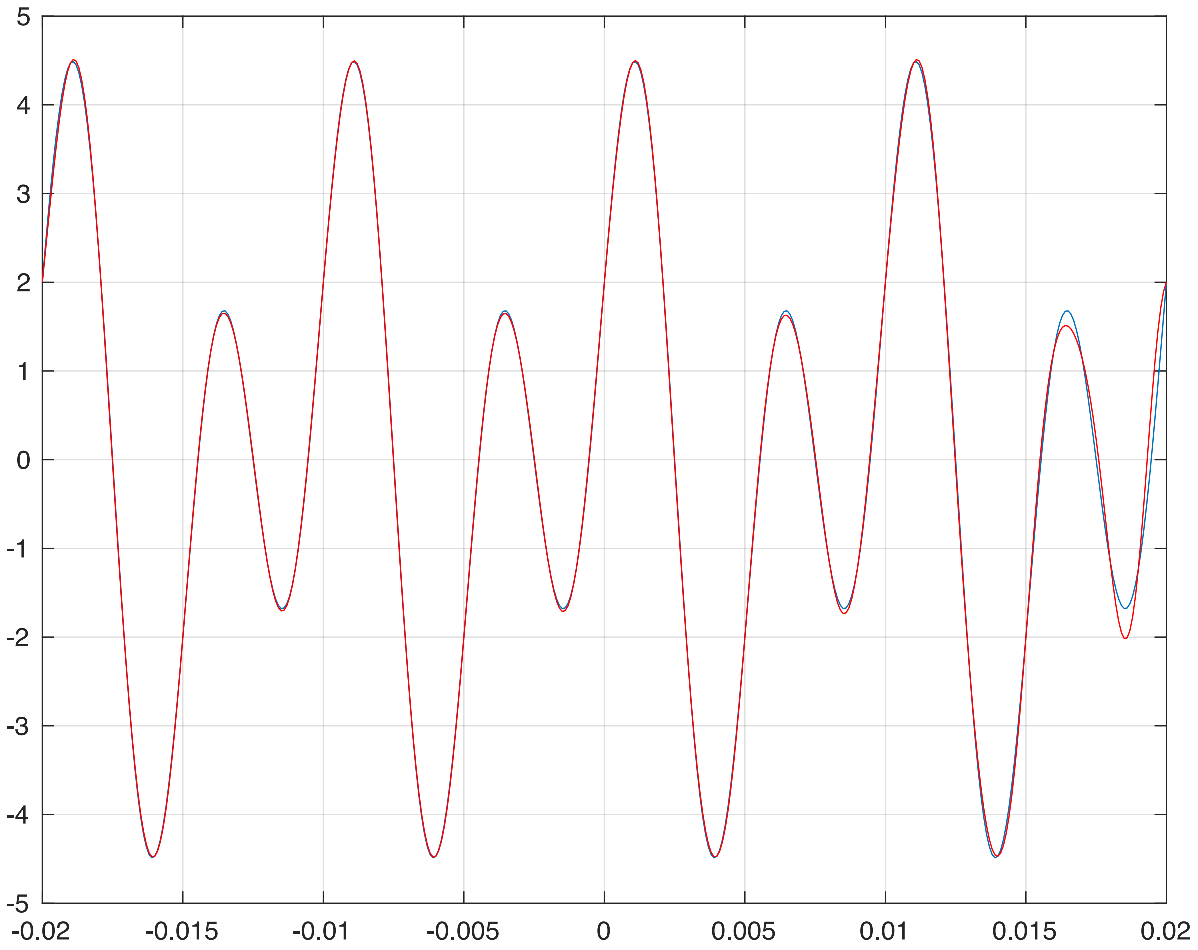


1. 利用步驟四產生的波形 $x_1(t)=\cos(2\pi f_m t)$，$f_m=10\ \text{kHz}$
2. 設定取樣頻率 f_s 為 9 kHz 得到 $x_2(n)$
3. 利用 Matlab 內建程式 fft 計算出 $x_2(n)$的頻譜 $X_2(f)$
4. 觀察頻譜 $X_2(f)$ 和訊號 $x_1(t)$的實際頻譜是否符合。

與預期結果相同。

已知取樣定理 $f_s \geq 2f_m$，因此此題取樣頻率至少需 $f_s \geq 20kHz$，而20kHz $\geq 9kHz$，故不符合取樣定理，無法正確還原訊號。

步驟六



1. 開啟 Matlab 主程式並打開程式 example_4.m
2. 產生一波形$x_1(t) = 2\cos(200\pi t) + 3\sin(400\pi t)$
3. 設定取樣頻率 f_s 為 1 kHz 得$x_1(n) = 2\cos\left(\frac{1}{5}\pi n\right) + 3\sin\left(\frac{2}{5}\pi n\right)$
4. 將取樣值 $x_1(n)$ 代入下列公式產生

$$x_{r1}(t) = 2BT\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\,\mathrm{sinc}\,(2B(t-nT))\text{(取}T=\frac{1}{f_s}\text{ , }B=500\,\text{Hz)}$$

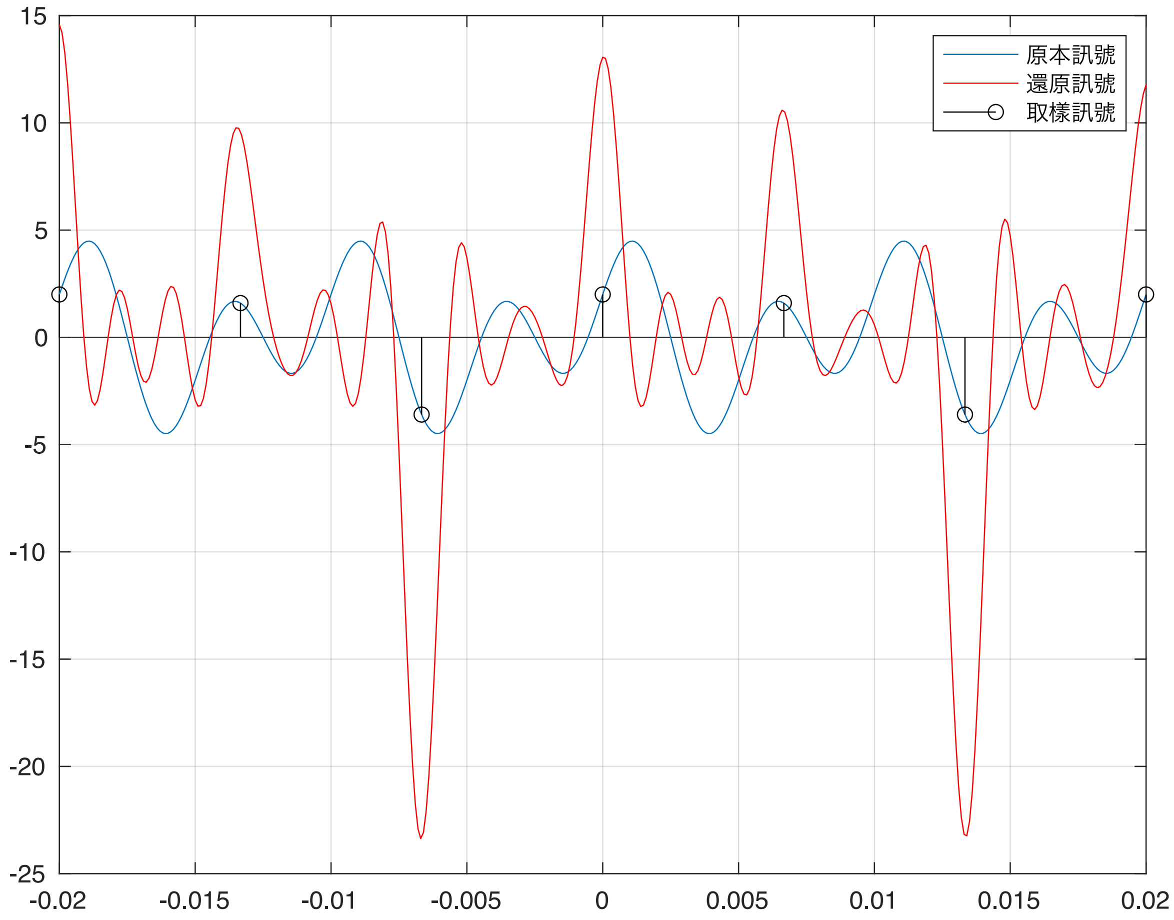
5. 觀察原本訊號 $x_{r1}(t)$是否能還原原本訊號 $x_1(t)$?

與預期結果相同。

符合取樣定理$f_s = 1000 \geq 2f_m = 400$。

訊號經過重建與**內插法**還原過後為$x_{r1}(t)$，其幾乎可以重建為$x_1(t)$。

步驟七



1. 利用步驟六產生的波形$x_1(t) = 2\cos(200\pi t) + 3\sin(400\pi t)$
2. 設定取樣頻率 f_s 為 150 Hz 得$x_2(n) = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right) + 3\sin\left(\frac{8}{3}\pi n\right)$
3. 將取樣值 $x_2(n)$ 代入下列公式產生

$$x_{r2}(t) = 2BT\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\,\mathrm{sinc}\,(2B(t-n\mathrm{T}))\quad (B = 500\,\mathrm{Hz})$$

4. 重複 3 的步驟，改成 $B = 75\,\mathrm{Hz}$ 代入上式，得到 $x_{r3}(t)$
5. 觀察重建訊號 $x_{r2}(t)$、$x_{r3}(t)$ 是否能還原成原本訊號 $x_1(t)$?

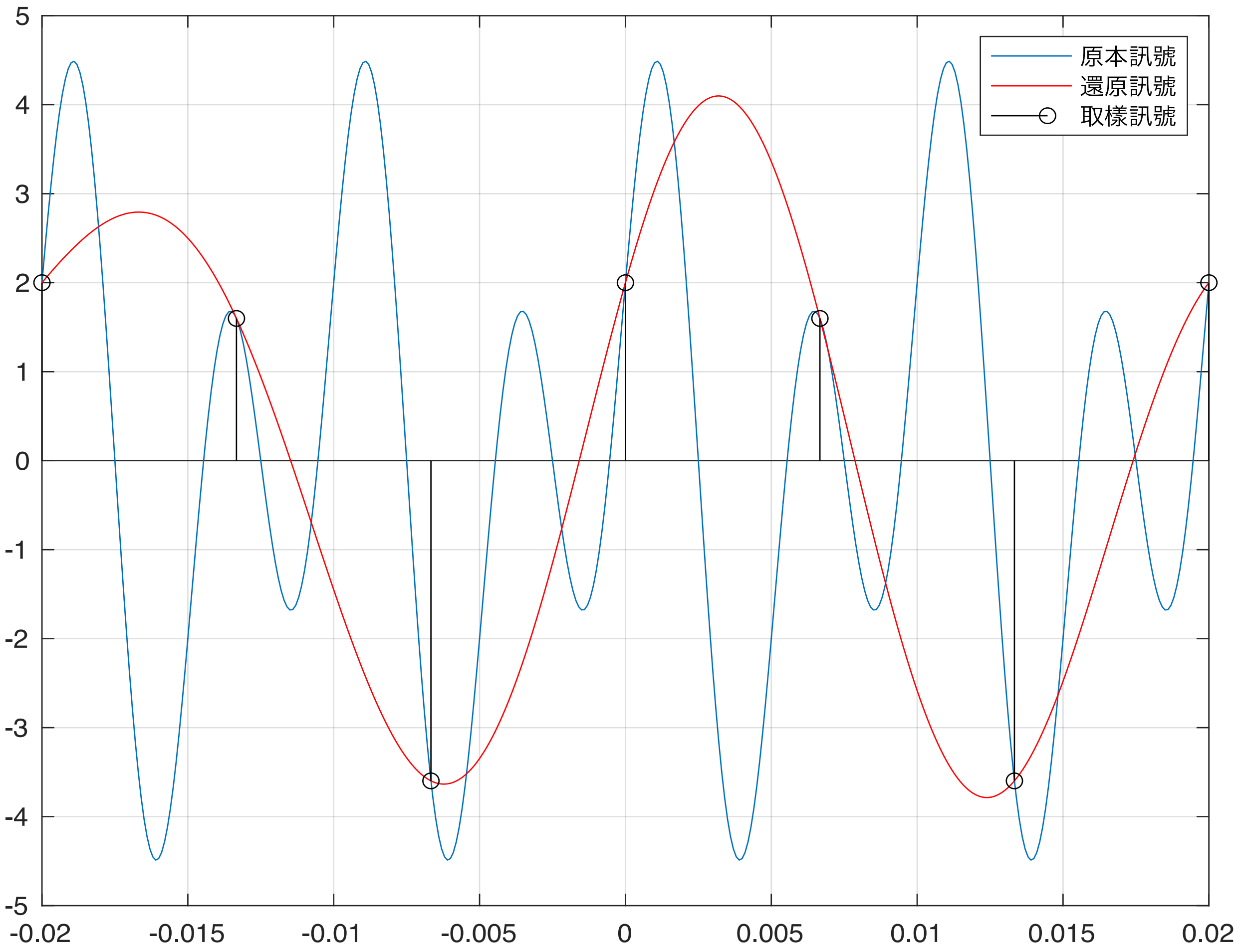
與預期結果相同。

由於其不符合取樣定理$f_s \geq 2f_m$。

訊號經過重建與**內插法**無法正確還原原本

訊號，由圖亦可得證。

步驟七



1. 利用步驟六產生的波形$x_1(t) = 2\cos(200\pi t) + 3\sin(400\pi t)$
2. 設定取樣頻率 f_s 為 150 Hz 得$x_2(n) = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right) + 3\sin\left(\frac{8}{3}\pi n\right)$
3. 將取樣值$x_2(n)$代入下列公式產生

   $$x_{r2}(t) = 2BT\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\,\mathrm{sinc}\,(2B(t-nT)) \quad (B = 500\,\mathrm{Hz})$$

4. 重複 3 的步驟，改成 $B = 75\,\mathrm{Hz}$ 代入上式，得到 $x_{r3}(t)$
5. 觀察重建訊號$x_{r2}(t)$、$x_{r3}(t)$是否能還原成原本訊號$x_1(t)$?

與預期結果相同。

由於其不符合取樣定理$f_s \geq 2f_m$。

訊號經過重建與**內插法**無法正確還原原本訊號，由圖亦可得證。

實習作業1

1. 在步驟三中

$x_1(t)=2\cos(2\pi f_{11}t)+3\sin(2\pi f_{12}t)$

(頻率$f_{11}=100$ Hz 頻率$f_{12}=120$ Hz)

$x_2(t)=2\cos(2\pi f_{21}t)+3\sin(2\pi f_{22}t)$

(頻率$f_{21}=20$ Hz 頻率$f_{22}=40$ Hz)

- 在取樣頻率$f_s=80$ Hz 下代入 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 得$x_1(n)$、$x_2(n)$。
  f_{11} 和 f_{21} 滿足什麼關係, 以及 f_{12} 和 f_{22} 滿足什麼關係,
  才會令$x_2(n)=x_1(n)$?
  驗證此例的f_{11}、f_{21}、f_{12}、f_{22}是否滿足這個關係。

已知當取樣頻率$f_2=f_1+mf_m$

當$m\in \mathrm{Z}$，會因為贗頻效應無法分辨訊號。

$$f_{11}=f_{21}+mf_s$$

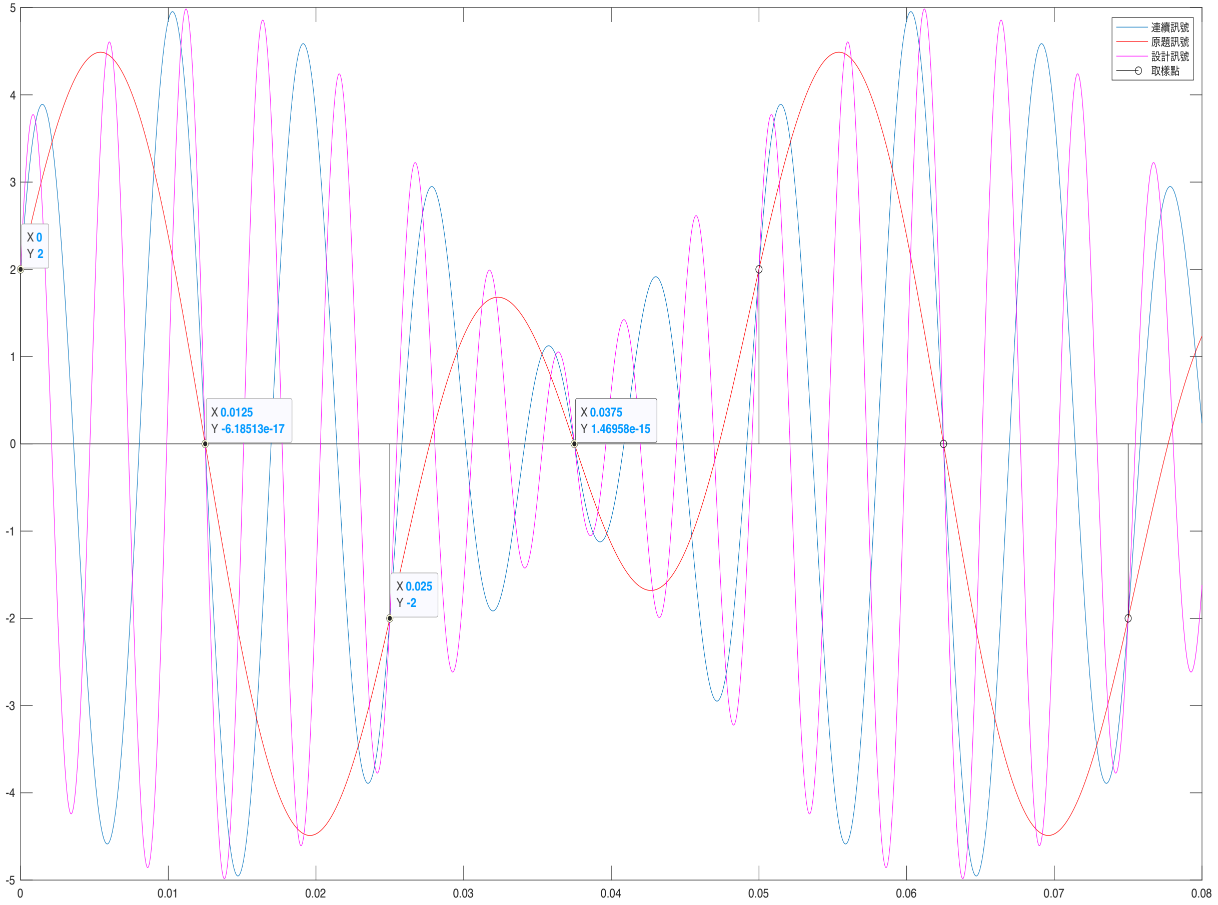
$$f_{12}=f_{22}+mf_s$$

已知

$f_{11}=100Hz; f_{12}=120Hz; f_{21}=20Hz; f_{22}=40Hz$

計算得知 $m=1$時，$x_1(n)=x_2(n)$。

實習作業2



2.

試著產生另一訊號

$$x_3(t) = 2\cos(2\pi f_{31} t) + 3\sin(2\pi f_{32} t)$$

(f_{31}, f_{32}自行設計)

- 設計的訊號$x_3(t)$在取樣頻率$f_s = 80$ Hz下必須滿足$x_3(n) = x_1(n) = x_2(n)$
- 請用Matlab畫圖驗證 $x_3(n) = x_1(n) = x_2(n)$ 並附在報告中。

已知當取樣頻率$f_2 = f_1 + mf_m$

當$m \in \mathrm{Z}$，會因為膺頻效應無法分辨訊號。

$$f_{31} = f_{21} + mf_s$$
$$f_{32} = f_{22} + mf_s$$

已知

$$f_{21} = 20Hz; f_{22} = 40Hz; f_s = 80Hz$$

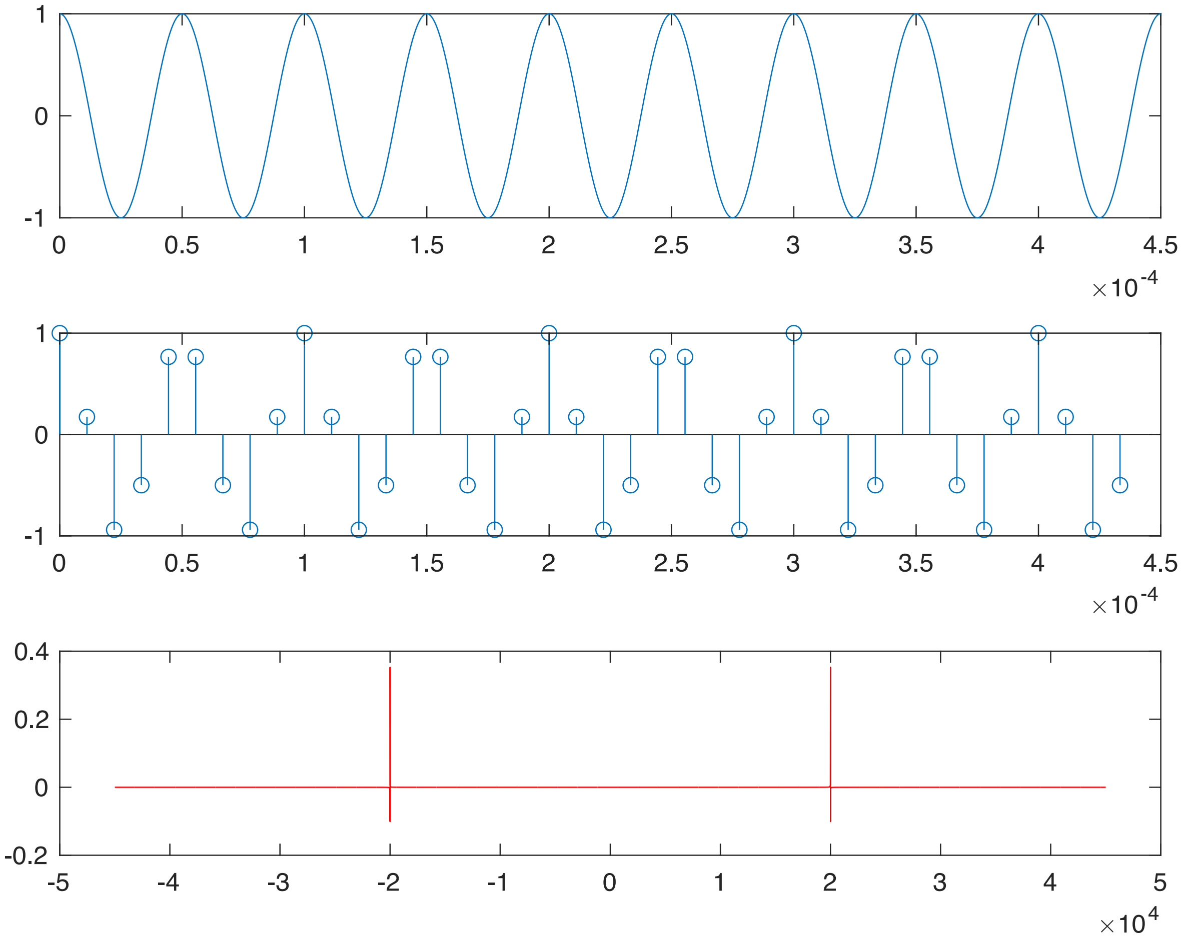
設計

$$f_{31} = 180Hz; f_{32} = 200Hz;$$

計算得知 $m = 2$時，$x_1(n) = x_2(n) = x_3(n)$。

由圖亦可得證。

實習作業3_1($f_s = 90kHz$)



3.

- 將訊號 $x(t)=\cos(2\pi f_m t)$，$f_m = 20$ kHz 。
  分別用取樣頻率 $f_s = 90$ kHz 和 9 kHz 取樣，
  產生新的 $x_1(n)$、$x_2(n)$。
  利用 Matlab 計算出並畫出取樣後的頻譜 $X_1(f)$、$X_2(f)$。
  並討論 $X_1(f)$、$X_2(f)$ 、和 $x(t)$ 實際頻譜的關係。

$x(t)$的實際頻譜:

$$\cos(40k\pi t) \xrightarrow{F.T.} \frac{1}{2}(\delta(f-20k)+\delta(f+20k))$$

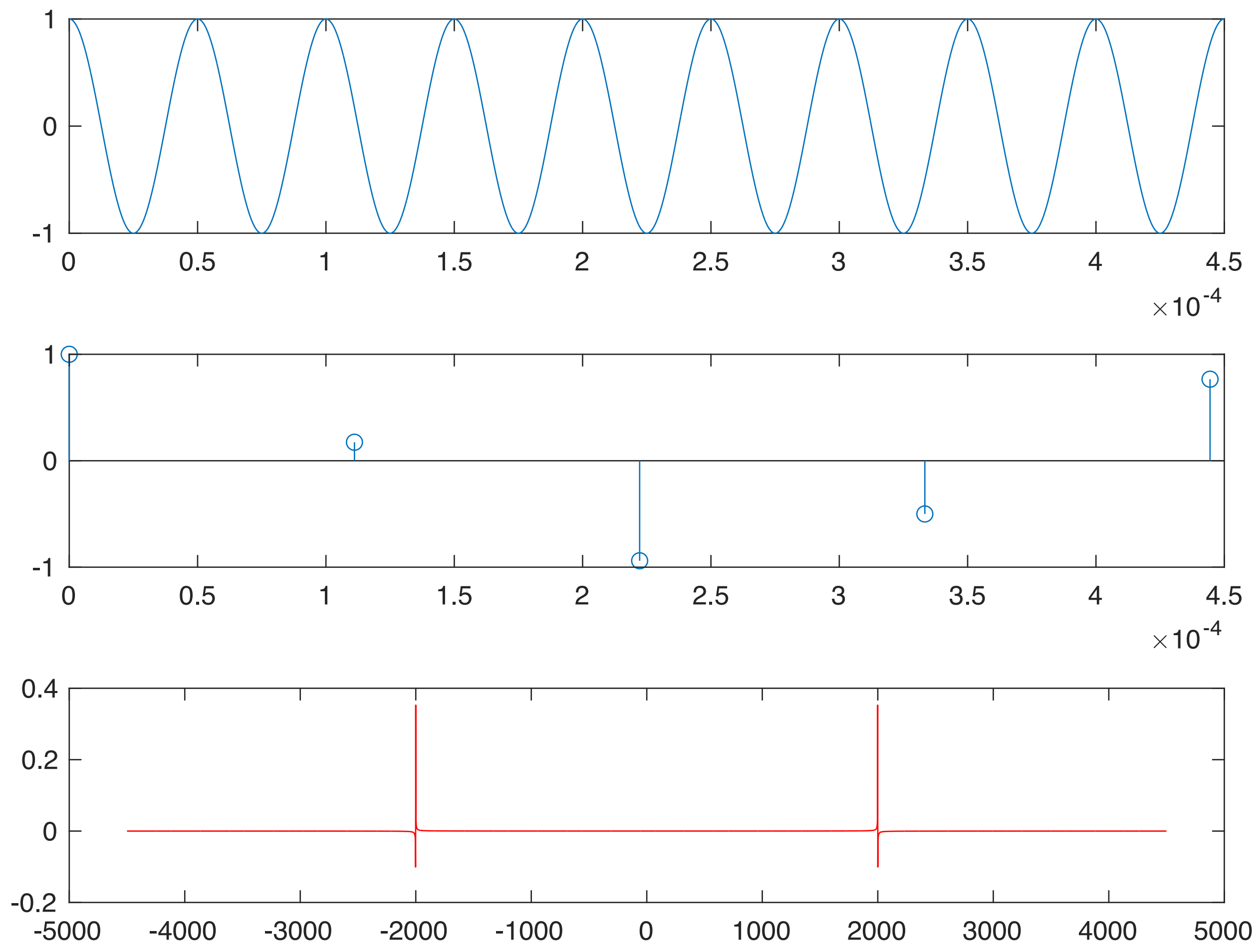
根據取樣定理 $f_s \geq 2f_m$，經計算得知此題符合取樣定理。

原本實際訊號$x(t)$的實際頻譜，由數學推導之後其頻譜

$$X(f) = \frac{1}{2}\{\delta(f-20000)+\delta(f+20000)\}$$

可知在±$20kHz$各有一個脈衝波。從左側圖形得知其頻譜與實際頻譜相同。

實習作業3_2($f_s = 9kHz$)



3.

- 將訊號 $x(t)=\cos(2\pi f_m t)$，$f_m = 20$ kHz 。
  分別用取樣頻率 $f_s = 90$ kHz 和 9 kHz 取樣，
  產生新的 $x_1(n)$、$x_2(n)$。
  利用 Matlab 計算出並畫出取樣後的頻譜 $X_1(f)$、$X_2(f)$ 。
  並討論 $X_1(f)$、$X_2(f)$ 、和 $x(t)$ 實際頻譜的關係。

$x(t)$的實際頻譜:

$$\cos(40k\pi t) \xrightarrow{F.T.} \frac{1}{2}(\delta(f-20k)+\delta(f+20k))$$

根據取樣定理 $f_s \geq 2f_m$ ，經計算得知此題不符合取樣定理。

原本實際訊號$x(t)$的實際頻譜，由數學推導之後其頻譜

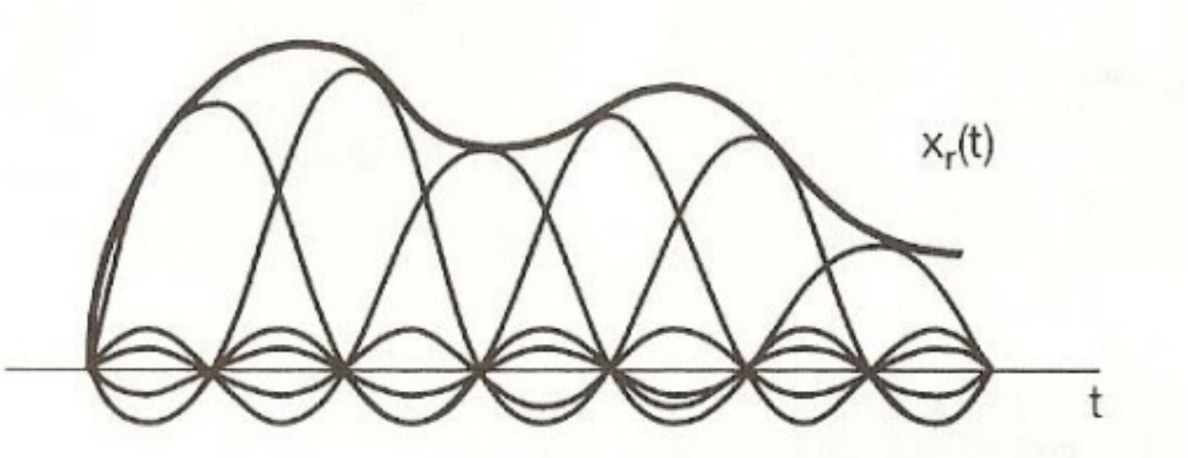
$$X(f) = \frac{1}{2}\{\delta(f-20000)+\delta(f+20000)\}$$

可知在±$20kHz$各有一個脈衝波。從左側圖形得知其頻譜與實際頻譜不同。

實習作業4

4.

- 在上面步驟六的預期結果中，雖然可以確定能還原本來訊號，但是尾端部分有些偏差，討論造成此現象的原因?

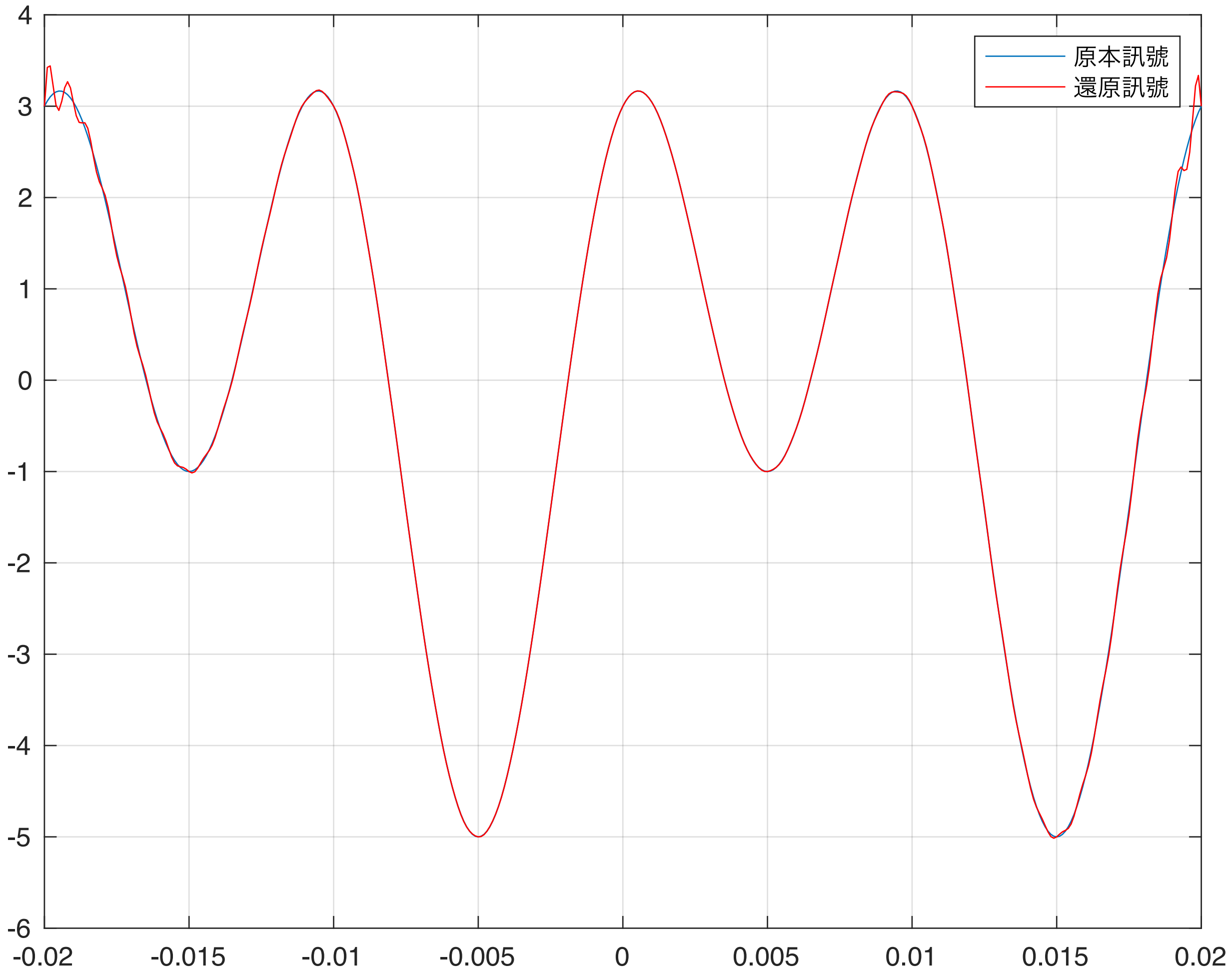


重建的訊號，為 $x_r(t)$ 式子中各項的疊加

透過左側圖得知，在時間 t 所還原的訊號，是由其之前與之後取樣訊號疊加而成。

由於缺少尾端部份之前與之後的訊號，所以在末端還原訊號時，會產生一些誤差，導致無法完全正確還原。

實習作業5



5.

- 產生一個波形 $x_2(t)=3\cos(200\pi t)+2\sin(100\pi t)$ 選定適合的取樣頻率 f_s 和低通濾波器截止頻率B 試著利用下列公式，還原本來訊號，並利用 Matlab 做圖驗證，並附在報告中。

$$公式: x_r(t)=2BT\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,\mathrm{sinc}\,(2B(t-nT))$$

選取$f_s = 3000Hz; B = 1500Hz$，符合取樣定理

$$f_s \geq 2f_m = 200Hz$$

能夠正確還原訊號。

通過試驗也發現，當取樣頻率與截止頻率越大，所還原出的訊號尾端也越接近原本訊號。

〈附錄〉步驟一：example_1.m

```
clear all
fs=2000; %設定取樣頻率為2 kHz
fs1=8000; %設定另一個極高的取樣頻率
ts=1/fs;
ts1=1/fs1;
t=0:ts:0.08;
n=0:ts1:0.08;
x1=2*cos(2*pi*100*n)+3*sin(2*pi*120*n); %以極高取樣頻率來近似原本連續訊號
x2=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*120*t); %取樣後的訊號
subplot(211)
plot(n,x1)
grid on
subplot(212)
stem(t,x2,'r')
grid on
```

〈附錄〉附錄二：example_1_1.m

```
clear all
fs=80; %設定取樣頻率為 80Hz
fs1=1000; %設定另一個極高的取樣頻率
ts=1/fs;
ts1=1/fs1;
tcos = 0:0.001:0.08;
t=0:ts:0.08;
n=0:ts1:0.08;
x1=2*cos(2*pi*100*n)+3*sin(2*pi*120*n); %以極高取樣頻率來近似原本連續訊號
x2=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*120*t); %取樣後的訊號
xcos=2*cos(2*pi*20*tcos);

subplot(2,1,1);
plot(n,x1)
hold on
subplot(2,1,2);
plot(n,xcos,'--')
subplot(2,1,2);
stem(t,x2,'r')
grid on
```

〈附錄〉步驟三：example_2.m

```
clear all
fs=80; %設定取樣頻率80 Hz
ts=1/fs;
t=0:0.00001:0.08;
n=0:ts:0.08;
x1=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*120*t); %極高取樣近似的連續波
x2=2*cos(2*pi*100*n)+3*sin(2*pi*120*n); %以80 Hz取樣的訊號
x3=2*cos(2*pi*20*t)+3*sin(2*pi*40*t); %產生另一個極高取樣近似的連續波
x4=2*cos(2*pi*20*n)+3*sin(2*pi*40*n);
plot(t,x1)
hold on
plot(t,x3,'r')
stem(n,x2,'k')
stem(n,x4)
```

〈附錄〉步驟四：example_3.m

```
clear all
fs=10000;
fs1=1000;
%設定取樣頻率1 kHz
B=500; %設定截止頻率 B
ts=1/fs;ts1=1/fs1;
t=-0.02:ts:0.02;
t1=-0.02:ts1:0.02;
x=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*200*t);
x1=2*cos(2*pi*100*t1)+3*sin(2*pi*200*t1);
for i=1:length(t)
x11=x1.*2*B*ts1.*sinc(2*B*(t(i)-t1));
x2(i)=sum(x11);
end
plot(t,x)
hold on
plot(t,x2,'r')
grid on
```

〈附錄〉步驟五：example_3_1.m

```
clear all
fs=9000; %設定取樣頻率9 kHz
ts=1/fs;
ts1=(1/10)^8;
t1=0:ts1:0.0005;t=0:ts:1;
f=10000; %原始訊號頻率10 kHz
x=cos(2*pi*f*t); %取樣後的訊號
x1=cos(2*pi*f*t1); %極高取樣近似的連續波
f1=[0:(length(x)-1)]/length(x)-0.5;
X=fft(x)/length(x); %Matlab 內建的傅立葉轉換
subplot(311)
plot(t1,x1);
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1]) %限制畫圖的範圍
subplot(312)
stem(t(1:40),x(1:40));
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1])
subplot(313)
plot(fs*f1,fftshift(X),'r')
```

〈附錄〉步驟六：example_4.m

```
clear all
fs=10000;
fs1=150;%設定取樣頻率1 kHz
B=500; %設定截止頻率B
ts=1/fs;ts1=1/fs1;
t=-0.02:ts:0.02;t1=-0.02:ts1:0.02;
x=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*200*t);
x1=2*cos(2*pi*100*t1)+3*sin(2*pi*200*t1);
for i=1:length(t)
x11=x1.*2*B*ts1.*sinc(2*B*(t(i)-t1));
x2(i)=sum(x11);
end
plot(t,x)
hold on
plot(t,x2,'r')
hold on
stem(t1,x1,'k')
grid on
legend('原本訊號','還原訊號','取樣訊號')
```

〈附錄〉步驟七：example_4_1.m

```
clear all
fs=10000;
fs1=150;%設定取樣頻率1 kHz
B=75; %設定截止頻率B
ts=1/fs;ts1=1/fs1;
t=-0.02:ts:0.02;t1=-0.02:ts1:0.02;
x=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*200*t);
x1=2*cos(2*pi*100*t1)+3*sin(2*pi*200*t1);
for i=1:length(t)
x11=x1.*2*B*ts1.*sinc(2*B*(t(i)-t1));
x2(i)=sum(x11);
end
plot(t,x)
hold on
plot(t,x2,'r')
hold on
grid on
stem(t1,x1,'k')
legend('原本訊號','還原訊號','取樣訊號')
```

〈附錄〉實習作業2

```
clear all
fs=80; %設定取樣頻率80 Hz
ts=1/fs;
t=0:0.00001:0.08;
n=0:ts:0.08;
f31=180;f32=200;
x1=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*120*t); %極高取樣近似的連續波
x2=2*cos(2*pi*100*n)+3*sin(2*pi*120*n); %以80 Hz取樣的訊號
x3=2*cos(2*pi*20*t)+3*sin(2*pi*40*t); %產生另一個極高取樣近似的連續波
x4=2*cos(2*pi*20*n)+3*sin(2*pi*40*n);
x5=2*cos(2*pi*f31*t)+3*sin(2*pi*f32*t);%極高取樣近似的連續波
x6=2*cos(2*pi*f31*n)+3*sin(2*pi*f32*n);

plot(t,x1)
hold on
plot(t,x3,'r')
hold on
plot(t,x5,'m')
stem(n,x2,'k')
stem(n,x4)
stem(n,x6)
```

〈附錄〉實習作業3_1

```
clear all
fs=90000; %設定取樣頻率90 kHz
ts=1/fs;
ts1=(1/10)^8;
t1=0:ts1:0.0005;t=0:ts:1;
f=20000; %原始訊號頻率10 kHz
x=cos(2*pi*f*t); %取樣後的訊號
x1=cos(2*pi*f*t1); %極高取樣近似的連續波
f1=(0:(length(x)-1))/length(x)-0.5;
X=fft(x)/length(x); %Matlab 內建的傅立葉轉換
subplot(311)
plot(t1,x1);
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1]) %限制畫圖的範圍
subplot(312)
stem(t(1:40),x(1:40));
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1])
subplot(313)
plot(fs*f1,fftshift(X),'r')
```

〈附錄〉實習作業3_2

```
clear all
fs=9000; %設定取樣頻率90 kHz
ts=1/fs;
ts1=(1/10)^8;
t1=0:ts1:0.0005;t=0:ts:1;
f=20000; %原始訊號頻率10 kHz
x=cos(2*pi*f*t); %取樣後的訊號
x1=cos(2*pi*f*t1); %極高取樣近似的連續波
f1=(0:(length(x)-1))/length(x)-0.5;
X=fft(x)/length(x); %Matlab 內建的傅立葉轉換
subplot(311)
plot(t1,x1);
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1]) %限制畫圖的範圍
subplot(312)
stem(t(1:40),x(1:40));
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1])
subplot(313)
plot(fs*f1,fftshift(X),'r')
```

〈附錄〉實習作業5

```
clear all
fs=10000;
fs1=3000;%設定取樣頻率3kHz
B=1500; %設定截止頻率B
ts=1/fs;ts1=1/fs1;
t=-0.02:ts:0.02;t1=-0.02:ts1:0.02;
x=3*cos(2*pi*100*t)+2*sin(2*pi*50*t);
x1=3*cos(2*pi*100*t1)+2*sin(2*pi*50*t1);
for i=1:length(t)
x11=x1.*2*B*ts1.*sinc(2*B*(t(i)-t1));
x2(i)=sum(x11);
end
plot(t,x)
hold on
plot(t,x2,'r')
grid on
legend('原本訊號','還原訊號');
```