

1. 透過回授線性化(feedback linearization)將非線性系統 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 化成線性系統 $\dot{z} = Az + Bu$ 的過程中，說明這中間包含哪幾個關鍵步驟？(10%)

(10%) 對於非線性系統 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ，說明透過回授線性化設計控制器 u 的步驟。

- 尋求座標轉換 $z = z(x)$ ，使得在新座標 z 之下，系統的非線性動態被集中到最後一個方程式上，如 $\dot{z}_2 = -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + a \cos(2z_1)$
- 尋求控制轉換 $u = z(x, v)$ ，使得在新座標 z 及新控制 v 作用下，非線性系統轉換成一等義的線性系統，如 $\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2, \dot{z}_2 = v$
- 針對線性化的系統設計狀態回授控制律 $v = -Kz$ 。

(1) 建立函數向量 $g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g$

(2) Check 以上函數向量 rank 为滿秩

其中 $ad_f g = [f, g] = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g$ 为可控條件

(3) 若以上滿足，則求解 P.D.E.

$$L_g L_f^{i-1} \phi_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$$

(4) 建立狀態座標轉換

$$[z_1, z_2, \dots, z_n]^T = [\phi_1, L_f \phi_1, \dots, L_f^{n-1} \phi_1]^T$$

及控制訊號轉換 $u = \alpha(x) + \beta(x) \cdot v$

(5) 建立線性化方程 $\dot{z} = Az + Bu$

(6) 令 $v = -Kz$ 代入得開迴路特性 Bg 。

再利用極点指定，設計最佳的收斂

$$(7) v = -(k_1 z_1 + k_2 z_2 + \dots + k_n z_n)$$

$$= -(k_1 \phi_1 + k_2 L_f \phi_1 + \dots + k_n L_f^{n-1} \phi_1)$$

代回求得 X 狀態方程下的 u

考慮n階的非線性系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1a)$$

$$y = h(x) \quad (1b)$$

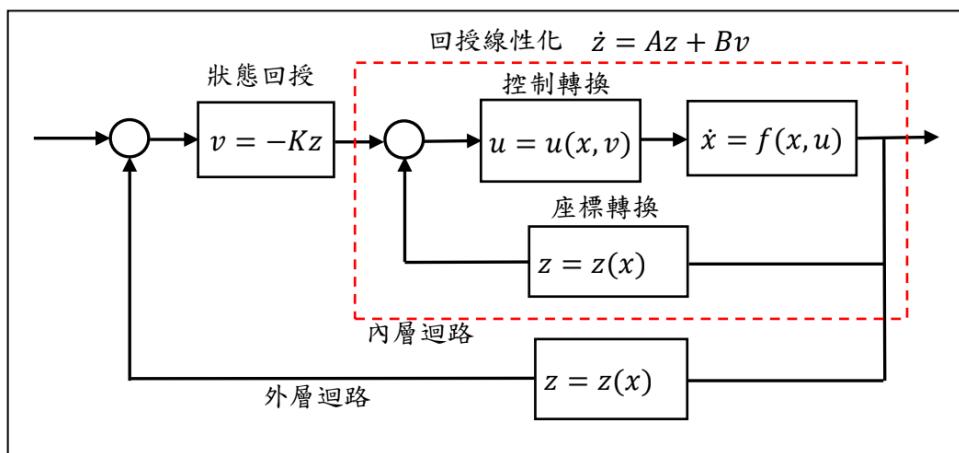
- (a) (5%)如果系統的相對階數(relative degree)為 1，求函數 f 、 g 、 h ，所要滿足的條件。
- (b) (5%)如果系統的相對階數(relative degree)為 2，求函數 f 、 g 、 h ，所要滿足的條件。
- (c) (5%)如果系統的相對階數(relative degree)為 n ，求函數 f 、 g 、 h ，所要滿足的條件。
- (d) (5%)利用(c)的結果，假設系統的相對階數(relative degree)為 n ，求出所需要的座標轉換及控制訊號轉換，使得在新座標、新控制訊號的作用下，系統(1a)可完全線性化。

$$(a) \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dx} \dot{x} = \nabla h(f(x) + g(x)u) \\ = L_f h + L_g h \cdot u$$

若 $L_g h \neq 0$ ，則為一階

$$(b) \ddot{y} = \frac{d}{dt}(L_f h) = \frac{d}{dx}(L_f h)\dot{x} \\ = \nabla(\nabla h \cdot f)(f + g u) = \nabla(\nabla h \cdot f^2) + \nabla(\nabla h \cdot fg)u \\ = L_f^2 h + L_f L_g h \cdot u, \text{ 二階} \Rightarrow L_f L_g h \neq 0$$

$$(c) n\text{ 階} \Rightarrow L_g L_f^{(n-1)} h \neq 0, \text{ 且 } L_g L_f^n h = 0, h=0,1,2,\dots,n-2$$



對於任意 n 階的非線性系統 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ，以上的三個步驟可用數學符號表示如下：

- 步驟 1：尋求座標轉換 $z = z(x)$

$$z = \Phi(x) \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (6.1.11)$$

使得在新座標 z 之下，系統的非線性動態被集中到最後一個方程式上

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a(z) + b(z)u \end{bmatrix} \quad (6.1.12)$$

可以看到前面的 $n - 1$ 個方程式已被線性化，非線性項僅出現在最後一個方程式之中。

- 步驟 2：尋求控制轉換 $u = u(z, v)$

在(6.1.12)式中，令新的控制變數為

$$v = a(z) + b(z)u \Rightarrow u = (v - a(z))/b(z) \quad (6.1.13)$$

則在新控制 v 的作用下，(6.1.12)式化成線性方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v = A_c z + B_c v \quad (6.1.14)$$

- 步驟 3：進行線性系統的狀態回授控制

$$v = -Kz = -(k_1 z_1 + k_2 z_2 + \cdots + k_n z_n) \quad (6.1.15)$$

代入(6.1.14)式，得到閉迴路系統的狀態方程式

$$\dot{z} = (A_c - B_c K)z \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} \quad (6.1.16)$$

其中控制增益 k_i 的選擇是要使得閉迴路矩陣的特徵值落入指定的位置。

- 步驟 4：決定回授線性化控制律

將(6.1.15)式代入(6.1.13)式，得到回授線性化控制的最後形式

$$u(z) = (-Kz - a(z))/b(z) \xrightarrow{z=\Phi(x)} u(x)$$

其中的 $-a(z)$ 屬於前授分量，用以抵銷非線性動態，而 $v = -Kz$ 是回授分量，則用以控制剩下的線性動態。

(10%) 考慮二階非線性方程式

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2^3 + \cos x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 \sin x_1 + u \sin(2x_1) \quad (2)$$

尋求座標轉換 $z = \phi(x)$ 與控制轉換 $v = v(x, u)$, 使得在新座標 z 下, (2) 式化成線性的型式:

$$\dot{z}_1 = az_1 + bz_2, \quad \dot{z}_2 = v \quad (3)$$

其中 a 與 b 是待求的常數值。(提示: 本題的座標轉換 $z = \phi(x)$ 用觀察法即可求得)

$$\begin{aligned} 1. \quad & z_1 = x_1, \quad \dot{z}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ & z_2 = 2x_2^3 + \cos x_1 \Rightarrow \dot{z}_2 = 6x_2^2 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \sin x_1 = 6x_2^2(x_2 \sin x_1 + u \sin(2x_1)) - \sin x_1 (x_1 + 2x_2^3 + \cos x_1) \\ & = -\sin x_1(z_1 + z_2) + 3(z_2 - \cos z_1) \sin z_1 + 6x_2^2 \sin(2z_1)u = v \\ 2. \quad & \text{由上式 } \Rightarrow u = \frac{1}{6 \sin(2z_1) x_2^2} [v + \sin z_1(z_1 + z_2) - 3(z_2 - \cos z_1) \sin z_1] \end{aligned}$$

(10%) 解釋『輸入-狀態回授線性化』與『輸入-輸出回授線性化』二者有何不同?

「輸入-狀態回授線性化」是藉由控制輸入 u 而將 x 加以線性化。

「輸入-輸出回授線性化」是藉由控制輸入 u 而將 y 加以線性化，使輸出 y 追蹤目標訊號 y_d ，所以設計控制律 u 直接作用在輸出 y 上。後者問題較簡單，因為只是要求某些挑選狀態被線性化而已，然而前者則須將內部狀態都要線性化。

輸入-狀態回授線性化

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$z = \Phi(x)$$



$$\dot{z} = Az + Bu$$

輸入-輸出回授線性化

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

$$z \rightarrow y = h(x)$$



$$\dot{y} = Ay + Bu$$

比較兩種線性化方法的異同，其中的不同點在於座標轉換的有無。輸入-狀態回授線性化必須尋求適當的座標轉換 $z = \Phi(x)$ ，使得在新座標 z 之下，系統呈現線性的行為。然而對於輸入-輸出回授線性化而言，不需要進行座標轉換，而是直接針對輸出 y 建立線性運動方程式。在另一方面，兩者也有相同的地方，我們發現只要將輸入-狀態回授線性化中的新座標 z 換成是輸出訊號 y ，即可得到輸入-輸出回授線性化的結果。兩者的這一關聯性說明它們背後的數學問題以及所需要的數學工具是完全相同的。

(10%) 對於非線性系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x) \quad (1)$$

如何定義外部動態 (external dynamics)、內部動態 (internal dynamics) 和零動態 (zero dynamics)?

外部動態：可被如左的線性系統顯示出與 y 有關的系統動態，是 r 階線性系統，不受到內部動態影響。

內部動態：無法由被如左的線性系統呈現出來的系統動態，但會受到外部動態變數影響。

零動態：指輸出 y 在任何時刻下都為零時，即 $y(t) \equiv 0, \forall t \geq 0$ ，系統響應 $x(t)$ 的動態行為。（亦即當檯面上的輸出為零時，檯面下看不到的系統動態就是零動態。）不受控制輸入 u 影響，可以獨立決定且與環境無關，可藉由其穩定性來間接推論內部動態的穩定性。

(1)

對輸出 y 微分 n 次，直到產生 u
此時相對階數為 r ，故為 r 的外部動能

(2)

若原系統為 n 階，則有 $n-r$ 個內部動能

(3)

若存在 u_0 使得 $y(t) = 0, \forall t \geq 0$

則 $\dot{x} = f(x, u_0)$ 則稱為零動能

(10%) 考慮如下的三階非線性系統，其中 (ζ_1, ζ_2) 為外部動態變數， η 為內部動態變數。

$$\dot{\zeta}_1 = \zeta_2 \quad (4a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \zeta_2(-\eta + \zeta_2 + \tan^{-1}\zeta_2) + u \quad (4b)$$

$$\dot{\eta} = (-\eta + \zeta_1 + \tan^{-1}\zeta_2) \left(1 + \frac{2+\zeta_2^2}{1+\zeta_1^2} \zeta_2 \right) \quad (4c)$$

(a) 設計控制律 u 使得外部動態為穩定，並且二個極點均落在 -1 。

(b) 檢測該系統的內部動態的穩定性。

(b) 令 Lyapunov 函數 $V(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\Rightarrow \dot{V} = \dot{x}x = x(\alpha x^2 - x^3 + u)$$

令 $u_1 = -\alpha x^2 + x^3 - x$ 代入上式

$$\Rightarrow \dot{V} = -x^2 = -V_1(x) \leq 0$$

$$\hat{\dot{V}} = \alpha x^3 - x^4 + xu \leq V_1(x) = -(x^4 + x^2) \cdots (1)$$

$$\Rightarrow xu \leq -x^2 - \alpha x^3 = -x(x + \alpha x^2)$$

滿足條件的選擇為

$$u = u_3 = -x - \alpha x^2$$

且滿足(1)，故能穩定系統

$$\therefore \dot{x} = \alpha x^2 - x^3 - x - \alpha x^2 = -\underline{x^3} - x$$

(a) $\dot{x} = \alpha x^2 - x^3 + u$

令 $u = x^3 - \alpha x^2 - x$ 代入

$$\Rightarrow \dot{x} = -x$$

(c) 由(a)，迴授線性化會由於系統參數 α 的量測誤差
故控制率無法完美實現，另一缺點是控制訊號可能
超過可實現範圍

由(b)，因 u_3 不包含 x^3 項，故其值較小，更容易實現

考慮如(1)式的非線性系統：

(a) (5%) 求出 \dot{y} 、 \ddot{y} 、 \ddot{y} ，將結果用函數 f 、 g 、 h ，表示出來。

(b) (5%) 如何利用上面的微分操作，決定此系統的相對階數(relative degree)？

(c) (5%) 若假設系統的相對階數為 3，則函數 f 、 g 、 h 需要滿足何條件？

(d) (5%) 繼(c)，若系統階數是 4 階但相對階數為 3，試表達出此系統的 normal form，並指出何者為 external dynamics？何者為 internal dynamics？何者為 zero dynamics？

$$(a) \dot{y} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \nabla h \cdot (f(x) + g(x)u) \\ = L_f h + L_g h \cdot u$$

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}(L_f h) = \frac{d}{dx}(L_f h) \dot{x} = \nabla(L_f h) \cdot (f(x) + g(x)u) \\ = L_f^2 h + L_f L_g h \cdot u$$

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}(L_f^2 h) = \frac{d}{dx}(L_f^2 h) \dot{x} = \nabla(L_f^2 h) \cdot (f(x) + g(x)u) \\ = L_f^3 h + L_f^2 L_g h \cdot u$$

(b) 由上，若 $L_g h = 0$ ，則為 0 倍

$\dot{y} = L_f h \neq 0$ ， $L_g L_f h = 0$ ，則為 1 倍

若 $L_g h = L_g L_f h = \dots = L_g L_f^{n-1} h = 0$ ， $L_f^n L_g h \neq 0$ ，則為 n 倍

(c) 同上

(d) 定義外部動態 $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r]^T = [h, L_f h, \dots, L_f^{r-1} h]^T$

內部動態 $v = [\zeta_{r+1}, \dots, \zeta_n]$

可得標準式

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \vdots \\ a(\zeta, v) + b(\zeta, v) \cdot u \end{bmatrix} \quad (\text{外部 external})$$

$$\Rightarrow \dot{\zeta} = Ac\zeta + Bcv$$

$$\dot{v} = g(\zeta, v) \quad (\text{內部 internal})$$

$$y = \zeta_1$$

其中 $v = g(0, v)$ 是 zero dynamics

$$\dot{y} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \nabla h \cdot (f + gu) \\ = \nabla h \cdot f + (\nabla h \cdot g)u = L_f h + (L_g h)u$$

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}(L_f h) = \nabla(L_f h) \cdot (f + gu) = L_f^2 h + (L_g L_f h)u$$

$$y^{(r)} = L_f^r h + (L_g L_f^{r-1} h)u \quad v = L_f^r h + (L_g L_f^{r-1} h)u \Rightarrow u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h}(v - L_f^r h)$$

為了要建立輸入 u 與輸出 y 之間的關係，我們從(6.7.1)式出發，對 $y = h(x)$ 的二側取對時間的一次微分：

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \nabla h \cdot (f + gu) \\ &= \nabla h \cdot f + (\nabla h \cdot g)u = L_f h + (L_g h)u \end{aligned} \tag{6.7.2}$$

可以看到輸入 u 與輸出 y 已經出現在等式的兩側，但是 $L_f h$ 與 $L_g h$ 仍然是狀態 x 的函數。為了消去 x ，定義新的控制變數 v 如下：

$$v = L_f h + (L_g h)u \Rightarrow u = \frac{1}{L_g h} (v - L_f h) \quad (6.7.3)$$

在新的控制變數 v 的作用下，(6.7.2)式變成是線性系統：

$$\dot{y} = v \quad (6.7.4)$$

這時輸入 v 與輸出 y 之間已達到線性化的關係。在以上的過程中，不需要尋求座標轉換，只用到了如(6.7.3)式的控制轉換。正如前面提到的，輸入-輸出回授線性化的問題遠比輸入-狀態回授線性化的問題來得簡單。

然而(6.7.3)式中的控制轉換若要存在，必須先滿足條件

$$L_g h \neq 0 \quad (6.7.5)$$

若此一條件滿足，我們稱(6.7.1)式的非線性系統具有相對階數 1，因為其輸出與輸入的關係是一階線性的形式，如(6.7.4)式所式。

然而如果 $L_g h = 0$ ，則(6.7.3)式與(6.7.4)式皆不成立，此時(6.7.2)式化成 $\dot{y} = L_f h$ ，其中的控制訊號 u 消失了。為了要重新獲得輸入 u 與輸出 y 之間的關係，我們再一次對 $\dot{y} = L_f h$ 的二側取對時間的微分：

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}(L_f h) = \nabla(L_f h) \cdot (f + gu) = L_f^2 h + (L_g L_f h)u \quad (6.7.6)$$

控制 u 再次出現，但須先滿足條件：

$$L_g L_f h \neq 0 \quad (6.7.7)$$

此時新的控制變數 v 定義如下：

$$v = L_f^2 h + (L_g L_f h)u \Rightarrow u = \frac{1}{L_g L_f h} (v - L_f^2 h) \quad (6.7.8)$$

(6.7.6)式的輸出入關係式化成二階的線性關係

$$\ddot{y} = v \quad (6.7.9)$$

此時我們稱(6.7.1)式的非線性系統具有相對階數 2，因為其輸出與輸入的關係是二階線性的形式。

如果(6.7.6)式中的係數 $L_g L_f h = 0$ ，則 u 又消失，必須再進行一次微分的動作。如此重複相同的步驟，直到第 r 次的時間微分， u 的係數不為零時，才停止微分的動作，此時的輸出入關係為

頁次： 34 / 56 — +

$$y^{(r)} = L_f^r h + (L_g L_f^{r-1} h)u \quad (6.7.10)$$

其中 $y^{(r)}$ 代表 y 對時間的 r 次微分，並且 u 的係數不為零：

$$L_g L_f^{r-1} h \neq 0 \quad (6.7.11)$$

此時透過新舊控制變數的轉換：

$$v = L_f^r h + (L_g L_f^{r-1} h)u \Rightarrow u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (v - L_f^r h) \quad (6.7.12)$$

輸出入關係式(6.7.10)化成 r 階的線性系統：

$$y^{(r)} = v \quad (6.7.13)$$

相對階數的定義

考慮非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

如果 $\{f, g, h\}$ 滿足下列的條件：

$$L_g L_f^0 h = L_g L_f^1 h = \dots = L_g L_f^{r-2} h = 0, L_g L_f^{r-1} h \neq 0 \quad (6.7.14)$$

則稱非線性系統的相對階數為 r 。

(10%) 考慮 n 階的非線性系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x) \quad (1)$$

(a) (5%) 如果系統的相對階數(relative degree)為 2，求函數 f, g, h ，所要滿足的條件。

(b) (5%) 在相對階數為 2 的情形下，設計控制律 u ，使得輸入 u 與輸出 y 之間為線性關係，並且極點落在 -1 與 -2 。

(a)

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \nabla h \cdot (f(x) + g(x)u) = \nabla h f(x) + \nabla h g(x) u \\ &= L_f h + L_g h \cdot u \\ \ddot{y} &= \frac{d}{dt} (L_f h) = \nabla L_f h \cdot (f(x) + g(x)u) = L'_f h + (L_g L_f h) \cdot u\end{aligned}$$

若 relative degree = 2，則 $L_g h = 0, (L_g L_f h) \neq 0$

(b)

(15%) 考慮非線性系統

$$\dot{x} = ax^2 - x^3 + u$$

(a) (5%) 設計控制律 u ，使得控制後的系統變成線性系統： $\dot{x} = -x$ ，此即回授線性化的設計。

(b) (5%) 設計控制律 u ，使得 Lyapunov 函數 $V(x) = x^2/2$ ，滿足收斂條件 $\dot{V}(x) = -(x^4 + x^2) < 0$ 。

(c) (5%) 比較以上二種控制設計的不同以及優缺點。

(b) 令 Lyapunov 函數 $V(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\Rightarrow \dot{V} = \dot{x}x = x(\alpha x^2 - x^3 + u)$$

$$\text{令 } u_1 = -\alpha x^2 + x^3 - x \text{ 代入上式}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -x^2 = -V_1(x) \leq 0$$

$$\text{令 } \dot{V} = \alpha x^3 - x^4 + xu \leq -V_1(x) = -(x^4 + x^2) \cdots (1)$$

$$\Rightarrow xu \leq -x^2 - \alpha x^3 = -x(x + \alpha x^2)$$

滿足條件牛的選擇為

$$u = u_3 = -x - \alpha x^2$$

且滿足(1)，故能系統

$$\therefore \dot{x} = \alpha x^2 - x^3 - x - \alpha x^2 = -\underline{x^3 - x}$$

(a) $\dot{x} = \alpha x^2 - x^3 + u$

$$\text{令 } u = x^3 - \alpha x^2 - x \text{ 代入}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -x$$

(c) 由(a)，迴授系線性化會由於系統參數 α 的量測誤差
故控制率無法完美實現，另一缺點是控制訊號可能
超過可實現範圍

由(b)，因 u_3 不包含 x^3 項，故其值較小，更容易實現

(a) (10%) 試以下列的非線性系統為例，說明逆向步進控制的設計步驟：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi, \quad \dot{\xi} = u \quad (2)$$

(b) (10%) 將以上的設計步驟應用到以下的非線性系統

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u \quad (3)$$

求出使得系統為漸近穩定的回授控制律 u 。

(a)

(1) 設計內層結構的控制律

參見圖 7.2.1，先針對內層結構的狀態方程式(7.2.1a)，設計控制律 $\xi = \phi(x)$ 使得內層子系統為漸進穩定。亦即要找到 Lyapunov 函數 $V_1(x) > 0$ ，且滿足

$$\dot{V}_1(x) = \frac{\partial V_1}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x)] \leq -V_a(x) \leq 0 \quad (7.2.2)$$

其中 $V_a(x)$ 為正定函數。所得到的控制律 $\xi = \phi(x)$ 必須確保閉迴路子系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) \quad (7.2.3)$$

為漸進穩定。

(2) 建立外層結構運動方程式

將(7.2.1)式改寫成如下的形式

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)(\xi - \phi(x)) \quad (7.2.4a)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (7.2.4b)$$

(7.2.1)式所代表的含意表現在圖 7.2.2(a)中，其中可見到變數 ξ 是控制訊號 u 的積分結果，而變數 ξ 又是(7.2.1a)子系統的控制訊號。(7.2.4)式所代表的含意表現在圖 7.2.2(b)中，顯示進入(7.2.4a)子系統的控制訊號變成了 $\xi - \phi(x)$ 。

(3) 定義外層結構的控制訊號

$$z = \xi - \phi(x) \rightarrow \dot{z} = \dot{\xi} - \dot{\phi}(x) = u - \dot{\phi}(x) \quad (7.2.5)$$

圖 7.2.2c 顯示整合系統的輸入控制訊號變成了 $u - \dot{\phi}(x)$ ，因此定義新控制訊號如下：

$$v = u - \dot{\phi}(x) \quad (7.2.6)$$

結合(7.2.4a)式、(7.2.5)式及(7.2.6)式，得到變換後的系統方程式：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)z \quad (7.2.7a)$$

$$\dot{z} = v \quad (7.2.7b)$$

其所對應的控制方塊圖如圖 7.2.2d 所示。在(7.2.1)式中，子系統的控制訊號為 ξ ，全系統的控制訊號為 u ；經過轉換後，在(7.2.7)式中，子系統的控制訊號為 z ，全系統的控制訊號為 v 。轉換前後的關係如下式所示：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\xi & \xrightarrow{z=\xi-\phi(x)} \dot{x} &= f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)z \\ \xi &= u & \dot{z} &= v \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

(4) 決定外層結構控制律

當 $z = 0$ 時，(7.2.7a)式化成(7.2.3)式，而(7.2.3)式代表受控後的內層子系統，其為漸進穩定的系統，所對應的 Lyapunov 函數 $V_1(x)$ 如(7.2.2)所示。設 $V(x, z)$ 為(7.2.8)式全系統的 Lyapunov

函數，將其取為如下的形式：

$$V(x, z) = V_1(x) + z^2/2 \quad (7.2.9)$$

其中 $V_1(x)$ 為與內層狀態 x 相關的 Lyapunov 函數，而 $z^2/2$ 則是與狀態 z 相關的 Lyapunov 函數。為了確保整合系統 $[x^T z]^T$ 為漸進穩定， $V(x, z)$ 必須滿足 $V > 0$ 且 $\dot{V} < 0$ ，其中 $V > 0$ 的條件，根據(7.2.9)式的定義，已自動滿足。而條件 $\dot{V} < 0$ 的滿足，則要透過控制律 v 的適當選擇：

$$\dot{V}(x, z) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial V_1}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)z] + zv \quad (7.2.10)$$

根據上式，為了使得 $\dot{V} < 0$ ，可選控制律 v 如下：

$$v = -\frac{\partial V_1}{\partial x} g(x) - kz, k > 0 \quad (7.2.11)$$

將上式的 v 代入(7.2.10)式中，得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, z) &= \frac{\partial V_1}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x)] - kz^2 \\ &\leq -V_a(x) - kz^2 < 0 \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

其中用到(7.2.2)式的條件。條件 $\dot{V} < 0$ 保證(7.2.11)式的控制律 v 使得整合系統(7.2.7)為漸進穩定。控制律 v 得到後，將之代入(7.2.6)式，最後得到原系統(7.2.1)式的控制律 u 如下：

$$\begin{aligned} u &= \dot{\phi}(x) + v = \dot{\phi}(x) - \frac{\partial V_1}{\partial x} g(x) - kz \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + g(x)\xi] - \frac{\partial V_1}{\partial x} g(x) - k[\xi - \phi(x)] \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

其中用到了新變數 v 及 z 的定義式。上式說明全系統的控制律 u 決定於內層子系統的控制律 $\xi = \phi(x)$ ，以及其所對應的 Lyapunov 函數 $V_1(x)$ 。

(b) 參考例題 7.2.1

(b) 1. 設計內層結構控制律

令 $\xi = \phi(x)$ 代入 $\dot{x} = f + g\xi$ ，使內層子系統為漸進穩定

即 P 要找到 $V_a(x) > 0$ ，且滿足

$$\dot{V}_a(x) = \frac{\partial V_a}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V_a}{\partial x} (f(x) + g(x)\xi) \leq -V_a(x) \leq 0$$

其中 $V_a(x)$ 为正定函數

2. 建立外層結構

將原系統改寫為

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)(\xi - \phi(x))$$

$$\dot{\xi} = u$$

此時進入子系統的訊號為 $\xi - \phi(x)$

3. 定義外層結構的控制訊號

$$z = \xi - \phi(x) \Rightarrow \dot{z} = \dot{\xi} - \dot{\phi}(x) = u - \dot{\phi}(x)$$

定義新的空制訊號

$$v = \dot{z} = u - \dot{\phi}(x) \text{，故可得}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)z \\ \dot{z} = v \end{cases}$$

4. 決定外層系統控制律

設 $V(x, z)$ 為全系統的 Lyapunov func.

$$\Rightarrow \dot{V}(x, z) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial V_1}{\partial x} (f(x) + g(x)\beta(x) + g(x)z) + zV$$

為了使 $\dot{V} < 0$, 故選控制律 V

$$V = -\frac{\partial V_1}{\partial x} g(x) - k z$$

$$\dot{V}(x, z) = \frac{\partial V_1}{\partial x} (f(x) + g(x)\beta(x)) - kz^2 \leq -V_a(x) - kz^2 < 0$$

且 $\dot{z} = v = u - \beta(x) \Rightarrow u = v + \beta(x)$

$$\therefore u = \beta(x) + V = \frac{\partial V_1}{\partial x} (f(x) + g(x)\beta(x)) - \frac{\partial V_1}{\partial x} g(x) - k(z - \beta(x))$$

(b)

將原式轉為標準式, 令 $x = x_1, z = x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{z} = x_1 + u \end{cases}$$

1. 令 $\xi = \beta(x_1)$, 使狀態 x_1 為漸近穩定

$$\text{令 Lyapunov 函數 } V_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{V}_1(x_1) = x_1 \dot{x}_1 = x_1 (x_1 \xi) \leq -V_a(x_1) \leq 0$$

且 V_a 為一正定函數, 令 $V_a(x_1) = x_1^4$

$$\text{則 } \xi = \beta(x) = -x_1^2$$

2. 決定外層系統控制律

$$\begin{aligned} u &= \beta(x_1) - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} g(x_1) - kz \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)\xi) - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} g(x_1) - k(\xi - \beta(x_1)) \\ &= -2x_1(x_1 - x_1^2) - x_1 \cdot x_1 - k(x_2 + x_1^2) \end{aligned}$$

(a) (10%) 試以下列的非線性系統為例, 說明逆向步進控制的設計步驟:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi, \quad \dot{\xi} = u \quad (2)$$

(b) (10%) 將以上的設計步驟應用到以下的非線性系統

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 - 2x_1^3 - x_2, \quad \dot{x}_2 = u \quad (3)$$

求出使得系統為漸近穩定的回授控制律 u 。

(a) (10%) 試以下列的非線性系統為例，說明逆向步進控制的設計步驟：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi, \quad \dot{\xi} = u \quad (2)$$

(b) (10%) 將以上的設計步驟應用到以下的非線性系統

$$\dot{x}_1 = -3x_1^2 / 2 - x_1^3 / 2 - x_2, \quad \dot{x}_2 = u \quad (3)$$

求出使得系統為漸近穩定的回授控制律 u 。

(15%) 考慮以下的非線性系統，

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 + u \quad (5)$$

本題的目的是要設計滑動控制律(sliding control) u ，使得系統(5)能夠進入以下的滑動面

$$S(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \quad (6)$$

也就是要使得單位圓變成是系統(5)的極限圓。

(a) 設計切換控制 u_N^+ 和 u_N^- ，使得初始狀態不管在何處，都有往單位圓運動的趨勢。

(b) 設計平衡控制 u_{Eq} ，使得當系統狀態進入單位圓後，能一直停留在單位圓上。

(A) 滑動面外界區域之控制：切換控制 u_N

考慮非線性系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (8.3.4)$$

u 之設計是要使得 $\dot{S} < 0$ ，其中 \dot{S} 可表之為

$$\dot{S} = \frac{dS}{dx} \dot{x} = \nabla S \cdot (f + gu) \quad (8.3.5)$$

設控制分量 u_N^+ 、 u_N^- 分別滿足

$$\nabla S \cdot (f + gu_N^+) > 0 \quad (8.3.6a)$$

$$\nabla S \cdot (f + gu_N^-) < 0 \quad (8.3.6b)$$

若 u 採用如下的切換邏輯

$$u_N = \begin{cases} u_N^+, & S(x) < 0 \\ u_N^-, & S(x) > 0 \end{cases} \quad (8.3.7)$$

可以看出此時 $u = u_N$ 滿足 $\dot{S} < 0$ 之條件。當 $S < 0$ 時，取 $u = u_N^+$ ，而 u_N^+ 又使得 $\dot{S} = \nabla S \cdot (f + gu_N^+) > 0$ ，故有 $\dot{S} < 0$ ；反之，當 $S > 0$ 時，取 $u = u_N^-$ ，而 u_N^- 又使得 $\dot{S} = \nabla S \cdot (f + gu_N^-) < 0$ ，故也有 $\dot{S} < 0$ 。

(B) 滑動面上的控制：平衡控制 u_{Eq}

此部分的 u 是要使得，當 $S(x_0) = 0$ 時， $\dot{S}(x_0) = 0$ ；亦即一旦軌跡點 x_0 落入滑動面 $S(x_0) = 0$ 之後，則不再離開。這一部分的控制稱為平衡控制，可令(8.3.5)式中的 $\dot{S} = 0$ 而得到

$$u = u_{Eq} = -(\nabla S \cdot g)^{-1} \nabla S \cdot f(x_0) \quad (8.3.8)$$

其中 $x_0 \in \{x_0 | S(x_0) = 0\}$ 。

(a) 選定平面 $S = x_1^2 + x_2^2 - 1$

$$\dot{S} = 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = 2x_1^2 x_2 + 2x_2 (x_1^2 + u)$$

若 u_N 採用下列

$$u = \begin{cases} u_N^+, & x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0 \\ u_N^-, & x_1^2 + x_2^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

\therefore 當 $u_N = u$ 時 滿足 $\dot{S} < 0$

(b)

$$\sum \dot{S} = 0$$

$$\Rightarrow 2x_1^2 x_2 + 2x_2 (x_1^2 + u) = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + u = 0 \Rightarrow u = -2x_1^2$$

故當 $u = -2x_1^2$ ，則滿足 $S(x_0) = 0$ ， $\dot{S}(x_0) = 0$

(15%) 考慮如(3)式的非線性系統，本題的目的是要設計滑動控制律(sliding control) u ，使得系統(3)能夠進入以下的滑動曲線(sliding surface)

$$S(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \quad (4)$$

$S = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ 代表一個極限圓(limit cycle)。 $u = 0$ 時，系統(3)不存在極限圓。本題的目的是要透過控制訊號 u 適當地設計，使得單位圓變成是系統(3)的極限圓。分別求出切換控制 u_N^+ 和 u_N^- ，以及平衡控制 u_{Eq} ，使得系統狀態 x ，不管初始位置在哪裡，最後的相平面軌跡都可以進入指定的極限圓(4)，並一直維持在此圓上。

(10%) 考慮非線性系統

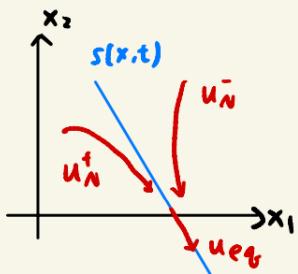
$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4)$$

解釋如何設計控制律 u 使得系統狀態 x ，最後可以進入指定的滑動曲線 $S(x, t) = 0$ 。

若要讓各狀態落入吾人所指定的滑動面上

需滿足 $\begin{cases} \dot{s} < 0, s \neq 0 \\ \dot{s} = 0, s = 0 \end{cases}$

若選定滑動面 $S(x, t) = (\frac{d}{dt} + \lambda)^{n-1} \tilde{X}$



其中 $\dot{s} = \frac{ds}{dx} \dot{x} = \nabla s \cdot (f + g u)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{s} = \nabla s \cdot (f + g u_N^+) > 0 \\ \dot{s} = \nabla s \cdot (f + g u_N^-) < 0 \end{cases}$

則此時切換邏輯 $u_N = \begin{cases} u_N^+, s < 0 \\ u_N^-, s > 0 \end{cases}$

若控制在滑動面上，則滿足

$\Rightarrow S(x_0) = 0$ 時 $\dot{S}(x_0) = 0$

此時 $\dot{s} = \nabla s \cdot (f + g u) = 0$

$\Rightarrow u = u_{eq} = \frac{-\nabla s \cdot f(x_0)}{\nabla s \cdot g}$

(10%) 適應性控制可區分為三大類：(A)自動調整型(auto-tuning)控制器，(B)增益排程型(gain-scheduling)控制器，(C)適應型(adaptation)控制器。歸納整理這三種類型的適應性控制，討論它們各自適用的時機及優缺點。

特性/種類	自動調整型	增益排程型	適應型
控制器參數值	自動調整	自動調整	自動調整
調整時機	使用者決定	自動決定	自動決定
調整頻率	使用者決定	預先規劃	依環境自動變化
適用環境	<ul style="list-style-type: none"> ● 有未知動態,但特性不變或變化很慢。 ● 人為監控環境下。 	<ul style="list-style-type: none"> ● 操作環境變化大 ● 有重覆性,可預先分割成小區域。 ● 沒有突發狀況。 	<ul style="list-style-type: none"> ● 操作環境無法預估範圍大小。 ● 沒有重覆性,無法做規律的分割。
優缺點	<ul style="list-style-type: none"> ● 調整機制簡單 ● 需使用者隨時監控 	<ul style="list-style-type: none"> ● 調整機制簡單 ● 不需使用者監控 ● 對於突發或新的狀況無法處理。 	<ul style="list-style-type: none"> ● 依環境的變化而反應,不需人監控。 ● 可應付突發狀況。 ● 調整機制複雜。
應用實例	<ul style="list-style-type: none"> ● 自動調整 PID ● 工業控制 ● 程序控制 	<ul style="list-style-type: none"> ● 飛行控制 ● 強健路徑控制 	<ul style="list-style-type: none"> ● 自我調變控制 ● 參考模式適應控制
目前進展	一般自動化產業	高精密科技	學術性研發

(10%)最高等級的適應性控制有二種:(1)自我調整適應性控制(Self-tuning Adaptive Control), (2)參考模式適應性控制(Model-Reference Adaptive Control), 比較這二種適應性控制的運作原理及組成架構。

自我調整適應性控制

屬於間接型的適應性控制。此法是先估測得到受控體的參數 θ 後,才去設計控制器的參數 θ_c , 故稱為間接型。(間接型適應性控制的優點是控制器與估測器能夠分開獨立設計,我們可以根據不同的規格需求與控制理論,設計不同的控制器。間接型適應性控制的缺點則是如果受控體的參數 θ 估測不準確,後續的控制器設計就無法對真實的受控體做出反應。)自此型控制器的架構如圖 9.4.1 所示,它是由二個獨立的結構所組成:

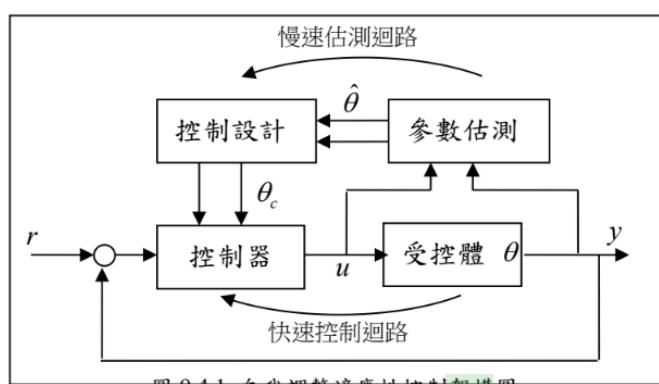


圖 9.4.1 自我調整適應性控制架構圖

- (a) 內迴路:又稱為控制迴路或快速迴路。在一段短暫的 Δt 時間內,受控體的參數 θ 可視為不變。而控制的目的是要 y 追蹤參考指令 r 。
- (b) 外迴路:又稱估測迴路或慢迴路。它是運作在一段較長的時距 Δt 內,此時受控體參數的變化即很明顯,故需加以估測。

直接型的適應性控制:此法是直接針對控制器參數 θ_c 進行估測,估測的好壞是以模式追蹤誤差 $e(t) = y(t) - y_m(t)$ 的大小來判斷,而不是以受控體參數 θ 估的準不準來判斷。此法的優點是模式追蹤誤差 $e(t)$ 不受到參數估測誤差 $\theta^-(t) = \hat{\theta}(t) - \theta(t)$ 的影響,縱使參數估測誤差 $\theta^-(t) \neq 0$,仍可保證追蹤誤差 $e(t) \rightarrow 0$ 。缺點則是控制器的結構受到限制,不能任意指定。參考模式適應性控制具有直接型與間接型兩種。

參考模式適應性控制

目的是要透過適應調整的機制，使得系統的輸出 y 能夠追隨參考模式的輸出 y_m 。由於受控體的參數 θ 為未知或隨著環境而變化，控制器參數 θ_C 必須隨時估測調整，才能保證 $y(t) \rightarrow y_m(t)$ 。

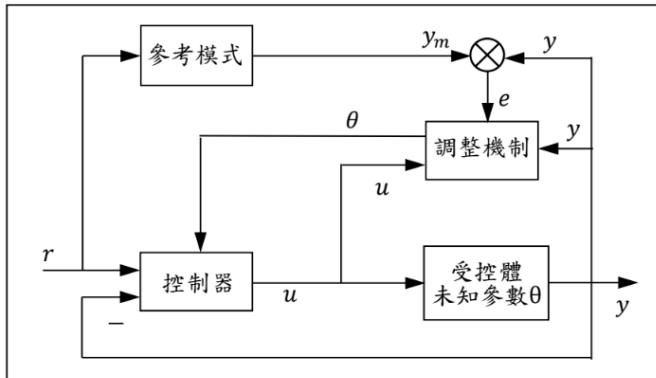


圖 9.4.2 參考模式適應性控制的方塊圖

考慮下列之一階系統

$$\dot{y} + a_p y = b_p u \quad (3)$$

其中參數 a_p, b_p 為已知。本題的目的是要設計 u ，使得 $y(t)$ 能追蹤 $y_m(t)$ ，其中 $y_m(t)$ 源自下列參考模式的輸出

$$\dot{y}_m + a_m y_m = b_m r \Rightarrow y_m = \frac{b_m}{s + a_m} r \quad (4)$$

假設控制訊號採用線性回授的方式： $u = K_y^* y + K_r^* r$ ，決定參數 K_y^* 及 K_r^* 的值使得 y 與 r 的關係與(4)式完全一致。(10%)

上一個例題的系統輸出 $y(t)$ 是要趨近於設定值 $y = 0$ (此稱為 regulation 問題)，本節的設計目的是要 $y(t)$ 去追蹤(track 或 follow)一個參考模式的狀態 $y_m(t)$ 。考慮下列之一階系統

$$\dot{y} + a_p y = b_p u \quad (9.6.15)$$

其中參數 a_p, b_p 為未知。這裡的控制目標是要設計 u ，使得 $y(t)$ 能追蹤 $y_m(t)$ ，其中 $y_m(t)$ 源自下列參考模式的輸出

$$\dot{y}_m + a_m y_m = b_m r \Rightarrow y_m = \frac{b_m}{s + a_m} r \quad (9.6.16)$$

其 a_m, b_m 為已知之參數， r 為輸入參考指令。適應性控制的設計仍然分成二個步驟進行：

(1) 控制律的設計：

控制訊號採用線性回授的方式，

$$u = K_y^* y + K_r^* r \quad (9.6.17)$$

其中 y 是系統的輸出值， r 為參考命令，均為已知。將控制 u 代入(9.6.15)式中，得到 y 與 r 間的轉移函數為

$$y = \frac{b_p K_r^*}{s + a_p - b_p K_y^*} r \quad (9.6.18)$$

由於要求 y 和 y_m 要一致，比較(9.6.16)和(9.6.18)式得到如下的結果

$$\frac{b_m}{s+a_m} = \frac{b_p K_r^*}{s+a_p - b_p K_y^*} \Rightarrow K_r^* = \frac{b_m}{b_p}, K_y^* = \frac{a_p - a_m}{b_p} \quad (9.6.19)$$

如此選擇之 K_r^* 及 K_y^* 即可保證 $y(t) \rightarrow y_m(t)$ 。但由於 K_r^*, K_y^* 中包含未知的參數 a_p, b_p ，所以 K_r^*, K_y^* 的值實際上也是未知，因此需要一個調整的機制，來隨時估測 K_r^*, K_y^* 的值。

(2) 參數調變律(adaptation law)的設計：

將(9.6.17)式的控制律改變成

$$u = \hat{K}_y(t)y + \hat{K}_r(t)r \quad (9.6.20)$$

其中 $\hat{K}_y(t)$ 和 $\hat{K}_r(t)$ 分別是 K_y^* 和 K_r^* 的估測值。並進一步將(9.6.15)式改寫如下：

$$y = \frac{b_m}{s+a_m}r + \frac{b_p}{s+a_m}(-K_y^*y - K_r^*r + u) \quad (9.6.21)$$

若將(9.6.19)式的 K_y^* 和 K_r^* 代入上式，即可化成(9.6.15)式的結果。注意上式右邊的第一項即為參考模式的動態

$$\frac{b_m}{s+a_m}r = y_m$$

現在定義

- 追蹤誤差 $e = y - y_m$
- 參數誤差 $\bar{K}_y = \hat{K}_y - K_y^*$, $\bar{K}_r = \hat{K}_r - K_r^*$

將(9.6.20)式代入(9.6.21)式，並用 e 、 \bar{K}_y 、 \bar{K}_r 的定義，則(9.6.21)式可改寫成

$$\dot{e} = -a_m e + b_p(\bar{K}_y y + \bar{K}_r r) \quad (9.6.22)$$

上面這個式子將參數誤差和追蹤誤差間之關係建立起來。現在有三個時間變數 e 、 \bar{K}_y 、 \bar{K}_r ，但只有一個方程式(9.6.22)，因此我們還需要二個關於 \bar{K}_y 和 \bar{K}_r 之微分方程式。假設

$$\dot{\bar{K}}_y = \dot{\hat{K}}_y = f_1(e, \bar{K}_y, \bar{K}_r) \quad (9.6.23a)$$

$$\dot{\bar{K}}_r = \dot{\hat{K}}_r = f_2(e, \bar{K}_y, \bar{K}_r) \quad (9.6.23b)$$

f_1 和 f_2 是二個待定函數，目的是要使得追蹤誤差 $e(t) \rightarrow 0$ 。 f_1 、 f_2 的選擇需透過 Lyapunov 穩定定理。茲採用一般的二次式 Lyapunov 函數如下：

$$\underline{V(e, \bar{K}_y, \bar{K}_r)} = \frac{e^2}{2} + \frac{\bar{K}_y^2}{2\gamma_1} |b_p| + \frac{\bar{K}_r^2}{2\gamma_2} |b_p| > 0 \quad (9.6.24)$$

$$\dot{\bar{K}}_y = \dot{\hat{K}}_y = f_1 = -\text{sgn}(b_p)\gamma_1 e y \quad (9.6.25a)$$

$$\dot{\bar{K}}_r = \dot{\hat{K}}_r = f_2 = -\text{sgn}(b_p)\gamma_2 e r \quad (9.6.25b)$$

此時 \dot{V} 可化簡成

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0 \quad (9.6.26)$$

因此由 Lyapunov 穩定定理知，由(9.6.22)、(9.6.23)式所組成之系統必為 Lyapunov 穩定，亦即 $e(t)$ 、 $\bar{K}_y(t)$ 、 $\bar{K}_r(t)$ 將必侷限在平衡點附近之微小區域內運動，不會發散。尤有甚者，因為

$$\dot{V} = 0 \text{ 時, } e = 0$$

此表示 $t \rightarrow \infty$ 時， $e \rightarrow 0$ ，亦即 $y \rightarrow y_m$ ；不過要注意的是 $t \rightarrow \infty$ 時， $\bar{K}_y(t)$ 、 $\bar{K}_r(t)$ 並不一定要趨於零。此表示 e 為漸進穩定，但 $\bar{K}_y(t)$ 、 $\bar{K}_r(t)$ 僅止於 Lyapunov 穩定。

以(9.6.25)式來調變 \hat{K}_y 和 \hat{K}_r 的值，並將每一瞬間的 \hat{K}_y 和 \hat{K}_r 代入(9.6.20)式形成適應控制器，可以確保系統的輸出 $y(t)$ 可以追蹤參考模式的輸出 $y_m(t)$ ，而達到參考模式適應性控制的目的；不過要注意的是參數的估測值可能會有誤差的存在，但這並不影響到 $y \rightarrow y_m$ 的結果。

考慮非線性系統:

$$\dot{y} + a_p y + c_p \sin y = b_p u \quad (5)$$

現在要設計參考模式適應性控制 u ，使得在系統參數未知的情況下，非線性系統的輸出能夠追蹤以下的線性參考模式: $\dot{y}_m + 4y_m = 4r$ 。

- (a) (10%) 將控制訊號表成 $u = K_y y + K_f \sin y + K_r r$ ，並假設受控體參數 a_p 、 b_p 、 c_p 為已知的情況下，求出控制律參數 K_y^* 、 K_f^* 、 K_r^* ，使得 $r \rightarrow y$ 間的轉移函數與 $r \rightarrow y_m$ 間的轉移函數完全一致。
- (b) (10%) 其次假設受控體參數 a_p 、 b_p 、 c_p 為未知的情況下，推導出控制律參數的估測值 \hat{K}_y 、 \hat{K}_f 及 \hat{K}_r 所要滿足的調變律，以保證追蹤誤差 $e = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ 。

例題 9.6.1

考慮一個不穩定系統的受控體:

$$\dot{y} + a_p y = b_p u \rightarrow \dot{y} - y = 3u \quad (9.6.27)$$

其中系統的真實參數 $a_p = -1$ ， $b_p = 3$ ，對於適應性控制的設計者而言是未知的。現在要設計適應性控制 u ，使得在系統參數未知的情況下，系統狀態能夠追蹤以下的參考模式:

$$\dot{y}_m + 4y_m = 4r \quad (9.6.28)$$

也就是 $a_m = b_m = 4$ 。設初始條件 $y_m(0) = y(0) = 0$ ，並設任何時刻下的 $y(t)$ 都可被測量到。適應控制律由(9.6.20)式所給定: $u = \hat{K}_y(t)y + \hat{K}_r(t)r$ ，其中的增益 \hat{K}_y 與 \hat{K}_r 則由調變律(9.6.25)式所決定(取 $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$):

$$\dot{\hat{K}}_y = -2ey, \quad \dot{\hat{K}}_r = -2er, \quad \hat{K}_y(0) = \hat{K}_r(0) = 0 \quad (9.6.29)$$

其中輸出 y 是測量值，但在數值模擬時， $y(t)$ 實際上是求解自(9.6.27)式的數值解。基於 MRAC 的適應性控制一方面要進行參數的調變，一方面要進行參考模式的追蹤控制。將 $u = \hat{K}_y(t)y + \hat{K}_r(t)r$ 代入(9.6.27)式中，並結合(9.6.29)式得到四個聯立的 ODE

$$\dot{y} = (1 + 3\hat{K}_y)y + 3\hat{K}_r r, \quad y(0) = 0 \quad (9.6.30a)$$

$$\dot{y}_m = -4y_m + 4r, \quad y_m(0) = 0 \quad (9.6.30b)$$

$$\dot{\hat{K}}_y = -2(y - y_m)y, \quad \hat{K}_y(0) = 0 \quad (9.6.30c)$$

$$\dot{\hat{K}}_r = -2(y - y_m)r, \quad \hat{K}_r(0) = 0 \quad (9.6.30d)$$

求解得到四個變數 $(y(t), y_m(t), \hat{K}_y(t), \hat{K}_r(t))$ 隨時間的變化情形，如圖 9.6.4 所示。圖(a)與(b)顯示輸入 $r = 4$ 所對應的適應性控制結果，可以看到追蹤誤差 $e = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ ，說明控制的結果使得系統響應與參考模式完全一致。(b)圖則顯示參數估測的結果，參數的正確值為 $K_y^* = (a_p - a_m)/b_p = -5/3$ ， $K_r^* = b_m/b_p = 4/3$ 。可以看到參數估測值 $\hat{K}_y(t)$ 與 $\hat{K}_r(t)$ 最後並未收斂於 K_y^* 與 K_r^* ，存在有穩態誤差。圖(c)與(d)則顯示輸入 $r = 4\sin 3t$ 所對應的適應性控制結果，同樣得到追蹤誤差 $e = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ 的結果，而且對於這組正弦波的輸入，參數估測值 $\hat{K}_y(t)$ 與 $\hat{K}_r(t)$ 最後都能收斂於正確的參數值 K_y^* 與 K_r^* 。這二種不同輸入所產生的控制結果，說明使用較複雜的輸入指令 r ，較能得到正確的參數估測。但不管參數估測有沒有誤差，適應性控制都能在未知參數的作用下，達到追蹤參考模式的功能。

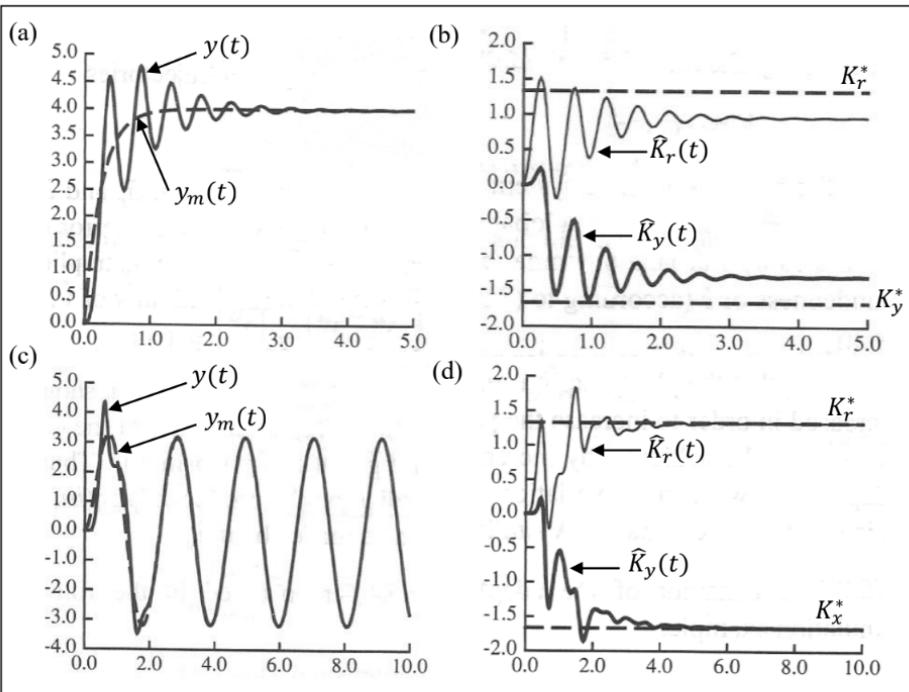


圖 9.6.4 例題 9.6.1 的數值模擬結果，(a)與(b)是相對於 $r = 4$ 的時間響應，(c)與(d)是相對於 $r = 4\sin 3t$ 的時間響應(Slotine and Li, 1991)。

(20%)考慮非線性系統：

$$\dot{y} + a_p y + c_p \cos y = b_p u \quad (7)$$

現在要設計參考模式適應性控制 u ，使得在系統參數未知的情況下，非線性系統的輸出能夠追蹤線性參考模式: $\dot{y}_m + y_m = r$ 。

(a) (10%) 將控制訊號表成 $u = K_y y + K_f \cos y + K_r r$ ，先假設受控體參數 a_p 、 b_p 、 c_p 為已知的情況下，求出控制器參數 K_y^* 、 K_f^* 、 K_r^* ，使得 $r \rightarrow y$ 間的轉移函數與 $r \rightarrow y_m$ 間的轉移函數完全一致。

(b) (10%) 其次假設受控體參數 a_p 、 b_p 、 c_p 為未知的情況下，推導出控制律參數的估測值 \hat{K}_y 、 \hat{K}_f 及 \hat{K}_r 所要滿足的調變律，以保證追蹤誤差 $e = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ 。

前面關於 MRAC 適應性控制的討論可以輕易擴展到非線性的情形(Slotine and Coetsee, 1986)。延續上一小節的討論，但在(9.6.15)式中多加入一個非線性項而成為

$$\dot{y} + a_p y + c_p f(y) = b_p u \quad (9.6.31)$$

其中 $f(y)$ 是給定的非線性函數，三個參數 a_p 、 b_p 與 c_p 則為未知。控制 u 的設計是要在系統有未知參數的情況下。使得非線性系統的動態趨近於參考模式的動態：

$$\dot{y}_m + a_m y = b_m r \quad (9.6.32)$$

類似(9.6.17)式的形式，我們將控制 u 取成

$$u = K_y^* y + K_f^* f(y) + K_r^* r \quad (9.6.33)$$

它是由二個回授項及一個前授項所組成， K_y^* 、 K_f^* 與 K_r^* 分別是三項的增益值。其中的 $K_f^* f(y)$ 是非線性回授項，目的是要去除(9.6.31)式左側的非線性項。為了使(9.6.31)與(9.6.32)二式的動態

完全一樣，三個增益值必須取成下列的數值

$$K_y^* = \frac{a_p - a_m}{b_p}, K_f^* = \frac{c_p}{b_p}, K_r^* = \frac{b_m}{b_p}, \quad (9.6.34)$$

容易證明將以上的增益值代入(9.6.33)式，再將 u 代入(9.6.31)式，其結果就是(9.6.32)式的參考模式。然而(9.6.34)式所給定的增益值決定於系統的三個未知參數 a_p 、 b_p 與 c_p ，這使得正確的控制增益值實際上無從得知。所以我們必須建立一個即時調整的機制，來估測這三個增益值。假設 \hat{K}_y 、 \hat{K}_f 、 \hat{K}_r 是所對應的估測值，則估測所得的控制訊號可表成

$$u = \hat{K}_y y + \hat{K}_f f(y) + \hat{K}_r r \quad (9.6.35)$$

定義參數估測誤差為

$$\bar{K}_y = \hat{K}_y - K_y^*, \bar{K}_f = \hat{K}_f - K_f^*, \bar{K}_r = \hat{K}_r - K_r^* \quad (9.6.36)$$

將(9.6.35)代入(9.6.31)式，可得閉迴路系統方程式

$$\dot{y} + (a_m - b_p \bar{K}_y) y = b_p \bar{K}_f f(y) + (b_m + b_p \bar{K}_r) r \quad (9.6.37)$$

取(9.6.37)式與(9.6.32)式的差，並定義模式追蹤誤差為

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (9.6.38)$$

可得追蹤誤差所要滿足的方程式

$$\dot{e} = -a_m e + b_p (\bar{K}_y y + \bar{K}_f f(y) + \bar{K}_r r) \quad (9.6.39)$$

剩下來的問題是要建立增益值的調變機制，其一般化的形式為

$$\dot{\hat{K}}_y = \dot{\bar{K}}_y = f_1(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) \quad (9.6.40a)$$

$$\dot{\hat{K}}_f = \dot{\bar{K}}_f = f_2(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) \quad (9.6.40b)$$

$$\dot{\hat{K}}_r = \dot{\bar{K}}_r = f_3(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) \quad (9.6.40c)$$

其中 f_1 、 f_2 與 f_3 是待定函數，目的是要使得追蹤誤差為漸進穩定，亦即 $e(t) \rightarrow 0$ 。仍然採用Lyapunov直接定理來確保 $e(t) \rightarrow 0$ ，並選取二次式的Lyapunov函數如下：

$$V(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} |b_p| \left(\frac{1}{\gamma_1} \bar{K}_y^2 + \frac{1}{\gamma_2} \bar{K}_f^2 + \frac{1}{\gamma_3} \bar{K}_r^2 \right) \geq 0 \quad (9.6.41)$$

其中 $\gamma_i > 0$ 是自由選定的參數。取 V 對時間的微分得

$$\dot{V} = -a_m e^2 + b_p (\bar{K}_y y + \bar{K}_f f(y) + \bar{K}_r r) e + |b_p| \left(\frac{1}{\gamma_1} \bar{K}_y f_1 + \frac{1}{\gamma_2} \bar{K}_f f_2 + \frac{1}{\gamma_3} \bar{K}_r f_3 \right) \quad (9.6.42)$$

為了使得 $\dot{V} \leq 0$ ，三個待定函數 f_1 、 f_2 與 f_3 可取成如下的形式

$$f_1 = -\text{sgn}(b_p) \gamma_1 e y, f_2 = -\text{sgn}(b_p) \gamma_2 e f(y), f_3 = -\text{sgn}(b_p) \gamma_3 e r \quad (9.6.43)$$

將上式代回(9.6.42)式， \dot{V} 可化簡成

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0 \quad (9.6.44)$$

當 $\dot{V} = 0$ 時，必有 $e = 0$ ，但無法保證參數估測誤差 \bar{K}_y 、 \bar{K}_f 、 \bar{K}_r 為零。這說明(9.6.40)式與(9.6.43)式所採用的增益調整機制可以達到模式追蹤的目的 $e(t) = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ ，但無法保證完美的參數估測。通常若指令 $r(t)$ 為步階輸入，將導致參數估測誤差的存在，因為步階輸入無法激起系統高頻的響應。若取指令 $r(t)$ 為弦波輸入，則有助於消除參數估測誤差。

- (a) (5%) 解釋 Lyapunov Stability 與 Input-Output Stability 二種穩定性的定義有何不同?
 (b) (5%) 在講義 Part II 中，那些控制方法是基於 Lyapunov Stability? 那些控制方法是基於 Input-Output Stability?

L: 逆向步進控制

回授線性化

(10%) 解釋『輸入-狀態回授線性化』與『輸入-輸出回授線性化』二者有何不同?

1. 輸入-狀態

藉由輸入 u 將狀態 x 線性化

① 將狀態轉換 $z = \phi(x)$, 將控制轉換 $u = u(x, v)$

可轉換為線性 eg. $\dot{z} = Az + Bv$

② 針對線性 eg. 設計控制律 $v = -kz$

可得閉迴路特性 eg.

2. 輸入-輸出：

建立 u 與 y 之間的線性關係，而不管狀態 x 的線性化

但保持 x 有界，使得 y 遵循目標 y_d ，且需對 y 微分次

引出 u 得到相對階級 (外部) 來觀察內部動態

並加以分析