1 混沌(chaos)的測試

1.1 題目說明：

試用 MATLAB 求解非線性 ODE

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^3 = 5cost$$

測試兩組很接近的初始條件

(a) $x(0) = 3$，$\dot{x}(0) = 4$

(b) $x(0) = 3.01$，$\dot{x} = 4.01$

比對兩組 x(t)對時間的響應圖，是否很接近?若把非線性項 x，情況又如何？

1.2 敘述主要問題及基本方程式：

混沌理論是關於非線性系統在一定參數條件下展開分岔、週期運動與非週期運相互糾纏，以至於通向某種非週期有據的運動理論。混沌現象通常發生在對初始值變化特別敏感的系統，所以極小初始差距有可能造成在系統的最後狀態產生極大偏差。

為了驗證這個問題，我們執行以下的數值模擬：

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^3 = 5cost$$

並使用兩組非常接近的初始條件 (a) $x(0) = 3$，$\dot{x}(0) = 4$; (b) $x(0) = 3.01$，$\dot{x} = 4.01$來對比兩組 x(t)圖對時間的響應圖是否接近。

1.3 數值模擬：

我們利用 MATLAB 進行數值模擬，設計程式如下：

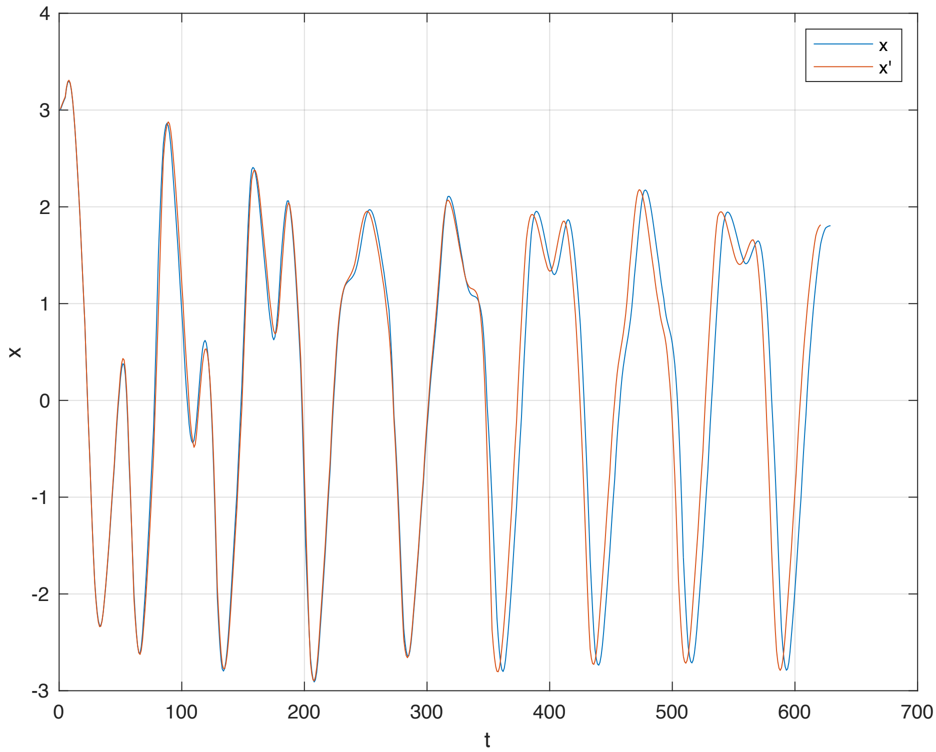
```
% The origial ODE
f = @(t,x) [x(2); 5*cos(t)-0.1*x(2)-x(1)^3];
%solve ODE. The time interval is set from 0 to 40 seconds
[t, x] = ode45(f, [0 40], [3 4]);

figure;
plot(x(:,1));
grid on; hold on;

% After chaos ODE
f = @(t,x) [x(2); 5*cos(t)-0.1*x(2)-x(1)^3];
[t, x] = ode45(f, [0 40], [3.01 4.01]);
plot(x(:,1), '');
```

```
legend("x","x'")
xlabel('t');
ylabel('x');
```

其中由於 ode45 是一種自適應步長（變步長）的常微分方程數解法，不僅採用四階－五階 Runge-Kutta 算法，為四階方法提供候選解，亦為五階方法控制誤差，因次本次使用 ode45 提供的 Runge-Kutta 積分法化出 (a)、(b) 不同初始條件分別對應的兩條 x(t)軌跡，藍色實線與紅色實線（如圖 1）。



圖一、混沌現象

1.4 結果分析：

由圖一可發現在 350 秒之前 x(t) 與 x'(t) 十分接近、系統穩定，但在 350 秒之後，x'(t) 開始弱後 x(t)，系統變得不穩定。由此可見，雖然 (a)、(b) 兩初始值只有 0.01 的差距，卻在系統輸出最後造成偏差。有了不可預期的此輸出結果，以及系統軌道不穩定的特性，此分析顯然表明混沌現象的基本概念。

1.5 討論

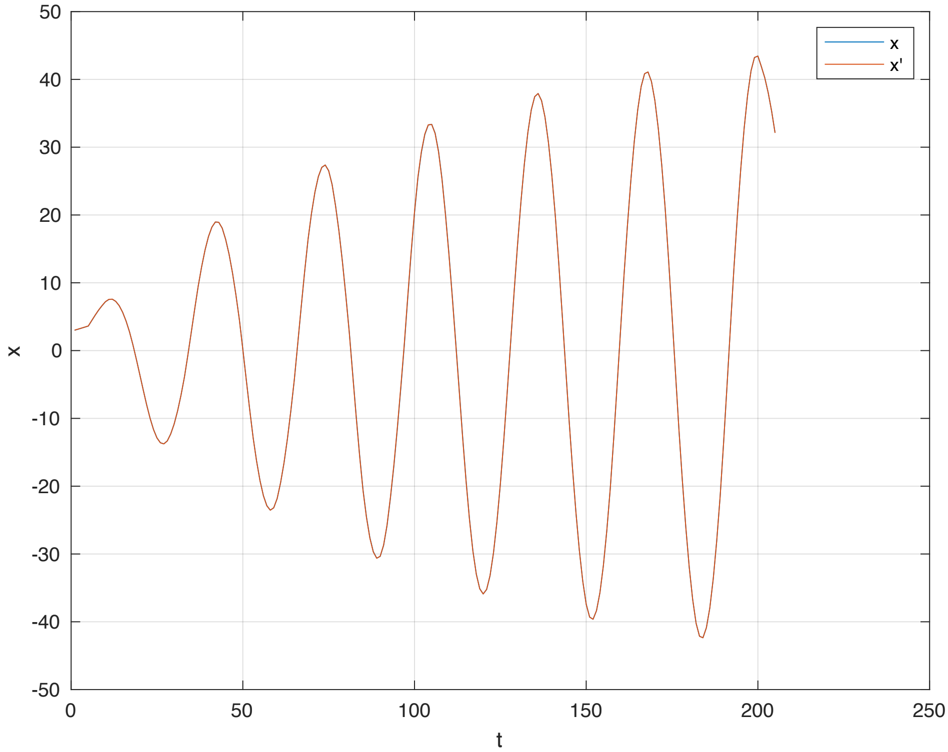
1.5.1 探討問題：

為什麼此系統會有混沌現象？是因為系統來源造成的嗎？如果我

們調整變數組成，也依舊造成系統輸出結果產生偏差嗎？

1.5.2 驗證方法與分析：

將可能造成非線性的x^3改為x項，查看兩條 x(t)的軌跡變化。



圖二、線性系統，沒有混沌現象

1.5.3 推論：

由圖二可發現 x(t)始終貼合，沒有因為時間增加而發生錯位、分離或劇變。即使初始值 x 有了 0.01 的小擾動，也不會造成整體系統軌跡不穩定。由此可推論，線性系統不太可能產生混沌現象。

1.6 總結

雖然混沌的輸出結果是確定的，但其行為無法由前階段的初始響應去預測後階段的響應。倘若遇到一點小擾動，可能會經混沌放大作用使得輸出值發生極大的偏差。然而，此情況只會發生在非線性系統，線性系統不太會發生混沌運動。

混沌現象通常伴隨著奇異吸子的發生。平衡點和軌道都是屬於吸子，而在複雜的非線性動力系統中，奇異吸子是其中一種表高階非線性系統的吸子。接下來以經典的 Lorenz 加以描述廣義的奇異吸子系統。

2 Lorenz 奇異吸子的測試：

2.1 題目說明：

Lorenz 奇異吸子的測試:用 MATLAB 求解下列非線性 ODE

$$\dot{x} = 10(y - x)$$
$$\dot{y} = x(28 - z) - y$$
$$\dot{z} = xy - 8z/3$$

選取初始位置(x(0), y(0), z(0)) = (1,1,0),畫出軌跡點(x(t), y(t), z(t))隨時間 t = 0 連續變化到 t = T 所連成的曲線。比較三種終端時間:T = 100, 1000, 10000,所得到的奇異吸子軌跡有何不同? 如果將初始位置改成(x(0), y(0), z(0)) = (10,1,0),其結果有何不同?

2.2 敘述主要問題及基本方程式：

Lorenz 是經典的奇異吸子系統，用以描述混沌吸子間的連結關係。簡化後 Lorenz 方程式為一組常微分方程式：

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$
$$\dot{z} = xy - \beta z$$

通常 $\sigma = 10$，$\beta = 8/3$，ρ 不定，但系統在 $\rho = 28$時會表現出混沌的特性。在此我們想探討 ((x(t), y(t), z(t)) 隨時間 t=0 連續變化到終端時間 T=100, 1000, 10000 的奇異吸子軌跡變化，以及兩種起始位置為(1,1,0), 或 (10,1,0) 之軌跡變化。共有六種情況。

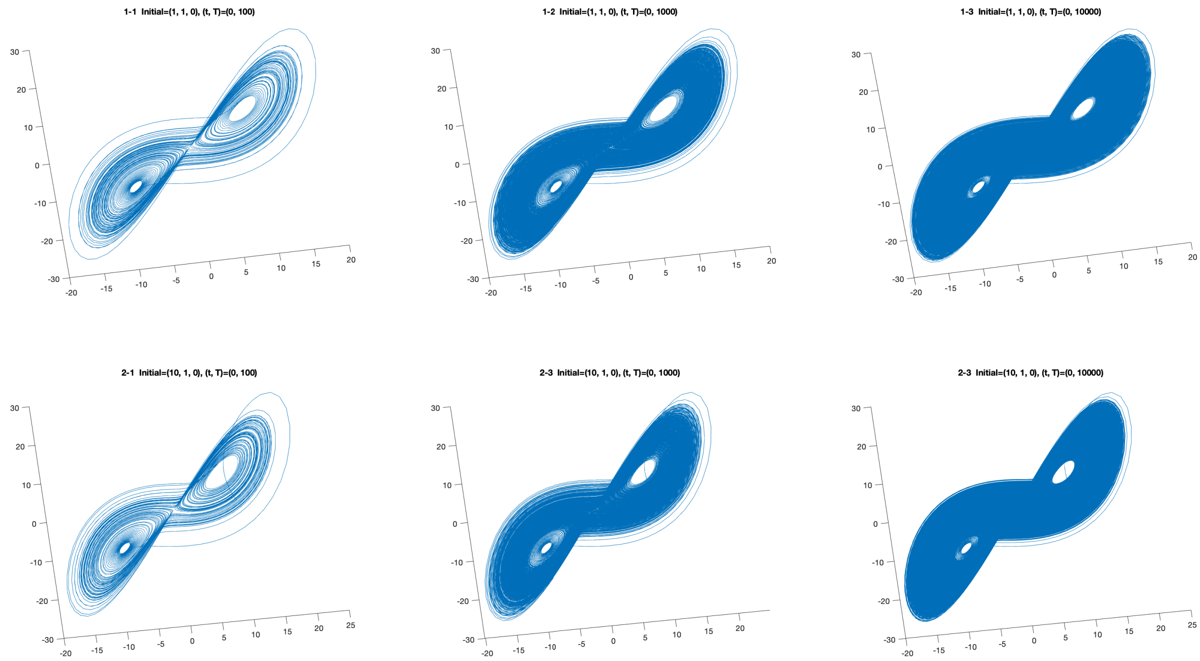
2.3 數值模擬：

為了要呈現 Lorenz 軌跡點在兩種初始位置 (x(0), y(0), z(0)) 在以及三種終端時間下的系統軌跡變化，我們利用 MATLAB 進行數值模擬，設計程式如下：

```
sigma = 10;
beta = 8/3;
rho = 28;
f = @(t,a) [-sigma*a(1) + sigma*a(2); rho*a(1) - a(2) -
a(1)*a(3); -beta*a(3) + a(1)*a(2)];
[t,a] = ode45(f,[0 100],[1 1 0]);   % Runge-Kutta 4th/5th
order ODE solver
figure(1)
```

```
subplot(2,3,1)
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3))
title('1-1  Initial=(1, 1, 0), (t, T)=(0, 100)')
subplot(2,3,2)
[t,a] = ode45(f,[0 1000],[1 1 0]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3))
title('1-2  Initial=(1, 1, 0), (t, T)=(0, 1000)')
subplot(2,3,3)
[t,a] = ode45(f,[0 10000],[1 1 0]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3))
title('1-3  Initial=(1, 1, 0), (t, T)=(0, 10000)')
subplot(2,3,4)
[t,a] = ode45(f,[0 100],[10 1 0]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3))
title('2-1  Initial=(10, 1, 0), (t, T)=(0, 100)')
subplot(2,3,5)
[t,a] = ode45(f,[0 1000],[10 1 0]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3))
title('2-3  Initial=(10, 1, 0), (t, T)=(0, 1000)')
subplot(2,3,6)
[t,a] = ode45(f,[0 10000],[10 1 0]);
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3))
title('2-3  Initial=(10, 1, 0), (t, T)=(0, 10000)')
```

如上題混沌測試，利用 ode45 積分功能畫出奇異吸子的軌跡。一共有六種軌跡。上排是在 (x, y, z) 初始值為 $(1, 1, 0)$ 的情況之下，終端時間為 T=100, T=1000, T=10000 時，由左到右之軌跡變化。下排是在 (x, y, z) 初始值固定為 $(10, 1, 0)$ 之下，時間一樣從 T=100, T=1000, T=10000 由左到右之軌跡分佈。



圖三、Lorenz 奇異吸子

2.4 結果分析：

2.4.1 無論初始位置為何，最後都會收斂軌跡，漸進穩定，並進入極限區域裡。

2.4.2 當積分時間夠長，曲面將被曲線將緊密填滿，形成具有非整數維度的幾何體，又稱碎形。

2.5 總結

此兩現象皆為混沌現象之特徵。因此，上述六種軌跡分析結果顯然支持混沌作用會伴隨著 Lorenz 奇異吸子系統的產生。

3 霍普夫分岔(Hopf bifurcation)的測試：

3.1 題目說明：

考慮下列非線性 ODE

$$\dot{x} = \mu x - y + 2x(x^2 + y^2)^2 \quad ，\dot{y} = x - \mu y + 2y(x^2 + y^2)^2$$

其中 m 是常數。

(a) 將直角座標(x, y)轉成極座標(r, θ),並將上式用 r, θ表示之。

(b) 任選三個不同的μ值：$\mu1 > 0$，$\mu2 = 0$，$\mu3 < 0$，用 MATLAB 畫出其相對應的軌跡圖(x(t), y(t))。

(c) 根據極座標方程式及上述軌跡變化，推論分岔現象時之 μc值。

(d) 比較 $\mu > \mu c$ 及 $\mu < \mu c$ 二種情形下，平衡點數目是否有改變,軌跡的幾何結構是否有改變？

3.2 敘述主要問題及基本方程式：

為了方便進行 ODE 運算並畫出極座標軌跡圖，我們將將直角座標 (x, y) 轉成極座標 (r, θ)：

$$\dot{x} = \mu x - y + 2x(x^2 + y^2)^2$$
$$-\dot{r}cos\theta - rsin\theta\,\dot{\theta} = \mu rcos\theta - rsin\theta + 2r^5cos\theta$$
$$-\dot{r}cos\theta - rsin\theta\,\dot{\theta} = -\mu rcot\theta + r - 2r^5cot\theta$$

$$\dot{y} = x - \mu y + 2y(x^2 + y^2)^2$$
$$\dot{r}sin\theta + rcos\theta\,\dot{\theta} = rcos\theta - \mu rsin\theta + 2r^5sin\theta$$
$$\dot{r}sin\theta + rcos\theta\,\dot{\theta} = r - \mu rtan\theta + 2r^5tan\theta$$

簡化後：
$$\dot{r} = r(\mu - r^2)$$
$$\dot{\theta} = 1$$

3.3 數值模擬：

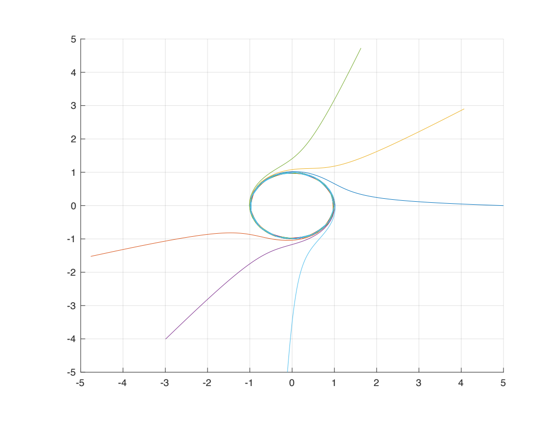
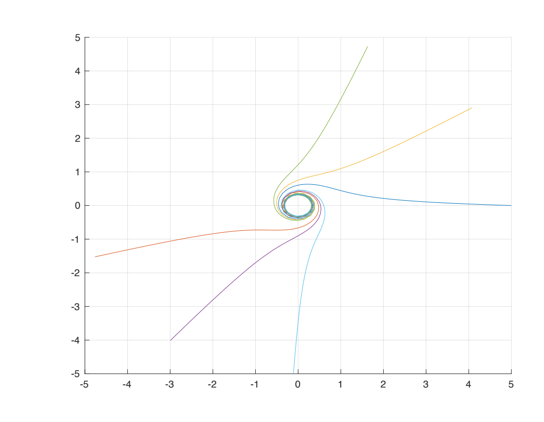
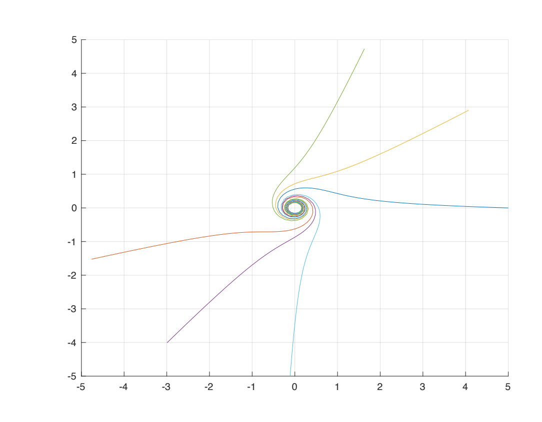
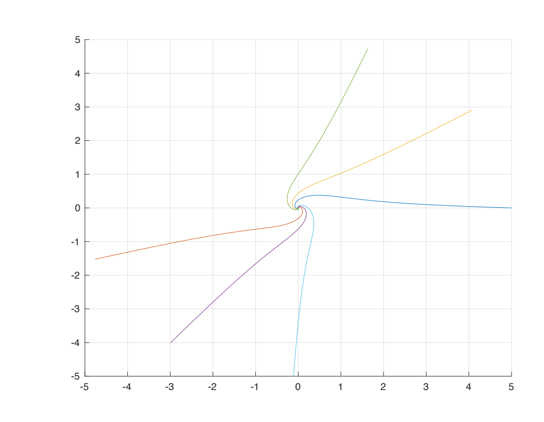
任選六個不同的μ值：$\mu = 1$，$\mu = 0.5$，$\mu = 0$，$\mu = -0.5$，$\mu = -0.9$，$\mu = 1$ 用 MATLAB 畫出其相對應的軌跡圖，程式設計如下：

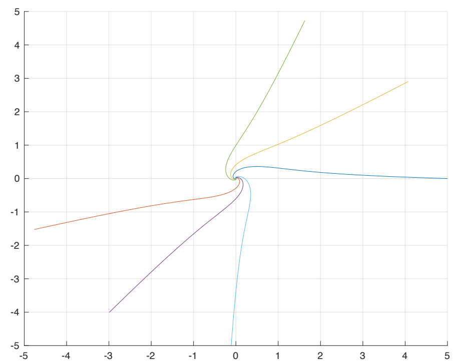
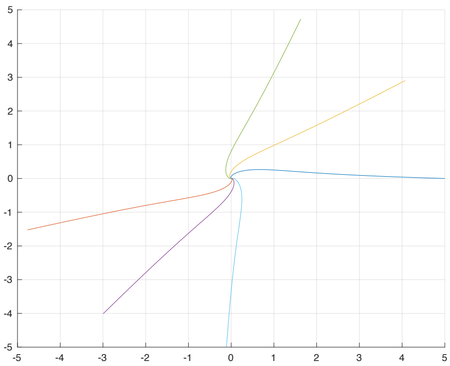
```
u = 0;
f = @(t, a) [1; a(2)*(u-a(2)^2)];

[t,a] = ode45(f,[0 20],[0 5]);
figure
grid on; hold on;
polar(a(:,1),a(:,2))
[t,a] = ode45(f,[0 10],[60 5]);
polar(a(:,1),a(:,2))
[t,a] = ode45(f,[0 20],[120 5]);
polar(a(:,1),a(:,2))
[t,a] = ode45(f,[0 20],[180 5]);
polar(a(:,1),a(:,2))
[t,a] = ode45(f,[0 20],[240 5]);
```

```
polar(a(:,1),a(:,2))
[t,a] = ode45(f,[0 20],[300 5]);
polar(a(:,1),a(:,2))
```

我將啟迄時間設定從 0 到 20 秒，另外為了更明顯呈現「 極限圓 」以及「 收斂點 」，我將每張的輸出圖都一次設定六個初始值，分別為 $(\theta, r) = (0,5), (60,5), (120,5), (180,5), (240,5), (360,5)$。因此得出以下極座標軌跡 (x(t), y(t)) 在六種不同μ值的做圖結果：

$\mu = 1$	$\mu = 0.5$
	
$\mu = 0$	$\mu = -0.9$
	
$\mu = -1$	$\mu = -2$

表一、霍普夫分岔

3.4　結果分析：

根據上表的六種極座標的軌跡變化，我們可以發現在 $\mu=0$ 時，原先收斂到平衡點的軌跡突然離開平衡點而進入極限圓，因此可推論出分岔現象發生在 $\mu_c=0$。

(a) 若 $\mu<\mu_c$ 時，$\dot{r}<0$，r遞減，最終趨於平衡點，故此平衡點於 $(0,0)$ 是穩定的。

(b) 若 $\mu>\mu_c$ 時，可分為三種情形討論：

1. $r>\sqrt{\mu}$，則 $\dot{r}>0$，r 增加，使平衡點不穩定。
2. $r=\sqrt{\mu}$，則 $\dot{r}=0$，r 一直維持在$\sqrt{\mu}$。
3. $r<\sqrt{\mu}$，則 $\dot{r}<0$，r 減少，且$r\to\sqrt{\mu}$。故知 $\mu>0$ 時，軌跡為極限圓。

3.5　總結

藉由以上 Hopf bifurcation 之測試，由於 $\mu=0$ 附近之微小變化，造成 $\mu<0$與 $\mu>0$ 軌跡結構完全不同，故知 $\mu_c=0$ 為一分岔點。而上表(表一)亦說明 $\mu<0$ 的各個不同值所對應的系統軌跡圖。當 μ 負值越大，原本為多個平衡點的極限為，逐漸收斂到只剩一個平衡點 (0, 0)；而在 $\mu=0$ 時即為兩種軌跡結構的分水嶺。