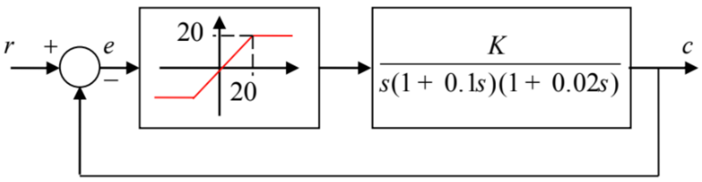
1 問題描述

考慮如下列之控制方塊圖，其中包含非線性的飽和元件



(a) 將非線性飽和元件用其描述函數加以取代，並利用古典控制的 Nyquist 定理決定使得系統為穩定的最大允許K值(記作K^*)。

(b) 接續(a)，隨意取數值 $K_1 > K^*$，並在上面方塊圖中，令 $K = K_1$ (例如若$K^* = 10$，可取 $K = K_1 = 15$)，參考例題 3.3.2 的方法，由描述函數求出極限圓發生時的振幅 X，及頻率 ω。

(c) 利用 MATLAB 的非線性飽和元件模組，模擬上面方塊圖的時間響應 c(t)，每次模擬使用不同的 K 值，決定使得系統為穩定的最大允許 K 值(記作K^*)。註:這裡的穩定是指在輸入指令 r = 0 的情形下，不管初始誤差 e(0) > 20 或是 e(0) < 20，都可以保證 c(t) → 0。

(d) 比較以上二種方法所得到的K^*值，分析二者的差異所代表的意義。

(e) 在問題(c)中，取數值 $K = K_1 > K^*$，其中K_1的值取成與(b)題相同，但以 MATLAB 進行模擬不使用描述函數，確認方塊圖是否存在極限圓的振盪解 c(t) = X sin ωt。如果存在的話，比較此振幅 X，及頻率 ω 是否與(b)題的答案相同。(注意:所謂極限圓的振盪解是指不管初始誤差 e(0)為多少，MATLAB 的響應 c(t)最後都收斂到相同的弦波函數 X sin ωt)

2 解題方法

2.1 問題(a)：將非線性飽和元件用其描述函數

針對本題的飽和元件，可以看出以下特性：

(i) 當輸入訊號振福介於 −20 ≤ X ≤ 20 區間時，輸出訊號與輸入，訊號成正比(通過原點)，比值為 1，屬於線性區操作範圍。

(ii) 當輸入訊號振福 X ≥ 20 時，輸出訊號落在正飽和區，輸出值固定在 20。

(iii) 當輸入訊號振福 X ≤ −20 時，輸出訊號落在負飽和區，輸出值固定在−20。

因此，當正弦波訊號X sin ωt 輸入一個飽和元件時，可推論出輸出訊號 y(t) 前四分之一週期形式為

$$y(t) = \begin{cases} Xsin(\omega t), & 0 \le \omega t \le \omega t_1 \\ 20, & \omega t_1 < \omega t < \pi/2 \end{cases}$$

其中 ωt_1 滿足 $Xsin(\omega t)=20$，即 $\omega t_1=sin^{-1}(20/X)$，若將系統輸出由傅立葉級數表示並只取一階諧和分量 $y_1(t)$，可得

$$y_1(t)=a_0+a_1cos(\omega\mathrm{t})+b_1sin(\omega\mathrm{t})$$

由於此系統輸出為奇函數，傅立葉展開式只含 $sin(\omega\mathrm{t})$ 項，故$y_1(t)$為

$$y_1(t)=b_1sin(\omega t)$$

其中

$$\begin{aligned}
b_1sin(\omega t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(t)sin(\omega t)d(\omega t)\\
&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}y(t)sin(\omega t)d(\omega t)\\
&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\omega t_1}X\,sin^2(\omega t)d(\omega t)+\int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}}20\,sin(\omega t)\,d(\omega t)
\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\omega t_1+\frac{20}{X}\sqrt{1-\left(\frac{20}{X}\right)^2}\right)$$

傅立葉級數積分區間原先為 $0\leq\omega t\leq 2\pi$，但因對稱的關係，只取第一象限的積分並將其值乘以 4。因此得飽和元件的描述函數為

$$N(X,\emptyset)=\frac{b_1}{X}2\angle 0^O=\frac{2}{\pi}\left(sin^{-1}\left(\frac{20}{X}\right)+\frac{20}{X}\sqrt{1-\left(\frac{20}{X}\right)^2}\right)$$

欲以 Nyquist 定理檢測系統穩定度，則系統等效轉移函數可表示為

$$\frac{C(j\omega)}{Y(j\omega)}=\frac{N(X)G(j\omega)}{1+N(X)G(j\omega)}$$

可得特徵方程式為

$$1+N(X)G(j\omega)=0\Longrightarrow G(j\omega)=-\frac{1}{N(X)}$$

透過上式，可知 $-1/N(X)$ 隨輸入振幅 X 之變化如下

（i） 當 $0\leq X<20$ 時，系統是操作在線性區域，此時非線性飽和限制 不起作用，因而不是描述函數的適用範圍故在此不做討論。

（ii） 當 $X=20$ 時， $-\frac{1}{N(X)}=-1$

(iii) 當 X ≥ 20 時，$-\frac{1}{N(X)} = -\pi \times 2^{-1}\left(sin^{-1}\left(\frac{20}{X}\right) + \frac{20}{X}\sqrt{1-\left(\frac{20}{X}\right)^2}\right)^{-1}$

(iv) 當 X → ∞ 時，$-\frac{1}{N(X)} = -\infty$

由非線性系統之 Nyquist 定理，可判斷出

(i) 若$-1/N(X)$軌跡不被 $G(j\omega)$ 之軌跡所包圍時，則系統為穩定。
(ii) 若$-1/N(X)$軌跡被 $G(j\omega)$ 之軌跡所包圍時，則系統為不穩定。
(iii) 若$-1/N(X)$軌跡與 $G(j\omega)$ 之軌跡相交時，則系統為臨界穩定，此時交點處為發生極限圓的條件。

透過上述分析，可知$-1/N(X)$在複數平面上是一條落在負實軸上以-1為起始點向負無限大延伸的射線。為求使得系統為穩定的最大允許值 $K = K^*$，令$G(j\omega)$與$-1/N(X)$曲線有一交實軸交點，且$-1/N(X)$軌跡不被$G(j\omega)$之軌跡所包圍；因此欲先求$G(j\omega)$與實軸交點，首先將$G(j\omega)$實部與虛部分離，可得

$$
\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(1+0.1j\omega)(1+0.02j\omega)} \\
&= \frac{K}{-0.12\omega^2 + j\omega(1-0.02\omega^2)} \\
&= \frac{-0.12K}{0.000004\omega^4 + 0.0104\omega^2 + 1} - j\frac{K}{\omega(0.000004\omega^4 + 0.0104\omega^2 + 1)}
\end{aligned}
$$

此時可令虛部為零以求實軸交點，因此有

$$Im\big(G(j\omega)\big) = 0 \Rightarrow 1 - 0.002\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 10\sqrt{5}$$

$$Re\big(G(j\omega)\big)|_{\omega=10\sqrt{5}} = \frac{-0.12K}{0.000004\omega^4 + 0.0104\omega^2 + 1}|_{\omega=10\sqrt{5}} = -\frac{K}{60}$$

從上式得知$G(j\omega)$與實軸交點為$-K/60$，若欲求系統穩定的最大允許值K^*，此時可令$G(j\omega)$與$-1/N(X)$曲線交點落於$(-1,0)$，可得K^*為

$$Re\big(G(j\omega)\big)|_{\omega=10\sqrt{5}} = \frac{-K^*}{60} = -1 \Rightarrow K^* = 60$$

從上述可知，當系統穩定時，系統須滿足 $K < K^* = 60$

2.2 問題(b)：求出極限圓發生時的振幅 X，及頻率 ω

通過問題(a)分析結果，可知當選擇 $K = K_1 > K^*$ 時，系統將會根據 X 變化產生不穩定區、臨界穩定區及穩定區。本題欲求由描述函數求 出極限圓發生時的振幅 X，及頻率 ω，意即求出使得特徵方程式

$$N(X,\omega)G(j\omega)+1=0$$

在此取 $K = K_1 = 70$，可得

$$G(j\omega)=\frac{-8.4}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}-j\frac{(1-0.002\omega^2)70}{\omega(0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1)}$$

找出使$G(j\omega)$曲線與實軸相交之條件，意旨使虛部為零

$$-j\frac{(1-0.002\omega^2)70}{\omega(0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1)}=0$$

$$\Longrightarrow\ 1-0.002\omega^2=0$$

$$\Longrightarrow\ \omega=10\sqrt{5}$$

由於此題飽和元件描述函數$-1/N(X)$為一條由-1為起始點往負無限大延伸的射線，故在取得極限圓發生的頻率時皆須透過求 $G(j\omega)$ 與實軸之交點，因此無論 K 取多少，極限圓發生時的頻率皆相同。另一方面，為求極限圓發生時的振幅 X，可透過$-1/N(X)$之取線方程求得，意即通過交點的實部大小來求得振幅X ，因此首先有

$$Re\big(G(j\omega)\big)\big|_{\omega=10\sqrt{5},\ K=K_1=70}$$

$$=\frac{-0.12K}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}\Big|_{\omega=10\sqrt{5},\ K=K_1=70}$$

$$=-\frac{K_1}{60}$$

$$=-1.167$$

透過上式，最終可整理成

$$-\frac{1}{N(X)}=-\pi\times2^{-1}\left(arcsin\left(\frac{20}{X}\right)+\frac{20}{X}\sqrt{1-\left(\frac{20}{X}\right)^2}\right)^{-1}=-1.167$$

$$\Longrightarrow X=26.606$$

因此可知當選擇$K = K_1 = 70$時，可產生極限圓的情況發生在頻率為 $\omega=10\sqrt{5}$，振幅為 $X = 26.606$。

接著我們要檢驗 K 的選擇對於極限圓發生振幅之影響。首先，由於前面已證明極限圓在飽和元件下發生之頻率為定值，可知當選擇 $K = K_1 > K^*$時，系統將進入不穩定區間且極限圓振幅隨著 K 的選擇上升，另外使極限圓發生的 $G(j\omega)$ 與 $-1/N(X)$ 曲線之交點會在實軸上往左移動，可知 X 的上升將進一步導致極限圓振幅上升，如下表所示。

K	極限圓振幅X	K	極限圓振幅X
60	20	80	31.511
65	23.89	85	33.85
70	26.606	90	36.147
75	29.11	95	38.415

2.3 問題(c)：利用 MATLAB 模擬上面方塊圖的時間響應 c(t)

本題目的是利用 MATLAB 的非線性飽和元件模組將系統轉為如下的 Simulink 方塊圖，並且透過觀察系統誤差來決定系統穩定度，因此本題為一追蹤問題 (tracking problem)，需藉由調變變數 K 使得系統誤差 $e(t) \to 0$。

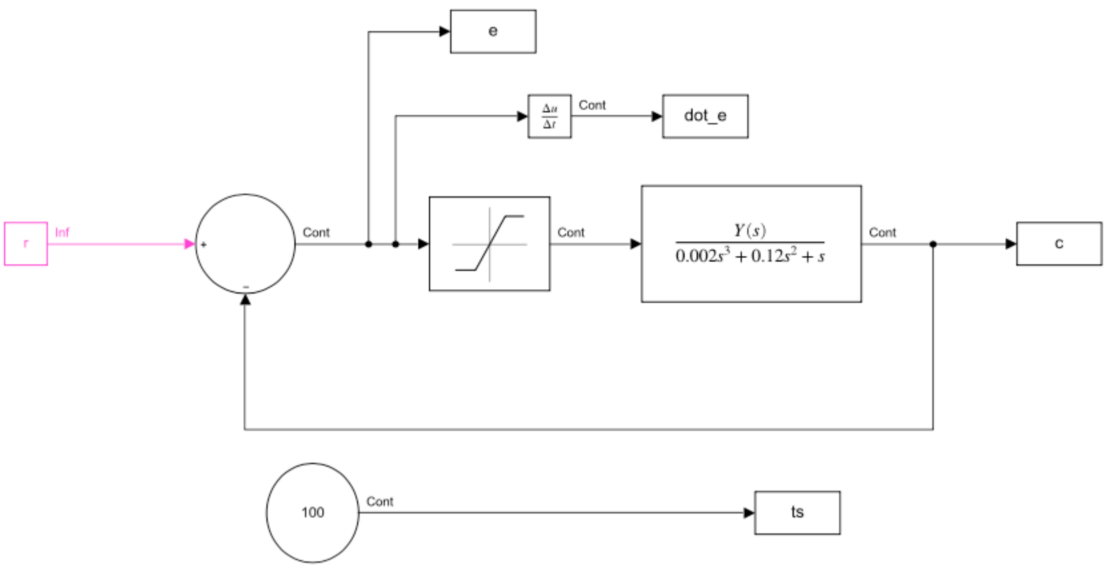


Figure 1: 系統 Simulink 模擬圖

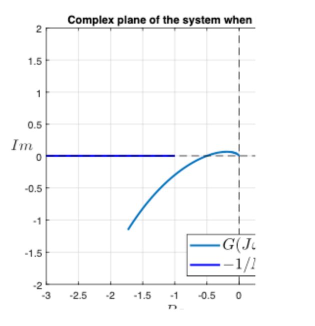
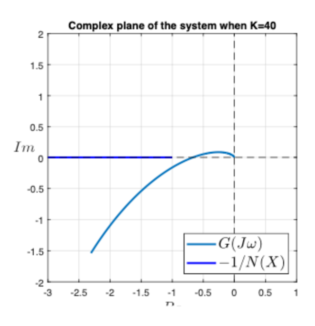
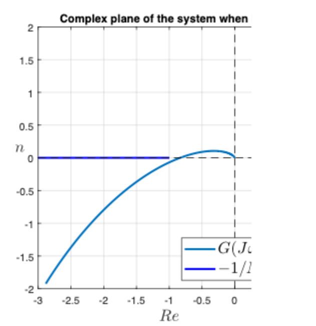
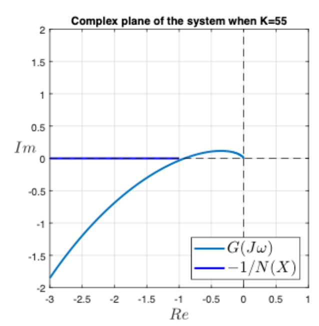
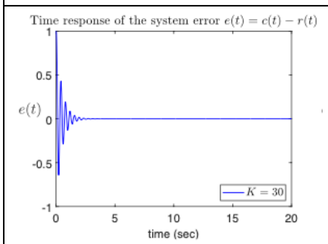
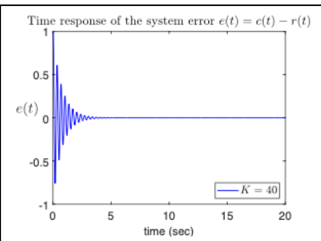
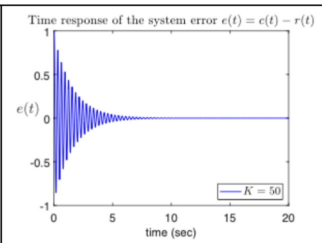
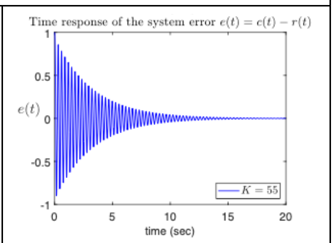
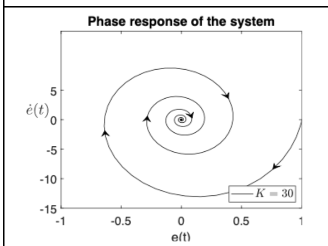
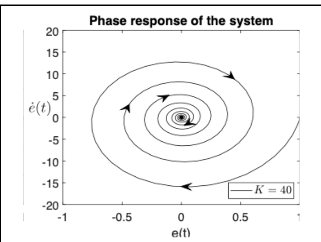
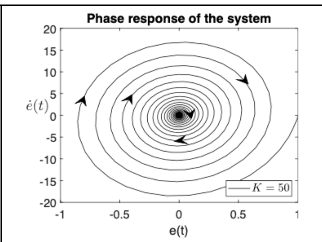
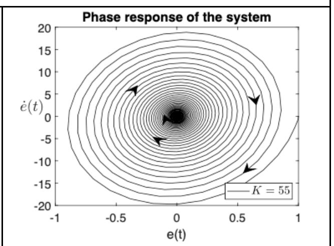
透過分析，當輸入值 $r(t) = 1$，隨著K的選擇不同而有以下發現

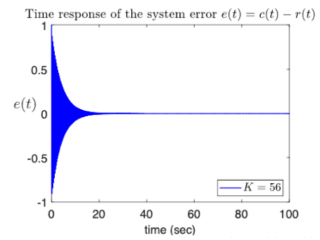
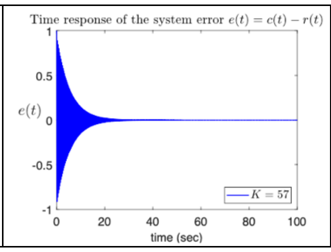
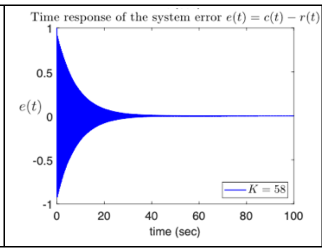
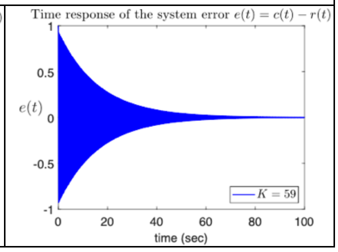
(i) 當選定 $K = 30, 40, 50, 55$，可發現系統皆處於穩定階段，因為 $-1/N(X)$ 曲線皆未被 $G(j\omega)$ 曲線包圍，如圖 2 所示；接著畫出系統誤差的時域分析，可發現隨著 K 值的上升 $(K < 60)$，系統誤差收斂至0的時間會逐漸拉長，如圖 3 所示；為驗證此結果，從相平面分析的結果中同樣可發現，當K值上升，系統誤差以旋轉進入原點的振盪次數會增加，系統平衡點呈現穩定焦點的收斂情形。

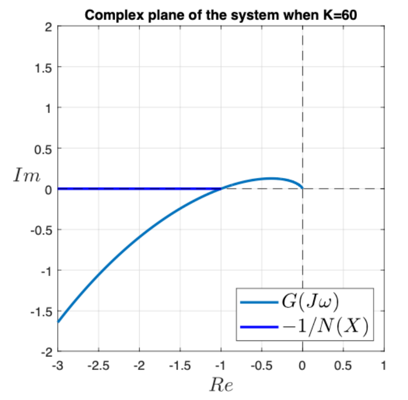
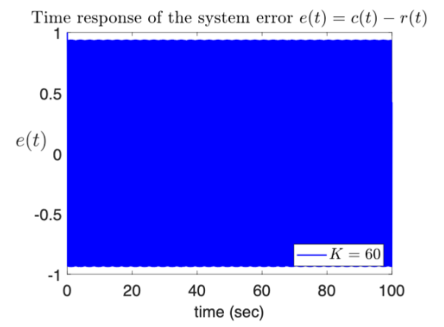
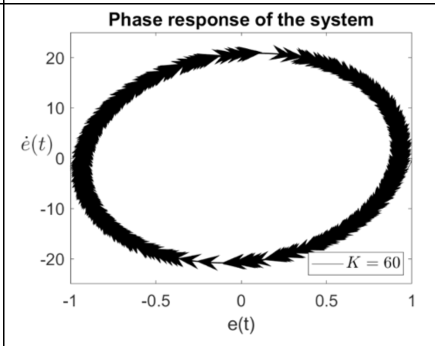
(ii)當選定 $K = 56, 57, 58, 59$，可發現系統仍是處於穩定階段，但不同於 (i) 的地方在於，系統誤差收斂時間的靈敏度上升，意即雖然在此階段只將 K 以 1 的間距向上增加，卻能造成收斂時間差距甚大，如圖 5 所示。

(iii) 當選擇 $K = 60$ 時，可以看到此時複數平面 $-1/N(X)$ 曲線與 $G(j\omega)$ 曲線將會有一交點，然而其他面的 $-1/N(X)$ 曲線的點皆未被 $G(j\omega)$ 曲線包圍，故此時系統處於臨界穩定，如圖 6 所示。此時系統 $e(t)$ 將會在一固定值 $\pm\alpha$ 來回振盪並且不會收斂，如圖 7 所示；透過相平面分析，可發現此系統會有極限圓的存在，如圖 8 所示。

透過上述分析可知，當系統穩定時，系統須滿足 $K > K^* = 60$。

<table>
<tr><td>K = 30</td><td>K = 40</td><td>K = 50</td><td>K = 55</td></tr>
<tr><td colspan="4">Figure 2: 系統之複數平面分析(K = 30, 40, 50, 55)</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Figure 3: 系統誤差之時域響應 (K = 30, 40, 50, 55)</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Figure 4: 系統誤差之相平面分析 (K = 30, 40, 50, 55)</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>K = 56</td><td>K = 57</td><td>K = 58</td><td>K = 59</td></tr>
<tr><td colspan="4">Figure 5: 系統誤差之時域響應 (K = 56, 57, 58, 59)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">K = 60</td></tr>
<tr><td>Figure 6: 系統之複數平面分析
(K = 60)</td><td>Figure 7: 系統誤差之時域響應
(K = 60)</td><td>Figure 8: 系統誤差之相平面分析
(K = 60)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

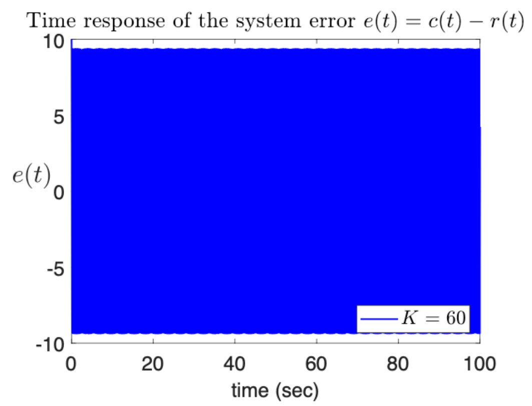
2.4　問題(d)：比較以上二種方法所得到的K^*值

綜合(a)及(c)的分析，可得知此系統的最大允許值 K^* 皆為 60。仔細觀察可以發現，在(b)中當 $K = K^* = 60$ 時，由描述函數推得知極限圓振幅 X = 20，再透過 MATLAB 及 Simulink 分析，可發現當輸入 $r(t) = 1$時，此時系統誤差將以 $e(t) = \pm r(t) = \pm 1$來回振盪，如圖 $7-8$ 所示；接著，進一步讓 $r(t) = 10$，此時仍會發生同樣情況，意即系統誤差將以 $e(t) = \pm r(t) = \pm 10$ 來回振盪，如圖 $9-10$ 所示，故推斷在此情況下，倘若 $r(t)$ 的選擇小於 (b) 題所計算的理論極限圓振幅值，系統誤 差將會直接以輸入最為基礎進行振盪。

為檢測上述推論，選擇皆大於理論值的 $r(t) = 30, 40, 50$，可發現振幅將會先收斂到計算出來的振幅值，然後再以 ± 20 來回振盪，如同我們預期的結果。MATLAB 繪圖結果如下：

（1）臨界值 $K = 60,\ r(t) = 10$

$K = 60, r(t) = 10$



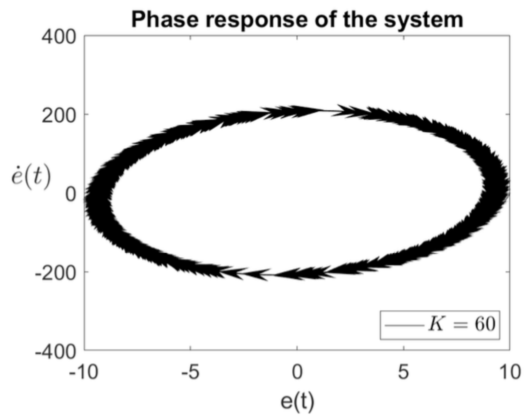


Figure 9: 系統誤差之時域響應

Figure 10: 系統誤差之相平面分析

(2) 固定 $K = 60$

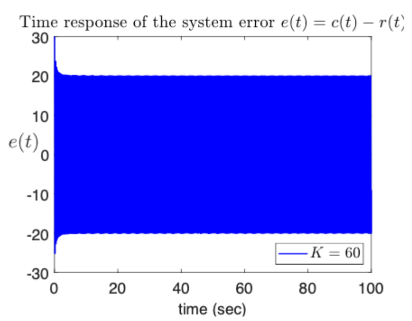
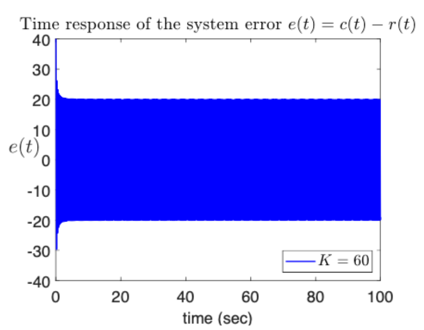
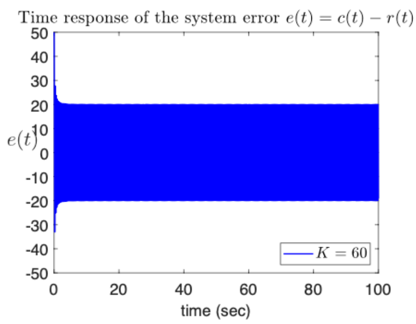
$K = 60, r(t) = 30$	$K = 60, r(t) = 40$	$K = 60, r(t) = 50$
		

Figure 11: 系統誤差之時域響應

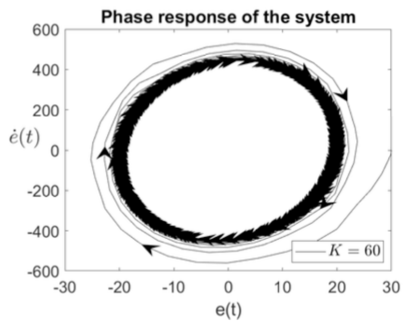
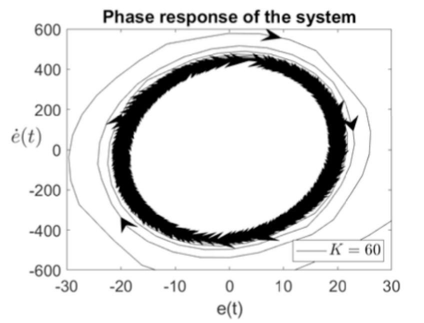
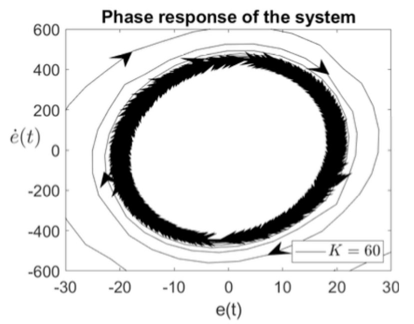
$K = 60, r(t) = 30$	$K = 60, r(t) = 40$	$K = 60, r(t) = 50$
		

Figure 12: 系統誤差相平面分析

2.5 問題(e)：MATLAB 模擬，不使用描述函數時是否存在極限圓的振盪解 c(t)

為比較描述函數求得的極限圓與程式繪出的極限圓差異，首先令 $r(t) = 1$，$K = 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95$，在此區間因為系統複數平面 $-1/N(X)$ 曲線與 $G(j\omega)$ 曲

線將會有一交點，部分 $-1/N(X)$ 曲線將被 $G(j\omega)$ 曲線包圍，故系統為不穩定狀態，如圖 13 所示:

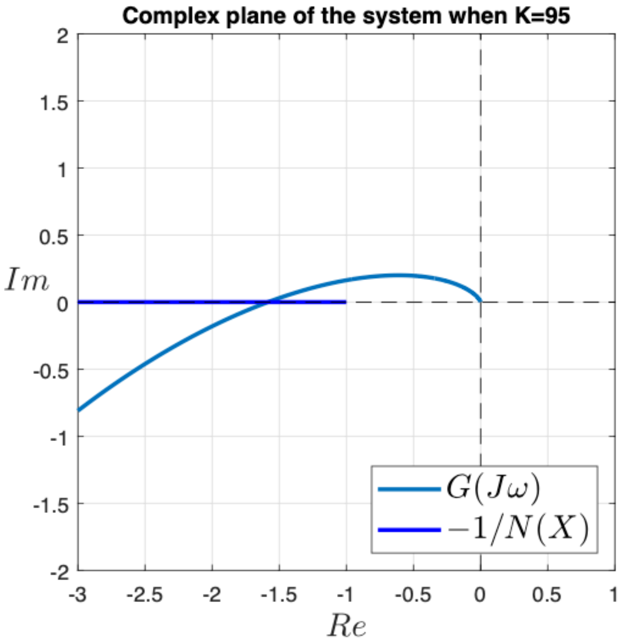


Figure 13: 系統之複數平面分析 (以 K = 95 為例)

透過進一步計算，可求得兩者振幅差異如下表所示。

K	使用描述函數之極限圓振幅 X	使用 Simulink 飽和元件之極限圓振幅 X
65	23.89	23.9455
70	26.606	26.7513
75	29.11	29.3602
80	31.511	31.8745
85	33.85	34.3322
90	36.147	36.7520
95	38.415	39.1444

從表中可以發現以 MATLAB 計算的極限圓振幅雖然略有不同但差 距不大，而發生極限圓的頻率同樣都是 $10\sqrt{5}$ 極限圓動態均為 $e(t) = X\,sin(10\sqrt{5}t)$。從 (d) 小題的分析可以發現，在臨界點 $K = 60$，當系統輸入小於理 論計算之極限圓振幅時，系統將意該輸入值在正負來回切換，意即系 統不會收斂到相同的弦波函數 $e\,(t) = 20\,sin(10\sqrt{5}t)$，為了測驗其他 K 值是否會有相同情形，故產生以下兩點分析：

(i) 當輸入 $r(t) = 1$ 時，無倫是 $K = 65,70,75,80,85,90,95$，系統 e(t) 皆會因為系統處於不穩定階段故向外發散，直到接觸到臨界點就進入極限圓，此時系統極限圓為動態變化 $e(t) = X\,sin(10\sqrt{5}t)$， 系統振盪情形如圖 14–15 所示，系統相平面分

析如圖 16–17 所示，可以發現系統以類似不穩定焦點，會向外擴散最終進入極限圓後不再離開。

(ii) 當輸入 $r(t) = 30$ 或 50 時，無倫是 $K = 65,70,75,80,85,90,95$， 系統 e(t) 首先會因為系統處於穩定階段而向內收斂，直到接觸到臨界點時進入極限圓，此時系統極限圓動態為 $e(t) = X\,sin(10\sqrt{5}t)$，系統振盪情形如圖 18– 19 所示，系統相平面分析 如圖 20– 21 所示，可以發現系統軌跡向內收斂至進入極限圓後不再離開。

綜合上述分析，除了臨界點/最大允許值 $K = 60$ 之外，隨著 K 的升高系統的極限圓動態相同，意即 $e(t) = X\,sin(10\sqrt{5}t)$，其中振幅 X 可由本題所求出的表所決定，另一方面，由於系統相平面不論從極限 圓外出發或是由極限圓內出發，系統誤差軌跡均會收斂到極限圓，故可推論雖然此系統在 $K > K^* = 60$ 時，系統處於不穩定的狀態，但系統含一個穩定的極限圓 。

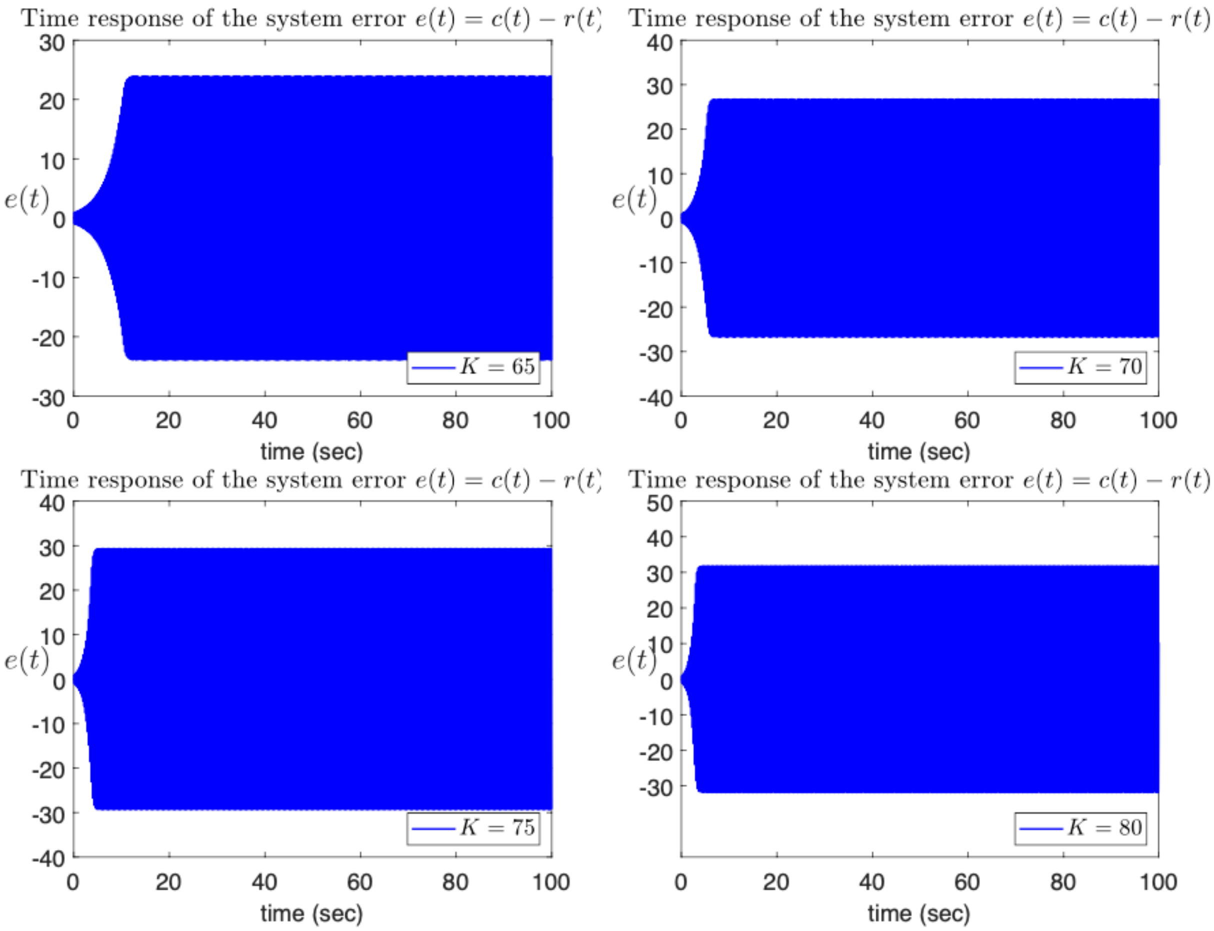


Figure 14: 用時域響應檢驗系統振盪解，K = 65, 70, 75, 80, r(t) = 1

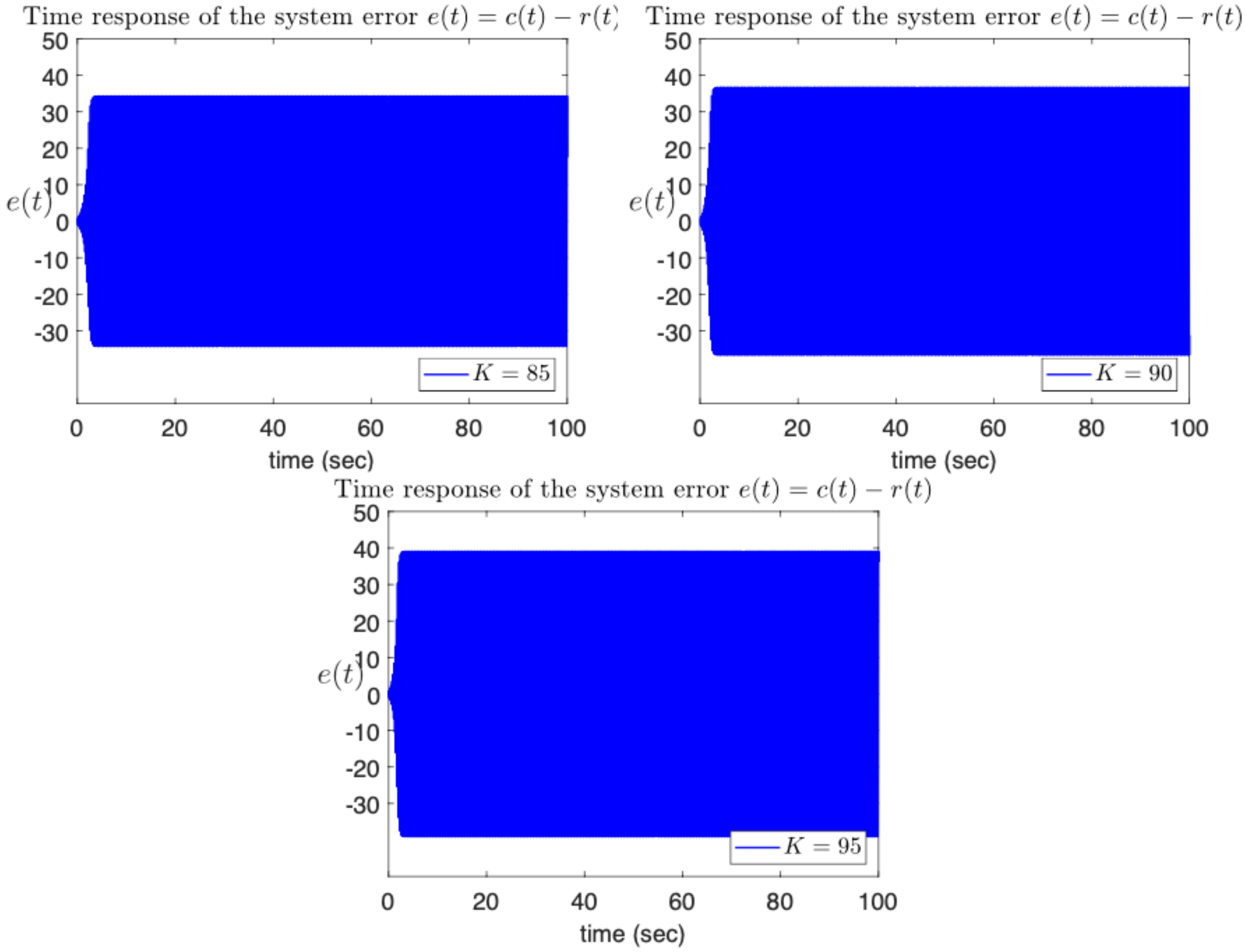


Figure 15: 用時域響應檢驗系統振盪解，K = 85, 90, 95, r(t) = 1

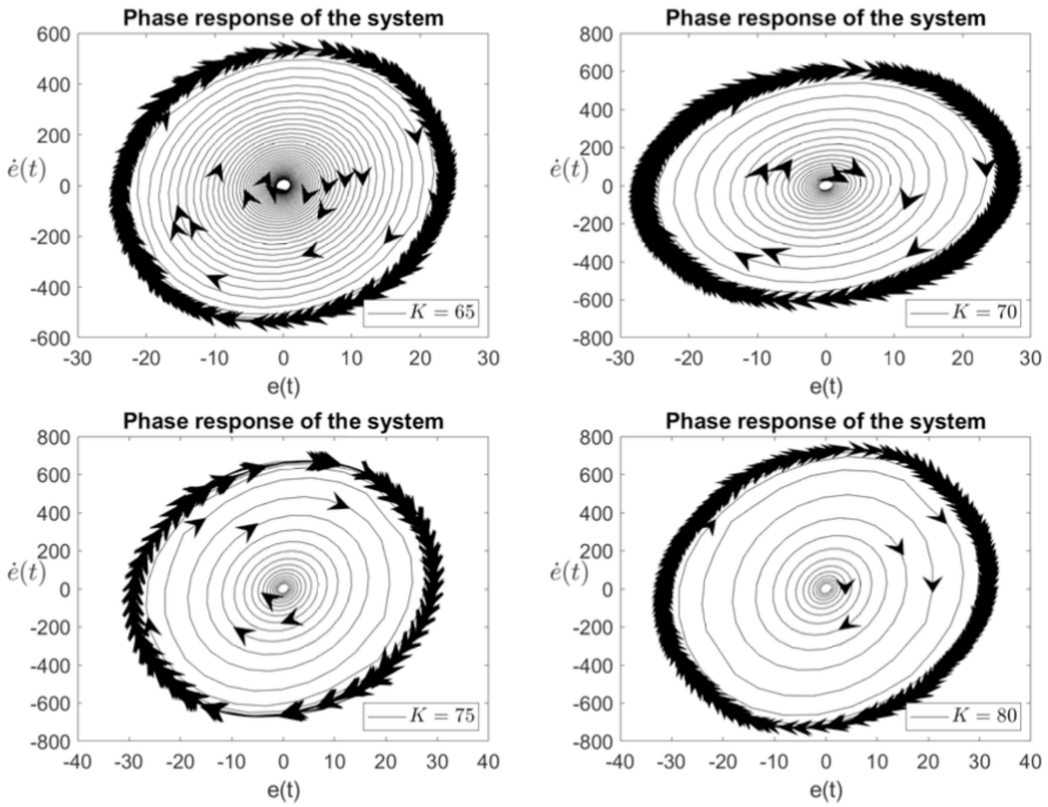


Figure 16: 用相平面軌跡檢驗系統振盪解，K = 65, 70, 75, 80, r(t) = 1

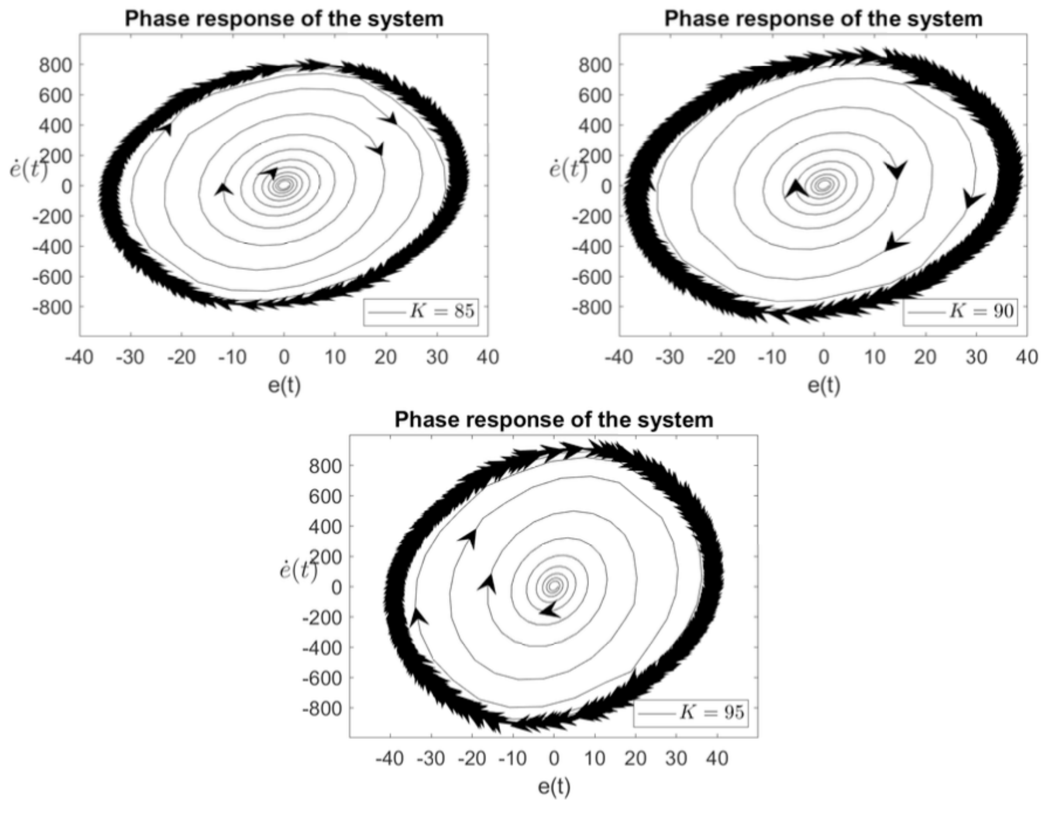


Figure 17: 用相平面軌跡檢驗系統振盪解，K = 85 90, 95, r(t) = 1

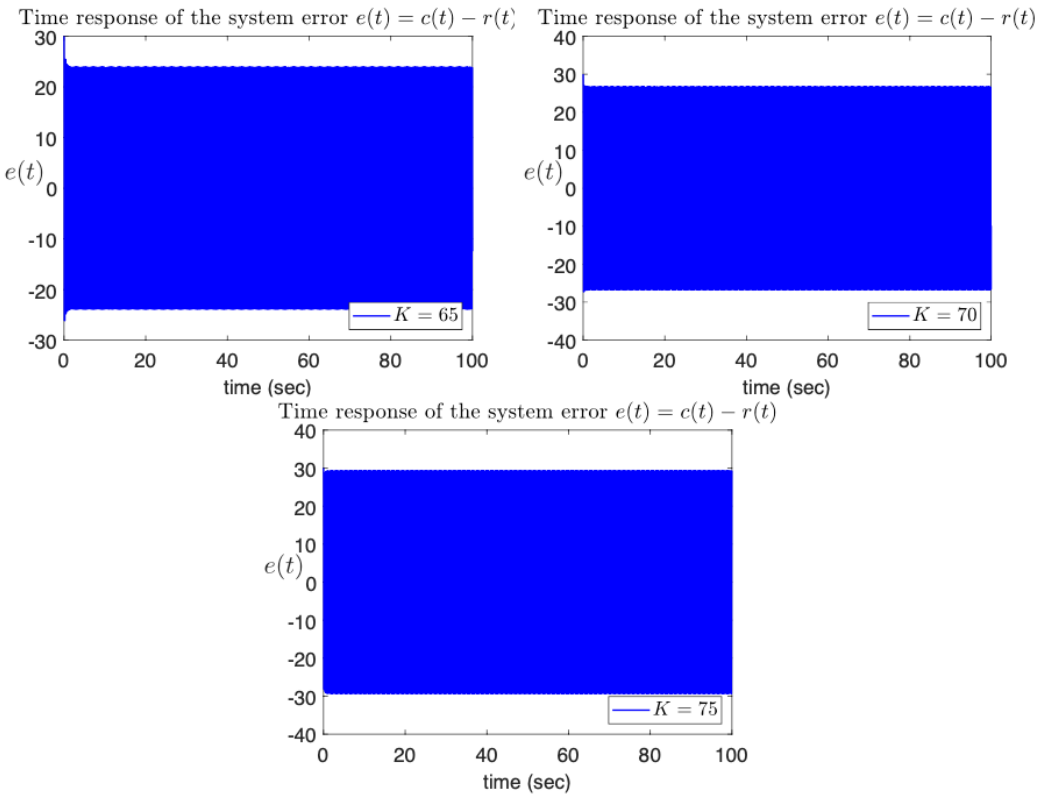


Figure 18: 用時域響應檢驗系統振盪解，K = 65, 70, 75, r(t) = 30

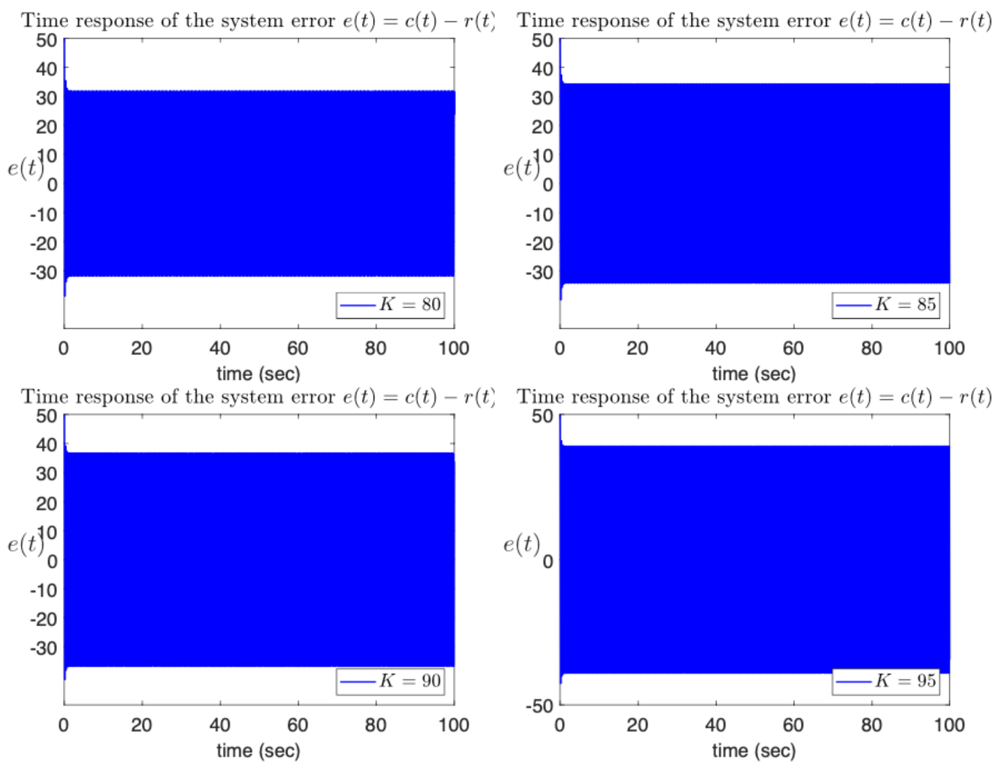


Figure 19: 用時域響應檢驗系統振盪解，K = 80, 85 90, 95, r(t) = 50

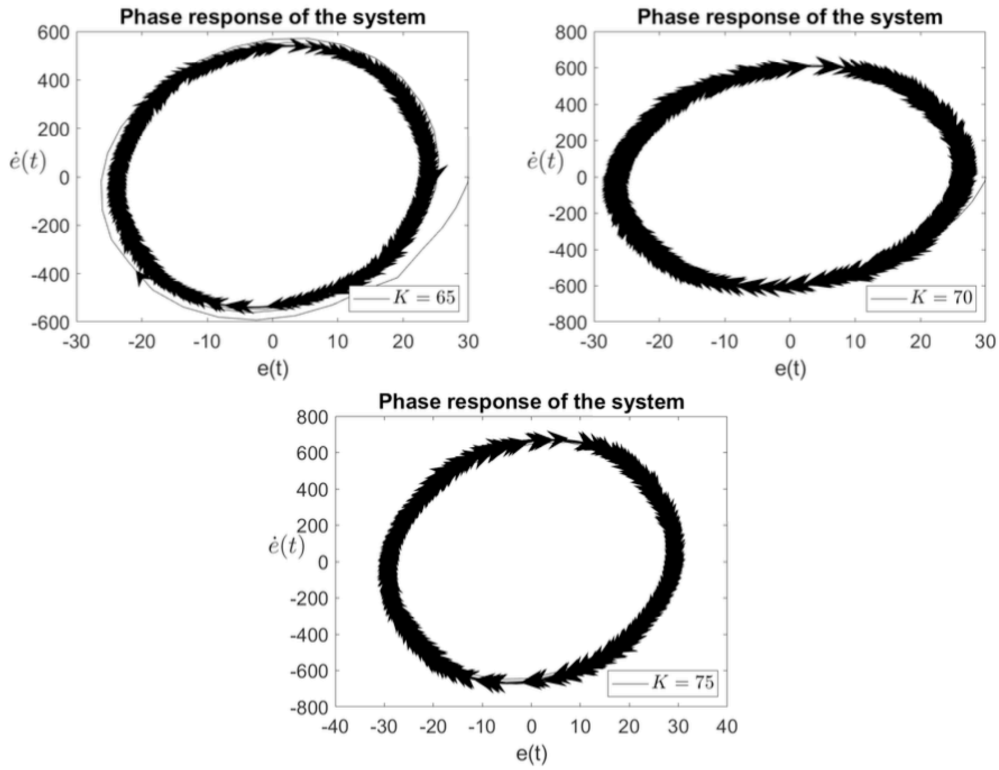


Figure 20: 用相平面軌跡檢驗系統振盪解，K = 65, 70, 75, r(t) = 30

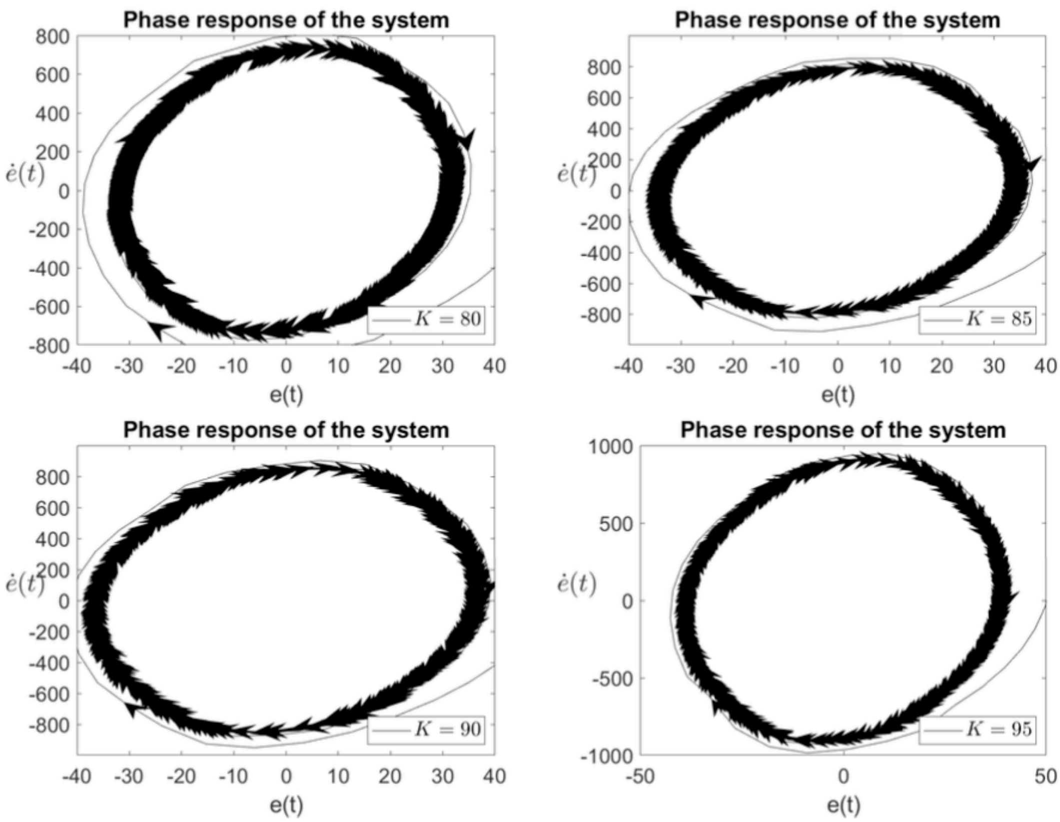


Figure 21: 用相平面軌跡檢驗系統振盪解，K = 80, 85 90, 95, r(t) = 50

APPENDIX：MATLAB Code

```
clear all; close all;clc;
global K; K=95;
global r ; r=1;

% simulink model
sim('Nonlinear_HW3' ,0:0.01:100)

% simulink result
X_limit_cycle = max(e);

% plot time response
figure(1)
plot(ts,e,'b','LineWidth',1.3);
hold on
set(gca,'FontSize',16);
leg1=legend({'$K=95$'},'Interpreter','latex','location','SouthEast');
set(leg1,'Fontsize',16);
axis ([0 ,100 , -50 ,50])
xlabel('time (sec)' , 'FontSize' ,16)
ylabel({'$e(t)$'},'Fontsize',20,'Rotation',0,'Interpreter','latex');

title('Time response of the system error
$e(t)=c(t)-r(t)$','Interpreter', 'latex ')
print k=95_50_time.eps -depsc;

% plot phase plane
figure(2)
arrowPlot(e, dot_e,'number', 500, 'color', 'k' , 'LineWidth',0.01,
'scale', 0.1);
hold on
set(gca,'FontSize',16);
leg2=legend({'$K=95$'},'Interpreter','latex','location','SouthEast') ;
set(leg2,'Fontsize',16);
axis ([-50,50,-1000,1000])
xlabel('e(t)')
```

```
ylabel({'$\dot
e(t)$'},'Fontsize',20,'Rotation',0,'Interpreter','latex');
title('Phase response of the system')
print k=95_50_time.eps -depsc;

% plot complex plane
figure(3)
den=conv([0.02 1], [0.1 1 0]);
w=[10:0.1:100000];
el=exp(j*w); r1=real(e1); i1=imag(e1);
N=[-1:-0.1:-10000];
Y=zeros(1, 99991);
[a1 b1]=nyquist(K, den, w);
plot(a1, b1, 'linewidth', 2);
hold on
arrowPlot(N, Y, 'number', 2, 'color', 'b', 'lineWidth', 2, 'scale', 1,
'ratio', 'equal');
hold on
plot([0 0],[-2 2],'k--','lineWidth',0.5);
plot([-3 2],[0 0],'k--','lineWidth',0.5);
hold on
leg3 = legend({'$G(J\omega)$', '$-1/N(X)$'},
'Interpreter','latex','Location','southeast');
set(leg3, 'Fontsize', 16);
xlabel({'$Re$'}, 'Interpreter', 'latex', 'location', 'southeast');
set(leg3,'Fontsize',16);
xlabel({'$Re$'},'Interpreter','latex','Fontsize',16);
xlabel({'$Im$'},'Interpreter','latex','Fontsize',16, 'Rotation', 0);
axis([-3,1,-2,2]);
title('Complex plane of the system when K=95')
grid on;
```