7.1 考慮二階非線性系統

$$\begin{cases}\dot{x_1} = 2x_1 + {x_1}^2 + x_1x_2 \\ \dot{x_2} = 3x_1 + (1 + {x_2}^2)u\end{cases}$$

1. 列出逆向步進控制的設計步驟，參考(7.4.2)式～(7.4.7)式，設計控制 $u(x1, x2)$，使得控制後的系統（亦即閉迴路系統)相對於原點為漸進穩定。

逆向步進控制的作法是先求得$\dot{V}$的表示式後，再決定控制律u使得$\dot{V} < 0$。

目標：將控制訊號轉換轉換成 u 的標準形式。

$$u = \frac{1}{1 + {x_2}^2}[u_1 - 3x_1]$$

作法：建立外層結構運動方程式。子系統的控制訊號為ξ，全系統的控制訊號為u）

$$\begin{cases}\dot{x_1} = (2x_1 + {x_1}^2) + (x_1)\xi \\ \dot{\xi} = u_1\end{cases}$$

其中，逆向步進控制的控制律設計將按照下列四個步驟進行：

(1) **設計內層結構控制律**

首先令控制律為 $\xi = \phi_1$，使內層子系統漸進穩定，也就是要尋找一正定的 Lyapunov 函數 $V(x)$。

$$\dot{V_1} = \nabla \mathrm{V}_1\dot{x_1} = \frac{\partial V_1}{\partial x}(f_0(x) + g_0(x)\phi(x) \le -V_a(x_1) \le 0$$

其中$V_a(x_1)$為正函數，所得的$\phi(x_1)$滿足 $\dot{x_1} = f_0(x) + g_0(x)\phi(x)$。

我們令 $V_a(x_1) = -{x_1}^4$，所以 $\dot{V_1} = \nabla \mathrm{V}_1\dot{x_1} = \left((2x_1 + {x_1}^2) + (x_1)\xi\right)x_1 = -{x_1}^4$

此時，為了滿足上述條件，選擇控制律為 $\xi = \phi_1 = -2 - x - x^2$ 。

而 Lyapunov 函數可選成

$$V_1 = \frac{{x_1}^2}{2}$$

再來，求其對應時間的微分，得到

$$\dot{V_1} = \dot{x_1}x_1 = \left((2x_1 + {x_1}^2) + (x_1)\phi\right)x_1 = 2x_1^2 + {x_1}^3 + x_1^2x_2 \le -V_a(x_1)$$

(2) **建立外層結構運動方程式**

$$\begin{cases}\dot{x_1} = f_0(x) + g_0(x)\phi(x) + g_0\left(\xi - \phi(x)\right) \\ \dot{\xi} = u_1\end{cases}$$

由於 ξ 為控制訊號 u_1 的積分結果，而 ξ 為 $\dot{x_1} = f_0(x) + g_0(x)\phi(x)$ 的控制訊號，因此在我們可以令控制訊號等義為 $\xi - \phi(x)$。

（3） **定義外層結構的控制訊號**

令 $z = \xi - \phi(x)$ → $\dot{z} = \dot{\xi} - \dot{\phi(x)}$ → $u_1 - \phi(x)$，此時可觀察出 $-\phi(x)$ 為一步一步往後退的現象。為了方便分析，我們又令$v = u_1 - \phi(x)$，此時轉換後的方程式為：

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_0(x) + g_0(x)\phi(x) + g_0\big(\xi - \phi(x)\big) \\ \dot{z} = u_1 - \phi(x) = v \end{cases}$$

其中子系統的訊號為 ξ ，全系統訊號為 u。

（4） **決定外層結構控制律**

首先，建構 Lyapunov 函數

$$V_1(x,z) = V_1(x) - \frac{z^2}{2}$$

則 $\dot{V_1}(x,z) = \frac{\partial V_1}{\partial x}\big(f_0(x) + g_0(x)\phi(x)\big) - kz^2 \le -V_a(x_1) - kz^2 < 0$

因為 $\phi(x) = -2 - x_1 - x_1^2$，且 $V_1(x) = \frac{{x_1}^2}{2}$，代入 u_1：

$$\begin{aligned} u_1 = \phi(x) + v &= \frac{\partial \phi}{\partial x}[(f_0(x) + g_0(x)\xi)] - \frac{\partial V_1}{\partial x} g_0(x) - k[\xi - \phi(x)] \\ &= (-2x_1 - 1)(2x_1 + {x_1}^2 + x_1x_2) - {x_1}^2 - k(x_2 + 2 + x_1 + {x_1}^2) \end{aligned}$$

接著，將上式 u_1 代入原系統 u 可求得狀態變數軌跡圖：

$$u = \frac{1}{1 + {x_2}^2}[-3x_1 - u_1]$$

$$= \frac{1}{1 + {x_2}^2}[(-3x_1 + (-2x_1 - 1)(2x_1 + {x_1}^2 + x_1x_2) - {x_1}^2 - k(x_2 + 2 + x_1 + {x_1}^2)]$$

2. 將所得到的$u(x1, x2)$代回(1)式,進行閉迴路的 MATLAB 模擬。選定不同的初始點,畫出相平面軌跡,驗證軌跡相對於原點的漸進穩定。

我們選定以下十個初始值：

x01 = [1 ; 0] ; x02 = [0 ; 1] ; x03 = [-1 ; 0] ; x04 = [0 ; -1] ;

x05 = [1 ; 1] ; x06 = [-1 ; 1] ; x07 = [-1 ; -1] ; x08 = [1 ; -1]

模擬結果如圖 7.2.1 所示，我們發現不論出發點為何，系統軌跡都會漸近式的向原點趨近，最終進入平衡點（原點），所以此系統相對於原點為漸進穩定。

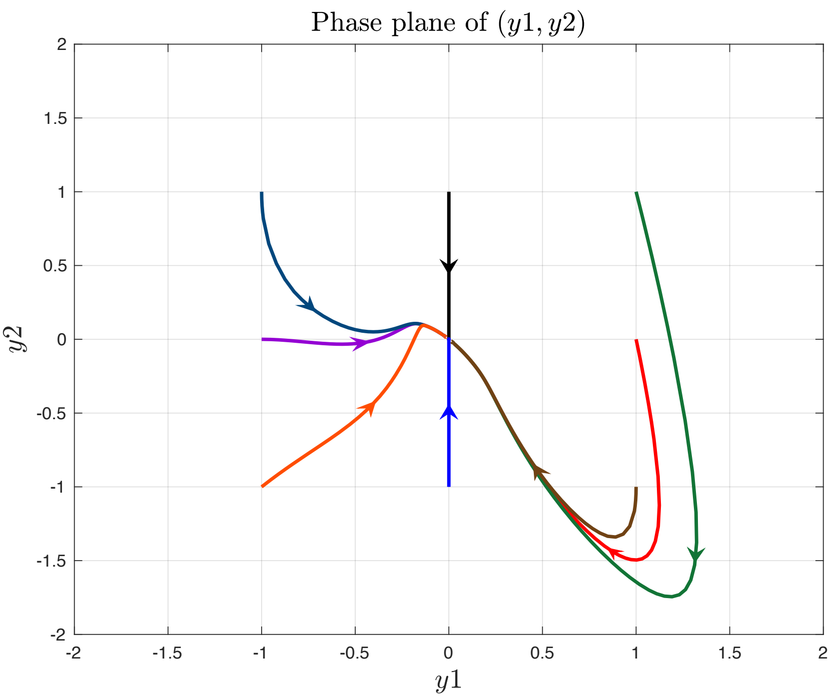


圖 7.2.1

接著，我們畫出 $y_1(t)$、$y_2(t)$ 之時域響應，如圖 7.2.2所示，可以看到 $y_1(t)$皆會先爬到一個峰值然後突然往原點邁進，過程中無有振盪效應或是在正負切換的情形發生，都是穩定且緩慢收斂到 0，可再驗證此系統為漸進式穩定。

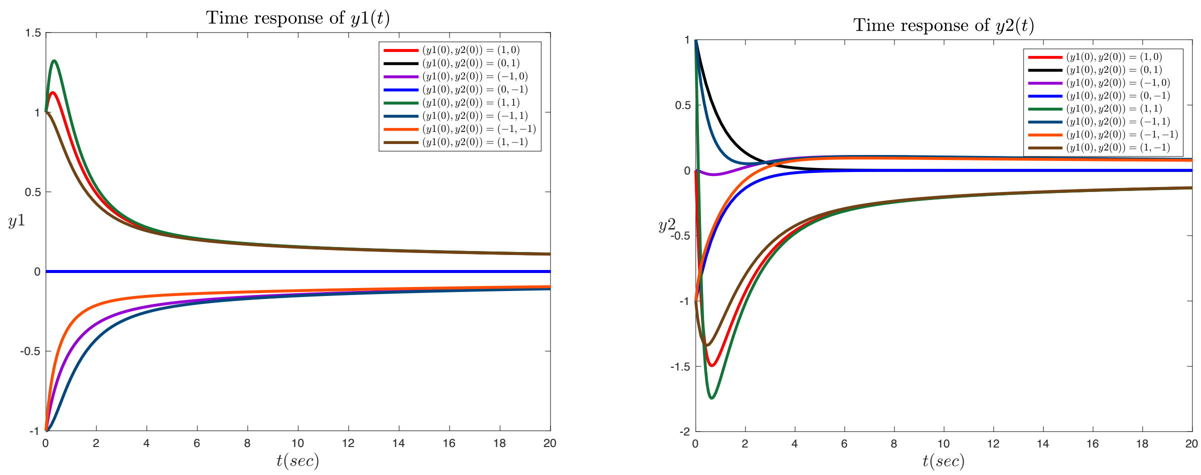


圖 7.2.2

接著畫出逆向步進控制後的系統收斂情況，我們可以發現此閉迴路系統最佳只能收斂到 $(0,-2)$。若以相同的八個初始狀態以及 $k=1$ 的情況下，模擬結果如圖 7.2.3 所示，從圖中可以發現這些軌跡都會漸近式的進入 $(0,-2)$。

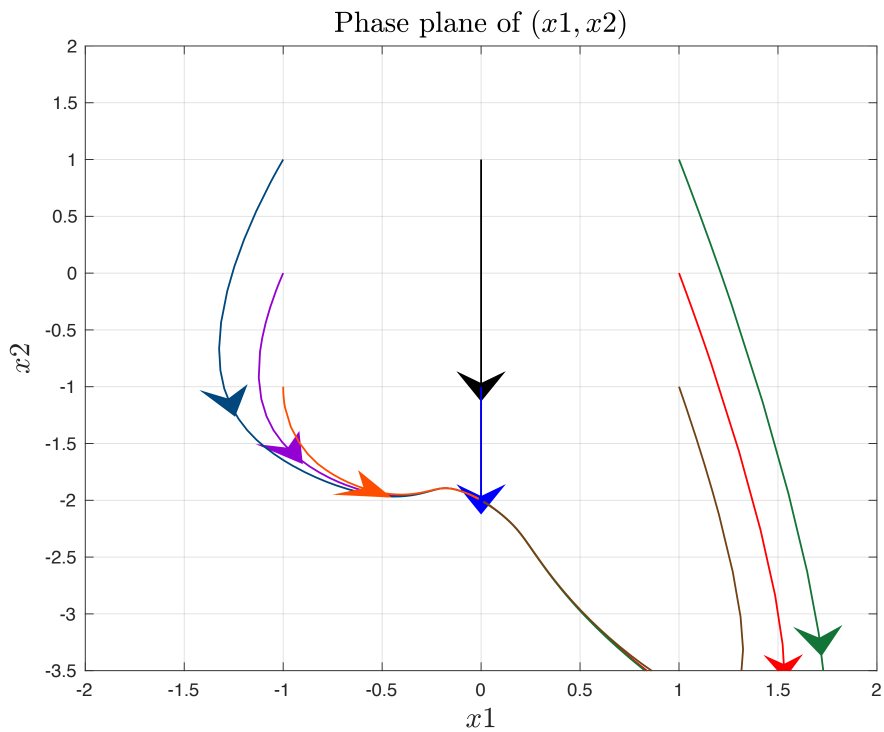


圖 7.2.3

同樣地，我們也畫出 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 之時域響應，如圖 7.2.4 所示，可以看到 $x_1(t)$ 與 $y_1(t)$運動軌跡類似，而 $x_2(t)$ 的運動軌跡雖震盪較小但仍與 $y_2(t)$ 趨勢相似，且都收斂至-2。 綜合上述，針對系統 (1) 的穩定化問題，我們再次確認以 *Backstepping* 控制策略進行狀態迴授穩定器設計是無效的。或許可以嘗試以其他方式，如回授線線性化或是動模式控制等控制策略解決此類穩定化問題。

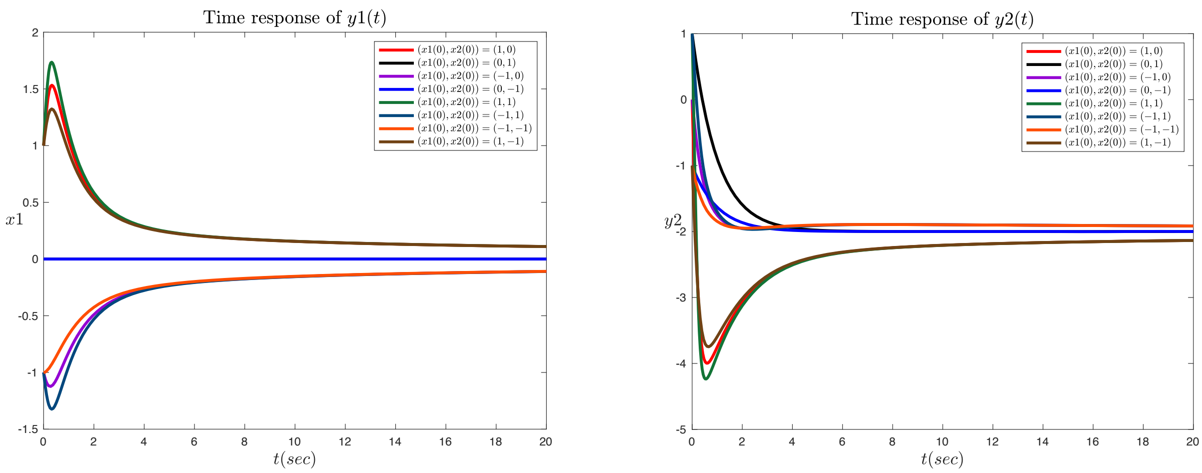


圖 7.2.4

3. 擴大初始點的分布範圍，從 MATLAB 的相平面軌跡圖，判斷所得到的閉迴路系統是區域穩定還是全域穩定?

透過前一題分析得知在建構的 Backstepping 狀態回授穩定器作用下，非線性系統的狀態軌跡將成功的收斂到平衡點原點。為了得知閉迴路的漸進穩定性是否為全域穩定，我們擴大初始值。倘若將初始狀態分別放大 10 倍，得到的模擬結果如圖 7.3.1 所示；被放大 100 倍，則模擬結果為圖 7.3.2。將圖 7.3.1 與 7.3.2 與上題圖 7.2.1 做比較，可以發現當將初始狀態放大後，系統軌跡一樣會收斂到原點，且不論初始條件距離原點多遠，閉迴路系統相平面軌跡將會直接收斂到 $y_2 = -y_1$ 的直線方程上，再接著沿著此條直線方程收斂到原點。因此透過 MATLAB 畫出相軌跡，我們可以推論閉迴路系統的漸進穩定性可能是全域的。不過，是否真的為全域漸進穩定，仍需透過 Lyapunov 直接穩定性定理及全域穩定定理進行判斷。

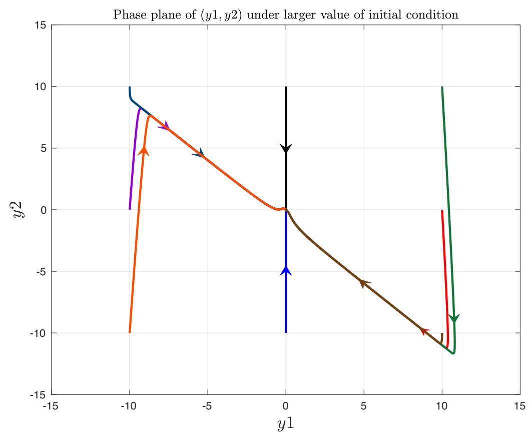


圖 7.3.1 初始值放大 100 倍

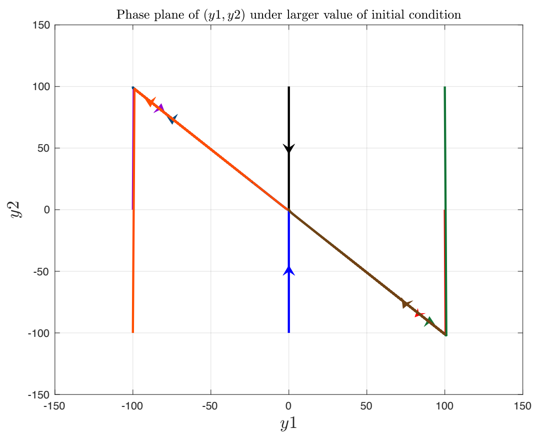


圖 7.3.2 初始值放大 1000 倍

4. 檢視問題 1 所得的 Lyapunov 函數 $V(x_1, x_2)$，從學理上判斷它是保證區域穩定還是全域穩定？與 MATLAB 的模擬結果是否相符？

$$V(x,z) = V_1(x) + \frac{z^2}{2} = \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{2}(\xi - \phi(x_1))^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + (x_2 + 2 + x_1 + x_1^2)^2)$$

全域穩定的條件須滿足下列條件：

i. $\boldsymbol{V}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

ii. $\boldsymbol{V}(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$ **且** $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \neq \mathbf{0}$

iii. $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) \to \infty$

iv. $\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \frac{\partial \boldsymbol{V_1}}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})] - \boldsymbol{k}\boldsymbol{z}^2$

$$= x_1\left(2x_1 + x_1{}^2 + x_1\left(-2 - x_1 + x_1{}^2\right)\right) - k(x_2 + 2 + x_1 + x_1{}^2)^2$$
$$= -x_1{}^4 - k(x_2 + 2 + x_1 + x_1{}^2)^2 < 0$$

由於我們的求得的 Lyapunov 函數皆滿足以上四個條件，因此學理上判斷它是保證全域穩定，且 MATLAB 的模擬結果將會與上題皆相符。

5. 檢查問題 1 所列出的設計步驟，判斷所得到的控制律$u(x_1,x_2)$是否為唯一？如果不是，嘗試求得另一個可以保證漸進穩定的控制律$u'(x_1,x_2)$，並比較$u'(x_1,x_2)$與$u(x_1,x_2)$的模擬結果。
提示:如果依據(7.4.2)式～(7.4.7)式無法設計出所需要的控制器，試著先進行座標平移 $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 + 2$，然後在$(y_1,y_2)$的座標下進行逆向步進控制及 MATLAB 模擬。討論為什麼需要座標平移？

由第一小題前半段討論可知，Backstepping 狀態回授控制器 $\mathrm{u}(x_1,x_2)$與虛擬控器$\phi(x)$及轉換過的控制v相關，由此可判斷$\mathrm{u}(x)$不唯一，且有三種控制型式，如下：

I. 改變虛擬控制器 $\xi = \Phi(x)$ 的控制增益：

在設計內層結構控制律時，對子系統選擇 Lyapunov 函數以及控制律 ξ。

$$V_1(x) = x^2/2$$

$$\dot{V}_1 = x\cdot\left(2x + x^2 + x\cdot\xi\right) = -x^4$$

$$\xi = \phi(x) = -2 - x - x^2 = -2 - x - a\cdot x^2$$

其中$a > 0$，則此系統滿足

$$\dot{V}_1(x) = a\cdot x^4 < 0\text{。}$$

接著，由 Lyapunov直接定理可知子系統為漸進穩定。所以改寫控制器為：

$$\mathrm{u}(x_1,x_2) = \frac{1}{(1+x_2^2)}\left[-3x_1 + (-1 - 2\mathrm{a}\cdot x_1)(2x_1 + {x_1}^2 + x_1x_2) - {x_1}^2 - k(x_2 + 2 + x_1 + a{x_1}^2)\right]$$

因為我們只想單純探討a之影響，所以先固定$k = 1$ 為一定值。接著選取以下初始狀態$[3;-3]$、$[-3;3]$，比較$a = 1, 10, 100$ 對於系統狀態軌跡 $\mathrm{x}_1(\mathrm{t})$ 及 $\mathrm{x}_2(\mathrm{t})$的影響，如圖 7.5.1 所示。

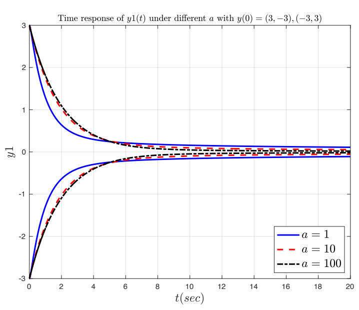
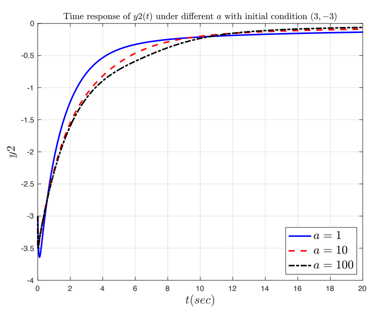
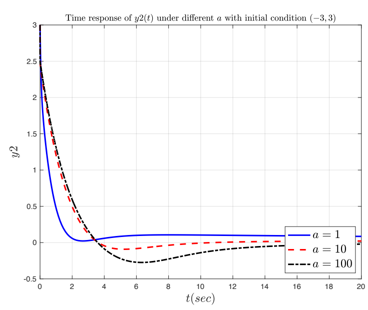
a = 1	a = 10	a = 100
		

圖7.5.1

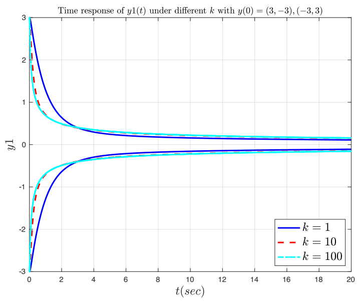
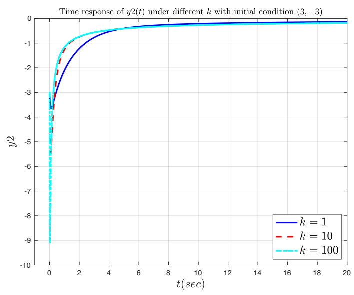
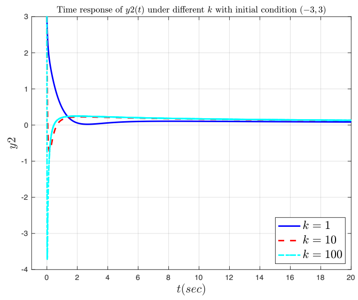
可以發現當 a = 1 時，一開始$x_1(\mathrm{t})$、$x_2(\mathrm{t})$會較快往原點趨近，但隨著時間增加，其收斂速度會被$a = 10,\ a = 100$超越，所以當 a 越大，則越快收斂至原點。

ii. 改變及全系統控制訊號u的控制增益討論對控制律的影響

模擬中選擇 k = 1 討論初始狀態不同對於系統響應的影響，而在此部分欲探討 k 的選擇對於控制器 $u(x_1, x_2)$ 及閉迴路系統的影響，因此使用下列控制器：

$$\mathrm{u}(x_1, x_2) = \frac{1}{(1+x_2^2)}[-3x_1 + (-1-2x_1)(2x_1 + {x_1}^2 + x_1x_2) - k(x_2 + 2 + x_1 + {x_1}^2) - {x_1}^2$$

選擇初始狀態 [3 ; −3]、[−3 ; 3]，比較 $k = 1, 10, 100$ 分別對系統軌跡 $x_1(\mathrm{t})$、$x_2(\mathrm{t})$ 的影響，模擬結果如圖7.5.2所示。

<table>
<tr><th>$k = 1$</th><th>$k = 10$</th><th>$k = 100$</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">圖7.5.2</td></tr>
</table>

可以發現 $k = 1$ 時，一開始會較慢向原點逼近，但隨著時間增加，其收斂速度將超過 $k = 10$、$k = 100$ 的情況。因此可觀察出 k 越小，尤其當$k = 1$時，$x_1(\mathrm{t})$、$x_2(\mathrm{t})$ 越快收斂到原點。

iii. 改變Lyapunov函數

一開始我們所設計的Lyapunov函數為簡單的形式

$$V_1(x) = \frac{1}{2}x^2$$

再此我們改用較複雜的兩個Lyapunov函數，重新設計系統控制律。

$$V_1(x) = \frac{1}{4}x^4$$

$$V_1(x) = \frac{1}{6}x^6$$

且選擇同樣的控制訊號

$$\phi(x) = -2 - x - x^2$$

將控制律推導成下列：

$$u_{1/4}(x_1,x_2)=\frac{1}{(1+x_2^2)}[-3x_1+(-1-2x_1)(2x_1+{x_1}^2+x_1x_2)-k(x_2+2+x_1+{x_1}^2)-{x_1}^4]$$

以及

$$u_{1/6}(x_1,x_2)=\frac{1}{(1+x_2^2)}[-3x_1+(-1-2x_1)\cdot(2x_1+{x_1}^2+x_1x_2)-k(x_2+2+x_1+{x_1}^2)-{x_1}^6]$$

對控制律$u(x_1,x_2),u_{1/4}(x_1,x_2),u_{1/6}(x_1,x_2)$探討對於系統閉迴路狀態軌跡造成的影響。選擇初始狀態 [3 ; −3]、[−3 ; 3]，並且將參數k固定為1，模擬結果如圖7.5.3所示。

$u(x_1,x_2)$	$u_{1/4}(x_1,x_2)$	$u_{1/6}(x_1,x_2)$

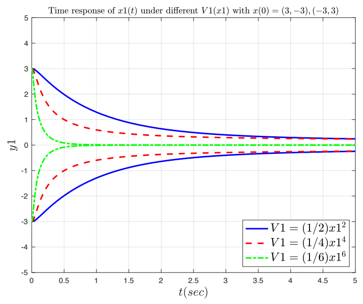
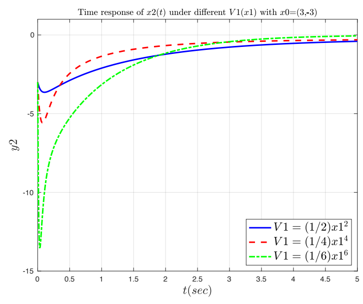
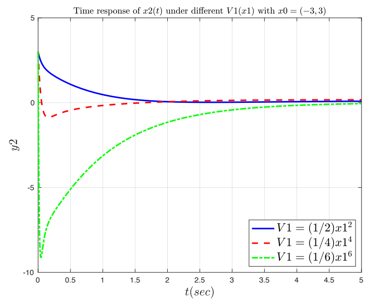

		

圖7.5.3		

從圖中可以發現對於 $x_1(t)$選擇較高階非線性項的 $V_1(x_1)$ 將提升$x_1(t)$的收斂速度，但是對 $x_2(t)$而言，當非線性項的階數越高將會造成越大的最大超越量。故以目前觀察，改寫 Lyapunov 函數並無一套固定的的選擇方式，仍需多組探討。

MATLAB Code

圖 7-2

```
clear all ; close all ; clc ;
tspan = [ 0 ; 1000 ] ; % time interval
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%initial conditions
x01 = [ 1 ; 0 ] ; x02 = [ 0 ; 1 ] ; x03 = [ -1 ; 0 ] ; x04 = [ 0 ; -1 ] ; x05 = [ 1 ; 1 ] ;
x06 = [ -1 ; 1 ] ; x07 = [ -1 ; -1 ] ; x08 = [ 1 ; -1 ] ;
x0=[x01 , x02 , x03 , x04 , x05 , x06 , x07 , x08] ;
%setting colorforplotting
Color=zeros ( 8 , 3 ) ;
Color(1,:) = [ 112,66,20 ] / 255 ; Color(2,:) = [ 1,0,0 ] ; Color (3,:) = [ 0,0,0 ] ; Color(4,:)=
[ 148,0,211 ] / 255;
```

```
Color(5,:) = [ 0,0,1 ] ; Color(6,:) = [ 18,116,54 ] / 255;Color(7,:)=[ 0,71,125 ] /
255;Color(8,:)=[ 255,77,0 ] / 255;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

figure(1) %%y1??y2
for i = 1 : length (x0(1,:))
   [ t,x ] = ode45(@odey ,tspan,x0(:,i)) ;

arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',1,'color',Color(mod(i,8)+1,:),'LineWidth',2,'scale',2,'ratio','equal
') ;hold on
end
title ({ 'Phase plane of $ ( y 1 , y 2 ) $' } , 'Fontsize', 16 , 'Interpreter','latex') ;
xlabel ({ '$y 1 $'} ,'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel ({ '$y 2 $'} ,'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
xlim ([-2 2]) ; ylim ([-2 2]) ;
grid on ;
axis normal ;

figure(2) %%y1?t
for i = 1 : length (x0(1,:))
   [ t,x ] = ode45(@odey ,tspan,x0(:,i)) ;
   p(i)=plot (t,x(:,1) , 'color', Color(mod( i , 8 ) + 1 , : ) , 'LineStyle' ,'-' ,'LineWidth',
2.5 ) ;
   hold on;
end
xlim ([0 20]) ;
ylabel ({'$y 1$'} ,'Fontsize', 15 , 'Rotation', 0 ,'Interpreter','latex') ;
xlabel ({'$ t(sec) $'} ,'Fontsize', 15 , 'Interpreter','latex') ;
title ({'Time response of $ y 1 ( t ) $'} ,'Fontsize', 16 ,'Interpreter','latex') ;
legend ([p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p(6),p(7),p(8)] ,...
   {'$ ( y1(0) , y2(0)) =(1,0) $' ,'$ (y1(0),y2(0)) =(0,1)$',...
   '$(y1(0),y2(0)) =(-1 ,0) $','$ ( y1(0) , y2(0)) =(0,-1) $','$ (y1(0),y2(0)) =(1 ,1) $',...
   '$(y1(0),y2(0))=(-1 ,1)$','$(y1(0),y2(0))=(-1,-1)$','$(y1(0),y2(0))=(1,-
1)$'},'Interpreter','latex') ;

figure(3) %%y2?t
for i = 1 : length (x0(1,:)) ;
   [ t,x ] = ode45(@odey ,tspan,x0(:,i)) ;
```

```
    p(i)=plot (t,x(:,2) , 'color', Color(mod( i , 8 ) + 1 , : ) , 'LineStyle' ,'-' ,'LineWidth',
2.5 ) ;
    hold on
end
xlim ([0 20]) ;
ylabel ({'$y 2$'} ,'Fontsize', 15 , 'Rotation', 0 ,'Interpreter','latex') ;
xlabel ({'$ t(sec ) $'} ,'Fontsize', 15 , 'Interpreter','latex') ;
title ({'Time response of $ y 2 ( t ) $'} ,'Fontsize', 16 ,'Interpreter','latex') ;
legend ([p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p(6),p(7),p(8)] ,...
    {'$ (y1(0) , y2(0)) =(1,0) $' ,'$ (y1(0),y2(0)) =(0,1)$',...
    '$(y1(0),y2(0)) =(-1 ,0) $','$ ( y1(0) , y2(0)) =(0,-1) $','$ (y1(0),y2(0) ) =(1 ,1) $',...
    '$(y1(0),y2(0))=(-1 ,1)$','$(y1(0),y2(0))=(-1,-1)$','$(y1(0),y2(0))=(1,-
1)$'},'Interpreter','latex') ;

figure(4) %%y1??y2
for i = 1 : length (x0(1,:))
    [ t,x ] = ode45(@odex ,tspan,x0(:,i)) ;

arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',1,'color',Color(mod(i,8)+1,:),'LineWidth',1,'scale',2,'ratio','equal
') ;hold on
end
title ({ 'Phase plane of $ ( x 1 , x 2 ) $' } , 'Fontsize', 16 , 'Interpreter','latex') ;
xlabel ({ '$x 1 $'} ,'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel ({ '$x 2 $'} ,'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
xlim ([-2 2]) ; ylim ([-3.5 2]) ;
grid on ;
axis normal ;

figure(5) %%y1?t
for i = 1 : length (x0(1,:))
    [ t,x ] = ode45(@odex ,tspan,x0(:,i)) ;
    p(i)=plot (t,x(:,1) , 'color', Color(mod( i , 8 ) + 1 , : ) , 'LineStyle' ,'-' ,'LineWidth',
2.5 ) ;
    hold on;
end
xlim ([0 20]) ;
ylabel ({'$x 1$'} ,'Fontsize', 15 , 'Rotation', 0 ,'Interpreter','latex') ;
xlabel ({'$ t(sec) $'} ,'Fontsize', 15 , 'Interpreter','latex') ;
title ({'Time response of $ y 1 ( t ) $'} ,'Fontsize', 16 ,'Interpreter','latex') ;
```

```
legend ([p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p(6),p(7),p(8)] ,...
    {'$ ( x1(0) , x2(0)) =(1,0) $' ,'$ (x1(0),x2(0)) =(0,1)$',...
   '$(x1(0),x2(0)) =(-1 ,0) $','$ ( x1(0) , x2(0)) =(0,-1) $','$ (x1(0),x2(0)) =(1 ,1) $',...
   '$(x1(0),x2(0))=(-1 ,1)$','$(x1(0),x2(0))=(-1,-1)$','$(x1(0),x2(0))=(1,-
1)$'},'Interpreter','latex') ;

figure(6) %%y2?t
for i = 1 : length (x0(1,:)) ;
   [ t,x ] = ode45(@odex ,tspan,x0(:,i)) ;
   p(i)=plot (t,x(:,2) , 'color', Color(mod( i , 8 ) + 1 , : ) , 'LineStyle' ,'-' ,'LineWidth',
2.5 ) ;
   hold on
end
xlim ([0 20]) ;
ylabel ({'$y 2$'} ,'Fontsize', 15 , 'Rotation', 0 ,'Interpreter','latex') ;
xlabel ({'$ t(sec ) $'} ,'Fontsize', 15 , 'Interpreter','latex') ;
title ({'Time response of $ y 2 ( t ) $'} ,'Fontsize', 16 ,'Interpreter','latex') ;
legend ([p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p(6),p(7),p(8)] ,...
    {'$ ( x1(0) , x2(0)) =(1,0) $' ,'$ (x1(0),x2(0)) =(0,1)$',...
   '$(x1(0),x2(0)) =(-1 ,0) $','$ ( x1(0) , x2(0)) =(0,-1) $','$ (x1(0),x2(0)) =(1 ,1) $',...
   '$(x1(0),x2(0))=(-1 ,1)$','$(x1(0),x2(0))=(-1,-1)$','$(x1(0),x2(0))=(1,-
1)$'},'Interpreter','latex') ;

%ODE
function y = odex ( t , x ) %% 轉換
k=1;
f0=2*x(1)+x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+x(2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+2+x(1)+x(1)^2)-3*x(1));
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end

function y = odey ( t , x ) % 題目
k=1;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
```

```
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
```

圖 7-3

```
clear all ; close all ; clc ;
tspan = [ 0 ; 1000 ] ; % time interval
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%initial conditions
x01 = [ 1 ; 0 ] ; x02 = [ 0 ; 1 ] ; x03 = [ -1 ; 0 ] ; x04 = [ 0 ; -1 ] ; x05 = [ 1 ; 1 ] ;
x06 = [ -1 ; 1 ] ; x07 = [ -1 ; -1 ] ; x08 = [ 1 ; -1 ] ;
x0=[x01 , x02 , x03 , x04 , x05 , x06 , x07 , x08] ;
%setting colorforplotting
Color=zeros ( 8 , 3 ) ;
Color(1,:) = [ 112,66,20 ] / 255 ; Color(2,:) = [ 1,0,0 ] ; Color (3,:) = [ 0,0,0 ] ; Color(4,:)=
[ 148,0,211 ] / 255;
Color(5,:) = [ 0,0,1 ] ; Color(6,:) = [ 18,116,54 ] / 255;Color(7,:)=[ 0,71,125 ] /
255;Color(8,:)=[ 255,77,0 ] / 255;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

figure(7)
for i = 1 : length (x0(1,:))
   [ t,x ] = ode45(@odey ,tspan,10*x0(:,i)) ;

arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',1,'color',Color(mod(i,8)+1,:),'LineWidth',2,'scale',2,'ratio','equal
') ;hold on
end
title ({ 'Phase plane of $ ( y 1 , y 2 ) $ under larger value of initial condition' } , 'Fontsize',
12 , 'Interpreter','latex') ;
xlabel ({ '$y 1 $'} ,'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel ({ '$y 2 $'} ,'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
xlim ([-15 15]) ; ylim ([-15 15]) ;
grid on ;
axis normal ;


figure(8)
for i = 1 : length (x0(1,:))
   [ t,x ] = ode45(@odey ,tspan,100*x0(:,i)) ;
```

```
arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',1,'color',Color(mod(i,8)+1,:),'LineWidth',2,'scale',2,'ratio','equal
') ;hold on
end
title ({ 'Phase plane of $ ( y 1 , y 2 ) $ under larger value of initial condition' } , 'Fontsize',
12 , 'Interpreter','latex') ;
xlabel ({ '$y 1 $'} ,'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel ({ '$y 2 $'} ,'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
xlim ([-150 150]) ; ylim ([-150 150]) ;
grid on ;
axis normal ;


%ODE
function y = odey ( t , x )
k=1;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+x(1)^2)-3*x(1)) ;
%u=(1/ g1 )*(-3*x(1)+(-1-2*x(1))*(2*x(1)+f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+2+x(1)+x(1)^2)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
```

7-5

```
clear all ; close all ; clc ;
tspan = [ 0 ; 1000 ] ; % time interval
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%initial conditions
x09= [ 3 ; -3 ] ; x010 = [ -3 ; 3 ] ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CHANGING VALUE OF a
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(10)
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x09);
p1=plot(t,x(:,1),'b','LineWidth', 2 ) ;hold on ;
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x010);
plot(t,x(:,1),'b','LineWidth', 2 ); hold on;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x09) ;
```

```
p2=plot (t,x(:,1),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x010) ;
plot (t,x(:,1),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x09) ;
p3=plot (t,x(:,1),'k-.','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x010) ;
plot (t,x(:,1),'k-.','LineWidth',2);hold on ;
xlim ([0 20]); grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$a=1$','$a=10$','$a=100$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast')
;
title({'Time response of $y1(t)$ under different $a$ with $y(0)=(3,-3) ,(-3,3)
$'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 1 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;

figure(11)
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x09);
p1=plot(t,x(:,2),'b','LineWidth', 2 ) ;hold on ;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x09) ;
p2=plot (t,x(:,2),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x09) ;
p3=plot (t,x(:,2),'k-.','LineWidth',2);hold on ;
xlim ([0 20]); grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$a=1$','$a=10$','$a=100$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast')
;
title({'Time response of $y2(t)$ under different $a$ with initial condition $(3,-
3)$'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 2 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;

figure(12)
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x010);
p1=plot(t,x(:,2),'b','LineWidth', 2 ) ;hold on ;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x010) ;
p2=plot (t,x(:,2),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x010) ;
p3=plot (t,x(:,2),'k-.','LineWidth',2);hold on ;
```

```
xlim ([0 20]); grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$a=1$','$a=10$','$a=100$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast')
;
title({'Time response of $ y2(t) $ under different $a$ with initial condition $(-
3,3)$'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 2 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function y = odei (t,x)
k=1;a=1;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*a*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+a*x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
function y = odej (t,x)
k=1;a=10;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*a*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+a*x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
function y = odek (t,x)
k=1;a=100;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*a*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+a*x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
```

圖 7.5.1

```
clear all ; close all ; clc ;
tspan = [ 0 ; 1000 ] ; % time interval
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%initial conditions
x09= [ 3 ; -3 ] ; x010 = [ -3 ; 3 ] ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CHANGING VALUE OF a
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(10)
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x09);
p1=plot(t,x(:,1),'b','LineWidth', 2 ) ;hold on ;
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x010);
plot(t,x(:,1),'b','LineWidth', 2 ); hold on;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x09) ;
p2=plot (t,x(:,1),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x010) ;
plot (t,x(:,1),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x09) ;
p3=plot (t,x(:,1),'k-.','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x010) ;
plot (t,x(:,1),'k-.','LineWidth',2);hold on ;
xlim ([0 20]); grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$a=1$','$a=10$','$a=100$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast')
;
title({'Time response of $y1(t)$ under different $a$ with $y(0)=(3,-3) ,(-3,3)
$'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 1 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;

figure(11)
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x09);
p1=plot(t,x(:,2),'b','LineWidth', 2 ) ;hold on ;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x09) ;
p2=plot (t,x(:,2),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x09) ;
p3=plot (t,x(:,2),'k-.','LineWidth',2);hold on ;
xlim ([0 20]); grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$a=1$','$a=10$','$a=100$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast')
;
```

```
title({'Time response of $y2(t)$ under different $a$ with initial condition $(3,-
3)$'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 2 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;

figure(12)
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x010);
p1=plot(t,x(:,2),'b','LineWidth', 2 ) ;hold on ;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x010) ;
p2=plot (t,x(:,2),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x010) ;
p3=plot (t,x(:,2),'k-.','LineWidth',2);hold on ;
xlim ([0 20]); grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$a=1$','$a=10$','$a=100$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast')
;
title({'Time response of $ y2(t) $ under different $a$ with initial condition $(-
3,3)$'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 2 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function y = odei (t,x)
k=1;a=1;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*a*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+a*x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
function y = odej (t,x)
k=1;a=10;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*a*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+a*x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
function y = odek (t,x)
```

```
k=1;a=100;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*a*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+a*x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
```

圖 7.5.2

```
clear all ; close all ; clc ;
tspan = [ 0 ; 1000 ] ; % time interval
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%initial conditions
x09= [ 3 ; -3 ] ; x010 = [ -3 ; 3 ] ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CHANGING VALUE OF k
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(13)
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x09);
p1=plot(t,x(:,1),'b','LineWidth', 2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x010);
plot(t,x(:,1),'b','LineWidth', 2); hold on;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x09) ;
p2=plot (t,x(:,1),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x010) ;
plot (t,x(:,1),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x09) ;
p3=plot (t,x(:,1),'c-..','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x010) ;
plot (t,x(:,1),'c-..','LineWidth',2);hold on ;
xlim ([0 20]); grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$k=1$','$k=10$','$k=100$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast')
;
title({'Time response of $y1(t)$ under different $k$ with $y(0)=(3,-3) ,(-3,3)
$'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 1 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
```

```
figure(14)
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x09);
p1=plot(t,x(:,2),'b','LineWidth', 2 );hold on ;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x09) ;
p2=plot (t,x(:,2),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x09) ;
p3=plot (t,x(:,2),'c-..','LineWidth',2);hold on ;
xlim ([-1 20]); grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$k=1$','$k=10$','$k=100$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast')
;
title({'Time response of $y2(t)$ under different $k$ with initial condition $(3,-
3)$'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 2 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;

figure(15)
[t,x] = ode45(@odei,tspan,x010);
p1=plot(t,x(:,2),'b','LineWidth', 2 );hold on ;
[t,x] = ode45(@odej,tspan,x010) ;
p2=plot (t,x(:,2),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odek,tspan,x010) ;
p3=plot (t,x(:,2),'c-..','LineWidth',2);hold on ;
xlim ([-1 20]); grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$k=1$','$k=10$','$k=100$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast')
;
title({'Time response of $ y2(t) $ under different $k$ with initial condition $(-
3,3)$'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 2 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function y = odei (t,x)
k=1;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
```

```
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
function y = odej (t,x)
k=10;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
function y = odek (t,x)
k=100;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
```

圖 7.5.3

```
clear all ; close all ; clc ;
tspan = [ 0 ; 1000 ] ; % time interval
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%initial conditions
x09= [ 3 ; -3 ] ; x010 = [ -3 ; 3 ] ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CHANGING VALUE OF k
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(19)
[t,x] = ode45(@odey,tspan,x09);
p1=plot(t,x(:,1),'b','LineWidth', 2) ;hold on ;
[t,x] = ode45(@odey,tspan,x010);
plot(t,x(:,1),'b','LineWidth', 2); hold on;
[t,x] = ode45(@odev1,tspan,x09) ;
p2=plot (t,x(:,1),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odev1,tspan,x010) ;
plot (t,x(:,1),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odev2,tspan,x09) ;
```

```
p3=plot (t,x(:,1),'g-.','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odev2,tspan,x010) ;
plot (t,x(:,1),'g-.','LineWidth',2);hold on ;
xlim ([0 5]);ylim ([-5 5]);grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$V1=(1/2)x1^2$','$V1=(1/4)x1^4$','$V1=(1/6)x1^6$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex'
,'location','SouthEast') ;
title({'Time response of $x1(t)$ under different $V1(x1)$ with $x(0)=(3,-3) ,(-3,3)
$'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 1 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;

figure(20)
[t,x] = ode45(@odey,tspan,x09);
p1=plot(t,x(:,2),'b','LineWidth', 2) ;hold on ;
[t,x] = ode45(@odev1,tspan,x09) ;
p2=plot (t,x(:,2),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odev2,tspan,x09) ;
p3=plot (t,x(:,2),'g-.','LineWidth',2);hold on ;
xlim ([0 5]);ylim ([-15 1]);grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$V1=(1/2)x1^2$','$V1=(1/4)x1^4$','$V1=(1/6)x1^6$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex'
,'location','SouthEast') ;
title({'Time response of $x2(t)$ under different $V1(x1)$ with $x0$=(3,-
3)'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 2 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
figure(21)
[t,x] = ode45(@odey,tspan,x010);
p1=plot(t,x(:,2),'b','LineWidth', 2 ) ;hold on ;
[t,x] = ode45(@odev1,tspan,x010) ;
p2=plot (t,x(:,2),'r--','LineWidth',2);hold on ;
[t,x] = ode45(@odev2,tspan,x010) ;
p3=plot (t,x(:,2),'g-.','LineWidth',2);hold on ;
xlim ([0 5]);ylim ([-10 5]); grid on ; axis normal ;
legend
([p1,p2,p3] ,{'$V1=(1/2)x1^2$','$V1=(1/4)x1^4$','$V1=(1/6)x1^6$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex'
,'location','SouthEast') ;
```

```
title({'Time response of $ x2(t) $ under different $V1(x1)$ with $x0=(-
3,3)$'} ,'Fontsize',12,'Interpreter','latex') ;
xlabel({'$ t ( s e c ) $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;
ylabel({'$ y 2 $' },'Fontsize',16,'Interpreter','latex') ;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function y = odey (t,x)
k=1;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^2-k*(x(2)+x(1)+x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
function y = odev1 (t,x)
k=1;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^4-k*(x(2)+x(1)+x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
function y = odev2 (t,x)
k=1;
f0=x(1)^2 ; g0=x(1) ; f1=x(1) ; g1=1+(x(2)-2)^2 ;
u=(1/ g1 )*((-1-2*x(1))*(f0+g0*x(2))-x(1)^6-k*(x(2)+x(1)+x(1)^2)-3*x(1)) ;
y = zeros ( 2 , 1 ) ;
y(1) = f0+g0*x(2) ;
y(2) = 3*f1+g1*u ;
end
```

p.s. 有引用 arrowPlot 函式庫：https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/62587-arrowplot-x-y-varargin