4.1

利用 Lyapunov 直接定理分析下列非線性方程式在原點處之穩定性: (a) 穩定焦點（stable focus）：共軛複數根，實數為負數。

$$\begin{cases} \dot{x_1} = (x_1 - x_2)({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1) \\ \dot{x_2} = (x_1 + x_2)({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1) \end{cases}$$

(a) 採用 Lyapunov 函數 $V(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2$，求出滿足 $\dot{V} < 0$的 $(x_1 + x_2)$ 收斂範圍。

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x_1} + 2x_2\dot{x_2} \\ &= 2x_1(x_1 - x_2)({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1) + 2x_2(x_1 + x_2)({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1) \\ &= 2({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1)(x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)) \\ &= 2({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1)({x_1}^2 + {x_2}^2) \end{aligned}$$

若要滿足 $\dot{V} < 0$，必讓 ${x_1}^2 + {x_2}^2 < 1$才能使 Lyapunov 函數收斂。

(b) 接著，在此範圍內選 3 個初始點，用 MATLAB 畫出相平面軌跡確認穩定性的預測。同時在確保穩定的範圍之外也任選 3 個初始點，是否由這些點出發的軌跡都為不穩定?

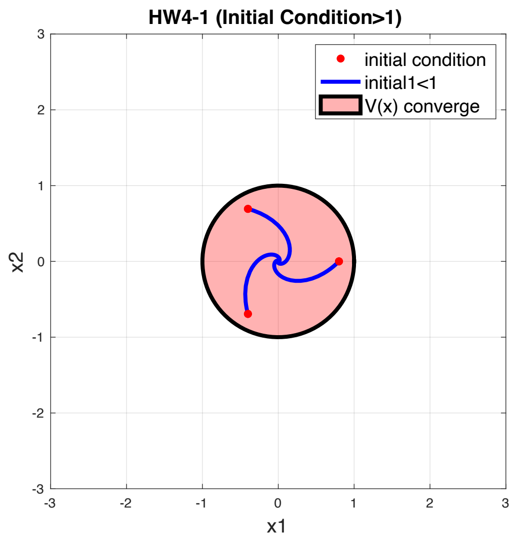
<table>
<tr><th>Initial condition 在 ${x_1}^2 + {x_2}^2 < 1$</th><th>Initial condition 在 ${x_1}^2 + {x_2}^2 > 1$</th></tr>
<tr><td>


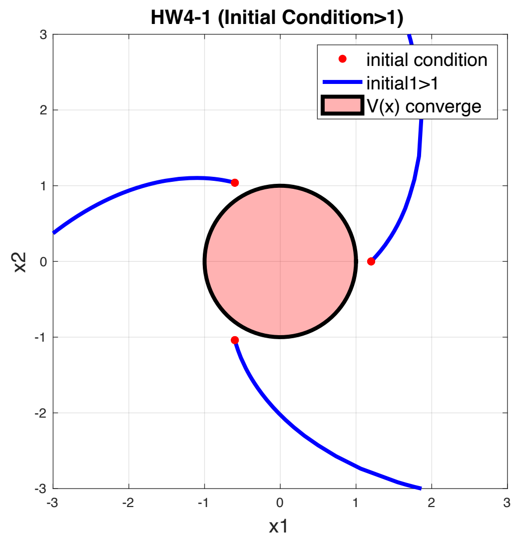
圖 1.
</td><td>


圖 2.
</td></tr>
<tr><td>

$$\begin{cases} x_{initial,1} = [0.8\ cos(2\pi/3)\ 0.8\ cos(2\pi/3)]^T \\ x_{initial,2} = [0.8\ cos(4\pi/3)\ 0.8\ cos(4\pi/3)]^T \\ x_{initial,3} = [0.8\ cos(2\pi)\ 0.8\ cos(2\pi)]^T \end{cases}$$

</td><td>

$$\begin{cases} x_{initial,1} = [1.2\ cos(2\pi/3)\ 1.2\ cos(2\pi/3)]^T \\ x_{initial,2} = [1.2\ cos(4\pi/3)\ 1.2\ cos(4\pi/3)]^T \\ x_{initial,3} = [1.2\ cos(2\pi)\ 1.2\ cos(2\pi)]^T \end{cases}$$

</td></tr>
</table>

如圖可見如果選在距離一以內的初始值，相平面軌跡會收斂，表示穩定。	相反的，若選在距離一以外的初始值，相平面軌跡會發散，表不穩定。

由述例題可證，只要找到任何一個合法的 Lyapunov function 使 $\dot{V} > 0$，即可確保系統一定穩定。儘管如此，$\dot{V} < 0$ 只是個充分條件，不能代表 $\dot{V} > 0$ 就一定是不穩定，因此除了以紅色圈圈來判斷穩定性之外，仍需要其他的方法（如解析解或使用 polar coordinates 做分析）。而接下來，我們欲改用極座標系統來分析同一樣的題目，來看看同樣條件條件 $\dot{V} < 0$ 所得到的範圍有何不同。

(c) 不同 $V(x)$ 函數所對應的收斂範圍均不同,最精確的收斂範圍必須由(1)式本身決定。透過座標轉換 $(x_1, x_2) \rightarrow (r, \theta)$，求得使得 $\dot{r} < 0$ 的 r 範圍，比較由(a)以條件 $\dot{V} < 0$ 所得到的範圍有何不同?

非線性 ODE 為

$$\begin{cases} \dot{x_1} = (x_1 - x_2)({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1) \\ \dot{x_2} = (x_1 + x_2)({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1) \end{cases}$$

將其轉為極座標，令

$$x_1 = rcos\theta,\ x_2 = rsin\theta$$

帶回上式

$$\begin{cases} \dot{r}cos\theta - rsin\theta \cdot \dot{\theta} = (rcos\theta - rsin\theta) \cdot [(rcos\theta)^2 + (rsin\theta)^2 - 1] \\ \dot{r}sin\theta + rcos\theta \cdot \dot{\theta} = (rcos\theta + rsin\theta) \cdot [(rcos\theta)^2 + (rsin\theta)^2 - 1] \end{cases}$$

令 $\dot{\theta}$= $r^2 - 1$整理可得

$$\begin{cases} \dot{r}cos\theta = rcos\theta \cdot (r^2 - 1) \\ \dot{r}sin\theta = rsin\theta \cdot (r^2 - 1) \end{cases}$$

可得極座標轉換結果為

$$\dot{r} = r(r^2 - 1)$$
$$\dot{\theta} = r^2 - 1$$

由上式的極座標轉換結果，可以分兩種情況探討：

(1)當 $r > 1$ 時，$\dot{r} > 0$，r 就會發散（越來越大），發散到無窮遠。
(2)當 $r < 1$ 時，$\dot{r} < 0$，r就會收斂(越來越小)，直到收斂到原點為止。

因此可推論，使 $\dot{r} < 0$ 以達到精確全部收斂的前提是 $r < 1$，然而一般座標形式找到 $\dot{V}(x) < 0$ 的範圍很難找到所有的收斂範圍，而用極座標轉換可得所得範圍，因此利用一般座標形式找到的範圍是極座標求解的「子集合」。不過，此題求得的範圍解是一樣的，代表我們在(b)小題找到了很棒的 Lyapunov function，可以求得全部 $\dot{V}(x) < 0$範圍。

4.2

利用可變梯度法求下列非線性系統的 Lyapunov 函數 V

$$\dot{x_1} = -x_1 + 2{x_1}^2 x_2$$

$$\dot{x_2} = -x_2$$

假設 V 的梯度可表成

$$\nabla v = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1 + 2x_2]$$

不同的係數 aij 可得到不同的 Lyapunov 函數 V。考慮下列二種不同的 aij 選擇，分別求得對應的 Lyapunov 函數 V，並求出其可確保穩定的區域範圍：

(a) $a_{11} = 1, \quad a_{21} = a_{12} = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{V} = \nabla V \dot{x} &= [\nabla V_1 \nabla V_2] \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} \\
&= [x_1 \ \ 2x_2] \begin{bmatrix} -x_1 + 2{x_1}^2 x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} \\
&= -{x_1}^2 + 2{x_1}^3 x_2 - {x_2}^2 \\
&= -{x_1}^2(1 - 2x_1x_2) - {x_2}^2
\end{aligned}$$

若將 x_1、x_2 限制在 $x_1x_2 < 1/2$ 的範圍，則有 $\dot{V} < 0$；相對應的 V 為

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_0^x \nabla V\, dx \\
&= \int_0^{x_1} \nabla V_1\, dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2\, dx_2
\end{aligned}$$

$$= \int_0^{x_1} x_1\,dx_1 + \int_0^{x_1} 2x_2\,dx_2$$
$$= \left(\frac{1}{2}x_1^{\;2} + x_2^{\;2}\right) > 0$$

因此，若取 $V(x) = \frac{1}{2}x_1^{\;2} + x_2^{\;2}$ 可證明此系統在 $1 - 2x_1x_2 > 0$ 之範圍內為穩定（即區域穩定），範圍如下圖所示。

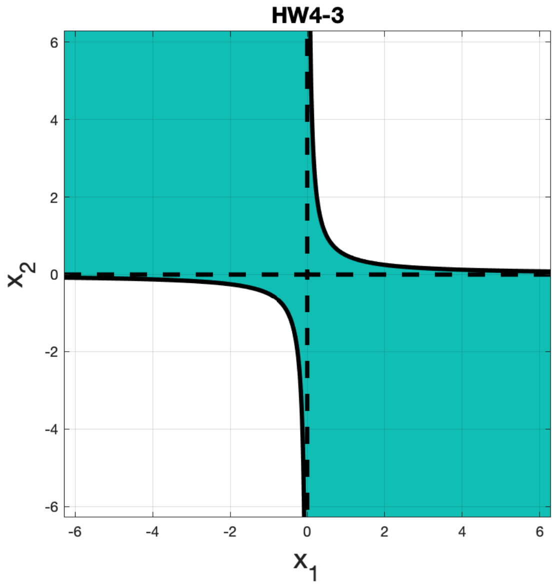


圖 3.

(b) $a_{11} = \frac{2}{(1-x_1x_2)^2}$ ， $a_{12} = -\frac{x_1^{\;2}}{(1-x_1x_2)^2}$ ， $a_{21} = \frac{x_1^{\;2}}{(1-x_1x_2)^2}$

$$\dot{V} = \nabla V \dot{x} = [\nabla V_1 \nabla V_2]\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix}$$
$$= \left[\frac{2}{(1-x_1x_2)^2}x_1 - \frac{x_1^{\;2}}{(1-x_1x_2)^2}x_2 \quad \frac{x_1^{\;2}}{(1-x_1x_2)^2}x_1 + 2x_2\right]\begin{bmatrix}-x_1 + 2x_1^{\;2}x_2\\ -x_2\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(1-x_1x_2)^2}\left[-2(x_1^{\;2} + x_2^{\;2}) + 4x_1^{\;3}x_2\right]$$

故此 $\dot{V}(x)$ 在 $x_1^{\;3}x_2 < 0$ 之區域內可達到穩定，範圍如下圖所示。

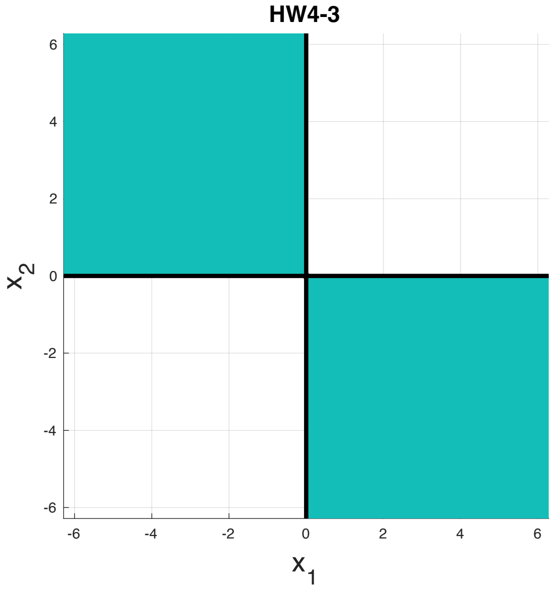


圖 4.

(d) 系統(3)可穩定的範圍是以上二個範圍的交集或聯集？在保證穩定的範圍內選幾個初始點，以 MATLAB 求解(3)式，證實平衡點為穩定；在穩定範圍之外也選幾個初始點，MATLAB 求解所得之相平面軌跡是否必為發散？

首先，因為 Lyapunov function 有其正定範圍，取 Lyapunov 穩定的範圍是取兩者之間的聯集（如圖 5 所示），因為只要在某區域找到任一個 $V(x) > 0$ 且 $\dot{V}(x) < 0$，就能確定其在該區域是漸進穩定，不須兩種 Lyapunov function 都滿足。

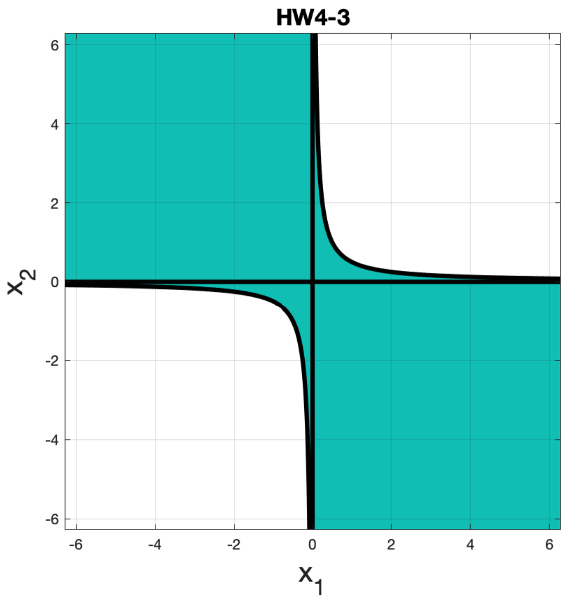


圖 5.

我們在區域內選幾點，外面也選幾點，觀察相平面軌跡之變化。

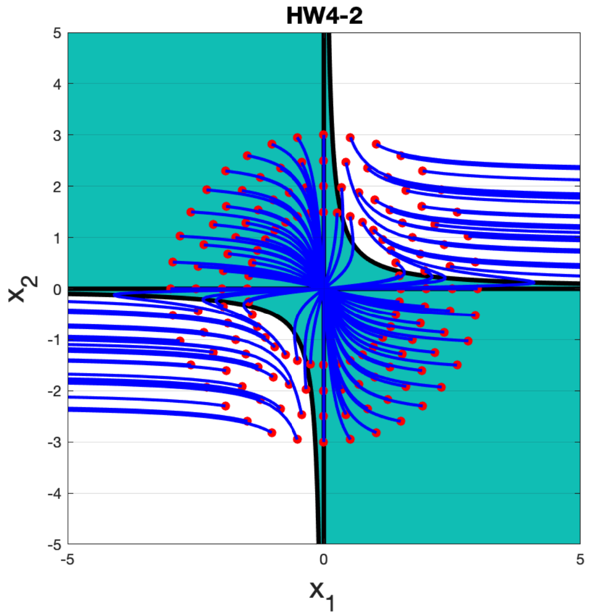


圖 6.

圖 6 可知，選在區域內的都會收斂到原點，但選在區域外的不一定都會發散，這是因為 Lyapunov 穩定性準則只是個充分定理，可能區域外的會收斂，表示仍需要透過其他方式確認 Lyapunov function 收斂範圍。

2.3

考慮一個二階非線性系統

$$\dot{x_1} = -\frac{6x_1}{(1+{x_1}^2)^2} + 2x_2 \ , \quad \dot{x_2} = \frac{-2(x_1+x_2)}{(1+{x_1}^2)^2}$$

本題是要測試(4)式相對於原點是否為全域穩定。

(a) 若取 $V(x) = \frac{{x_1}^2}{1+{x_1}^2} + {x_2}^2$，證明$V(x) > 0$， $\dot{V}(\mathrm{x}) < 0$，$\forall \mathrm{x} \in \mathcal{R}^2 - \{0\}$。亦即原點為漸近穩定。

$$\dot{V}(x) = \frac{-2{x_2}^2}{(1+{x_1}^2+{x_2}^2)^2} \leq 0 \text{，} \forall x$$

由此可見，除了 $(0,0)$ 以外，$\dot{V}(x)$ 為負，故知原點是漸進穩定。

(b) 測試 $V(x)$ 是否滿足 radially unbounded 條件(參考講義 4.4 節)？也就是當 x 離原點無窮遠時，$V(x)$ 的值是否也必定趨近於無窮大？

我們選擇 $x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \rightarrow x=\begin{bmatrix}\infty\\0\end{bmatrix}$，我們發現 $V_1(x)=0 \rightarrow V_2(x)=1$，並沒有隨著 $\parallel x \parallel \rightarrow \infty$，$V(x) \rightarrow \infty$，不符合 Growth Condition，也不滿足 radially unbounded。

(c) 畫出 $V(x)$ 的等高線圖(令 $V(x)$ =不同的常數值，從大排到小，取約 10 個數值)，並以此等高線圖為背景，畫出該系統的相平面軌跡。證明從某些點出發的相平面軌跡，其切割等高線圖的方式雖然滿足 $\dot{V}(x)<0$的條件，然而這些軌跡最後卻不進入平衡點，亦即此系統不為全域漸近穩定(參照講義的圖 4.4.2)。從數值上求出該系統可保證漸近穩定的初始值範圍。

由上題算式可知對於所有的x，$\dot{V}(x)<0$的，表示在任何一點的V值都要越來越小，也就是軌跡一定都會切割等高線，由圖 7 所示，故這個 Lyapunov 系統是穩定的。

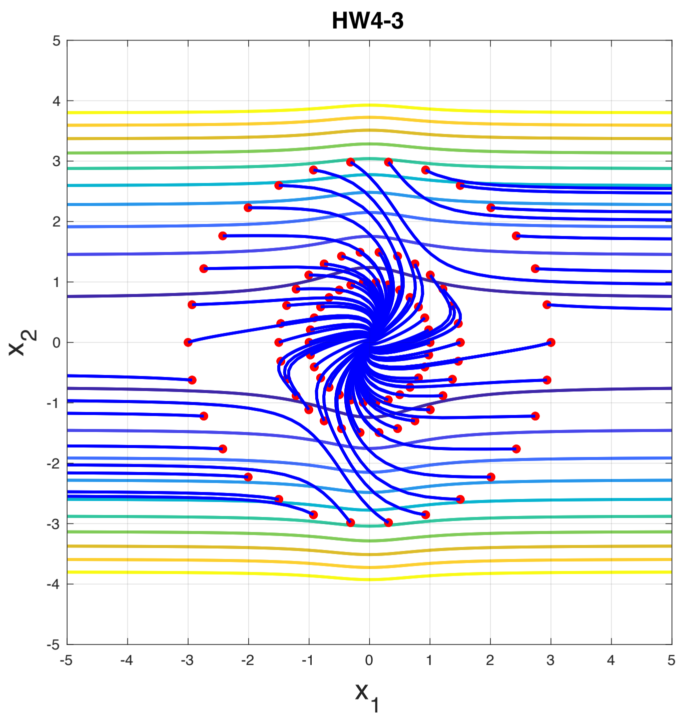


圖 7.

但有切割等高線不一定就是會收斂到原點，可由教授講義「圖 4.4.2 全域漸進穩定」中可見:

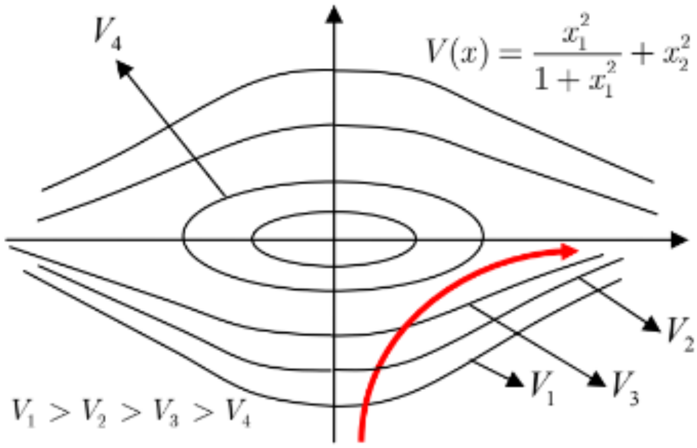


圖 4.4.2 當 $V > V_4$ 時，$\dot{V} < 0$ 不能保證 $x \to 0$

圖 8.

雖然圖 7 切割等高線圖的方式滿足 $\dot{V}(x) < 0$，但軌跡最後卻不進入平衡點，亦即此系統不為全域漸進穩定。除非$V(x)$滿足 radially unbounded 條件，否則我們不能保證 $\dot{V}(x) < 0$ 即為全域漸進穩定。經由不斷調整初始值後，找到了該系統可保證漸進穩定的初始範圍，約距離半徑為 1.58 處，軌跡如圖 8 所示。

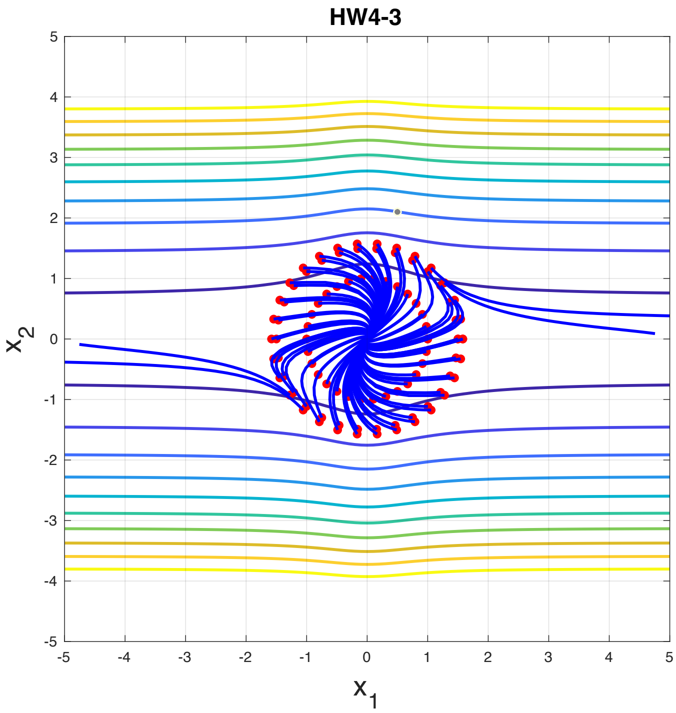


圖 9.

APPENDIX：MATLAB

4-1(b)

```
t = linspace(0, 2*pi);
r = 1;
x = r*cos(t);
y = r*sin(t);
figure(1)
d=patch(x, y, 'r', "LineWidth",3,"FaceAlpha",0.3)
set(gca,"Box",1)
hold on
axis equal;
grid on;

r_1 = 1.2;
x_1 = r_1*cosd(120:120:360);
y_1 = r_1*sind(120:120:360);

for i=1:10;
    [t,x]=ode45(@fun,[0 50],[x_1(i),y_1(i)]');
    l=plot(x(:,1),x(:,2), 'b', "LineWidth", 3);
    hold on
    xlim([-3 3]);
    ylim([-3 3]);
    p=scatter(x_1,y_1,'r',"filled");
    xlabel('x1',"FontSize",15);
    ylabel('x2',"FontSize",15);
    title("HW4-1 (Initial Condition>1) ","FontSize",15)
    legend([p;l;d],{"initial condition","initial1>1","V(x)
converge"},"FontSize",14);
end

function dxdt=fun(t,x);
    x1=x(1);
    x2=x(2);
    dxdt(1)=(x1-x2)*(x1^2+x2^2-1);
    dxdt(2)=(x1+x2)*(x1^2+x2^2-1);
```

```
    dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```

2-2(c)

```
h1=ezplot("-(2.*x.*y-1)");
hold on
h2=ezplot("-(x.^(3).*y)");
set(h1,"Fill",1);
set(h1,"LineWidth",3);
set(h1,'Color','k');
set(h2,"Fill",1);
set(h2,"LineWidth",3);
set(h2,'Color','k');

title("HW4-2","FontSize",16)
xlabel("x_{1}","FontSize",19)
ylabel("x_{2}","FontSize",19)
grid on
axis equal

r1=1.5;
r2=2;
r3=2.5;
r4=3;
x=[r1*cosd(0:10:360),r2*cosd(0:10:360),r3*cosd(0:10:360),r4*cosd(0:
10:360)];
y=[r1*sind(0:10:360),r2*sind(0:10:360),r3*sind(0:10:360),r4*sind(0:
10:360)];
scatter(x,y,'r',"filled")
hold on

for i=1:size(x,2);
    [t,a]=ode45(@fun,[0,50],[x(i), y(i)]);
    plot(a(:,1),a(:,2),'b',"LineWidth",2);
    hold on
end
axis([-5,5,-5,5])
```

```
function dxdt=fun(t,x);
    x1=x(1);
    x2=x(2);
    dxdt(1)=-x1+2*(x1^2)*x2;
    dxdt(2)=-x2;
    dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```

2-3(c)

```
% 畫出 V\left(x\right) 的等高線圖
x1 = -5:0.1:5;
x2 = -4:0.1:4;
[X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
V = (X1.^2)./(1+X1.^2)+X2.^2;
contour(X1, X2, V, 10, LineWidth=2);
hold on
title("HW4-3","FontSize",16)
xlabel("x_{1}","FontSize",19)
ylabel("x_{2}","FontSize",19)

r1=1;
r2=1.5;
r3=1.58;
x=[r1*cosd(0:12:360),r2*cosd(0:12:360),r3*cosd(0:12:360)];
y=[r1*sind(0:12:360),r2*sind(0:12:360),r3*sind(0:12:360)];
scatter(x, y, 'r', 'filled');
hold on

% 畫出系統的相平面軌跡
for i=1:size(x,2)
    [t,a]=ode45(@fun,[0 10],[x(i), y(i)]);
    plot(a(:,1),a(:,2), 'b', 'LineWidth', 2);
    hold on;
end
axis([-5,5,-5,5]);
axis square;
grid on;
```

```
function dxdt=fun(t,x);
    x1=x(1);
    x2=x(2);
    dxdt(1)=((-6*x1)/((1+x1^2)^2))+2*x2;
    dxdt(2)=(-2*(x1+x2))/((1+x1^2)^2);
    dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```