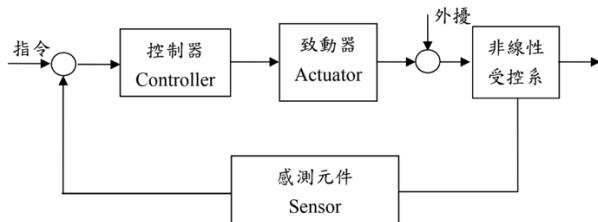


## 非線性控制 期中考 考古題

### Chapter 1

(20%)分別解釋非線性系統的四個五種類:(1)非線性的五種來源，(2)非線性方程式的五種解答，(3)非線性系統的五種特性，(4)非線性系統的五種現象。

#### (1)五種來源：



- (a)致動器：實際上的制動器無法做到完美的正比例輸出
- (b)感測器：感測器可視為由多個分段線性關係所組成的非線性形式。
- (c)外擾：常見的有摩擦和風阻。
- (d)受控器：受控體的非線性都是因為操作點遠離平衡點所造成。
- (e)控制器：可使系統呈現所需功能，但也會引入非線性動態至系統。

#### (2)五種解答：令標準方程式為 $\dot{x} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $n = 1, 2, \dots$

- (a)穩定定態解：設  $x_e$  為一穩定的平和點，若  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ ，則  $x(t)$  為
- (b)發散解：當  $t \rightarrow \infty$  時， $x_i(t) \rightarrow \infty$
- (c)週期震盪解：解  $x(t)$  所呈現的軌跡是圍繞一個不穩定的平衡點的封閉曲線，此種解也可以稱為 *limit cycle*
- (d)多週期振盪解：由多個週期函數相加的軌跡。
- (e)混沌解：解的軌跡再向空間一定之區域內徘徊，且不能相交。

#### (3)五種特性：

- (a)多平衡點：非線性系統通常具有多個平衡點或不存在平衡點。
- (b)多值響應與跳躍共振：非線性系統的解會有不連續的行為出現。例如跳躍或切換。
- (c)加成性不成立：加成性和比例放大特性為線性系統的必要特性。
- (d)狀態空間軌跡不相交：因相平面上某定點  $(x_1, x_2)$  不可能同時有兩個斜率，為軌跡不相交。
- (e)有限的時間響應：在非線性系統中的  $t$  定義範圍和線性系統不同，可能是有界的。

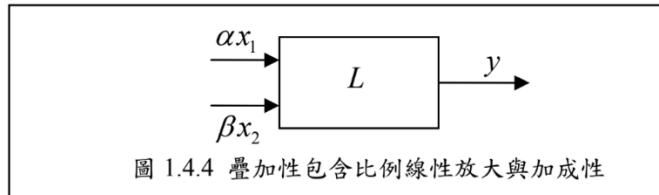
#### (4)五種現象：

- (a)極限圓：在沒有外力的情況下，某些非線性系統會呈現「固定振幅」、「固定頻率」的震盪現象，此現象稱為極限圓。
- (b)分岔：由於系統參數定量的變化，會導致系統定性特性的改變（如穩定變成不穩定）。

- (c)劇變：從一個穩定態向另一個穩定態躍遷。
- (d)混沌：初始值的極小差距，會在系統最後狀態造成極大的偏差。
- (e)碎形幾何：混沌軌道的維度不一定是整數，有可能是分數或無理數，這種幾何體稱為「碎形」。

(10%)如何檢測一個系統是線性亦或是非線性(假設只能取得訊號產生器輸入到系統的訊號及系統傳給示波器的輸出訊號，而對系統內部動態完全不清楚，也不知道系統的運動方程式 $\dot{x} = f(x)$ )？利用系統的輸入與輸出訊號說明檢測的步驟。

加成性與比例放大特性是線性系統所要滿足的充分必要條件，如果此二條件沒有同時滿足，即為非線性系統。參考圖



檢測方法只要三個步驟：

- (1)用訊號產生器建立訊號 $x_1$ ，將其輸入到系統中，再由示波器量得系統輸出為 $L(x_1)$ 。
- (2)用訊號產生器建立訊號 $x_2$ ，將其輸入到系統中，再由示波器量得系統輸出為 $L(x_2)$ 。
- (3)用訊號產生器建立合成訊號 $\alpha x_1 + \beta x_2$ ，其中 $\alpha, \beta$ 為二個常數，將其輸入到系統中，再由示波器量得系統輸出為 $L(\alpha x_1 + \beta x_2)$ 。

如果上式對任意常數 $\alpha, \beta$ 均成立，則黑盒子 $L$ 為線性系統。

若輸出結果不滿足比例線性放大 $L(\alpha x_1) = \alpha L(x_1)$ ，或是不滿足加成性 $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ ，則 $L$ 為非線性系統。

(5%)解釋為何一條相平面軌跡不會有交點，也就是經過的座標點不會再重複經過？

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), & \frac{dx_1}{dx_2} &= \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2),\end{aligned}$$

上式表明給定相平面上某一定點( $x_1, x_2$ )其上的斜率  $dx_1/dx_2$  是由座標  $x_1, x_2$  所唯一決定。不可能一個座標點上有二個斜率。但只適用於非時變的非線性系統。對於時變系統可相交，因為此時  $f_1$  和  $f_2$  都是時間的顯函數，在點( $x_1, x_2$ )上的斜率就變成：

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2, t)}{f_2(x_1, x_2, t)}$$

表示同一條相平面軌跡的前後段由於抵達( $x_1, x_2$ )

的時間不同，可以交錯於同一點上。

(10%)考慮下列之非線性方程式

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \kappa x + \mu x^3 = 0$$

(a)求出此系統的總能量  $E$ ；(b)透過  $E$  的變化，說明此非線性系統有極限圓的存在。

(a)

工程中最常見的二階非線性系統可表達如下：

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \quad (\text{Lienard 方程式}) \quad (2.5.12)$$

其中的特例如：

- Van der Pol 方程式：阻尼力  $f$  有非線性項

$$m\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \rightarrow f(x, \dot{x}) = \alpha(x^2 - 1), \quad g(x) = x \quad (2.5.13)$$

- Duffing 方程式：恢復力  $g$  有非線性項

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \kappa x + \mu x^3 = 0 \rightarrow f(x, \dot{x}) = \alpha, \quad g(x) = \kappa x + \mu x^3 \quad (2.5.14)$$

如果恢復力  $g$  是屬於保守力，則存在位勢能

$$U(x) = \int_0^x g(u) du \quad (2.5.15)$$

系統之總能量  $E$  可表成

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x g(u) du \quad (2.5.16)$$

對總能量  $E$  微分可得

$$\dot{E} = \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) + g(x)\dot{x} = -f(x, \dot{x})\dot{x}^2 \quad (2.5.17)$$

(b)

根據阻尼  $f$  的正負號，可分為三種總能量變化的系統

- (1)  $f(x, \dot{x}) > 0$ ：此時的系統具有正的阻尼，且  $\dot{E} < 0$ ，即總能量  $E$  遞減，直至  $E = 0$ ，即靜止在平衡點上不動。
- (2)  $f(x, \dot{x}) = 0$ ：此時  $\dot{E} = 0$ ，即系統總能量不變(能量守恆系統)，維持週期運動。
- (3)  $f(x, \dot{x}) < 0$ ：此時  $\dot{E} > 0$ ，即系統由外界獲得能量，使得總能量越來越大，呈現發散的行為。

通常極限圓的發生，是在  $f$  的符號不固定時。例如 Van der Pol 方程式(2.5.13)中， $|x| > 1$  時， $f > 0$ ； $|x| < 1$  時， $f < 0$ ； $|x| = 1$  時， $f = 0$ 。由此而衍伸出系統(2.5.12)式有極限圓存在的條件：

定理：

在 Lienard 方程式中，若  $f(x, \dot{x})$  及  $g(x)$  為連續且可微，且

- (1) 存在  $\alpha > 0$ ，當  $(x^2 + y^2)^{1/2} > \alpha$  時， $f(x, y) > 0$ ；
- (2)  $f(0, 0) < 0$ ，從而在原點  $(0, 0)$  的鄰域，也有  $f(x, y) < 0$ ；
- (3)  $\forall x > 0$ ， $g(x)$  是  $x$  的奇函數，且  $g(x) > 0$ ；
- (4) 當  $x \rightarrow \infty$ ， $U(x) = \int_0^x g(u) du \rightarrow \infty$

(10%)對於非線性系統(以極座標表示):  $\dot{r} = -r(\mu + r^2)$ ,  $\dot{\theta} = 1$ , 說明該系統在參數  $\mu = 0$  有分岔現象(bifurcation)。

(1)  $\mu > 0$  時， $\dot{r} < 0$ ，表時平衡點是穩定的。(2)  $\mu < 0$  時，可分成三種情況

討論

(a)  $r < \sqrt{\mu}$ ， $\dot{r} > 0$ ， $r$ 增加，使平衡點不穩定。

(c)  $r = \sqrt{\mu}$ ， $\dot{r} = 0$ ， $r$ 一直維持在 $\sqrt{\mu}$ 。

(c)  $r > \sqrt{\mu}$ ， $\dot{r} < 0$ ， $r$ 減小，且 $r \rightarrow \sqrt{\mu}$ 。

故知 $\mu < 0$  時，軌跡為極限圓。由於 $\mu > 0$  以及 $\mu < 0$  之軌跡結構完全不同。

$\mu = 0$  唯一分岔點。

決定下列非線性系統是否存在極限圓：

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2), \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

(a) (5%) 將上面方程式轉成極座標 $(r, \theta)$ 形式的微分方程式。(提示：令 $x_1 = r \cos \theta$ ， $x_2 = r \sin \theta$ )

(b) (5%) 依據上面的 $(r, \theta)$ 微分方程式決定極限圓的軌跡，並討論此極限圓是穩定，還是不穩定，亦或是半穩定。

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad x_1 = r \cos \theta \\ \textcircled{2} \quad x_2 = r \sin \theta \end{array}$$

$$\dot{x}_1 = r \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_2 = r \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$r \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta} = r \sin \theta - r \cos \theta / (r^2 - 2)$$

$$r \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta} = -r \cos \theta - r \sin \theta / (r^2 - 2)$$

當 $\dot{\theta} = -1$  時

$$\Rightarrow r \cos \theta + r \cancel{\sin \theta} = r \cancel{\sin \theta} - r \cos \theta / (r^2 - 2)$$

$$+ r \sin \theta - r \cos \theta = -r \cos \theta - r \sin \theta / (r^2 - 2)$$

---


$$r(\cos \theta + \sin \theta) = -r(\cos \theta + \sin \theta) / (r^2 - 2)$$

$$\Rightarrow r = -r(r^2 - 2)$$

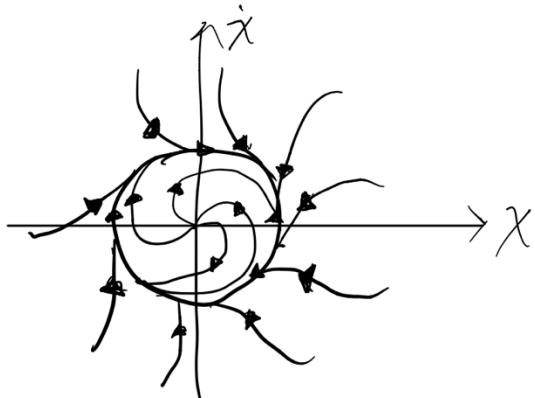
(b)

若  $r=2$ , 則  $\frac{dr}{dt}=0$ , 此說明若一旦進入  $r=2$ , 則將一直維持在極限點上。

若  $r>2$ , 則  $\dot{r}<0$ , 代表半徑遞減到 2, 而進入極限圓。

若  $0<r<2$ , 則  $\dot{r}>0$ , 表示半徑一直增加到 2, 而進入極限圓。

由以上三個特徵可以知道此極限圓存在且為穩定的。



(a) (5%) 解釋為何同一系統，有時其行為像是線性系統，有時卻又像是非線性系統？

(b) (5%) 解釋為何同一系統，有時其行為像是非時變系統，有時卻又像是時變系統？

(c) (5%) 解釋在甚麼情況之下，一個系統會同時呈現非線性及時變的行為？

P. iv

(a) 非線性與線性之分在於空間涵蓋範圍的大或小。

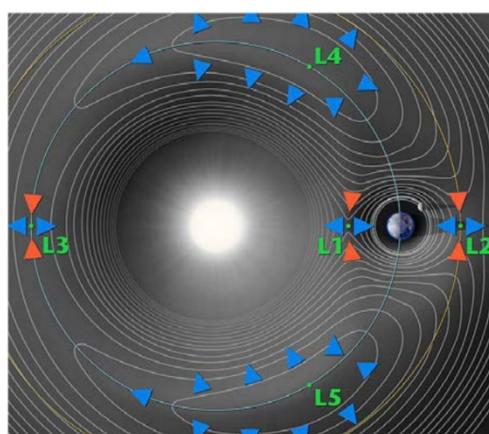
(b) 非時變與時變在於經歷時間的長短。(以花一小時與 24 小時觀察為例)

(c) 時變非線性系統所描述的是在長時間、大範圍空間區域的動態變化。

1. (10%) 如何從空間與時間的操作範圍，判定一個系統是線性還是非線性？時變還是非時變？

2. (10%) 如何利用訊號產生器(輸入)和示波器(輸出)，測試一個內部未知的系統是屬於線性系統或非線性系統？

3. (10%) 下圖是地球與太陽引力場所形成的拉格朗日點，說明無人太空探測船如何利用太空軌跡的混沌性，進行繞日軌道與繞地軌道的快速切換。



L1 位於太陽與地球引力場的交界處，也是其中一個拉格朗日點，所以在這裡系統會對初始值有高度敏感性的混沌特性。只要在 L1 點往左移一點，即進入繞日軌道。往右擾動一下，就會進入繞地軌道。因此測試船可在不受力的情況下，透過很小的控制力即可在繞日與繞地軌道之間做切換。

## Chapter 2

(10%)何謂相平面軌跡(phase plane trajectory)？如何判斷其運動方向？如何由其運動方向判斷其在平衡點的穩定性？(畫一簡圖說明之)

1. 位置相對於速度的變化軌跡 ( $x_1$  是位置,  $x_2$  是速度)
2. 以下圖為例：

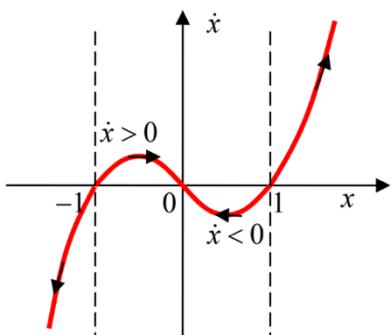


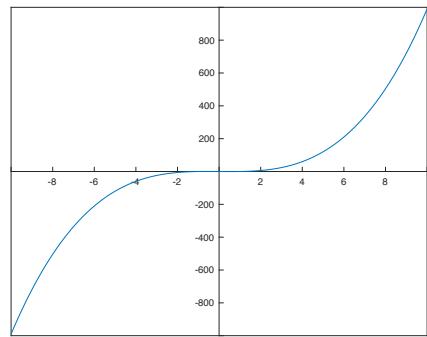
圖 2.1.4 由相平面可以看出系統運動之穩定性

1.  $0 < x < 1 : y = \dot{x} < 0 \rightarrow$  速度為負代表  $x$  遲減，沿軌跡向左運動，漸漸趨近於原點。
2.  $-1 < x < 0 : y = \dot{x} > 0 \rightarrow$  速度為正代表  $x$  遲增，沿軌跡向右運動，漸漸趨近於原點。
3.  $x > 1 : y = \dot{x} > 0 \rightarrow$  速度為正代表  $x$  遲增，沿軌跡向右運動，離  $x = 1$  越來越遠，故  $x = 1$  為不穩定平衡點。
4.  $x < -1 : y = \dot{x} > 0 \rightarrow$  速度為正代表  $x$  遲減，沿軌跡向右運動，離  $x = -1$  越來越遠，故  $x = -1$  為不穩定平衡點。

(10%)考慮以下非線性系統：

$$\dot{x} = -x + x^3 \quad (5)$$

畫出其相平面軌跡。並從軌跡的運動方向判斷平衡點的穩定性。

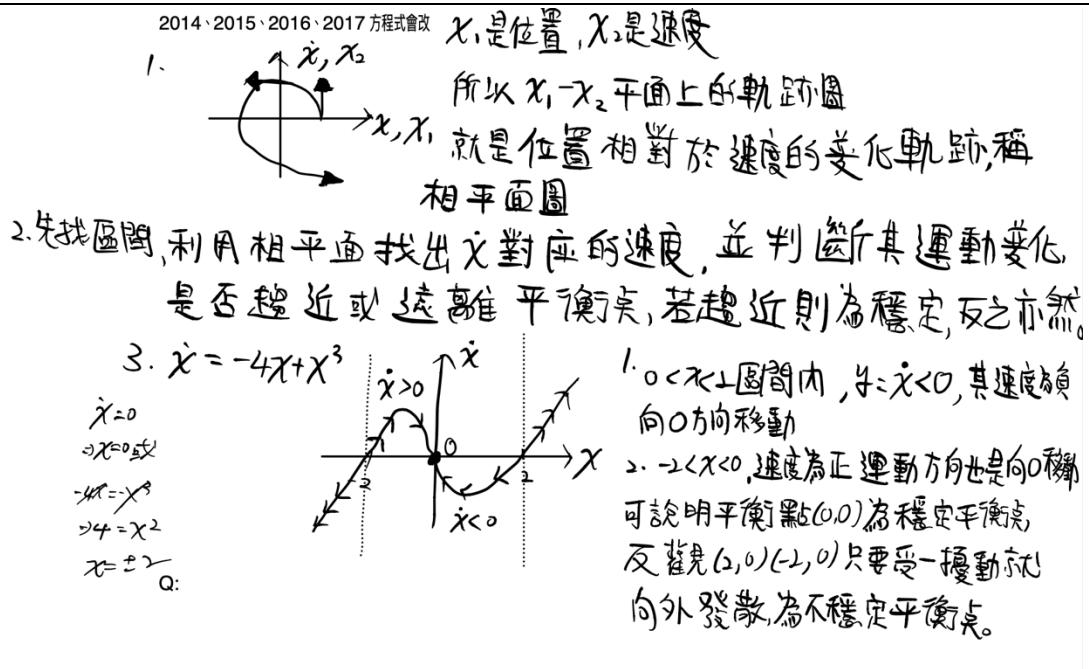


(10%)何謂相平面軌跡？如何判斷其運動方向？如何由其運動方向判斷其在平衡點附近的穩定性？以非線性系統  $\dot{x} = -2x + x^3$  為例，先求出其平衡點，大略描繪出其相平面軌跡，再由軌跡的運動方向決定每個平衡點的穩定性。

(10%)何謂相平面軌跡？如何判斷其運動方向？以非線性系統  $\dot{x} = x^3 - 3x^2 + 2x$  為例，先求出其平衡點，大略描繪出其相平面軌跡，再由軌跡的運動方向決定每個平衡點的穩定性。

(10%)何謂相平面軌跡？如何判斷其運動方向？以非線性系統  $\dot{x} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  為例，先求出其平衡點，大略描繪出其相平面軌跡，再由軌跡的運動方向決定每個平衡點的穩定性。

(10%) 何謂相平面軌跡？如何判斷其運動方向？如何由其運動方向判斷其在平衡點附近的穩定性？以非線性系統  $\dot{x} = -4x + x^3$  為例，先求出其平衡點，大略描繪出其相平面軌跡，再由軌跡的運動方向決定每個平衡點的穩定性。



(10%) 考慮二階非線性系統

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \quad (2)$$

說明如何用解析的方法決定其在平衡點附近的相平面軌跡。解釋為何恰好有六種可能結果？此六種可能的相平面軌跡各為何？

① 若  $(x_1^*, x_2^*)$  為平衡點，透過座標平移，新的平衡點在  $(0,0)$   
 $\Rightarrow f_1(0,0) = 0; f_2(0,0) = 0$  對題目做泰勒展開，因為平衡點附近  $x_1, x_2$  值很小，故可忽略得

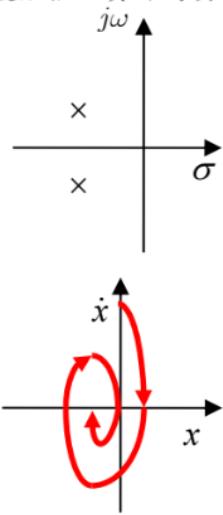
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 \Rightarrow \dot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} = 0 \text{ 其中 } x = x_1, x_2 = x_2, a = a_1, b \\ \dot{x}_2 &= b_1 x_1 + b_2 x_2 \quad b = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

再利用  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{b_1 x_1 + b_2 x_2}{a_1 x_1 + a_2 x_2}$ ，即可畫出相平面軌跡

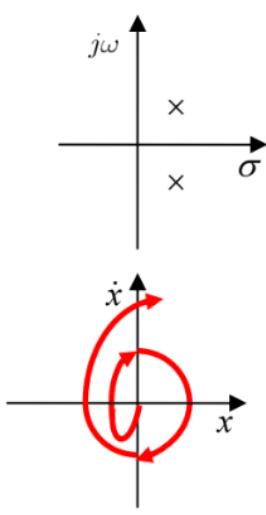
②

$\dot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} = 0$  特徵方程式為  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$   
 找出入  $\lambda_1, \lambda_2$ ，按照  $\lambda_1, \lambda_2$  的組合，則形成 6 種平衡點。

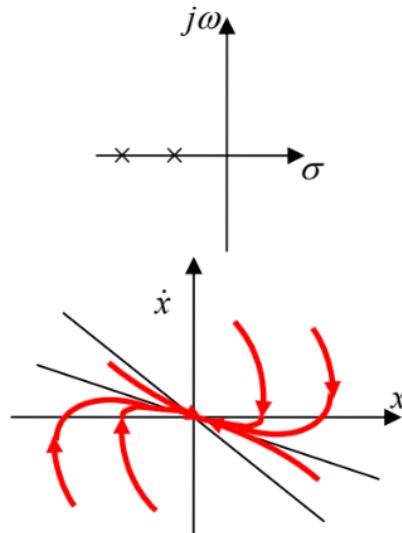
1. 穩定焦點  
(stable focus): 共軛複數根，實部為負



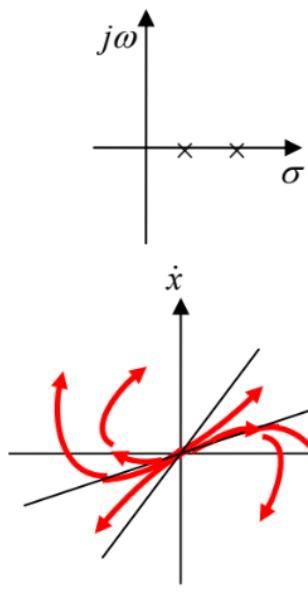
2. 不穩定焦點(unstable focus): 共軛複數根，實部為正



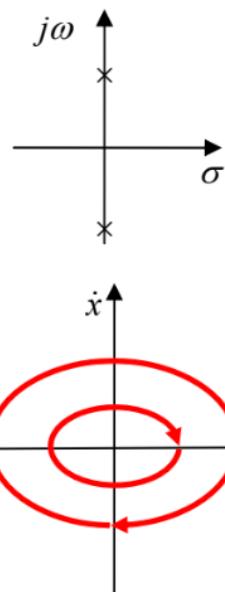
3. 穩定節點(stable node): 二根皆為負實



4. 不穩定節點(unstable node): 二根皆為正實數



5. 中心點(center): 虛軸上之共軛複數根



6. 鞍點(saddle point): 二實根，一正一負

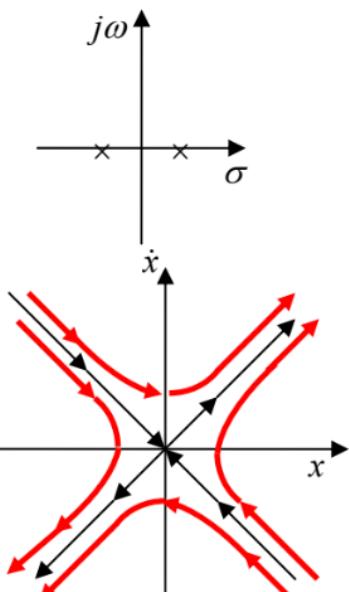


圖 2.4.1 由特徵值  $\lambda_1, \lambda_2$  之性質對應到線性系統的 6 種平衡點[6]。

看不懂ㄛ

(10%)考慮下列的線性系統:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}$$

- (a) 給定常數  $a_{ij}$  的值，使得系統的相平面軌跡為穩定焦點型軌跡。  
 (b) 給定常數  $a_{ij}$  的值，使得系統的相平面軌跡為鞍點型軌跡。

- (a) 穩定焦點型：共軛負數根，實部為負。  
 (b) 鞍點型軌跡：兩實根，一正一負。

## Chapter 3

(10%)考慮一個非線性元件，已知當輸入為  $X \sin \omega t$  時，輸出為  $y(t)$ ；試求出此非線性元件的描述函數  $N(X, \omega)$ 。描述函數僅是非線性元件的近似表示法，說明在何種情況下，此種近似表示法的誤差較小。

p.104 用傅立葉級數展開：

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$Y$  對系統的影響，和下式  $y_1$  對系統的影響類似，故先考慮  $y_1$

$$y_1(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t$$

若非線性元件的具有對稱的輸入輸出，則  $a_0=0$ ，此時

$$y_1(t) = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t = Y_1 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$Y_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \phi = \tan^{-1}(a_1 / b_1)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega_0 t d(\omega_0 t)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega_0 t d(\omega_0 t)$$

$$|N(X, \omega)| = \frac{|y(x)|}{|x(t)|} \approx \frac{|y_1(x)|}{|x(t)|} = \frac{Y_1}{X} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{X}$$

$$\begin{aligned} \angle N(X, \omega) &= \angle y(t) - \angle x(t) \\ &\approx \angle y_1(t) - \angle x(t) \\ &= \phi - 0 = \tan^{-1}(a_1 / b_1) \end{aligned}$$

所以  $\mathbf{N}(X, \omega) = |N| \angle N$

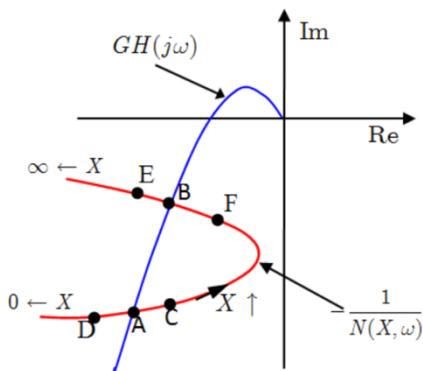
因此，當輸入為  $x(t) = X \sin \omega_0 t$  時，輸出為

$$y_1(t) = X |N(X, \omega)| \sin(\omega t + \angle N(X, \omega))$$

描述函數僅是非線性元件的近似表示法，說明在何種情況下，此種近似表示法的誤差較小(5%)。用描述函數取代非線性元件，可帶來哪些分析上的方便? (5%)

參考下圖：

1. (5%)解釋為何 A、B 二點是極限圓發生的地點？
2. (5%)說明從圖中如何決定極限圓發生時的振幅及頻率？
3. (5%)判斷 A、B 二點的極限圓是穩定還是不穩定。



① 因為 A, B 兩點為  $GH(j\omega)$  與  $\frac{1}{N(X, \omega)}$  相交處，而 A, B 兩點存在於系統穩定與不穩定之間的臨界處，因此為極限圓發生的地點。

② A, B 兩點在  $GH(j\omega) = -\frac{1}{N(X, \omega)}$  時發生，因此通過等流兩邊的比較係數由求得振幅 X 及頻率 ω

③ A 極限圓：由 A 遷動到 C 時，臨界處  $-\frac{1}{N(X, \omega)}$  被  $GH(j\omega)$  包圍，系統不穩定振幅 X↑漸離 A 点 A→D 時臨界處  $-\frac{1}{N(X, \omega)}$  不被  $GH(j\omega)$  包圍，系統穩定往遠離 A 点，故 A 点所對應極限圓為不穩定

B 極限圓：由 B→F 時， $\frac{1}{N(X, \omega)}$  被  $GH(j\omega)$  包圍，系統不穩定 X↑朝 B 點運動，B→E 時  $\frac{1}{N(X, \omega)}$  不被  $GH(j\omega)$  包圍，X↓朝 B 點運動，因此 B 為不穩定極限圓

(5%)解釋為何線性系統一旦穩定即是全域穩定，而非線性系統的穩定通常僅能保證區域穩定？

線性系統只有一個平衡點，所以當我們說某一線性系統為穩定，所指的就是其所對應的平衡點為穩定。但非線性系統因為不一定是收斂到平衡點，它可能是收斂到一條軌跡，如極限圓/或是收斂到一個區域之內。所以對於對於非線性系統的穩定性，我們必須先定義是相對於甚麼的穩定性。因此，不能說非線性系統是全域穩定，只能保證它有區域穩定。、

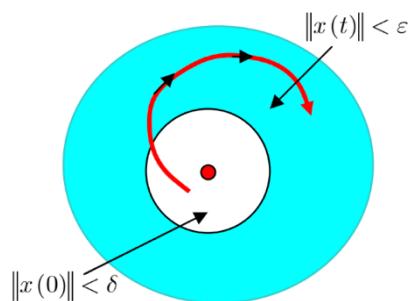
## Chapter 4

(10%)分別解釋為何線性系統若為穩定，則必為(1)全域穩定，(2)漸進穩定，(3)指數穩定。

- (1) 全域穩定要求不管  $x(0)$  在何處，當  $t \rightarrow \infty$ ，一定有  $x(t) \rightarrow 0$ ，為全域穩定，而線性系統只有一個平衡點，所以由平衡點附近之穩定情形即可判定是全域穩定。
- (2) 線性系統滿足  $\|x(0)\| < \delta$ ，最後軌跡  $x(t) \rightarrow 0$ ，故為漸進穩定。
- (3) 線性系統也會造著指數型遞減速度收斂至 0，為指數穩定。

(10%)何謂 Lyapunov 穩定性？如何檢驗一個非線性系統為 Lyapunov 穩定？

p.130



定義：對任一  $\varepsilon > 0$ ，恆存在  $\delta = \delta(\varepsilon)$ ，使得當初始值  $\|x(0)\| < \delta$  滿足時，則有  $\|x(t)\| < \varepsilon$ ,  $\forall t \leq 0$ ，則為 Lyapunov 穩定。

圖 4.1.3 Lyapunov 穩定性示意圖

② 設  $x=0$  為  $\dot{x}(t)=f(x)$  之平衡點  $D$  為  $x=0$  之鄰域,  $V: D \rightarrow \mathbb{R}$  在  $D$  上是一連續可微的函數,  $V$  滿足

1.  $V(0)=0$
2. 在  $D - \{0\}$ ,  $V(x) > 0$

若  $V(x)$  又滿足在  $D - \{0\}$ ,  $V'(x) < 0$   
則  $x=0$  為漸進穩定

3. 在  $D$  上,  $V'(x) \leq 0$

Q: 則  $x=0$  為 Lyapunov 穩定

(10%)Lyapunov 穩定性與漸進穩定性有何不同，其對 Lyapunov 函數的要求有不同？

Lyapunov 穩定性只要求軌跡最後在平衡點附近即可，亦即  $\|x(t)\| < \varepsilon$ ；但漸進穩定進一步要求軌跡最後一定要進入平衡點，亦即  $x(t) \rightarrow 0$ ，當  $t \rightarrow \infty$ 。

(10%)解釋為何存在 Lyapunov function  $V(x)$  滿足  $V(0) = 0$ ， $V(x) > 0$ ， $\dot{V}(x) < 0$  之時，其所對應的非線性系統便為 asymptotically stable？其背後的物理意義為何？

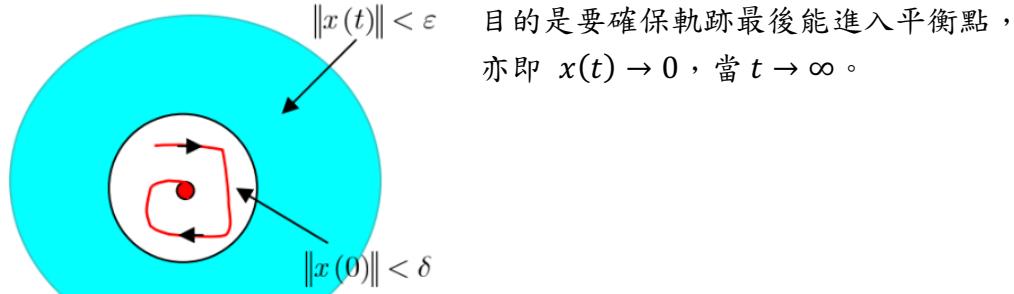


圖 4.1.4 漸近穩定性示意圖

(10%)解釋 Lyapunov 直接定理與間接定理的不同，其使用的時機與優缺點各為何？

1. Lyapunov 間接定理是透過「線性系統」的穩定性來間接判斷「非線性系統」的穩定，而直接穩定定理則透過 Lyapunov 函數  $V>0$ ,  $V_{dot}<0$  的特性來直接判斷非線性系統的穩定性。
2. 當找不到合適的透過 Lyapunov 函數來判斷穩定性時，可由間接定理先確認平衡點為穩定，再由直接定理找出保證穩定的區域範圍。

若以登山步道比擬相平面軌跡，以山谷的最低點比擬平衡點，並假設登山步道  $x$  處之高度為  $V(x)$ 。說明如何由登山步道的前進過程中所觀察到的等高線變化，決定 Lyapunov 定理中的三種穩定性：

- (a) (5%)Lyapunov 穩定性。
- (b) (5%)漸進穩定性。
- (c) (5%)全域穩定性。

- (a) 登山步道偶爾切割等高線，偶爾往下切，最後都會到達嘉明湖區域內，即群山中的平衡點，則為 Lyapunov 穩定。
- (b) 沿著登山步道探訪嘉明湖，所切割的等高線嚴格遞減，滿足  $V_{dot}<0$ ，為漸進穩定。也就是登山路徑最後會達平衡點—山谷的最低點，即嘉明湖，
- (c) 若全部區域只有一個最低點的山谷，沒有其他的山谷，沿著登山步道一直往下到達山谷的過程全程  $V_{dot}<0$ ，為全域穩定。

(10%)對於一個線性系統:  $\dot{x} = Ax$ ，其中  $A$  為一常數矩陣，利用 Lyapunov 直接定理推導出此線性非時變系統穩定的條件，並且證明若線性系統為穩定的話，則必為全域穩定。

2012、2015、2016、2017

A:  $\dot{X} = AX$  令  $V(X) = X^T P X > 0$  ( $P$  為對稱且正定)

$$\begin{aligned}\dot{V}(X) &= X^T P \dot{X} + \dot{X}^T P X = X^T P(AX) + (AX)^T P X \\ &= X^T (PA + A^T P) X = -X^T Q X ; Q = -(PA + A^T P)\end{aligned}$$

若  $Q$  為正定，則由 Lyapunov 定理知原系為全域漸進穩定  
亦即所有  $A$  之特徵值均落在左半平面

討論穩定性有以下兩種

Q: (1) 給定  $P > 0$ ，檢查是否  $Q = -PA - A^T P > 0$  檢查其解  $P$   
是否  $> 0$

(2) 給定  $Q > 0$ ，求解 Lyapunov 方程式  $PA + A^T P + Q = 0$

(10%) 對於一個非線性時變系統  $\dot{x} = f(x, t)$  而言，何謂一致穩定性(uniform stability)?  
保證一致穩定性的條件是甚麼?

當一時變系統的響應收斂速度與  $t_0$  無關時，稱為一致系統。一個非線性時變系統在任意初始時間  $t_0$  釋放，都具有 Lyapunov 穩定性，則稱其具有一致穩定性。 $\delta$  與  $t_0$  無關。

(10%) 考慮下列之控制系統

$$\dot{x} + u(t) = 0 , x(0) = x_0$$

其中  $u(t)$  為輸入之控制訊號，試設計  $u(t)$  使得不管  $x_0$  為何，當  $t \rightarrow \infty$ ，恆有  $x \rightarrow 0$ 。

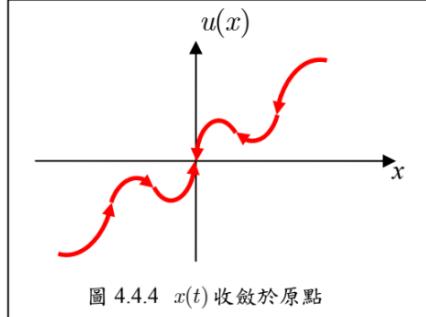


圖 4.4.4  $x(t)$  收斂於原點

最簡易之  $u(t)$  可選擇如下型式：

$$xu(x) > 0 \quad (4.4.3)$$

亦即  $\dot{x} = -u(t)$ ，當  $x > 0 \rightarrow \dot{x} = -u < 0$ ；當  $x < 0 \rightarrow \dot{x} = -u > 0$ ，如圖 4.4.4 所示。因此  $x(t)$  恒向原點方向移動。又由(4.4.3)式知  $u(x)$  必通過原點即  $u(0) = 0$ ，因此當位置  $x = 0$  時，速度  $\dot{x}(0) = -u(0) = 0$ ，亦即停留在原點不動，達到漸進穩度的目標。

現利用 Barbashin-Krasovskii 定理驗證(4.4.3)之控制策略確實滿足全域穩定之三大條件。試選  $V(x) = x^2$  (距離原點之平方 → 誤差能量)，則有

(a)  $V > 0$ ， $\forall x \neq 0$ ，(b)  $\dot{V} = 2x\dot{x} = -2xu(x) < 0$ ， $\forall x \neq 0$ ，(c)  $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow |V| \rightarrow \infty$ 。

由以上驗證可知全域穩定。 $u(x)$  之選擇有很多種，均能滿足  $xu(x) > 0$ ，如：

$$(1) u(x) = x - \sin^2 x, \quad (2) u(x) = x^3 \text{ (或任一 } x \text{ 之奇次方項)}$$

※注意：

- (1) 若  $x = 0$  為全域穩定中的平衡點，代表  $R^n$  空間之任一初始值  $x(0)$  最後必將落入  $x = 0$  之中，因此在  $R^n$  空間不能再有另一個平衡點，否則  $x = 0$  為全域穩定即不成立。
- (2) 若  $V(x)$  為一 Lyapunov 函數，即  $V > 0, \dot{V} < 0$ ，則

$$V_1 = \rho V^\alpha, \quad \rho > 0, \quad \alpha > 1$$

亦必為 Lyapunov 函數。

證明：(a)  $V > 0 \rightarrow V_1 > 0$ ；(b)  $\dot{V}_1 = \rho \alpha V^{\alpha-1} \dot{V} < 0$ ；(c)  $V$  連續可微  $\rightarrow V_1$  連續可微。由以上三點可知  $V_1$  為 Lyapunov 函數。

- (3) 局部 Lyapunov 定理或全域 Lyapunov 定理，在應用到實際問題上時，最困難也最重要的步驟，是在尋找適當的 Lyapunov 函數。而可變梯度法是最有效的方法。

(10%) 由線性系統理論知，線性非時變系統  $\dot{x} = Ax$  的穩定性條件是要  $A$  的特徵值全部為負。試利用 Lyapunov 直接定理證明這個已知結果。(提示：選取 Lyapunov 函數  $V(x) = x^T x$ )

討論線性系統

$$\dot{x} = Ax \quad (4.5.1)$$

之漸進穩定除了求  $A$  之特徵值和特徵向量外，亦可採用 Lyapunov 定理。假設一個二次式的 Lyapunov 函數

$$V(x) = x^T P x > 0 \quad (4.5.2)$$

其中  $P$  為對稱且正定，接著檢查是否  $\dot{V} < 0$ ：

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T P(Ax) + (Ax)^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Qx$$

若  $Q$  為正定，則由 Lyapunov 定理知原點為全域漸進穩定，亦即所有  $A$  之特徵值均落在左半面， $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ 。以 Lyapunov 討論線性系統的穩定性可有兩種方式：

- (1). 給定  $P > 0$ ，檢查是否  $Q = -PA - A^T P > 0$
- (2). 給定  $Q > 0$ ，求解 Lyapunov 方程式  $PA + A^T P + Q = 0$ ，檢查是否其解  $P > 0$

通常以方法(2)較為方便且常用。吾人可導出如下之定理：

穩定定理：

對任  $Q > 0$ ， $\exists P > 0$  使得  $PA + A^T P + Q = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ ，且若  $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ ， $PA + A^T P + Q = 0$  之解為唯一。

證明：

$(\Rightarrow)$  :

$$\begin{cases} V(x) = x^T Px > 0 \\ \dot{V}(x) = -x^T Qx < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{漸進穩定} \Rightarrow \text{Re}(\lambda_i) < 0$$

$(\Leftarrow)$  :

設  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  且  $Q > 0$  (對稱)，吾人將證明必存在  $P > 0$  滿足  $PA + A^T P + Q = 0$ ，且此解為唯一。選取如下之  $P$

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \quad (4.5.3)$$

$P$  有下列特性：

- (1)  $P$  為對稱
- (2)  $P$  的值為有限，因  $\lambda_i(A) < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$
- (3)  $P > 0$ 。此特性可用反證法證明：

設存在  $x \neq 0$  使得  $x^T P x = 0$ ，因為  $e^{At}$  對  $\forall t \geq 0$  沒有奇異點存在，故

$$\begin{aligned} x^T P x = 0 \Rightarrow \int_0^\infty x^T e^{A^T t} Q e^{At} x dt &= 0 \\ \Rightarrow e^{At} x \equiv 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

此與假設不合，故  $P > 0$ 。

(10%)對於非線性系統:  $\dot{x} = -x^3$ ，利用 Lyapunov 定理證明這個系統在原點處為全域漸進穩定。

通解為  $x = -x^3 t + C$ ，當  $t \rightarrow \infty$ ， $x \rightarrow 0$ 。即  $\dot{x} = -x^3$  的平衡點  $x = 0$  為全域穩定。

## Chapter 5

(10%)給定一個非線性系統:  $\dot{x} = f(x, t)$ ，如何確定它是穩定或是不穩定？如果確定是穩定的話，又如何決定它的穩定範圍？

① 要滿足

A:  $\left\{ \begin{array}{l} (1) V(0,t) = 0 \quad \forall t \geq t_0 \\ (2) V(x,t) \geq V_0(x) > 0 \quad \forall t \geq t_0 \\ (3) \dot{V}(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \leq 0, \quad \forall t \geq t_0 \\ (4) V(x,t) \leq V_i(x) > 0, \quad \forall t \geq t_0 \end{array} \right.$

則  $\dot{x} = f(t,x)$  在平衡點  $x=0$  處具有 Lyapunov-致穩定性

② 結合 (2), (4) 得  $0 < V_0(x) \leq V(x,t) \leq V_i(x), \quad \forall t \geq t_0$

Q:

(10%) 對於線性時變系統:  $\dot{x} = A(t)x$  的穩定性條件，解釋為何必須  $A(t) + A^T(t)$  的特徵值為負，而不是  $A(t)$  的特徵值為負

例如考慮下面之時變系統：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5.3.2)$$

$A(t)$  之特徵值可由關係式  $\det(\lambda I - A) = 0$ ，求得為

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -e^{2t} \\ 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0, \quad \lambda = -1, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.3.3)$$

亦即  $A(t)$  之特徵值恆為  $\lambda = -1$  且與時間無關。線性非時變分析給我們的直覺是該系統應為穩定，結果卻不然。 $(5.3.2)$  式的解可直接求得為

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{2t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{-t}$$

吾人發現  $t \rightarrow \infty$  時， $x_1(t) \rightarrow \infty$ 。因此單純由  $A(t)$  之特徵值無法判斷  $A(t)$  的穩定性。這說明時變系統的特徵值已不再具有絕對的影響性，其值的正負不再能表示系統的穩定性。下面再

茲選擇 Lyapunov 函數  $V = x^T x$ ，並設  $\lambda_i(A(t) + A^T(t)) < -\lambda_{\min} < 0$ 。注意：因為對稱，所以  $A(t) + A^T(t)$  之特徵值恒為實數。此時

$$\dot{V} = x^T \dot{x} + \dot{x}^T x = x^T (A(t) + A^T(t)) x \leq -\lambda_{\min} x^T x = -\lambda_{\min} V \quad (5.3.8)$$

因此

$$x^T x = V(t) \leq V(0) e^{-\lambda_{\min} t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.3.9)$$

故知原系統為漸進穩定且為指數穩定，收斂速度為  $\lambda_{\min}$ 。

(10%)對於一個線性時變系統:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -g(t) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

若選定 Lyapunov 函數為

$$V(x, t) = x_1^2 + (1 + g(t))x_2^2$$

試決定系統參數  $g(t)$  所要滿足的條件，使得該線性時變系統具有一致穩定性。

為了滿足  $x_1^2 + x_2^2 \leq V(x, t) \leq x_1^2 + 2x_2^2$ ， $g(t)$  必須被限制在某一正區間  $0 \leq g(t) \leq k$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq V(x, t) \leq x_1^2 + (1 + k)x_2^2$$

同時  $g(t)$  也必須滿足  $V_{\text{dot}} \leq 0$

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2(1 + g(t))x_2\dot{x}_2 + \dot{g}x_2^2 \Rightarrow \dot{V} = -x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + (\dot{g} - 2g - 1)x_2^2$$

為了確保  $V_{\text{dot}} \leq 0$  條件成立， $g(t)$  函數必須使得  $\dot{g} - 2g - 1 \leq 0$ ，亦即

$$\dot{g} \leq 2g + 1$$

(10%)對於一個線性時變系統:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha(t) \\ -\alpha(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

其中  $\alpha(t)$  為任意的連續函數，利用 Lyapunov 直接定理證明該線性時變系統為指數穩定。