9.1 本題延續範例 9.6.2 的討論，但是考慮不同的非線性系統:

$$\dot{y} + a_p y + c_p \cos y = b_p u$$

現在要設計適應性控制 u，使得在系統參數未知的情況下，非線性系統的輸出能夠追蹤以下的線性參考模式：

$$\dot{y_m} + 3y_m = 2r$$

(a) 將控制訊號表成如下型式

$$u = K_y y + K_f \cos y + K_r r$$

並假設受控體參數a_p、b_p、c_p為已知的情況下，求出控制律參數 K_y^*、K_f^*、K_r^*，使得 $r \rightarrow y$ 間的轉移函數與 $r \rightarrow y_m$間的轉移函數完全一致。

由(a)小題的控制訊號 $u = K_y y + K_f \cos y + K_r r$ 代入系統

$$\dot{y} + a_p y + c_p \cos y = b_p(K_y y + K_f \cos y + K_r r)$$
$$\Longrightarrow \dot{y} + (a_p - b_p K_y)y + (c_p - b_p K_f)\cos y = b_p K_r r$$

與參考模式比較係數

$$\dot{y_m} + 3y_m = 2r$$

可得下列

$$\begin{cases} K_y^* = K_y = \dfrac{a_p - 3}{b_p} \\ K_f^* = K_f = \dfrac{c_p}{b_p} \\ K_r^* = K_r = \dfrac{2}{b_p} \end{cases}$$

(b) 其次假設受控體參數a_p、b_p、c_p為未知的情況下，求出控制律參數的估測值$\widehat{K_y}$、$\widehat{K_f}$及$\widehat{K_r}$所要滿足的調變律，以保證追蹤誤差$e = y(t) - ym(t) \rightarrow 0$。

由題目將 $\widehat{K_y}$、$\widehat{K_f}$、$\widehat{K_r}$ 帶入控制訊號，可得 $u = K_y y + K_f \cos y + K_r r$，

定義追蹤誤差 e 如下：

$$e = y - y_m$$

$$\begin{cases} \overline{K_y} = \widehat{K_y} - K_y^* \\ \overline{K_f} = \widehat{K_f} - K_f^* \\ \overline{K_r} = \widehat{K_r} - K_r^* \end{cases}$$

將上式帶入系統可得

$$\Longrightarrow \dot{y} + \left(3 - b_p\overline{K_y}\right)y = b_p\overline{K_f}\cos y \ = (b_p\overline{K_r} + 2)r$$

計算 $\dot{e}$

$$\dot{e} = -3e + b_p(\overline{K_y}y + \overline{K_f}\cos y + \overline{K_r}r)$$

建立增益值的調整機制

$$\begin{cases} \dot{\overline{K_y}} = \dot{\widehat{K_y}} = f_1(e, \overline{K_y}, \overline{K_f}, \overline{K_r}) \\ \dot{\overline{K_y}} = \dot{\widehat{K_y}} = f_2(e, \overline{K_y}, \overline{K_f}, \overline{K_r}) \\ \dot{\overline{K_y}} = \dot{\widehat{K_y}} = f_3(e, \overline{K_y}, \overline{K_f}, \overline{K_r}) \end{cases}$$

其中 f_1、f_2、f_3 為待定函數，為了使追蹤誤差 e 漸進穩定，故令 $e(t) = 0$。選擇 Lyapunov 直接定理來確保 $e(t) = 0$，令 Lyapunov function 為下列式子

$$V\left(e, \overline{K_y}, \overline{K_f}, \overline{K_r}\right) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\left|b_p\right|\left(\frac{1}{r_1}\overline{K_y^2} + \frac{1}{r_2}\overline{K_f^2} + \frac{1}{r_3}\overline{K_r^2}\right)$$

$$\dot{V}\left(e, \overline{K_y}, \overline{K_f}, \overline{K_r}\right) = -3e^2 + b_p e b_p\left(\overline{K_y}y + \overline{K_f}\cos y + \overline{K_r}r\right)$$

$$+\left|b_p\right|\left(\frac{1}{r_1}\overline{K_y}f_1 + \frac{1}{r_2}\overline{K_f}f_2 + \frac{1}{r_3}\overline{K_r}f_3\right)$$

為了使 $\dot{V} \leq 0$，令 f_1、f_2、f_3 為如下：

$$\begin{cases} f_1 = -sgn\left(b_p\right)r_1 e y \\ f_2 = -sgn\left(b_p\right)r_2 e f(y) \\ f_2 = -sgn\left(b_p\right)r_2 e r \end{cases}$$

取得 $\gamma_1 = 2$、$\widehat{K_y} = -2ey$、$\widehat{K_f} = -2ecosy$、$\widehat{K_r} = -2er$

故可得聯立方程式

$$\begin{cases} \dot{y} + (a_p - b_p K_y)y + (c_p - b_p K_f)\cos y = b_p K_r r, y(0) = 0 \\ y_m + 3y_m = 2r, y_m(0) = 0 \\ \dot{\widehat{K_y}} = -2y\left(y - y_{m,}\right), \widehat{K_y}(0) = 0 \\ \dot{\widehat{K_f}} = -2y\left(y - y_{m,}\right)\cos y, \widehat{K_f}(0) = 0 \\ \dot{\widehat{K_r}} = -2y\left(y - y_{m,}\right), \widehat{K_r}(0) = 0 \end{cases}$$

求解 (9.1.10) 後，可得控制律參數估測值 $\widehat{K_y}$、$\widehat{K_f}$、$\widehat{K_r}$。

(c) 最後進行數值模擬驗證，設定$a_p = 1$，$b_p = 2$，$c_p = -1$，參考指令分別討論$r(t) = 1$與$r(t) = 2\sin t + \cos t$的情形。畫出追蹤誤差與 3 個參數估測誤差隨時間的響應圖，並分析在二種不同參考指令之下，這二種誤差是否可同時趨近於零？

取 $a_p = 1$、$b_p = 2$、$c_p = -1$，則可將原式改寫為下

$$\dot{y} + y + 2\cos y = -u$$

由(b)小題可知適應性控制律為 $u = \widehat{K_y}y + \widehat{K_f}\cos y + \widehat{K_r}r$ ，令$r = 2$，則代入(9.1.11)式中，並結合連立方程式

$$\dot{\widehat{K_y}} = -2ey、\dot{\widehat{K_f}} = -2ecosy、\dot{\widehat{K_r}} = -2er$$

將 $u = \widehat{K_y}y + \widehat{K_f}\cos y + \widehat{K_r}r$ 代入(9.1.11)式中，並結合聯立方程式

$$\begin{cases} \dot{y} + (1 - 2K_y)y + (-1 - 2K_f)\cos y = 2K_r r, y(0) = 0 \\ y_m + 3y_m = r, y_m(0) = 0 \\ \dot{\widehat{K_y}} = -2y(y - y_{m,}), \widehat{K_y}(0) = 0 \\ \dot{\widehat{K_f}} = -2y(y - y_{m,})\cos y, \widehat{K_f}(0) = 0 \\ \dot{\widehat{K_r}} = -2y(y - y_{m,}), \widehat{K_r}(0) = 0 \end{cases}$$

在輸入$r = 1$ 的情況，適應性控制的結果如圖 9.1.1 所示，可以發現左上角的圖(a)，追蹤誤差$e = y - y_m$。雖然在第 6 秒之後趨近於 0，但整體系統的追蹤速度並沒有非常快速，而圖(b)、(c)、(d) 則顯示參數估測的結果，參數正確值為 $K_y^* = -1$、$K_f^* = -0.5$、$K_r^* = 1$，可以發現估測值 $\widehat{K_y}$、$\widehat{K_f}$、$\widehat{K_r}$ 最終無法收斂至 K_y^*、K_f^*、K_r^*，故存在穩定誤差。

至於在輸入 $r = 2sin(t) + cos(t)$ 的情況下，適應性控制的模擬結果如圖 2 的(a) 所示，追蹤誤差相對於$r = 1$來的大，所以增長了收斂的時間，可以發現在第 6 秒後未完全收斂，而由(b)、(c)、(d) 能看出雖然所花的時間較長，但估測值 $\widehat{K_y}$、$\widehat{K_f}$、$\widehat{K_r}$ 最終會成功收斂至 K_y^*、K_f^*、K_r^*。

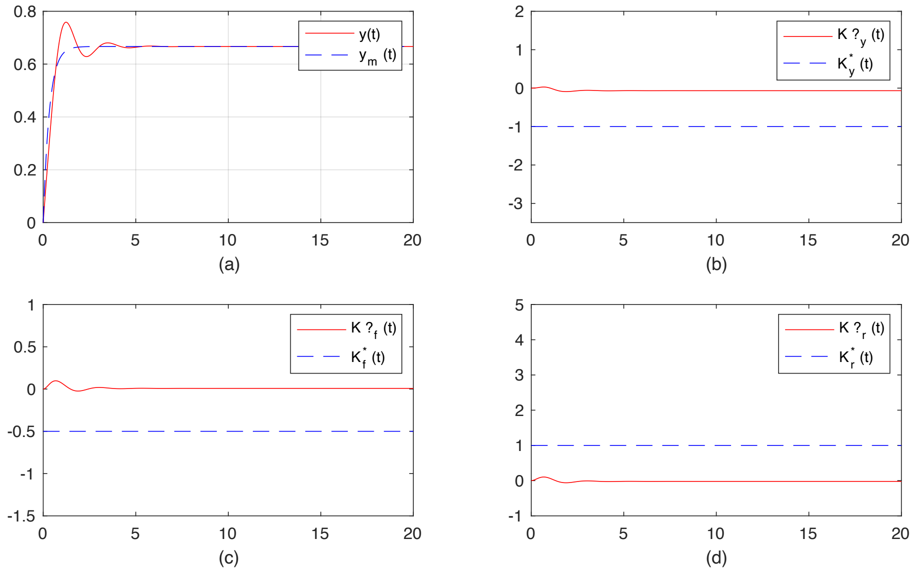

圖 9.1.1 $r = 1$

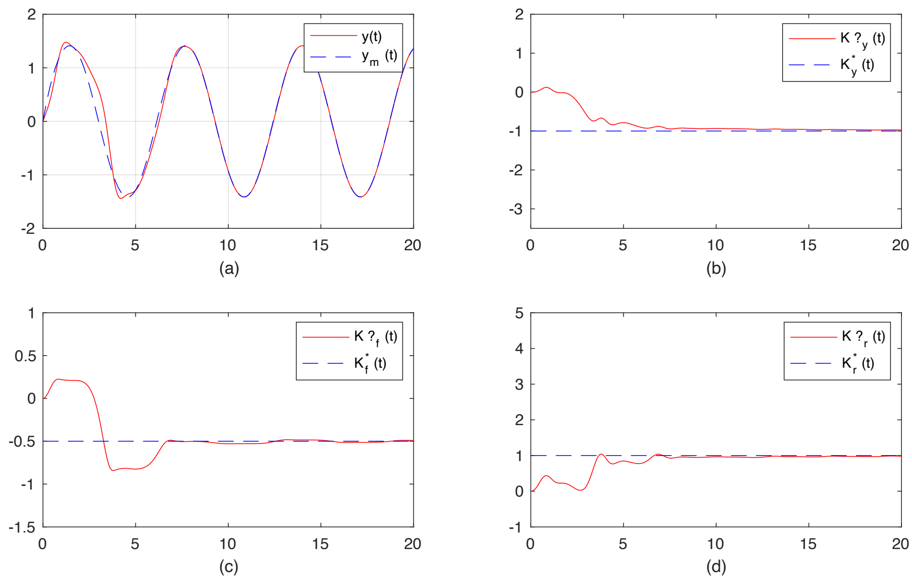

圖 9.1.2 $r = 2sin(t) + cos(t)$

MATLAB Code

```
tspan = [0 20];
y0 = [0 0 0 0 0];
[t,y] = ode45(@fun555,tspan,y0);
subplot(2,2,1)
plot(t,y(:,1),'r',t,y(:,2),'b--')
grid on
xlabel('(a)')
legend('y(t)','y_m (t)')
subplot(2,2,2)
plot(t,y(:,3),'r')
hold on
plot([0 20],[-1 -1],'b--')
axis([0,20,-3.5,2])
legend('K ?_y (t)','K_y^* (t)')
xlabel('(b)')
hold off
subplot(2,2,3)
plot(t,y(:,4),'r')
hold on
plot([0 20],[-0.5 -0.5],'b--')
axis([0,20,-1.5,1])
legend('K ?_f (t)','K_f^* (t)')
xlabel('(c)')
hold off
subplot(2,2,4)
plot(t,y(:,5),'r')
hold on
plot([0 20],[1 1],'b--')
axis([0,20,-1,5])
legend('K ?_r (t)','K_r^* (t)')
xlabel('(d)')
hold off

% rrrr=1
function dydt = fun555(t,y)
dydt = zeros(5,1);
```

```
dydt(1) = (-1+2*y(3))*y(1)+(1+2*y(4))*cos(y(1))+2*y(5);
dydt(2) = -3*y(2)+2;
dydt(3) = -2*(y(1)-y(2))*y(1);
dydt(4) = -2*(y(1)-y(2))*cos(y(1));
dydt(5) = -2*(y(1)-y(2))*1;
end

% % rrrr=2sin+costt
% function dydt = fun555(t,y)
% dydt = zeros(5,1);
% dydt(1) = (-
1+2*y(3))*y(1)+(1+2*y(4))*cos(y(1))+(2*y(5)*(2*sin(t)+cos(t)));
% dydt(2) = -3*y(2)+2*(2*sin(t)+cos(t));
% dydt(3) = -2*(y(1)-y(2))*y(1);
% dydt(4) = -2*(y(1)-y(2))*cos(y(1));
% dydt(5) = -2*(y(1)-y(2))*(2*sin(t)+cos(t));
% end
```