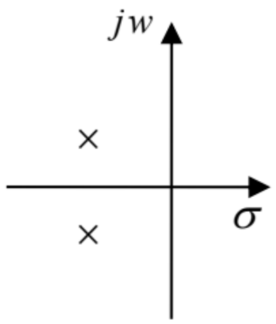
2.1

考慮(2.4.3)式，選取 6 種不同的(a, b)值,使得特徵方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 所求得到的 2 個特徵值的位置剛好對應到圖 2.4.1 的 6 種情形。針對這 6 種不同的(a, b)值，畫出(2.4.3) 式的相平面軌跡，並比較圖 2.4.1 的軌跡，驗證所得結果的正確性。

(a) 穩定焦點 (stable focus) ：共軛複數根，實數為負數。

當$a = 2, b = 7$，特徵方程式為 $\lambda^2 + 2\lambda + 7 = 0$。



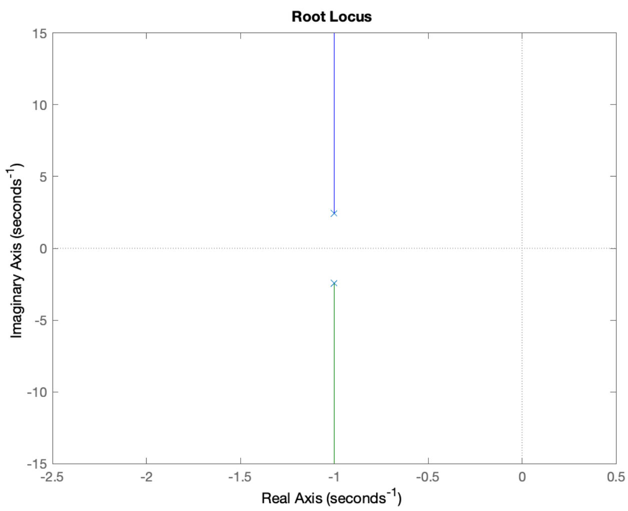
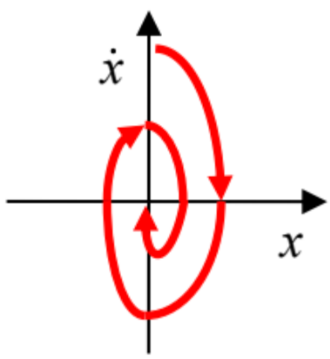


圖 2.1 (a)_1

Roots：(-1, 2.45i), (-1, -2.45i)



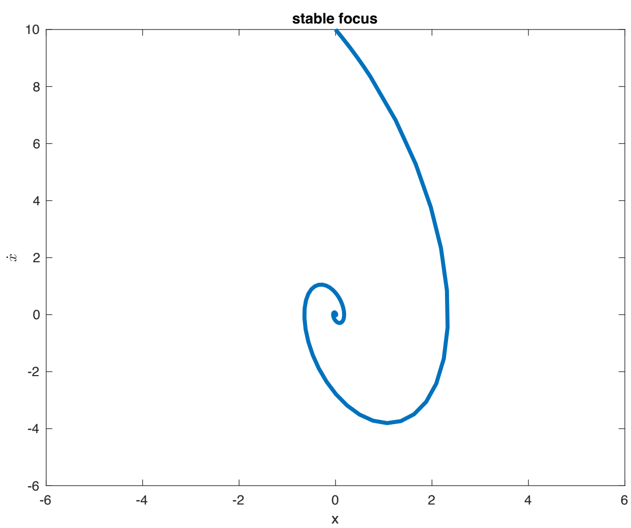
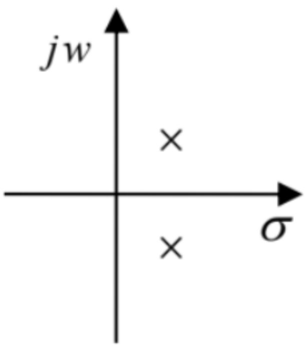
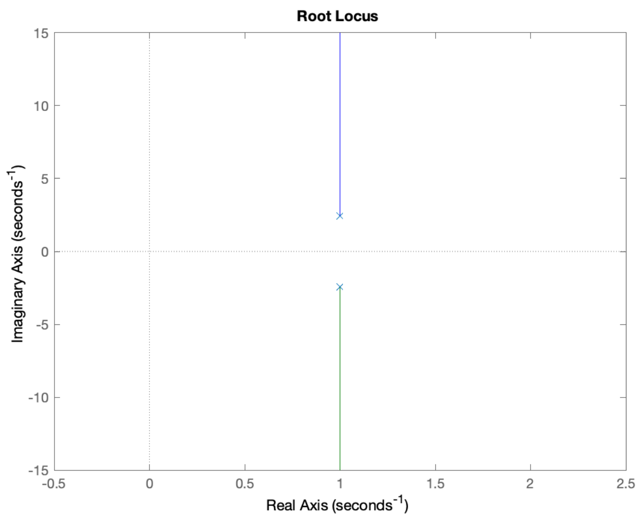
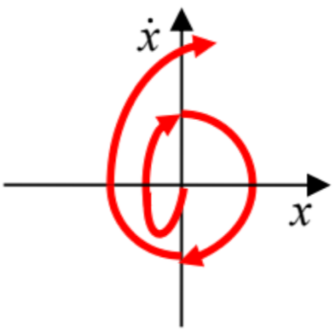
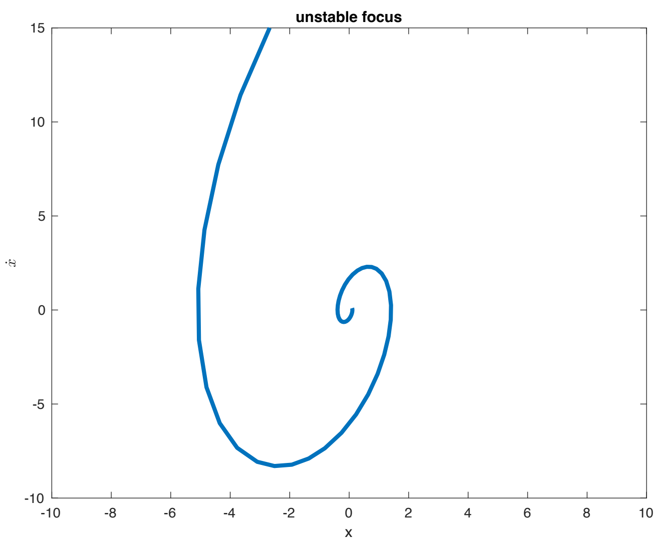


圖 2.1 (a)_2

由圖 2.1 (a)_1 可知，特徵方程式的兩根為共軛複數根，實數為負，符合穩定焦點之特性。接著由圖 2.1 (a)_2 與原圖（如左）比較可得，發現圖形類似、均位於左半平面，且相平面軌跡會順時針收斂到原點，確實為穩定焦點型，而原點是此方程其中一個平衡點。

(b) 不穩定焦點（unstable focus）：共軛複數根，實數為正數。

當 $a=-2, b=7$，特徵方程式為 $\lambda^2-2\lambda+7=0$。

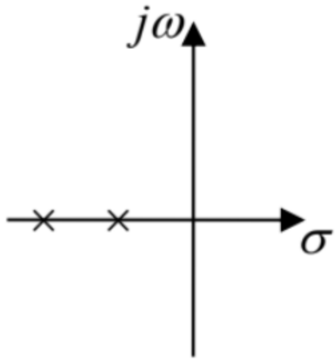
	 圖 2.1 (b)_1 Roots：(1, 2.45i), (1, -2.45i)
	 圖 2.1 (b)

由圖 2.1 (b)_1 可知，特徵方程式的兩根為共軛複數根，實數為正，符合不穩定焦點之特性。接著由圖 2.1 (b)_2 與原圖（如左）比較可得，發現圖形類

似、均位於右半平面，且相平面軌跡會順時針從原點出發，發散到無窮，確實為不穩定焦點型。

(c) 穩定節點（stable node）：兩根皆為負實數。

當 $a = 3, b = 2$ ，特徵方程式為$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$。



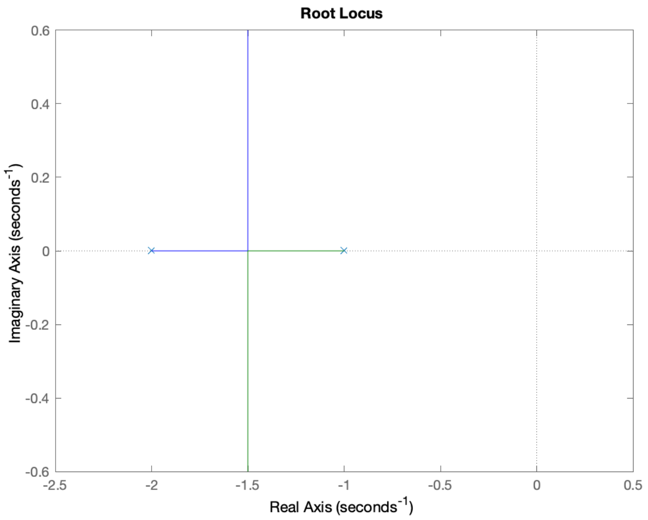
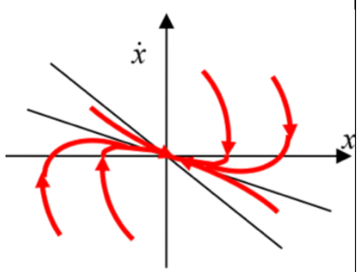


圖 2.1 (c)_1

Roots：(-2, 0i), (-1, 0i)



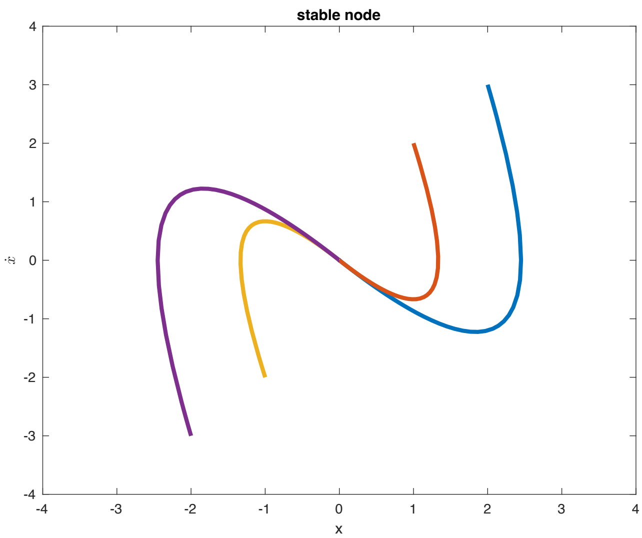
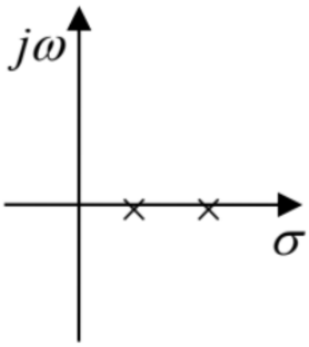
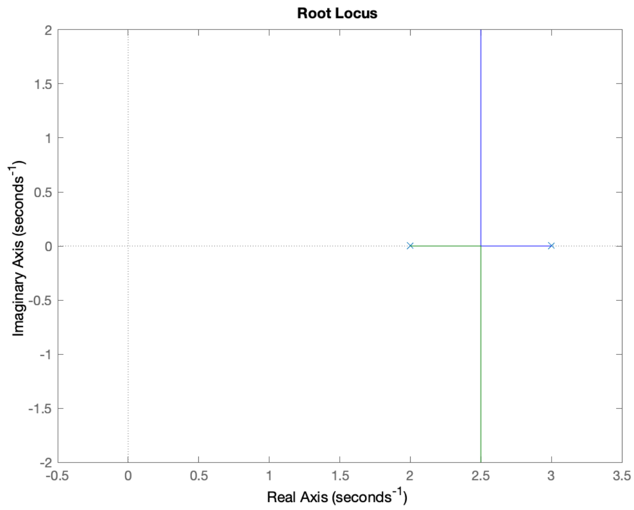
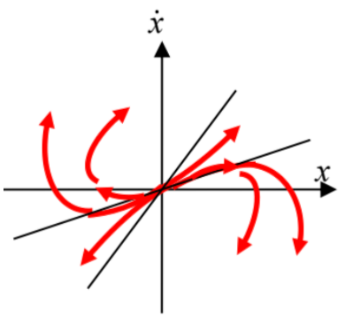
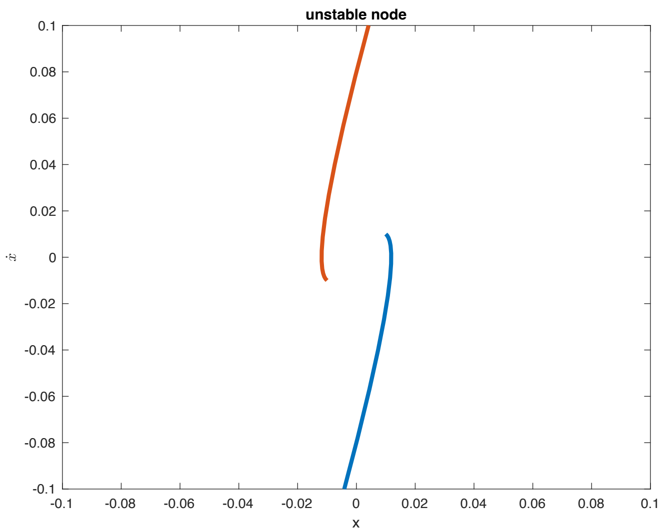


圖 2.1 (c)_2

由圖 2.1 (c)_1 可知，特徵方程式的兩根皆為負實數，符合穩定節點之特性。接著由圖 2.1 (c)_2 與原圖（如左）比較可得，發現圖形類似、在負實軸上，畫出來的相平面軌跡從任何一點出發，都會收斂到原點，確實為穩定焦點型。

(d) 不穩定節點（unstable node）：兩根皆為正實數。

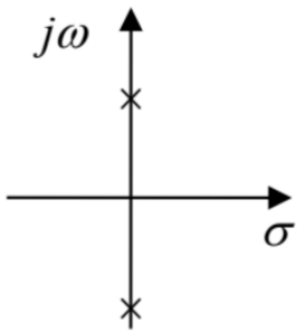
當 $a=-5, b=6$，特徵方程式為 $\lambda^2-5\lambda+6=0$。

 	 圖 2.1 (d)_1 Roots：(2, 0i), (3, 0i)
 	 圖 2.1 (d)_2

由圖 2.1 (d)_1 可知，特徵方程式的兩根皆為正實數，符合不穩定節點之特性。接著由圖 2.1 (d)_2 與原圖（如左）比較可得，發現圖形類似，且在正實軸上，畫出來的相平面軌跡從任何一點出發，都會發散到無窮，確實為不穩定焦點型。此外值得注意的是，這題需要在 0.01 尺度下才觀察的到從收斂點到發散之過程。倘若參數有些微改變，就會影響整體表現，因而產生完全不一樣的相平面軌跡。故此在特徵方程式 $a=-5, b=6$ 之下，系統非常的不穩定。

(e) 中心點（center）：虛軸上之共軛複數根。

當 $a=0, b=4$，特徵方程式為 $\lambda^2+4=0$，



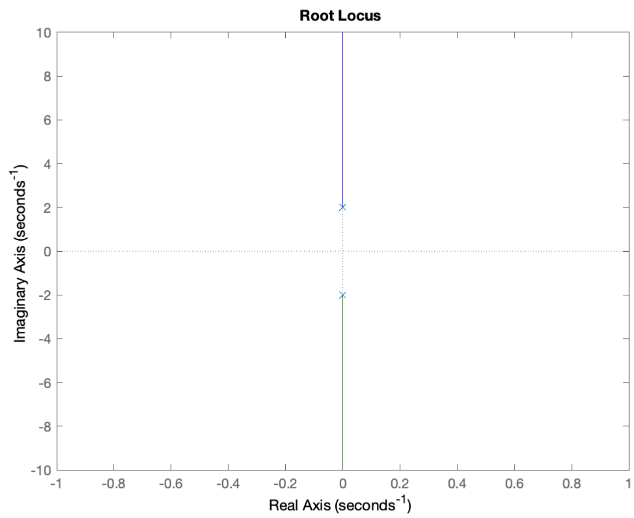
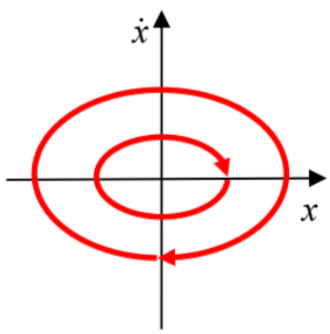


圖 2.1 (e)_1

Roots：(0, -2i), (0, 2i)



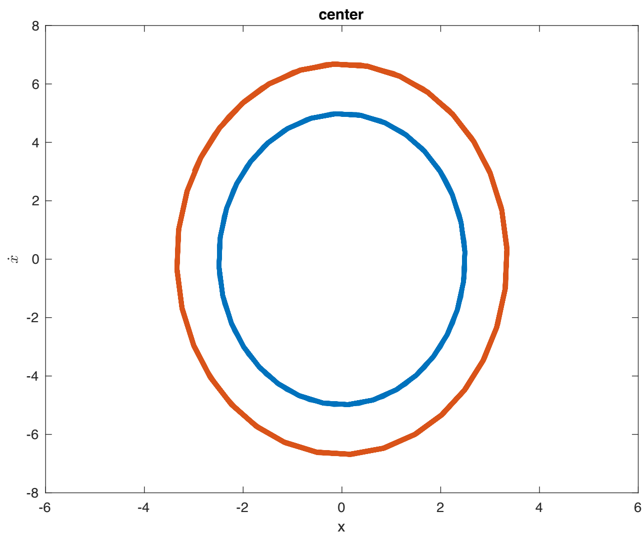
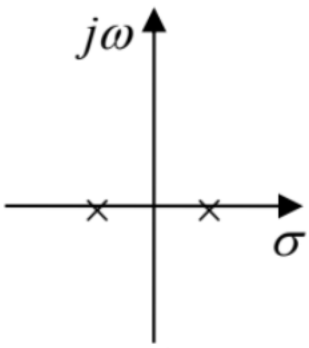
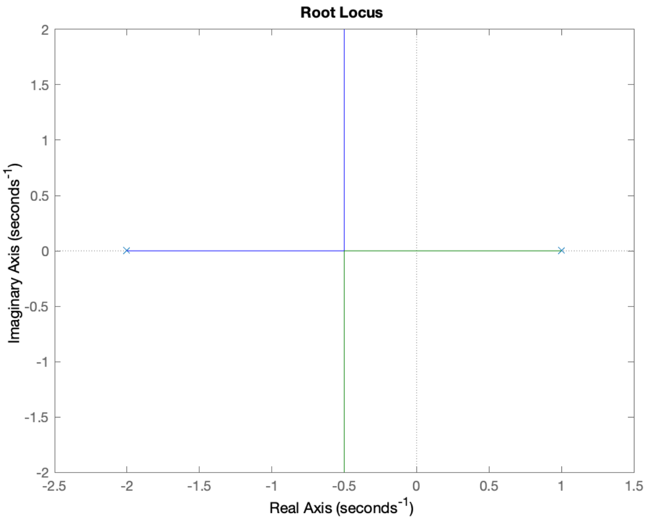
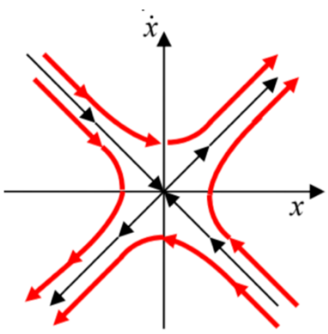
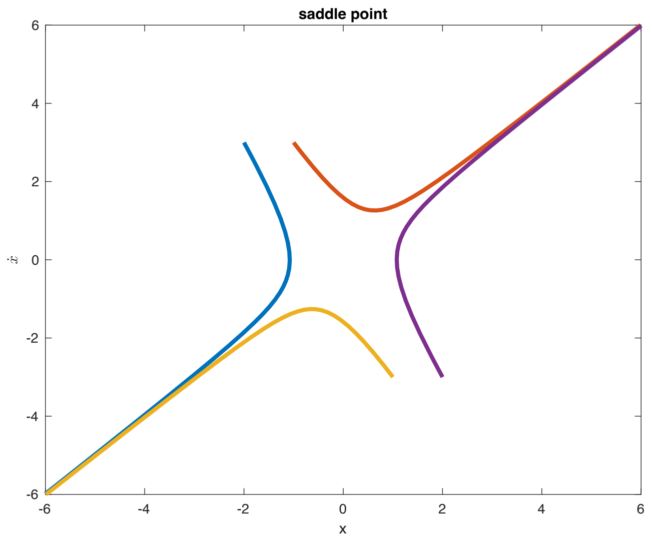


圖 2.1 (e)_2

由圖 2.1 (e)_1 可知，特徵方程式的兩根為虛軸上之共軛複數根，符合中心點之特性。接著由圖 2.1 (e)_2 與原圖（如左）比較可得，發現圖形類似、畫出來的相平面軌跡會形成一個圓，此軌跡不會進入到平衡點，會在平衡點外一直繞圈，確實為中心點型。

(f) 鞍點（saddle point）：二實根，一正一負。

當 $a=1, b=-2$，特徵方程式為 $\lambda^2+\lambda-2=0$。

	 圖 2.1 (f)_1 Roots：(-2,0i), (2,0i)
	 圖 2.1 (f)_2

由圖 2.1 (f)_1 可知，特徵方程式的兩根為二實根，一正一負，符合鞍點之特性。接著由圖 2.1 (f)_2 與原圖（如左）比較可得，發現圖形類似、畫出來的相平面軌跡從任何一點出發，前半段會先收斂，在平衡點的附近， 後半段再發散到無窮，確實為鞍點型。

2.2

試以座標變換

$$r = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\,, \theta = tan^{-1}(x_2/x_1)$$

求下列三組非線性系統的解析解

(a) 非線性 ODE 為

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2 + x_1({x_1}^2 + {x_x}^2 - 1) \\ \dot{y} = -x_1 + x_2({x_1}^2 + {x_x}^2 - 1) \end{cases}$$

將其轉為極座標，令

$$x = ros\theta \;\; y = rsin\theta$$

代回上式

$$\begin{cases} \dot{r}cos\theta - rsin\theta \cdot \dot{\theta} = rsin\theta + rcos\theta \cdot [(rcos\theta)^2 + (rsin\theta)^2 - 1] \\ \dot{r}sin\theta + rcos\theta \cdot \dot{\theta} = -rcos\theta + rsin\theta \cdot [(rcos\theta)^2 + (rsin\theta)^2 - 1] \end{cases}$$

令 $\dot{\theta}= -1$ 整理可得

$$\begin{cases} \dot{r}cos\theta = rcos\theta(r^2 - 1) \\ \dot{r}sin\theta = rsin\theta(r^2 - 1) \end{cases}$$

可得極座標轉換結果為

$$\dot{r} = r(r^2 - 1)$$
$$\dot{\theta} = -1$$

解析解為

$$r(t) = (1 + C_0 e^{2t})^{-\frac{1}{2}} \quad \theta(t) = \theta_0 - t$$

故當時間趨近無窮大時，$r(t) \to 1$即

$$\lim_{r\to\infty} r(t) = \infty$$

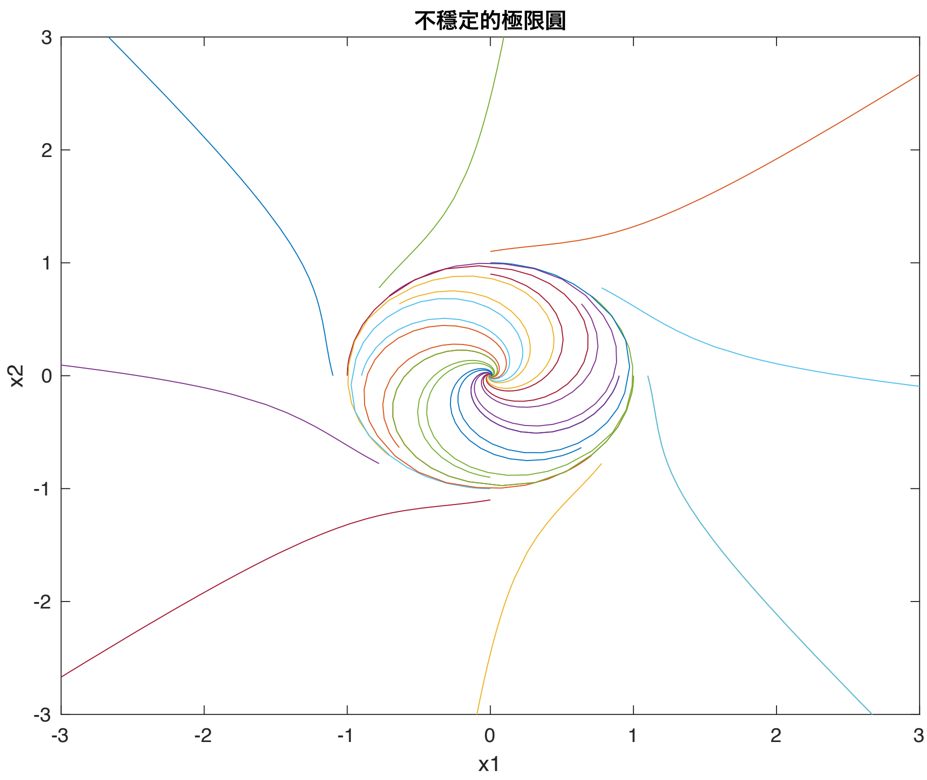


圖 2.2 (a)

由此非線性 ODE 的解析解可知，當時間趨近於無限大時，相平面軌跡會發散，從圖 2.2(a) 也可清楚得到，確實在 $r=1$ 的圓外的軌跡會遠離極限圓直到發散 $(r>1,\dot{r}>0)$，而在 $r=1$ 的圓內的相平面軌跡也會漸遠離極限圓 $(r<1,\dot{r}<0)$，所以由此非線性 ODE 畫出來的相平面軌跡是一個不穩定的極限圓。

(b) 非線性 ODE 為

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2 + x_1({x_1}^2 + {x_x}^2 - 1)^2 \\ \dot{y} = -x_1 + x_2({x_1}^2 + {x_x}^2 - 1)^2 \end{cases}$$

將其轉為極座標，令

$$x = ros\theta \quad y = rsin\theta$$

代回上式

$$\begin{cases} \dot{r}cos\theta - rsin\theta \cdot \dot{\theta} = rsin\theta + rcos\theta \cdot [(rcos\theta)^2 + (rsin\theta)^2 - 1]^2 \\ \dot{r}sin\theta + rcos\theta \cdot \dot{\theta} = -rcos\theta + rsin\theta \cdot [(rcos\theta)^2 + (rsin\theta)^2 - 1]^2 \end{cases}$$

令 $\dot{\theta}=-1$ 整理可得

$$\begin{cases} \dot{r}cos\theta = rcos\theta(r^2-1)^2 \\ \dot{r}sin\theta = rsin\theta(r^2-1)^2 \end{cases}$$

可得極座標轉換結果為

$$\dot{r} = r(r^2-1)^2$$
$$\dot{\theta} = -1$$

解析解為

$$r^2(r^2-1)e^{\frac{1}{r^2-1}} = ce^{-2t} \quad \theta(t) = \theta_0 - t$$

故當時間趨近無窮大時，$r(t) \to 1$即

$$\lim_{r\to\infty} r(t) = 1$$

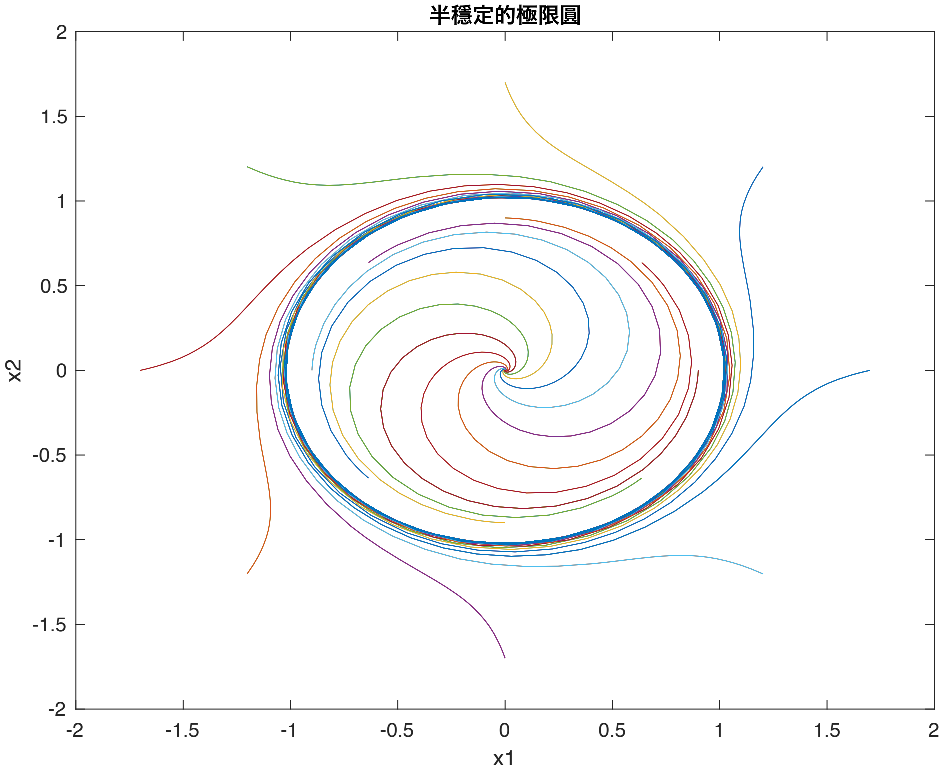


圖 2.2 (b)

由此非線性 ODE 的解析解可知，當時間趨近於無限大時，相平面軌跡會進入到極限圓裡，從圖 2.2(b) 也可清楚得到，圓外的軌跡會漸近極限圓

$(r>1, \dot{r}<0)$，而圓內的軌跡會漸遠極限圓$(r<1, \dot{r}<0)$，所以由此非線性 ODE 畫出來的相平面軌跡是一個半穩定的極限圓。

(c) 非線性 ODE 為

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2 - x_1({x_1}^2 + {x_x}^2 - 1) \\ \dot{y} = -x_1 - x_2({x_1}^2 + {x_x}^2 - 1) \end{cases}$$

將其轉為極座標，令

$$x = ros\theta \quad y = rsin\theta$$

代回上式

$$\begin{cases} \dot{r}cos\theta - rsin\theta \cdot \dot{\theta} = rsin\theta - rcos\theta \cdot [(rcos\theta)^2 + (rsin\theta)^2 - 1] \\ \dot{r}sin\theta + rcos\theta \cdot \dot{\theta} = -rcos\theta - rsin\theta \cdot [(rcos\theta)^2 + (rsin\theta)^2 - 1] \end{cases}$$

令 $\dot{\theta}= -1$ 整理可得

$$\begin{cases} \dot{r}cos\theta = -rcos\theta(r^2 - 1) \\ \dot{r}sin\theta = -rsin\theta(r^2 - 1) \end{cases}$$

可得極座標轉換結果為

$$\dot{r} = -r(r^2 - 1)$$
$$\dot{\theta} = -1$$

解析解為

$$r(t) = (1 + C_0 e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} \quad \theta(t) = \theta_0 - t$$

故當時間趨近無窮大時，$r(t) \to 1$即

$$\lim_{r\to\infty} r(t) = 1$$

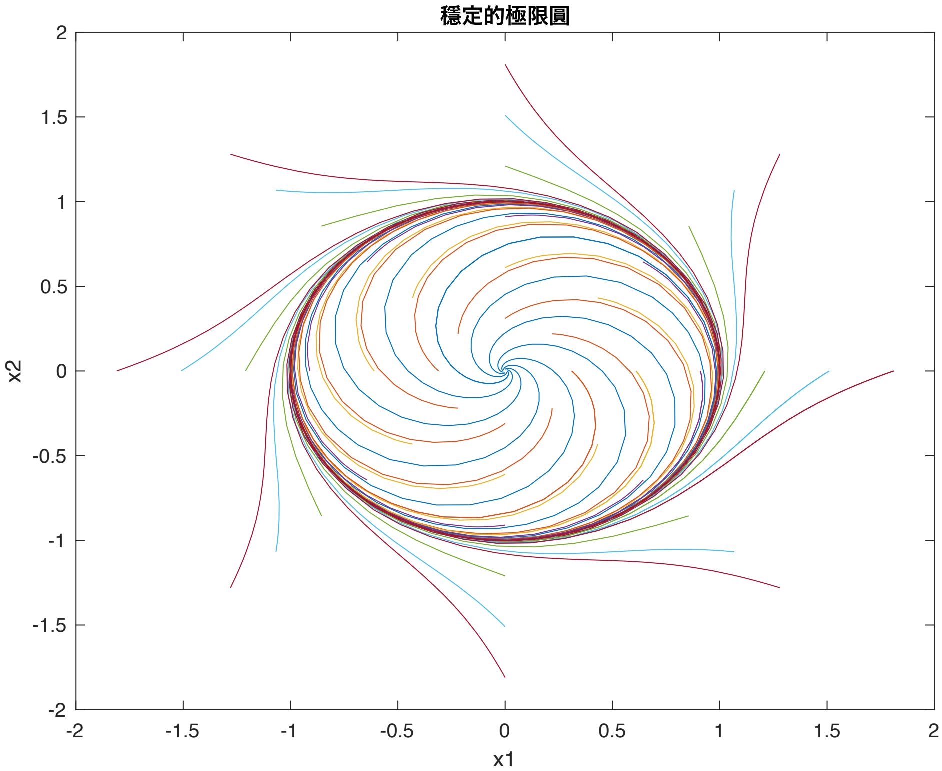


圖 2.2 (c)

圖 2.2 (c)可清楚得到，圓外的軌跡會漸近極限圓($r>1,\dot{r}<0$)，而圓內的軌跡會漸近極限圓($r<1,\dot{r}>0$)，當時間趨近於無限大時，相平面軌跡 會進入到極限圓裡，所以此非線性 ODE 畫出來的相平面軌跡是一個穩定的極限圓。

2.3

利用 MATLAB 畫出圖 2.7.7 所示飽和系統的相平面軌跡圖，其中採用下列的參數設定：$\mathrm{T}=1, \mathrm{K}=4, \mathrm{M0}=0.2, \mathrm{e0}=0.2$。比較圖 2.7.8 的手繪圖以及圖 2.7.9 的電腦繪製圖，你所得到的軌跡圖是否與之相符？是否能得到比手繪圖更精確的結果？

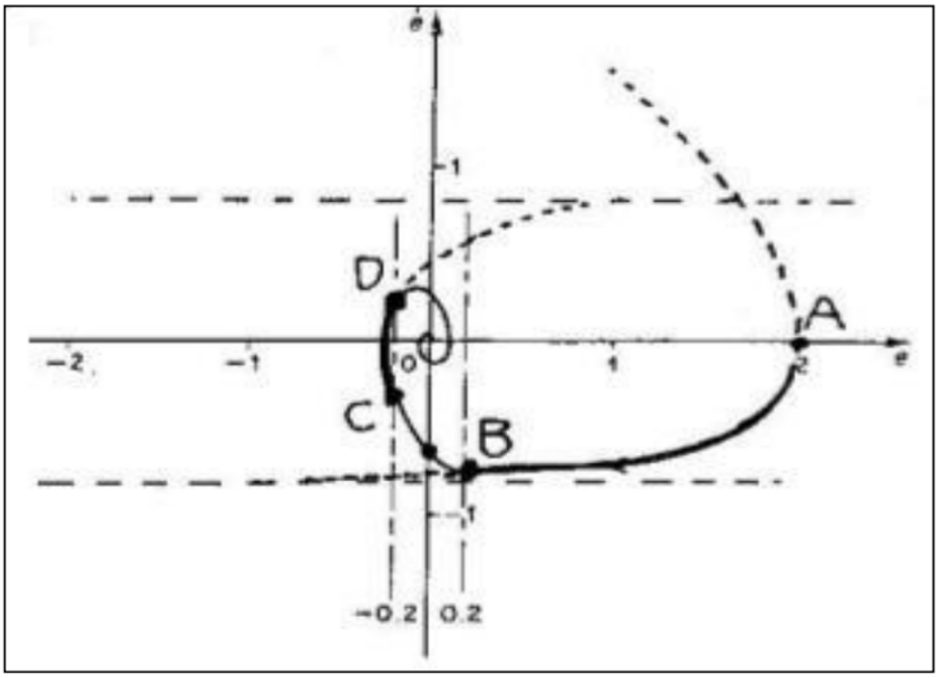


圖 2.7.8b 以等斜率法徒手畫相平面軌跡。

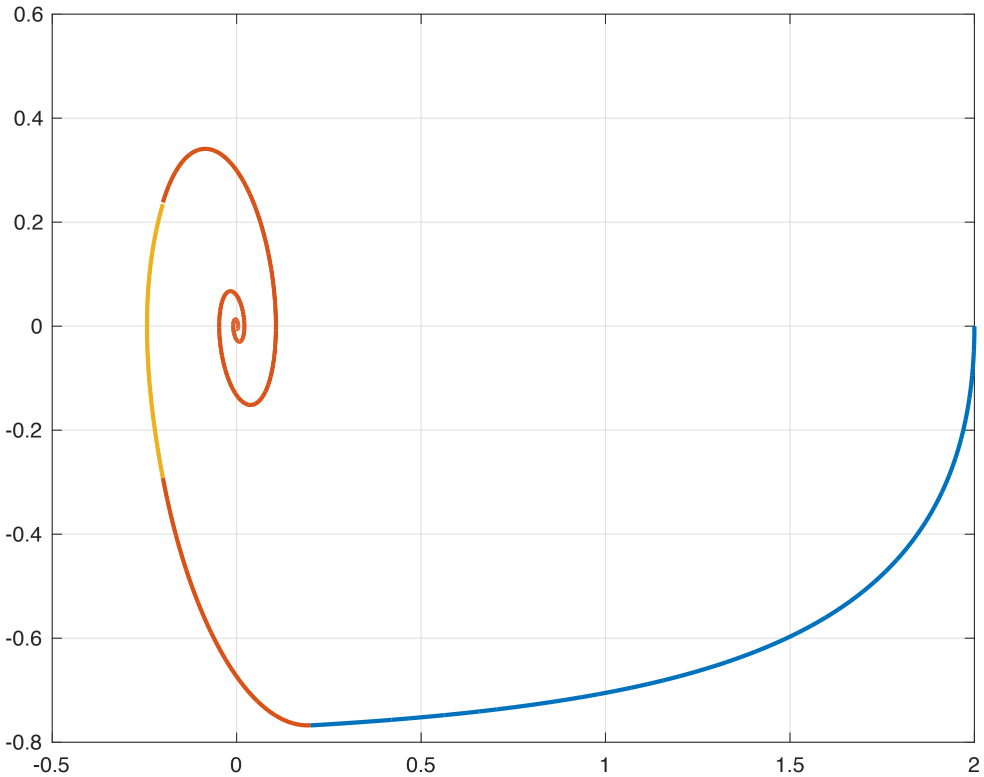


圖 2.3 (a)

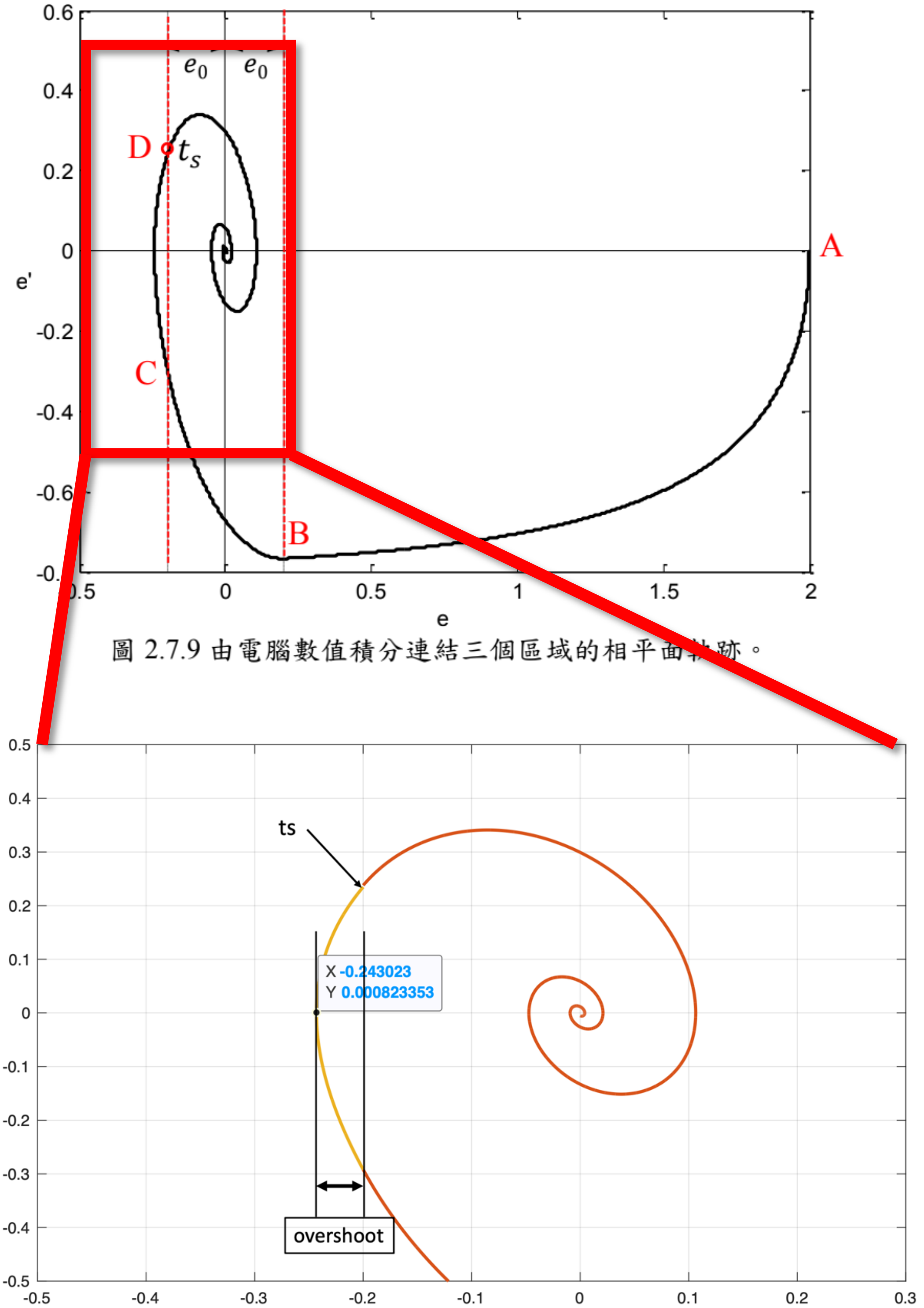


圖 2.3 (b)

徒手畫如圖 2.3(a) 所示，電腦畫圖 2.3(b) 所示。兩圖比較可得，電腦圖省時許多，也相當精準，可透過 MATLAB 來調整 t 參數。若 t 分割越細，則曲線越平滑、越精準。另外，電腦繪圖也能點出點出「超越量」以及「安定時間」等座標，十分方便。整體來說，電腦繪圖相較於手繪，既省時又精準。

MATLAB Code

2-1 (a)

```
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[0 10]');
figure(1);
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
xlim([-6 6]);
ylim([-6 10]);
xlabel('x');
ylabel('$\dot{x}$', 'Interpreter', 'latex');
title('stable focus');

figure(2);
syms = x;
sys = tf([0 0 1],[1 2 7]);
rlocus(sys)
axis on;

function dxdt=fun(t,x);
x1=x(1);
x2=x(2);
dxdt(1)=x2;
dxdt(2)=-7*x1-2*x2;
dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```

2-1 (b)

```
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[0.1 0.1]');
figure(1);
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
xlim([-10 10]);
ylim([-10 15]);
xlabel('x');
ylabel('$\dot{x}$', 'Interpreter', 'latex');
title('unstable focus');

figure(2);
```

```
syms = x;
sys = tf([0 0 1],[1 -2 7]);
rlocus(sys)

function dxdt=fun(t,x);
x1=x(1);
x2=x(2);
dxdt(1)=x2;
dxdt(2)=-7*x1+2*x2;
dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```

2-1 (c)

```
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[2 3]');
figure(1);
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
hold on;
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[1 2]');
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[-1 -2]');
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[-2 -3]');
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
hold off;
xlim([-4 4]);
ylim([-4 4]);
xlabel('x');
ylabel('$\dot{x}$', 'Interpreter', 'latex');
title('stable node');

figure(2);
syms = x;
sys = tf([0 0 1],[1 3 2]);
rlocus(sys)
axis on;

function dxdt=fun(t,x);
x1=x(1);
```

```
x2=x(2);
dxdt(1)=x2;
dxdt(2)=-2*x1-3*x2;
dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```

2-1 (d)

```
[t,x]=ode45(@fun,[0 10],[0.01 0.01]');
figure(1);
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
hold on;
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[-0.01 -0.01]');
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
hold off;
xlim([-0.1 0.1]);
ylim([-0.1 0.1]);
xlabel('x');
ylabel('$\dot{x}$', 'Interpreter', 'latex');
title('unstable node');

figure(2);
syms = x;
sys = tf([0 0 1],[1 -5 6]);
rlocus(sys)
axis on;

function dxdt=fun(t,x);
x1=x(1);
x2=x(2);
dxdt(1)=x2;
dxdt(2)=-6*x1+5*x2;
dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```

2-1 (e)

```
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[2 3]');
figure(1);
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
```

```
hold on;
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[-3 3]');
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
hold off;
xlim([-6 6]);
ylim([-8 8]);
xlabel('x');
ylabel('$\dot{x}$', 'Interpreter', 'latex');
title('center');

figure(2);
syms = x;
sys = tf([0 0 1],[1 0 4]);
rlocus(sys)
axis on;

function dxdt=fun(t,x);
x1=x(1);
x2=x(2);
dxdt(1)=x2;
dxdt(2)=-4*x1;
dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```

2-1 (f)

```
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[-2 3]');
figure(1);
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
hold on;
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[-1 3]');
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[1 -3]');
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
[t,x]=ode45(@fun,[0 100],[2 -3]');
plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',3);
hold off;
xlim([-6 6]);
ylim([-6 6]);
```

```
xlabel('x');
ylabel('$\dot{x}$', 'Interpreter', 'latex');
title('saddle point');

figure(2);
syms = x;
sys = tf([0 0 1],[1 1 -2]);
rlocus(sys)
axis on;

function dxdt=fun(t,x);
x1=x(1);
x2=x(2);
dxdt(1)=x2;
dxdt(2)=2*x1-x2;
dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```

2-2 (a)

```
for theta=0:pi/4:2*pi;
    for rho=0.9:0.1:1.1;
    [i,j]=pol2cart(theta,rho);
    [t,x]=ode45(@fun,[0 100],[i,j]');
    plot(x(:,1),x(:,2));
    hold on;
    xlim([-3 3]);
    ylim([-3 3]);
    end
    xlabel('x1');
    ylabel('x2');
    title('不穩定的極限圓');
end

function dxdt=fun(t,x);
x1=x(1);
x2=x(2);
dxdt(1)=x2+x1*(x1^2+x2^2-1);
```

```
dxdt(2)=-x1+x2*(x1^2+x2^2-1);
dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```

2-2 (b)

```
for theta=0:pi/4:2*pi;
    for rho=0.9:0.8:2.2;
    [i,j]=pol2cart(theta,rho);
    [t,x]=ode45(@fun,[0 100],[i,j]');
    plot(x(:,1),x(:,2));
    hold on;
    xlim([-2 2]);
    ylim([-2 2]);
    end
    xlabel('x1');
    ylabel('x2');
    title('半穩定的極限圓');
end

function dxdt=fun(t,x);
x1=x(1);
x2=x(2);
dxdt(1)=x2-x1*(x1^2+x2^2-1)^2;
dxdt(2)=-x1-x2*(x1^2+x2^2-1)^2;
dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```

2-2 (c)

```
for theta=0:pi/4:2*pi;
    for rho=0.01:0.3:2;
    [i,j]=pol2cart(theta,rho);
    [t,x]=ode45(@fun,[0 100],[i,j]');
    plot(x(:,1),x(:,2));
    hold on;
    xlim([-2 2]);
    ylim([-2 2]);
    end
    xlabel('x1');
```

```
    ylabel('x2');
    title('穩定的極限圓');
end

function dxdt=fun(t,x);
x1=x(1);
x2=x(2);
dxdt(1)=x2-x1*(x1^2+x2^2-1);
dxdt(2)=-x1-x2*(x1^2+x2^2-1);
dxdt=[dxdt(1);dxdt(2)];
end
```

2.3

```
[t,e]=ode45(@fun1,[0:0.0005:10],[2 0]');
for i=1:10001
    if e(i,1)<0.2
        e(i,1)=nan;
        e(i,2)=nan;
    end
end
plot(e(:,1),e(:,2),'LineWidth', 2);
hold on;
xlim([-0.5 2]);
ylim([-0.8 0.6]);

[t,e]=ode45(@fun2,[0:0.0005:10],[0.2 -0.7674]');
for i=1:10001
    if e(i,1)<-0.2
        e(i,1)=nan;
        e(i,2)=nan;
    end
end
plot(e(:,1),e(:,2),'LineWidth', 2);
hold on;
xlim([-0.5 2]);
ylim([-0.8 0.6]);
```

```
[t,e]=ode45(@fun3,[0:0.0005:10],[-0.2 -0.2918]');
for i=1:10001
    if e(i,1)>-0.2
        e(i,1)=nan;
        e(i,2)=nan;
    end
end

plot(e(:,1),e(:,2),'LineWidth', 2);
hold on;
xlim([-0.5 2]);
ylim([-0.8 0.6]);
grid on;

function dedt=fun1(t,e);
    e1=e(1);
    e2=e(2);
    dedt(1)=e2;
    dedt(2)=-0.8-e2;
    dedt=[dedt(1);dedt(2)];
end

function dedt=fun2(t,e);
    e1=e(1);
    e2=e(2);
    dedt(1)=e2;
    dedt(2)=-4*e1-e2;
    dedt=[dedt(1);dedt(2)];
end

function dedt=fun3(t,e);
    e1=e(1);
    e2=e(2);
    dedt(1)=e2;
    dedt(2)=0.8-e2;
    dedt=[dedt(1);dedt(2)];
end
```