网格作图学导论

欧思远 翟悦凯 主编

（第二版）

摸（shui）鱼（jiao）小分队 联合编写

Introduction to grid-plotting

网格作图学导论

欧思远 翟悦凯 主编
摸(shui)鱼(jiao)小分队 联合编写

（第二版）

Introduction to grid-plotting

序

我开始接触网格作图大概是在八年级。网格作图以其独一无二的考法、与众不同的思路以及新奇有趣的构造闻名全国，并称为公认的天津中考数学压轴题。我在最初面对这座大山时反而没有感到焦虑——全天津市作出这道题的人本就寥寥无几，2019 年更是出现了正确率为 0 的情况。在这种情况下，随遇而安、关注乐趣似乎是更好的选择。在我看来网格作图是一种强调瞬间灵感的题目，所以解出题目或理解答案的醍醐灌顶是其他类型题目很少见到的。

然而仅仅是基本的网格作图方法并不能让我有足够的动力写这样一本书。中考临近时我们全力冲刺。2022 年是政治历史回归天津中考的第一年，无论是考题难度还是考察知识点都一无所知，而这两科恰巧又是我的弱项，我只能花费更多的时间补习政治历史。在这一段复习的时间里，题目（尤其是理科题目）逐渐套路化非常单调。在我略感烦躁之时，我们班的数学课代表 Zyk 向我介绍了 Wyc 分线段定理、Zsq 平行定理和 Zyk 垂直定理，以及如何使用这些定理解决网格作图中“任意点关于任意直线对称”的问题。因为他的讲解过快，我完全没有听懂这三个定理。然而，他幽默的语言和说相声似的语气吸引了我的兴趣。尤其是最后两句“只需要使用 4 次 Zsq 平行定理和 2 次 Wyc 分线段定理”“我宣布，网格作图被我彻底解决了!”令我大笑不止。更加让我惊讶的是，转天他告诉我 Hmy 给出了一个 10 步以内解决“任意点关于任意直线对称”的方法（Hmy 的做法是对的，但其实远不止 10 步）。至此，我决定了中考以后，要写一本网格作图高级方法的合集，把我们年级同学们的伟大贡献收录进去。这直接导致了这本书的诞生。

我和 Zyk 同学在沟通若干次后确定了这本书以同学理论为主、以任意点作图

为主的详略安排。写作过程中，我负责了大部分定理的描述、证明、画图等，也负责了封面设计（封面的背景图片不是我绘画的）；Zyk 同学则主要负责整体框架和内容的把控与校对。有时我看不懂定理的原理，就会向 Zyk 同学寻求帮助。摸（shui）鱼（jiao）小分队则是非常多定理的提供者。截止到（2022 年 7 月 22 日），这个小分队总共有 7 位成员，包括翟悦凯（因为翟悦凯对于编写此书有直接贡献，封面中他被直接列在“主编”一行）。在 2022 年 6 月 20 日（星期一），也就是中考的最后一天，我开始了这本书的写作。到 2022 年 6 月 25 日（星期六），这本书最重要的章节之一——第三章完工。在 2022 年 7 月 10 日左右，我开始撰写第四章和其它的章节。在 9 月中旬，整本书基本完工。之后又经历了一些修改。对于我来说，写作的过程即学习的过程，也是创作的过程。我了解了不同的人们提出的各种思路，自己也参与了网格作图的研究，并提出了一两个理论。总之，希望这本书能够开拓读者的眼界，让读者学到更加有趣、更加广泛的网格作图知识。如果读者有任何问题，可以发送邮件至 tjyz_grid@163.com 和我们取得联系。

欧思远

2023 年 4 月 9 日

前言

各位亲爱的读者们，你们好，我是本书的主编之一，翟悦凯。在本书即将出版之际，首先要向一直以来关注本书写作进度的朋友们致以诚挚的谢意，没有大家热情的支持和鼓励，就不会有《网格作图学导论》的出版。其次，也要感谢本书编写组“摸鱼小分队”的大家以及主编欧思远先生，欧思远先生是一位真正值得敬佩的实干家，本书绝大多数的编写工作都是由他一人完成的，我只负责了编纂和一些简单的校订工作，可以说，如果没有欧思远先生的辛勤严谨的写作，本书只能停留在手稿的阶段；“摸鱼小分队”也为本书定理的丰富作出了极大的贡献，我个人只是提出了一些设想，书中多数的定理都是在摸鱼小分队中讨论和欧思远先生写作过程中得出的，因之，本书格外注重了定理的版权，在编写过程中，我们凡知道作者的，都在相关定理的中文名称和英文名称前，分别注明了原作者的名字和名字的拼音，以此来标明版权。倘有原作者注明不当或不全的，也请原作者从速与我们取得联系。另外，真诚希望广大读者朋友们能够提出宝贵意见，我们集思广益，不断修订，使本书趋于完善。

联系方式：tjyz_grid@163.com

关于这些定理提出的故事，欧思远先生在前言中已经叙说地很详尽了，我在这里再赘述几句。我是初三下学期才接触到网格作图的，在这之前我对网格作图的印象更多的是一种玄学，尽管在接触到这种题型之后其对我来说也很玄学吧()但总归有了一种印象：在有限的方格网中用无刻度直尺来画出一系列的图形。进而的，在接触到各种各样千奇百怪的题目要求之后，我诞生出一个疑问：在网格作图的条件下，究竟哪些是可做的，哪些是不可做的？譬如说网格作图的老祖宗尺规作图，就有三个未解之谜：三等分角，倍立方，化圆为方，后来这三个问题被伽罗瓦理论证明无解。因此我也尝试过用群论的知识证明网格作图的“可作域”，

奈何水平太差（而且至今也没有证出），并没有得到什么结论，只好作罢。后来我在 b 站上看到一个有关网格作图的视频（BV16u411i75M），深受启发，之后许多我发明的一些定理也借鉴了这个视频中的成果。当时我向欧思远先生转发了这个视频，他也对此很感兴趣。至此网格作图的定理还停留在理论阶段，真正的实践（也是为数不多的实践）是在中考二模的数学考试。我依稀记得二模网格作图是要画出一边平行于格线的平行四边形，难点主要在于要将网格中一个任意点沿水平方向平移。在考场上我忽然想到了视频里的一个定理，于是本着“既然理论上是可作的，那就试试吧”的想法，我就在考场上开始研究了，关于任意点作图的第一个定理——zyk 基本对称定理，也在考场上得出了。如今回想起这件事来确感到哭笑不得了：当时做这道题画了超过 15 分钟（方法也极其复杂，字母甚至标到了 X），以至于后面空了 10 几分的大题，这是很不值得的，即便如今我也劝勉各位读者，切莫在 18 题上浪费过多时间：然而，倘若没有当时执着的举动，就不会有 zyk 基本对称定理的问世，就更不会有之后任意点作图辉煌成果的相继提出了。所以我认为，网格作图定理背后的精神，就是团结协作、不计代价地对真理不断求索的精神。

在这之后便是颇为熟悉的故事了。从年级组长，到区教研组，再到出题人，我的这个“有点”复杂的方法受到了各界人士的研究，并逐渐流传开来。万幸的是，经专家们的研判，我的方法被判定为正解，并得到了 2 分。更重要的是，我的方法在引起了较大讨论度之后，“关于任意点作图”第一次走进了大众的视野，也吸引了一些有理想有才华的同学一起研究“关于任意点作图”，这为之后任意点作图的蓬勃发展做了思想和干部上的准备，对于这一点，我实在感到不胜荣幸。在 zyk 基本对称定理广为流传之后，很自然地，我想到 zyk 基本对称定理是否有更一般的情形，譬如任意点关于任意平行格线的直线对称？任意点关于任意一条直线对称？这在当时看来几乎是不可能的，因为这意味着对称点和对称直线和网

格一点关系都没有了，真正的任意点作图也不过于此，这一问题在当时许多朋友来看也是不可能的。

实际上，在当时一段时间里，网格作图的研究一度陷入了十分困难的时期，许多关键结论迟迟不能得证。这样的困境一直持续到三模前，又一里程碑式的定理——wyc 平分定理的问世之前。

线上三模考试的前一天晚上，我在摸鱼群里问大家是否有过任意点作垂线的方法，大家并没有什么想法，然而 wyc 说他倒是有平分任意线段的方法。最终在我的死缠烂打（划）下，wyc 给出了平分一端点在格线上的线段的方法，即 wyc 平分定理。

在 wyc 平分定理提出之后，更多的推论和定理不断涌现。随着更多的人士加入任意点作图的研究，更多革命性理论，如 zsq 平分定理，cw 定理等。由于纸笔作图精度上的局限性，利用几何画板等工具电子绘图逐渐普及，也加快了定理的证明和传播。

最终，在 2022 年 6 月 11 日下午，在摸鱼群群有的帮助下，我成功证出了网格作图皇冠上的明珠——作任意点关于任意直线的对称点。证明过程运用十数次之前提出的定理，作图过程达上百步。

尔后，hmy 又给出了只需十几步的作任意点关于任意直线的对称点的方法。至此任意点作图问题基本解决。但是，读者朋友们，任意点作图以及网格作图是没有尽头的，我们写下这本《网格作图学导论》，不仅是总结前人的成就，更是为了不断勉励读者，能够继承团结协作、不计代价地对真理不断求索的网格作图精神，能够作出新的成就来。

翟悦凯

2022 年 7 月 26 日

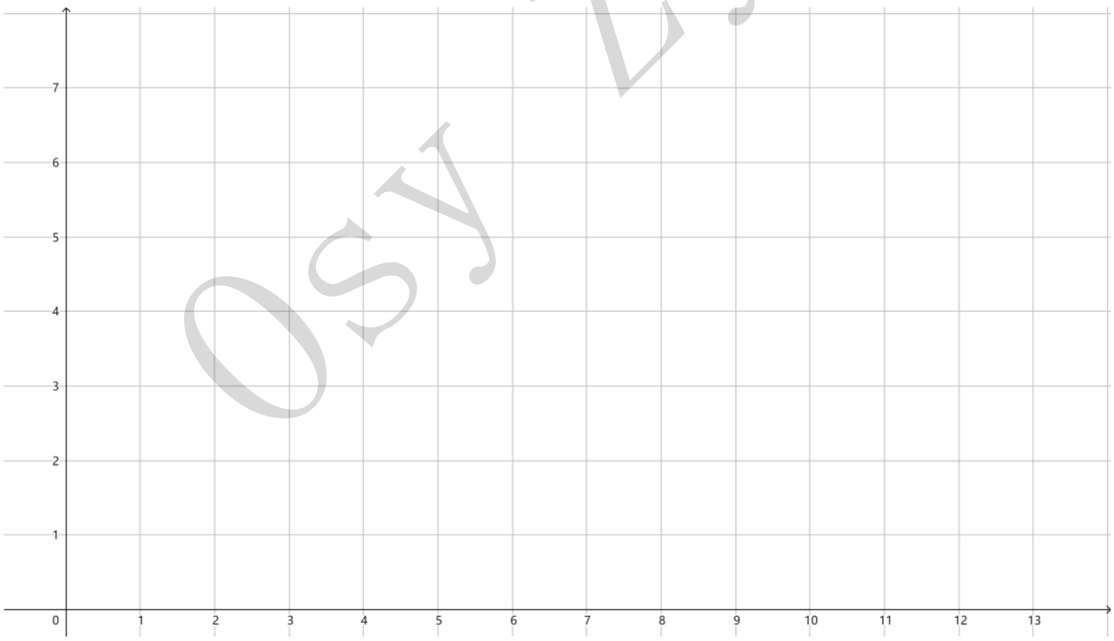
目 录

第一章 本书导读

1. 网格作图的介绍

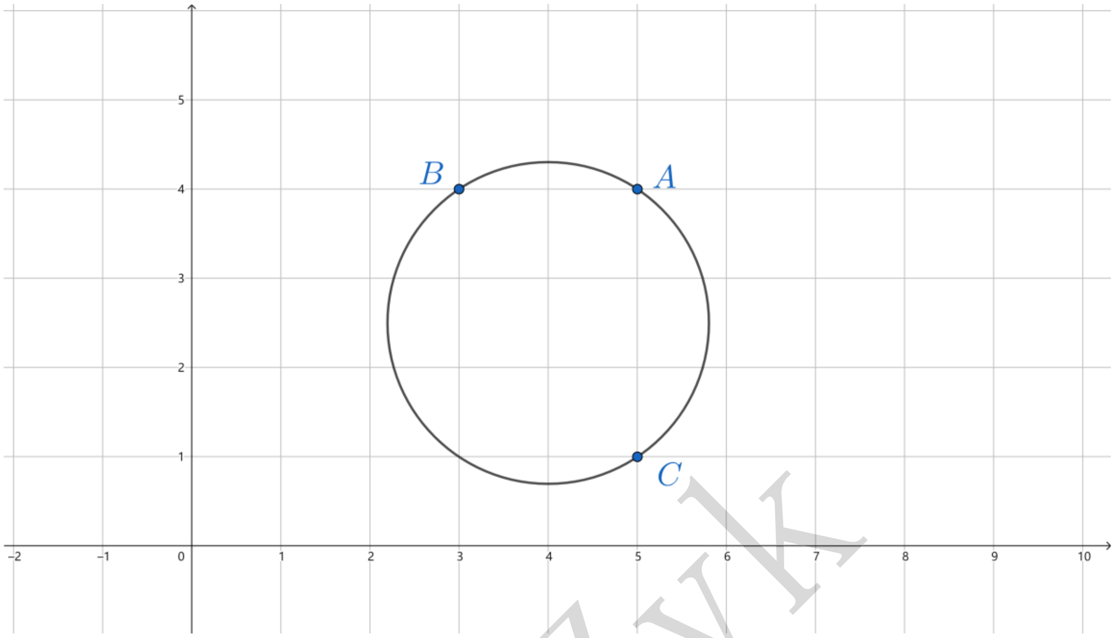
网格作图是这样的一类作图：

- 你可以使用的作图工具只有一支笔和一把**可以认为无限长的、没有刻度的**直尺，不可以使用圆规。你可以进行的操作包括：在直线（或射线，或线段，或题干中给定的图形，或网格线）上，取点；连接两点；确定两直线（或两曲线、直线和曲线）的交点。
- 你需要在一张网格上作图。绝大部分情况下，网格是正方形网格，每个小正方形的边长为 1，如下图所示：



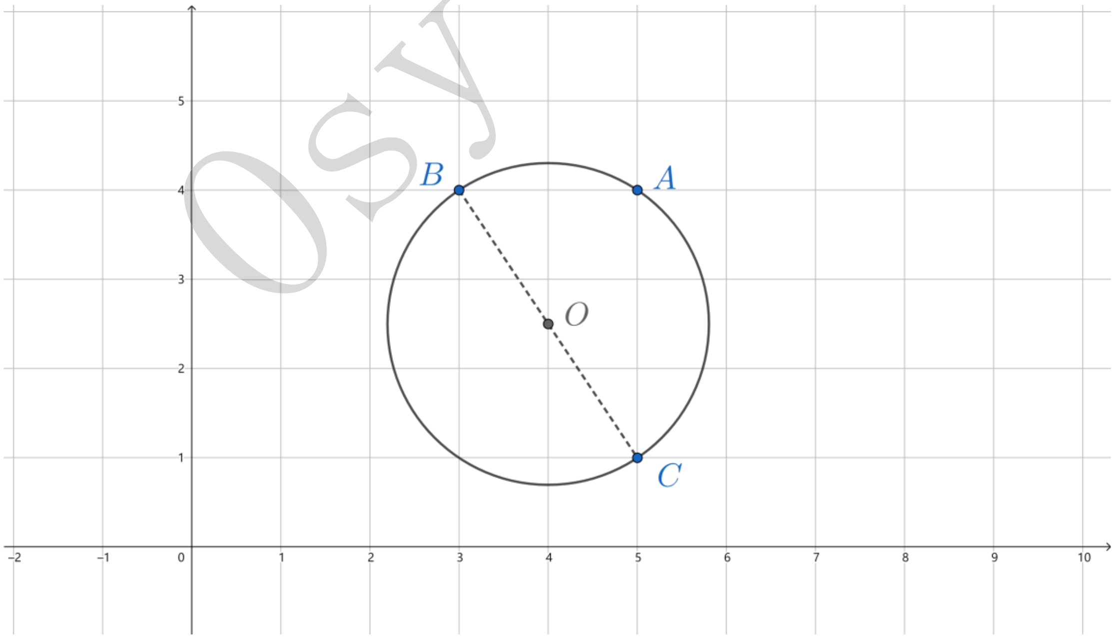
- 网格作图分无限网格作图和有限网格作图。在有限网格作图中，画图者不可以把线画到网格以外（可以画到边框上）。中考只考有限网格作图，但这本书主要探讨无限网格作图。

- 天津中考数学网格作图中，题目会要求你“请你简要叙述……是怎么找到的”，你**只需要**叙述作图步骤，**不需要**证明为什么你的做法是正确的。我举个例子：



例 1 如图，A、B、C 为格点，圆为 $\triangle ABC$ 的外接圆，请你画出它的圆心。

你**只需要**这么写，这么画：



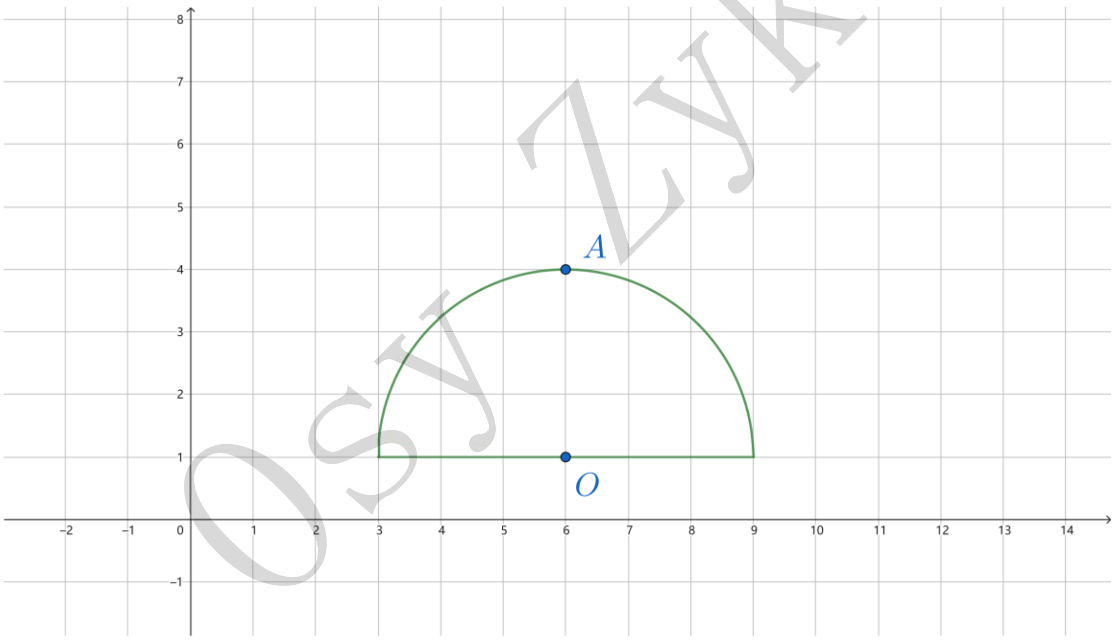
<u>连接 BC 交格线于 O，O 即为所求。</u>

你**不需要**写下面的内容：

因为 A、B 是格点且位于同一水平格线，B、C 是格点且位于同一竖直格线，所以 $AB \perp AC$，$\angle BAC = 90°$；因为圆周角所对的弦为直径，所以 BC 为圆的直径；设线段 AB 中点为 E。因为 $OE \parallel AC$，所以 $\angle OEB = \angle CAB$、$\angle BOE = \angle BCA$；因为 $\angle OBE = \angle CBA$，所以 $\triangle OBE \sim \triangle CBA$，$BO:BC = BE:BA = 1:2$。因为圆的圆心为直径的中点，所以 O 为圆的圆心。

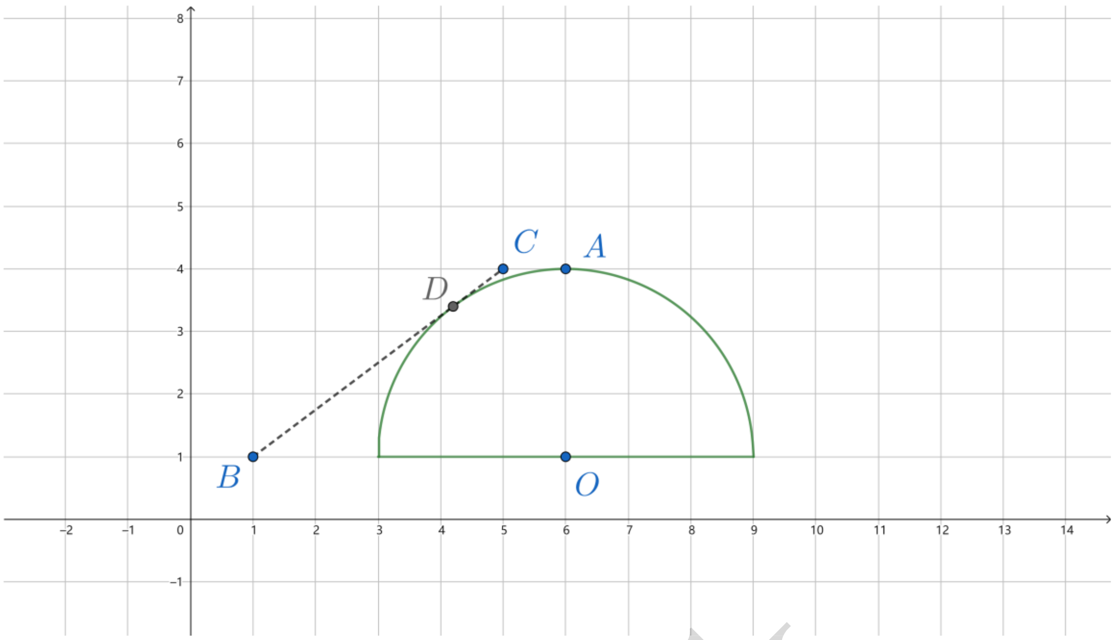
- 网格作图有“无限高的作图精度”。“无限高的作图精度”，意思是线不会画歪，交点不会点偏，无论两个点离得多近，只要能够证明它们不重合，就能分出哪个点是哪个点。读者可以看一下下面的给出的例子：

例 2



如图，半圆 O 过格点 A。做出半圆的切线，并标注出切点。

答 如图



取格点 B、C 连接 BC 交半圆于 D，BC 和 D 即为所求。（第二章有解析）

现在有这样一个问题：为什么 BC 和半圆只有一个交点？有没有可能，这条直线与这个圆有两个特别接近的交点？在书写作图步骤时，我们不需要解释为什么只有一个交点——无限高的作图精度告诉我们它们之间就是只有一个交点。但是在证明做法的正确性时，我们不能使用“无限高的作图精度”来解释。

- 作图时一般使用虚线。因为第三章往后的内容过于复杂，后面会用实线作图。

2. 阅读指南

- **这本书是《网格作图学导论》第二版。从第二版开始，我们开始公开 PDF 文件。这本书仅供对任意点网格作图感兴趣的读者观看。如果您听到有人虚假宣传（如“天津中考 18 题秘籍”等），或者以高价格购进了盗版的书，欢迎举报。发送邮件至 tjyz_grid@163.com 即可举报。**
- 这本书共分五个章节。第一章就是你正在阅读的这一章，是引导读者阅读的

章节；第二章是对网格作图基本方法的复习，供读者复习基本知识和查漏补缺，包括简单的平分、倍长、平行、垂直等，还有一些经常会用到的几何定理；第三章介绍的是不涉及圆的任意点作图，这一章的知识主要解决了平分或倍长任意线段、作任意点关于任意直线对称等问题；第四章介绍的是涉及圆的任意点作图，主要解决了作任意圆的圆心，圆上任意点的切线等问题；第五章为解析几何与网格作图，主要介绍了任意有理点可作定理等。

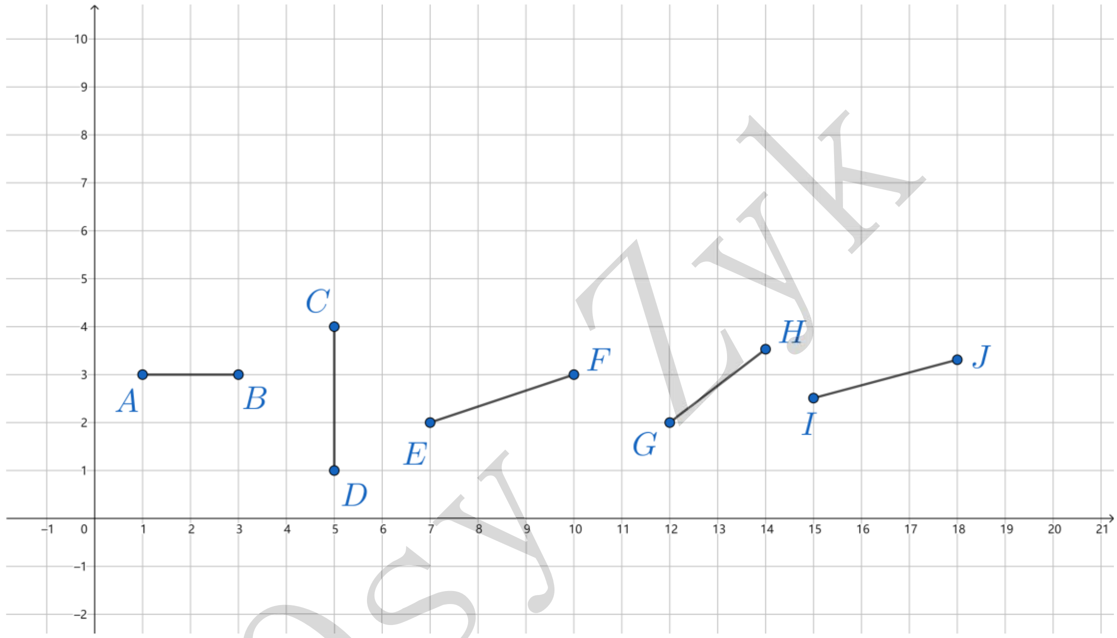
- 这本书的重心在第三章及以后的内容，也就是任意点作图的部分；主要受众是基本掌握初中课本上所有几何知识、对网格作图有一些了解的读者。除此之外，我建议读者先学习任意角三角函数，可以参考高中数学必修一。如果读者对网格作图完全没有接触，那么我推荐你花更多的时间学习第二章，并查找更多简单资料巩固基础。
- 本书的所有图都有平面直角坐标系，这是因为平面直角坐标系中的一些术语可以简化描述（比如“斜率”）。实际上，当我们撤去平面直角坐标系后，本书介绍的所有定理仍能适用。
- 应定理发现者们的要求，本书中定理中涉及的人名统一用拼音首字母来代替，在文字描述中可能会出现本人的真实姓名。

第二章 网格作图基本方法复习

1. 分线段与倍长

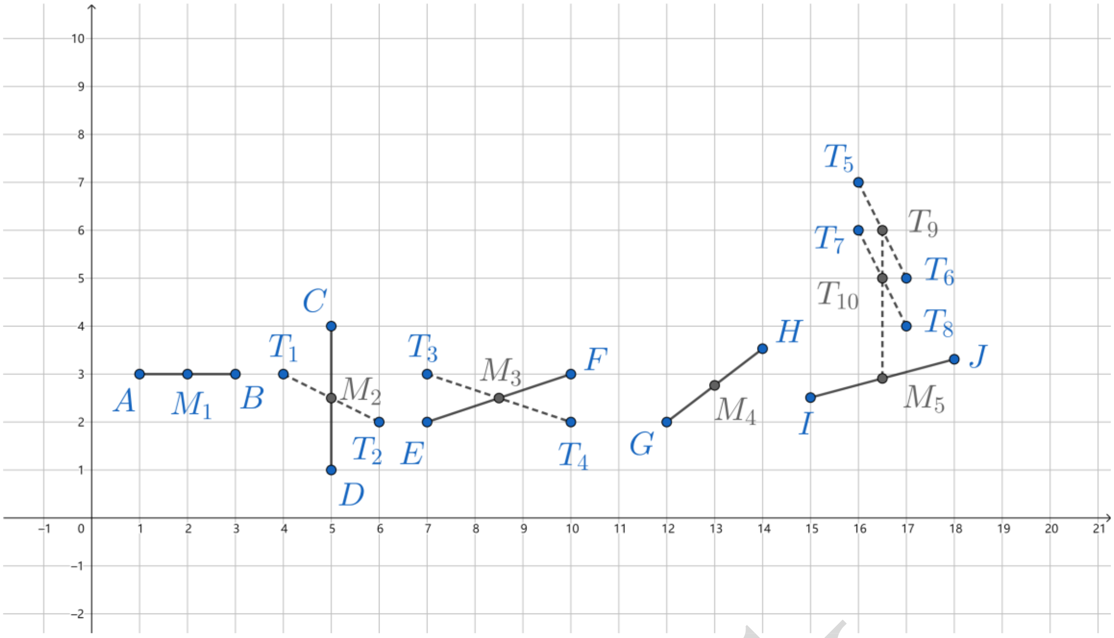
分线段

例 1



如图，平分这五个线段。其中：

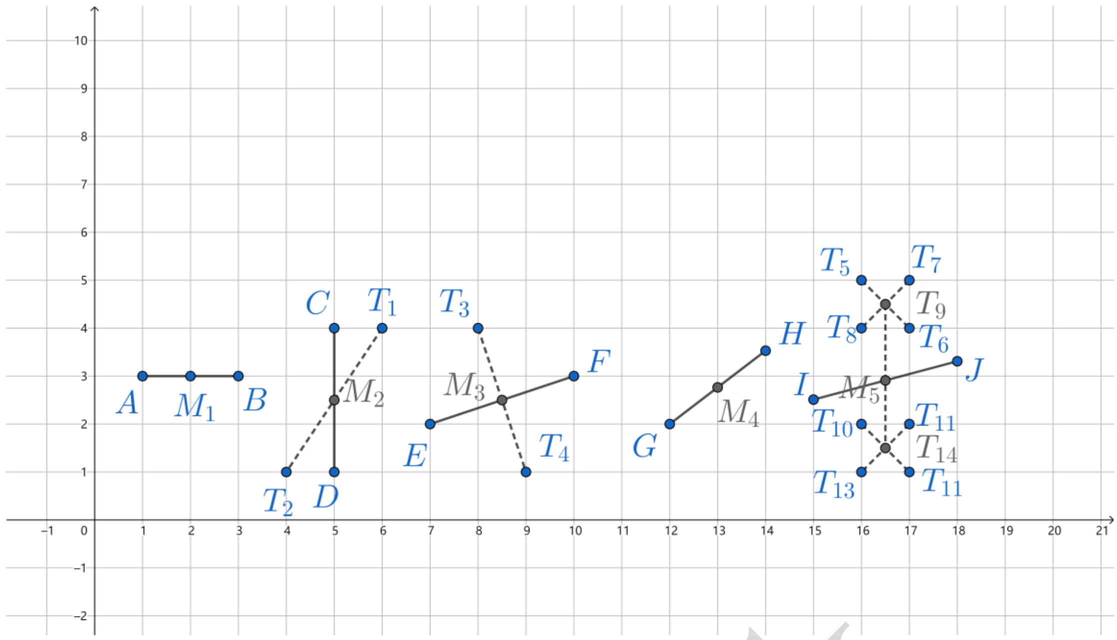
- A、B 都是格点。
- C、D 都是格点。
- E、F 都是格点。
- G 是格点，H 在竖直格线上。
- I、J 在竖直格线上。



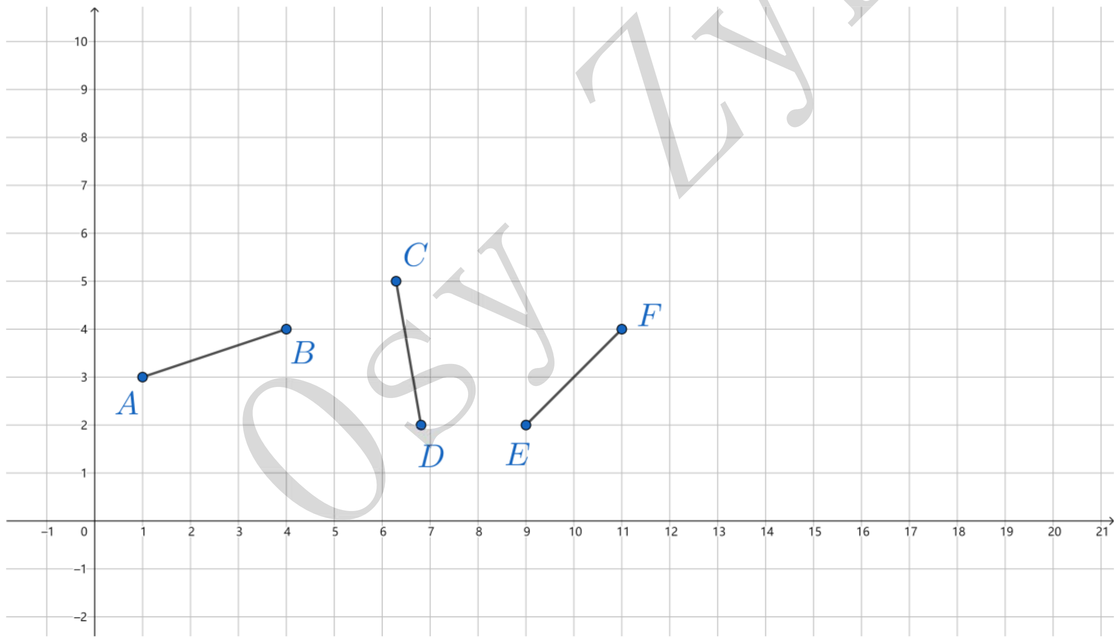
答 这五条线段的平分方法分别为：

- 取格点 M_1，M_1 即为 AB 中点。
- 取格点 T_1、T_2，连接 T_1、T_2 交 CD 于 M_2。M_2 即为 CD 中点。
- 取格点 T_3、T_4，连接 T_3、T_4 交 EF 于 M_3。M_3 即为 EF 中点。
- 设 GH 交格线于 M_4，M_4 即为 GH 中点。
- 去格点 T_5、T_6、T_7、T_8，连接 T_5、T_6 交格线于 T_9，连接 T_7、T_8 交格线于 T_{10}，连接 T_9、T_{10} 并延长交 IJ 于 M_5，M_5 即为 IJ 中点。

这个问题的答案不唯一，下面还给出了一些正确的作图（作图语句省略）。



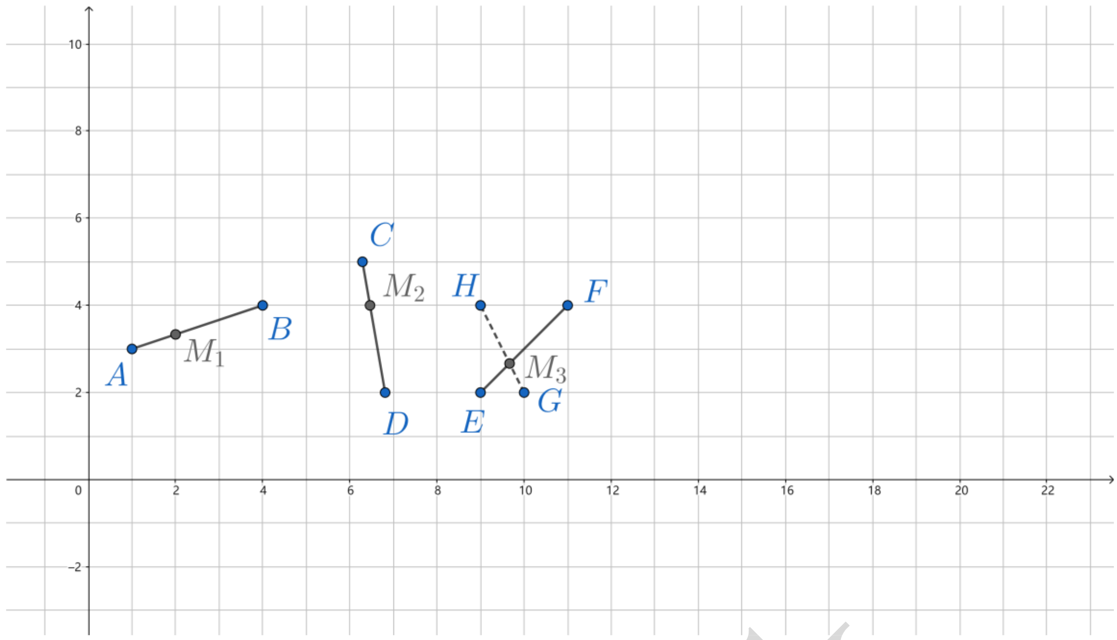
例 2



如图，画出这三条线段的三等分点（更靠左边的那一个）。其中，

- A、B 为格点。
- C、D 在水平格线上。
- E、F 为格点。

答



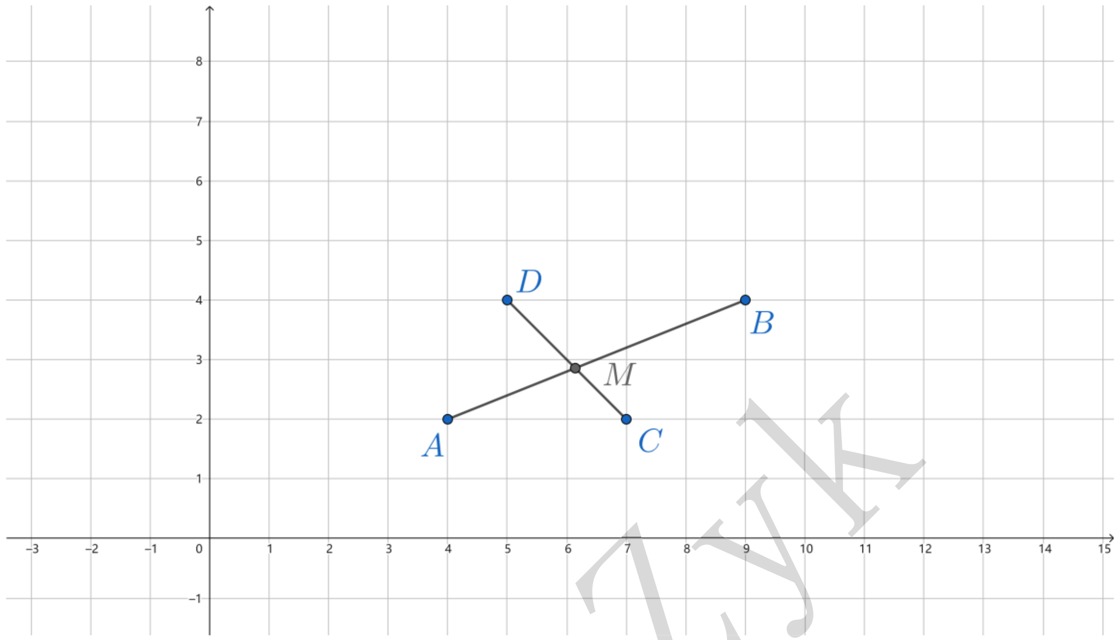
如图，

- 取线段 AB 与格线的交点 M_1。M_1 即为所求。
- 取线段 CD 与格线的交点 M_2。M_2 即为所求。
- 取格点 G、H，连接 GH 交 EF 于 M_3。M_3 即为所求。

第三个图的原理是这样的：不难看出 $\triangle FM_3H \sim \triangle EM_3G$，$EM_3:FM_3 = EG:FH = 1:2$。

根据第三个图，我们可以推广出一个结论：

分线段基本定理 Line Dividing Basic Theorem（定理 2.1）



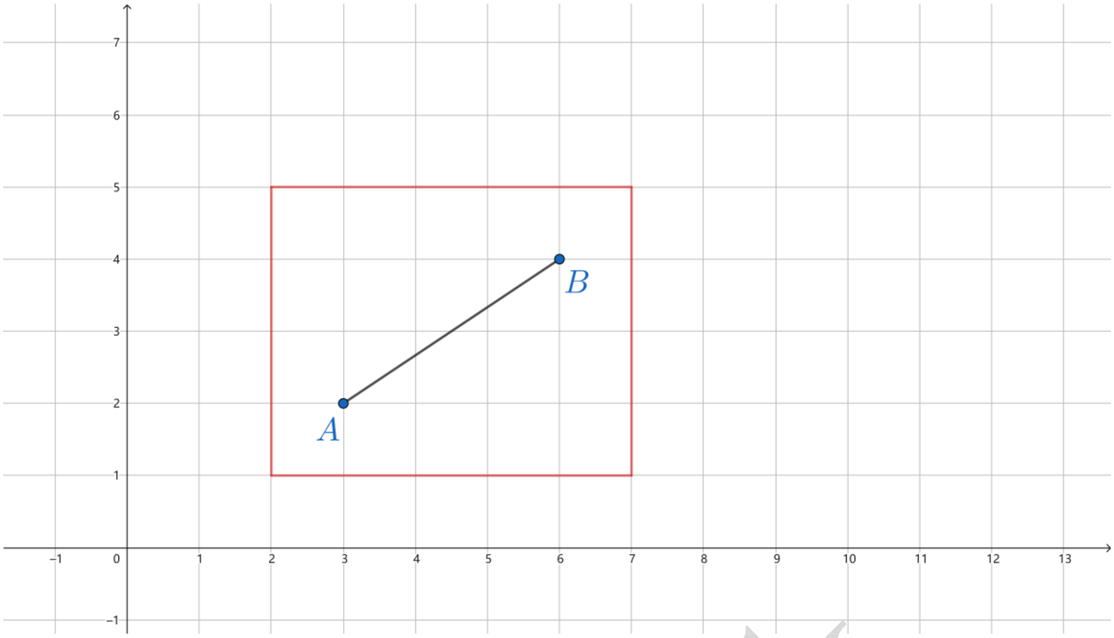
如图，如果我们想要在线段 AB 上取一点 M，使得 $MA:MB=p:q$，那么我们要把 A 向某个方向平移 p 个单位，把 B 向反方向平移 q 个单位，连接平移后的两个点交原线段于 M。M 即为所求。

【证明】$\triangle AMC\sim\triangle BMD$，$MA:MB=AC:BD=p:q$。

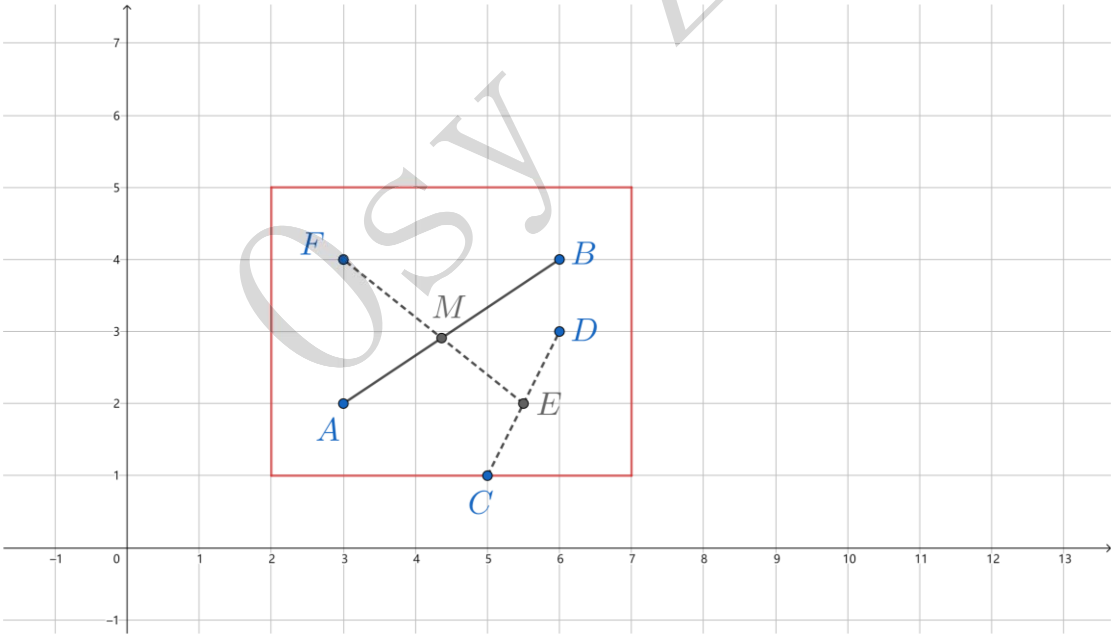
【拓展】我们还可以把 A 平移 $p\cdot k$ 个单位，把 B 平移 $q\cdot k$ 个单位，其中 k 是自选的一个数，一般为有理数。下面的例题会解释这一点。

现在我们来解释 $p\cdot k$ 和 $q\cdot k$ 是什么意思。

例 3 如图，请在有限的网格内，在线段 AB 上取一点 M，使得 $MA:MB=5:6$。矩形框出来的区域为作图区域。

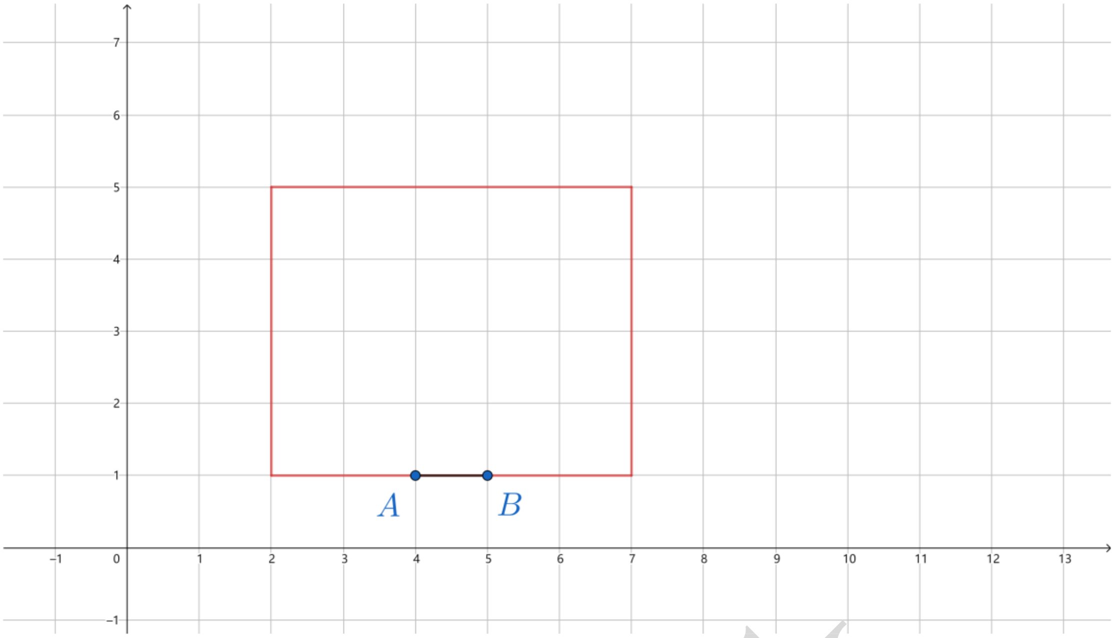


解 如果我们直接把 A 向右平移 5 个单位，把 B 向左平移 6 个单位，我们会发现网格是不够的。所以我们要把 A 向右平移 2.5 个单位，把 B 向左平移 3 个单位。作图如下：

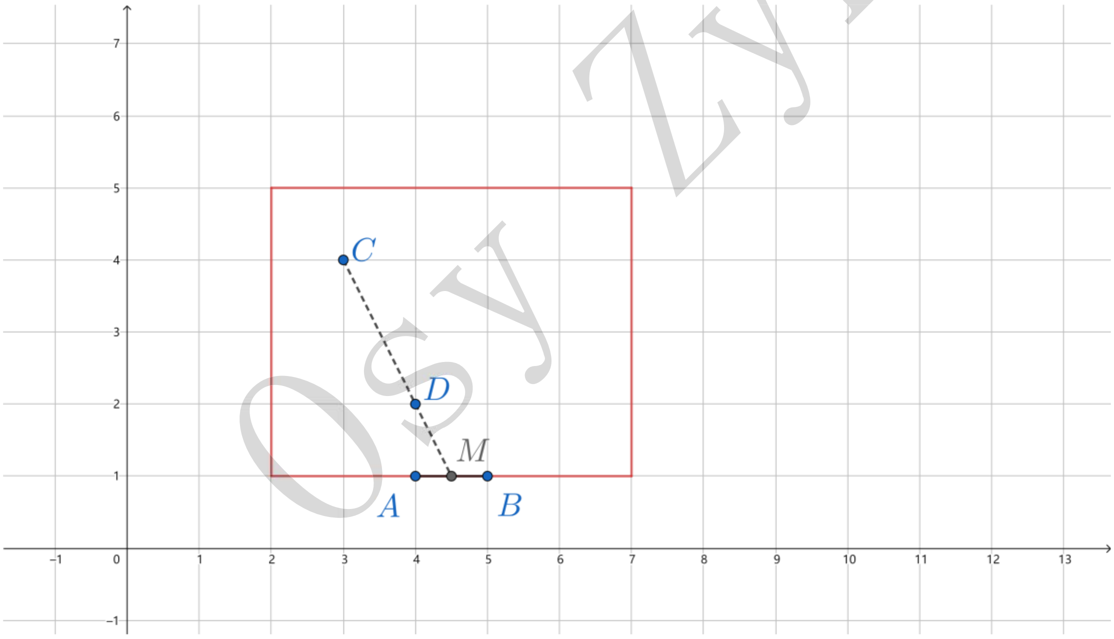


当网格不够的时候，我们还有其它的方法来应对。比如下面这道例题：

例 4 如图，在有限的网格内，做出线段 AB 的中点 M。



答 如图



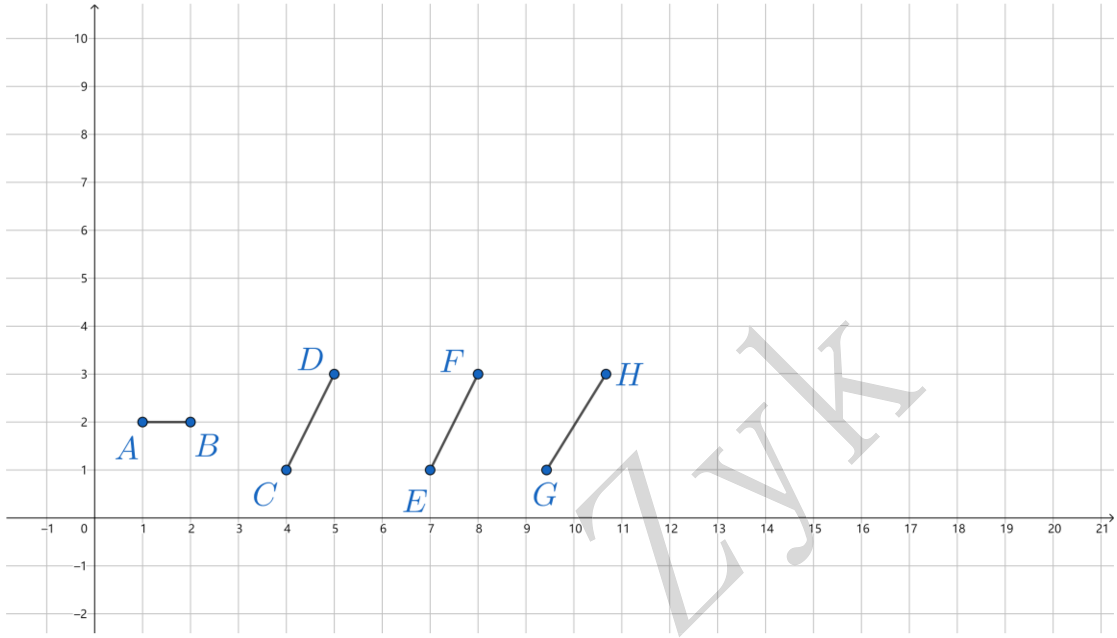
取格点 C、D，连接 CD 并延长交 AB 于 M。M 即为 AB 中点。

倍长

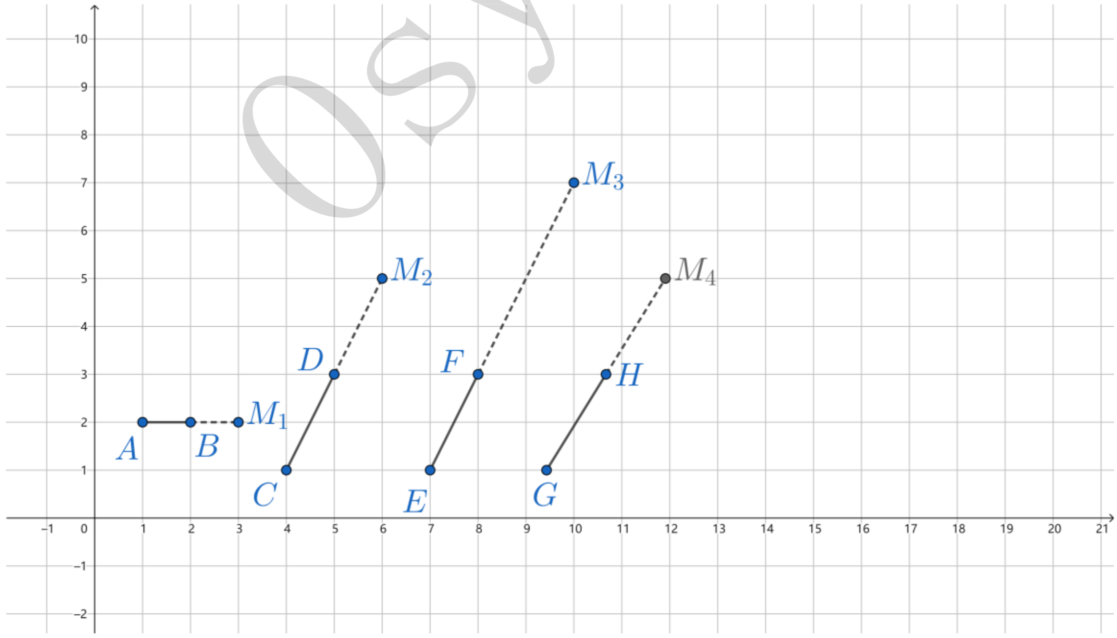
有了分线段的基础，倍长就很简单了。我们来看一道例题：

例 5 平面内有几条线段。

- 向右倍长线段 AB。
- 向右上方倍长线段 CD。
- 向右上方倍长线段 EF 至原线段的三倍。
- 向右上方倍长线段 GH。



答 如图



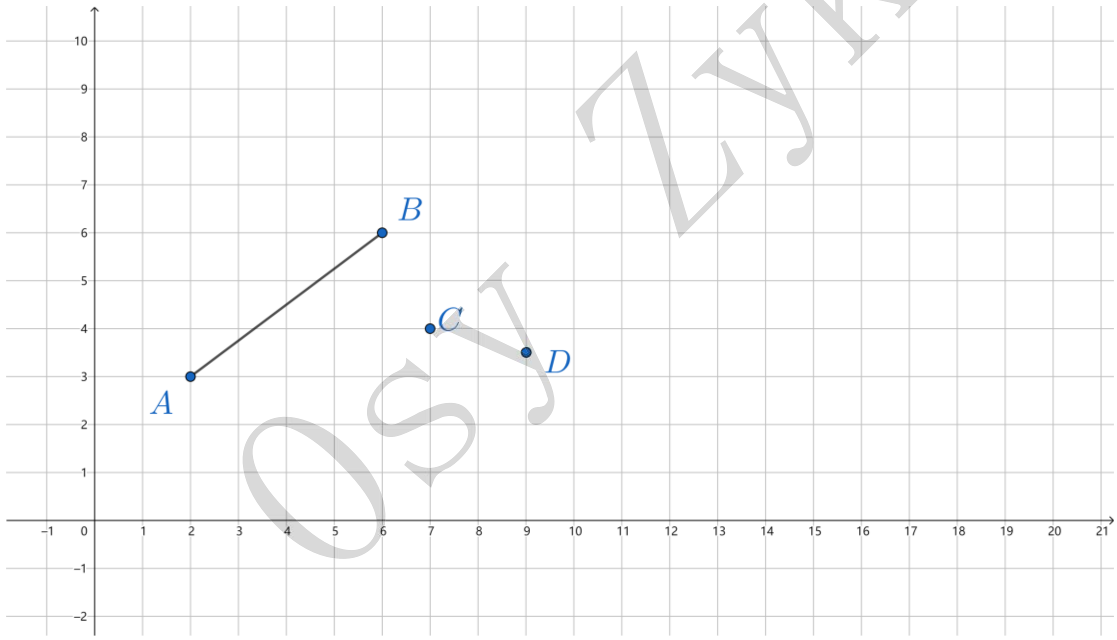
- 取格点 M_1，连接 AM_1，AM_1 即为所求。

- 取格点 M_2，连接 CM_2，AM_2 即为所求。
- 取格点 M_3，连接 EM_3，EM_3 即为所求。
- 延长 GH 交格线于 M_4，GM_4 即为所求。

2. 平行、垂直与对称

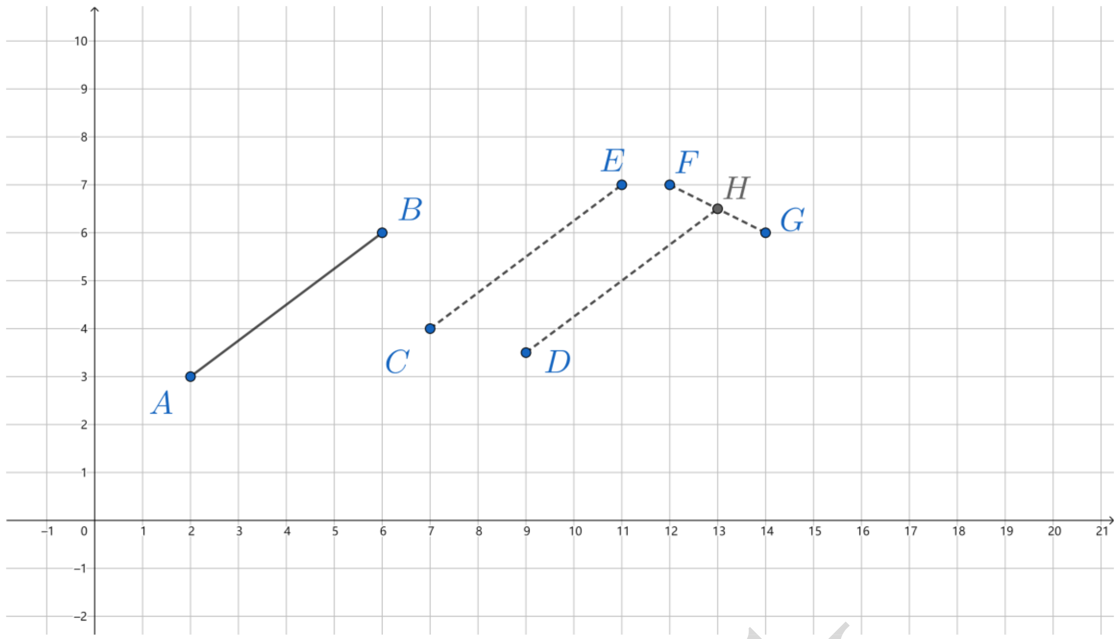
平行

例 6



如图，A、B、C 为格点，D 为格线中点。过 C 和 D 作 AB 所在直线的平行线。

答 如图

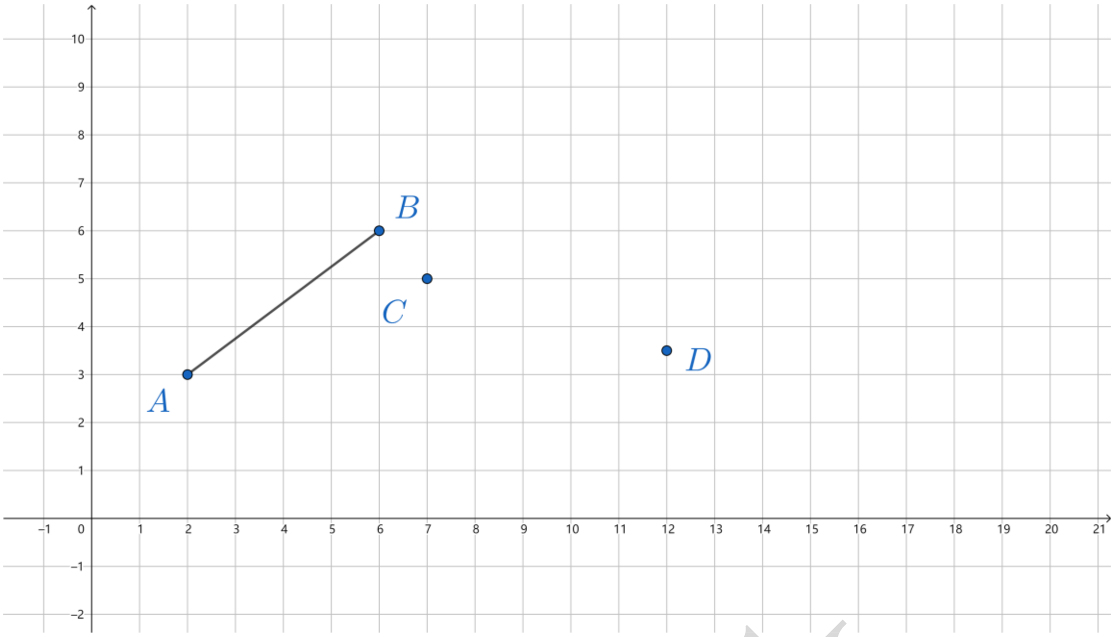


- 取格点 E，连接 CE，CE 即为所求。
- 取格点 F、G，连接 FG 交格线于 H，连接 DH，DH 即为所求。

基本思路很容易理解：AB 是一个“横 4 纵 3”的线段，所以 CE 和 DH 也一定是“横 4 纵 3”的线段。

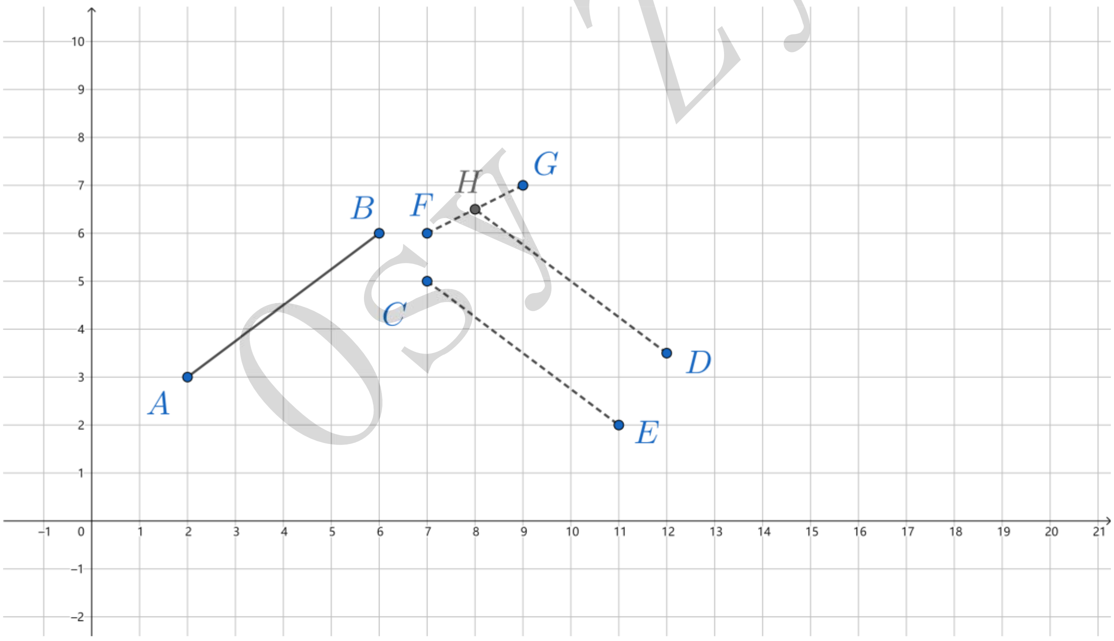
垂直

例 7



如图，A、B、C 为格点，D 为格线中点。过 C 和 D 作 AB 所在直线的垂线。

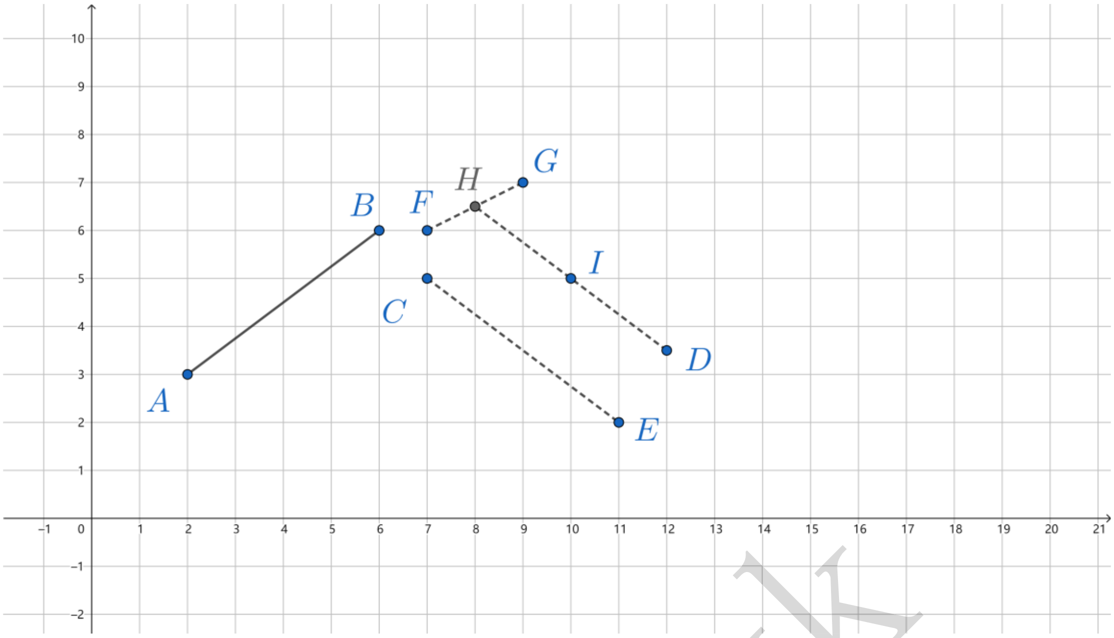
答 如图



- 取格点 E，连接 CE，CE 即为所求。
- 取格点 F、G，连接 FG 交格线于 H，连接 DH，DH 即为所求。

基本思路也不难理解：因为 $k_{AB}=\frac{3}{4}$（横 4 纵 3），所以 $k_{CE}=k_{DH}=-\frac{4}{3}$（横 3 纵 4）。

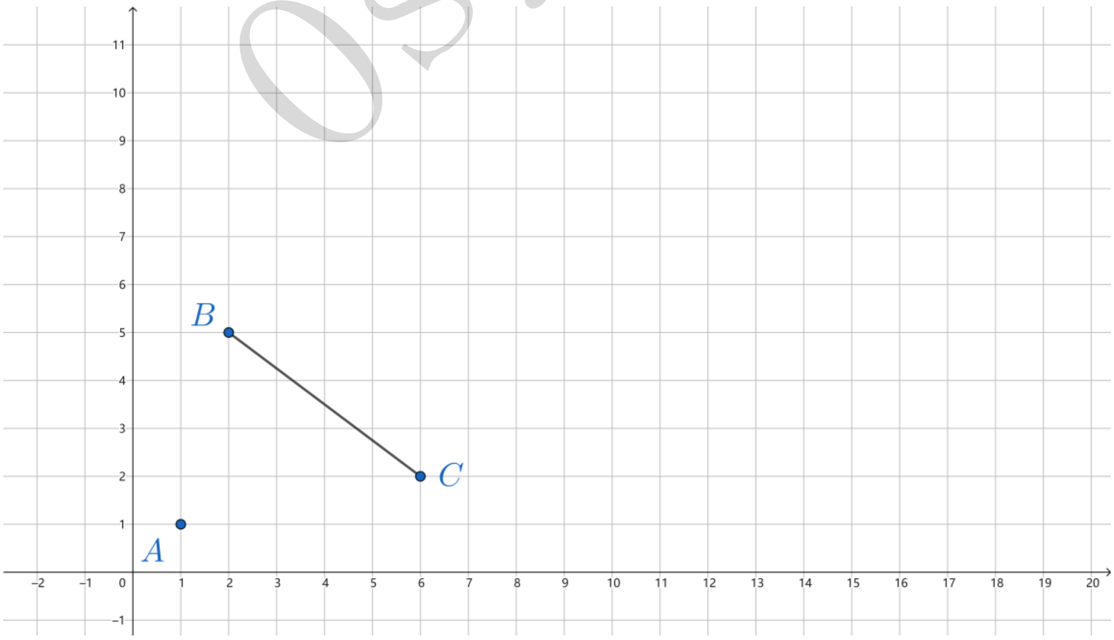
除此之外，我们还发现 DH 好像还过格点。



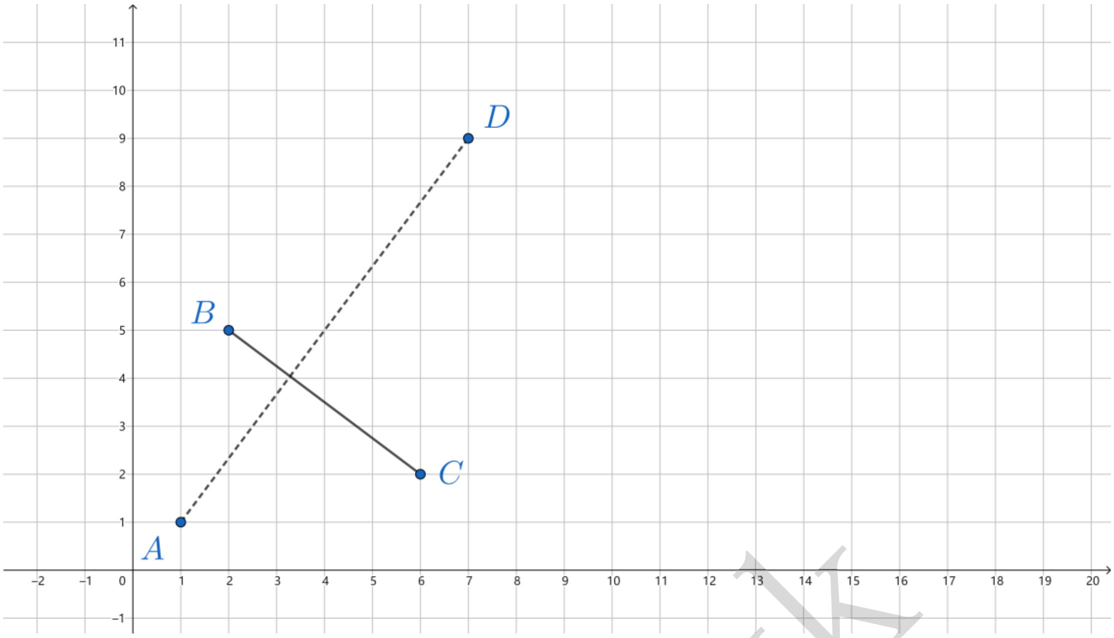
DH 的确过格点 I，做平行线时也有类似的情况。其实我们可以利用这一点来简化画图步骤，但是前面所提供的方法更通用。

对称

例 8

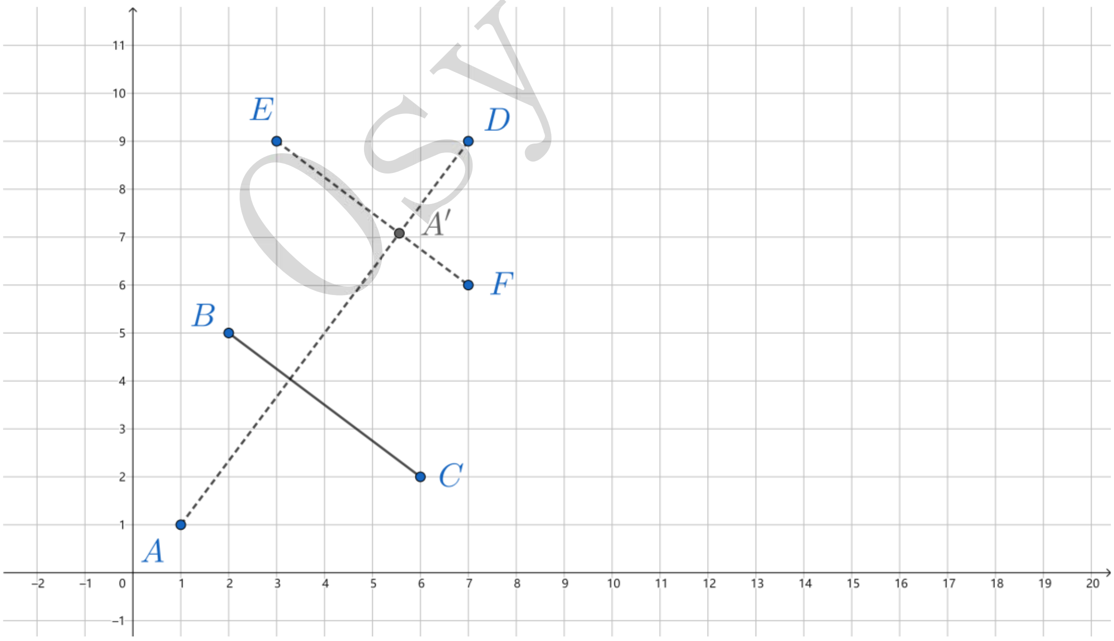


如图，作 A 关于 BC 的对称点 A'，其中 A、B、C 都是格点。



如图，取格点 D，连接 AD，则有 $AD \perp BC$，A' 一定在 AD 上。

我们设 AD 与 BC 交于 M（图中未标出），倍长 AM 即可。我们只需要倍长 AM 到 A'，应该这样做：



如图，取格点 E、F，连接 EF 交 AD 于 A'。A' 即为所求。

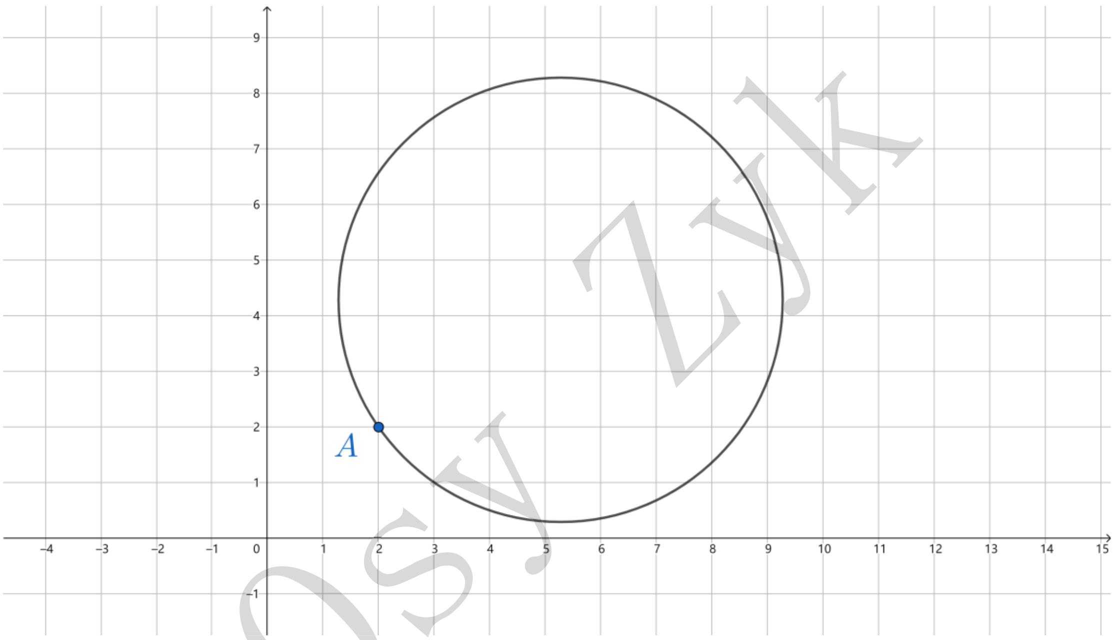
原理不难理解：$BA = BE$ 且 A、B、E 共线，而 $EF \parallel BC$，所以 BM（M 为 BC

和 AD 交点，图中未标出）是 $\triangle AA'E$ 的中位线。我们可以推出 $AM = A'M$，A 和 A' 关于 BC 对称。

3. 圆

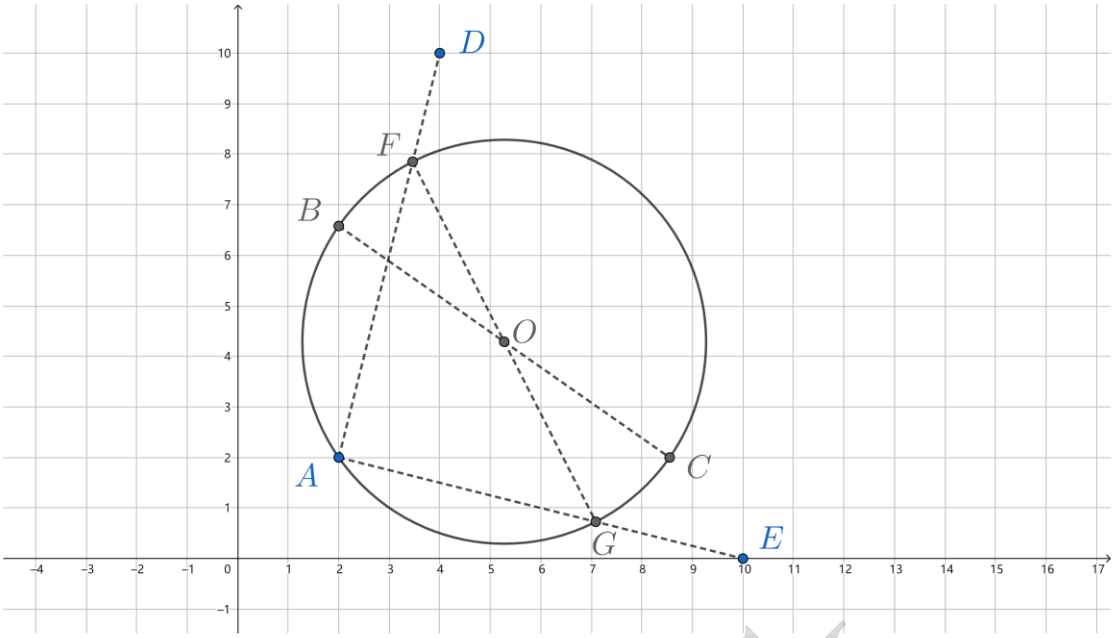
圆心

例 9



如图，圆过格点 A，除此之外不过任何格点，做出它的圆心。

答

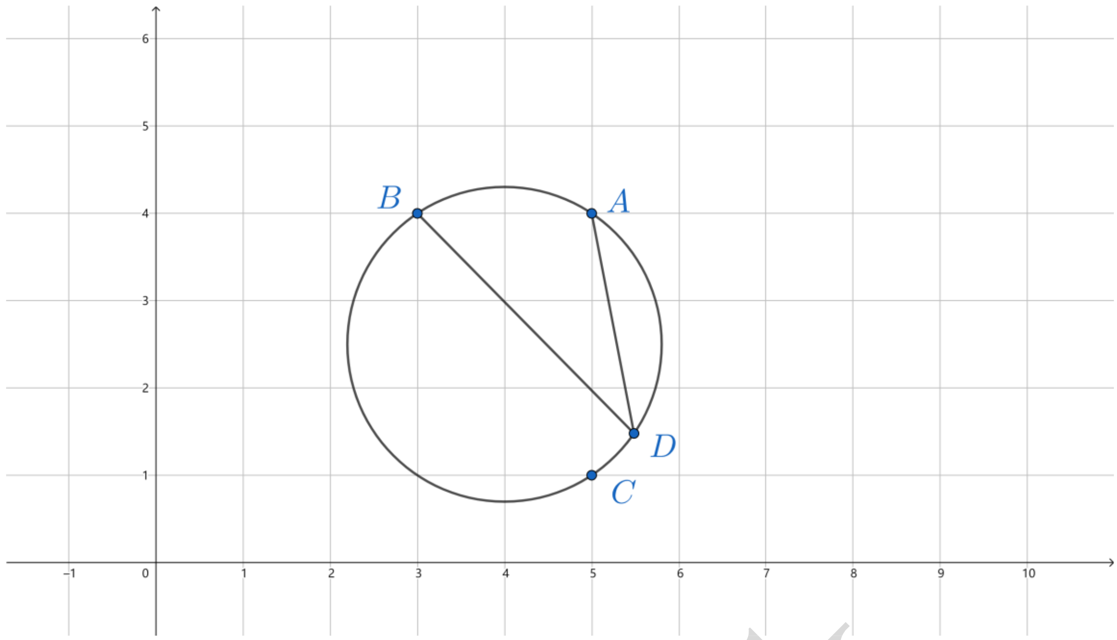


取圆与格线的交点 B、C，连接 BC。取格点 D、E，连接 AD、AE 分别交圆于 F、G，连接 FG 交 BC 于 O，O 即为所求。

因为 $\angle BAC=\angle DAE=90°$ （$\angle DAE=90°$ 是因为 $k_{AD}=4$，$k_{AE}=-\frac{1}{4}$），所以 BC 和 FG 都是直径，两条直径的交点当然是圆心。

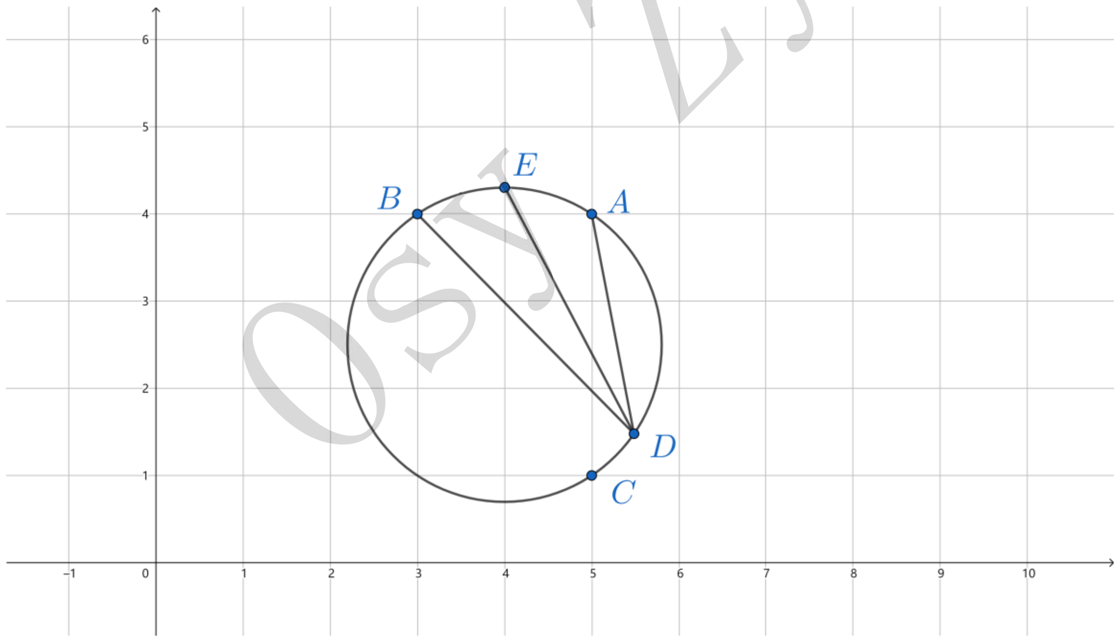
圆心角和圆周角

例 10 如图



圆过格点 A、B、C，D 在圆上，请做出 $\angle ADB$ 的角平分线。

答 如图

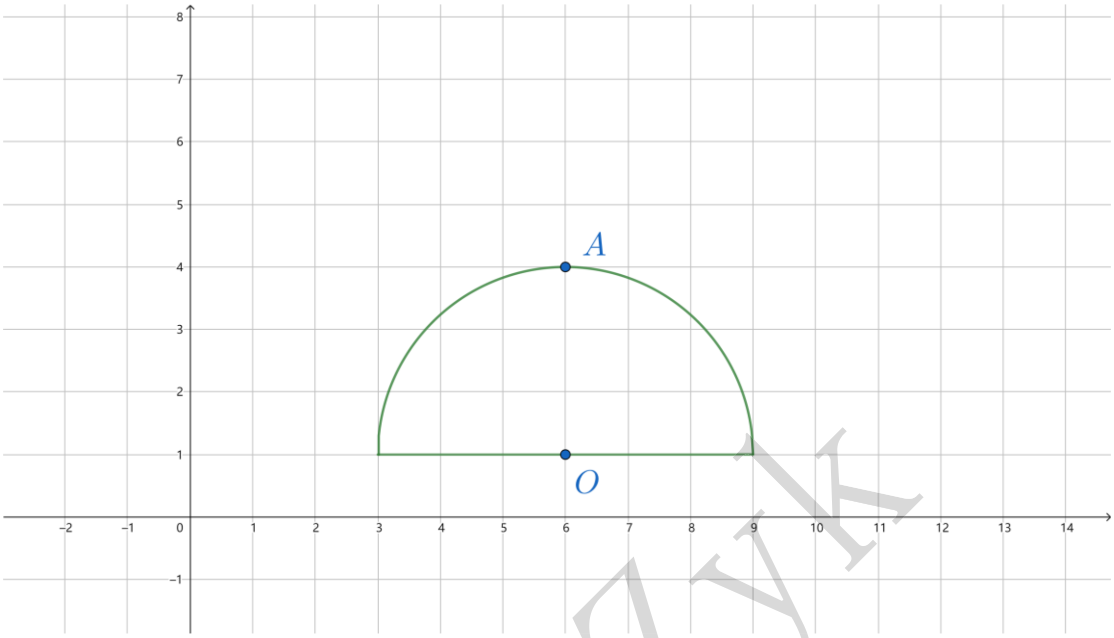


取圆与格线的交点 E，连接 DE，DE 平分 $\angle ADB$。

因为 E 所在竖直格线垂直平分 AB，所以 E 平分弧 AB。DE 平分 $\angle ADB$。

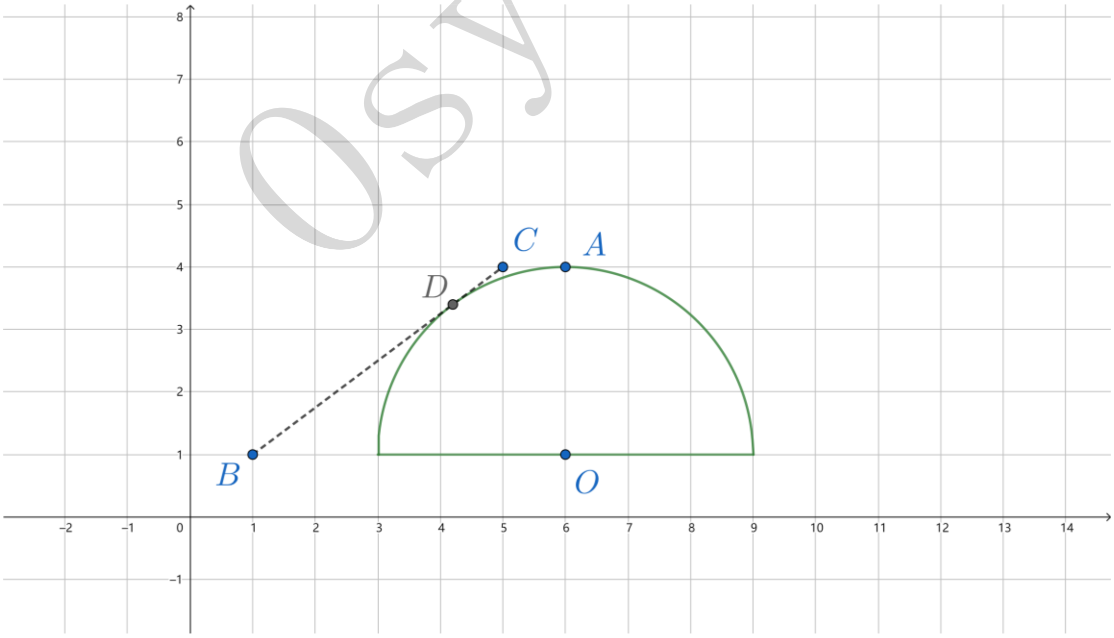
切线

例 11



如图，半圆 O 过格点 A。做出半圆的切线，并标注出切点。

答 如图



取格点 B、C 连接 BC 交半圆于 D，BC 和 D 即为所求。

解析 我们假设切点为 D（此时我们还没画出切点）。因为 $r=3$，$OB=5$，所以 $BD=\sqrt{OB^2-r^2}=4$，$\tan\angle OBD=\frac{3}{4}$。那么我们只需要过 B 画一条斜率为 $\frac{3}{4}$ 的直线就可以了。

4. 最短路径

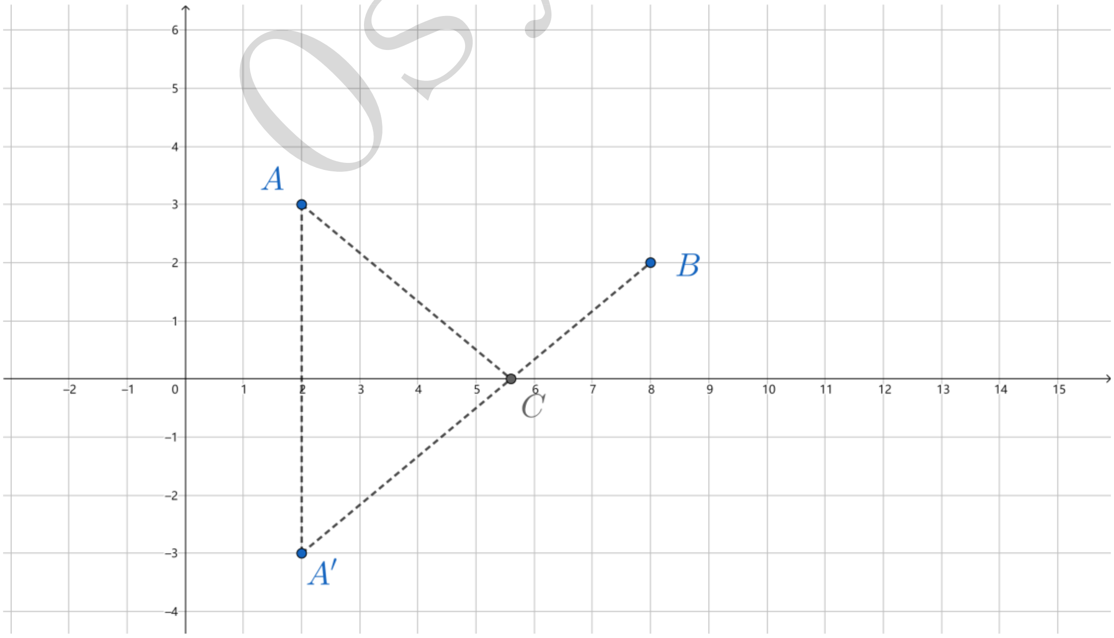
基本原理

基本原理总共有一下两条，它们都是公理，不需要证明：

- 两点之间线段最短。
- 点到直线的所有连线中垂线段最短。

将军饮马模型

将军饮马模型是一个几何模型，网格作图有运用到它的地方。



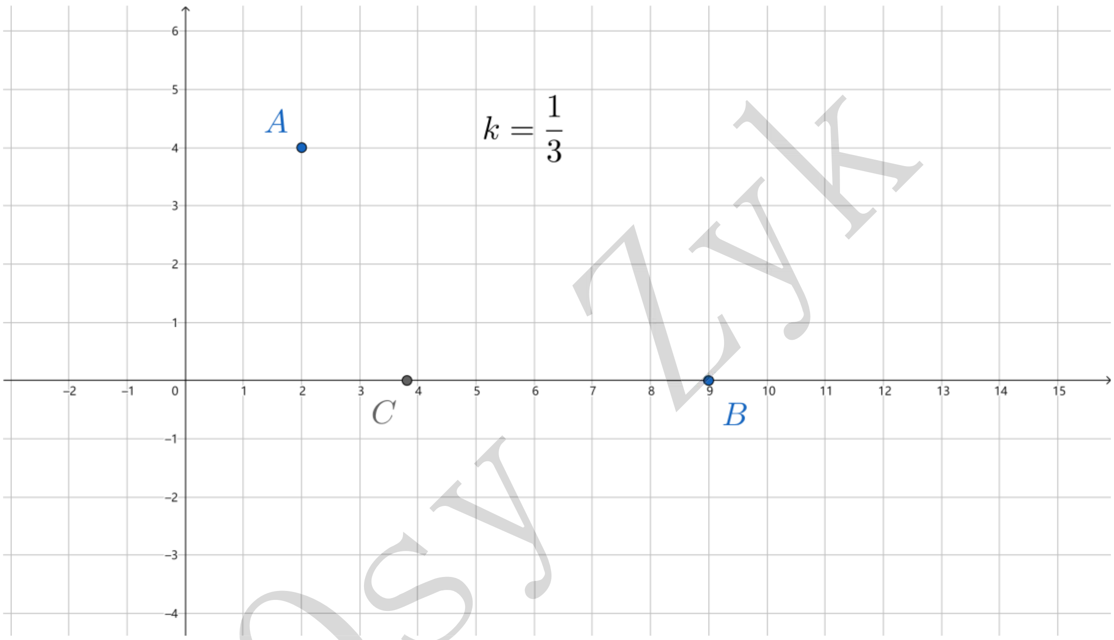
如图，在 x 轴上找一点 C，使得 $CA+CB$ 最短。

应该这样做：作 A 关于 x 轴的对称点，连接 $A'B$ 交 x 轴于 C。C 即为所求。

原理是这样的，不难发现，对于所有的 C 在 x 轴上，都有 $CA=CA'$；$AC+BC=A'C+BC\geq A'B$。

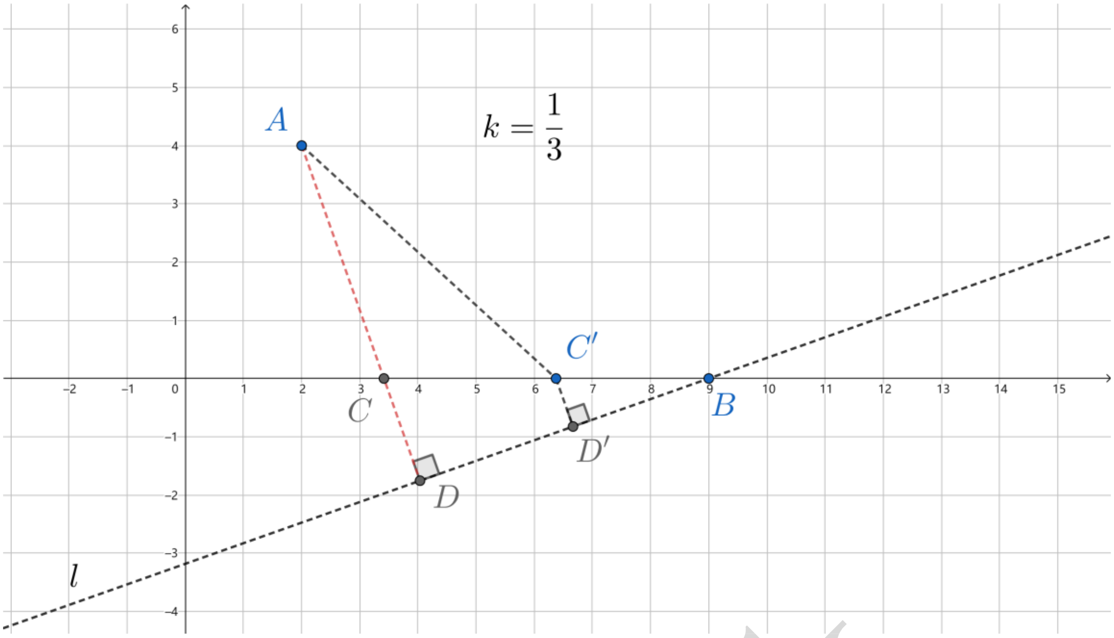
胡不归模型

胡不归模型也是一个几何模型。



如图，B 在 x 轴上，$0<k<1$。在 x 轴上取一点 C 使得 $AC+k\cdot CB$ 最短。

应该这样解决：

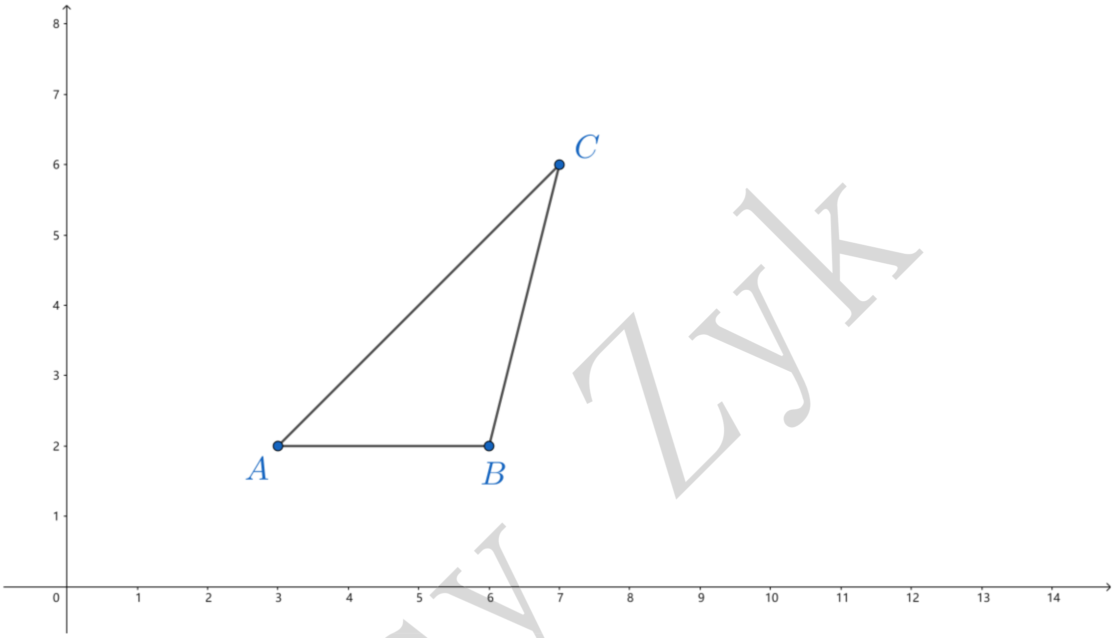


如图，不难发现 $x_A < x_C < x_B$。过 B 作一直线 l，满足其与 x 轴的夹角的正弦值为 k。对于所有的 C' 在 x 轴上，作 $C'D' \perp l$，都有 $C'D' = k \cdot C'B$。所以 $AC' + k \cdot C'B = AC' + C'D'$。显然当 $C'D' \perp l$ 的时候最小。

5. 经典几何定理

正余弦定理

正弦定理 Sine Theorem（定理 2.2）



对于任意三角形，每个角的对边长与其正弦值的比是相等的。也就是说

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$$

【证明】正弦定理的证明很多，都非常简单易懂。我给出一种证明，需要用到三角形的一个面积公式：面积等于两边长度乘积乘上夹角的正弦再除以二。我们应用这个公式：

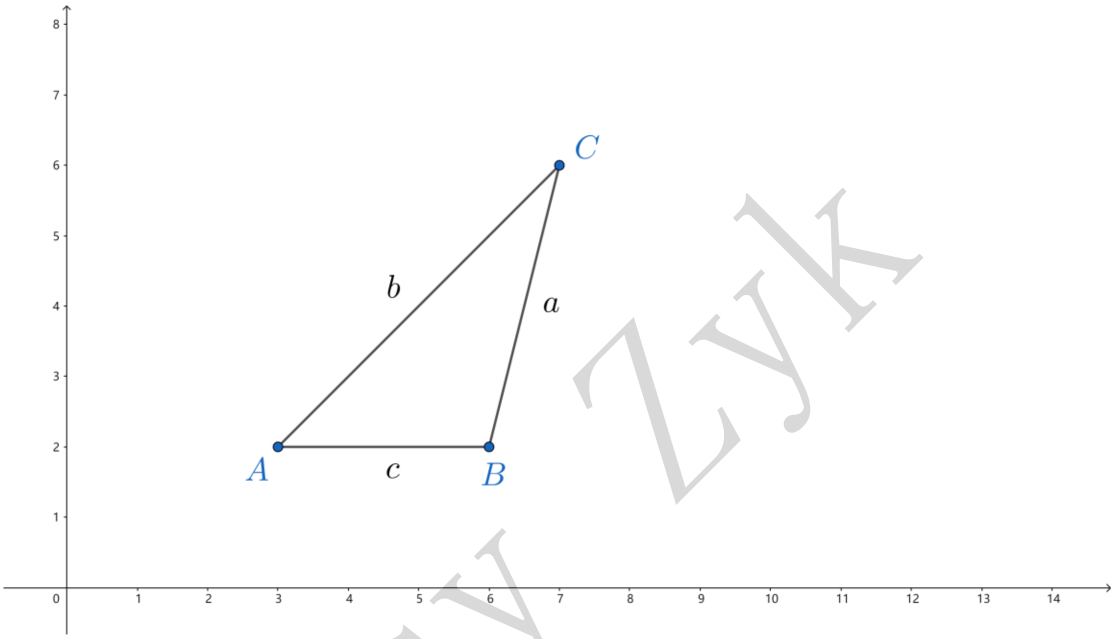
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AB\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot BA\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1}{2}\cdot CA\cdot CB\cdot\sin C$$

移项，结论得证。

【注】当 ABC 为直角或钝角三角形的时候，定理仍然成立，但涉及到任意角三

角函数。如果初中的读者还没有学习任意角三角函数，建议参考高中教材必修一。下面的余弦定理也是一样。

余弦定理 Cosine Theorem （定理 2.3）



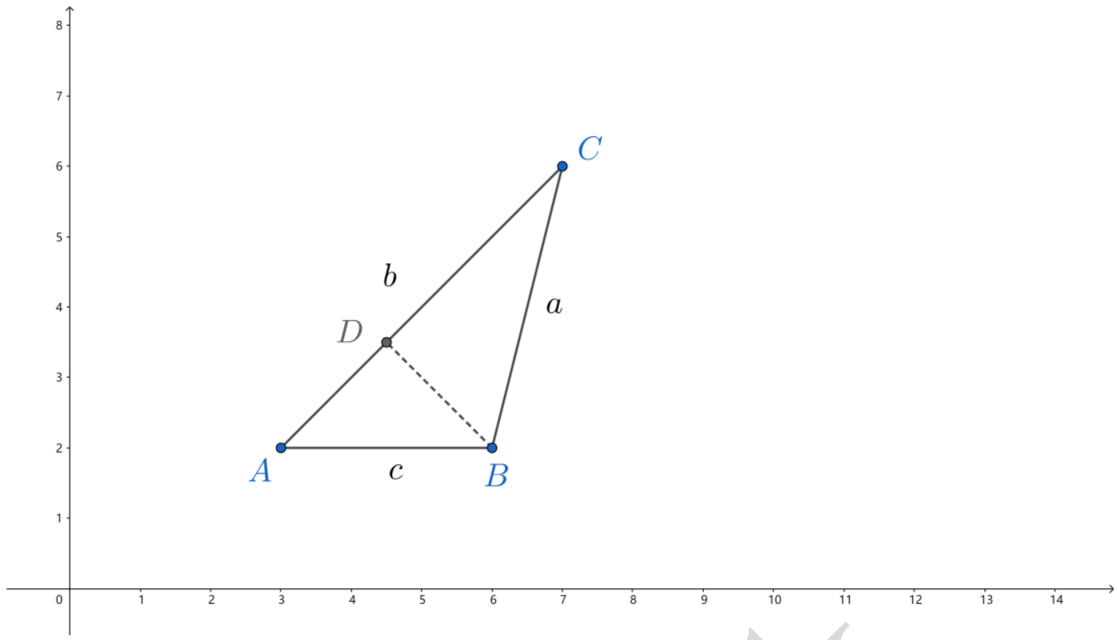
对于任意三角形，一个角对边的平方等于这个角两条邻边的平方和减去邻边长度乘积的二倍乘上角的余弦值，即：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

【证明】余弦定理的证明同样非常丰富。我只证明其中一个公式，其它公式同理。作 $BD \perp AC$。



$$c^2 = AD^2 + BD^2 = (b - a\cos C)^2 + (a\sin C)^2$$

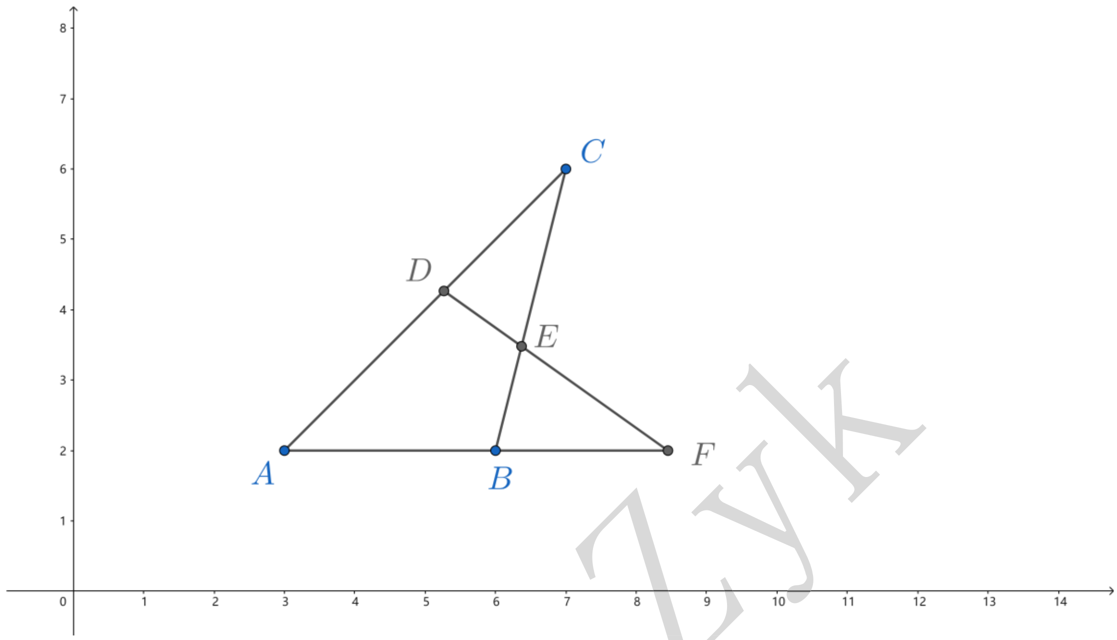
$$= a^2\sin^2 C + b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C$$

$$= a^2(\sin^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

梅涅劳斯定理和塞瓦定理

梅涅劳斯定理 Menelaus’s Theorem（定理 2.4）



一条直线截 $\triangle ABC$ 于 D、E、F，有

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{DC}{DA}=1$$

这条直线称作梅氏线，$\triangle ABC$ 被称为梅氏三角形。

【证明】梅涅劳斯定理有非常多的证明。我们更换一下分子和分母。证明原式等于 1，只需证明

$$\frac{AF}{AD}\cdot\frac{BE}{FB}\cdot\frac{CD}{CE}=1$$

分别在 $\triangle ADF$、$\triangle BEF$、$\triangle CDE$ 中应用正弦定理，原式等于

$$\frac{\sin\angle ADF}{\sin\angle AFD}\cdot\frac{\sin\angle BFE}{\sin\angle BEF}\cdot\frac{\sin\angle CED}{\sin\angle CDE}$$

不难证明它等于 1。

【注】这个定理有逆定理——用于证明三点共线，其中三个点是截线上的三个点。对于上面的图，如果我们不知道 D、E、F 是否共线，但是我们能证明上面的比

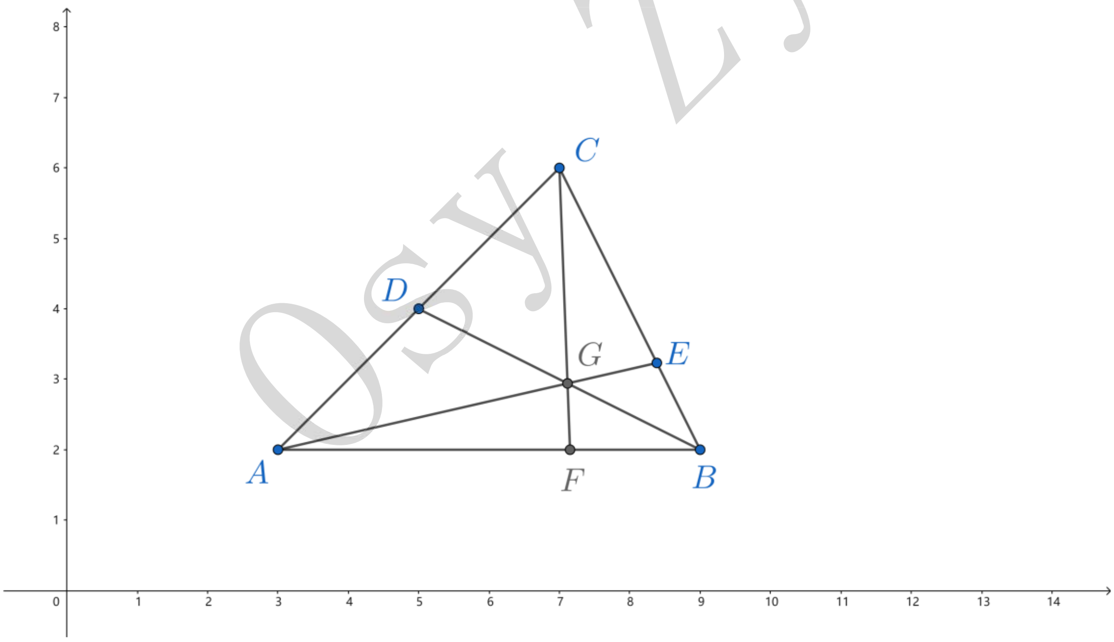
例式等于 1，那么我们就可以证明 A、B、F 共线。

【注】 应该这样记这些比例的顺序：从三角形的一个顶点出发，选定一条直线，跳到交点再跳到顶点；然后在当前点选定另一条直线，跳到交点再跳到顶点；最后再选定最后一条直线，跳到交点再跳到顶点。最后所在的点应为出发时的点。

【注】 对于同一个图形，我们可以选择不同的梅氏线和梅氏三角形。比如说在上面的图形中，我们让 BC 为梅氏线，$\triangle ADF$ 为梅氏三角形，可以列出公式：

$$\frac{AC}{CD}\cdot\frac{DE}{EF}\cdot\frac{FB}{BA}=1$$

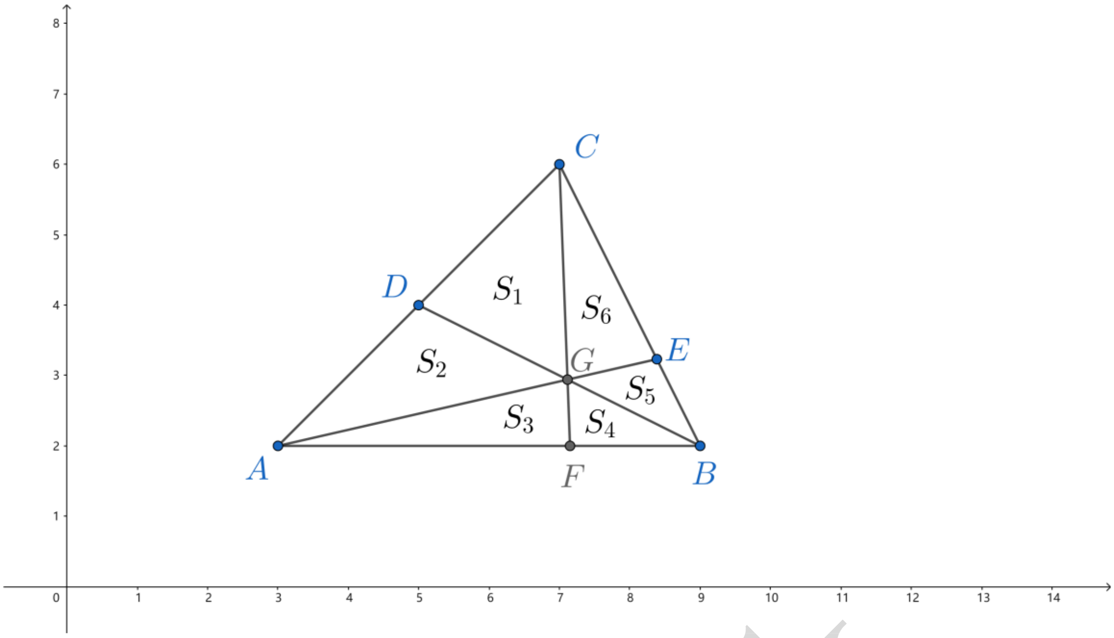
塞瓦定理 Ceva's Theorem（定理 2.5）



对于任意三角形，三条边 AC、CB、BA 上分别有 D、E、F 三点。如果 BD、AE、CF 三线共点，那么有

$$\frac{CD}{DA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BE}{EC}=1$$

【证明】 塞瓦定理同样有非常多的证明。我给出一种证明：



原式等于

$$
\begin{aligned}
&\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{S_3}{S_4}\cdot\frac{S_5}{S_6}\\
=&\frac{0.5\cdot GD\cdot GC\cdot\sin\angle CGD}{0.5\cdot GF\cdot GB\cdot\sin\angle BGF}\cdot\frac{S_3}{S_6}\cdot\frac{S_5}{S_2}\\
=&\frac{GD\cdot GC}{GB\cdot GF}\cdot\frac{GF\cdot GA}{GC\cdot GE}\cdot\frac{GE\cdot GB}{GA\cdot GD}=1
\end{aligned}
$$

结论得证。

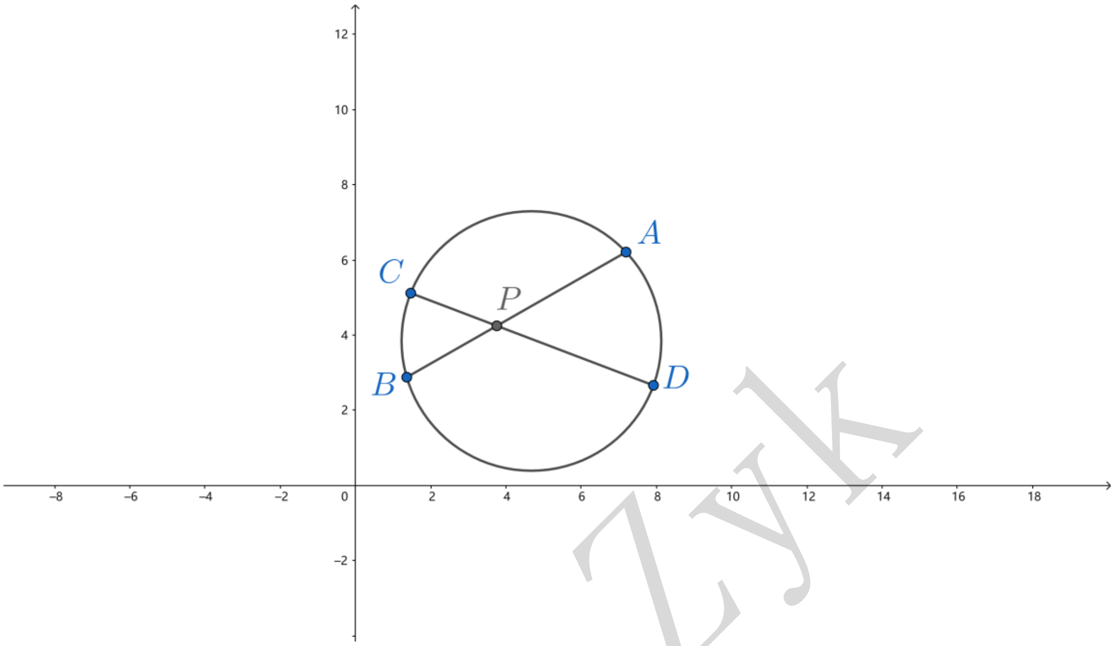
【拓展】塞瓦定理有另一种形式，称为角元塞瓦定理。这里不提供证明。比例式为：

$$\frac{\sin\angle ECG}{\sin\angle GCD}\cdot\frac{\sin\angle DAG}{\sin\angle GAF}\cdot\frac{\sin\angle FBG}{\sin\angle GBE}=1$$

【拓展】塞瓦定理和角元塞瓦定理都有逆定理：用于证明三线共点。

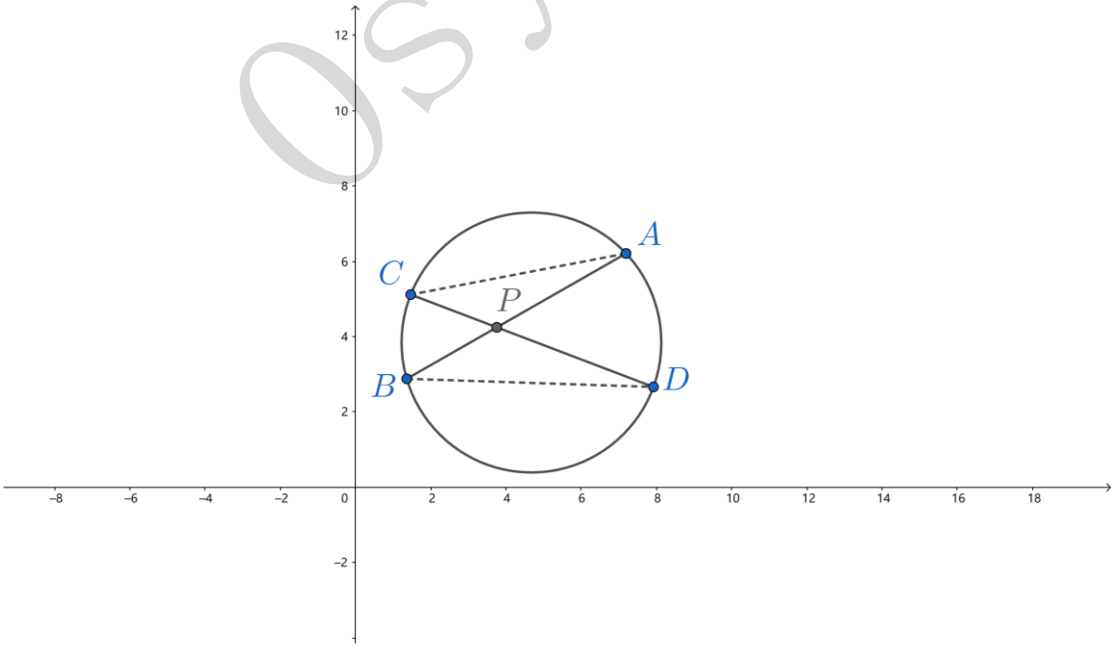
圆幂定理

相交弦定理 Intersecting Chords Theorem（定理 2.6）



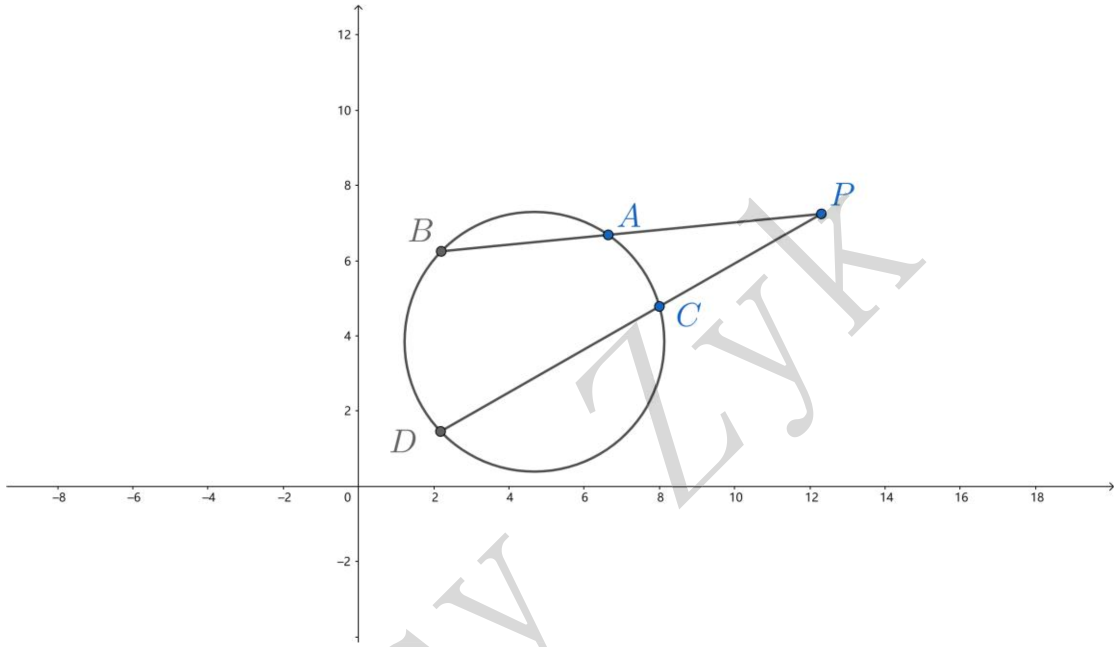
圆内两条弦 AB、CD 交于 P，则有 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$。

【证明】



连接 AC 和 BD。根据同弧所对的圆周角相等，可得 $\angle CAB = \angle CDB$，$\angle ACD = \angle ABD$，从而判定 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$，$PA/PD = PC/PB$，移项后结论得证。

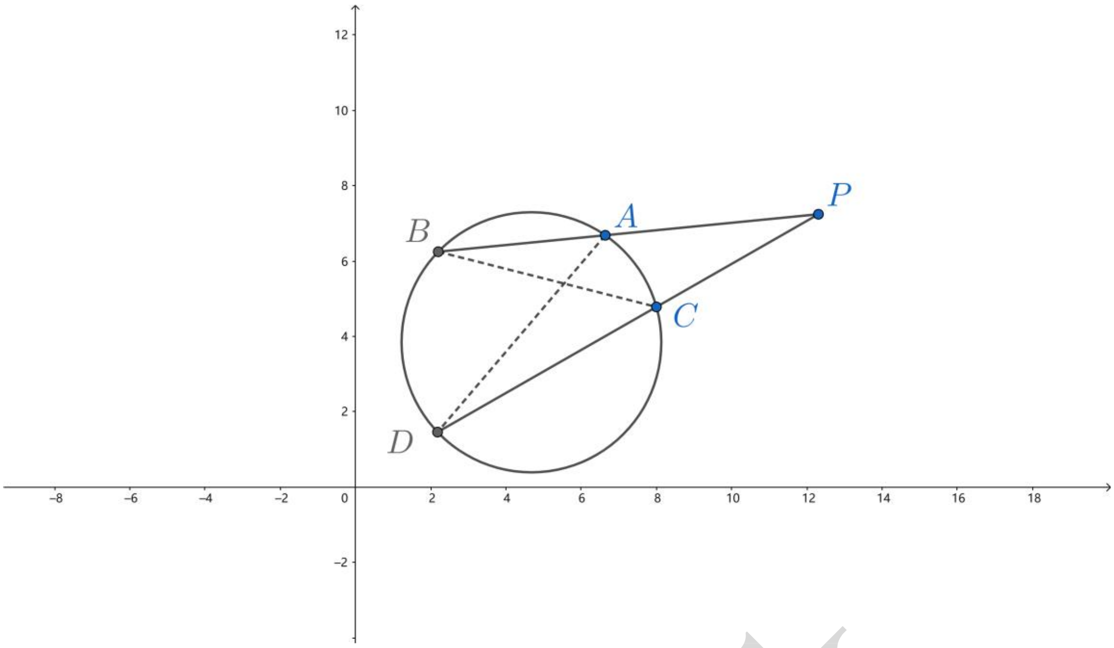
割线定理 Secant Theorem（定理 2.7）



圆外一点引出两条圆的割线 PA、PC 分别与圆交于 B、D，则有

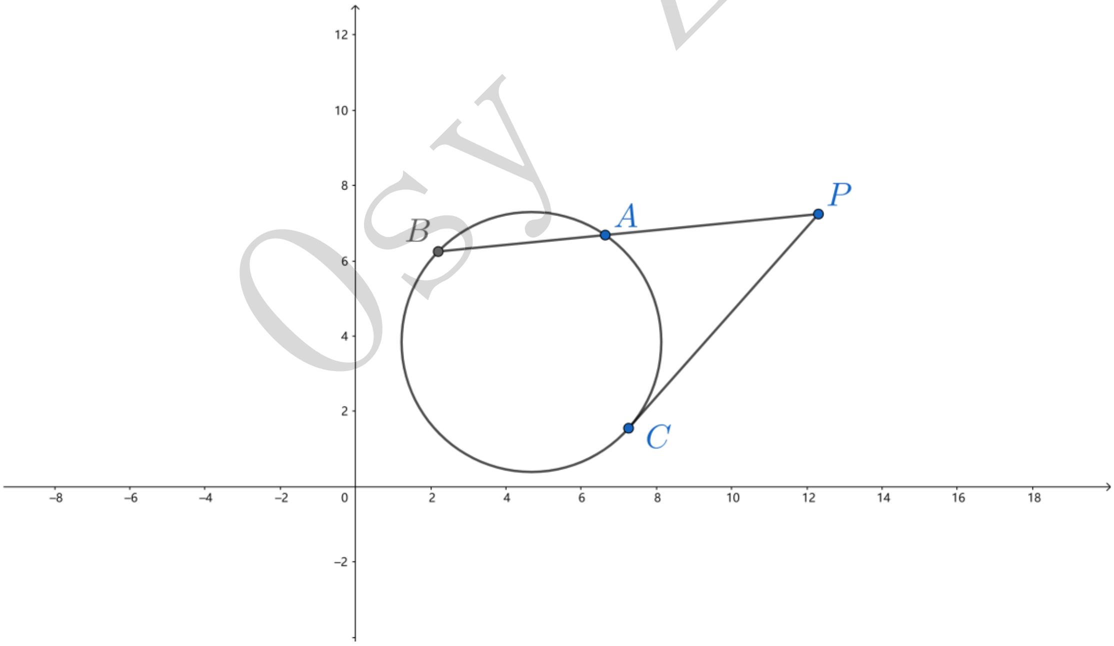
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

【证明】



连接 BC、AD，根据同弧所对圆周角相等可以得出 $\triangle CPB \sim \triangle APD$，$CP/AP = PB/PD$，移项后结论得证。

【拓展】如果我们让其中一条割线成为圆的切线，我们就得到了切割线定理：



在这张图中，有 $PA \cdot PB = PC^2$。

第三章 不涉及圆的任意点作图

1. 基本定理

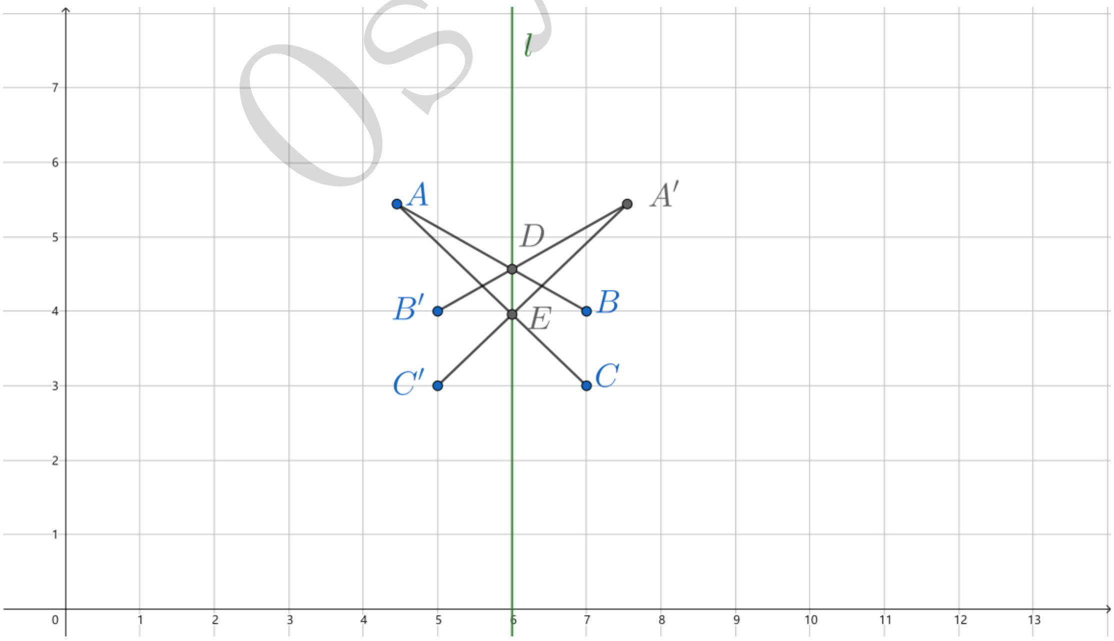
Zyk 基本对称定理

在 2022 年春季，Zyk 同学受到 B 站视频 BV16u411i75M 的启发，提出了 Zyk 基本对称定理，内容如下：

Zyk 基本对称定理 Zyk's Basic Symmetry Theorem（定理 3.1）

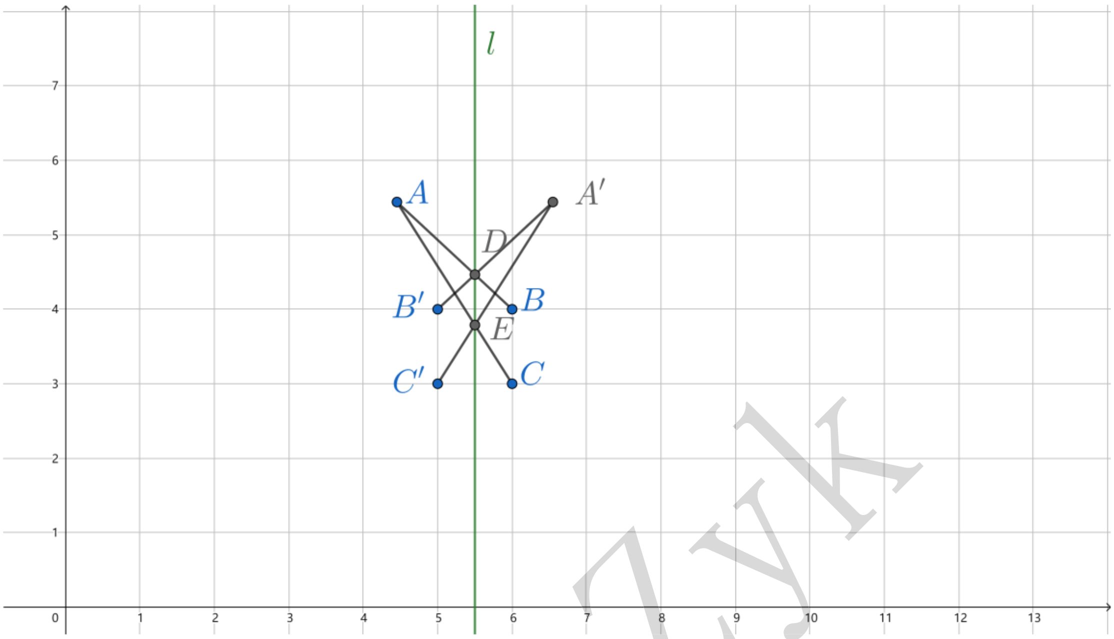
【提出者】翟悦凯

可以做出任意一点关于一条垂直格线或一条水平格线的对称点。做法如下（做 A 关于 l 的对称）：



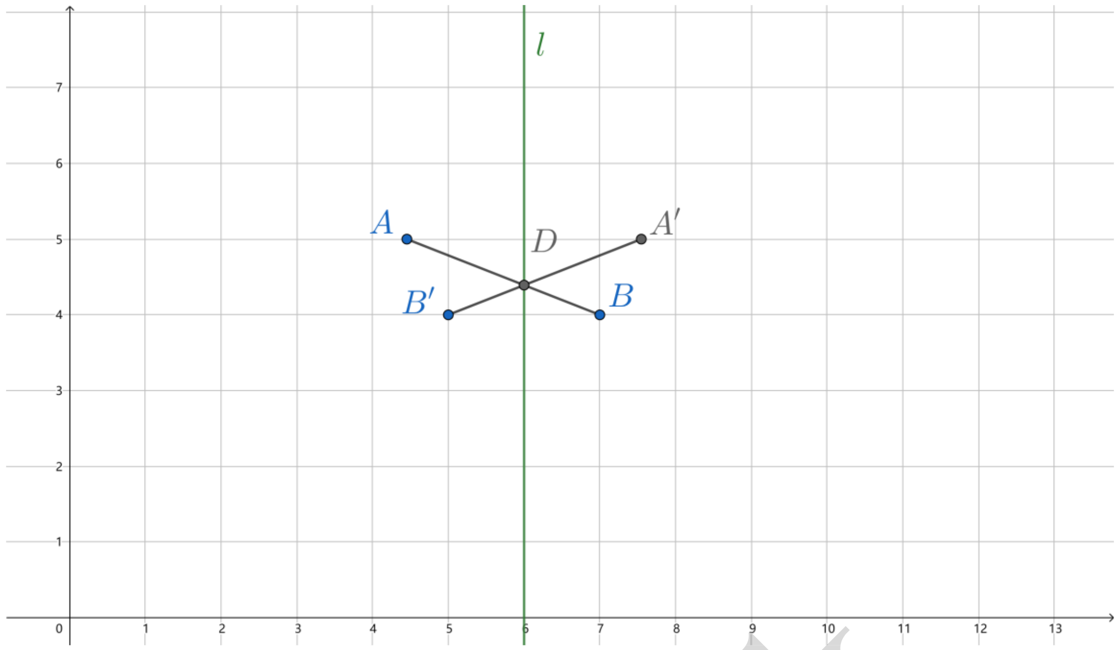
【作图语句】取格点 B,C,B',C'（要求 B',C' 关于 l 对称），连接 AB,AC 交 l 于 D,E。连 $B'D,C'E$ 交于 A'。A' 即为所求。

【拓展】当 l 为网格中线时，此定理依然适用：

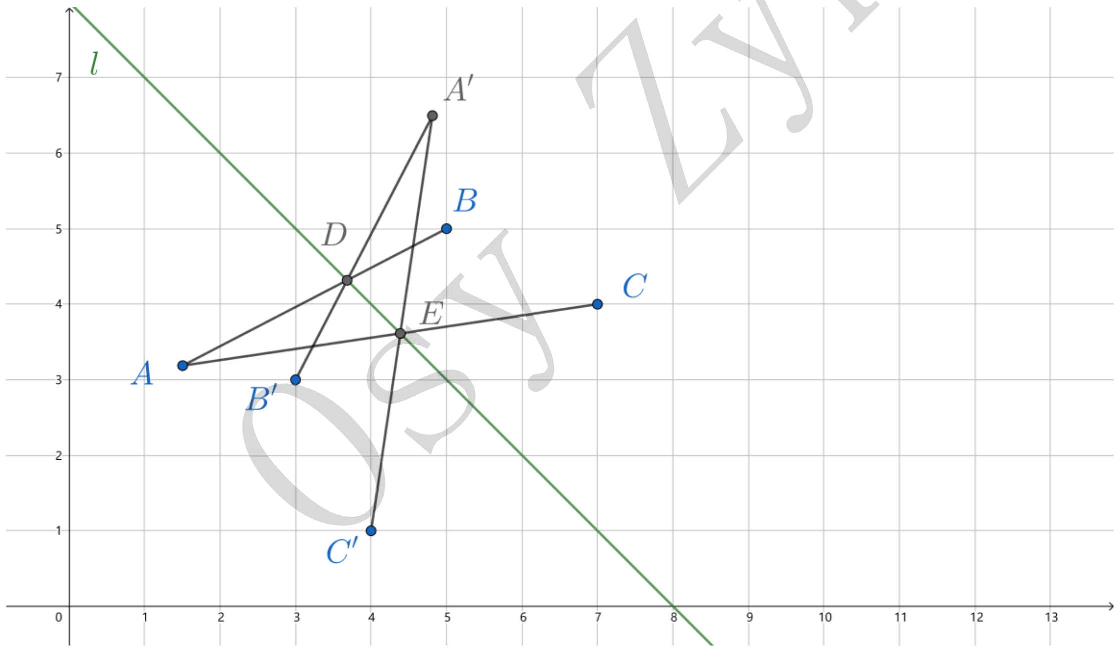


【证明】不难发现直线 AB 和直线 $A'B'$ 对称，直线 AC 与直线 $A'C'$ 对称，所以直线的交点也对称，这样 A 和 A' 就是对称的了。

【拓展】这个定理用了两对对称点以确定 A' 的位置，但在一些特殊情况下（比如 A 在水平格线上而 l 为竖直直线时），我们只需要一对对称点。下面的图片展示了一个例子。A 在水平格线上，我们不难看出 A' 也在相同的水平格线上，于是可以省去一对对称点。



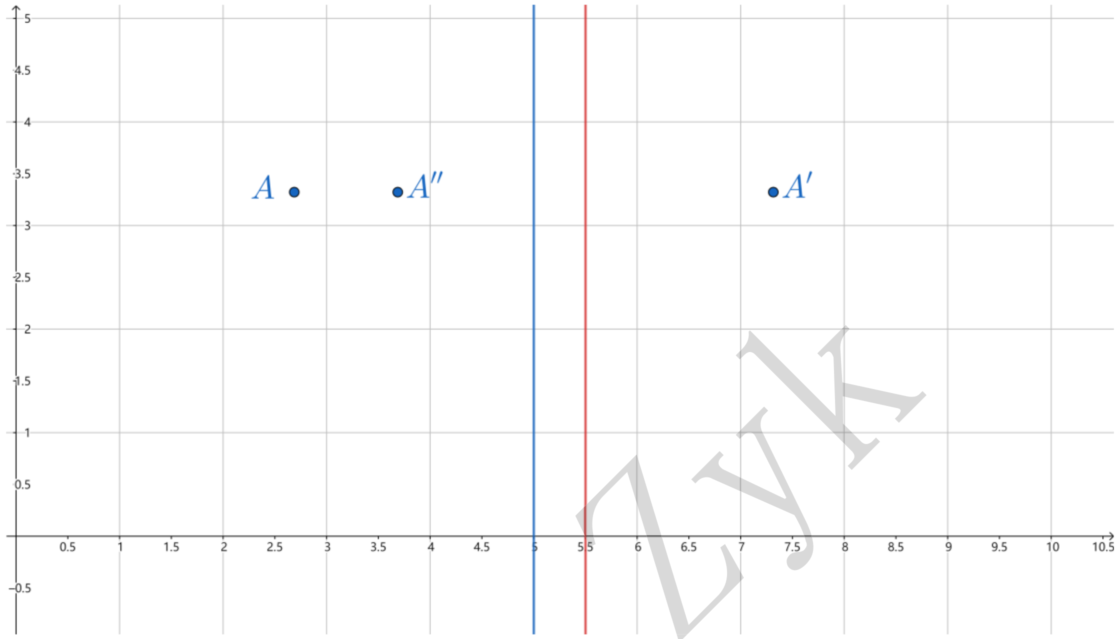
【拓展】当 l 为从网格对角线的时候，此定理依然适用。



Zyk 基本对称定理的一大优势是，可以做出任意点关于一条格线（或网格中线、网格对角线）的对称。B，C 点的选择也比较自由。Zyk 基本定理有非常多的推论，它们的原理都不难理解。我们来一一列举。

推论：平移定理 Translate Theorem （定理 3.1.1）

可以将任意点向左/向右/向上/向下平移 $n\,(n \in N^*)$ 个单位长度。做法如下（将 A 向右平移）：

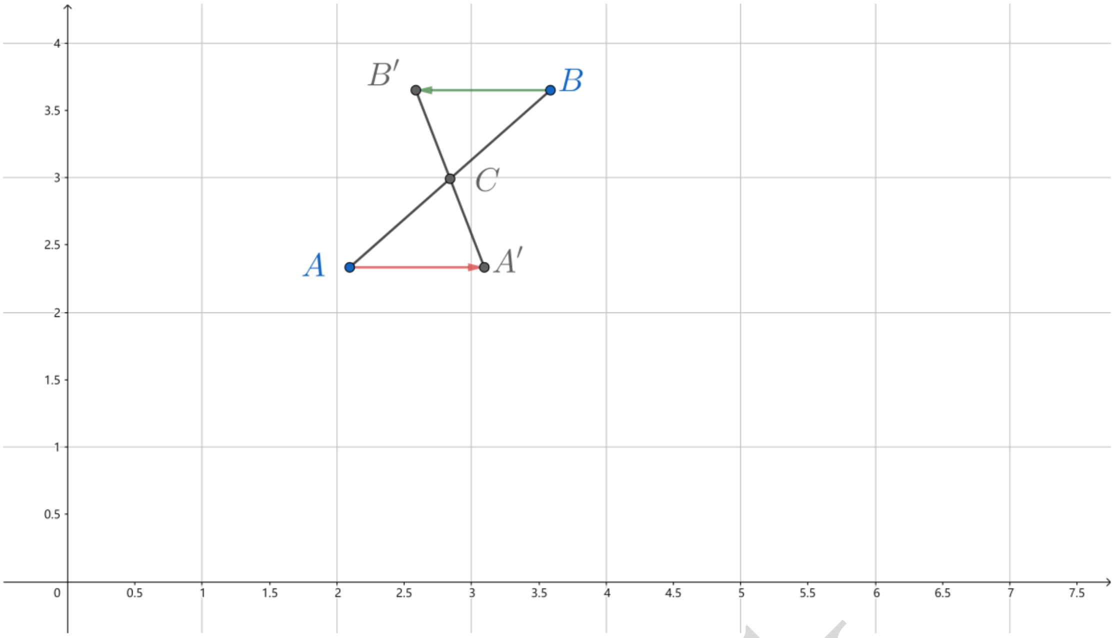


我们以向右平移为例。选定一条格线，做点 A 关于这条直线的对称点 A'。将选定直线向右平移 $\frac{n}{2}$ 个单位（这通常是简单的），做 A' 关于新直线的对称点 A''。A'' 即为所求。

【证明】如果 A 与左边的直线相距 d，那么 $AA' = 2d$，A' 与右边的直线相距 $d - 0.5n$，$A'A'' = 2d - n$。所以 $AA'' = n$。

推论：分线段定理 Segment Dividing Theorem（定理 3.1.2）

可以把任意一条线段分成给定比例。作图方法如下（以平分线段 AB 为例）：

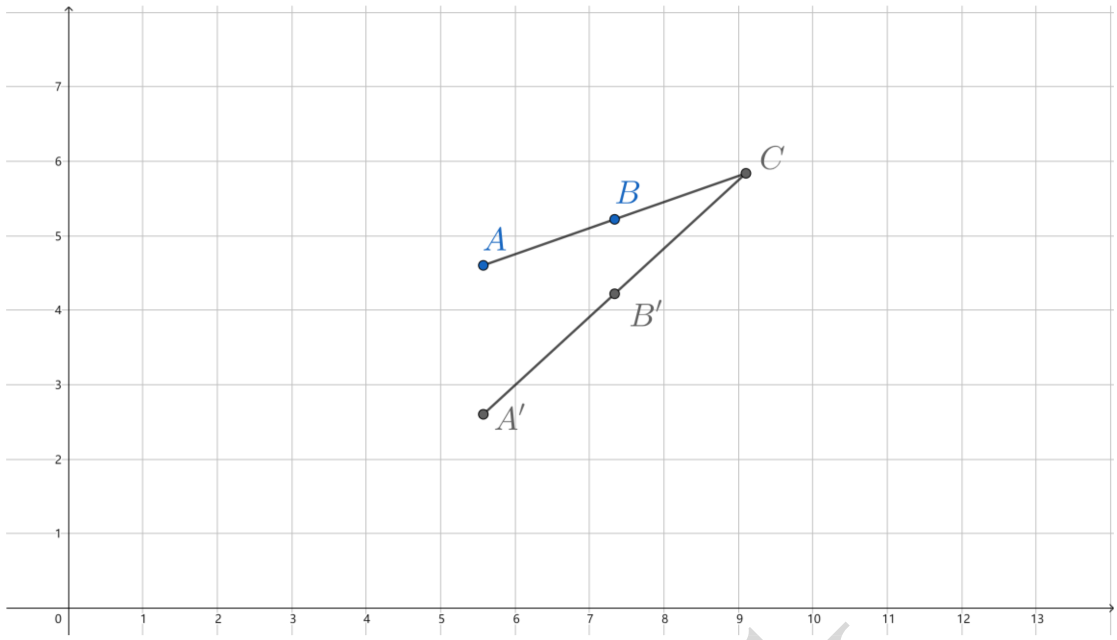


应用平移定理将 A 向右平移一个单位得到 A'，B 向左平移一个单位得到 B'，连 $A'B'$ 交 AB 于 C。C 即为 AB 中点。由全等或者相似的知识可以很简单地证明此定理。我们可以用类似的方法得到三等分点、四等分点等，只需改变平移的单位长度即可。

【证明】$\triangle BCB' \sim \triangle ACA'$，$\frac{AC}{BC}=\frac{AA'}{BB'}$。前面的证明可以同时证明定理本身和定理的扩展。

推论：倍长线段定理 Segment Multiplication Theorem（定理 3.1.3）

可以倍长任意线段。做法如下（倍长线段 AB）：



应用平移定理将 A 向下平移两个单位得到 A'，B 向下平移一个单位得到 B'，连 $A'B'$ 并延长交 AB 于 C。此时 $AB=BC=\frac{1}{2}AC$。由相似的知识可以非常简单地证明此定理。

【拓展】通过改变向下平移的单位长度，可以做到三倍、四倍甚至 3/2 倍的倍长。

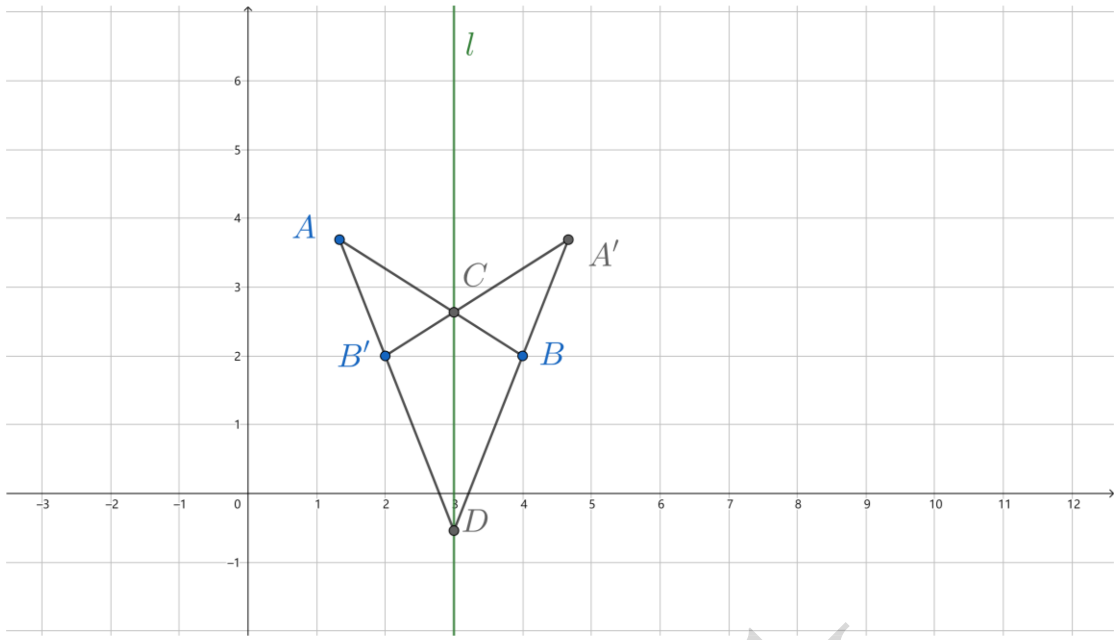
【证明】$\triangle CBB' \sim \triangle CAA'$，$\frac{AC}{BC}=\frac{AA'}{BB'}$。前面的证明可以同时证明定理本身和定理的拓展。

Hmy 在 2022 年 6 月 12 日 给出了 Zyk 基本对称定理的优化，这也被称为“绵羊把戏（Sheep’s trick)”。

Zyk 基本对称定理的 Hmy 第一优化 Hmy’s First Optimization of Zyk’s Basic Symmetry Theorem（定理 3.1.4）

【提出者】郝铭扬

可以用稍微简单一点的方法作任意点关于一条格线的对称，作图方法如下：



【作图语句】选定格点 B，B'（要求 B，B' 关于 l 对称），连接 AB，AB' 并延长分别交 l 于 C，D。连接 $B'C$，DB 并延长交于 A'。A' 即为所求。

【证明】不难发现直线 AB 和直线 $A'B'$ 对称，直线 AD 与直线 $A'D'$ 对称，所以直线的交点也对称，这样 A 和 A' 就是对称的了。

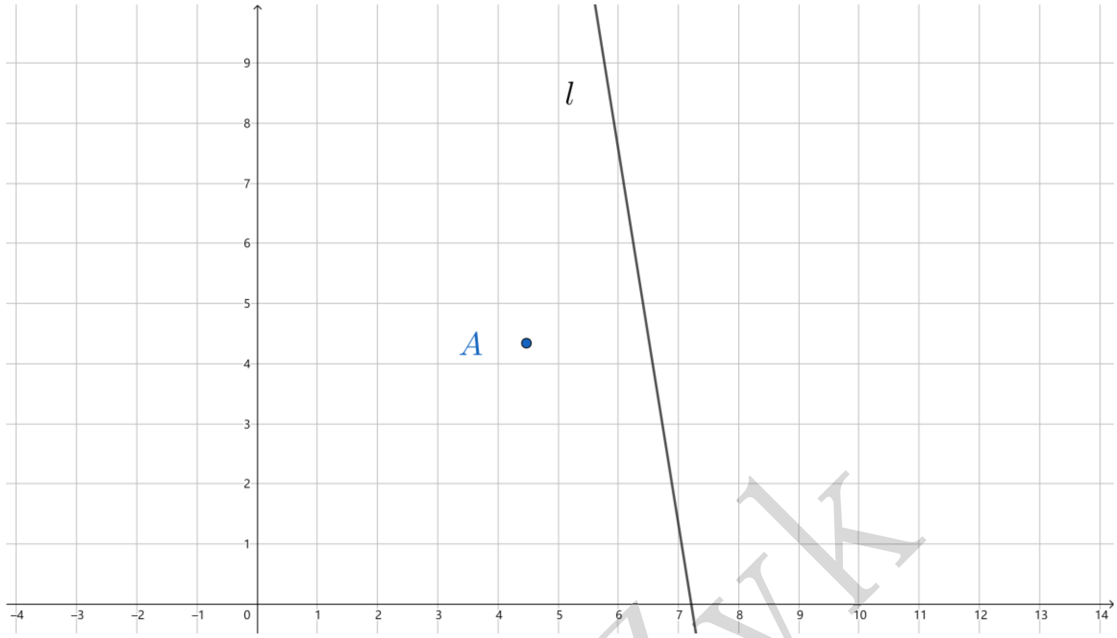
Zyk 对称定理在网格作图学史上有着里程碑式的意义，它让我们第一次接触到了任意点的作图，并首次告诉我们诸如平分、倍长任意线段等问题是可做的，主次之外，它在后面介绍的一些定理（比如三个垂直定理）中也有应用。面对如此丰富的推论，我们不禁思考网格作图是否已经被解决。然而上述推论往往需要非常复杂的作图步骤，任意点关于任意直线对称等问题的可做性仍然较低。下面介绍的一些更高级的定理将简化一些问题，从而逐渐构建起任意点作图的框架。

Zsq 平行定理

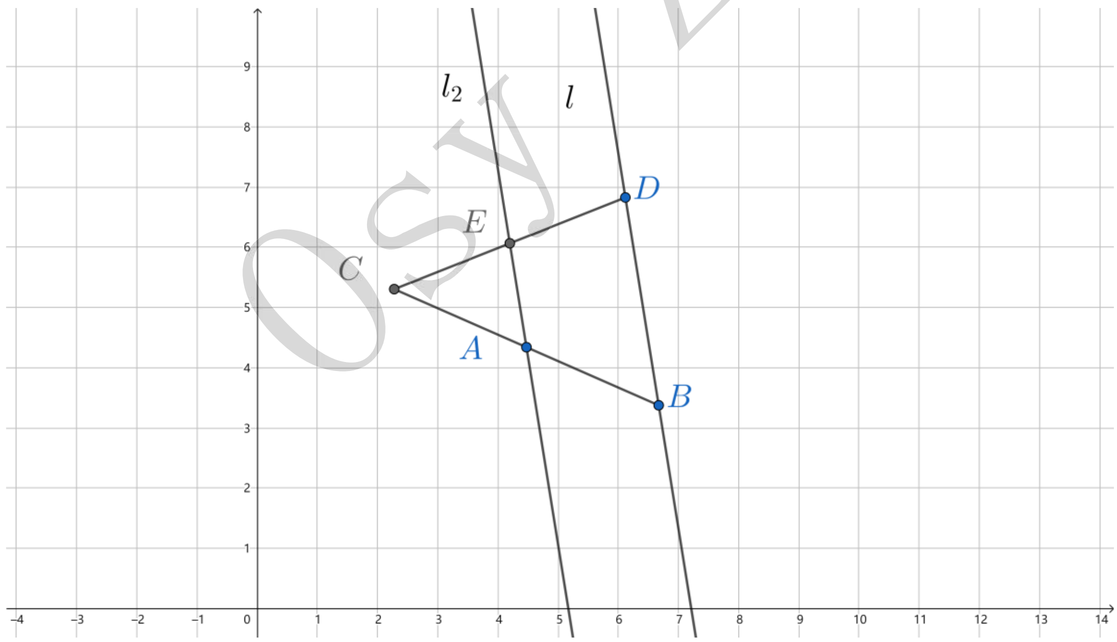
Zsq 同学解决了过任意点做任意直线平行线的问题。其实，只用 Zyk 基本对称定理及其推论也可以实现，但是 Zsq 平行定理更加简洁。我们先讲如何只用 Zyk 基

本对称定理及其推论来实现。

如图，A 为任意点，l 为任意直线，过 A 做 $l_2 \parallel l$。

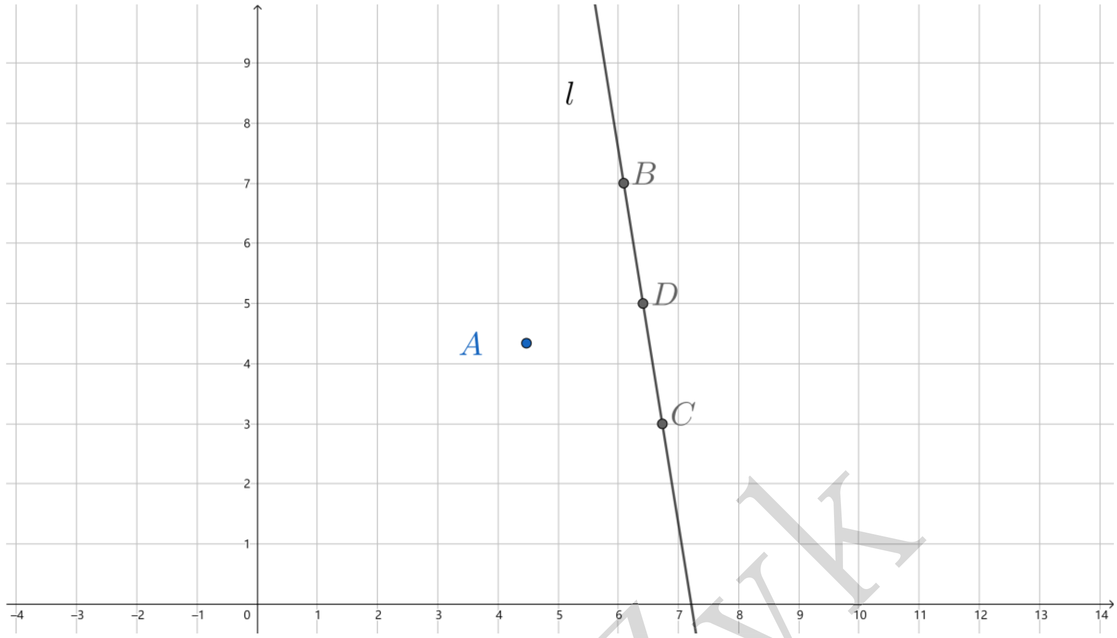


我们可以通过构造中位线的方法来解决这个问题。

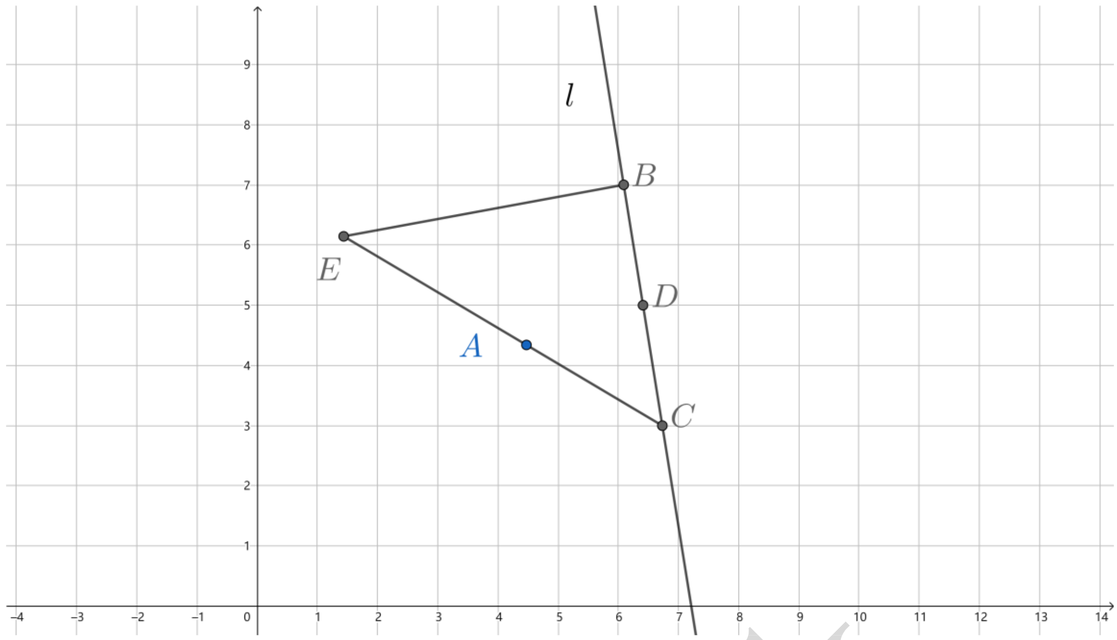


首先，在直线 l 上取合适的一点 B，应用倍长线段定理（定理 3.1.3）倍长线段 BA 到 C。再在直线上取合适的一点 D，连接 CD，应用平分线段定理（定理 3.1.2）得到 CD 的中点 E。连接 AE，AE 即为所求。

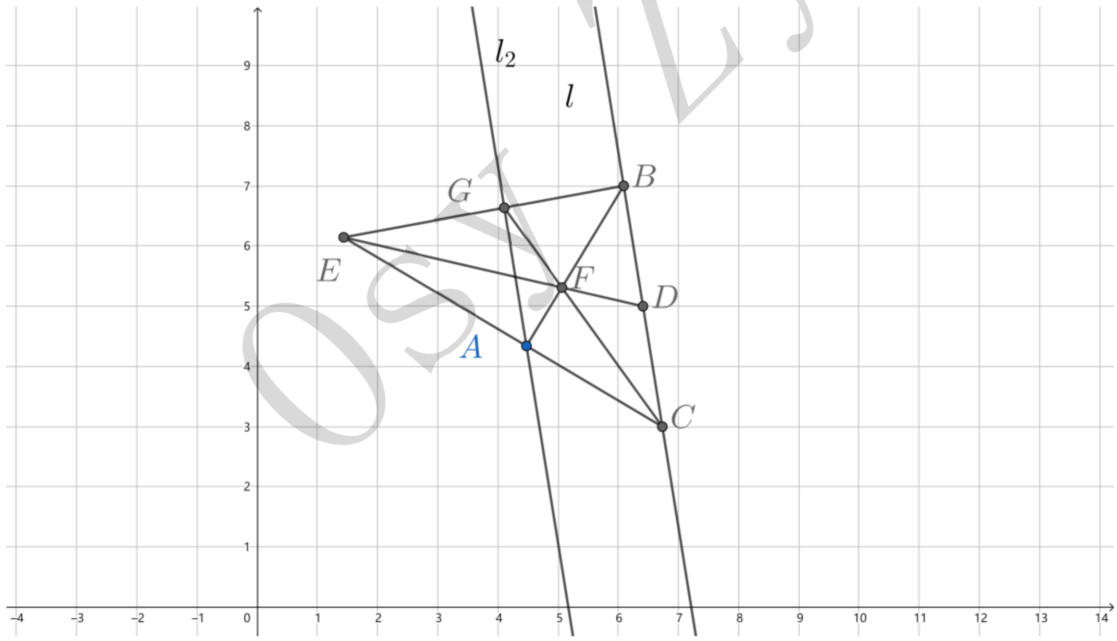
这种方法易于理解，但是作图繁琐至极。Zsq 平行定理巧妙地运用塞瓦定理，寥寥几步就完成了任务。我们来看一下作图方法。



首先我们要选取三个点 B，D，C。这三个点不是随便选取的，我们必须让 D 是 BC 的中点。因为直线完全任意几乎没有特殊性质，我们只能让 B，D，C 三个点都是直线 l 与水平格线的交点，而且 B 和 D、D 和 C 的垂直距离是相等的，这也就构造出了 D 是线段 BC 中点的情况。选择竖直格线上等距离三点也是可以的，无论怎样选择根本目的都是让 D 为 BC 中点。此时我们连接 CA，延长并在延长线上取一点 E，连接 BE。



此时我们连接 ED，BA 交于 F。连接 CF 并延长交 EB 于 G。连 AG，AG 即为所求。



【证明】这个定理的证明并不显然，我们来尝试证明一下。这里出现了三角形内三线共点的情况，这让我们想到了塞瓦定理。

$$\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BG}{GE}=1$$

因为 D 是 BC 的中点，所以 $CD/DB=1$，表达式被化简为：

$$\frac{EA}{AC} \cdot \frac{BG}{GE} = 1$$

再移项变换，可以得到

$$\frac{EA}{AC} = \frac{EG}{BG}$$

可以判定

$$\triangle EAG \sim \triangle ECB$$

所以 $AG \parallel BC$。结论得证

Zsq 平行定理 Zsq's Parallel Theorem（定理 3.2）

【提出者】张世其

可以过任意一点做任意一条直线的平行线。

如果说 Zyk 基本对称定理让我们接触到了“半任意”（对于直线的限制仍然比较多），那么 Zsq 平行定理则让我们发现“全任意”作图（点和直线均任意）是可能的。Zyk 基本对称定理和 Zsq 平行定理的提出，让任意点网格作图不再是天方夜谭，为其奠定了基础。此后，越来越多的高级定理被发现。

朴素平移定理

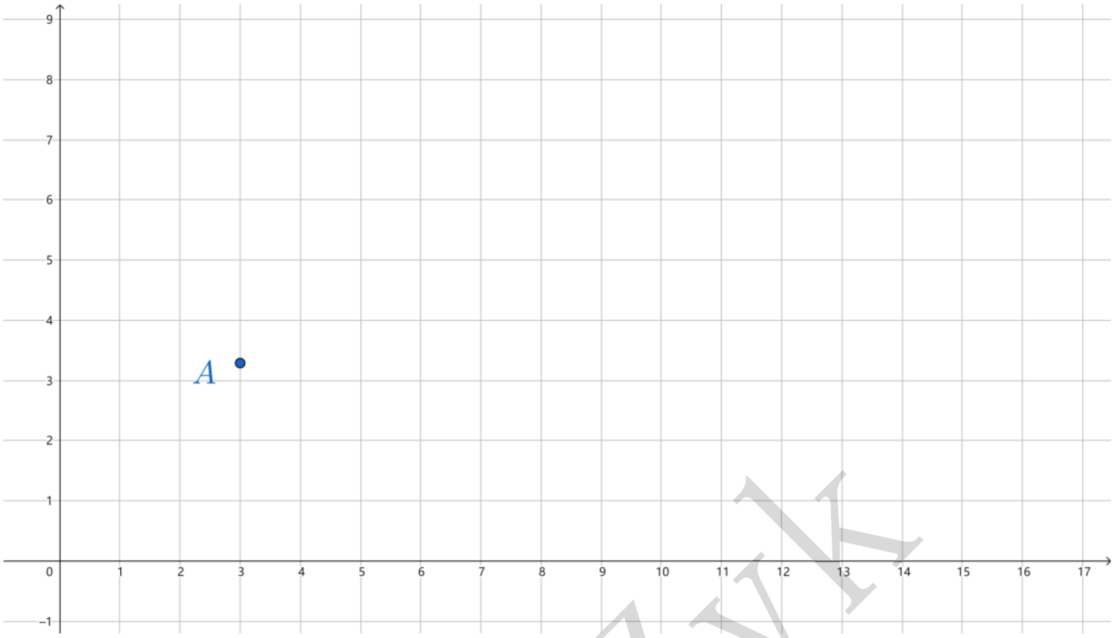
这是一个比较简单的定理，我们直接介绍做法。

朴素平移定理 Naïve Translate Theorem（定理 3.3）

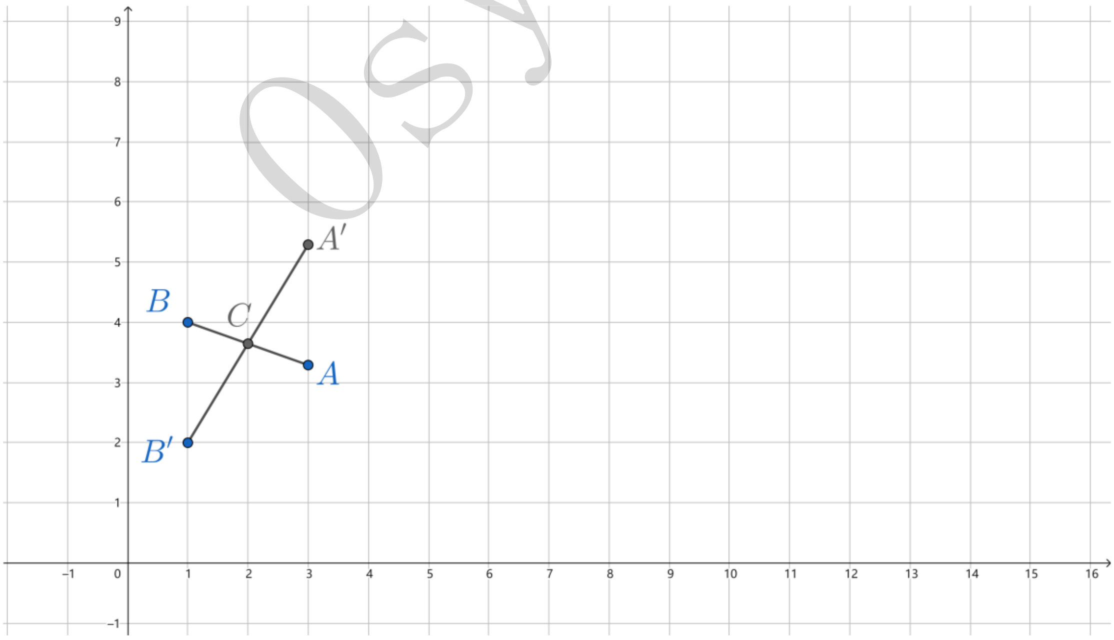
当一个点在格线上时，我们可以用简单的方法将其顺格线平移或跨格线平移，做法如下。

顺格线平移

如图，A 在竖直格线上，将其向上平移 $n(n \in \mathrm{N}^*)$ 个单位长度。下面将给出 $n = 2$ 时的作图。



【作图语句】如下图，在 A 所在竖直格线的左侧第二条格线上取一个点 B，将 B 向下平移两单位得到格点 B'，连 AB 交 A 所在竖直格线的左侧第一条格线于 C，连接 $B'C$ 并延长交 A 所在竖直格线于 A'，A' 即为所求。

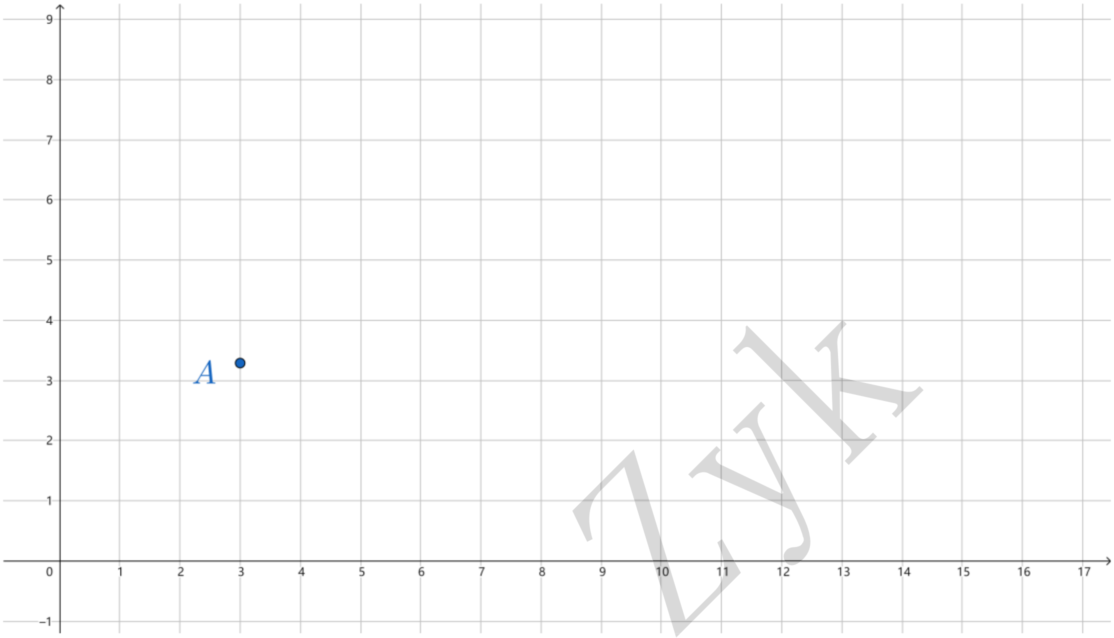


【证明】因为 $CA = CB$，$\angle BCB' = \angle ACA'$，$CA' = CB'$，所以 $\Delta ACA' \cong \Delta BCB'$，

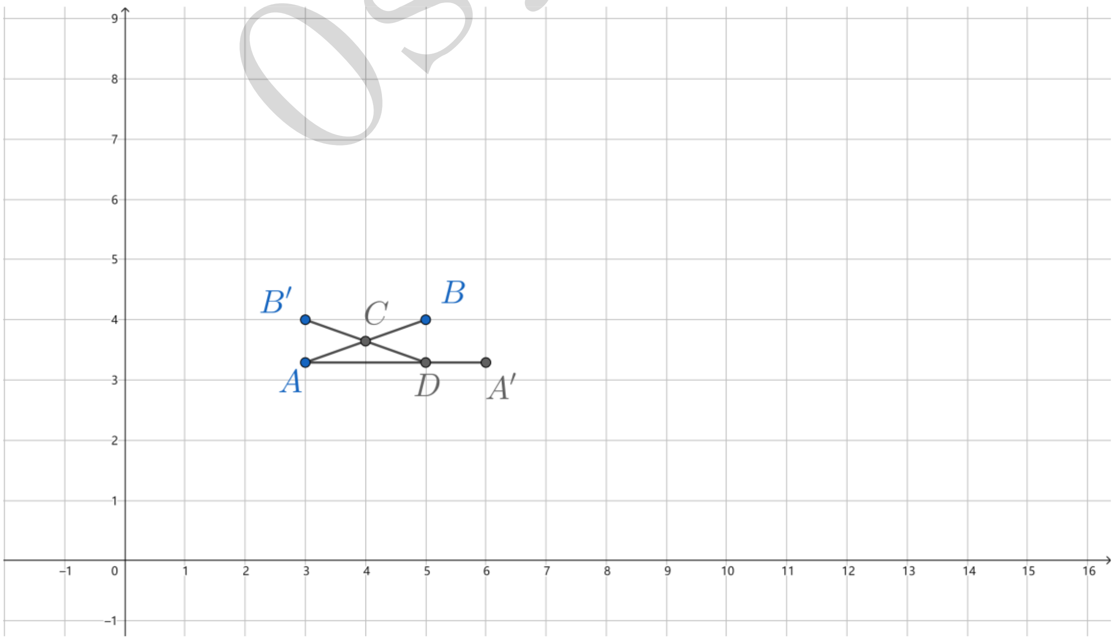
$AA' = BB' = 2$。

跨格线平移

如图，A 在竖直格线上，将其向右平移 $n(n \in N^*)$ 个单位长度。下面将给出 $n = 3$ 时的作图。



【作图语句】如下图，取格点 B，B'，连 AB 交竖直格线于 C，连 $B'C$ 并延长交竖直格线于 D，连 AD 并延长交竖直格线于 A'，A' 即为所求。



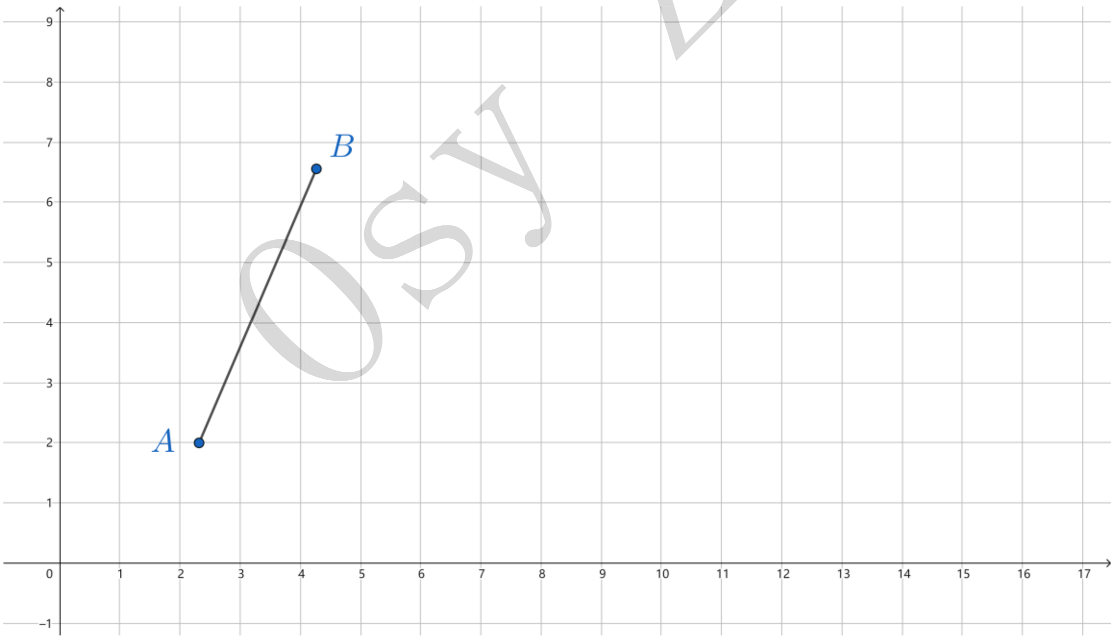
【证明】因为 $CA = CB = CB' = CD$，所以四边形 $AB'BD$ 是矩形，$AA' \parallel BB'$，结论得证。

2. 分线段与倍长

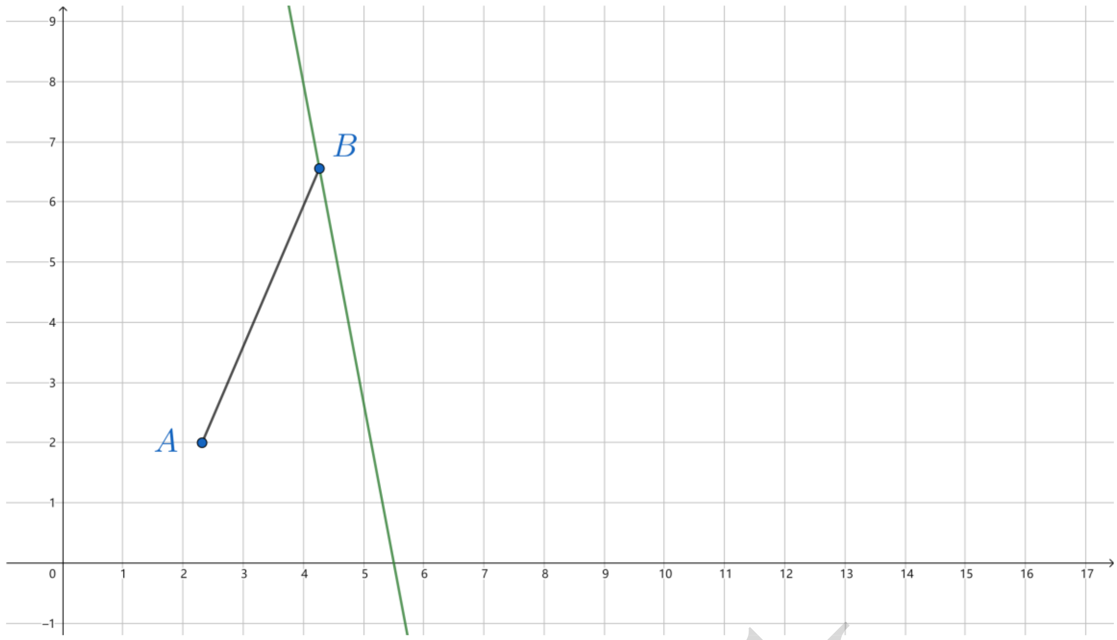
Wyc 两大分线段定理

我们现在要解决平分任意线段的问题，分线段定理（定理 3.1.2）的做法显然不够简洁。想要简化步骤，我们可以考虑特殊情况，然后由特殊推广到一般。

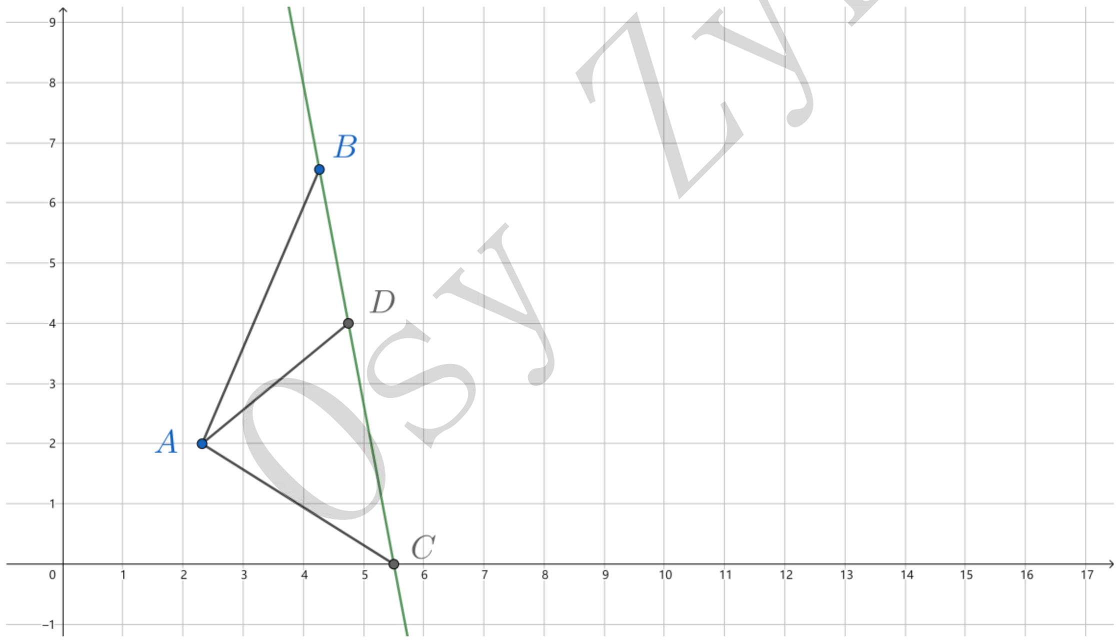
Wyc 同学想到了一个巧妙的特殊情况——当线段的一个端点在格线上。如下图所示，A 在格线上，我们需要平分线段 AB。



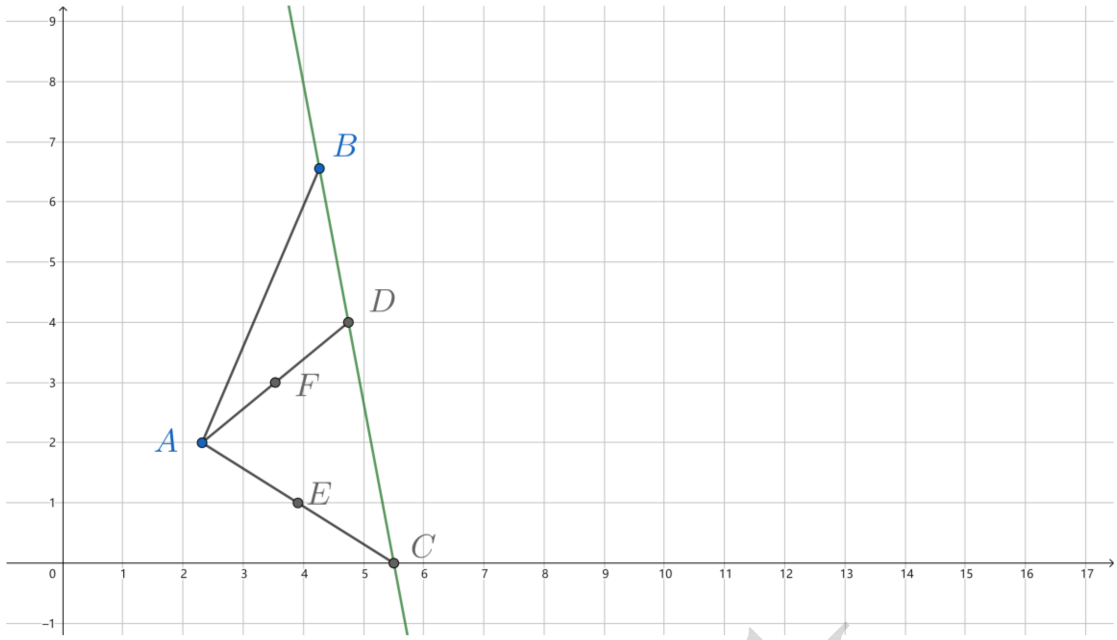
Wyc 通过构造中位线的方法解决了这个问题。首先我们过 B 随便画一条合适的直线。



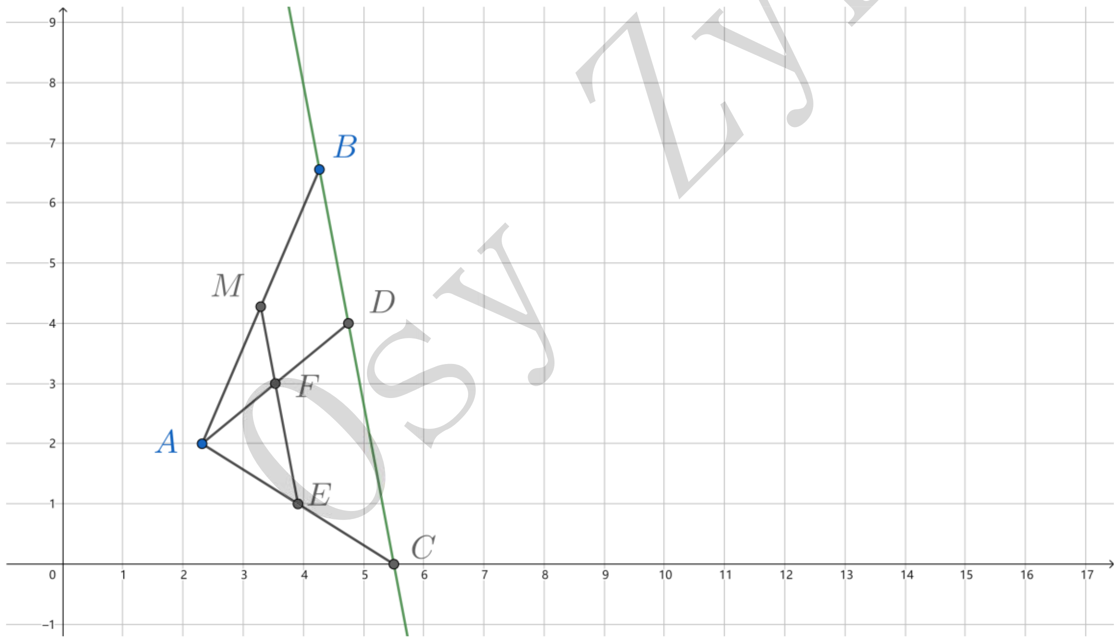
我们找到这条直线与两条水平格线的交点，设为 C，D。



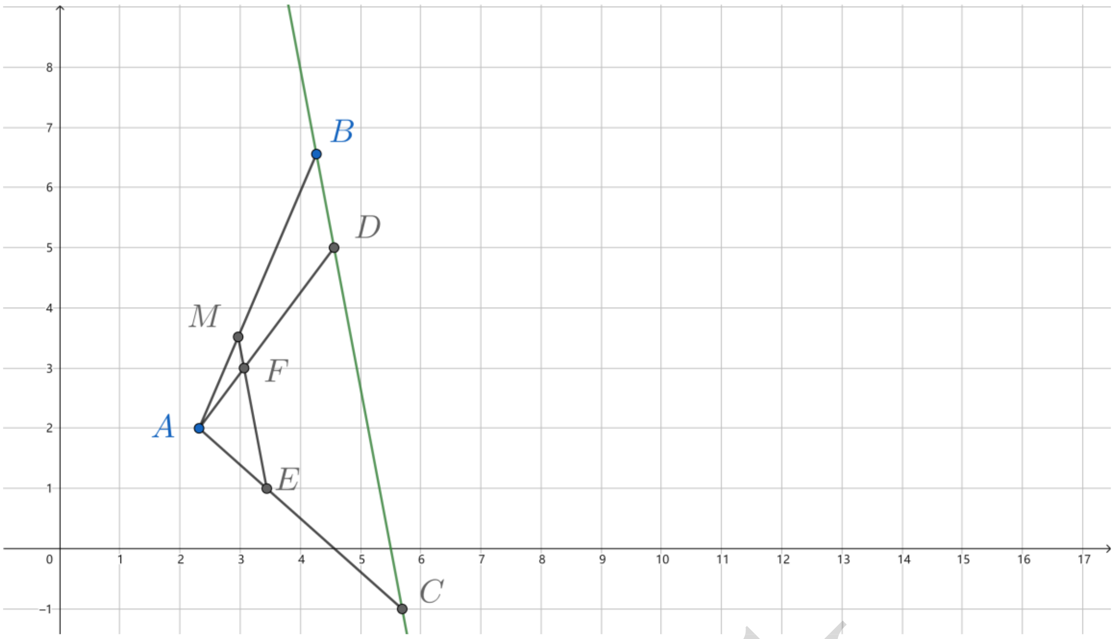
我们可以利用“A 在格线上”这一条件来简单地画出 AD，AC 的中点。显然，线段 AD 与 A、D 中间水平格线的交点就是 AD 的中点，线段 AC 与 A、C 中间水平格线的交点就是 AC 的中点。



连接 EF 并延长交 AB 于 M，不难发现 M 即为所求。



【拓展】我们可以用很相似的方法作出一条线段(一端点在格线上)的三等分点、四等分点以及其他比例的分线段点。下面的图给出了作三等分点的方法：



Wyc 分线段定理的思路，可以用概括为如下的部分。首先，当一条线段的两个端点都在格线上，且这两条格线都是水平格线或都是竖直格线的时候，这条线段的中点很好作;我们可以利用这个特点，构造中位线或相似，解决比较一般的情况。

Wyc 分线段定理 Wyc's Segment Dividing Theorem（定理 3.4）

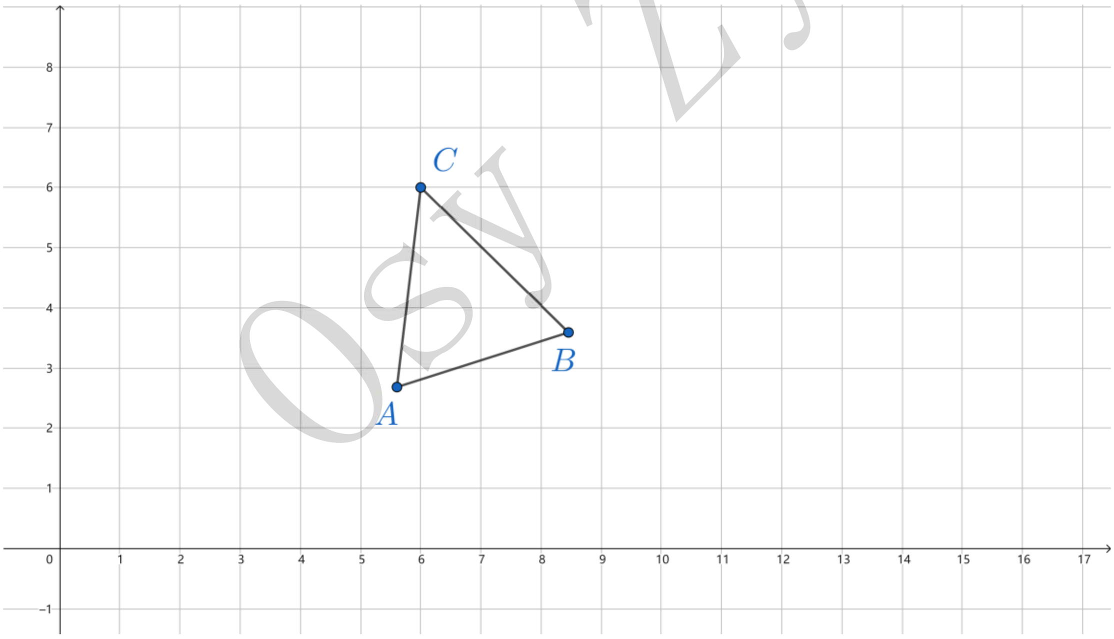
【提出者】王宇辰

当一条线段的一个端点在格线上时，可以用比分线段定理（定理 3.1.2）更简单的方法把该线段分成给定比例。

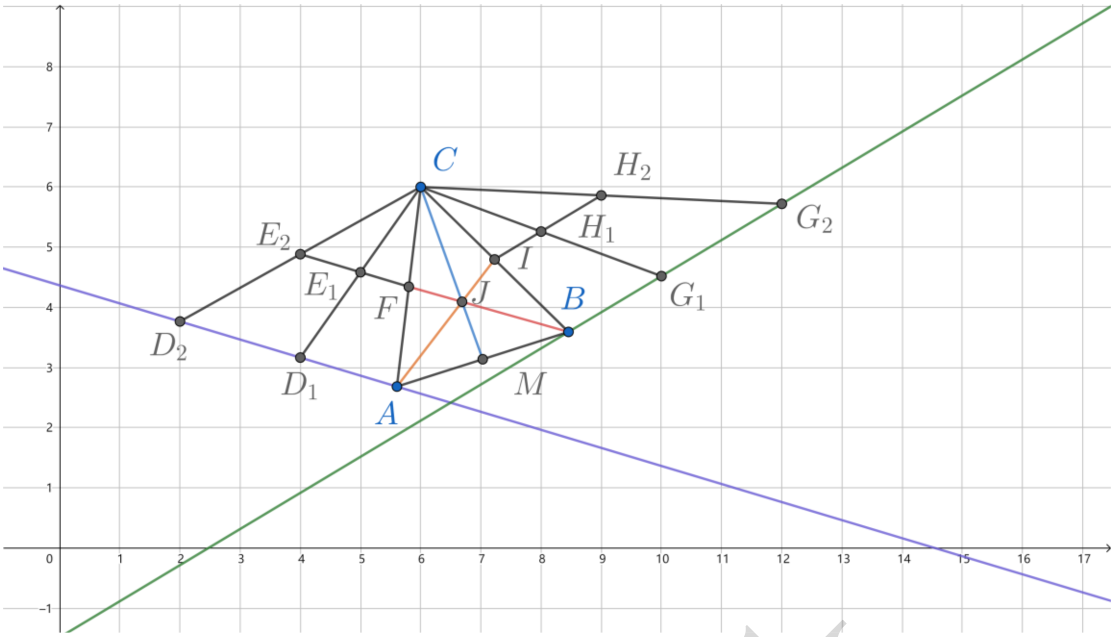
现在我们要考虑将任意线段平分的简单方法了。

如图，AB 是任意线段，平分 AB。

我们可以利用构造重心的方法来解决这个问题。

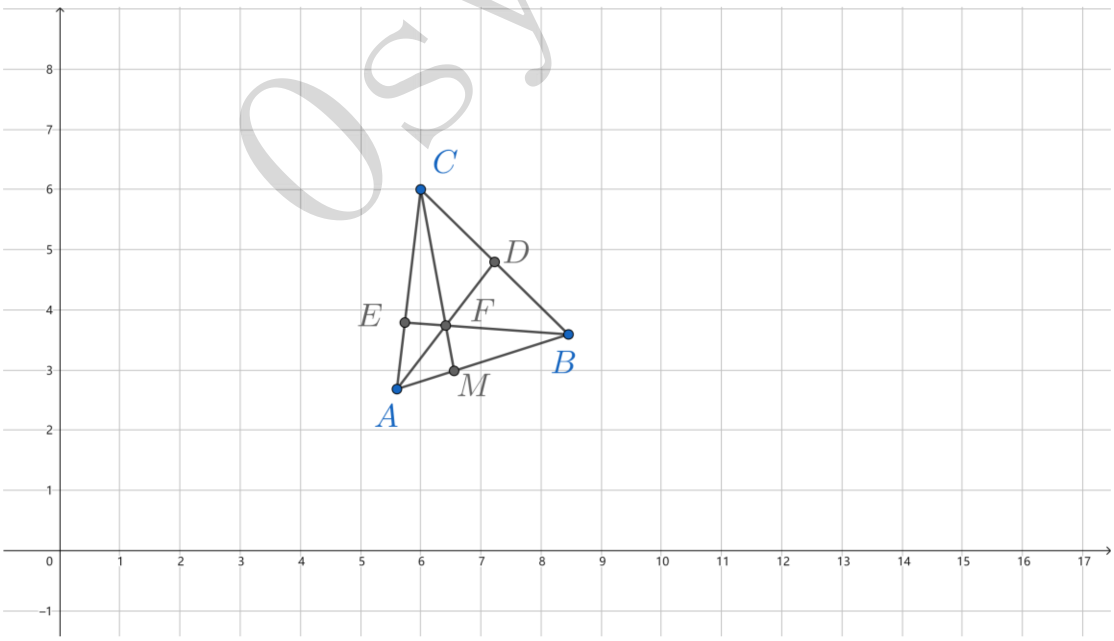


如图，C 是格点。如果我们可以作出线段 AC，线段 BC 的中点，根据三角形三条中线交于同一点，我们可以作出线段 AB 的中点。至于前两个中点，根据 Wyc 分线段定理（定理 3.4），是显然可作的。



如图，用 Wyc 分线段定理做出线段 AC 的中点 F 和线段 BC 的中点 I，连接 BF 和 AI 交于 J，连接 CJ 并延长交 AB 于 M，M 即为 AB 中点。读者需要注意，E_2、F、B 这三个点在图里看起来像是共线的三个点，实际上它们很可能不是共线的。

如何画出 AB 的三等分点、四等分点？我们可以利用塞瓦定理拓展，思路见下：



如图，C 是格点，画出线段 AC 的三等分点（更加靠近 A）和 BC 的中点，连

接 BE、AD 交于 F，连接 CF 并延长交 AB 于 M，M 即为 AB 三等分点（更靠近 A 的那一个）。

这个做法涉及到了三角形内三线共点的情况，这让我们想到了塞瓦定理：

$$\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BD}{DC}=1$$

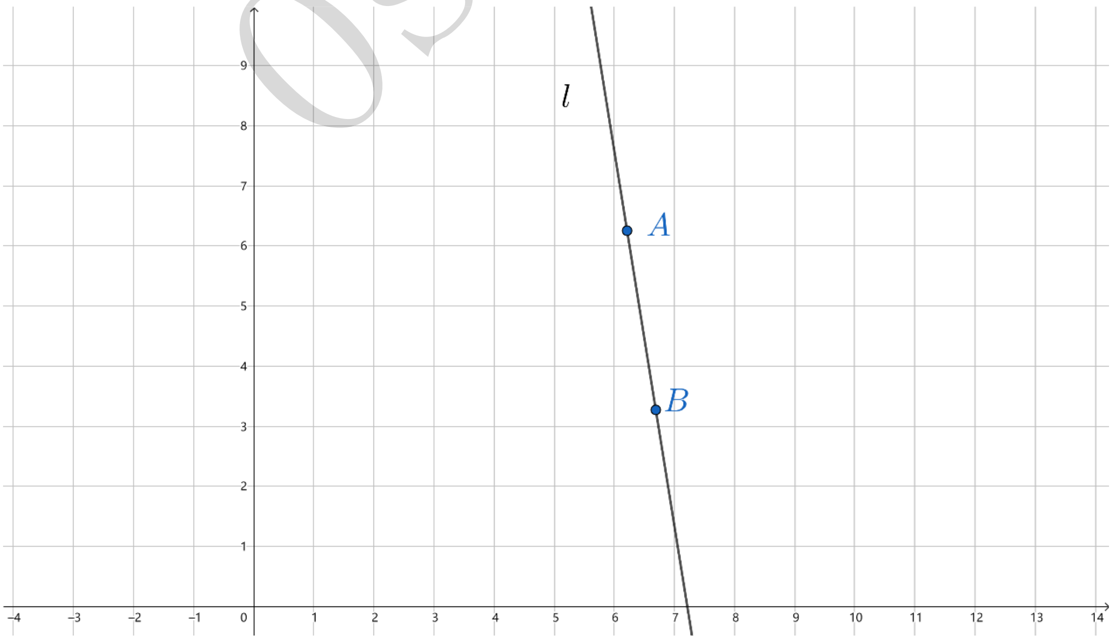
因为 $CE/AE=2$，$CD/BD=1$，所以 $AM/BM=\frac{1}{2}$，结论得证。M 的确是线段 AB 更靠近 A 的那一个三等分点。对于其他的情况，读者可自行思考。

广义 Wyc 分线段定理 Wyc's Generalized Segment Dividing Theorem（定理 3.5）

【提出者】翟悦凯（广义定理非王宇辰本人提出）

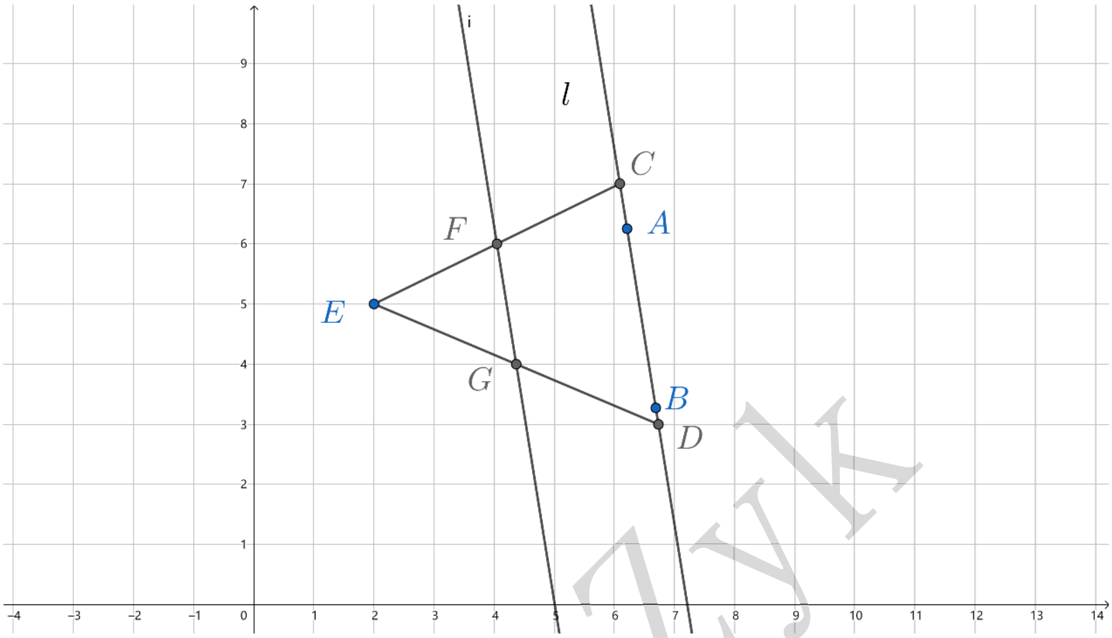
对于任意一条线段，可以用比分线段定理（定理 3.1.2）更简单的方法，把该线段分成给定比例。

【优化】当我们想要做出一条任意线段的中点时，做法可以进一步优化。我们先来看图。



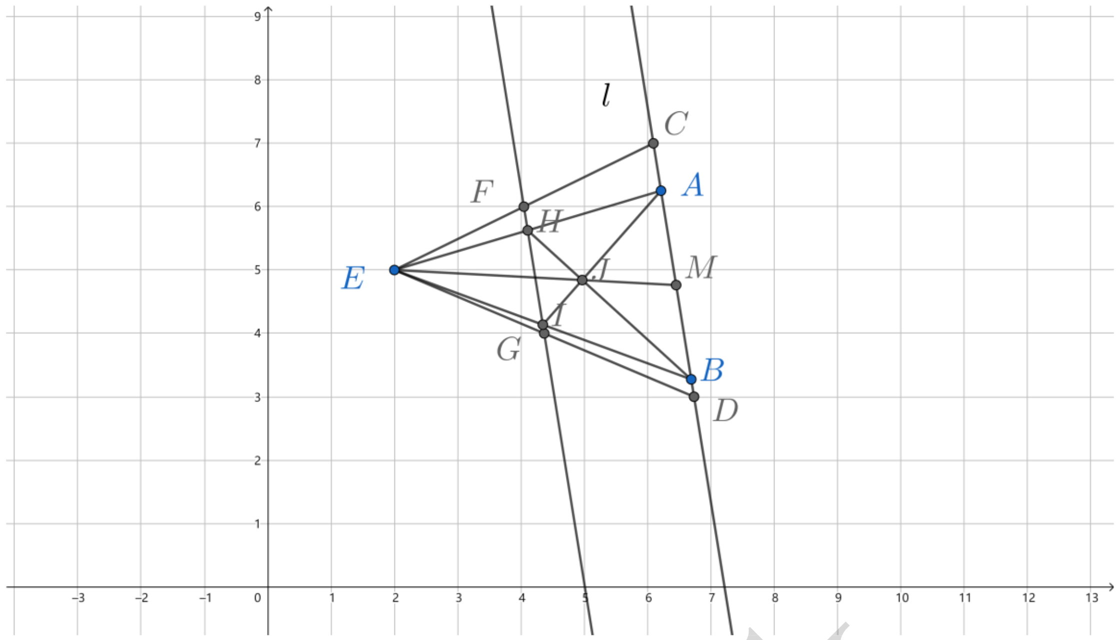
如图，在线段 AB 上找到它的中点。

首先我们要做 AB 的平行线。为了方便，我们可以充分利用格线，不用 Zsq 平行定理来画平行线。



如图，取格点 C，D，E，连 EC 交格线于 F，连 ED 交格线于 G，连接 FG，那么 $FG \parallel CD$。

因为 $FG \parallel CD$，所以在 CD 上的任意一点 P，连接 EP 交 FG 于 Q，都满足 $EP = 2EQ$。我们可以利用这一特性来构造重心。



如图，连接 EA，EB 交 FG 分别于 H，I。连接 BH，AI 交于 J。连接 EJ 并延长交 AB 于 M。M 即为 AB 的中点。这个优化由 Osy 给出。

广义 Wyc 分线段定理的 Osy 第一优化 Osy's First Optimization of Wyc's Generalized Segment Dividing Theorem（定理 3.5.1）

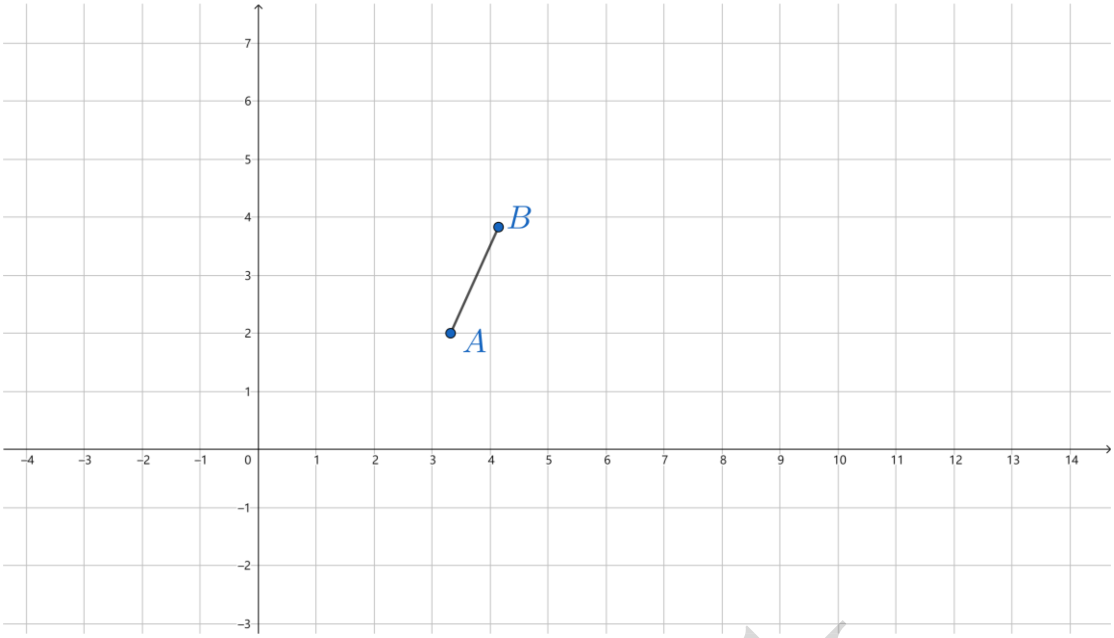
【提出者】欧思远

对于任意一条线段，我们可以用比广义 Wyc 分线段定理（定理 3.5）更简单的方法来平分它。

注意：定理 3.5.1 只能平分一条线段，不能把它分成其它的比例。

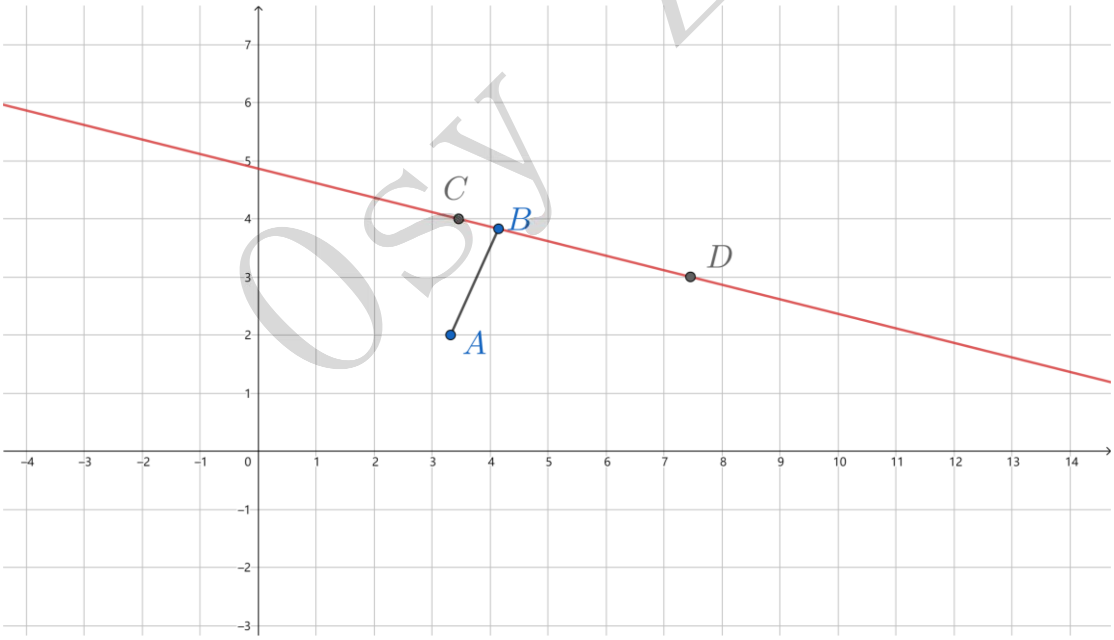
Wyc 两大倍长线段定理

类似于 Wyc 分线段定理，当线段的一个端点在格线上时，我们可以充分利用这个端点来简化作图步骤。Wyc 倍长线段定理分为两部分，一是向格线端点的方向倍长线段，一是向自由端倍长线段。我们先看向格线端点的方向倍长线段。

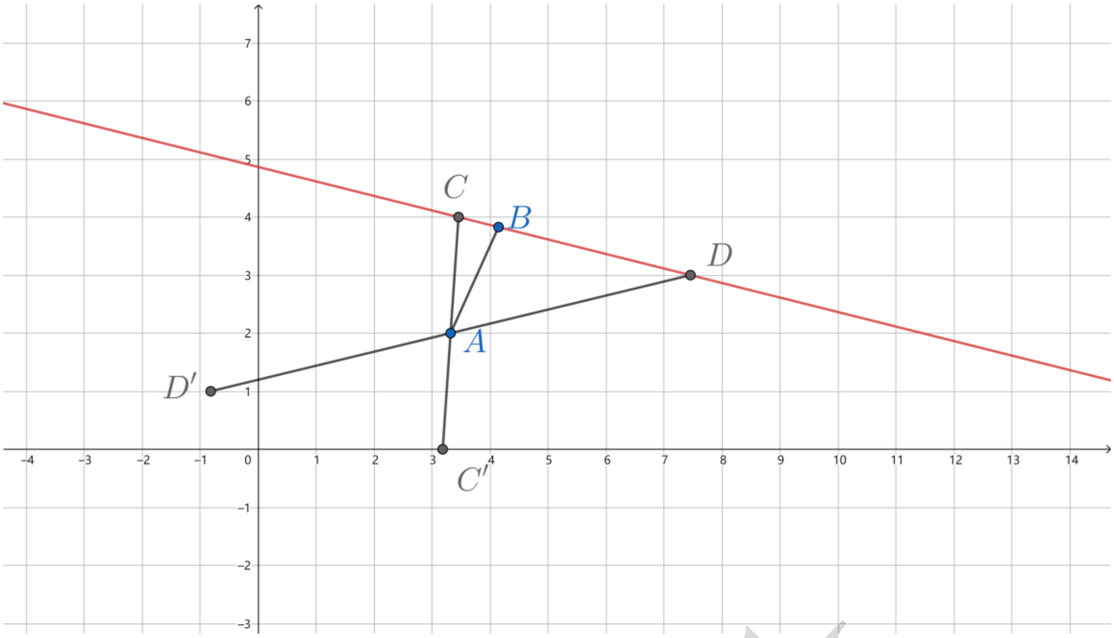


如图， A 在格线上，延长线段 BA 到点 B' 使得 $AB = AB'$。

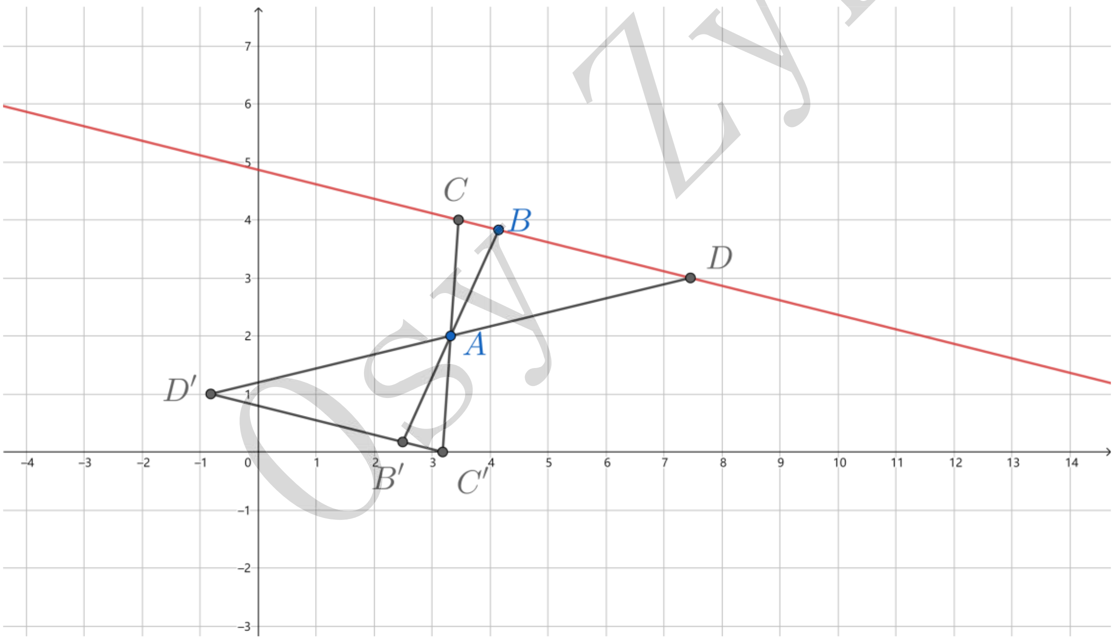
我们可以通过构造中心对称来解决这个问题。作图步骤和 Wyc 分线段定理有相似之处。



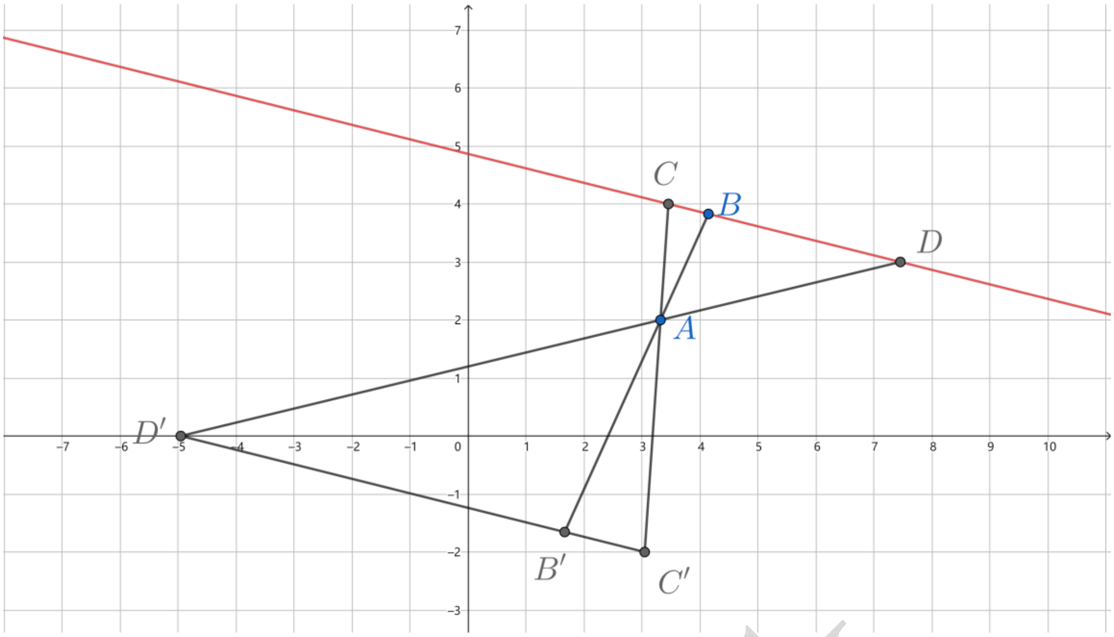
如图，过 B 作一条合适的直线，交两条水平格线分别于 C，D。我们发现，利用 A，C，D 都在水平格线上这一个条件，可以很简单地倍长线段 AC 和线段 AD。



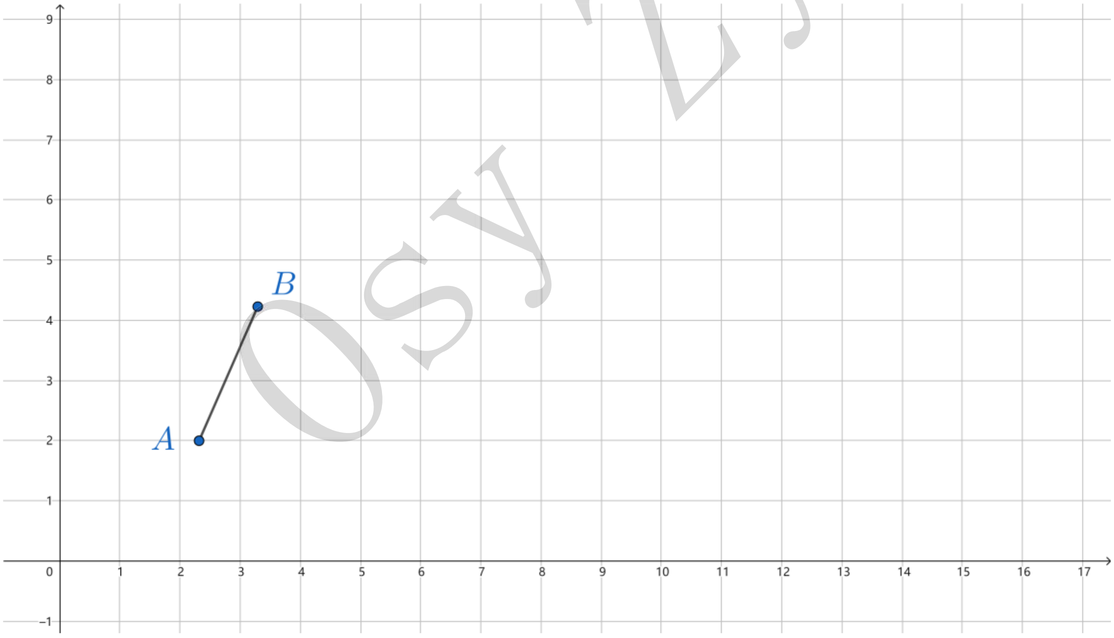
此时，我们连接 $C'D'$，在延长线段 BA 交线段 $C'D'$ 于 B'，AB' 即为所求。



这个方法也可以推广到倍长至原线段的三倍，下面给出了三倍倍长的图，读者可以自行尝试理解。

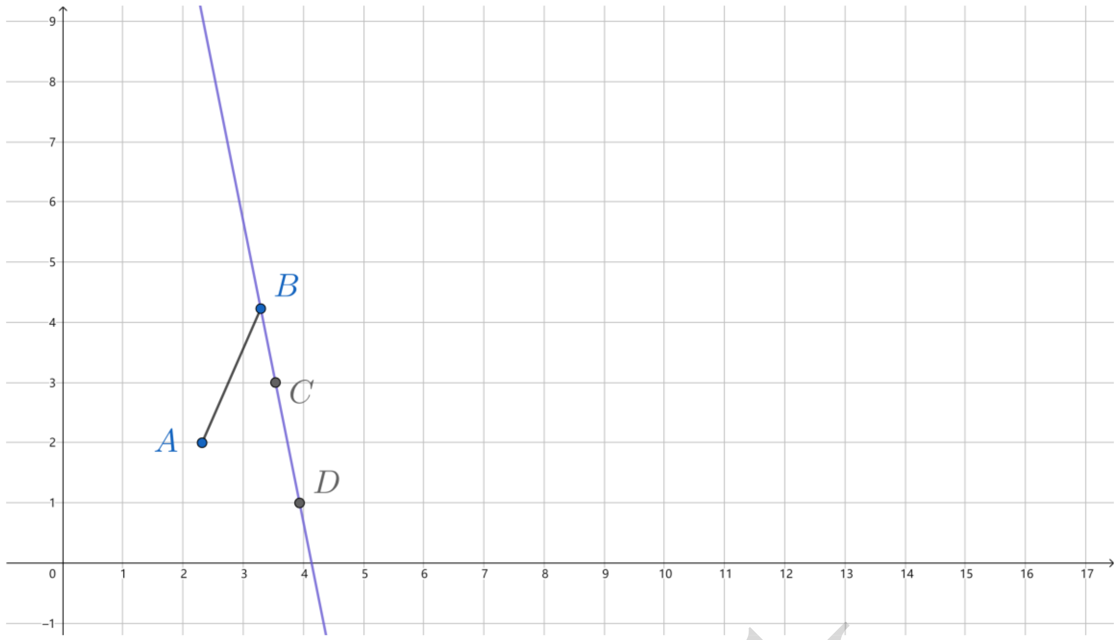


我们再看向自由端点方向倍长线段。此时的图与 Wyc 分线段定理的图几乎完全相同。

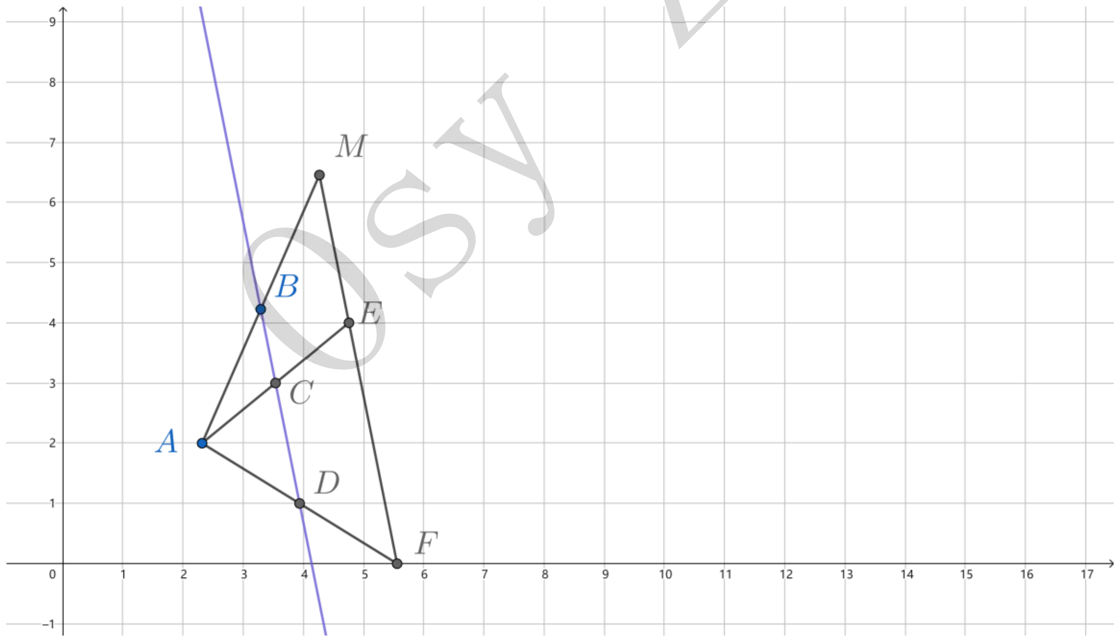


如图，A 在格线上，请在射线 AB 上找到点 M 使得 $AB = BM$。

我们还是需要通过构造中位线的方法来解决这个问题。



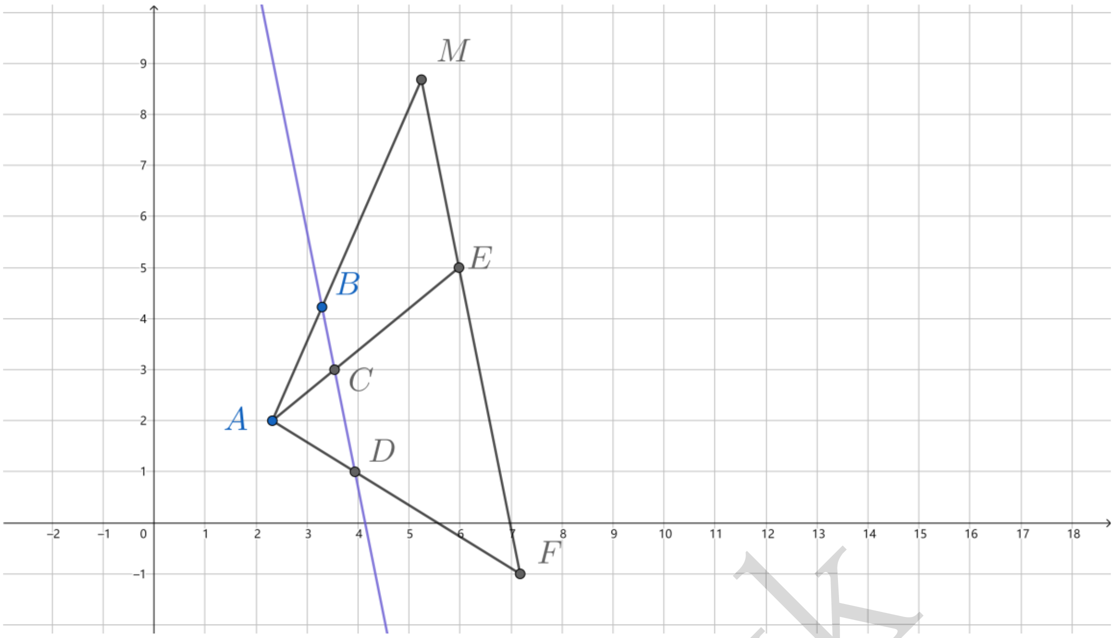
如图，过 B 作一条合适的直线，取这条直线与两条水平格线的交点，分别为 C 和 D。通过 A，C，D 都在水平格线上这一条件，我们可以很简单地倍长线段 AC 和线段 AD。



如图，倍长线段 AC 至 E，倍长线段 AD 至 F，连接 FE 并延长交 AB 延长线于 M，M 即为所求。

同样地，我们可以把 AB 倍长至原来的三倍或四倍。下面给出了倍长至原线段

三倍的图。

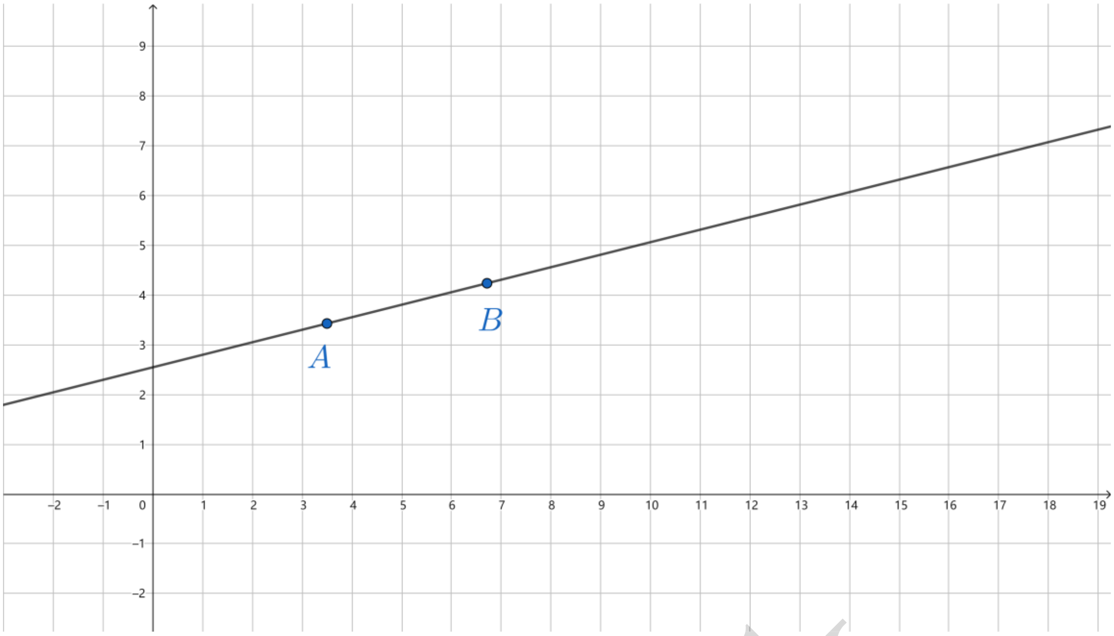


Wyc 倍长线段定理 Wyc’s Segment Multiplication Theorem（定理 3.6）

【提出者】王宇辰（向自由端倍长）、翟悦凯（向格线端点倍长）

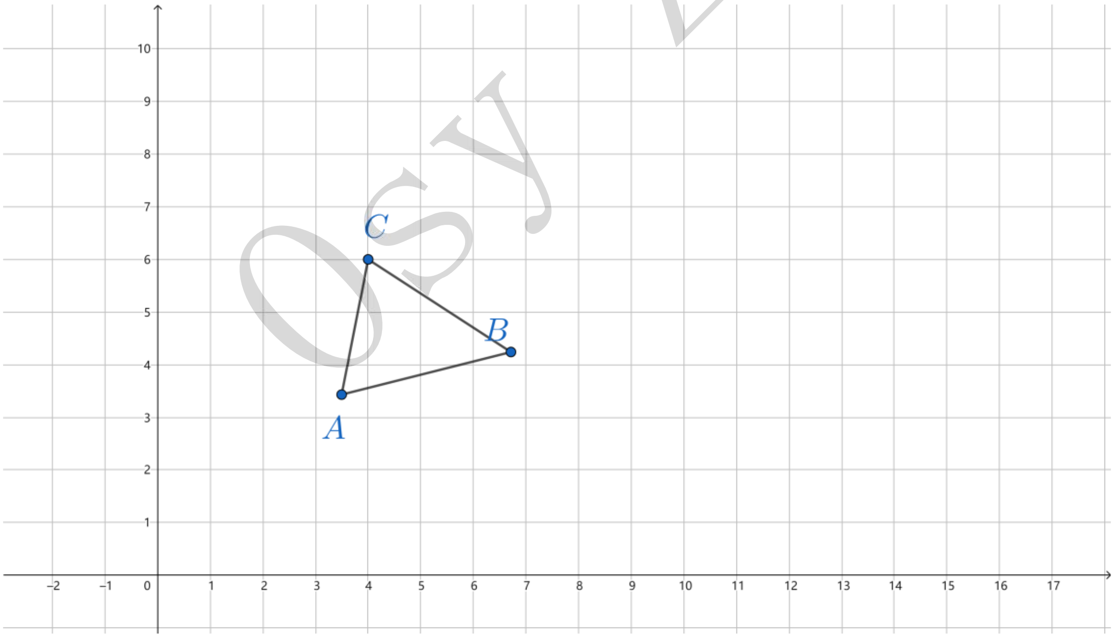
当一条线段的一个端点在格线上时，可以用比倍长线段定理（定理 3.1.3）更简单的方法倍长它。

我们现在要考虑倍长任意线段的方法了。我们来看图：

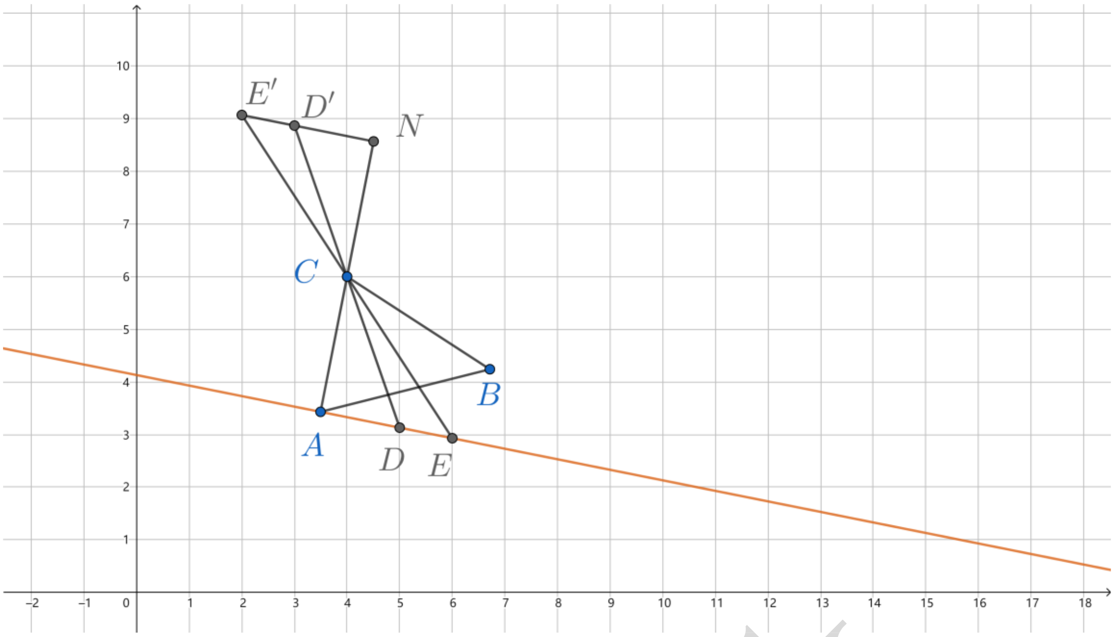


如图，A，B 为任意点，请在直线 AB 上取点 M 使得 $AB=BM$，其中 A，M 不重合。

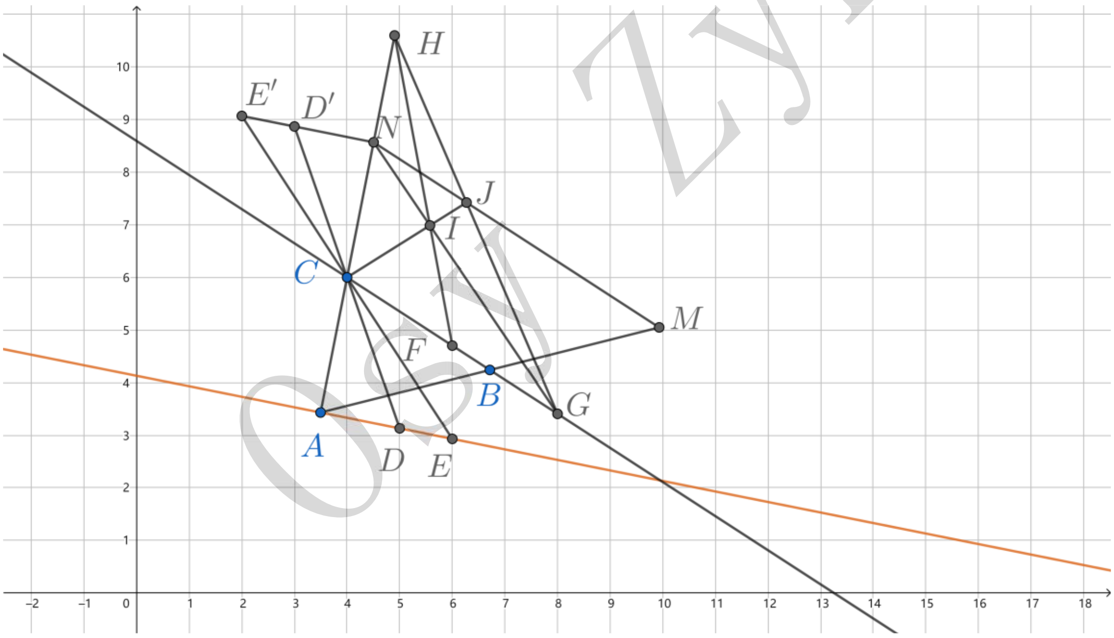
我们需要再次通过构造中位线或相似的方法解决这个问题。



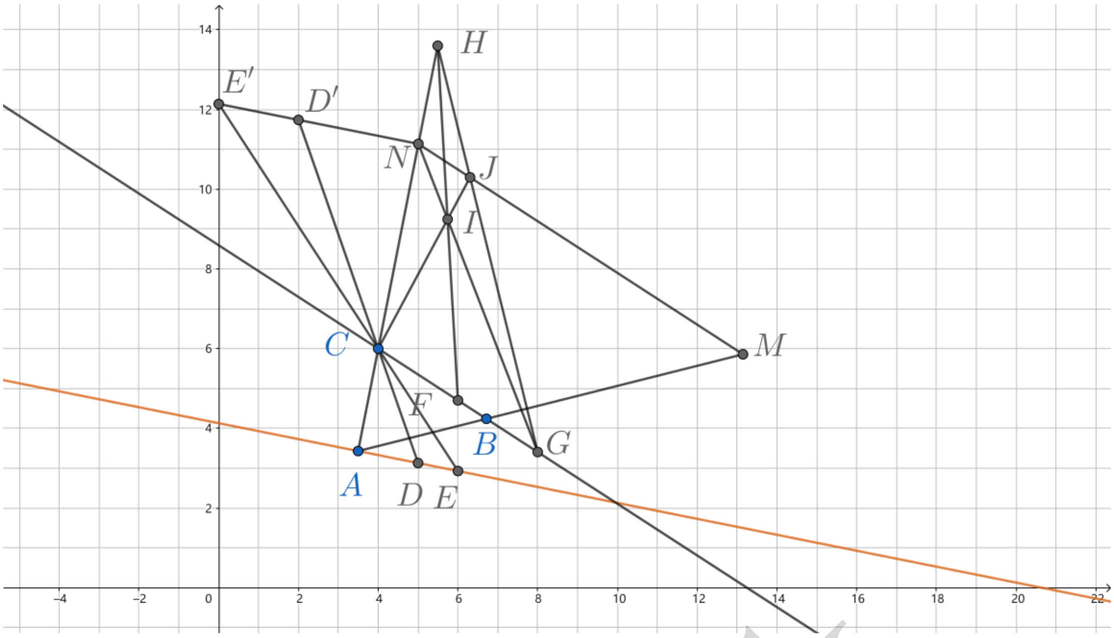
如图，我们选择格点 C，连接 AC、BC。如果我们能把 AC 倍长至 N，再过 N 作 BC 的平行线交射线 AB 于 M，M 即为所求。我们可以来尝试一下。



如图，我们把 AC 倍长到了 N。下面我们要过 N 作 BC 的平行线。



如图，M 即为所求。需要注意的是，广义 Wyc 倍长线段的图特别容易作乱，画图者需要在倍长线段 AC 这一步选择合适的点 D 和点 E。广义 Wyc 倍长线段定理显然可以推广至倍长三倍或四倍以及其它的倍数，下面给出了倍长至原线段三倍的图：



广义 Wyc 倍长线段定理 Wyc's Generalized Segment Multiplication Theorem（定理 3.7）

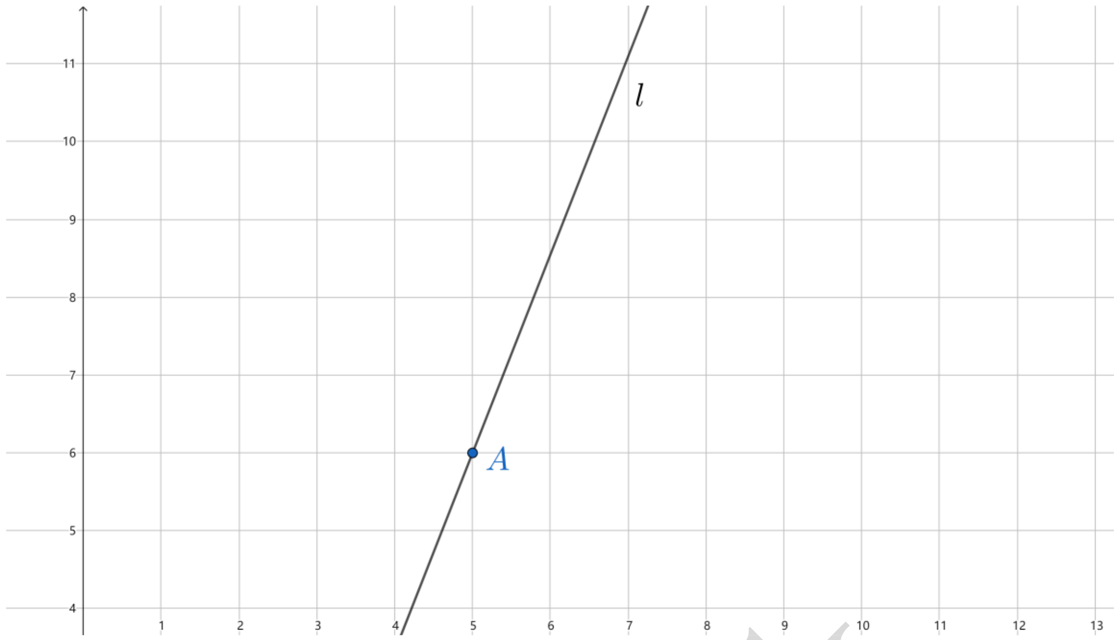
【提出者】翟悦凯（非王宇辰本人提出）

对于任意线段，可以用比倍长线段定理（定理 3.1.3）更简单的方法倍长它。

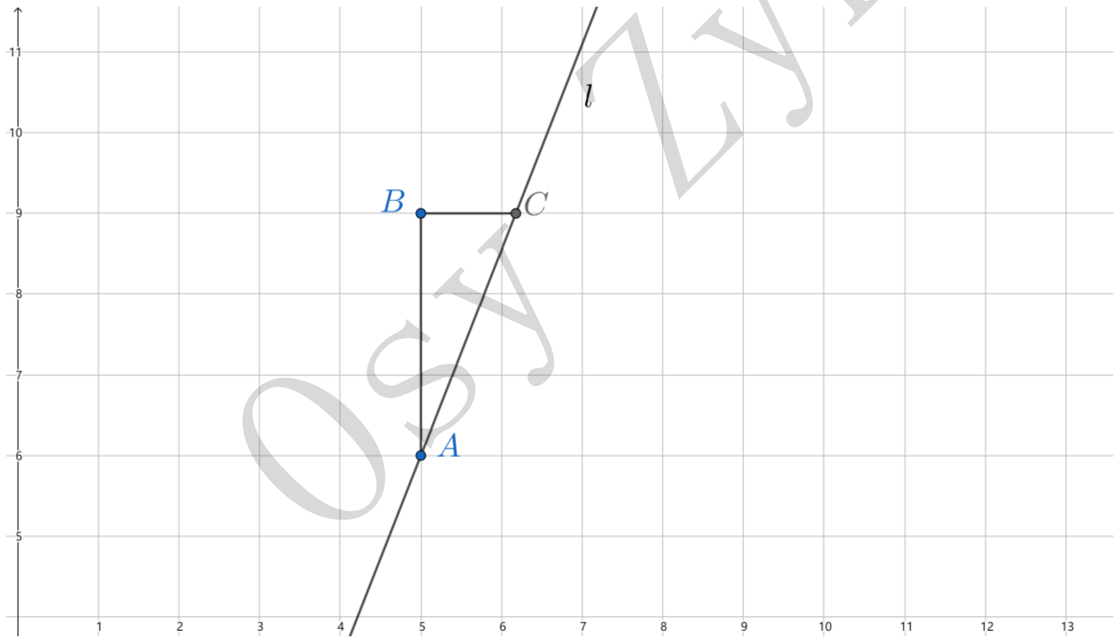
3. 垂直与对称

Zyk 垂直定理

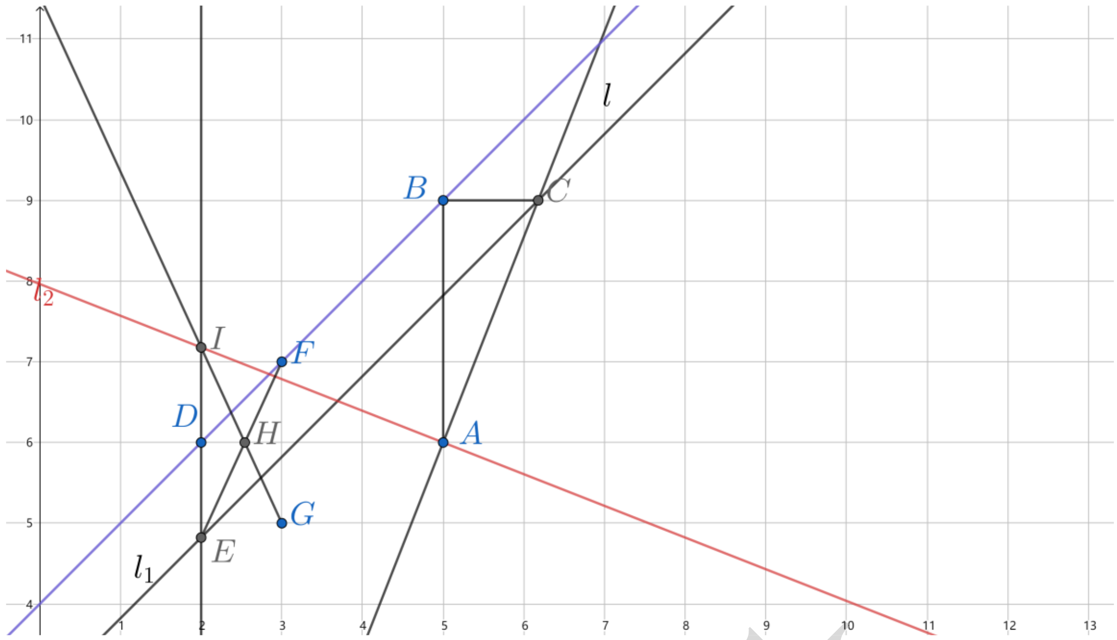
当直线 l 过格点 A 时，Zyk 垂直定理可以帮助我们作出过 A 且垂直于 l 的直线。



如图，l 过 A，A 是格点。过 A 作 $l_2 \perp l$。



如图，我们取格点 B 和直线与水平格线的交点 C。如果我们可以把 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 90°，问题就可以得到解决。我们具体这样做：



去格点 D，连接 BD。过 C 作 $l_1 \parallel BD$ 交 D 所在的竖直格线于 E。作 E 关于 D 所在水平格线的对称点 I，连接 AI，AI 即为所求。

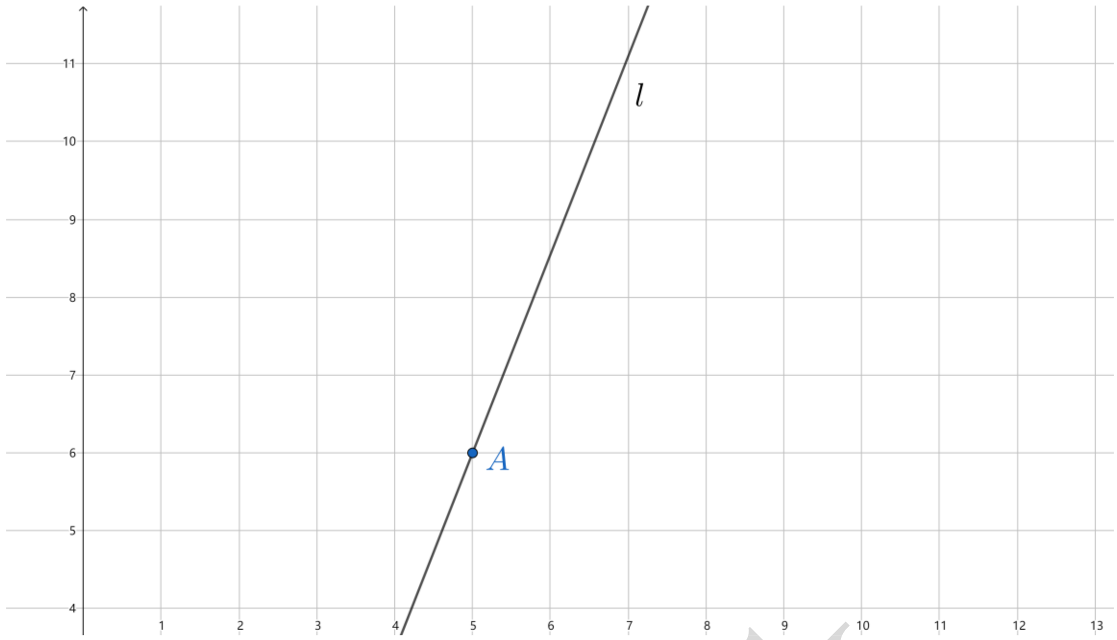
Zyk 垂直定理 Zyk's Vertical Theorem（定理 3.8）

【提出者】翟悦凯

如果一直线过一格点，那么我们可以过这个格点作这条直线的垂线。

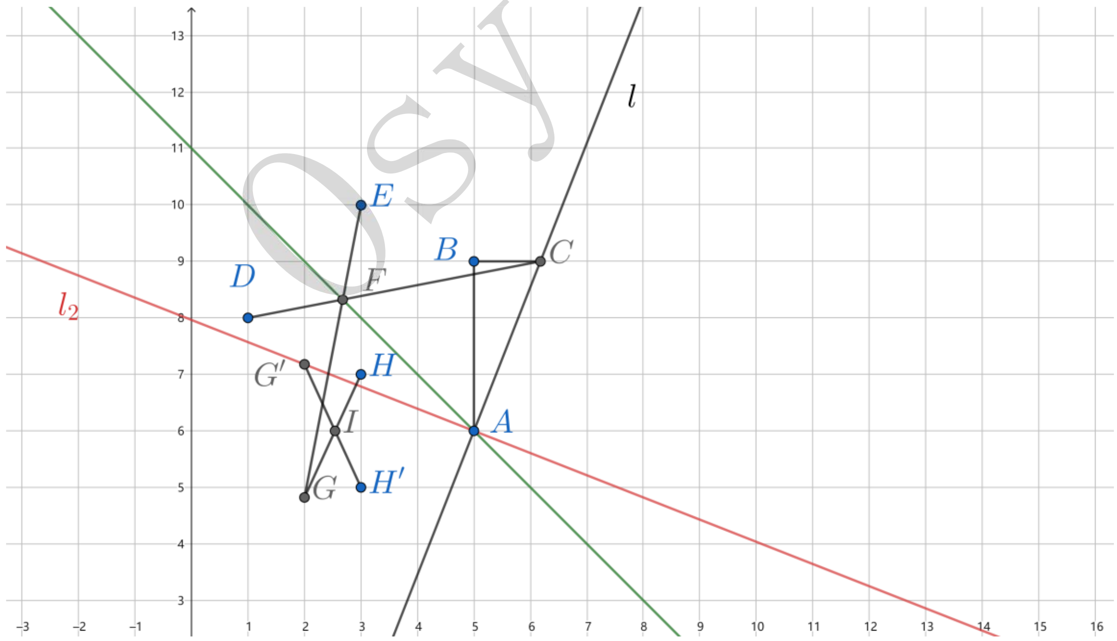
Hmy 垂直定理

当直线 l 过格点 A 时，Hmy 垂直定理可以用更简单的方法帮助我们作出过 A 且垂直于 l 的直线。



如图，l 过 A，A 是格点。请过 A 作 $l_2 \perp l$。

在 Zyk 垂直定理（定理 3.8）中，我们通过平行+对称的方式得到了 C 逆时针旋转 $90°$ 后的点；而在这里我们可以通过两个对称的方法得到它。先做 C 关于网格对角线的对称点 G，再作 G 关于水平格线的对称点 G'。



Hmy 垂直定理 Hmy's Vertical Theorem（定理 3.9）

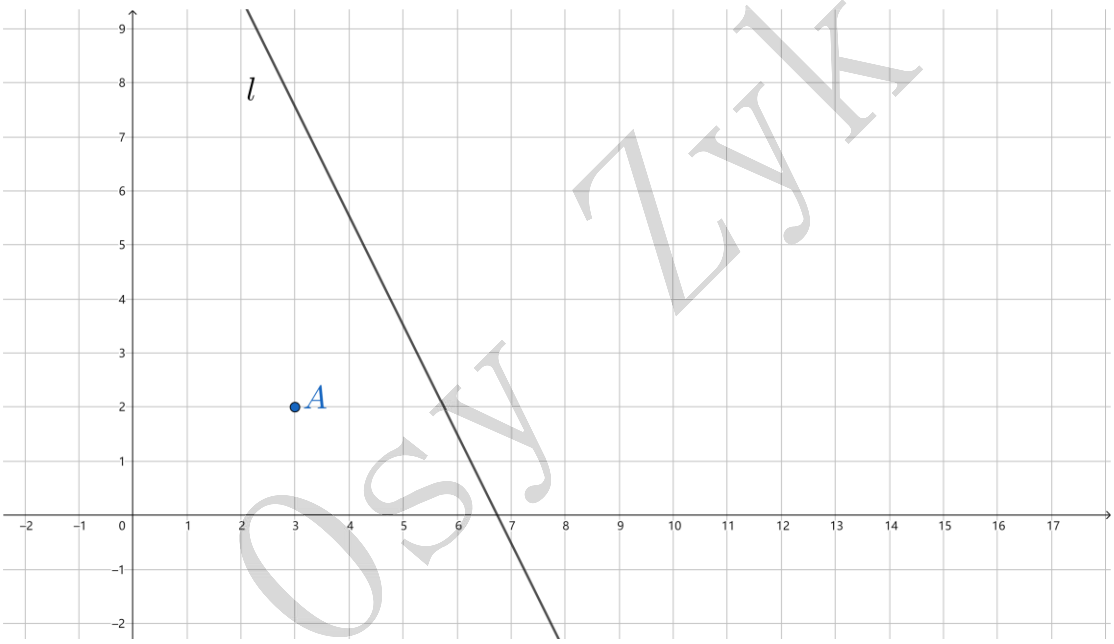
【**提出者**】郝铭扬

如果一直线过一格点，那么我们可以过这个格点作这条直线的垂线。

Osy 垂直定理

Osy 垂直定理解决了过任意格点作任意直线垂线的问题，其中格点不在直线上。

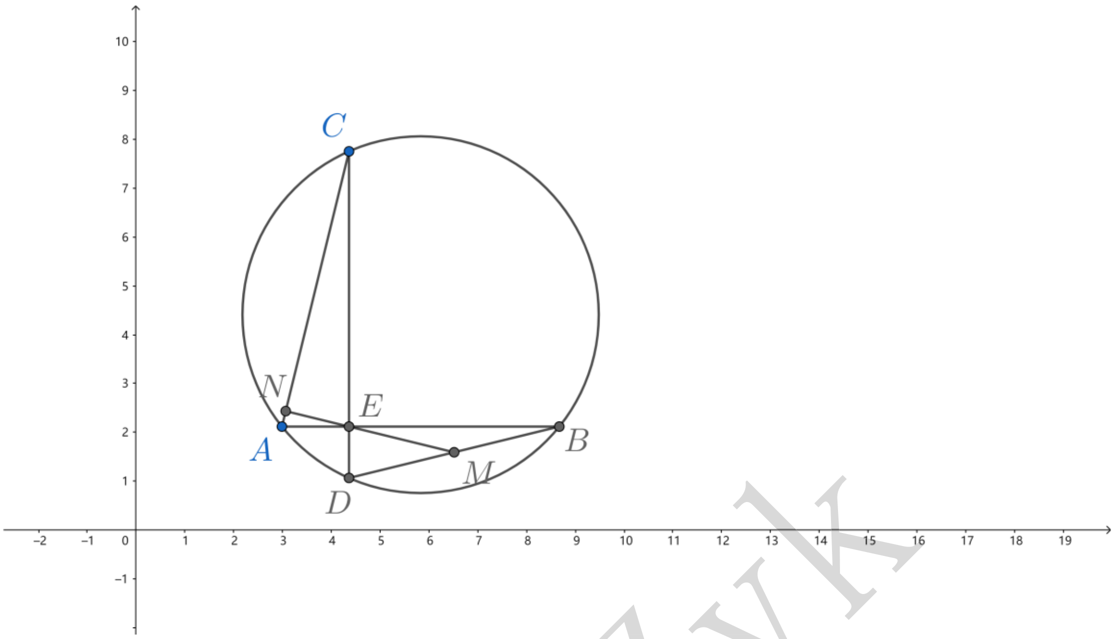
我们来看一下图：



如图，A 是格点，l 是任意直线，请作 $l_2 \perp l$。

在开始解决这个问题之前，我们先介绍一个几何定理：婆罗摩笈多定理。

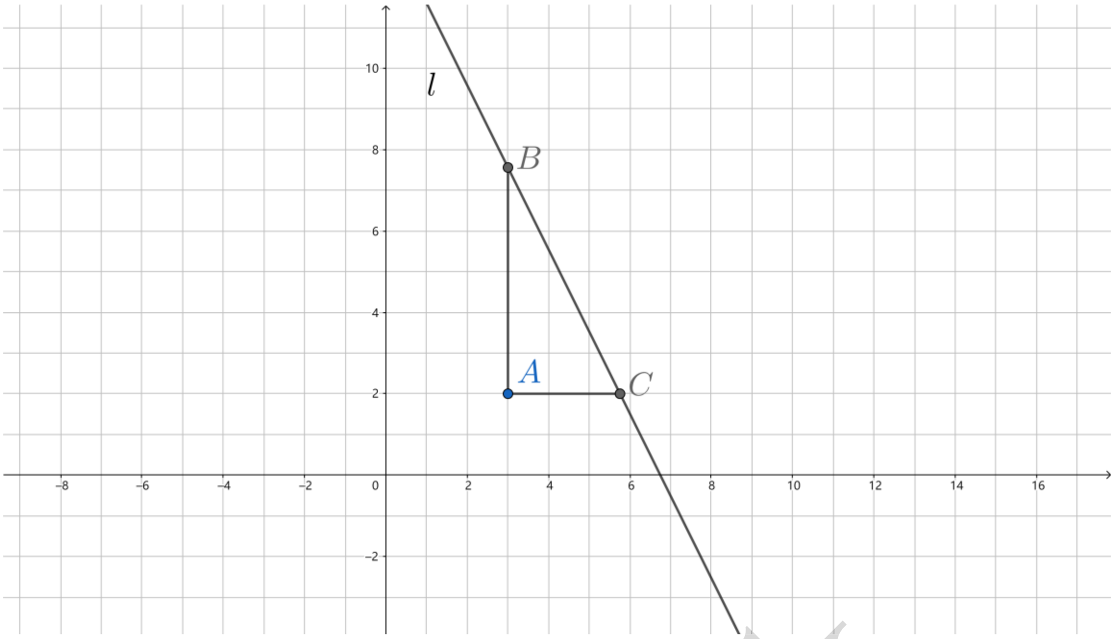
婆罗摩笈多定理 （定理 3.10.1）



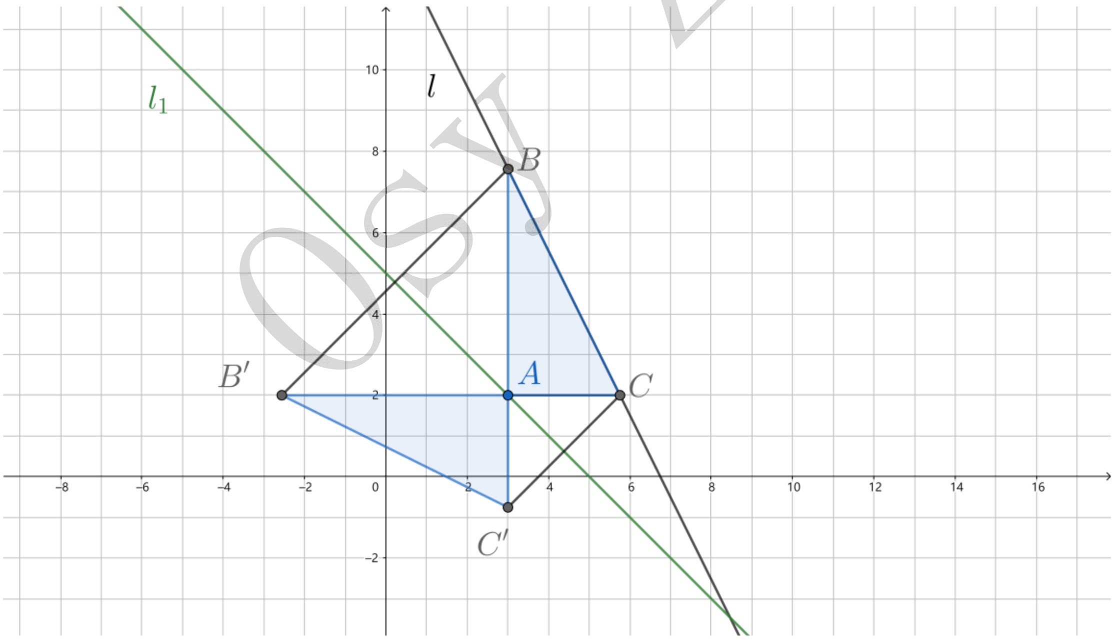
CD，AB 是两条相交且垂直的弦，M 是 BD 中点，连接 ME 并延长交 AC 于 N，则有 $MN \perp AC$。

【证明】因为 $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC}$，所以 $\angle A = \angle D$。因为 M 是 BD 的中点，$\angle BED = 90°$，所以 $MD = ME = MB$，$\angle D = \angle MED = \angle CEN$。所以 $\angle CNE = 90°$，$MN \perp AC$。

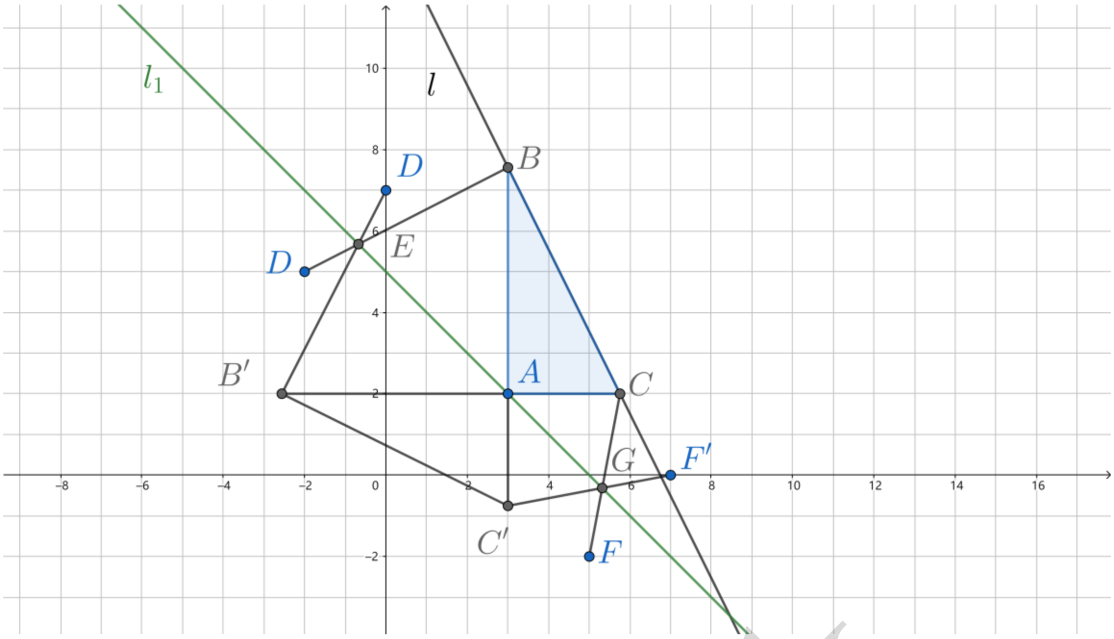
婆罗摩笈多定理可以将垂直转化为中点，而我们又有很多的方法作中点，所以我们可以考虑使用婆罗摩笈多定理解决这个问题。我们先将 l 于过 A 的竖直和水平格线分别交于 B，C。



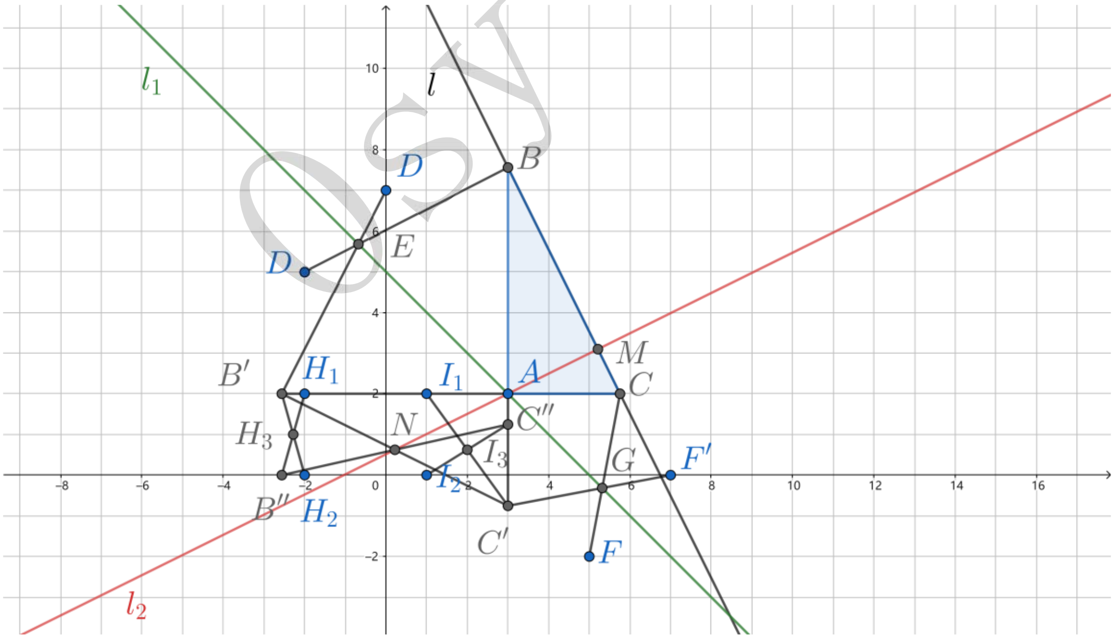
我们可以过 A 做一条网格的对角线（即下图 l_1），并将 $\triangle ABC$ 翻折过去，这样就可以得到一个圆内接四边形（如下图）。因为翻折，所以 $\angle B'C'B = \angle B'CB$，这符合同弧所对圆周角相等的定理，所以 B，C，C'，B' 是四点共圆的。



要做出 B，C 关于 l_1 的对称点并不难，使用 Zyk 垂直定理的推论就可以。



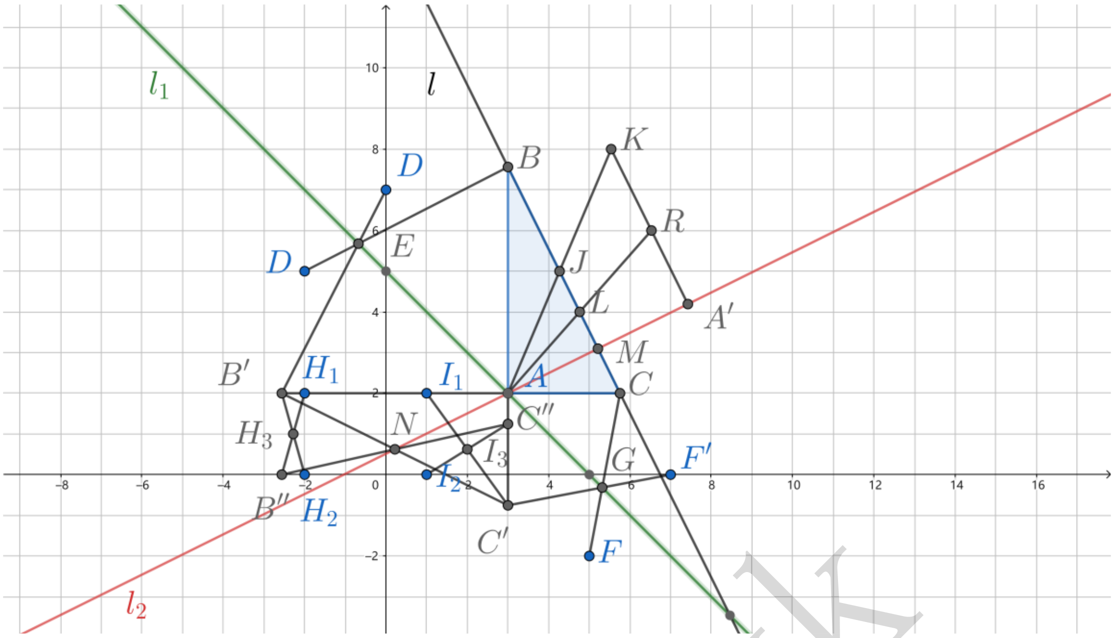
如图，我选了两组对称点（D 和 D'，F 和 F'）做出了 B 和 C 的对称点 B' 和 C'。我们现在只需做出线段 $B'C'$ 的中点 N，再连接 NA 并延长交 BC 于 M，AM 即为所求。想要作出 $B'C'$ 的中点，我们可以使用 Wyc 分线段定理，但是这里我们也可以直接使用朴素平移定理。



如图，我将 B' 向下平移了两个单位，将 C' 向上平移了两个单位。

【拓展】A 关于 l 的对称点也可以通过这个方法做出来——使用 Wyc 倍长线段

定理倍长 AM 即可。下面是我给出的作图。



Osy 垂直定理 Osy's Vertical Theorem（定理 3.10）

【提出者】欧思远

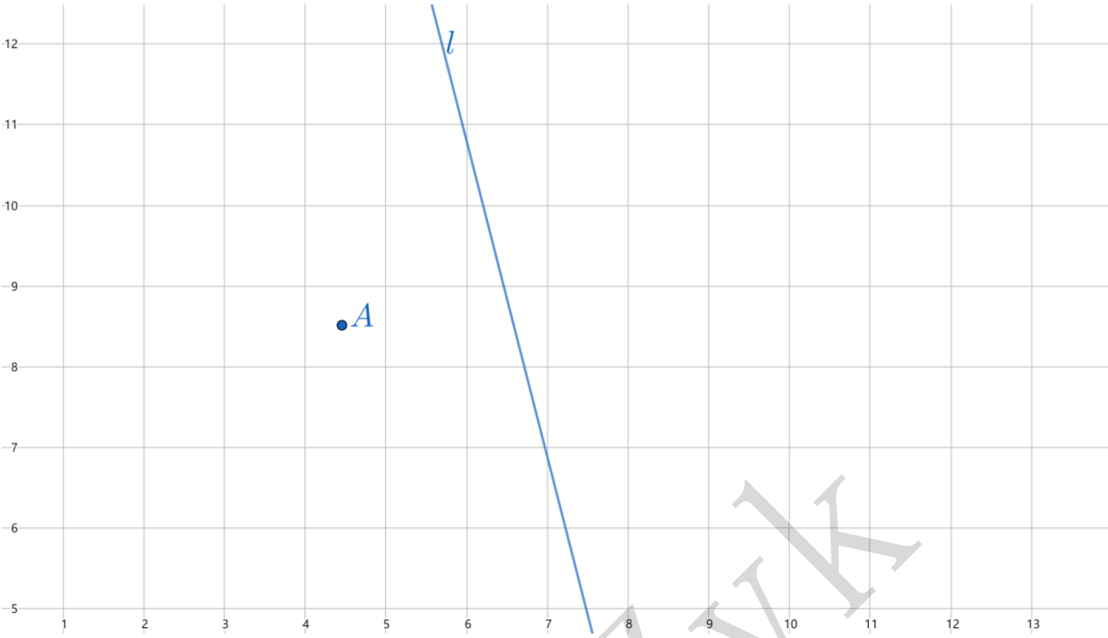
可以过任意一格点作任意一条直线的垂线，也可以作这个格点关于这条直线的对称点。

以上三个垂直定理都要求直线非水平或竖直。当直线为水平或竖直时，只需要使用 Zyk 基本对称定理的推论平移定理将点平移即可。

任意垂直和任意对称

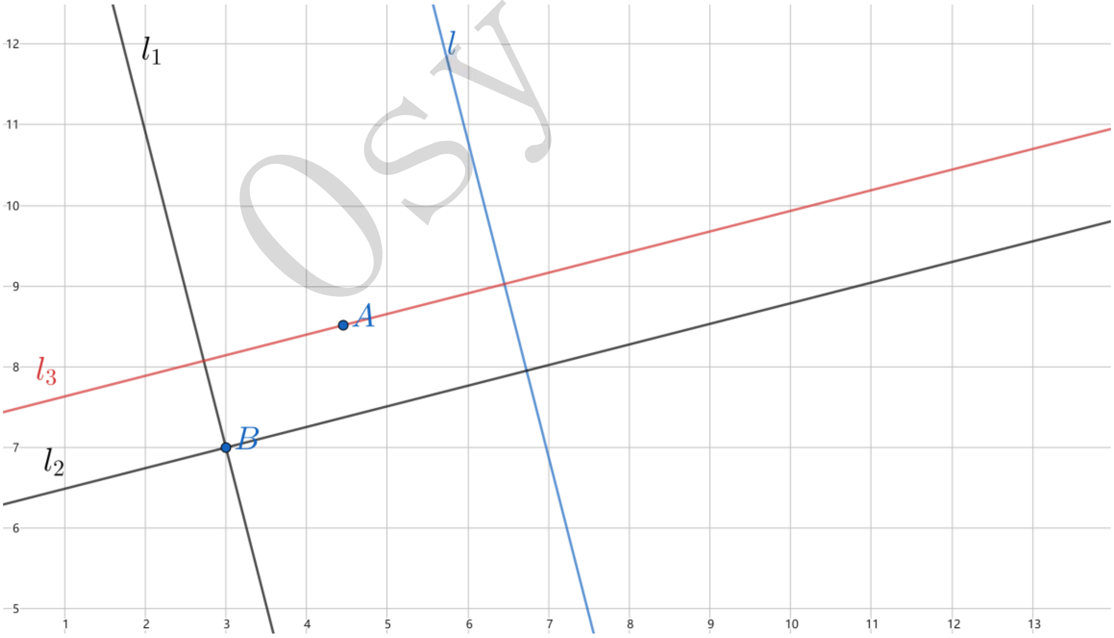
有了这两个定理，我们就可以过任意点作任意直线的垂线了。

任意垂直定理 Arbitrary Vertical Theorem（定理 3.11）



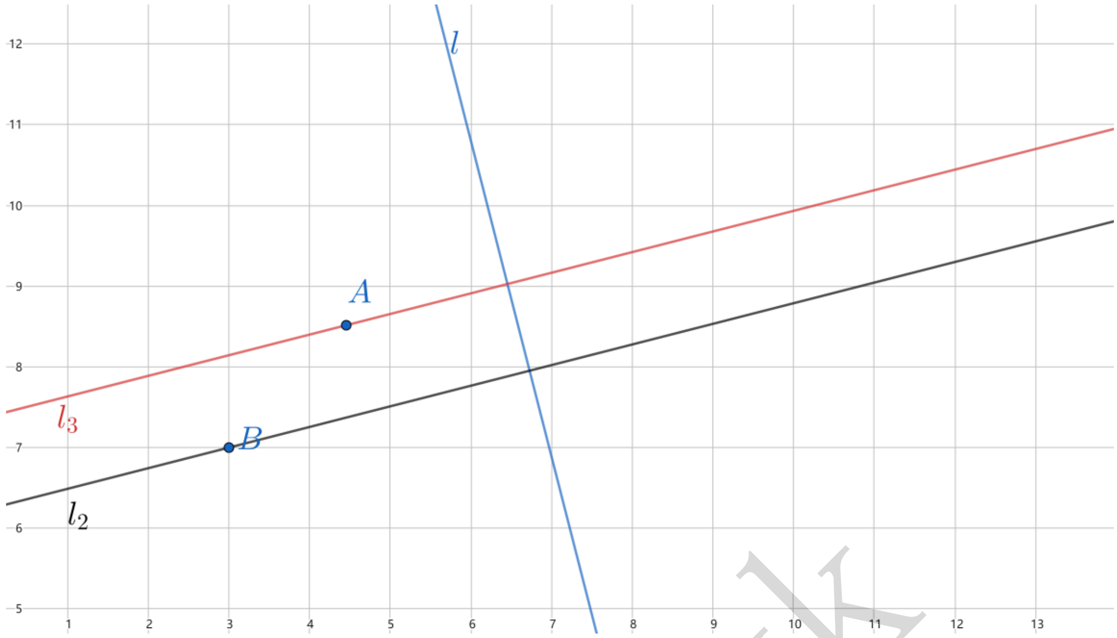
可以过任意一点 A 作任意一条直线 l 的垂线。我们有两种做法：

做法 1：利用 Zyk 垂直定理（定理 3.8）或 Hmy 垂直定理（定理 3.9）



如图，选择格点 B，过 B 作 $l_1 \parallel l$，利用 Zyk 垂直定理（定理 3.8）或 Hmy 垂直定理（定理 3.9）过 B 作 $l_2 \perp l_1$，过 A 作 $l_3 \parallel l_2$，l_3 即为所求。

做法 2：利用 0sy 垂直定理（定理 3.10）



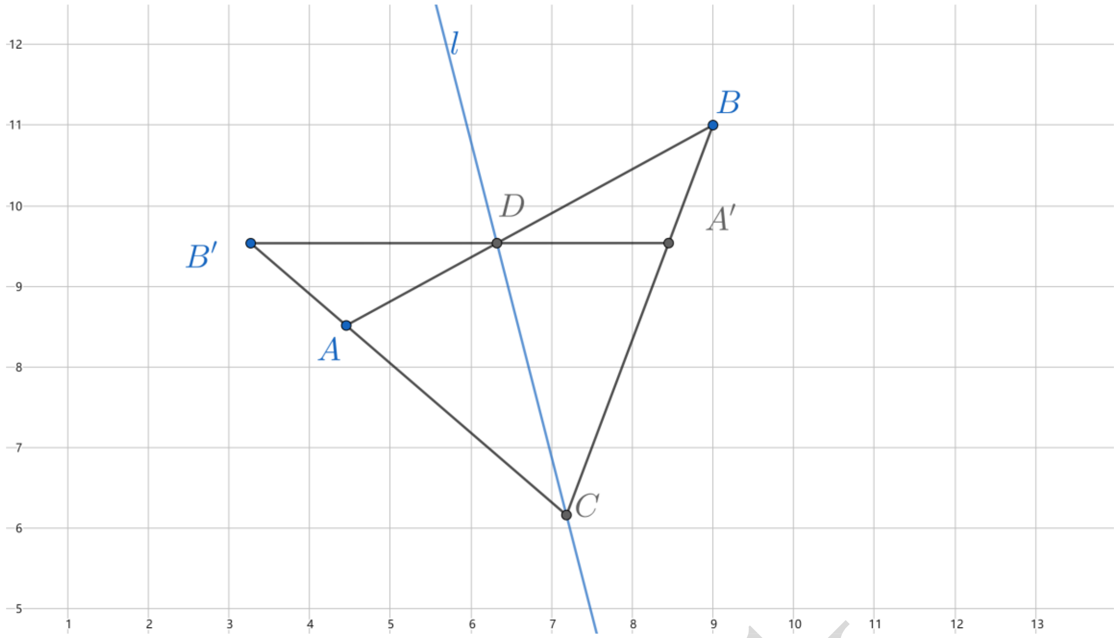
如图，选择格点 B，利用 0sy 垂直定理（定理 3.10）过 B 作 $l_2 \perp l$，过 A 作 $l_3 \parallel l_2$，l_3 即为所求。

我们甚至可以作任意点关于任意直线的对称点。

任意对称定理 Arbitrary Symmetry Theorem（定理 3.12）

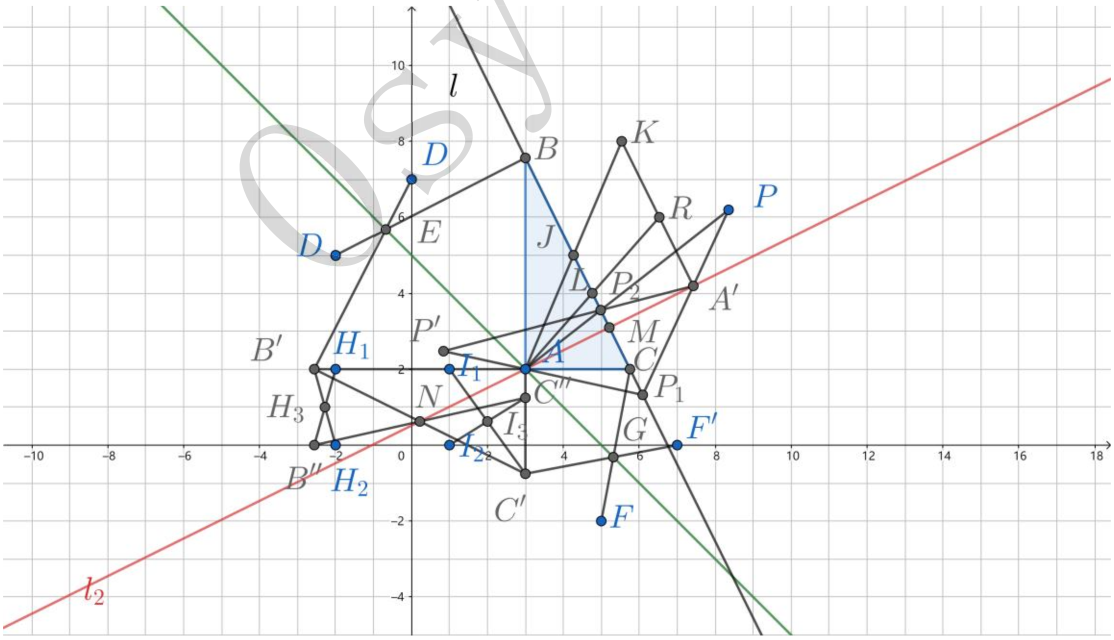
【提出者】郝铭扬

可以作任意点关于任意直线的对称点。作图如下：



如图，在直线的另一侧选取合适的格点 B，利用 Osy 垂直定理（定理 3.10）的拓展做出 B 关于 l 的对称点 B'，连 $B'A$ 并延长交 l 于 C，连 BC。连 AB 交 l 于 D，连 $B'D$ 并延长交 BC 于 A'。A' 即为所求。

我们来看一看作任意点关于任意直线对称的完整作图：



其中，任意点为 P，任意直线为 l ，对称点为 P'。我们终于解决了这一看似完

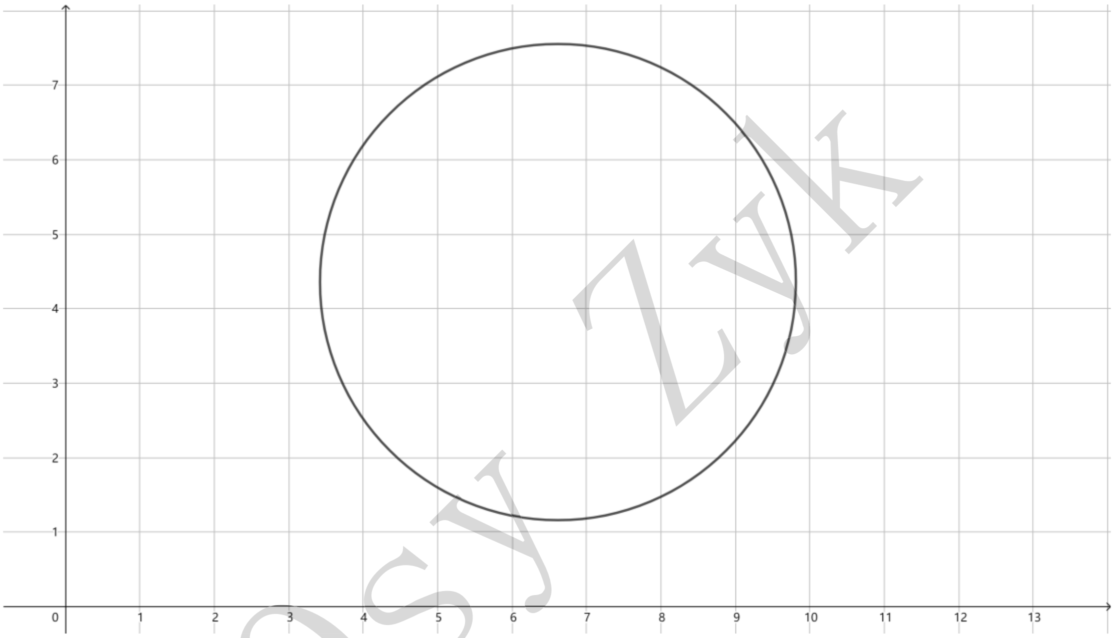
全不可能的难题。

第四章 涉及圆的任意点作图

1. 基本定理

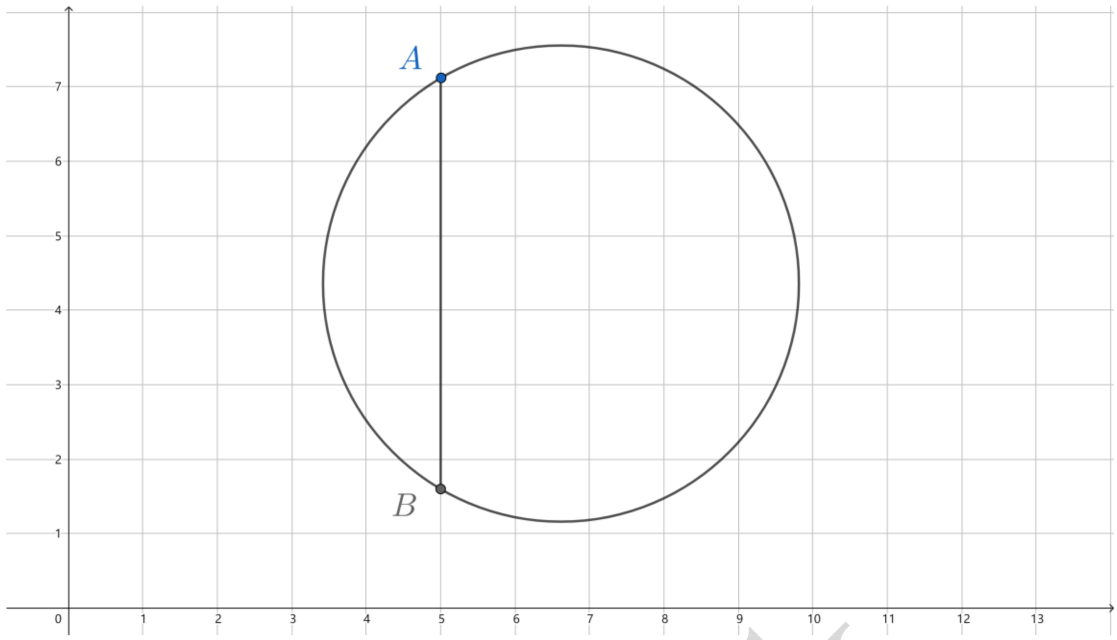
作圆心

讨论到圆，我们想到的第一件事情当然是尝试做任意圆的圆心。

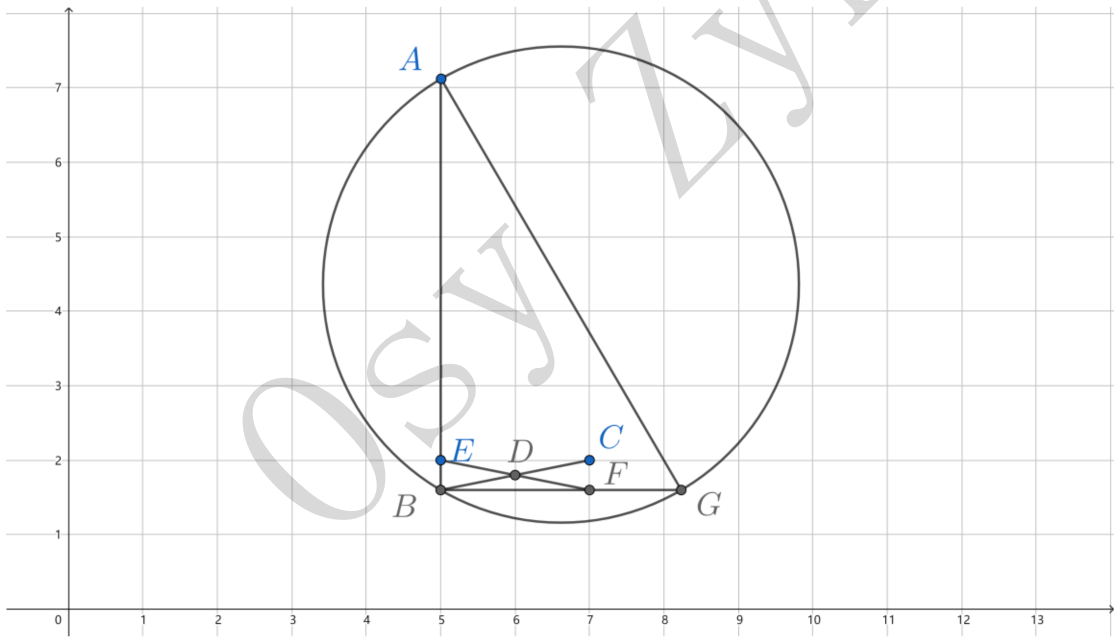


如图，平面内有一圆，请做出它的圆心。

Osy 提出了第一种做法。在第二章中我们介绍到当圆过一个格点的时候，我们可以利用网格构造两条直径来解决问题，现在当我们推广到任意圆时仍然可以尝试构造直径。我们看这条弦：

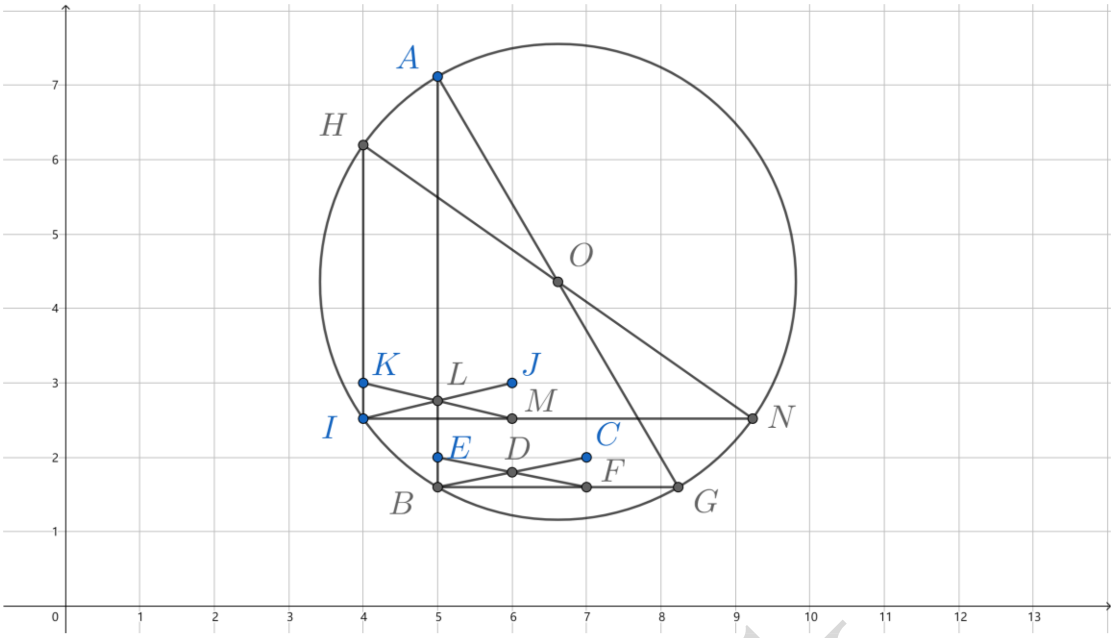


我们可以画出垂直于它的另一条弦，利用朴素平移定理（定理 3.3）来做：



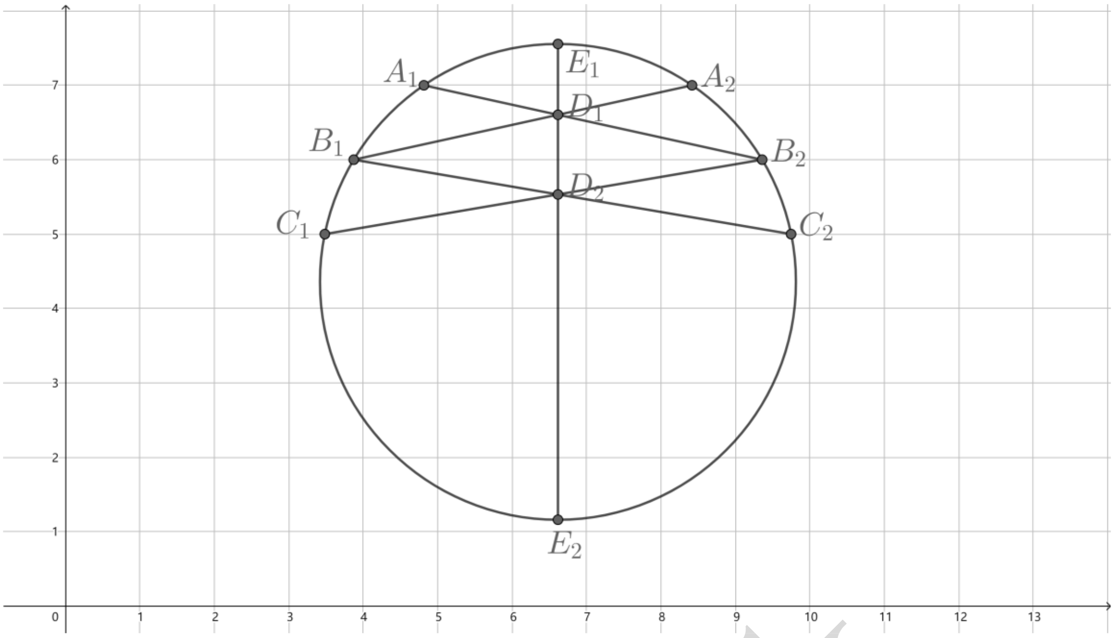
如图，取格点 C，E，连接 BC 交竖直格线于 D，连接 ED 并延长交竖直格线于 F。可以看出，B 向右平移两个单位长度就是 F。连接 BF 并延长交圆于 G，连接 AG，可以看出 $\angle ABG = 90°$，AG 是圆的一条直径。

我们再用同样的方法做出一条直径，问题也就解决了。下面我直接省略作图语句了。



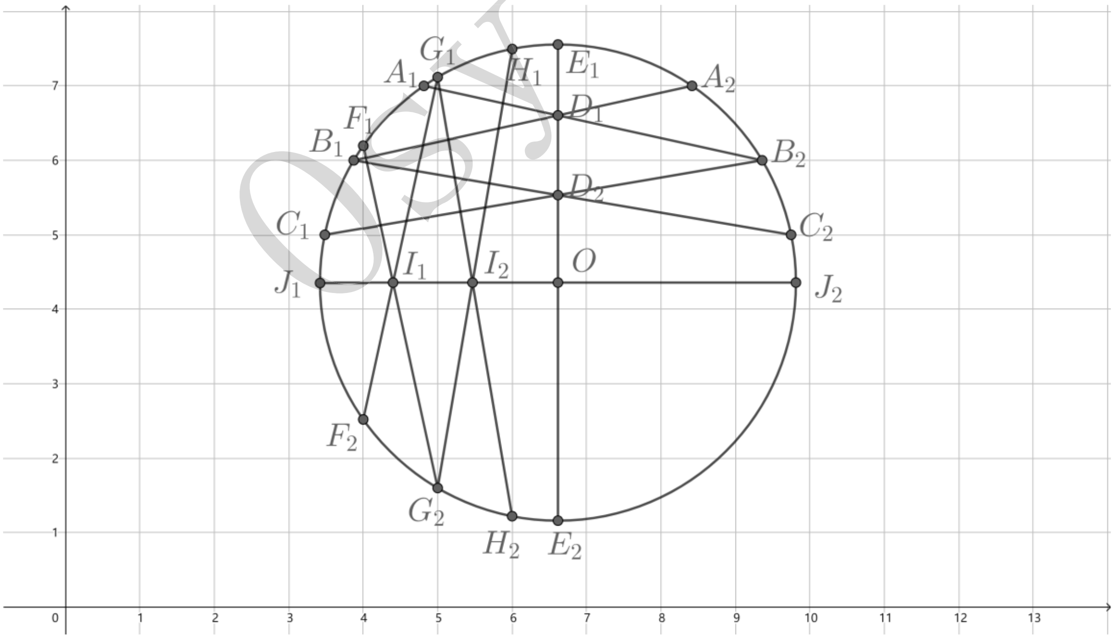
读者需要注意，如果这个圆比较小的话，可以在格线之间插入二分之一格线，就像下面这样：

Zyk 提出了第二种方法。我们可以利用圆的对称性来作直径。



如图，选择圆与水平格线的交点 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2，连接 A_1B_2、A_2B_1 交于 D_1；连接 B_1C_2、B_2C_1 交于 D_2。连接 D_1D_2，直线 D_1D_2 即为圆的一条直径所在直线。

接下来，我们再用相同的方法做出圆的另一条直径。



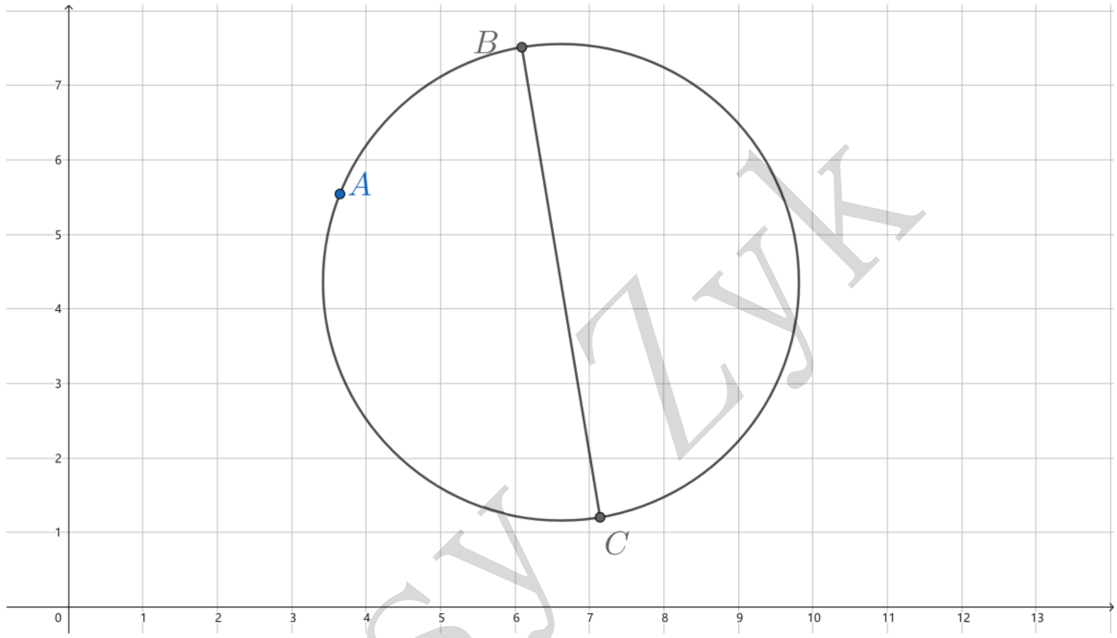
可以看出，方法二比方法一稍微复杂一些，但是方法二做出的两条直径比较特殊：它们分别是竖直的直径和水平的直径。

圆心定理 Circle Center Theorem （定理 4.1）

可以做网格内任意一圆的圆心。

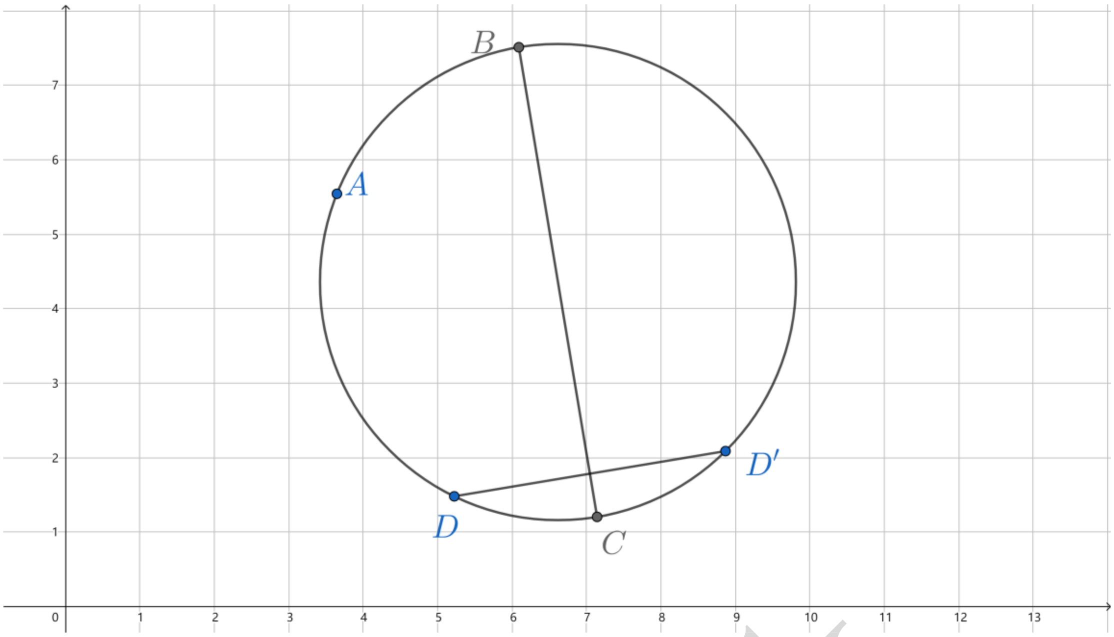
圆上点对称

我们接下来考虑另一个问题：如何作圆上一点关于一条直径的对称点？

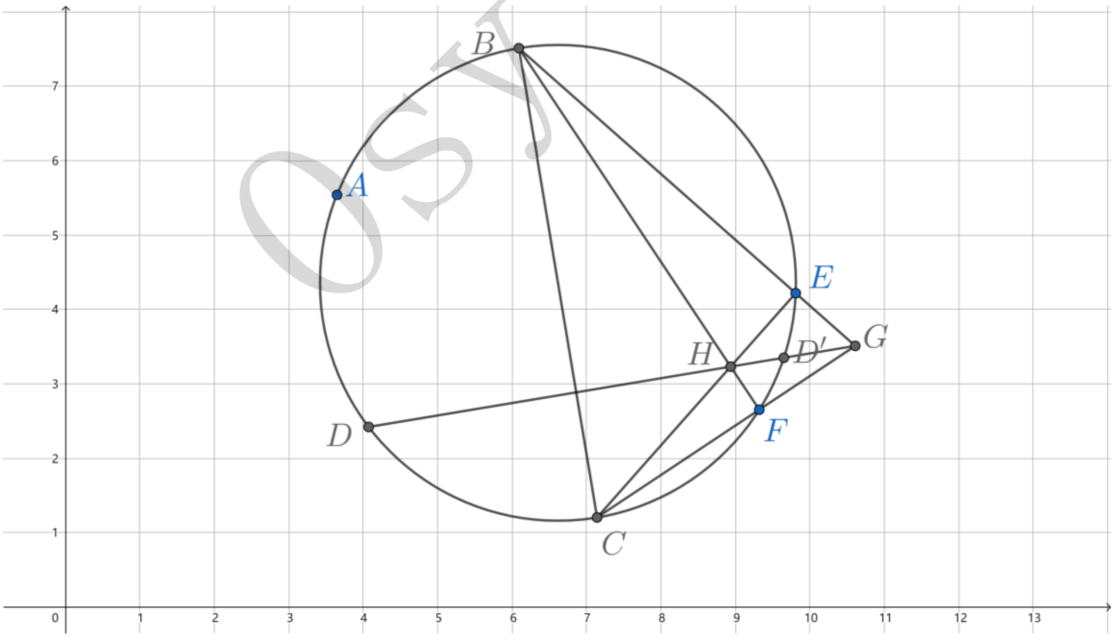


如图，A 在圆上，BC 是圆的一条直径，作 A 关于 BC 的对称点。

根据圆的对称性可知，对称点一定也在圆上。我们看下面这张图：

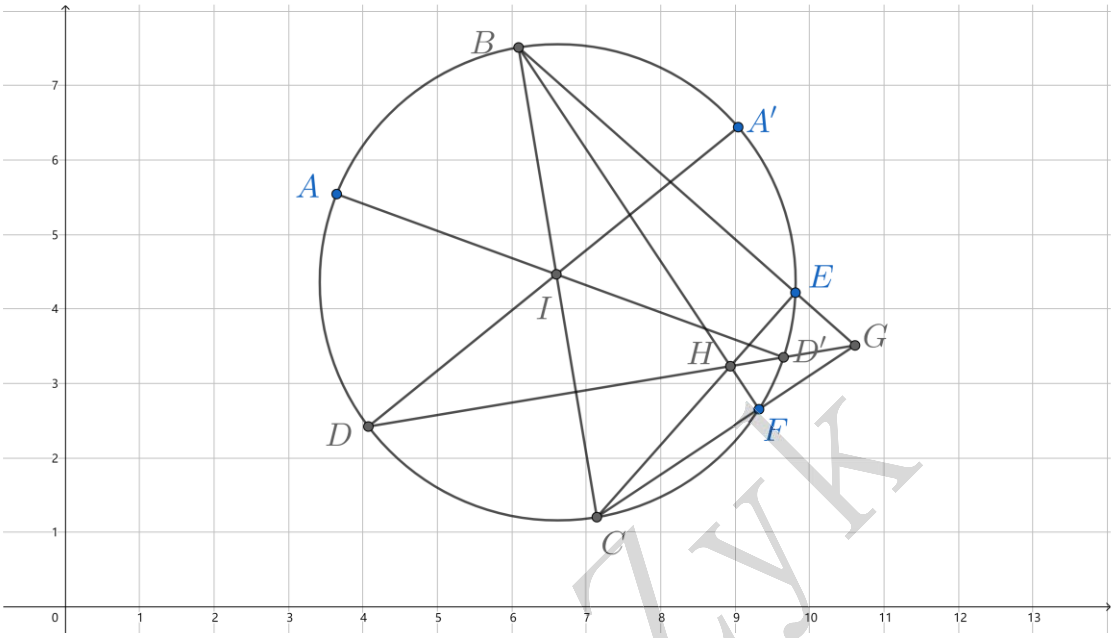


如果我们能找到一对对称点 D 和 D'，那么我们就可以结合 Zyk 基本对称定理（定理 3.1）来做出 A 的对称点。问题转化为如何找到一组对称点 D 和 D'。根据对称性可知，$DD' \perp BC$，我们只需要做出一个垂直就可以了。Zyk 给出了一个非常巧妙的方法：



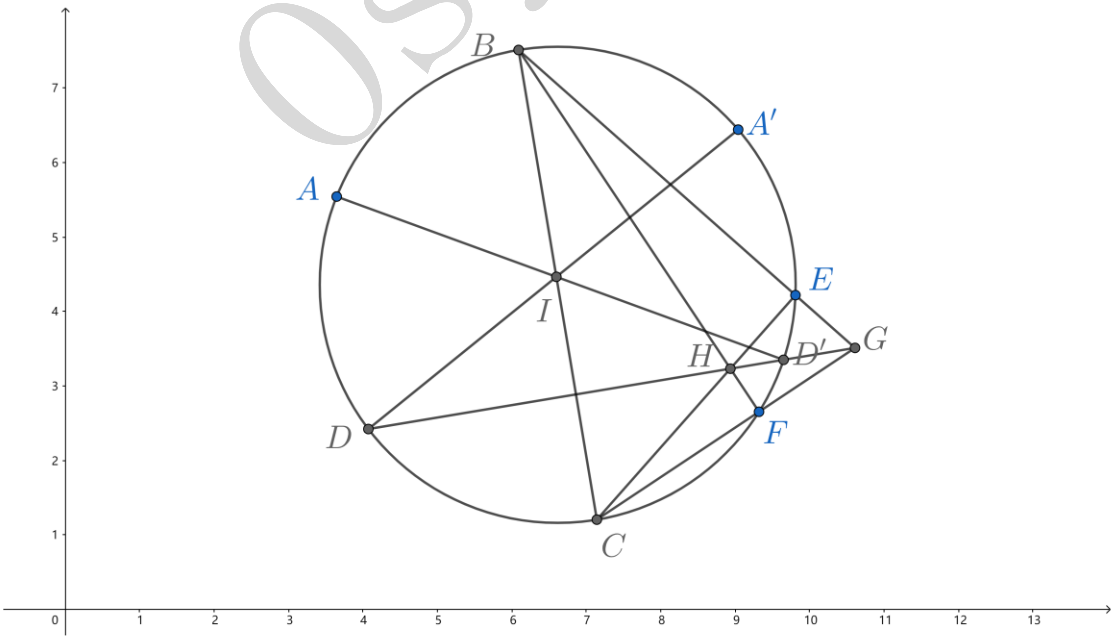
如图，在圆上任选两个合适的点 E，F，连接 BF、CE 交于 H，连接 BE、CF 并延长交于 G。连接 GH 并延长交圆于两点 D、D'。$DD' \perp BC$。

证明这个做法的正确性并不难。因为 BC 是直径，所以 $\angle BEC = \angle BFC = 90°$，可以看出 H 是 $\triangle BCG$ 的垂心。根据三角形三条高线交于同一点，我们可以得出 GD 也是三角形的垂线，所以 $GD \perp BC$。



接下来，我们运用 Zyk 基本对称定理（定理 3.1），连接 AD' 交 BC 于 I，连接 DI 并延长交圆于 A'，A' 即为所求。

重新观察这幅图，当我们把网格撤掉时，这种做法照样能够做出对称点 A'。



圆的作图，让网格作图新添了一抹亮色。接下来我们将介绍更多精彩的定理，它们中的很多都不需要网格。

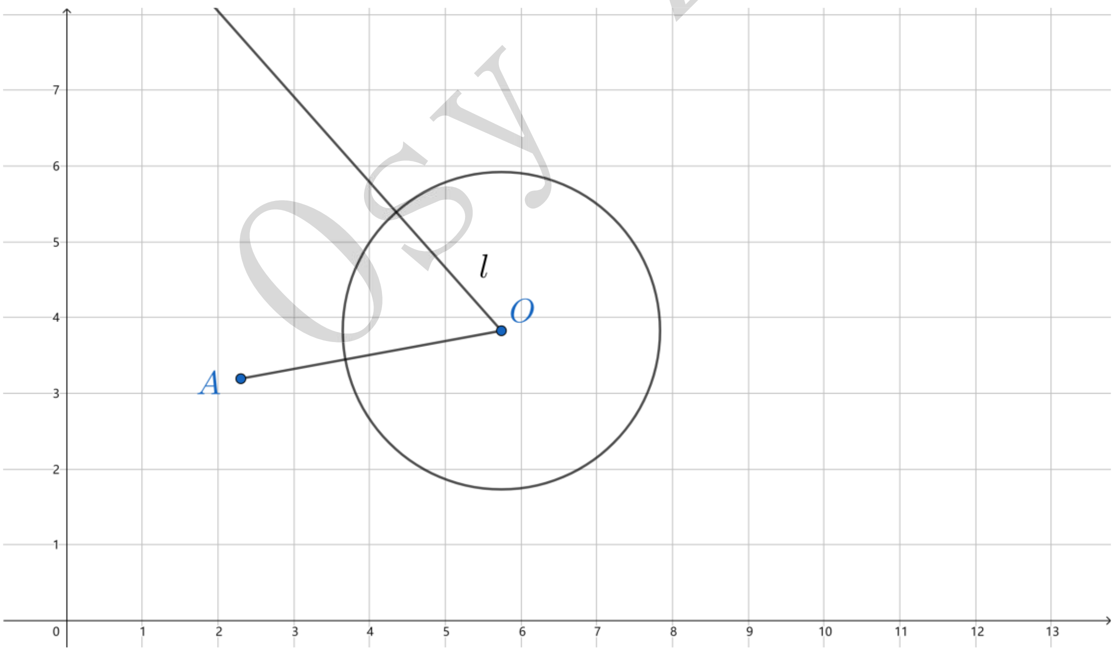
圆上点对称定理 On Circle Point Symmetry Theorem（定理 4.2）

可以做圆上任意一点关于任意一直径的对称点。此做法不需要网格。

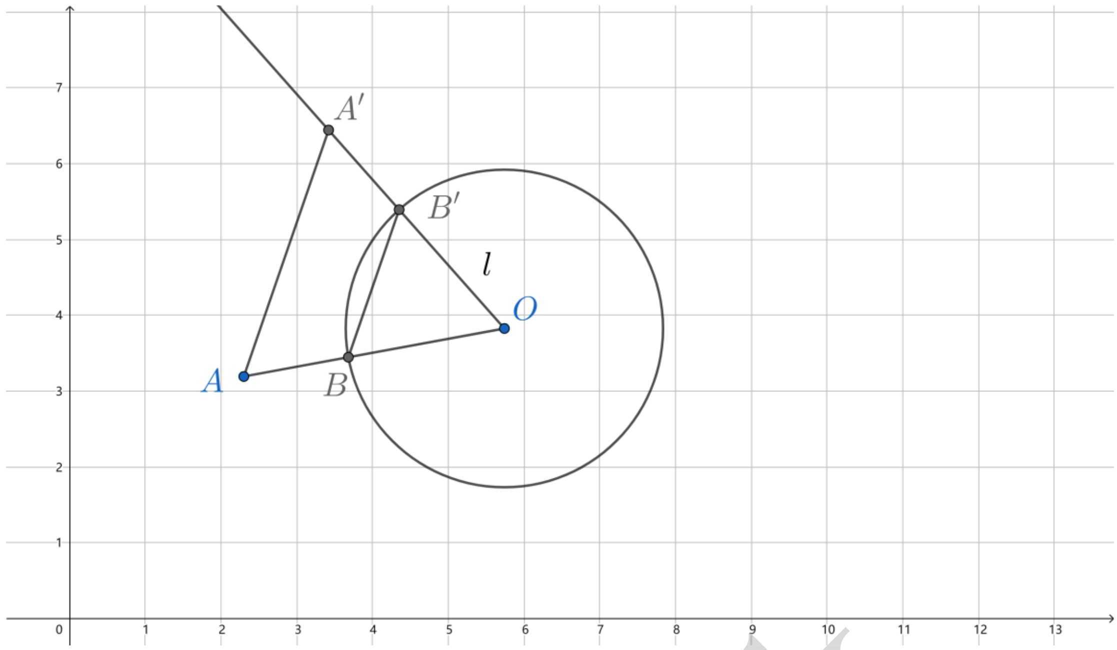
旋转线段

这是一个简单的定理，我们直接介绍做法。

线段旋转定理 Segment Rotation Theorem（定理 4.3）



O 是圆的圆心，我们可以将 A 绕 O 旋转到射线 l 上。做法如下：



令 OA、l 分别与圆交于 B、B'，连接 BB'，使用 Zsq 平行定理作 $AA' \parallel BB'$ 交 l 于 A'。A' 即为所求。该做法的正确性是显然的。

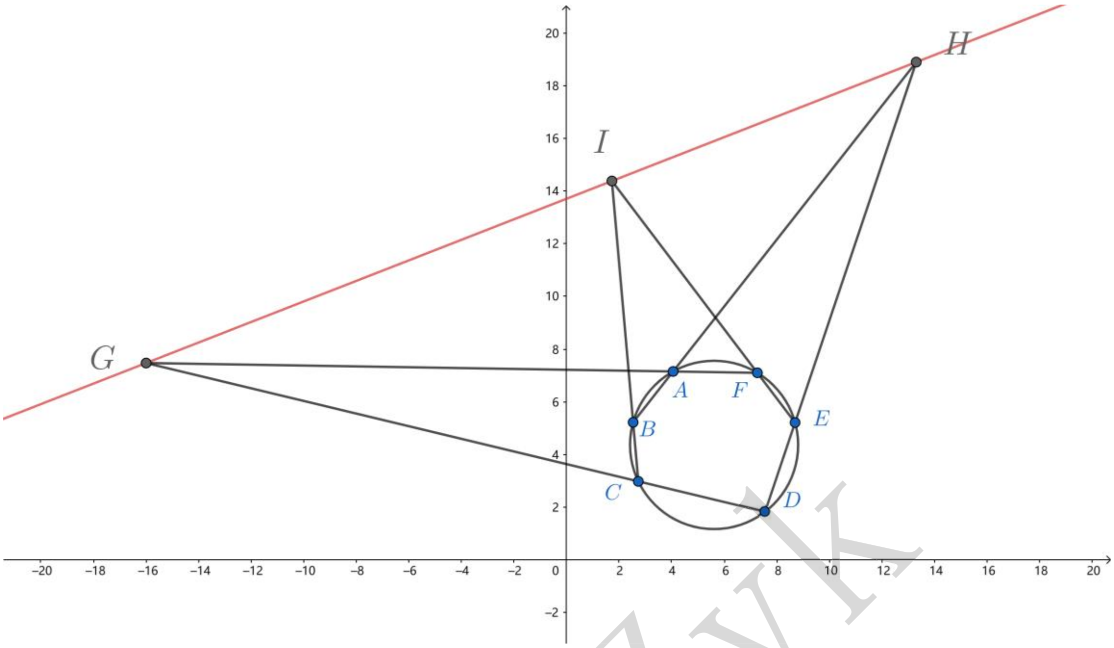
2. 作切线

Cs-Wzl 切线定理

现在要考虑作切线的方法了。其实，我们有比较暴力的方法做切线，但是方法过于复杂，这里不过多讨论。读者可以自行思考。

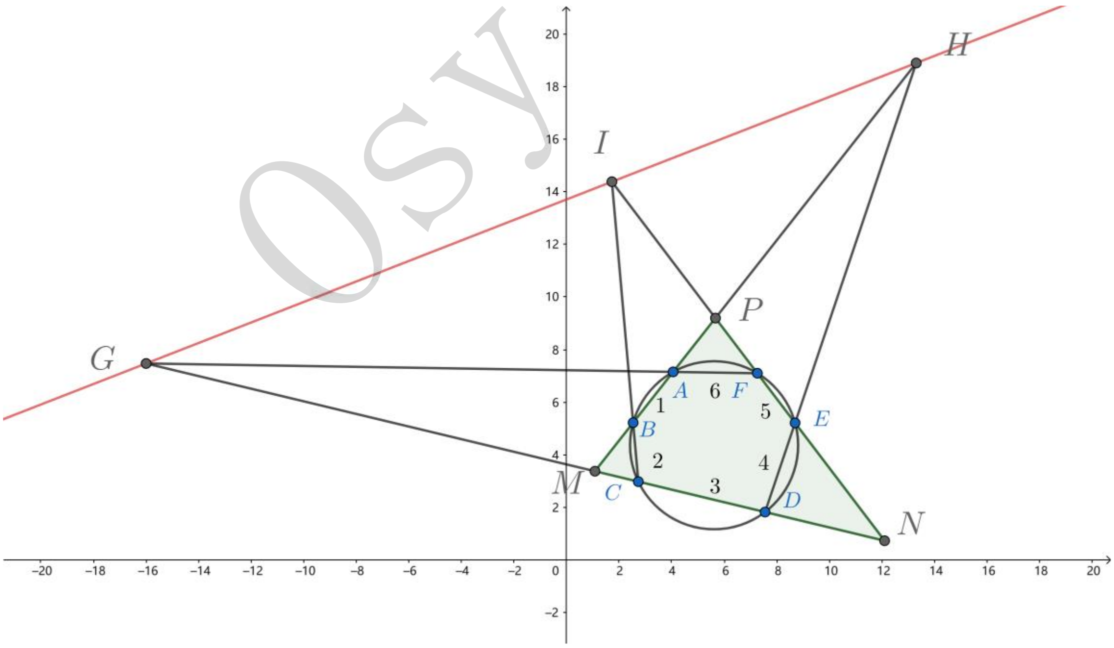
Cs-Wzl 定理给出了一个非常简单的做法，而且不需要网格。在那之前，我们先介绍一个定理：帕斯卡定理。这个“帕斯卡定理”，当然不是物理中“液体可以传递压强”的帕斯卡定理，而是这个人提出的一个数学定理。

帕斯卡定理 Pascal's Theorem （定理 4.4.1）



一个圆内接六边形，三组对边的交点共线。

【证明】这个定理的证明要使用四次梅涅劳斯定理。见下图：



为了叙述方便，我们逆时针把线段 AB、BC、CD、DE、EF、FA 标号为 1、2、3、4、5、6。我们关注 1、3、5 号线段所在直线围成的三角形 $\triangle MNP$，把它作

为梅氏三角形，分别以 2、4、6 号线段作为梅氏线，应用梅涅劳斯定理。我们可以得到：

$$\frac{MB}{BP}\cdot\frac{PI}{IN}\cdot\frac{NC}{CM}=1$$
$$\frac{ND}{DM}\cdot\frac{MH}{HP}\cdot\frac{PE}{EN}=1$$
$$\frac{PF}{FN}\cdot\frac{NG}{GM}\cdot\frac{MA}{AP}=1$$

把这三个式子相乘，得到：

$$\frac{MB}{BP}\cdot\frac{PI}{IN}\cdot\frac{NC}{CM}\cdot\frac{ND}{DM}\cdot\frac{MH}{HP}\cdot\frac{PE}{EN}\cdot\frac{PF}{FN}\cdot\frac{NG}{GM}\cdot\frac{MA}{AP}=1$$

然后对 M、N、P 三点各运用一次割线定理（定理 2.7），得到：

$$MB\cdot MA=MC\cdot MD$$

$$ND\cdot NC=NE\cdot NF$$

$$PA\cdot PB=PF\cdot PE$$

应用三个割线定理的式子消项：

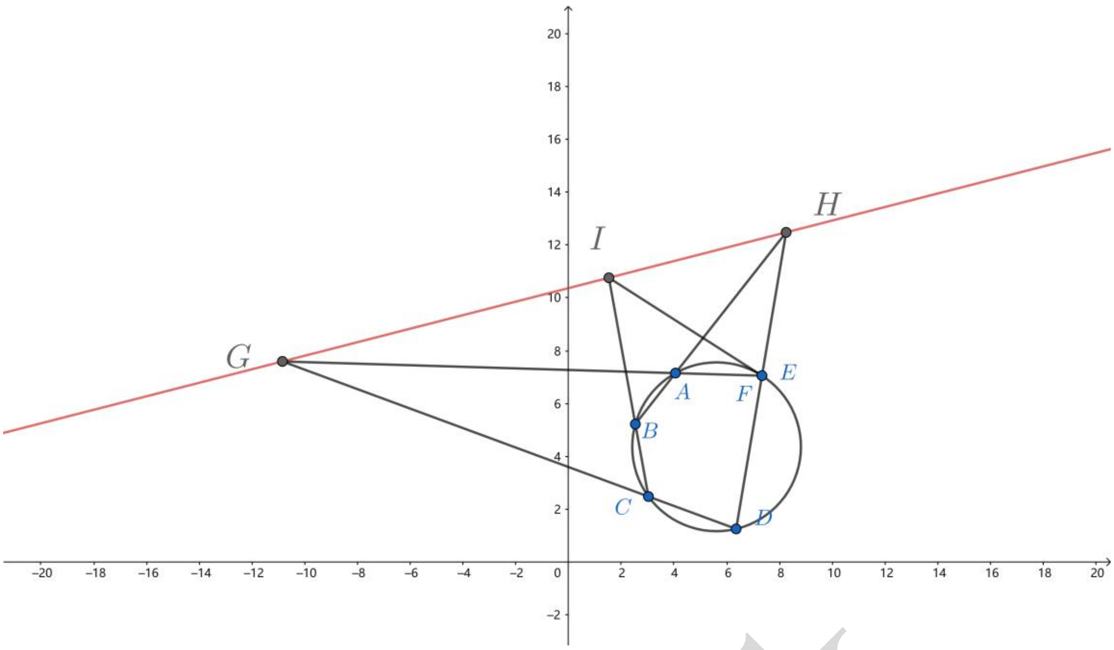
$$\frac{\cancel{MB}}{BP}\cdot\frac{PI}{IN}\cdot\frac{NC}{\cancel{CM}}\cdot\frac{ND}{\cancel{DM}}\cdot\frac{MH}{HP}\cdot\frac{PE}{EN}\cdot\frac{PF}{FN}\cdot\frac{NG}{GM}\cdot\frac{\cancel{MA}}{AP}=1$$
$$\frac{1}{BP}\cdot\frac{PI}{IN}\cdot\frac{\cancel{NC}}{1}\cdot\frac{\cancel{ND}}{1}\cdot\frac{MH}{HP}\cdot\frac{PE}{\cancel{EN}}\cdot\frac{PF}{\cancel{FN}}\cdot\frac{NG}{GM}\cdot\frac{1}{AP}=1$$
$$\frac{1}{\cancel{BP}}\cdot\frac{PI}{IN}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{MH}{HP}\cdot\frac{\cancel{PE}}{1}\cdot\frac{\cancel{PF}}{1}\cdot\frac{NG}{GM}\cdot\frac{1}{\cancel{AP}}=1$$

最终得到：

$$\frac{PI}{IN}\cdot\frac{NG}{GM}\cdot\frac{MH}{HP}=1$$

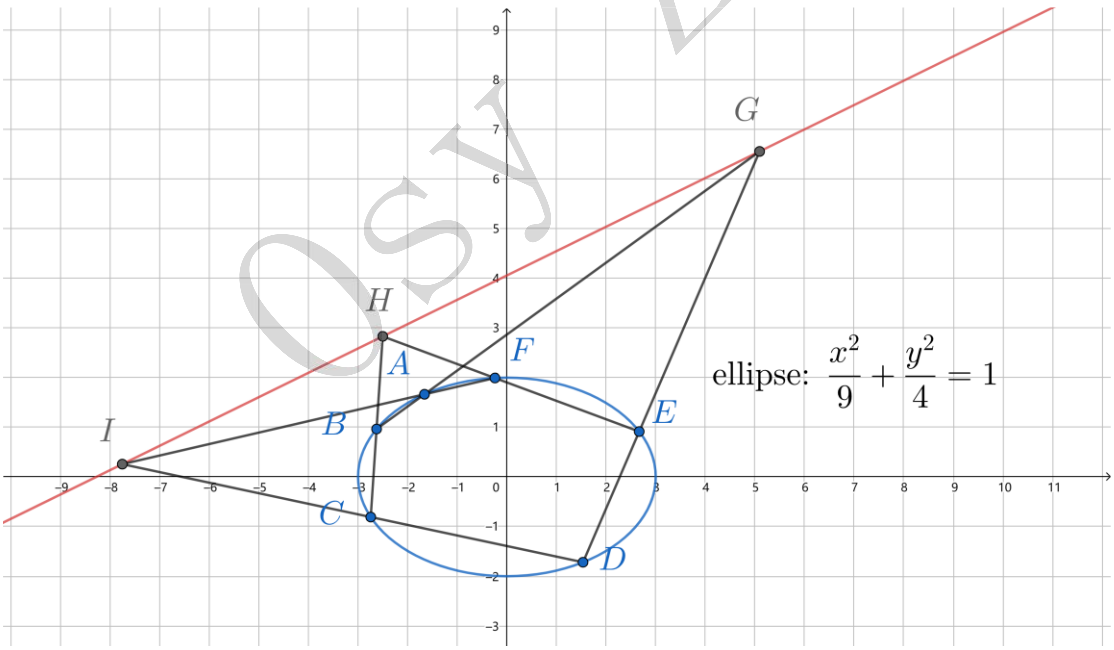
可以运用梅涅劳斯定理的逆定理，证明梅氏线与梅氏三角形的三个交点 I、G、H 共线，结论得证。

【拓展】这个定理适用于退化的六边形。换句话说，当这个六边形的其中两个点重合的时候，这个定理依旧适用，只不过这时会产生一条切线。

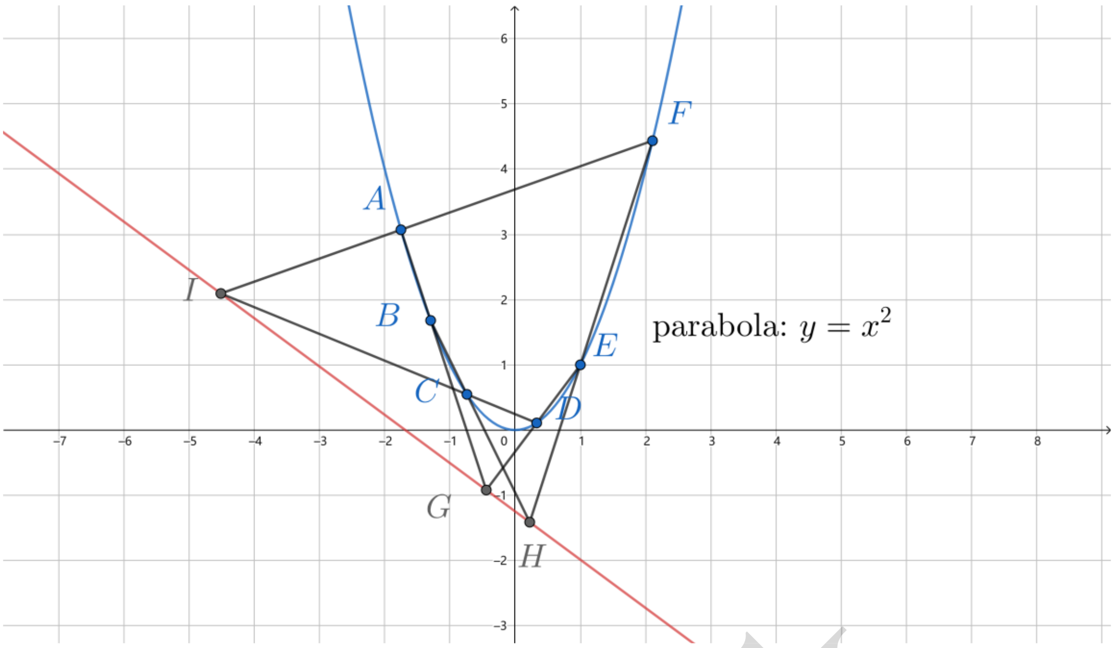


【拓展】这个定理还适用于其它圆锥曲线。在圆锥曲线上的定理证明需要一些高级的知识，这里不提供证明。下面给几个例子，读者可以看一下。

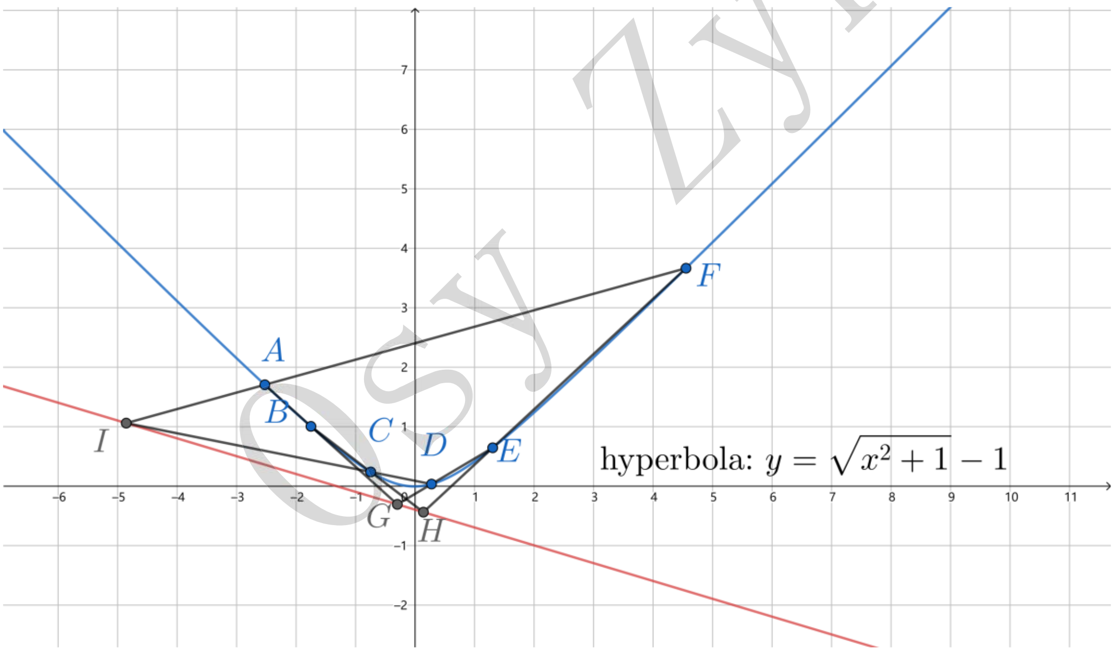
拓展到椭圆：



推广到抛物线：

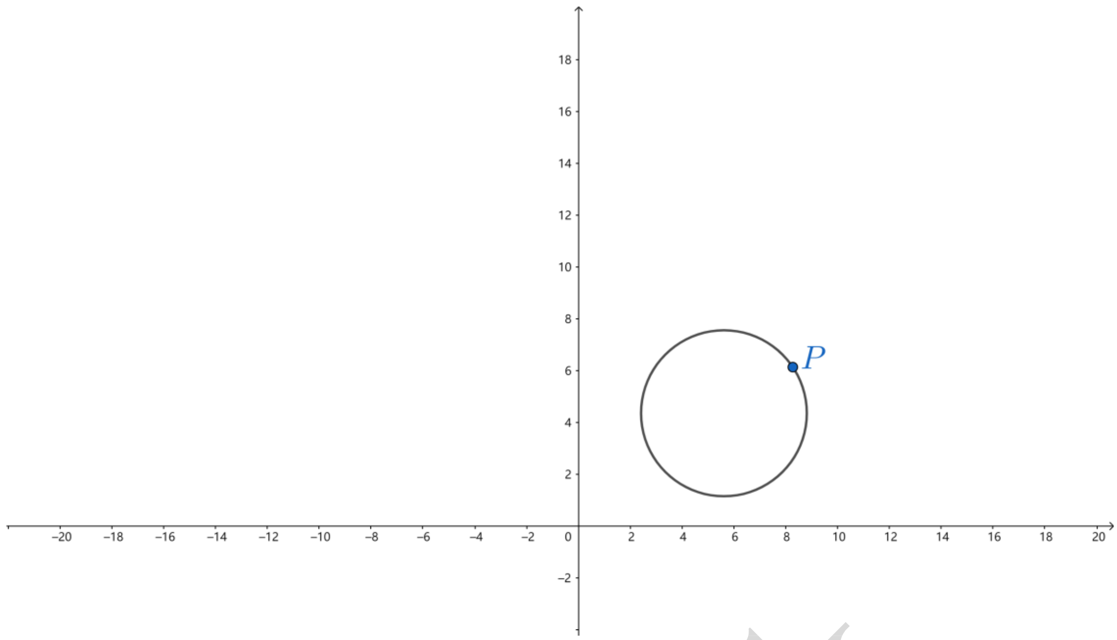


推广到双曲线：



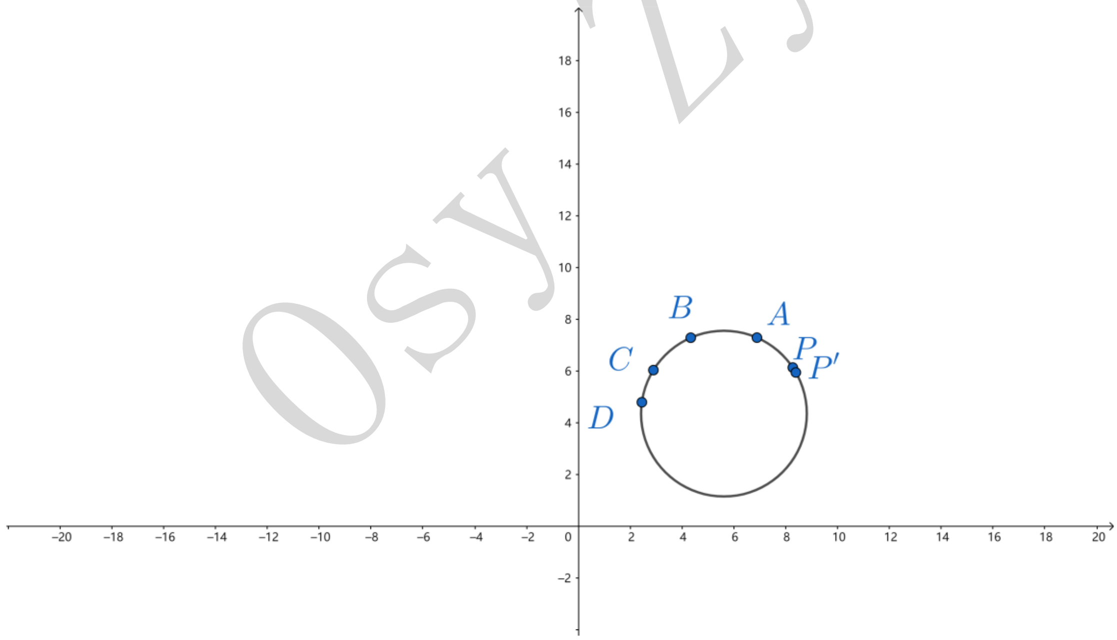
Cs 和 Wzl 发现可以利用这一点来作切线。可以看出，这种做法是不需要网格的。

我们来看一下作图步骤。



如图，过 P 作圆的切线。

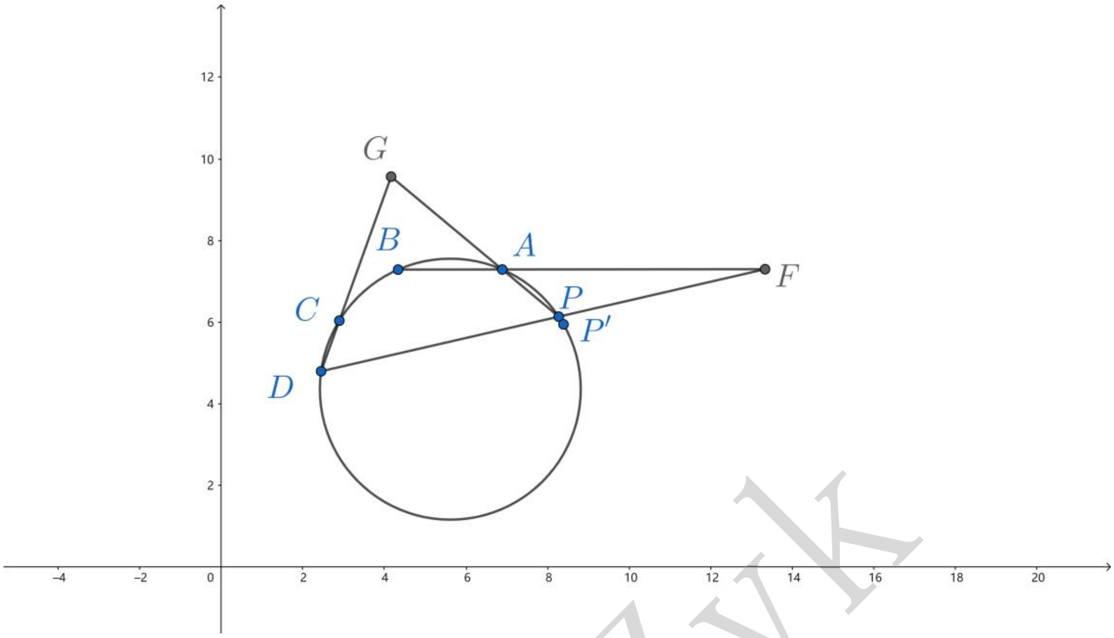
我们这样做去做：看下面这张图。



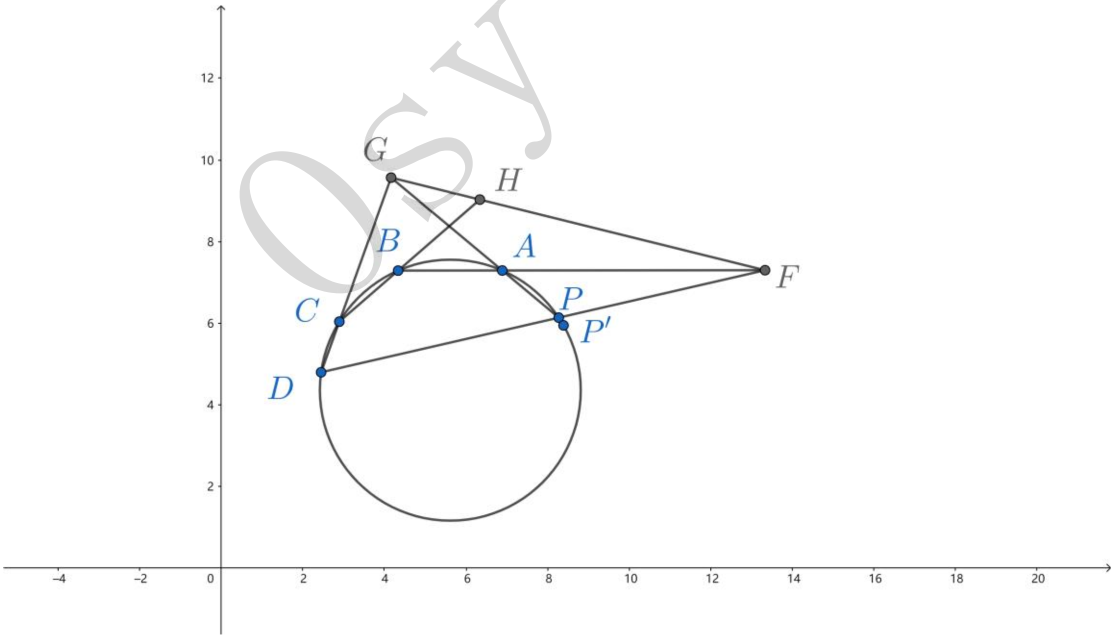
我们从 P 开始，在圆上逆时针选择四个合适的点 A、B、C、D。其实选择合适的四个点并不是那么容易，如果选择不合适的话，会导致接下来的画图占用特别大的面积。如果选择的点不合适的话，画图者可以尝试移动一下这几个点的位置。

然后，我们想象一个和 P 点无限接近的点 P'。注意只是“想象”，而非真正画

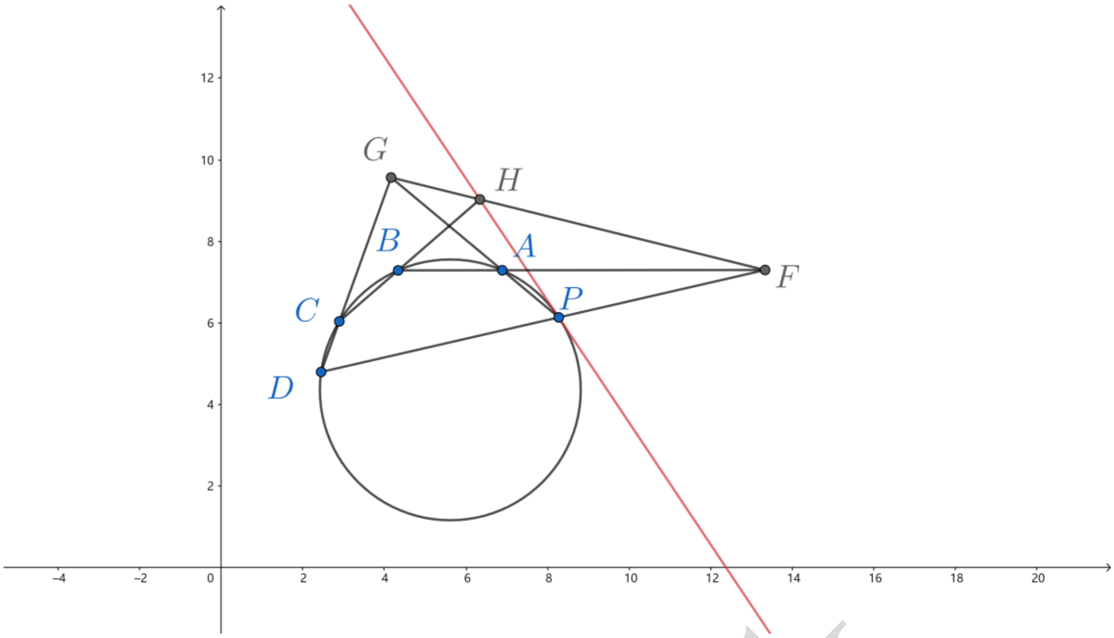
出来。通过这个想象出来的点 P'，我们可以更方便地确定六边形的对边分别是哪几组。然后我们就可以画相对边的交点了。看下面的图：



如图，F、G 是两组相对边的交点。注意，因为 P' 是想象出来的，所以实际画图中，所以涉及到 P' 的作图要用 P 来代替。



如图，连接 CB 并延长交 GF 于 H。H 即为第三组对边的交点。



如图，去除想象出来的 P'，连接 PH，PH 即为所求。

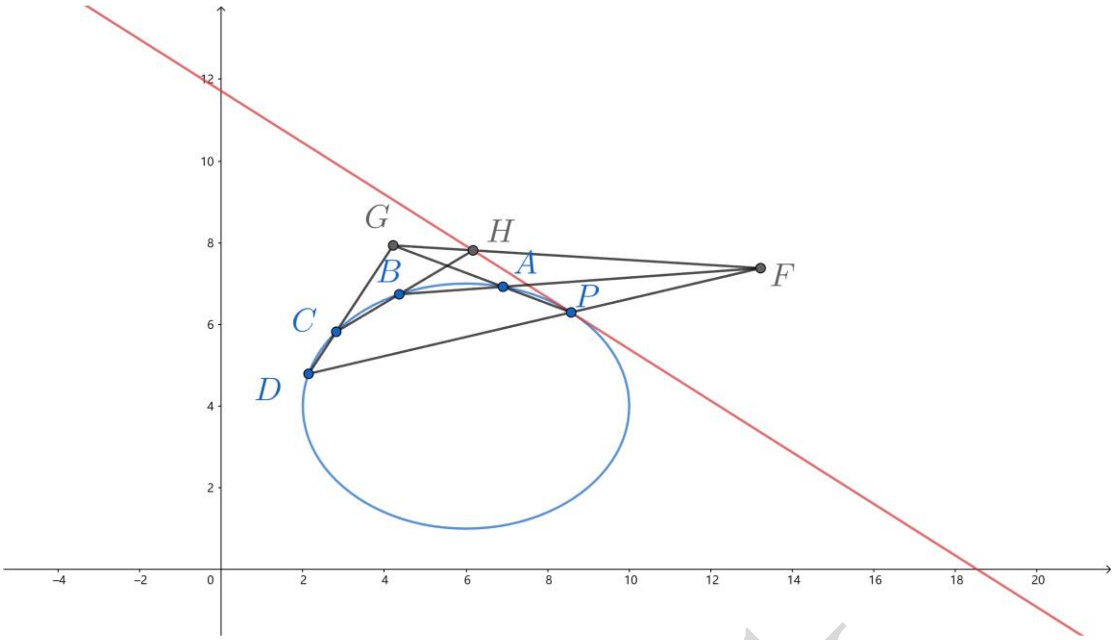
Cs-Wzl 切线定理 Cheng Shi-Wang Zilin Tangent Line Theorem （定理 4.4）

【提出者】程石、王梓霖

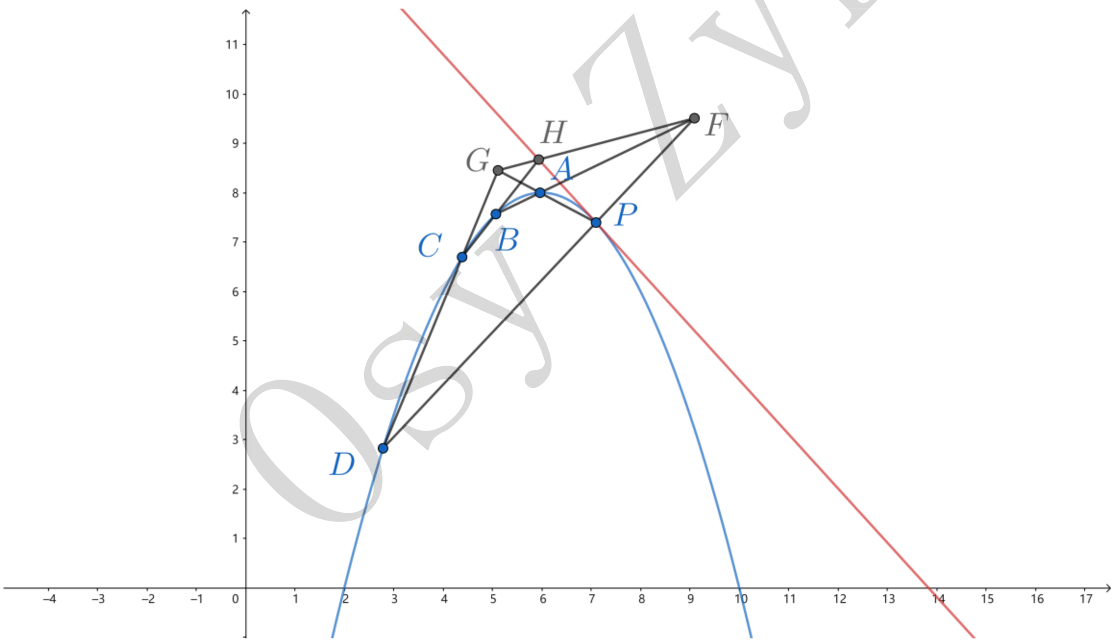
可以作任意圆上的任意一点关于这个圆的切线。此做法不需要网格。

现在我们要把这个定理推广至任意圆锥曲线。因为帕斯卡定理适用于所有圆锥曲线，所以这个定理也可以推广至任意圆锥曲线，而且不需要更改作图步骤。

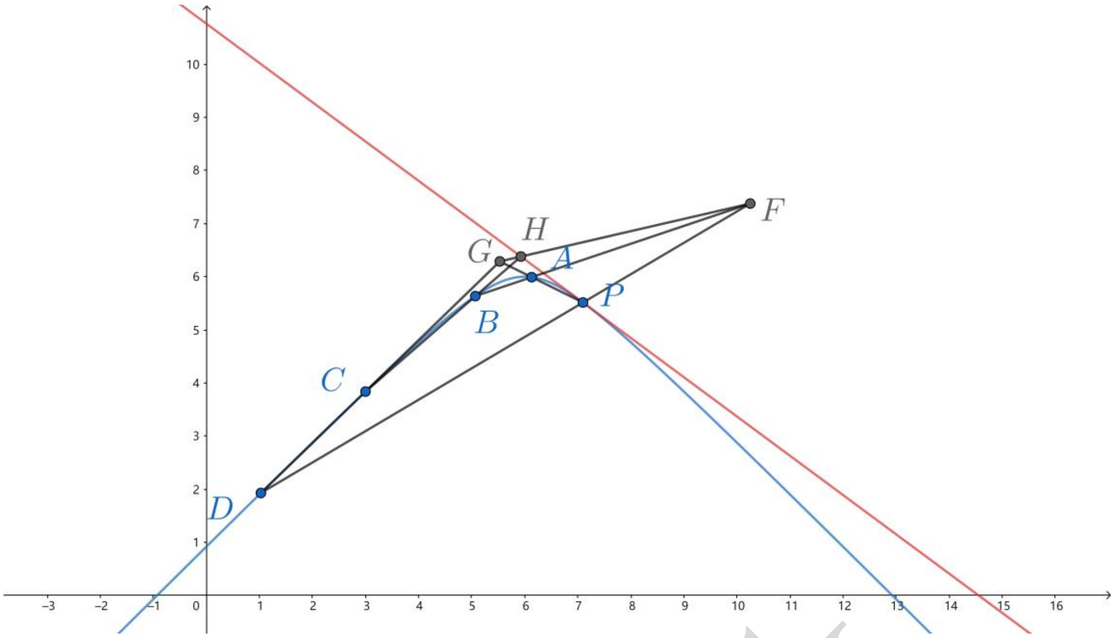
推广到椭圆：



推广到抛物线：



推广到双曲线：



广义 Cs-Wzl 切线定理 Cheng Shi-Wang Zilin Generalized Tangent Line Theorem （定理 4.4.2）

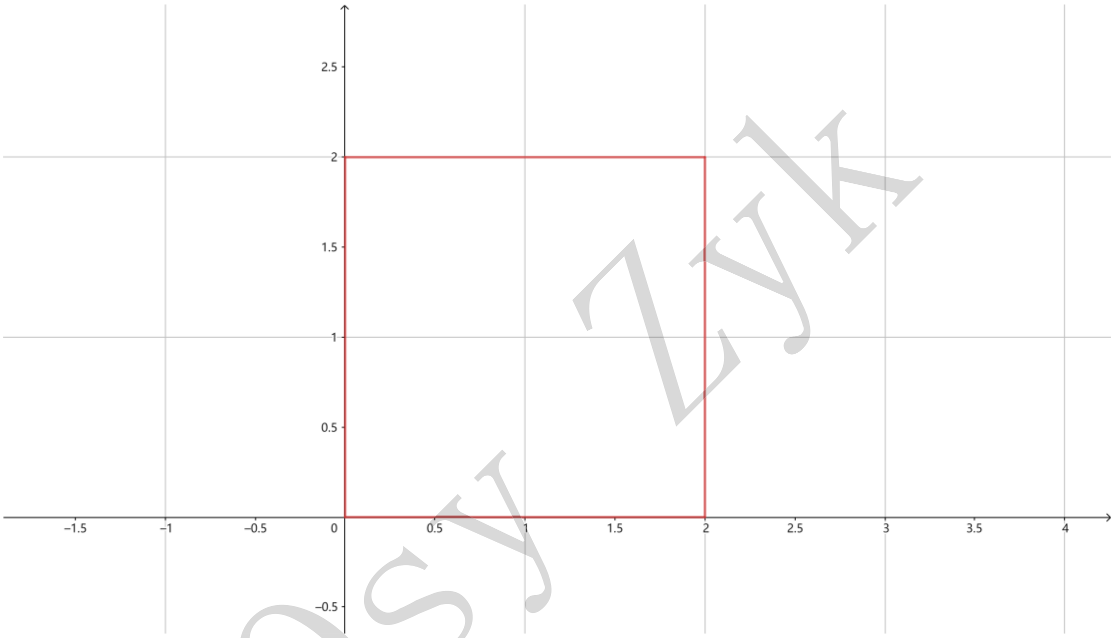
可以作圆锥曲线上任意一点关于这条曲线的切线。此做法不需要网格。

第五章 解析几何与网格作图

1. 作任意有理点

Wzl 任意有理点定理

Wzl 任意有理点定理告诉我们在网格做图中做任意有理点是可行的。

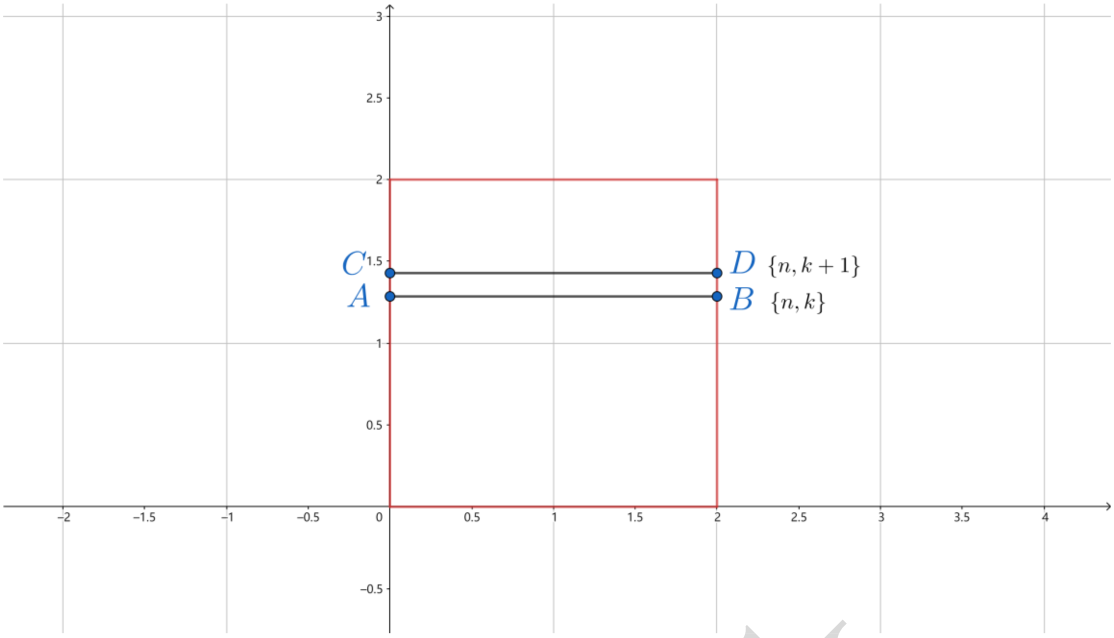


如图，请在给定的 2×2 网格内做出点 $P(s,t)$，其中 $s,t\in\mathrm{Q}$ 且 $0\le s,t\le 2$。

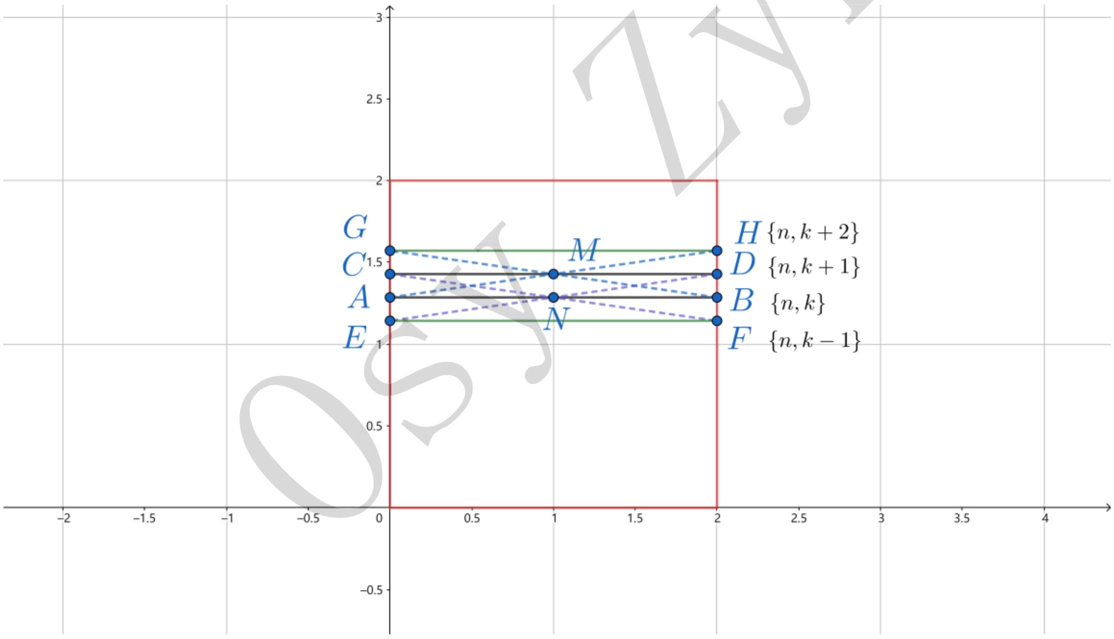
把 $0\le s,t\le 2$ 的情况做出来之后，我们就可以平移来作出其他的有理点。

如果我们能做出水平直线 $y=t$ 和竖直直线 $x=s$，问题就可以解决。我们先研究如何做出前者——如果前者可以做出，那么后者也可以用类似的方法做出。设有理数 $t=k/n(k,n\in\mathrm{N}^*,0\le k\le 2n)$，符号 $\{n,k\}$ 表示直线 $l{:}\,y=k/n$。

【引理 1】当 $\{n,k\}$ 和 $\{n,k+1\}$ 已经被做出时，$\{n,k-1\}$ 和 $\{n,k+2\}$ 也可以被做出。



我们可以这样做：

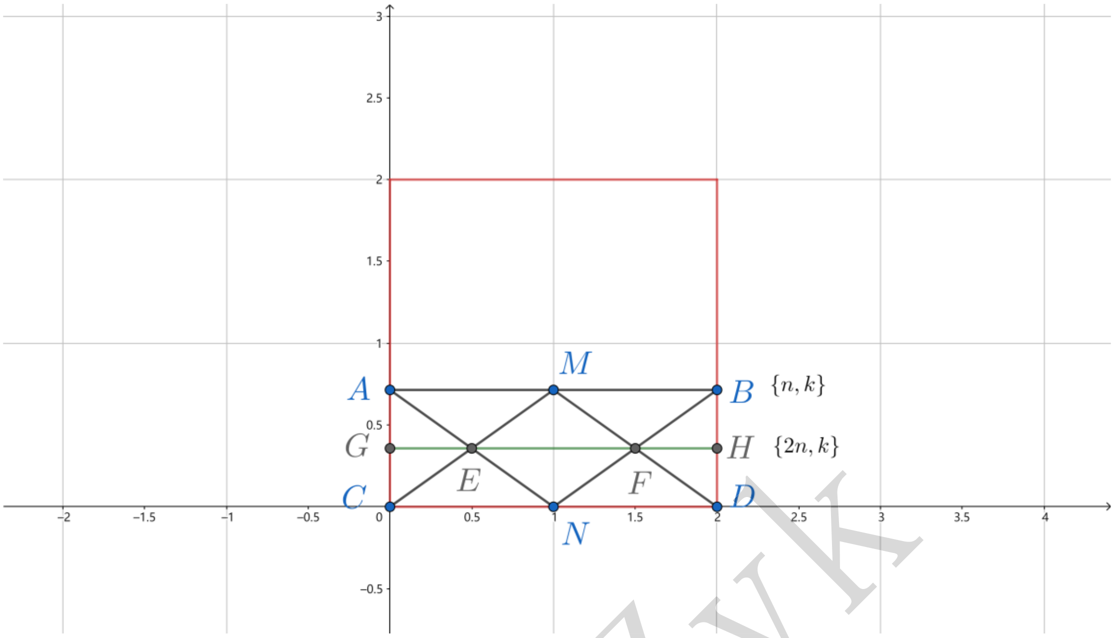


如图，令 M 为 $\{n,k+1\}$ 与 $x=1$ 的交点，连接 BM 并延长交 $x=0$ 于 G，连接 AM 并延长交 $x=2$ 于 H，GH 即为 $\{n,k+2\}$。$\{n,k-1\}$ 同理可得。

由于对于任意的 $n\in\mathbb{Q},0\le n\le 2$，都有 $\{n,0\}$ 为网格线 $y=0$，所以只要我们能够作出 $\{n,1\}$，就可作出任意的 $\{n,k\}$。

【引理 1 推论】只要能作出 $\{n,1\}$，就能作出 $\{n,k\}$。

【引理 2】当 $\{n,k\}$ 被作出时，$\{2n,k\}$ 也可被作出。当 k 为偶数时，$\{2n,k\}=\{n,k/2\}$。

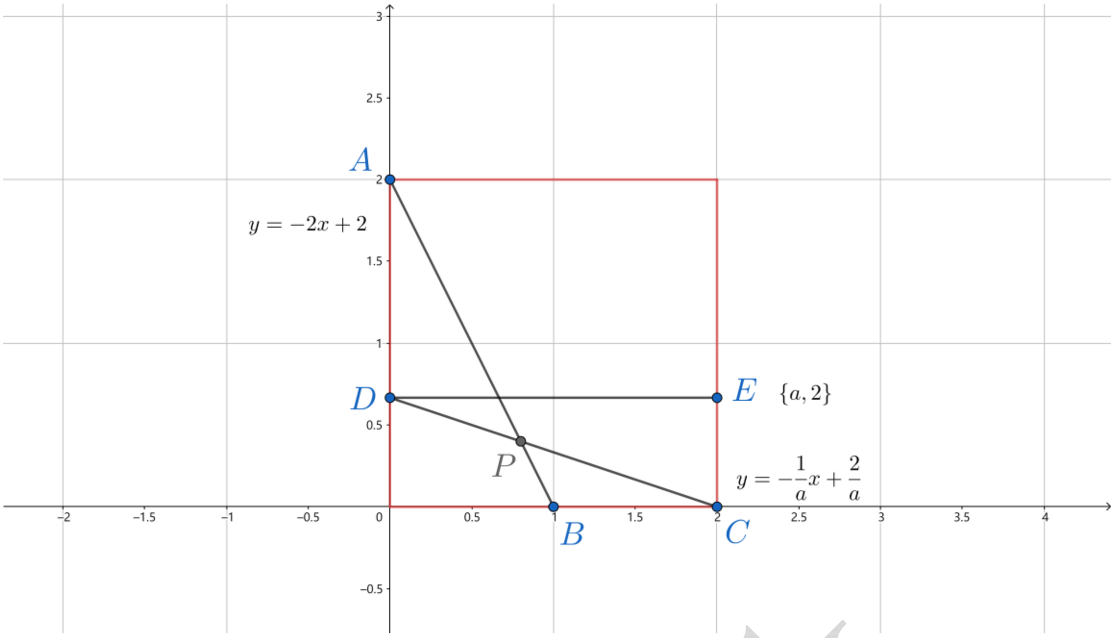


如图，连接两个矩形的对角线，连接两个交点并延长，即得 $\{2n,k\}$。

【引理 3】如果 $\forall n\le n_0$，$\{n,k\}$ 可以被作出，那么 $\forall n\le n_0$，$\{n+1,k\}$ 也可以被作出。

如果 n 是奇数（即 $n+1$ 为偶数），那么我们一定能作出 $\{(n+1)/2,1\}$，因为 $(n+1)/2\le n_0$。进而作出 $\{n+1,1\}$ 和 $\{n+1,k\}$。

如果 n 是偶数（即 $n+1$ 为奇数），那么令 $n=2a-2$，我们先作出 $\{a,2\}$，然后见下图：



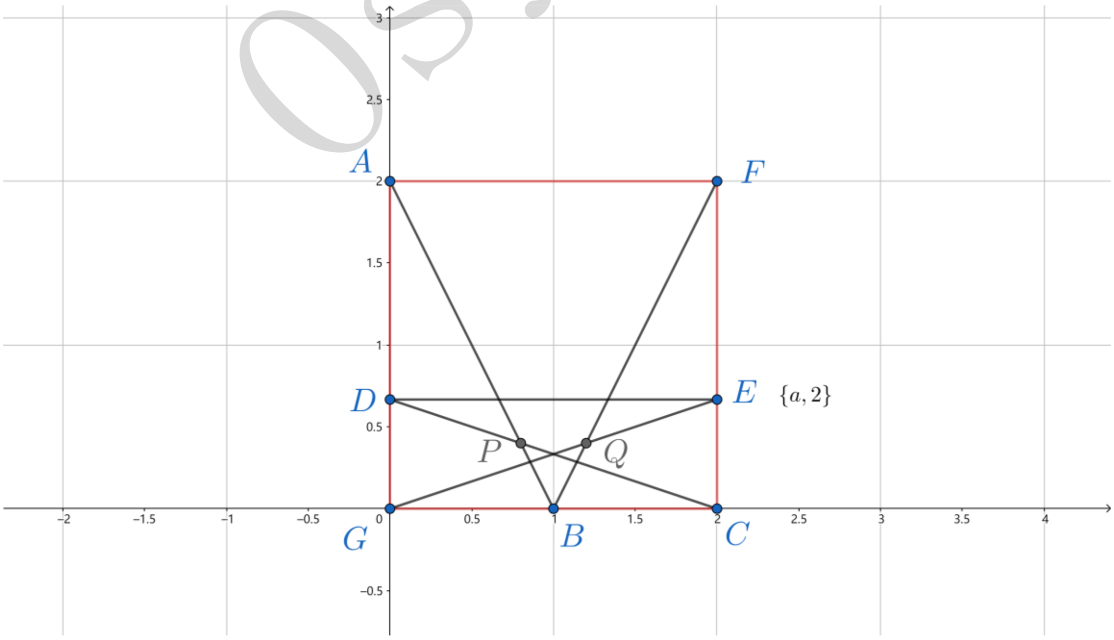
我们尝试求一下点 P 的坐标。

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -\dfrac{1}{a}x + \dfrac{2}{a} \end{cases}$$

解得：

$$P\left(\frac{2t-2}{2t-1}, \frac{2}{2t-1}\right)$$

我们发现 $y_p = 2/(n+1)$。所以我们可以再用类似的方法作出另一个点 Q。



连接 P，Q，PQ 即为 $\{2a-1,2\}=\{n+1,2\}$。最终可以看出，任意的 $\{n,k\}$ 都可以被作出。

可以看出这个定理是一个高度抽象化的定理，它有较高的理论价值，但是没有很高的实用价值。

Wzl 任意有理点定理 Wzl's Arbitrary Rational Point Theorem（定理 5.1）

【提出者】王梓霖

可以作出任意有理点。