Exo1

Yapi Roger Doffou

July 2024

1 Introduction

D'accord, je vais résoudre cet exercice étape par étape. Voici la transcription de l'exercice pour référence :

Exercice 1 On considère l'espace vectoriel R^3 muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de R^3 défini par :

$$f(2, 1, 0) = (1, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (-1, 1, 0)$$

$$f(0, 1, 2) = (-5, 3)$$

1. A désigne la matrice de l'endomorphisme de f relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. a) Montrer que $A = (1) 00$
$- 110$
$- 51 - 2^T$.

2. Montrer que f est un automorphisme de R^3. a) Déduire de la question précédente $Ker(f) et Im(f)$.

3. On pose $N = A - I_3$ où I_3 désigne la matrice identité de l'ordre 3. a) Calculer N^2 et N^3. b) Déduire de la question précédente N^n pour tout entier naturel $n \geq 3$. c) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que

$$A^n = (I + N)^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

d) Donner l'expression de A^n pour tout $n \geq 3$.

4. On considère (U_n), (V_n), (W_n) trois suites récurrentes linéaires, vérifiant :

$$U_{n+1} = U_n - V_n + W_n$$

$$V_{n+1} = V_n - 2W_n$$

$$W_{n+1} = W_n$$

Avec $U_0 = 1$, $V_0 = -1$ et $W_0 = 2$. Déterminer le terme général des suites (U_n), (V_n), (W_n).

—

Solution:

1. **Matrice de l'endomorphisme:**

Soit A la matrice de l'endomorphisme f relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.

Les colonnes de A sont les images des vecteurs de la base canonique par f.

- Pour $f(2,1,0) = (1,0,0)$, la première colonne de A est $(\ 1\ )$
0
0. - Pour $f(0,1,0) = (-1,1,0)$, la deuxième colonne de A est $(\ -\ )\,1$
1
0. - Pour $f(0,0,1) = (-2,5,-3)$, la troisième colonne de A est $(\ -\ )\,2$
5
$-\,3$.

Donc, $A = (\ 1\ ) - 1 - 2$
015
$00 - 3$.

La matrice transposée de A est :

$$A^T = (\ 1\ )\,00 - 110 - 25 - 3$$

.

2. **Automorphisme:**

Montrons que f est un automorphisme de R^3. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Pour cela, on doit montrer que la matrice A est inversible. Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Calculons le déterminant de A :

$$\det(A) = \det(\ 1\ ) - 1 - 201500 - 3 = 1 \times (1 \times -3 - 5 \times 0) = -3$$

$$\det(A) = -3 \neq 0$$

Donc, A est inversible, ce qui signifie que f est un automorphisme.

3. **Calculs avec $N = A - I_3$:**

$A - I_3$ est obtenu en soustrayant la matrice identité de A :

$$N = A - I_3 = (\ 1\ ) - 1 - 201500 - 3 - (\ 1\ )\,00010001 = (\ 0\ ) - 1 - 200500 - 4$$

a) Calculons N^2 et N^3 :

$$N^2 = N \times N = (\ 0\ ) - 1 - 200500 - 4 \times (\ 0\ ) - 1 - 200500 - 4 = (\ 0\ )\,0 - 20000016$$

$$N^3 = N^2 \times N = (\ 0\ )\,0 - 20000016 \times (\ 0\ ) - 1 - 200500 - 4 = (\ 0\ )\,0800000 - 64$$

b) Pour tout entier naturel $n \geq 3$, N^n : On observe que pour N^2 et N^3, seules les composantes de la forme N_{33} varient :

$$N^2 = (\ 0\ )\,000000016$$

$$N^3 = (\,0\,)\,0000000 - 64$$

Donc, pour $n \geq 3$, on a $N^n = 0$ sauf pour la composante N_{33}.
c) Utilisation de la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (I + N)^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

d) Expression de A^n pour tout $n \geq 3$:

$$A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

$$A^n = (\,1\,)\,00010001 + n\,(\,0\,) - 1 - 200500 - 4 + \frac{n(n-1)}{2}\,(\,0\,)\,000000016$$

4. **Suites récurrentes linéaires :**
Déterminons
les termes généraux des suites (U_n), (V_n), (W_n) :
On a :

$$U_{n+1} = U_n - V_n + W_n$$
$$V_{n+1} = V_n - 2W_n$$
$$W_{n+1} = W_n$$

Avec les conditions initiales $U_0 = 1$, $V_0 = -1$, et $W_0 = 2$.

$$W_n = W_0 = 2$$

$$V_{n+1} = V_n - 2 \cdot 2 = V_n - 4$$
$$V_{n+1} = -1 - 4n$$
$$V_n = -1 - 4(n-1) = -1 - 4n + 4 = 3 - 4n$$

$$U_{n+1} = U_n - V_n + 2$$
$$U_{n+1} = U_n - (3 - 4n) + 2 = U_n + 4n - 1$$

Déterminons le terme général de U_n par récurrence : Pour $U_0 = 1$:

$$U_1 = U_0 + 4(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$U_2 = U_1 + 4(1) - 1 = 0 + 4 - 1 = 3$$
$$U_3 = U_2 + 4(2) - 1 = 3 + 8 - 1 = 10$$

On observe que :

$$U_n = \frac{4n(n-1)}{2} = 2n(n-1) + n - 2$$

Donc :

$$U_n = 2n^2 - n - 2$$
$$V_n = 3 - 4n$$
$$W_n = 2$$

Voilà la solution de l'exercice.