

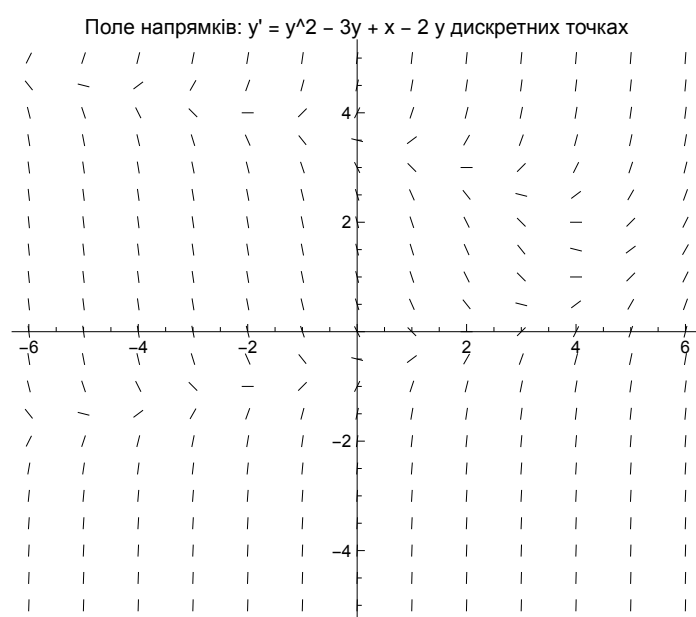
Завдання 1 пункт 1

Тут в лоб малюємо лінії за допомогою вбудованої функції вольфрам

```
eq = y'[x] == y[x]^2 - 3 * y[x] + x - 2;
```

```
field = Table[Module[{x0 = m, y0 = n / 2, slope, len = 0.2},
  \[табл... \[програмний модуль
  slope = y0^2 - 3 * y0 + x0 - 2;
  With[{dx = len / Sqrt[1 + slope^2]},
    \[використовуючи \[квадратний корінь
    Line[{
      \[ламана\) \[лінія
      {x0 - dx / 2, y0 - (dx * slope) / 2},
      {x0 + dx / 2, y0 + (dx * slope) / 2} }]
    ]
  ], {m, -6, 6},
  {n, -10, 10}
];
fieldFlat = Flatten[field, 2];
\[сплюстити
Graphics[fieldFlat,
\[графіка
  Axes → True,
  \[осі \[істина
  PlotRange → All,
  \[діапазон зна... \[все
  AspectRatio → Automatic,
  \[аспектне відно... \[автоматичний
  PlotLabel → "Поле напрямків:  $y' = y^2 - 3y + x - 2$  у дискретних точках"
  \[позначка графіка
]
```

Out[*]=



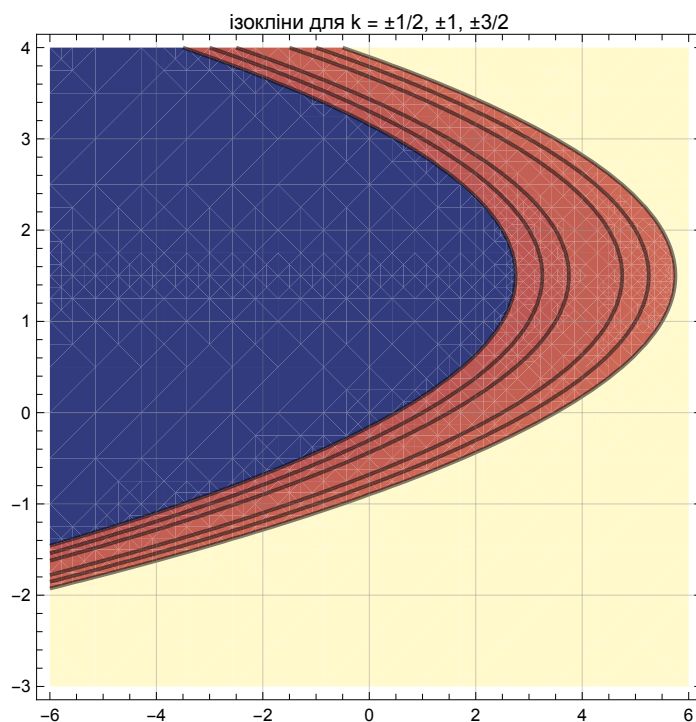
Завдання 1, пункт 2

Тут потрібно буде схитрувати, якщо ізоклін це всі такі точки x, y в яких $y^2 - 3y + x - 2 = k$. То правдою буде що це всі такі точки в яких $x = k - y^2 + 3y + 2$.

In[64]:=

```
ContourPlot[y^2 - 3 y + x - 2, {x, -6, 6}, {y, -3, 4},
  контурний графік
  Contours → {-3 / 2, -1, -1 / 2, 1 / 2, 1, 3 / 2},
  контури
  ContourStyle → Thick,
  контурний стиль  жирний (про лінію)
  PlotLegends → "Expressions",
  легенди графіка
  GridLines → Automatic,
  лінії координат  автоматичний
  PlotLabel → "ізокліни для k = ±1/2, ±1, ±3/2"
  позначка графіка
]
```

Out[64]=



Завдання 1, пункт 2 (білий фон)

```

In[83]:= kdots = {-3/2, -1, -1/2, 1/2, 1, 3/2};
plots = Table[
  ParametricPlot[{k - y^2 + 3 y + 2, y},
    {y, -3, 4},
    PlotStyle -> {Black, Thin}],
  {k, kdots}
];

Show[
  plots,
  Axes -> True,
  AxesLabel -> {"x", "y"},
  PlotLabel -> "ізокліни на білому фоні для k = ±1/2, ±1, ±3/2"
]

```

Out[85]=



Завдання 1, пункт 3

Очевидно що $y(x)$ зростає коли $y'(x) > 0$, а спадає коли $y'(x) < 0$.

так як нам з умови відомо що $y'(x) = y^2 - 3y + x - 2$, то досить це просто намалювати за допомогою функції RegionPlot.

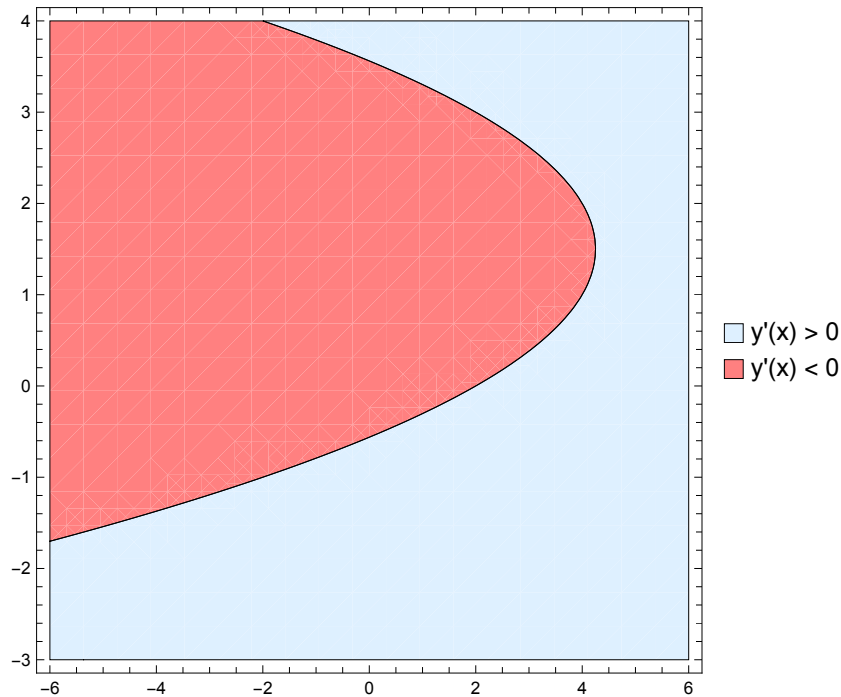
In[58]:=

```

RegionPlot[{y^2-3 y+x-2>0,y^2-3 y+x-2<0},
{x,-6,6},{y,-3,4},
BoundaryStyle->{Black, Thin},
PlotStyle->{LightBlue,Pink},
PlotLegends->{"y'(x) > 0","y'(x) < 0"}
]

```

Out[58]=



Завдання 1 пункт 4

$$y^2 - 3y + x - 2 = 0$$

Точка максимуму задовольняє наступні умови $y'(x) = y^2 - 3y + x - 2 = 0$ та $y''(x) < 0$

$$y''(x) = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx} f(x, y) + \frac{d}{dy} f(x, y) * \quad \text{АЛЕ згадуючи першу умову [} y'(x) = 0 \text{]}$$

$$y'(x) = 1 + (2y - 3) * y'(x) = 1 + (2y - 3) (y^2 - 3y + x - 2)$$

$$\text{матимемо } y''(x) = 1 + (2y - 3) * y'(x) = 1 + (2y - 3) * 0 = 1,$$

а $1 > 0$ завжди, отже у нас не буде локальних максимумів.

Завдання 1 пункт 5

Опуклість (вгору/вниз) задається знаком другої похідної, тобто $u(x)$ опукла догори якщо

$$y''(x) > 0 \text{ та опукла донизу якщо } y''(x) < 0$$

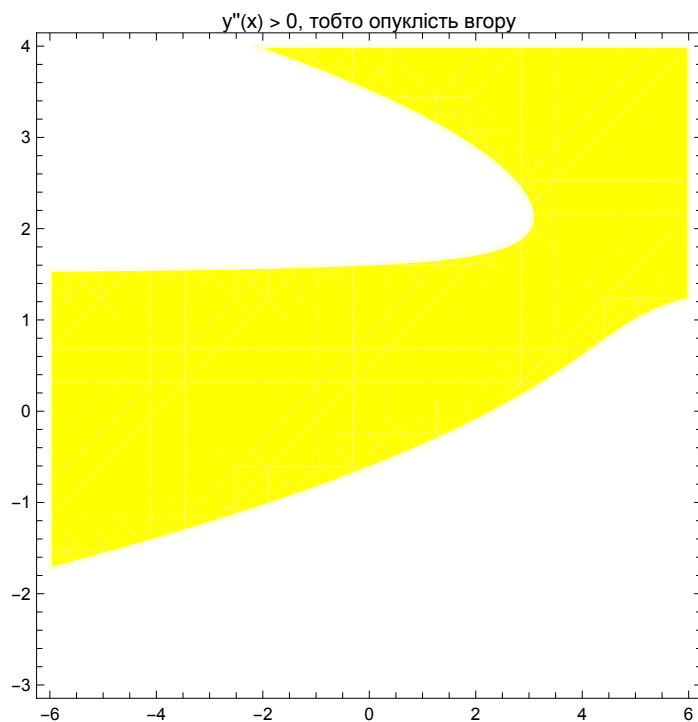
в попередньому пункті ми вже визначили що $y''(x) = 1 + (2y - 3)(y^2 - 3y + x - 2)$, отже залишилось лише це задати через функцію RegionPlot

```
In[55]:= g[x_,y_]:=1+(2 y-3) (y^2-3 y+x-2);

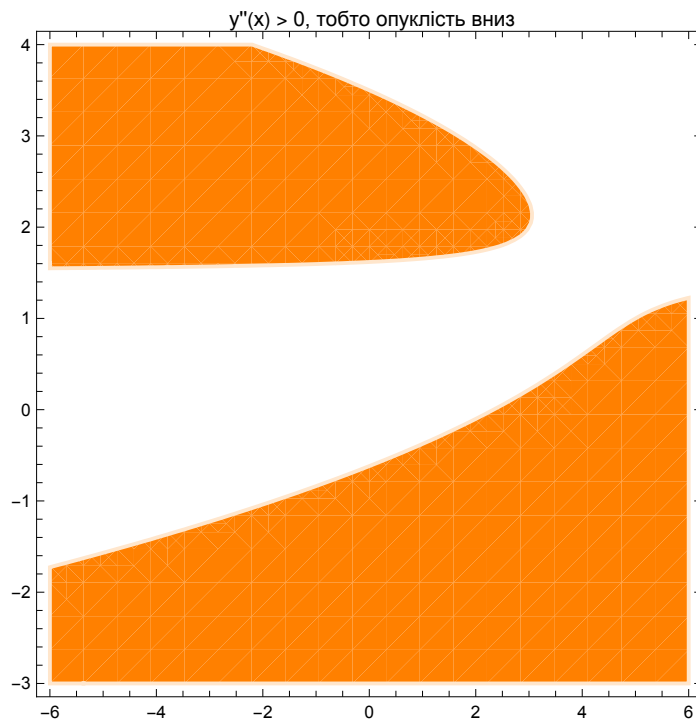
RegionPlot[g[x,y]>0,
{x,-6,6},{y,-3,4},
BoundaryStyle->{LightYellow},
PlotStyle->{Yellow}
,PlotLabel->" y''(x) > 0, тобто опуклість вгору "]

RegionPlot[g[x,y]<0,
{x,-6,6},{y,-3,4},
BoundaryStyle->{LightOrange},
PlotStyle->{Orange},
PlotLabel->" y''(x) < 0, тобто опуклість вниз"]
```

Out[56]=



Out[57]=



Завдання 1 пункт 6

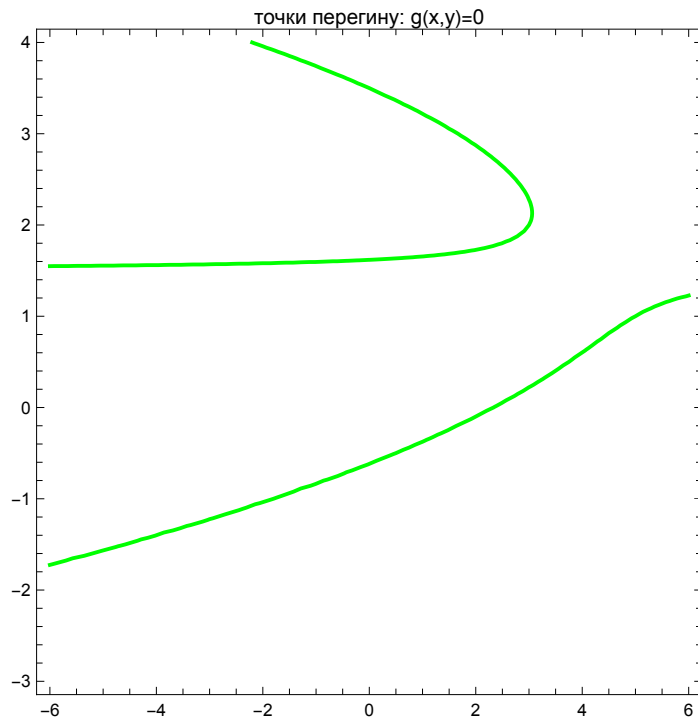
Точки перегину - точки де $y''(x) = 0 \Rightarrow 1 + (2y - 3)(y^2 - 3y + x - 2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2y - 3)(y^2 - 3y + x - 2) = -1 \Rightarrow y^2 - 3y + x - 2 = \frac{-1}{2y - 3} \Rightarrow x = \frac{-1}{2y - 3} - y^2 + 3y + 2$$

Але щоб це зобразити достатньо використати функцію ContourPlot

```
In[59]:= ContourPlot[1+(2 y-3) (y^2-3 y+x-2)==0,{x,-6,6},
{y,-3,4},
ContourStyle->{Thick,Green},
PlotLabel->"точки перегину: g(x,y)=0"
]
```

Out[59]=



Завдання 1 пункт 7

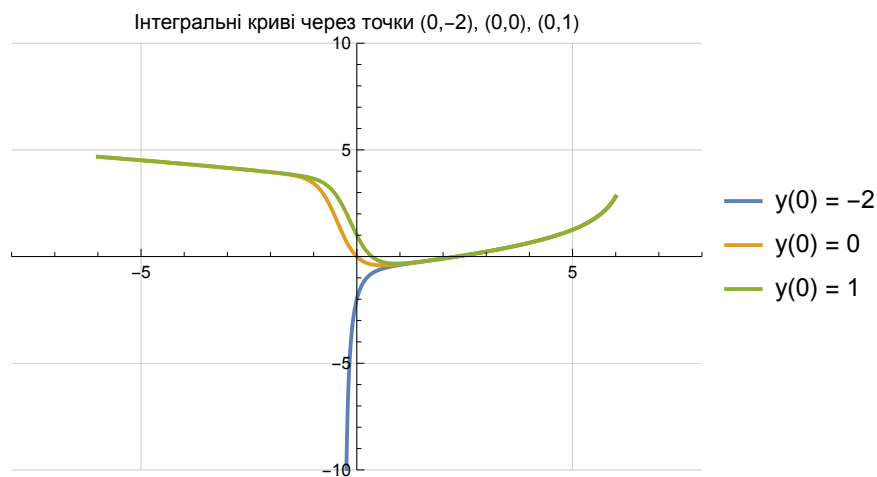
Тут будемо використовувати функцію `NDSolve` для наближеного розв'язку рівнянь в даних точках,

In[60]:=

```
sol1=NDSolve[{y'[x]==y[x]^2-3*y[x]+x-2,y[0]==-2},y,{x,-0.32,6}];
sol2=NDSolve[{y'[x]==y[x]^2-3*y[x]+x-2,y[0]==0},y,{x,-6,6}];
sol3=NDSolve[{y'[x]==y[x]^2-3*y[x]+x-2,y[0]==1},y,{x,-6,6}];

Plot[Evaluate[{y[x]/.sol1,y[x]/.sol2,y[x]/.sol3}],
{x,-6,6},
PlotRange->{{8,-8},{10,-10}},
GridLines->Automatic,
PlotLabel->"Інтегральні криві через точки (0,-2), (0,0), (0,1)",
PlotLegends->{"y(0) = -2", "y(0) = 0", "y(0) = 1"}
]
```

Out[63]=



Завдання 2 пункт 1

$g(y) = y^2 + 3y + 2$. Потрібно зобразити векторне поле

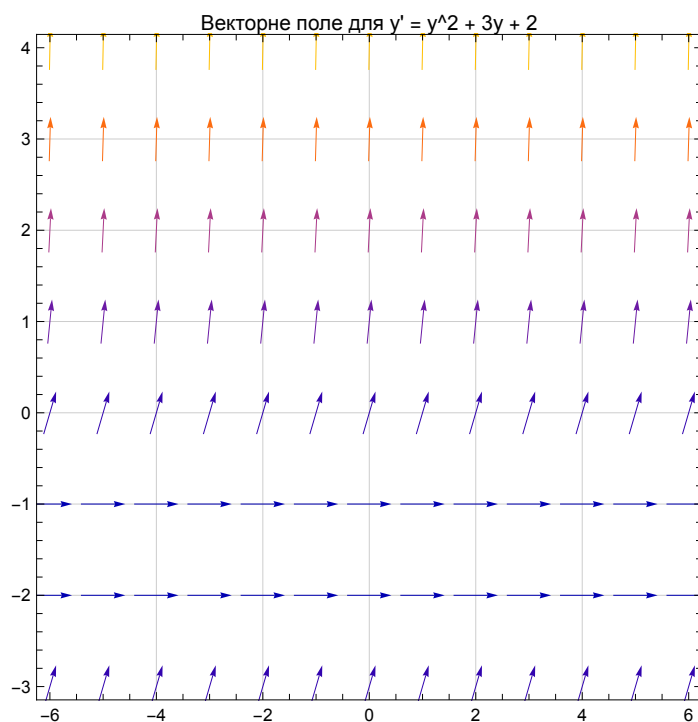
```

In[10]:= g[y_] := y^2 + 3 y + 2;

VectorPlot[
  {1, g[y]},
  {x, -6, 6}, {y, -3, 4},
  VectorPoints -> Flatten[Table[{x, y}, {x, -6, 6, 1}, {y, {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,
  VectorScale -> {Small, Scaled[0.5], None},
  AxesLabel -> {"x", "y"},
  PlotLabel -> "Векторне поле для y' = y^2 + 3y + 2",
  GridLines -> Automatic
]

```

Out[11]=



Завдання 2 пункт 2

$$y'(x) = g(y) = y^2 + 3y + 2. \Rightarrow D = 9 - 8 \Rightarrow y_1, y_2 = \frac{-3 \pm 1}{2} = -1, -2$$

точки спадання $y^2 + 3y + 2 < 0$; зростання $y^2 + 3y + 2 > 0$

$$\text{точки перегину} \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow y'' = \frac{d}{dy}(y') y' = (2y + 3)(y^2 + 3y + 2) \Rightarrow (2y + 3)(y^2 + 3y + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$(2y + 3) = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \text{ and } y^2 + 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1, -2 \text{ (рівняння міняє знак, проходячи}$$

через точки -2, -1.5, -1 [- , +, -, +] -> це точки перегину)

In[94]:=

```

g[y_] := y^2 + 3 y + 2

(* Область зростання: g(y) > 0 (голубий фон) *)
regionIncrease = RegionPlot[g[y] > 0, {t, -10, 10}, {y, -5, 5},
  PlotStyle -> {LightBlue, Opacity[0.3]}, BoundaryStyle -> None];

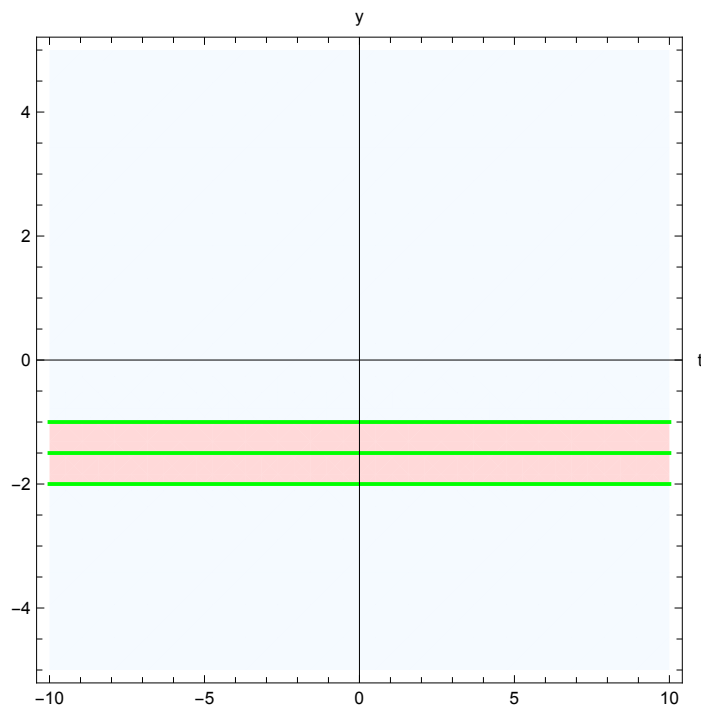
(* Область спадання: g(y) < 0 (рожевий фон) *)
regionDecrease = RegionPlot[g[y] < 0, {t, -10, 10}, {y, -5, 5},
  PlotStyle -> {Pink, Opacity[0.3]}, BoundaryStyle -> None];

(* Множина точок перегину: розв'язок (2y+3)(y^2+3y+2)=0, тобто y = -2, -3/2, -1 *)
inflectionLines = Graphics[{Green, Thick,
  Line[{{-10, -2}, {10, -2}}],
  Line[{{-10, -3/2}, {10, -3/2}}],
  Line[{{-10, -1}, {10, -1}}]}];

Show[regionIncrease, regionDecrease, inflectionLines,
  PlotRange -> {{-10, 10}, {-5, 5}},
  Axes -> True,
  AxesLabel -> {"t", "y"}]

```

Out[98]=



Завдання 2 пункт 3

знайдемо розв'язок

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 3y + 2 \Rightarrow \int \frac{1}{y^2 + 3y + 2} dy = x + C \Rightarrow \int \frac{1}{(y+1)(y+2)} dy = x + C \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{y+1} dy - \int \frac{1}{y+2} dy = x + C \Rightarrow \ln \left| \frac{y+1}{y+2} \right| = x + C \Rightarrow \frac{y+1}{y+2} = e^x C_1 \Rightarrow y = \frac{2 C_1 e^x - 1}{1 - C_1 e^x}$$

Розв'яжемо рівняння коші

$$y_0 = \frac{2 C_1 e^0 - 1}{1 - C_1 e^0} = \frac{2 C_1 - 1}{1 - C_1} \Rightarrow y_0 - y_0 C_1 = 2 C_1 - 1 \Rightarrow -C_1 (y_0 + 2) = -(y_0 + 1) \Rightarrow C_1 = \frac{y_0 + 1}{y_0 + 2}$$

Отже розв'язком буде

$$y = \frac{2 \frac{y_0+1}{y_0+2} e^x - 1}{1 - \frac{y_0+1}{y_0+2} e^x} = \frac{2 (y_0 + 1) e^x - (y_0 + 2)}{(y_0 + 2) - (y_0 + 1) e^x}$$

Асимптоти

рівняння вироджується коли знаменник = 0, тобто $(y_0 + 2) - (y_0 + 1) e^x = 0 \Rightarrow e^x = \frac{y_0 + 2}{y_0 + 1} \Rightarrow$

$x = \ln \left| \frac{y_0 + 2}{y_0 + 1} \right|$ це і буде рівнянням асимптоти коли $\frac{y_0 + 2}{y_0 + 1} > 0$ ну тобто x дійсний це буде \Leftrightarrow

$(y_0 + 2 > 0 \text{ та } y_0 + 1 > 0)$ або $(y_0 + 2 < 0 \text{ та } y_0 + 1 < 0)$. Тобто $y_0 \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$

Завдання 2 пункт 4

Як ми вже дізналися вище -1, -2 є розв'язками $g(y)$, отже $y_0 \in [-2, -1]$, $y_0 \in (-\infty, -2)$, $y_0 \in (-1, +\infty)$

```

ClearAll["Global`*"];

ySol[x_, y0_] := (2 (y0 + 1) Exp[x] - (y0 + 2)) / ((y0 + 2) - (y0 + 1) Exp[x]);

xMin = -2;
xMax = 2;

(* ===== 1. y0 \in (-\infty, -2) ===== *)
y0Region1 = {-3, -4, -10};

plotRegion1 = Plot[
  Evaluate@Table[ySol[x, y0], {y0, y0Region1}],
  {x, xMin, xMax},
  PlotRange -> All,
  PlotLegends -> Table["y0 = " <> ToString[y0], {y0, y0Region1}],
  PlotLabel -> "Розв'язки для y0 < -2",
  AxesLabel -> {"x", "y(x, y0)"}
];

(* ===== 2. y0 \in [-2, -1] ===== *)
y0Region2 = {-2, -1.5, -1.2, -1};

plotRegion2 = Plot[
  Evaluate@Table[ySol[x, y0], {y0, y0Region2}],
  {x, xMin, xMax},
  PlotRange -> All,
  PlotLegends -> Table["y0 = " <> ToString[y0], {y0, y0Region2}],
  PlotLabel -> "Розв'язки для -2 \le y0 \le -1",
  AxesLabel -> {"x", "y(x, y0)"}
];

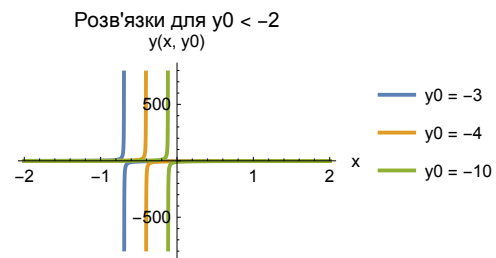
(* ===== 3. y0 \in (-1, +\infty) ===== *)
y0Region3 = {0, 1, 2, 3};

plotRegion3 = Plot[
  Evaluate@Table[ySol[x, y0], {y0, y0Region3}],
  {x, xMin, xMax},
  PlotRange -> All,
  PlotLegends -> Table["y0 = " <> ToString[y0], {y0, y0Region3}],
  PlotLabel -> "Розв'язки для y0 > -1",
  AxesLabel -> {"x", "y(x, y0)"}
];

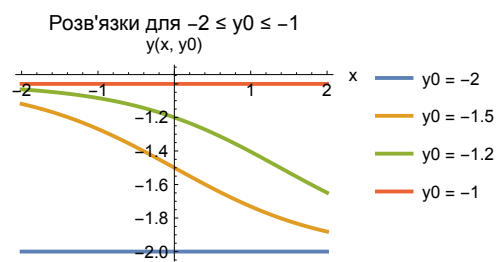
(*GraphicsRow[{plotRegion1, plotRegion2, plotRegion3}, ImageSize -> Large]*)
GraphicsRow[{plotRegion1}, ImageSize -> Large]
GraphicsRow[{plotRegion2}, ImageSize -> Large]
GraphicsRow[{plotRegion3}, ImageSize -> Large]

```

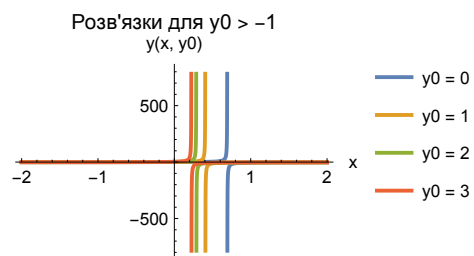
Out[49]=



Out[50]=



Out[51]=



Завдання 2 пункт 5

```

In[30]:= b = -2;

gr1 = Plot[
  {ySol[x, b + 0.5], ySol[x, b - 0.5]},
  {x, -5, 5},
  PlotRange -> All,
  PlotLegends -> {"y0 = b+1/2", "y0 = b-1/2"},
  AxesLabel -> {"x", "y"},
  PlotLabel -> "віддалено"
];

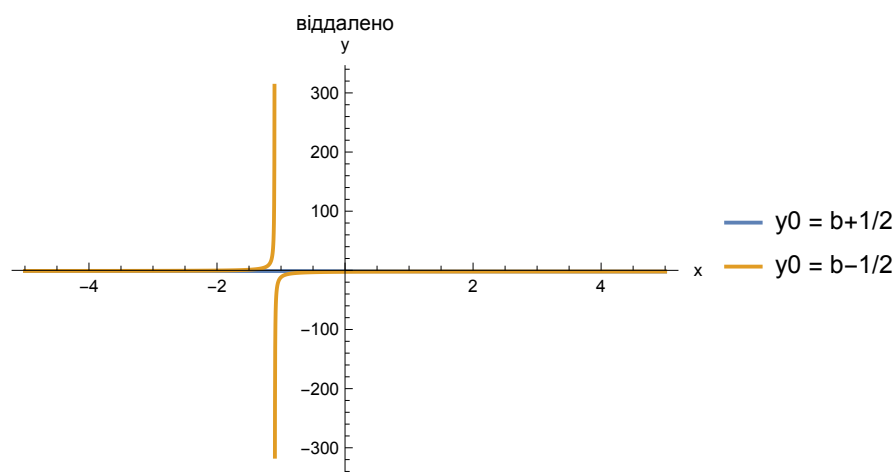
Show[gr1]

y1[x_] := -(2 Exp[x] + 1)/(1 + Exp[x]);
y2[x_] := (6 Exp[x] - 1)/(1 - 3 Exp[x]);

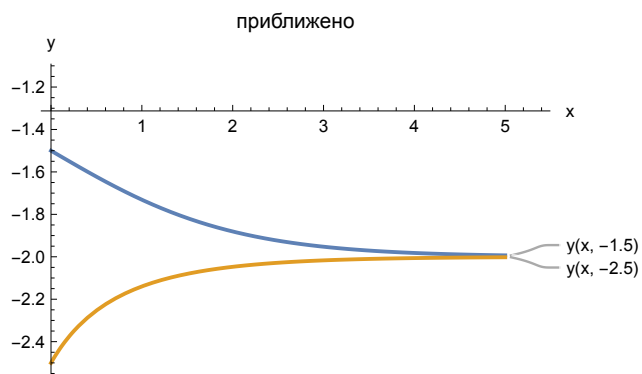
Plot[{y1[x], y2[x]}, {x, 0, 5}, PlotRange -> All,
  PlotLabels -> {"y(x, -1.5)", "y(x, -2.5)"},
  PlotLabel -> "приближено",
  AxesLabel -> {"x", "y"}
]

```

Out[32]=



Out[35]=



Тут двома різними способами знайдемо x , такий що $\left| y\left(x, b + \frac{1}{2}\right) - y\left(x, b - \frac{1}{2}\right) \right| < 10^{-3}$

In[36]:=

```
diff[x_] := y1[x] - y2[x];

NSolve[ Abs[diff[x]] == 10^-3 && x>=0, x, Reals]

FindRoot[ Abs[diff[x]] - 10^-3, {x, 2}]
```

Out[37]=

```
{{x -> 7.19494}}
```

Out[38]=

```
{x -> 7.19494}
```