Завдання 1 пункт 1

Тут в лоб малюємо лінії за допомогою вбудованої функції вольфрам

```
eq = y'[x] == y[x]^2 - 3 * y[x] + x - 2;
```

```
field = Table[Module[{x0 = m, y0 = n / 2, slope, len = 0.2},
        табл···  програмний модуль
     slope = y0^2 - 3 * y0 + x0 - 2;
     With[{dx = len / Sqrt[1 + slope^2]},
     використовуючи       квадратний корінь
      Line[{
      (ламана) лінія
         {x0 - dx / 2, y0 - (dx * slope) / 2},
         {x0 + dx / 2, y0 + (dx * slope) / 2} }]
     ]
    ]
   , {m, -6, 6},
   {n, -10, 10}
  ];
fieldFlat = Flatten[field, 2];
                   сплюстити
Graphics[fieldFlat,
графіка
 Axes → True,
 осі     істина
 PlotRange → All,
 діапазон зна···  все
 AspectRatio → Automatic,
 аспектне відно···  автоматичний
 PlotLabel → "Поле напрямків: y' = y^2 - 3y + x - 2 у дискретних точках"
 позначка графіка
]
```

Out[ ]=

Завдання 1, пункт 2

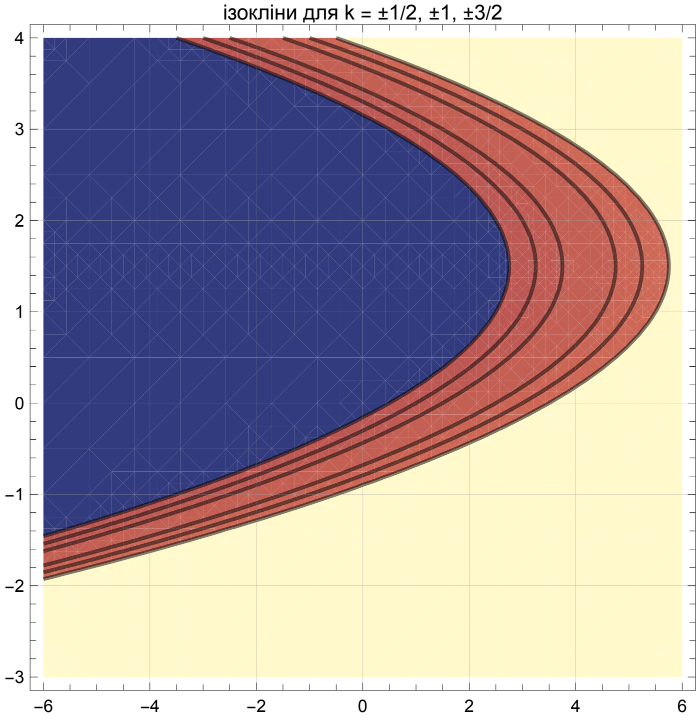
Тут потрібно буде схитрувати, якщо ізоклін це всі такі точки x, y в яких $y^2 - 3y + x - 2 = k$. То правдою буде що це всі такі точки в яких $x = k - y^2 + 3y + 2$.

In[64]:=

```
ContourPlot[y^2 - 3 y + x - 2, {x, -6, 6}, {y, -3, 4},
контурний графік
 Contours → {-3 / 2, -1, -1 / 2, 1 / 2, 1, 3 / 2},
 контури
 ContourStyle → Thick,
 контурний стиль  жирний (про лінію)
 PlotLegends → "Expressions",
 легенди графіка
 GridLines → Automatic,
 лінії координ··· автоматичний
 PlotLabel → "ізокліни для k = ±1/2, ±1, ±3/2"
 позначка графіка
]
```

Out[64]=

ізокліни для k = ±1/2, ±1, ±3/2



Завдання 1, пункт 2 (білий фон)

In[83]:=
```
kdots = {-3/2,-1,-1/2,1/2,1,3/2};
plots = Table[
    ParametricPlot[{k -y^2+3 y + 2, y},
    {y, -3, 4},
    PlotStyle → {Black, Thin}],
{k, kdots}
];

Show[
plots,
Axes → True,
AxesLabel → {"x", "y"},
PlotLabel → "ізокліни на білому фоні для k = ±1/2, ±1, ±3/2"
]
```

Out[85]=

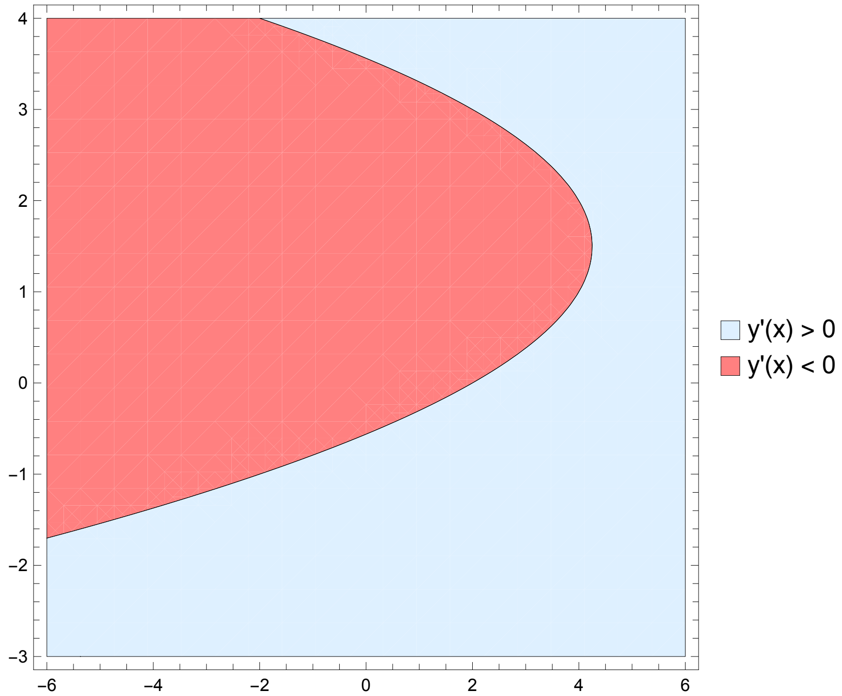
Завдання 1, пункт 3

Очевидно що y(x) зростає коли $y'(x) > 0$, а спадає коли $y'(x) < 0$.
так як нам з умови відомо що $y'(x) = y^2 - 3y + x - 2$, то досить це просто намалювати за допомогою функції RegionPlot.

In[58]:=

```
RegionPlot[{y^2-3 y+x-2>0,y^2-3 y+x-2<0},
{x,-6,6},{y,-3,4},
BoundaryStyle → {Black, Thin},
PlotStyle→{LightBlue,Pink},
PlotLegends→{"y'(x) > 0","y'(x) < 0"}
]
```

Out[58]=



Завдання 1 пункт 4

y^2 - 3y + x - 2 = 0

Точка максимума задовольняє наступні умови $y'(x) = y^2 - 3y + x - 2 = 0$ та $y''(x) < 0$

$y''(x) = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx} f(x, y) + \frac{d}{dy} f(x, y) *$ АЛЕ згадуючи першу умову [$y'(x) = 0$]

$y'(x) = 1 + (2y - 3) * y'(x) = 1 + (2y - 3)\left(y^2 - 3y + x - 2\right)$

матимемо$y''(x) = 1 + (2y - 3) * y'(x) = 1 + (2y - 3) * 0 = 1$,

а 1 > 0 завжди, отже у нас не буде локальних максимумів.

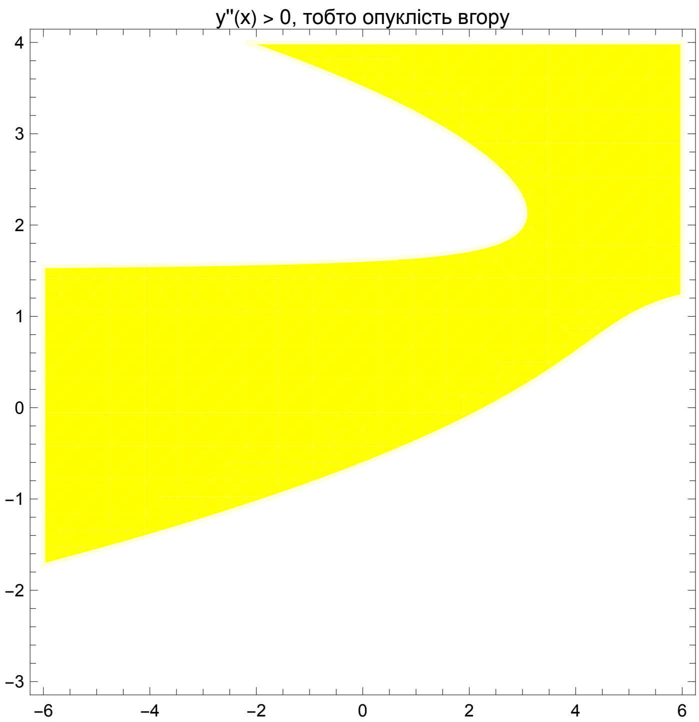
Завдання 1 пункт 5

Опуклість (вгору/вниз) задається знаком другої похідної, тобто y(x) опукла догори якщо $y''(x) > 0$ та опукла донизу якщо $y''(x) < 0$

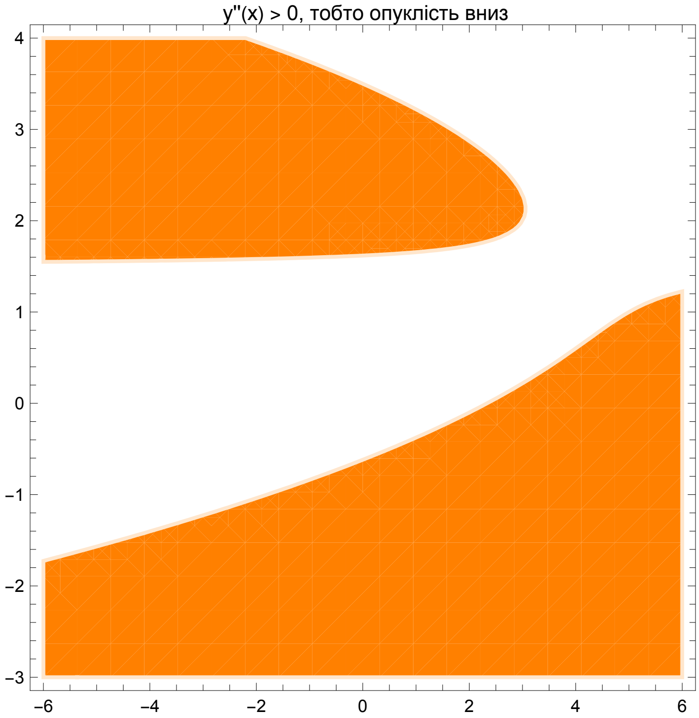
в попередньому пункті ми вже визначили що $y''(x) = 1 + (2\,y - 3)\left(y^2 - 3\,y + x - 2\right)$, отже залишилось лише це задати через функцію RegionPlot

In[55]:=
```
g[x_,y_]:=1+(2 y-3) (y^2-3 y+x-2);

RegionPlot[g[x,y]>0,
{x,-6,6},{y,-3,4},
BoundaryStyle → {LightYellow},
PlotStyle→{Yellow}
,PlotLabel→" y''(x) > 0, тобто опуклість вгору "]

RegionPlot[g[x,y]<0,
{x,-6,6},{y,-3,4},
BoundaryStyle → {LightOrange},
PlotStyle→{Orange},
PlotLabel→" y''(x) > 0, тобто опуклість вниз"]
```

Out[56]=



Out[57]=



Завдання 1 пункт 6

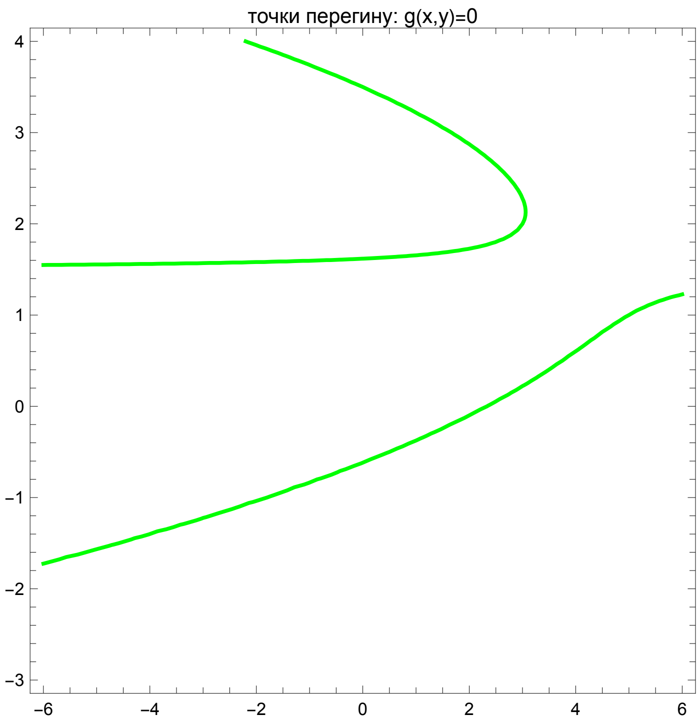
Точки перегину - точки де $y''(x) = 0$ => $1 + (2y - 3)\left(y^2 - 3y + x - 2\right) = 0$ =>

=> $(2y - 3)\left(y^2 - 3y + x - 2\right) = -1$ => $y^2 - 3y + x - 2 = \dfrac{-1}{2y - 3}$ => $x = \dfrac{-1}{2y - 3} - y^2 + 3y + 2$

Але щоб це зобразити достатньо використати функцію ContourPlot

In[59]:=
```
ContourPlot[1+(2 y-3) (y^2-3 y+x-2)==0,{x,-6,6},
{y,-3,4},
ContourStyle→{Thick,Green},
PlotLabel→"точки перегину: g(x,y)=0"
]
```

Out[59]=



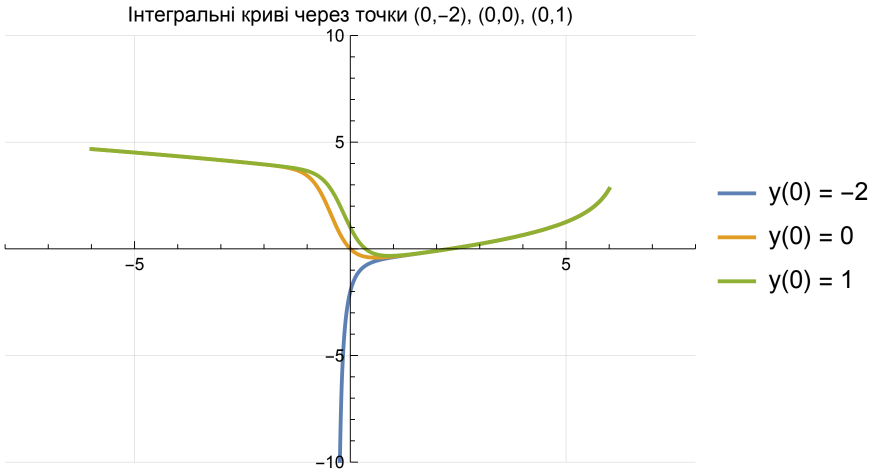
Завдання 1 пункт 7

Тут будемо використовувати функцію NDSolve для наближеного розв’язку рівнянь в даних точках,

In[60]:=

```
sol1=NDSolve[{y'[x]==y[x]^2-3*y[x]+x-2,y[0]==-2},y,{x, -0.32, 6}];
sol2=NDSolve[{y'[x]==y[x]^2-3*y[x]+x-2,y[0]==0},y,{x, -6, 6}];
sol3=NDSolve[{y'[x]==y[x]^2-3*y[x]+x-2,y[0]==1},y,{x, -6, 6}];

Plot[Evaluate[{y[x]/. sol1,y[x]/. sol2,y[x]/. sol3}],
{x,-6,6},
PlotRange→{{8, -8}, {10, -10}},
GridLines→Automatic,
PlotLabel→"Інтегральні криві через точки (0,-2), (0,0), (0,1)",
PlotLegends→ {"y(0) = -2", "y(0) = 0", "y(0) = 1"}
]
```

Out[63]=

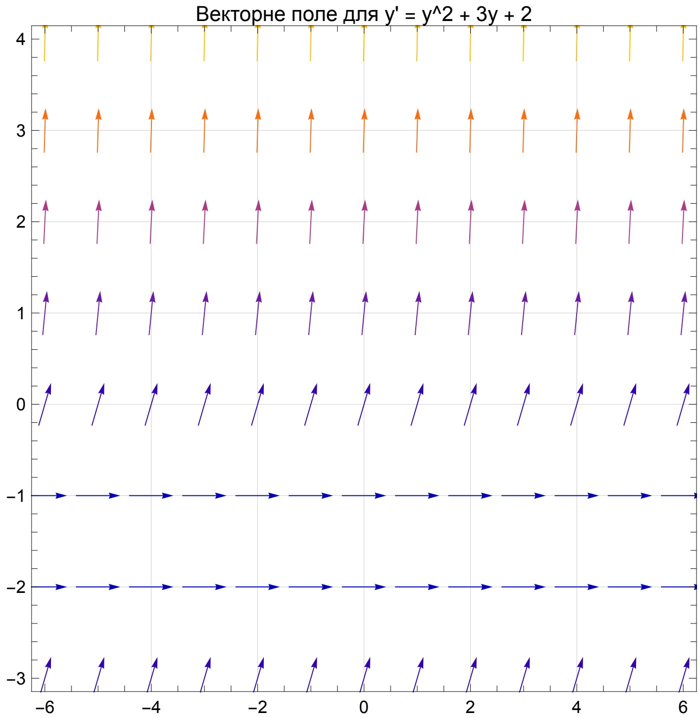


Завдання 2 пункт 1

g(y) = y^2 + 3y+ 2. Потрібно зобразити векторне поле

In[10]:=
```
g[y_] := y^2 + 3 y + 2;

VectorPlot[
 {1, g[y]},
 {x, -6, 6}, {y, -3, 4},
 VectorPoints → Flatten[Table[{x, y}, {x, -6, 6, 1}, {y, {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,
 VectorScale → {Small, Scaled[0.5], None},
 AxesLabel → {"x", "y"},
 PlotLabel → "Векторне поле для y' = y^2 + 3y + 2",
 GridLines → Automatic
]
```

Out[11]=



Завдання 2 пункт 2

$y'(x) = g(y) = y^2 + 3y + 2. \Rightarrow D = 9 - 8 \Rightarrow y_1, y_2 = \dfrac{-3 + -1}{2} = -1, -2$

точки спадання $y^2 + 3y + 2 < 0$; зростання y^2 + 3y+ 2 > 0

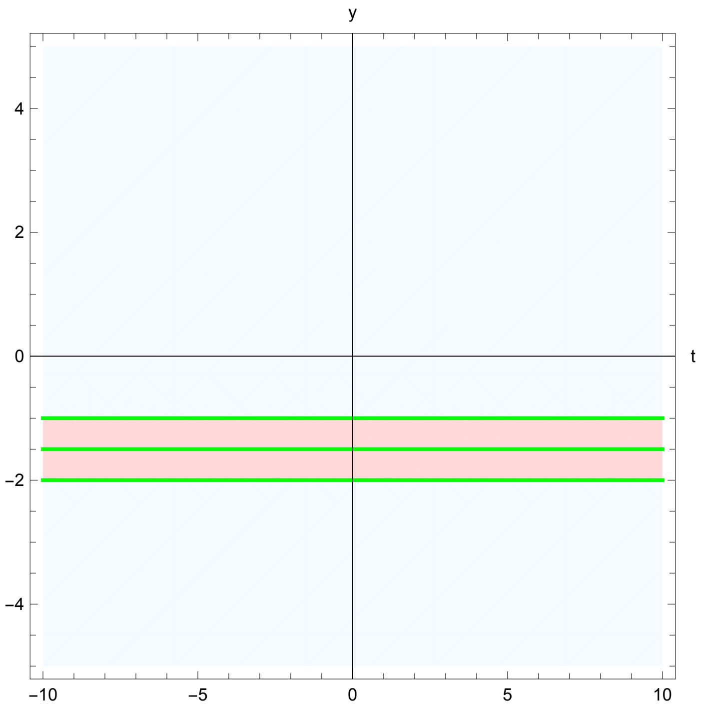
точки перегину => $y'' = 0 \Rightarrow y'' = \dfrac{d}{dy}(y')\,y' = (2y + 3)\left(y^2 + 3y + 2\right) \Rightarrow (2y + 3)\left(y^2 + 3y + 2\right) = 0 \Rightarrow$

$(2y + 3) = 0 = > y = \dfrac{-3}{2}$ and $y^2 + 3y + 2 = 0 = > y = -1, -2$

In[12]:=

```
g[y_] := y^2 + 3 y + 2


(* Область зростання: g(y) > 0 (голубий фон) *)
regionIncrease = RegionPlot[g[y] > 0, {t, -10, 10}, {y, -5, 5},
  PlotStyle → {LightBlue, Opacity[0.3]}, BoundaryStyle → None];

(* Область спадання: g(y) < 0 (рожевий фон) *)
regionDecrease = RegionPlot[g[y] < 0, {t, -10, 10}, {y, -5, 5},
  PlotStyle → {Pink, Opacity[0.3]}, BoundaryStyle → None];

(* Множина точок перегину: розв'язок (2y+3)(y^2+3y+2)=0, тобто y = -2, -3/2, -1 *)
inflectionLines = Graphics[{Green, Thick,
   Line[{{-10, -2}, {10, -2}}],
   Line[{{-10, -3/2}, {10, -3/2}}],
   Line[{{-10, -1}, {10, -1}}]}];


Show[regionIncrease, regionDecrease, inflectionLines,
  PlotRange → {{-10, 10}, {-5, 5}},
  Axes → True,
  AxesLabel → {"t", "y"}]
```

Out[16]=



Завдання 2 пункт 3

знайдемо розв’язок

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 3y + 2 \Rightarrow \int \frac{1}{y^2 + 3y + 2}\, dy = x + C \Rightarrow \int \frac{1}{(y+1)(y+2)}\, dy = x + C \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{y+1}\,dy - \int \frac{1}{y+2}\,dy = x + C \Rightarrow ln \left| \frac{y+1}{y+2} \right| = x + C \Rightarrow \frac{y+1}{y+2} = e^x C_1 \Rightarrow y = \frac{2 C_1 e^x - 1}{1 - C_1 e^x}$$

Розв’яжемо рівняння коші

$$y_0 = \frac{2 C_1 e^0 - 1}{1 - C_1 e^0} = \frac{2 C_1 - 1}{1 - C_1} \Rightarrow y_0 - y_0 C_1 = 2 C_1 - 1 \Rightarrow -C_1 (y_0 + 2) = -(y_0 + 1) \Rightarrow C_1 = \frac{y_0 + 1}{y_0 + 2}$$

Отже розв’язком буде

$$y = \frac{2 \frac{y_0+1}{y_0+2} e^x - 1}{1 - \frac{y_0+1}{y_0+2} e^x} = \frac{2 (y_0 + 1) e^x - (y_0 + 2)}{(y_0 + 2) - (y_0 + 1) e^x}$$

Асимптоти

рівняння вироджується коли знаменник = 0, тобто $(y_0 + 2) - (y_0 + 1) e^x = 0 \Rightarrow e^x = \frac{y_0 + 2}{y_0 + 1} \Rightarrow$

$x = ln \left| \frac{y_0 + 2}{y_0 + 1} \right|$ це і буде рівнянням асимптоти коли $\frac{y_0 + 2}{y_0 + 1} > 0$ ну тобто x дійсний це буде $\Leftrightarrow$

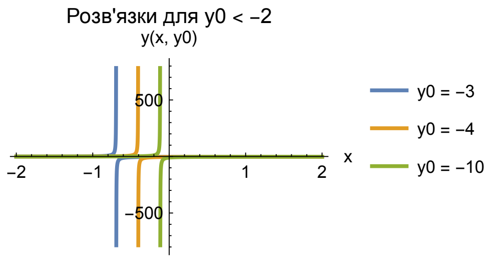
($y_0 + 2 > 0$ та $y_0 + 1 > 0$) або ($y_0 + 2 < 0$ та $y_0 + 1 < 0$). Тобто $y_0 \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$

Завдання 2 пункт 4

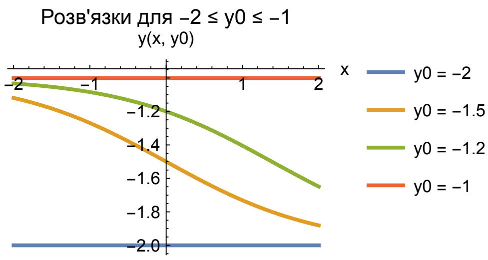
Як ми вже дізналися вище -1, -2 є розв’язками g(y), отже $y_0 \in [-2, -1]$, $y_0 \in (-\infty, -2)$, $y_0 \in (-1, +\infty)$

```
ClearAll["Global`*"];

ySol[x_, y0_] := (2 (y0 + 1) Exp[x] - (y0 + 2)) / ((y0 + 2) - (y0 + 1) Exp[x]);

xMin = -2;
xMax = 2;

(* ========== 1. y0 \in (-∞, -2) ========== *)
y0Region1 = {-3, -4, -10};

plotRegion1 = Plot[
  Evaluate@Table[ySol[x, y0], {y0, y0Region1}],
  {x, xMin, xMax},
  PlotRange → All,
  PlotLegends → Table["y0 = " <> ToString[y0], {y0, y0Region1}],
  PlotLabel → "Розв'язки для y0 < -2",
  AxesLabel → {"x", "y(x, y0)"}
];

(* ========== 2. y0 \in [-2, -1] ========== *)
y0Region2 = {-2, -1.5, -1.2, -1};

plotRegion2 = Plot[
  Evaluate@Table[ySol[x, y0], {y0, y0Region2}],
  {x, xMin, xMax},
  PlotRange → All,
  PlotLegends → Table["y0 = " <> ToString[y0], {y0, y0Region2}],
  PlotLabel → "Розв'язки для -2 ≤ y0 ≤ -1",
  AxesLabel → {"x", "y(x, y0)"}
];

(* ========== 3. y0 \in (-1, +∞) ========== *)
y0Region3 = {0, 1, 2, 3};

plotRegion3 = Plot[
  Evaluate@Table[ySol[x, y0], {y0, y0Region3}],
  {x, xMin, xMax},
  PlotRange → All,
  PlotLegends → Table["y0 = " <> ToString[y0], {y0, y0Region3}],
  PlotLabel → "Розв'язки для y0 > -1",
  AxesLabel → {"x", "y(x, y0)"}
];


(*GraphicsRow[{plotRegion1, plotRegion2, plotRegion3}, ImageSize → Large]*)
GraphicsRow[{plotRegion1}, ImageSize → Large]
GraphicsRow[{plotRegion2}, ImageSize → Large]
GraphicsRow[{plotRegion3}, ImageSize → Large]
```

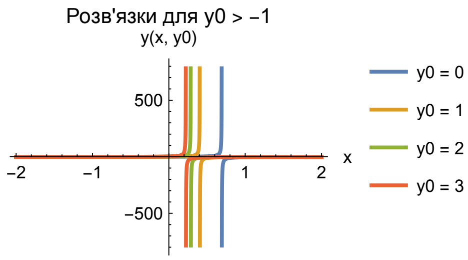
Out[49]=


Розв'язки для y0 < −2
y(x, y0)
500
−500
−2
−1
1
2
x
y0 = −3
y0 = −4
y0 = −10

Out[50]=


Розв'язки для −2 ≤ y0 ≤ −1
y(x, y0)
−2
−1
1
2
x
−1.2
−1.4
−1.6
−1.8
−2.0
y0 = −2
y0 = −1.5
y0 = −1.2
y0 = −1

Out[51]=

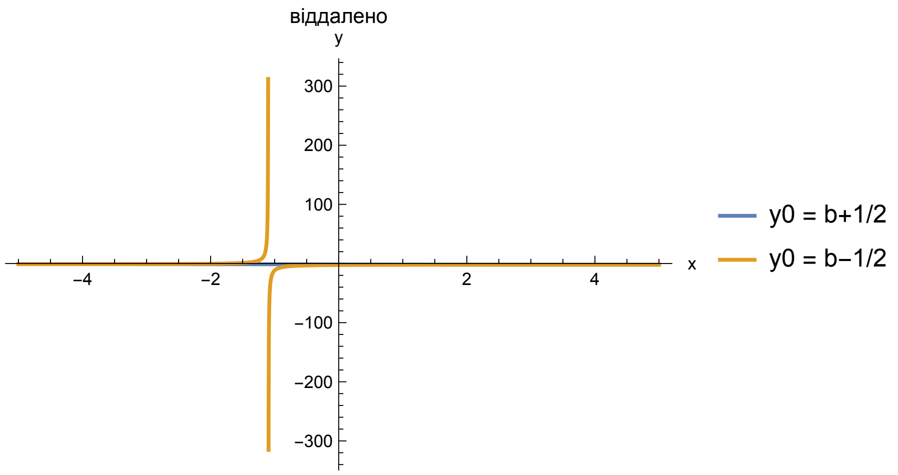


Завдання 2 пункт 5

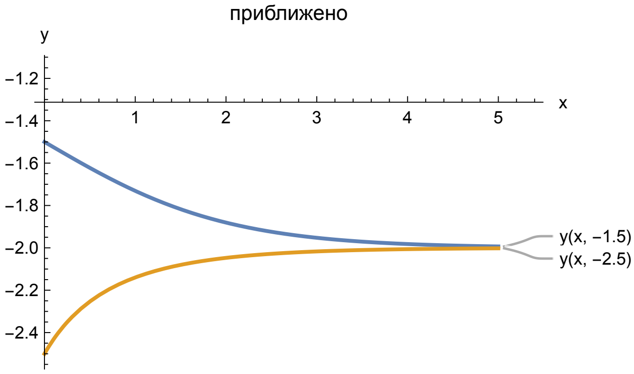
In[30]:=

```
b = -2;

gr1 = Plot[
   {ySol[x, b + 0.5], ySol[x, b - 0.5]},
   {x, -5, 5},
   PlotRange → All,
   PlotLegends → {"y0 = b+1/2", "y0 = b-1/2"},
   AxesLabel → {"x", "y"},
   PlotLabel→ "віддалено"
];


Show[gr1]

y1[x_] := -(2 Exp[x] + 1)/(1 + Exp[x]);
y2[x_] := (6 Exp[x] - 1)/(1 - 3 Exp[x]);

Plot[{y1[x], y2[x]}, {x, 0, 5}, PlotRange→All,
     PlotLabels→{"y(x, -1.5)", "y(x, -2.5)"},
      PlotLabel→ "приближено",
      AxesLabel→{"x","y"}
      ]
```

Out[32]=



Out[35]=



Тут двома різними способами знайдемо x, такий що $\left| y\left(x, b + \frac{1}{2}\right) - y\left(x, b - \frac{1}{2}\right) \right| < 10^{-3}$

In[36]:=

```
diff[x_] := y1[x] - y2[x];

NSolve[ Abs[diff[x]] == 10^-3 && x≥0, x, Reals]

FindRoot[ Abs[diff[x]] - 10^-3, {x, 2}]
```

Out[37]=

{{x → 7.19494}}

Out[38]=

{x → 7.19494}