Завдання для самостійної роботи

2.7. Нехай $f(n) = 3n^2 - n + 4$ та $g(n) = n\log n + 5$. Покажіть що
$$f(n) + g(n) = O(n^2).$$
2.8. Нехай $f(n) = \sqrt{n}$ та $g(n) = \log n$. Покажіть що
$$f(n) + g(n) = O(\sqrt{n}).$$

2.7 $f(n) = 3n^2 - n + 4 \quad g(n) = n\log(n) + 5$

$f(n) + g(n) = 3n^2 + n\log(n) - n + 9 \stackrel{?}{=} O(n^2)$

I) приберемо сталу 9

$3n^2 + n\log(n) - n$

II) розглядаємо функцію $j(n) = 4n^2$

$3n^2 + n\log(n) - n = 4n^2$

$-n^2 + n\log(n) - n = 0$

$n = 0 + \Delta \quad \forall\Delta > 0$

тоді наш $x_0 = 0 + \Delta \quad \forall\Delta > 0$

Отже $f(n) + g(n) \le O(4n^2) \sim O(n^2)$, при цьому $x_0 = 0$

P.S. Ми могли відкинути доданки $n\log(n)$ та $-n$, адже вони зростають повільніше, ніж $3n^2$, а очевидно що $4x^2 \geq 3x^2$

$3n^2 + n\log(n) - n + 9 \le Cn^2$

$C = 4 \quad // n^2$

$3 + \frac{\log(n)}{n} - \frac{1}{n} + \frac{9}{n^2} \le 4$

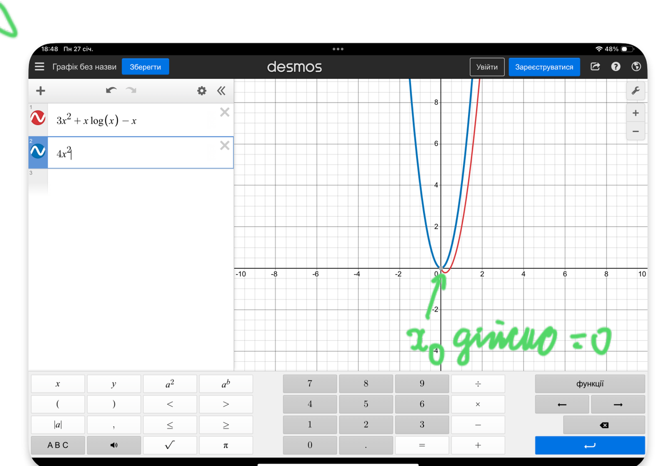
$\frac{\log(n)}{n} - \frac{1}{n} + \frac{9}{n^2} \le 1$

$\frac{\log(n)}{n} - \frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}$ спадна послідовність, яка $< 1 \sim x_0 = 4$

$\frac{\ln(4)}{4} - \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \approx 0{,}7 \; [\le 1]$

$0{,}35 \quad 0{,}25 \quad 0{,}6$

proof



№ 2.11

2.11. Нехай f(n) функція визначена у вправі 2.10. Розглянемо функцію

```
def g(n):
    sum = 0
    for i in range(1, n + 1):
        sum = sum + i + f(i)
    return sum
```

Визначте асимптотичну оцінку виконання функції g(n) у найгіршому випадку в термінах O–«великого». Що є результатом виконання функції g(n) для заданого натурального числа n. Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

12

```
def g(n):
    sum = 0                      | O(1)
    for i in range(1, n + 1):    O(n)
        sum = sum + i + f(i)     O(n^2) = ΣΣ
    return sum                   O(1)
```

Результат $O(n^2)$

На 2 останні питання Отримаємо відповідь розписавши

Можна $\sum_{i=1}^{n}\left(i + \sum_{j=1}^{i} j\right) = \sum_{i=1}^{n} i + \frac{i(i+1)}{2} =$

$= \frac{i(i+1)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^2 + i) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} =$

$= \frac{n^3 + 6n^2 + 5n}{6}$

```
def g(n):
    sum = (n**3 + 6*n**2 + 5*n) // 6   | O(1)
    return sum   | O(1)
```

№ 2.10

2.10. Визначте асимптотичну оцінку виконання функції у найгіршому випадку в термінах O–«великого» для функції:

```
def f(n):
    sum = 0
    for i in range(1, n + 1):
        sum = sum + i
    return sum
```

Що є результатом виконання наведеної функції для заданого натурального числа n? Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

```
def f(n):
    sum = 0                      O(1)
    for i in range(1, n + 1):    O(n)
        sum = sum + i            O(n)
    return sum                   O(1)
```

$2O(1) + 2O(n) = O(n) \leftarrow$ найбільше

Результат - Σ арифметичної прогресії від 1 до n

Покращення:

```
def bobs(n):
    sum = (1+n)*n // 2   | O(1)
    return sum   | O(1)
```

результат : $O(1)$

№ 2.12

2.12. Нехай f(n) функція визначена у вправі 2.10, а функція g(n) – у вправі 2.11. Розглянемо функцію

```
def h(n):
    return f(n) + g(n)
```

Визначте асимптотичну оцінку виконання функції h(n) у найгіршому випадку в термінах O–«великого». Що є результатом її виконання для заданого натурального числа n. Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

Очевидно, що $O(n) + O(n^2) = O(n^2)$

Очевидно можна покращити до $O(1)$

```
def h(n):
    sum = (n + 1)*n // 2 + (n**3 + 6*n**2 + 5*n) // 6   O(1)
    return sum   O(1)
```

2.13

2.13. Знайдіть асимптотичний час виконання програми у явному вигляді, якщо для нього відоме рекурентне співвідношення

a) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ T(n-1) + O(1), & n \geq 1. \end{cases}$

b) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n \leq a, \ a > 1; \\ T(n-a) + O(1), & n > a. \end{cases}$

c) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ aT(n-1) + O(1), & n \geq 1, a > 1. \end{cases}$

d) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n \leq a, \ a > 1; \\ aT(n-a) + O(1), & n > a. \end{cases}$

e) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ T(n-1) + O(n), & n \geq 1. \end{cases}$

f) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n \leq a, \ a > 1; \\ T(n-a) + O(n), & n > a. \end{cases}$

g) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1; \\ aT([n/a]) + O(1), & n \geq 2, a \geq 2. \end{cases}$

h) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1; \\ aT([n/a]) + O(n), & n \geq 2, a \geq 2. \end{cases}$

a) $T(n-1) + C \le (T(n-2) + C) + C =$

$= T(n-2) + C(1+1) = T(n-2) + C(2) \le$

$\le T(n-n) + C(n) \sim O(n)$

d) $aT(n-a) + C \le a(aT(n-2a) + C) + C =$

$= a^2T(n-2a) + aC + C = a^2T(n-2a) +$

$+ C(a+1) = a^2T(n-2a) + Ca + C$

$\le a^2(aT(n-3a) + C) + Ca + C =$

$= a^3T(n-3a) + a^2C + aC + C =$

$\dots \le a^{[\frac{n}{a}]} + C(a^{[\frac{n}{a}]} - 1) = O(a^n)$

g) $aT([n/a]) + C \le$

$\le a(aT([\frac{n}{a^2}]) + C) + C =$

$= a^2T([\frac{n}{a^2}]) + aC + C =$

$= a^2T([\frac{n}{a^2}]) + aC + C \le$

$\le |\text{let } \log_a n = m| \le$

$\le a^m T([\frac{n}{a^m}]) + C\sum_{i=0}^{\log_2 m} a^i =$

$= a^m C + C\frac{a^m - 1}{a - 1} = O(n)$

P.S. $a^{\log_a n} = n$

h) $T(n) = aT[n/a] + C(n) \le$

$\le a(aT[n/a^2] + aC[\frac{n}{a}] + Cn =$

$= a^2T[n/a^2] + aC[\frac{n}{a}] + C(n) \le$

$\le a^2(aT[n/a^3] + C[\frac{n}{a^2}]) + aC[\frac{n}{a}] + C[n] \le$

$\le a^3T[n/a^3] + a^2C[\frac{n}{a^2}] + aC[\frac{n}{a}] + Cn \le$

$\le \dots = a^{\log_a n} C + \log_a n \, C(n) = O(n \cdot \log_a n)$