GUIA 2

Emmanuel Rojas Fredini

1. EJERCICIO 1

1.1. MRP

Funcion a aproximar:

$$\phi = 1 + sin(\frac{\pi x}{2})$$

En el dominio: $0 \leq x \leq 1$
Usaremos una aproximacion:

$$\phi \approx \hat{\phi} = \Psi + \sum N_m a_m$$

Luego planteamos:

$$\int W_l R dx = 0$$
$$\int W_l[\phi - \hat{\phi}]dx = 0$$
$$\int W_l[\phi - (\Psi + \sum N_m a_m)]dx = 0$$
$$\int W_l \sum N_m a_m dx = \int W_l(\phi - \Psi)dx$$

Osea que nuestro sistema queda:

$$K_{lm} = \int W_l N_m dx$$
$$f_l = \int W_l(\phi - \Psi)dx$$

Con las condiciones:

- Ψ es igual a ϕ en los bordes Γ
- N_m es nula en los bordes Γ

Utilizamos para el caso de colocación puntual:

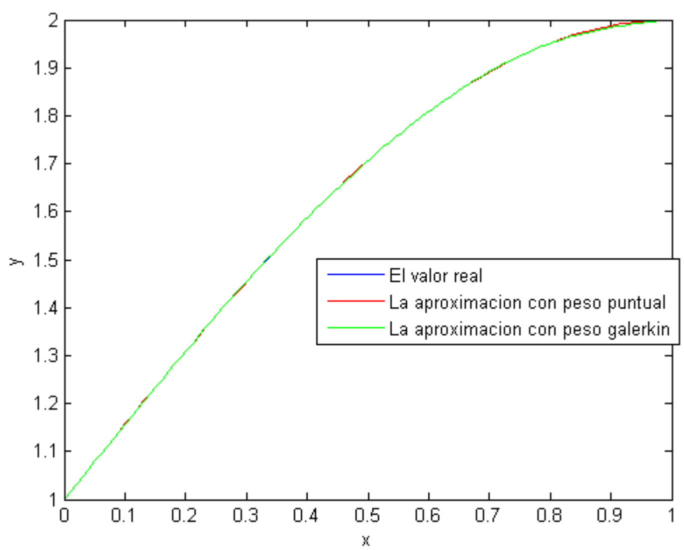
$$N_m = x^m(1-x)$$
$$W_l = \delta(x - x_l)$$

Y para el caso de colocación tipo Galerkin:

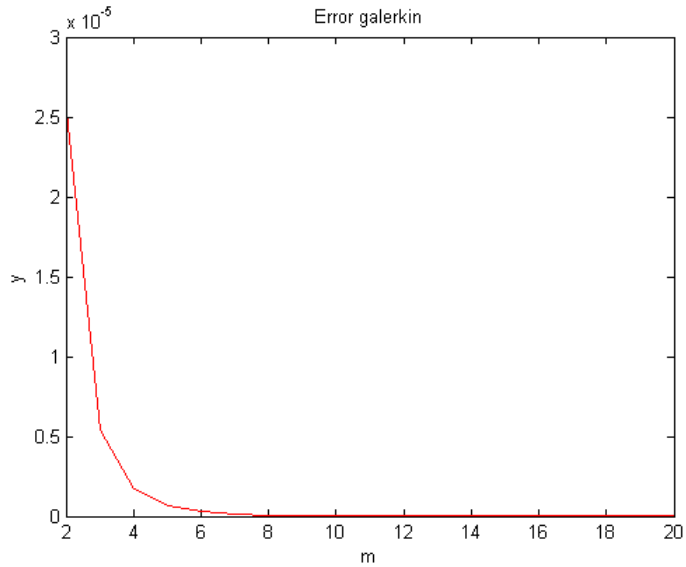
$$N_m = sin(m\pi x)$$
$$W_l = sin(l\pi x)$$

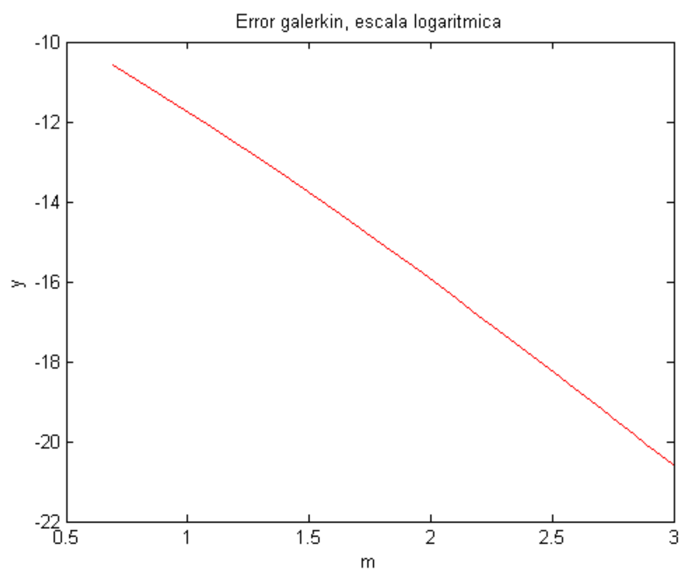
1.2. Resultados

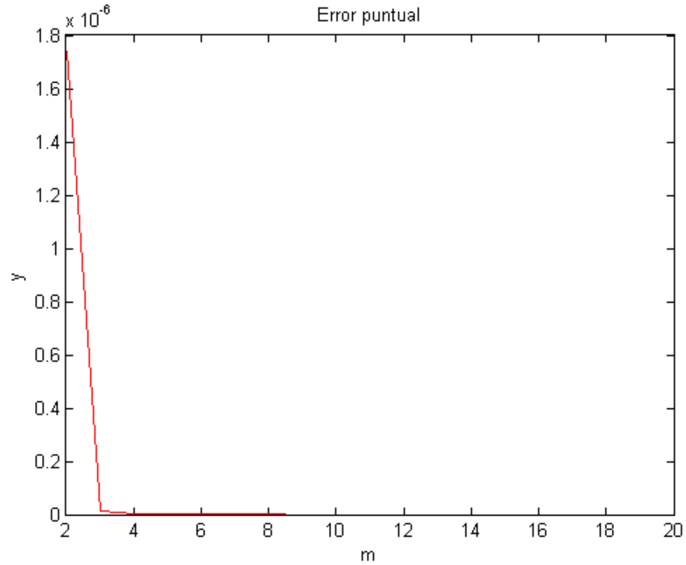
El resultado comparativo fue:

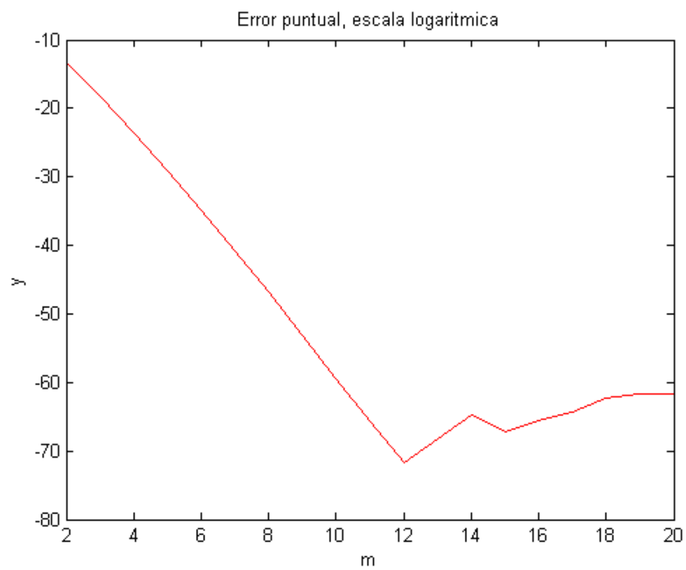


Usando 4 funciones de aproximacion.
En cuanto a el análisis de los errores usando colocación puntual y Galerkin:


Error galerkin
x 10-5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
y
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
m


Error galerkin, escala logaritmica
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
y
0.5
1
1.5
2
2.5
3
m





Vemos que la convergencia del método en este caso fue levemente mejor con colocacion puntual.

2. EJERCICIO 2

2.1. Solucion por MRP:

Nuestra ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \phi + 1 = 0$$

Para Ω:

$$0 \leq x \leq 1$$

Para Γ:

$$x = 0 \qquad \wedge \qquad x = 1$$

Con CI:

$$\phi(0) = 0$$
$$\frac{d\phi(1)}{dx} = -\phi$$

$$\hat{\phi} = \Psi + \sum N_m a_m$$

$$\int W_l R_\Omega d\Omega + \int \bar{W}_l R_\Gamma d\Gamma = 0$$
$$\int W_l(\frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2} + \hat{\phi} + 1)d\Omega + \int \bar{W}_l(\frac{d\hat{\phi}}{dx} + \phi)d\Gamma = 0$$

$$-\int \frac{dW_l}{dx}\frac{d\hat{\phi}}{dx}dx + \int W_l(\hat{\phi} + 1)dx - W_l\frac{d\hat{\phi}}{dx}|_{x=0} + W_l\frac{\hat{\phi}}{dx}|_{x=1} + \bar{W}_l(\frac{d\hat{\phi}}{dx} + \phi)|_{x=1} = 0$$

Si tomamos:

$$\bar{W}_l(x) = -W_l(x)$$
$$\bar{W}_l(0) = 0$$

$$-\int \frac{dW_l}{dx}\frac{d\hat{\phi}}{dx}dx + \int W_l\hat{\phi}dx - W_l\phi|_{x=1} = -\int W_l dx$$

Selección de las funciones de forma:

$$N_m(x) = x^m$$
$$\frac{d\hat{\phi}}{dx} = 0 + \sum a_m m x^{m-1}$$

Usamos Galerkin para as funciones de peso, luego:

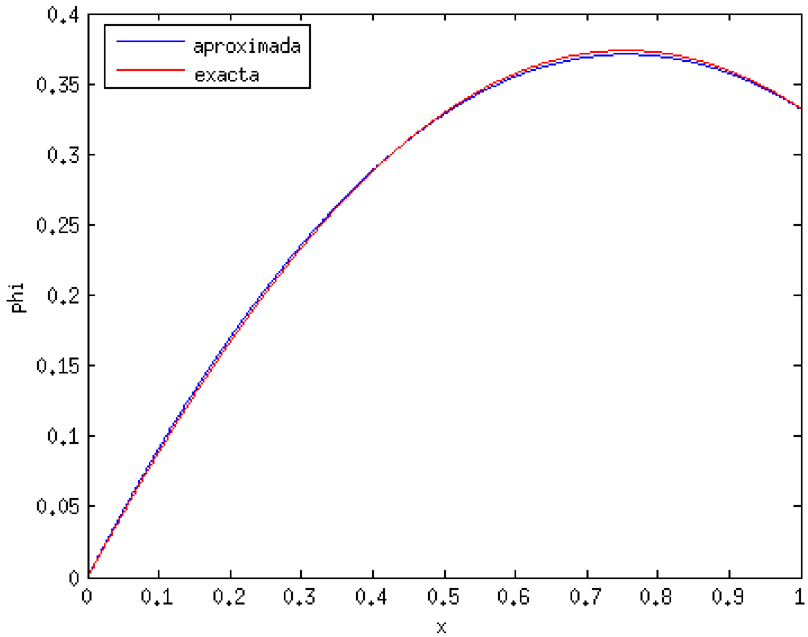
$$W_l(x) = x^l$$
$$\frac{dW_l}{dx} = l x^{l-1}$$

Desarrolando llegamos a tener:

$$K_l m = -\int l m x^{l+m-2} dx + \int x^{l+m} dx - x^{l+m}|_{x=1}$$
$$f_l = -\int x^l dx$$

2.2. Resultados

Aplicar el resultado antes enunciado se obtuvo el siguiente grafico:



Se realizo tomando tres funciones de interpolación.

3. EJERCICIO 3

3.1. Solucion por MRP:

Nuestra ecuación diferencial es:

$$k\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -Q$$
$$k[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}] + Q = 0$$

Para Ω:

$$-1 \leq x \leq 1$$
$$-1 \leq y \leq 1$$

Para Γ:

$$x = + - 1$$
$$y = + - 1$$

Con CI:

$$\phi = 1 - y^2 \qquad x = + - 1$$
$$\phi = 1 - x^2 \qquad y = + - 1$$

Aproximación:

$$\phi \approx \hat{\phi} = \psi + \sum N_m a_m$$

$$N_m = cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)$$

Estas funciones tiene la propiedad de que: $N_m(x,y) \ = \ 0 \quad \vee \ x \ \in \ \Gamma \ \vee \ todo \ m$
Luego podemos usar Ψ para las condiciones Dirichlet de los bordes.

$$\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} = -cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)(m\pi - \frac{\pi}{2})^2 \tag{1}$$
$$\frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} = -cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)(m\pi - \frac{\pi}{2})^2 \tag{2}$$

Notemos que $\frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}$ por simetria de N_m.

$$\int W_l R_\Omega d\Omega = 0$$

$$\int [k(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}) + Q] W_l d\Omega = 0$$

La función de borde:

$$\Psi = (1 - x^2) + (1 - y^2)$$

Luego:

$$\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} = 2 - cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)(m\pi - \frac{\pi}{2})^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} = 2 - cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)(m\pi - \frac{\pi}{2})^2 \quad (4)$$

Utilizaremos Galerkin es decir:

$$W_l = cos(l\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(l\pi y - \frac{\pi}{2}y)$$

Entonces reemplazando podemos expresar al problema como el siguiente sistema:

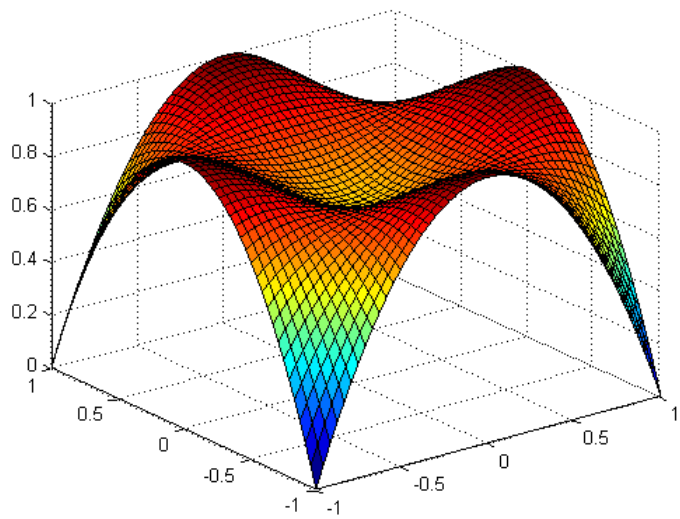
$$K_m l = -\int\int [k2cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)(m\pi - \frac{\pi}{2})^2] W_l dxdy$$

$$f_l = -\int\int Q W_l dxdy - \int\int k4 W_l dxdy$$

Donde se debe reemplazar W_l para llegar a la expresion final, no se lo reemplazo para comprimir un poco la ecuación.

3.2. Resultados

Utilizando el resultado de arriba se realizo la siguiente grafica:



La aproximación se hizo utilizando tres funciones de forma.

4. EJERCICIO 4

La ecuación diferencial es:

$$\partial\frac{\sigma_x}{\partial x} + \partial\frac{\tau_{xy}}{\partial y} - b_x = 0$$
$$\partial\frac{\tau_{yx}}{\partial x} + \partial\frac{\sigma_y}{\partial y} - b_y = 0$$

Con *CC* Dirichlet:

$$\bar{u} = 0 \qquad\qquad y = \pm 1 \qquad \Gamma_u$$

La *CC* Neumann de u_x:

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y - \frac{E\left(1-y^2\right)}{1+\nu} = 0 \qquad\qquad x = \pm 1 \qquad \Gamma_t$$

La funcion que se busca es una funcion vectorial por lo cual nuestra aproximacion debera tambien ser vectorial:

$$u_x \approx \hat{u_x} = \Psi_x + \sum N_m a_m$$
$$u_y \approx \hat{u_y} = \Psi_y + \sum N_m a_m$$

Al ser la deducción idéntica para la componente u_x y u_y solo desarrollaremos la componente u_x. Además debemos notar que las funciones de peso pueden ser diferentes para la componente u_x y la componente u_y, por ellos la función de peso luego será $W_{l,x}$ y $W_{l,y}$ respectivamente. Lo mismo es valido para las funciones de peso de los contornos.

Para satisfacer las condiciones de contorno Dirichlet podemos definir:

$$\Psi_x = 0$$
$$\Psi_y = 0$$

Luego la ecuación de los residuos es:

$$\int W_{l,x}\left(\partial\frac{\hat{\sigma_x}}{\partial x}+\partial\frac{\hat{\tau_{xy}}}{\partial y}-b_x\right)d\Omega+\int \bar{W_{l,x}}\left(\hat{\sigma_x}n_x+\hat{\tau_{xy}}n_y-\frac{E\left(1-y^2\right)}{1-\nu}\right)d\Gamma=0$$

Sabemos que las tensiones dependen de la derivada primera de los desplazamientos, por ellos debilitaremos la expresión para evitar que nos quede una segunda derivada respecto a los desplazamientos.

$$-\int \partial\frac{W_{l,x}}{\partial x}\hat{\sigma_x}+\partial\frac{W_{l,x}}{\partial y}\hat{\tau_{xy}}-W_{l,x}b_x d\Omega+\int_{\Gamma_u+\Gamma_t} W_{l,x}\left(\hat{\sigma_x}n_x+\hat{\tau_{xy}}n_y\right)d\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma_t}\bar{W_{l,x}}\left(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y-\frac{E\left(1-y^2\right)}{1-\nu}\right)d\Gamma=0$$

Si tomamos:

$$\begin{array}{ll} \bar{W_{l,x}}\left(x,y\right)=-W_{l,x}\left(x,y\right) & \Gamma_t \\ \bar{W_{l,x}}\left(x,y\right)=0 & \Gamma_u \end{array}$$

La ecuación se reduce a:

$$-\int \partial\frac{W_{l,x}}{\partial x}\hat{\sigma_x}+\partial\frac{W_{l,x}}{\partial y}\hat{\tau_{xy}}-W_{l,x}b_x d\Omega+\int_{\Gamma_t} W_{l,x}\frac{E\left(1-y^2\right)}{1-\nu}d\Gamma=0$$

De forma analoga se puede llegar a la expression para u_y:

$$-\int W_{l,y}\tau_{xy}+\partial\frac{W_{l,y}}{\partial y}\hat{\sigma_y}-W_{l,y}b_y d\Omega+\int_{\Gamma_t} W_{l,y}t_y d\Gamma=0$$

Podemos expresar estas dos ecuaciones en forma matricial como:

$$\int_\Omega\left(\bar{\bar{L}}\bar{\bar{W}}_l\right)^t\bar{\bar{D}}\bar{\bar{L}}\hat{\phi}d\Omega+\int_{\Gamma_t}\bar{\bar{W}}_l\bar{t}d\Gamma=\bar{0}$$

Donde

$$
\bar{\bar{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}
$$

$$
\bar{\bar{W}}_l = \begin{pmatrix} W_{l,x} & 0 \\ 0 & W_{l,y} \end{pmatrix}
$$

$$
\bar{\bar{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}
$$

$$
\bar{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}
$$

Si reemplazamos por la aproximación y armamos el sistema con los a_m como incognitas obtenermos:

$$
K_{lm} = \int_{\Omega} \left(\bar{\bar{L}}\bar{\bar{W}}_l\right)^t \bar{\bar{D}}\bar{\bar{L}}\bar{N}_m d\Omega
$$

$$
f_l = \int_{\Omega} \bar{W}_l \bar{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\bar{W}}_l \bar{t} d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\bar{\bar{L}}\bar{\bar{W}}_l\right)^t \bar{\bar{D}}\bar{\bar{L}}\bar{\Psi} d\Omega
$$