METODOS NUMERICOS Y SIMULACION

Docentes:
Dr. Norberto Nigro
MSc. Gerardo Franck
Ing. Pablo Kler

Guía adicional

Método de Diferencias Finitas

2010

PROBLEMAS PARA PROGRAMAR:

1. **(*Podría ser de examen*) La ecuación que gobierna el perfil de temperatura en un fluido viscoso que circula entre dos placas paralelas (y = 0 e y = 2H) es:**

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{4U^2\mu}{H^4k}(H-y)^2$$

Donde, μ, k y U son la viscosidad, conductividad térmica y velocidad máxima del fluido, respectivamente. Si $\mu = 0.1$, $k = 0.08$, $H = 3.0$ y $U = 3.0$; calcule la distribución de temperatura cuando una de las placas es mantenida a $T = 0$ y la otra a $T = 5$, usando el método de diferencias finitas, con un espaciamiento de la malla de $\Delta y = 0.5\,\mathrm{H}$.

2. **Resolver el problema de conducción del calor en un recinto rectangular (2D) en coordenadas cartesianas de dimensiones Lx=3 y Ly=1, el cual es gobernado por la siguiente ecuación:**

$$\kappa\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial y^2}\right) = Q$$

sujeta a las siguientes condiciones de contorno:
- **Temperatura impuesta a un valor nulo en todos los contornos.**

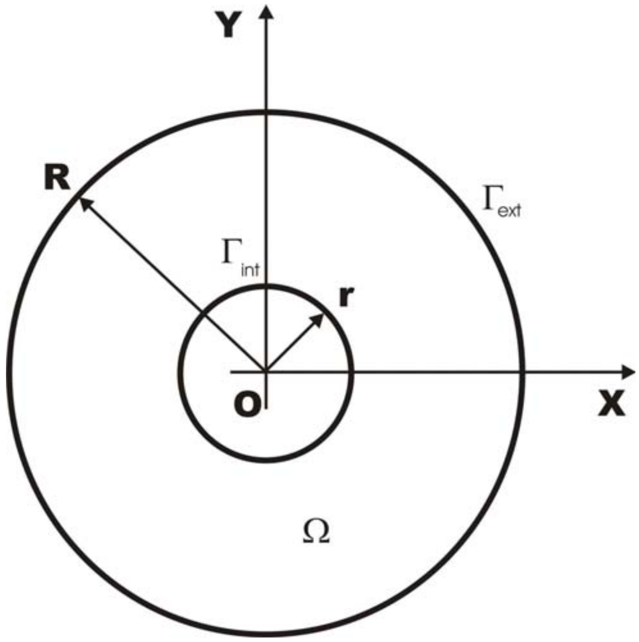
Asumir que la conductividad térmica es unitaria y la fuente de calor es nula. Usando un esquema en diferencias de segundo orden, con un espaciamiento homogéneo en cada eje usando un dx=0.5 y dy=0.25,

- **obtener la solución y graficarla.**
- **Como cambia la solución si en lugar de fijar la temperatura del contorno al valor nulo la fijamos a otro valor, digamos T=100 en el contorno.**

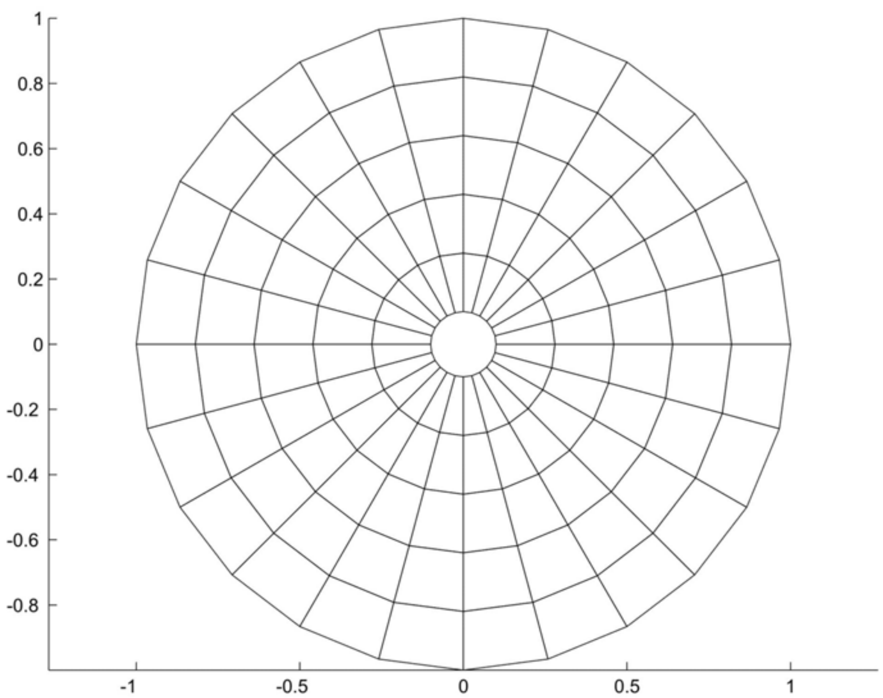
3. **Resuelva el mismo problema anterior pero ahora utilice las siguientes condiciones de contorno:**

- **Temperatura impuesta en los contornos superior, izquierdo y derecho**
- **Flujo de calor nulo (adiabático) en el contorno inferior.**

4. **Resolver la misma ecuación de los problemas anteriores, con un esquema de segundo orden, cambiando el recinto rectangular por otro con forma de corona circular. En la figura siguiente se observan los detalles geométricos del problema donde se ve que el radio interior es 0.1 y el exterior es de radio unitario**



Genere una malla con 5 elementos en la dirección radial y 20 en la dirección circunferencial similar a la que se observa en la figura siguiente:



Las siguientes condiciones de contorno son:

- **Temperatura impuesta a un valor nulo en el circulo interior**
- **Temperatura impuesta a un valor unitario en el circulo exterior**

Verifique experimentalmente el orden de aproximación

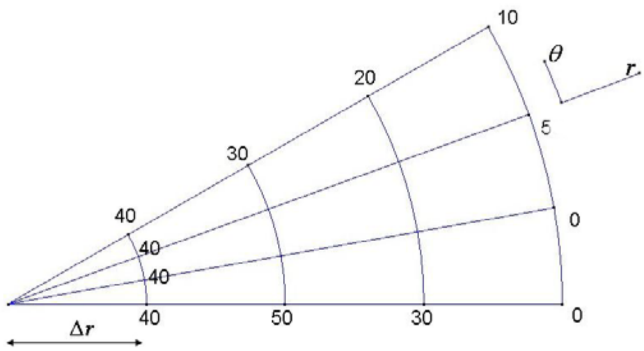
Sugerencia: utilice una transformación apropiada como la vista en teoría para llevar el recinto circular a uno rectangular.

5. **Resuelva el mismo problema anterior pero en lugar de imponer la temperatura en el contorno exterior imponer flujo normal nulo manteniendo el orden de aproximación. Verifique experimentalmente el orden de aproximación.**

6. **(*Examen*) Obtener la forma en diferencias finitas de la ecuación de Laplace:**

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

Con respecto a un sistema de coordenadas cilíndrico (r,θ). La temperatura a lo largo de los lados de un sector anular es mantenida con los valores mostrados por el diagrama de la figura de abajo. Obtener la distribución de temperatura usando la malla visualizada en dicha figura en la cual $\Delta r = \frac{1}{4}$ y $\Delta \theta = \frac{\pi}{18}$.



7. **(*Examen*) Resuelva la siguiente ecuación diferencial ordinaria:**

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} + \phi = 0$$

Sujeta a las siguientes condiciones de contorno:

$\phi(y = 0) = 1;$

$\phi(y = 1) = 0;$

Usando un esquema de diferencias de segundo orden, con el siguiente espaciamiento:

- **Espaciamiento de malla $\Delta y = 0.25$.**
- **Espaciamiento de malla $\Delta y = 0.125$**
- **Extrapolar una solución exacta mediante el método de Richardson (ver pag. 34 del Zienkiewicz-Morgan)**
- **Compare las tres soluciones anteriores con la exacta.**

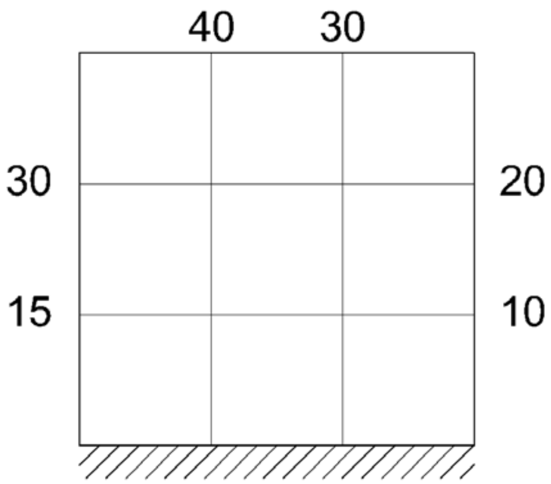
- **Verifique computacionalmente que el orden de error obtenido es el solicitado**

8. **Resuelva el mismo problema anterior pero con las siguientes condiciones de contorno:**

$$\frac{d\phi}{dy}\Big|_{y=0} = -0.5$$

$$\phi(y = 1) = 0;$$

9. **(*Examen*) La temperatura a lo largo de los tres lados de una placa cuadrada es mantenida en los valores mostrados por la figura de abajo, mientras el lado restante es térmicamente aislado. Obtener la distribución de temperatura estacionaria, por el método de diferencias finitas, usando la malla cuadrada mostrada en la figura mencionada.**



10. **(*Examen*)Dada la ecuación de calor no estacionaria:**

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2};$$

Definida en:

$$0 \leq x \leq L, t \geq 0$$

donde $\phi(x,t)$ **es la variable dependiente del problema, que en nuestro caso es la temperatura;** α **: es un coeficiente de difusividad térmica constante. Al dominio lo podemos considerar como una tira de longitud semi-infinita de ancho L que continua variando indefinidamente en el tiempo. Desde un punto de vista práctico, la solución se obtiene solo por un tiempo finito** $T_{\max}$**.**

Las condiciones de borde son en:

$$x = 0 \rightarrow \phi(x,t)=\phi_0$$

En

$$x = L \rightarrow \phi(L,t) = \phi_L$$

y la condición inicial será:

$$\phi(x,0) = f_0(x)$$

Usar una discretización temporal y otra espacial con nodos uniformemente espaciados.

Plantear el problema por el método de diferencias finitas, utilizando:

Un esquema centrado en el espacio, adelante en el tiempo (forward time, centered space).

Un esquema centrado en el espacio, atrás en el tiempo (backward time, centered space).

Usar un esquema temporal mas sofisticado, como Crank-Nicholson.

Plantear cada uno de ellos en forma matricial.

Como resolvería el problema anterior con las siguientes condiciones de contorno:

En

$$x = 0 \rightarrow \phi(x,t)=\phi_0$$

y en

$$x = L \rightarrow -\alpha.\frac{\partial \phi}{\partial x} + h(\phi - \phi_\infty) = 0,\ t > 0$$

la condición inicial será:

$$\phi(x,0) = f_0(x)$$

Donde h: **es el coeficiente de transferencia de calor por convección.**
Haga un comentario sobre la inestabilidad de cada uno de los esquemas.

PROBLEMAS TEORICOS-PRACTICOS: (*Examen*)

11. Probar que la aproximación:

$\frac{d^2\phi}{dx^2}|_l \approx a\phi_{l+1} + b\phi_l + c\phi_{l-1}$ **es exacta cuando** ϕ **es una función cuadrática de x, de tal manera que los coeficientes son los de la aproximación correspondientes a la segunda derivada vista en la teoría. Mostrar que esta aproximación es además exacta si** ϕ **es una cúbica.**

12. Sobre una malla con diferencias finitas, la cuarta derivada es reemplazada por la siguiente aproximación:

$$\frac{d^4\phi}{dx^4} \approx a\phi_{l+2} + b\phi_{l+1} + c\phi_l + d\phi_{l-1} + e\phi_{l-2}$$

Donde a,b,c,d y e son constantes. Mostrar que si se requiere que esta aproximación sea exacta, ϕ debe ser una función cuártica de x.

¿Qué valor deben tener las constantes?

¿Cuál es el orden de error en esta aproximación?