Guia 1: Segunda parte

Emmanuel Rojas Fredini

Septiembre 3, 2010

1 Ejercicio 4

1.1 Solucion por MDF:

Nuestra ecuacion diferencial es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \bullet (\Omega E \phi) = \nabla \bullet (\nu \nabla \phi)$$

Para:

$$0 \leq x \leq 10$$
$$0 \leq y \leq 1$$

Con constantes:

$$\omega = 5.10^{-7} \frac{m^2}{Vs}$$
$$\nu = 10^{-8} \frac{m^2}{s}$$

Condiciones de Contorno:

$$\Phi(0,0,t) = 0V$$
$$\Phi(10,1,t) = 10V$$
$$\phi(\bar{x},0) = e^{-(\frac{x-0.5}{0.05})^2} e^{-(\frac{y-0.5}{0.05})^2}$$

Por definicion sabemos que:

$$E = -\nabla \Phi$$
$$0 = \nabla^2 \Phi$$
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Entonces nuestra ecuacion nos queda:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

Primero debemos resolver $\Phi(x, y)$.

1.2 Resolucion de $\Phi(x,y)$:

Usaremos puntos ficticios sobre los bordes, por eso en vez de una grilla de WxH temdremos una de $(W+2)x(H+2)$. Desde ahora en adelante nuestro W sera el ancho deseado mas 2 y H analogamente.
Debemos tener una condicion para cada punto del interior WxH de la grilla, esta ecuacion estara dada por el stencil del problema. Este sera:

$$\frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}\Phi_{i-1,j} + \frac{1}{\Delta y^2}\Phi_{i,j-1} - \frac{-2}{\Delta x^2}\Phi_{i,j} - \frac{-2}{\Delta y^2}\Phi_{i,j} + \frac{1}{\Delta y^2}\Phi_{i,j+1} + \frac{1}{\Delta x^2}\Phi_{i+1,j} = 0$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}\Phi_{i-1,j} + \frac{1}{\Delta y^2}\Phi_{i,j-1} - \left(\frac{-2}{\Delta x^2} - \frac{-2}{\Delta y^2}\right)\Phi_{i,j} + \frac{1}{\Delta y^2}\Phi_{i,j+1} + \frac{1}{\Delta x^2}\Phi_{i+1,j} = 0$$

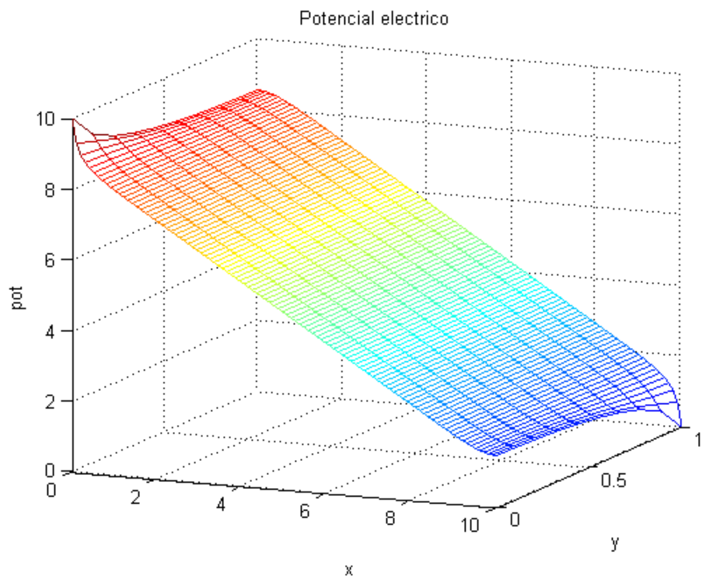
Para los puntos $(2,2)$ y $(W-1,H-1)$ aplicaremos las 2 condiciones de Dirichlet:

$$I_{2,2} = 10V$$
$$I_{W-1,H-1} = 0V$$

Para los bordes, en su parte interna, por ejemplo para el lado superior $2 \leq x \leq W-1 \qquad y = H$. Utilizaremos las diferencias centradas en los bordes verdaderos, con la condicion de derivada 0, como dice el enunciado.

Y para las 4 esquinas de puntos ficticios pondremos la condicion de que sean igual a 0.
Con todas estas ecuaciones, tenemos 1 ecuacion por cada punto, considerando los puntos ficticios. El sistema ya se puede resolver.

La superficie de Φ obtenida con este sistema es:


Potencial electrico
pot
x
y
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
0
0.5
1

1.3 Solucion atravez del tiempo:

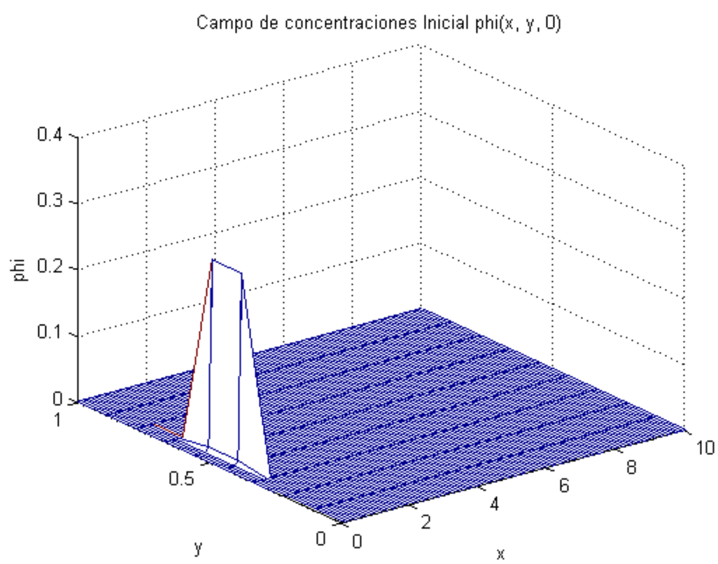
Utilizaremos un esquema Explicito para resolver la ecuacion deferencial y obtener $\phi(x, y, t)$.

Podemos expresar la iteracion atravez del tiempo como:

$$\begin{aligned}
\phi_{i,j}^{n+1} = [\phi_{i-1,j}^{n} \left(\frac{\nu}{\Delta x^2} + \frac{\Omega E_x}{2\Delta x} \right) + \phi_{i,j-1}^{n} \left(\frac{\nu}{\Delta y^2} + \frac{\Omega E_y}{2\Delta y} \right) + \\
\phi_{i,j}^{n} \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{\nu^2}{\Delta x^2} - \frac{\nu^2}{\Delta y^2} \right) + \\
\phi_{i,j+1}^{n} \left(\frac{\nu}{\Delta y^2} - \frac{\Omega E_y}{2\Delta y} \right) + \phi_{i+1,j}^{n} \left(\frac{\nu}{\Delta x^2} - \frac{\Omega E_x}{2\Delta x} \right)]\Delta t
\end{aligned}$$

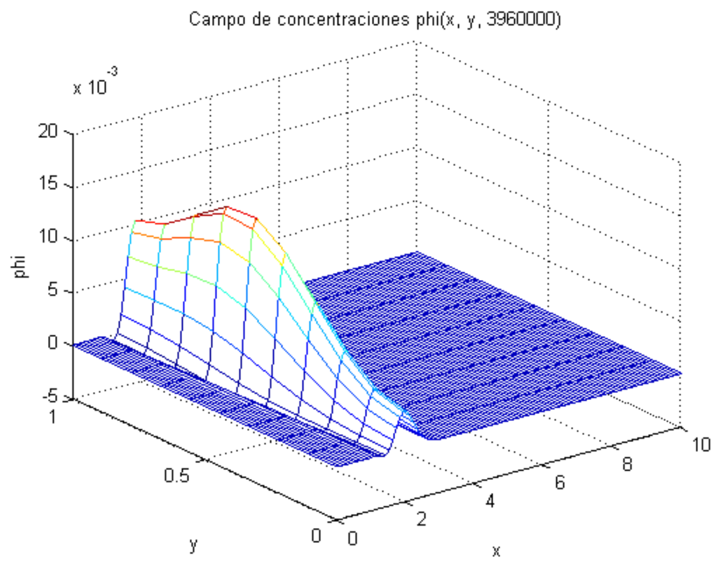
Aplicaremos esta iteracion en todos los puntos internos de la grilla para avanzar en ese nodo en el tiempo.
En los nodos exteriores, aplicando la condicion de Newmann tendremos que estos puntos seran iguales a 2 nodos mas "adentro" de la grilla, esto es porque se usan diferencias centradas.

Por otro lado, para el estado inicial se tomo el que da el enunciado. La superficie de este estado es:



Avanzamos en el tiempo con paso $\Delta t = 40000$, $N_x = 100$, $N_y = 10$, haciendo 100 iteraciones en el tiempo. Se eligieron estos valores porque dan un numero de Fourier estable 0.39, tomando el maximo de las 2 dimensiones.

En un momento de 100 iteraciones la superficie da:



En un momento de 200 iteraciones la superficie da: