Guia 2

Emmanuel Rojas Fredini

Noviembre 8, 2010

1 Ejercicio 1

1.1 MRP

Funcion a aproximar:

$$\phi = 1 + sin(\frac{\pi x}{2})$$

En el dominio: $0 \leq x \leq 1$
Usaremos una aproximacion:

$$\phi \approx \hat{\phi} = \Psi + \sum N_m a_m$$

Luego planteamos:

$$\int W_l R dx = 0$$
$$\int W_l [\phi - \hat{\phi}] dx = 0$$
$$\int W_l [\phi - (\Psi + \sum N_m a_m)] dx = 0$$
$$\int W_l \sum N_m a_m dx = \int W_l (\phi - \Psi) dx$$

Osea que nuestro sistema queda:

$$K_{lm} = \int W_l N_m dx$$
$$f_l = \int W_l (\phi - \Psi) dx$$

Con las condiciones:

- Ψ es igual a ϕ en los bordes Γ
- N_m es nula en los bordes Γ

Utilizamos para el caso de colocacion puntual:

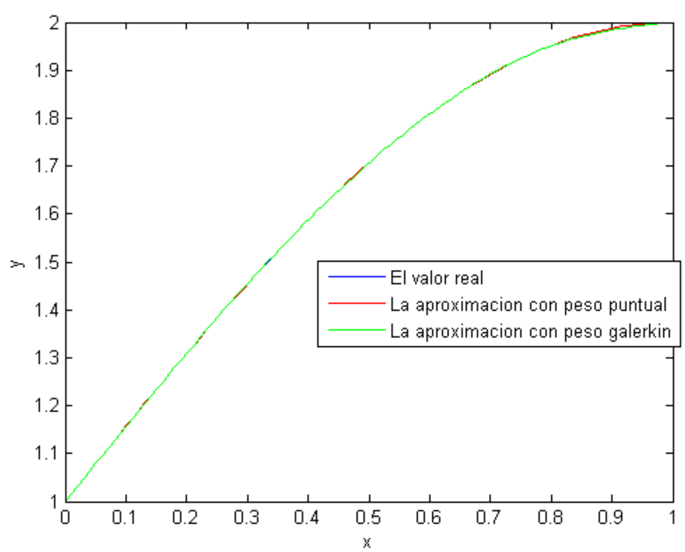
$$N_m = x^m(1-x)$$
$$W_l = \delta(x - x_l)$$

Y para el caso de colocacion tipo Galerkin:

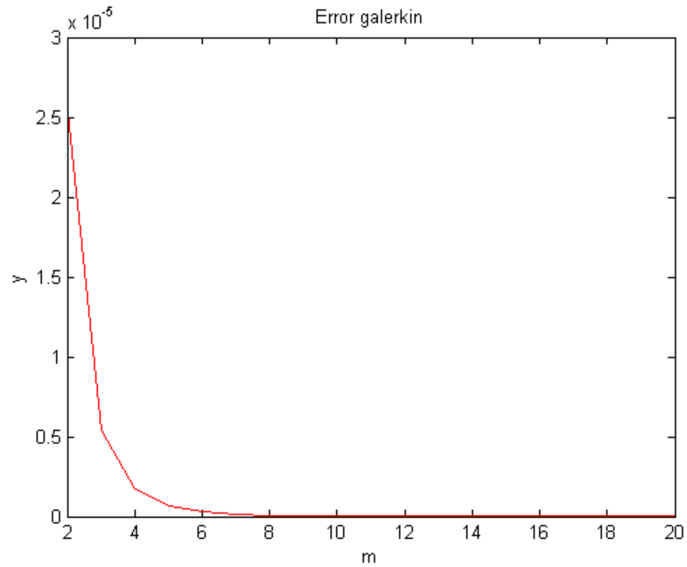
$$N_m = sin(m\pi x)$$
$$W_l = sin(l\pi x)$$

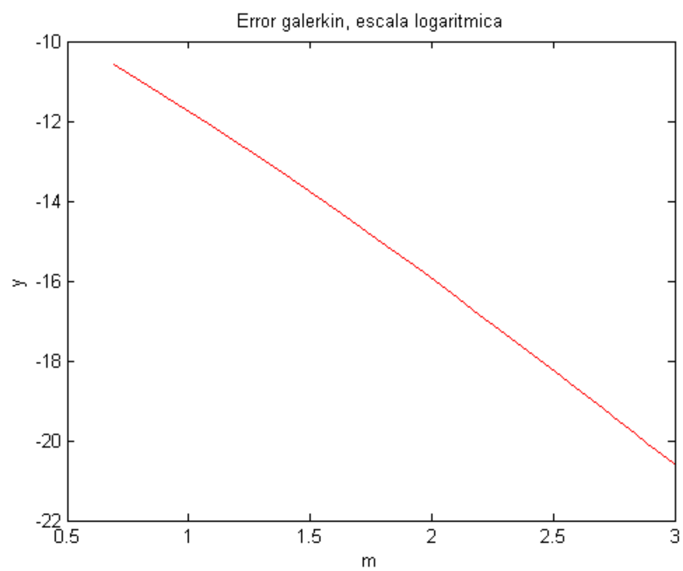
1.2 Resultados

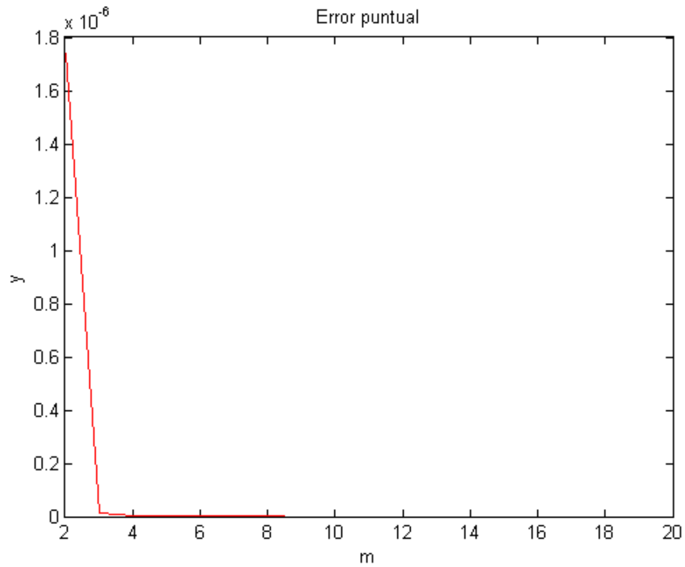
El resultado comparativo fue:

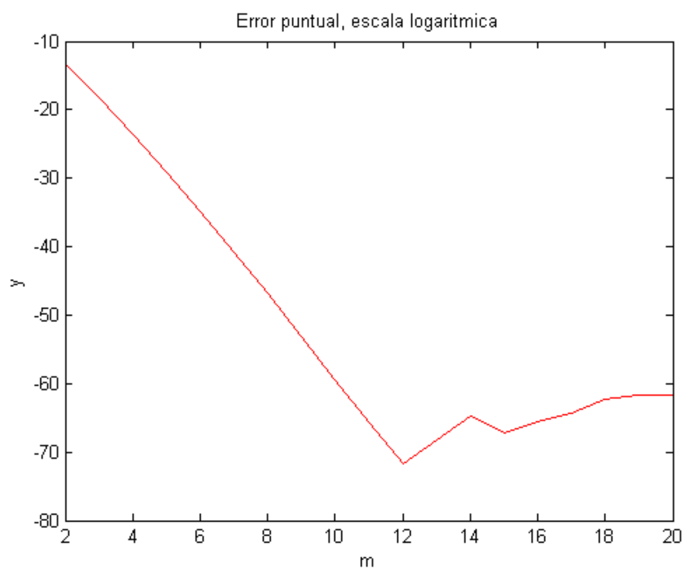


Usando 4 funciones de aproximacion.
En cuanto a el analisis de los errores usando colocacion puntual y Galerkin:


Error galerkin
x 10^-5
y
m
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


Error galerkin, escala logaritmica
y
m
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
0.5
1
1.5
2
2.5
3





Vemos que la convergencia del metodo fue levemente mejor con colocacion puntual, pero esto puede deberse a que en colocacion puntual se utilizo otra funcion de forma que en el metodo Galerkin.

2 Ejercicio 2

2.1 Solucion por MRP:

Nuestra ecuacion diferencial es:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + Q + 1 = 0$$

Para Ω:

$$0 \leq x \leq 1$$

Para Γ:

$$x \in [0, 1]$$

Con CI:

$$\Phi(0) = 0$$
$$\frac{d\phi(1)}{dx} = 1$$

$$\hat{\phi} = \Psi + \sum N_m a_m$$

$$\int W_l R_\omega d\omega + \int \bar{W}_l R_\Gamma d\Gamma = 0$$
$$\int W_l(\frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2} + \hat{\phi} + 1)d\omega + \int \bar{W}_l(\frac{d\hat{\phi}}{dx} - 1) = 0$$

$$-\int \frac{dW_l}{dx}\frac{d\hat{\phi}}{dx}dx + \int \bar{W}_l(\hat{\phi}+1)dx - W_l\frac{d\hat{\phi}}{dx}|_{x=0} + W_l\frac{\hat{\phi}}{dx}|_{x=1} + \bar{W}_l(\frac{d\hat{\phi}}{dx} - 1)|_{x=1} = 0$$

Si tomamos:

$$\bar{W}_l(x) = -W_l(x)$$
$$W_l(x) = 0 \qquad \vee\, x = 0$$

$$-\int \frac{dW_l}{dx}\frac{d\hat{\phi}}{dx}dx + \int W_l\hat{\phi}dx = -W_l|_{x=1} - \int W_l dx$$

Selecion de las funciones de forma:

$$N_m(x) = x^m$$
$$\frac{d\hat{\phi}}{dx} = 0 + \sum a_m m x^{m-1}$$

Usamos galerkin para as funciones de peso, luego:

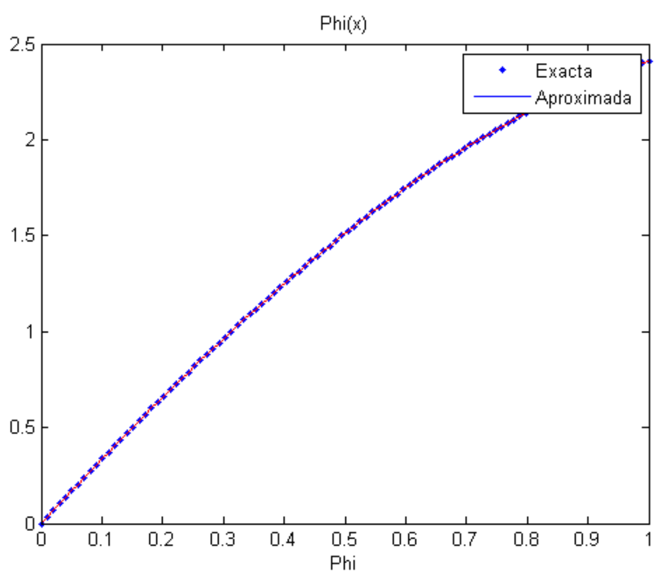
$$W_l(x) = x^l$$
$$\frac{dW_l}{dx} = l x^{l-1}$$

Desarrolando llegamos a tener:

$$K_l m = -\int l m x^{l+m-2} dx + \int x^{l+m} dx$$
$$f_l = -1^l - \int x^l dx$$

2.2 Resultados

Aplicar el resultado antes enunciado se obtuvo el siguiente grafico:



Se realizo tomando 8 funciones de interpolacion.

3 Ejercicio 3

3.1 Solucion por MRP:

Nuestra ecuacion diferencial es:

$$k\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -Q$$

$$k[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}] + Q = 0$$

Para Ω:

$$-1 \leq x \leq 1$$
$$-1 \leq y \leq 1$$

Para Γ:

$$x = +-1$$
$$y = +-1$$

Con CI:

$$\phi = 1 - y^2 \qquad x = +-1$$
$$\phi = 1 - x^2 \qquad y = +-1$$

Aproximacion:

$$\phi \approx \hat{\phi} = \psi + \sum N_m a_m$$

$$N_m = cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)$$

Estas funciones tiene la propiedad de que: $N_m(x,y) = 0 \quad \vee \ x \in \Gamma \ \vee \ todo \ m$
Luego podemos usar Ψ para las condiciones Dirichlet de los bordes.

$$\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} = -cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)(m\pi - \frac{\pi}{2})^2 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} = -cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)(m\pi - \frac{\pi}{2})^2 \tag{2}$$

Notemos que $\frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}$ por simetria de N_m.

$$\int W_l R_\Omega d\Omega = 0$$

$$\int [k(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}) + Q]W_l d\Omega = 0$$

La funcion de borde:

$$\Psi = (1 - x^2) + (1 - y^2)$$

Luego:

$$\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} = 2 - cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)(m\pi - \frac{\pi}{2})^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} = 2 - cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)(m\pi - \frac{\pi}{2})^2 \quad (4)$$

Utilizaremos Galerkin es decir:

$$W_l = cos(l\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(l\pi y - \frac{\pi}{2}y)$$

Entonces reemplazando podemos expresar al problema como el siguiente sistema:

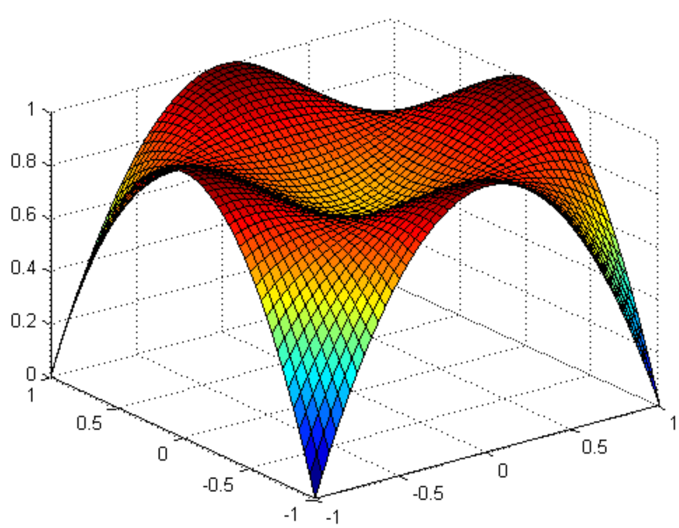
$$K_m l = -\int\int [k2cos(m\pi x - \frac{\pi}{2}x)cos(m\pi y - \frac{\pi}{2}y)(m\pi - \frac{\pi}{2})^2]W_l dxdy$$

$$f_l = -\int\int QW_l dxdy - \int\int k4W_l dxdy$$

Donde se debe reemplazar W_l para llegar a la expresion final, no se lo reemplazo para comprimir un poco la ecuacion.

3.2 Resultados

Utilizando el resultado de arriba se realizo la sieguiente grafica:



La aproximacion se hizo utilizando 3 funciones de forma.

4 Ejercicio 4

4.1 Deduccion

Nuestra ecuacion diferencial es:

$$k[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}] = -Q$$

Con CI:

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} && \vee\Gamma_\phi \\ k\frac{\partial\phi}{\partial n} &= -\bar{q} + h(\phi - \phi_0) && \vee\Gamma_q \end{aligned}$$

Aproximacion:

$$\phi \approx \hat{\phi} = \Psi + \sum N_m a_m$$

Tendremos:

$$\mathcal{L}(\phi) = k\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$

Luego para las CI:

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}(\phi) = k\frac{\partial\phi}{\partial n} - h(\phi - \phi_0) \\ &\mathcal{M}(\phi) = \phi \end{aligned}$$

Los residuos de las CI son:

$$R_q = k\frac{\partial\phi}{\partial n} - h(\phi - \phi_0) + \bar{q}$$

Entonces nuestra aproximacion sera de la forma:

$$\int R_\Omega W_l d\Omega + \int R_q \bar{W}_l d\Gamma_q = 0$$

Tomaremos funciones de forma tal que:

$$N_m = 0 \qquad \vee \ \ todo \ \ m \ \ en \ \ \Gamma_\phi$$

Y funcion de borde tal que:

$$\Psi = \bar{\phi}$$

De esta forma cumpliremos la condicion de contorno de tipo Dirichlet.
El residuo del dominio sera:

$$R_\Omega = k[\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial y^2}] + Q$$

Reemplazando todo esto en la formulacion que habiamos empezado:

$$\int k[\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial y^2}]W_l d\Omega + \int QW_l d\Omega + \int [k\frac{\partial\phi}{\partial n} - h(\phi - \phi_0) + \bar{q}]\bar{W}_l d\Gamma_q = 0$$

Debilitamos usando el lema de Green, luego tenemos:

$$-\int k[\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\frac{\partial W_l}{\partial x} + \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y}\frac{\partial W_l}{\partial y}]d\Omega + \int k\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial n}W_l d\Gamma_{\phi+q} + \int QW_l d\Omega + \int [k\frac{\partial\phi}{\partial n} - h(\phi - \phi_0) + \bar{q}]\bar{W}_l d\Gamma_q = 0$$

Eligiendo $\bar{W}_l$ tal que se nos cancele la condicion de contorno Newmann y una W_l apropieda:

$$\begin{array}{ll} W_l = 0 & \vee\ \Gamma_\phi \\ \bar{W}_l = -W_l & \vee\ \Gamma_q \end{array}$$

Entonces:

$$-\int k[\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\frac{\partial W_l}{\partial x} + \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y}\frac{\partial W_l}{\partial y}]d\Omega + \int QW_l d\Omega + \int [h(\phi - \phi_0) - \bar{q}]W_l d\Gamma_q = 0$$

Luego expresando como sistema:

$$K_l m = -\int k[\frac{\partial N_m}{\partial x}\frac{\partial W_l}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y}\frac{\partial W_l}{\partial y}]d\Omega + \int hN_m W_l d\Gamma_q$$

$$f_l = -\int QW_l d\Omega + \int [h\phi_0 + \bar{q}]W_l d\Gamma_q + \int k[\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial W_l}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial W_l}{\partial y}]d\Omega - \int h\Psi W_l d\Gamma_q$$