Guia 3

Emmanuel Rojas Fredini

Diciembre 22, 2010

1 Ejercicio 1

Ecuacion Diferencial:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \tag{1}$$

Nuestra aproximacion sera:

$$\phi \approx \hat{u} = \sum a_m N_m(x) \tag{2}$$

1.1 Funciones de Forma

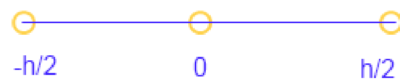
Usaremos elementos lineales, compuestos por 3 nodos, y con funciones de forma cuadraticas.
Las funciones de forma seran del tipo:

$$N_m = a_m x^2 + b_m x + c_m \tag{3}$$

Tendremos las funciones:

- N_i
- N_j
- N_k

La disposicion de nodos sera:



Y crearemos las funciones del elemento con la siguientes condiciones:

- N_i es 1 en $x = \frac{-h}{2}$ y 0 en $x = 0$ y $x = \frac{h}{2}$
- N_j es 1 en $x = 0$ y 0 en $x = \frac{-h}{2}$ y $x = \frac{h}{2}$
- N_k es 1 en $x = \frac{h}{2}$ y 0 en $x = \frac{-h}{2}$ y $x = 0$

Con estas condiciones armamos el sistema:

$$
\begin{array}{llll}
a_i \left(\dfrac{-h}{2}\right)^2 & +b_i \dfrac{-h}{2} & +c_i & = 1 \\
a_i 0^2 & +b_i 0 & +c_i & = 0 \\
a_i \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 & +b_i \dfrac{h}{2} & +c_i & = 0
\end{array}
$$

Podemos ver que esto es lo mismo que el sistema lineal:

$$
\bar{\bar{K}}^e = k\Delta^e \begin{pmatrix} \left(\frac{-h}{2}\right)^2 & \frac{-h}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \left(\frac{h}{2}\right)^2 & \frac{h}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Es decir:

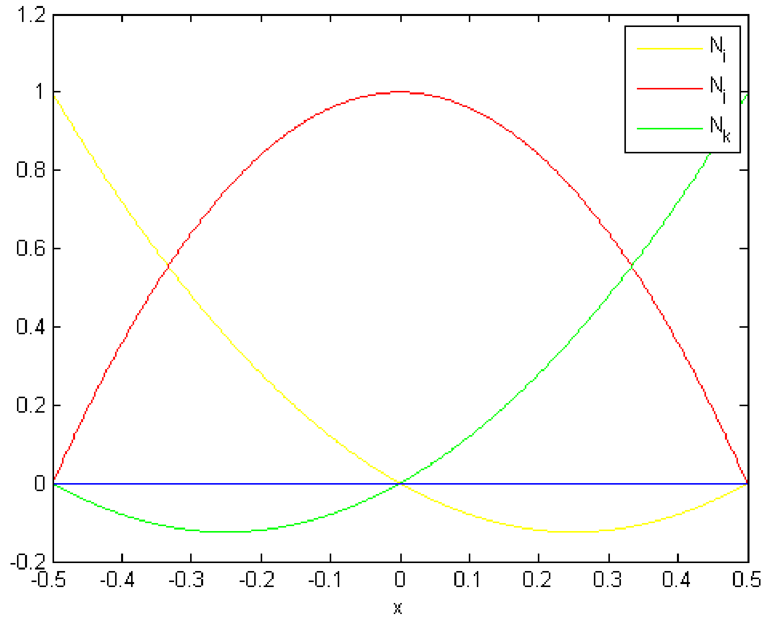
$$
\bar{\bar{M}} \bar{a_i} = \bar{f_i}
$$

Podemos ver que para el resto de las funciones(N_j y N_k) la matriz $\bar{\bar{M}}$ es la misma, pero usamos $\bar{a_m}$ y $\bar{f_m}$ con $m \in j, k$. Resolviendo estos 3 sistemas podemos calcular los coeficientes de las 3 funciones de forma:

- $\bar{\bar{M}} \bar{a_i} = \bar{f_i}$
- $\bar{\bar{M}} \bar{a_j} = \bar{f_j}$

- $\bar{\bar{M}}\bar{a_k} = \bar{f_k}$

Con $h = 1$ las funciones de forma quedan:



Sus derivadas son:

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} = 2a_i$$
$$\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} = 2a_j$$
$$\frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} = 2a_k$$

1.2 Metodo de Elementos Finitos

$$-\int W_l \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - f \right) dx = 0$$
$$\int W_l \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} dx = \int W_l f dx$$

No debilitaremos la expresion ya que no se pide imponer condiciones Newmann, en la que la debilitacion nos eliminaria terminos, y usamos funciones de forma cuadraticas, asi que la segunda derivada es una cte.

Reemplzamos $\hat{u}$:

$$\int W_l \frac{\partial^2 \left(\sum N_m a_m\right)}{\partial x^2} dx = \int W_l f dx$$
$$\sum \int W_l \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx a_m = \int W_l f dx$$

Usaremos Galerkin, es decir $W_l = N_l$:

$$\sum \int N_l \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx a_m = \int N_l f dx$$

Entonces la matrices elmentales del problema seran:

$$K^e_{l,m} = \int N_l \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx \tag{4}$$
$$f^e_l = \int N_l f dx \tag{5}$$

1.3 Un ejemplo

Resolveremos un problema con 5 nodos, es decir 2 elementos. Notemos que al haber tratado las funciones de forma de manera local(es decir con su centro en el nodo j), teniendo estas como unico parametro el ancho del elemento(h), luego la funcion de forma N_i del elemento e_1 es igual a la del elemento e_2, y de igual manera para el resto de las funciones de forma. Notar que se puede tratar de esta forma, solo se tiene que tener en cuanta en los extremos de integracion, siendo estos dentro del entorno de la funcion de forma. Y la otra cuestion es que en $\bar{f}$ integramos $f(x)$ y N_l donde la funcion de forma esta de forma local, la solucion sera mover en cada elemento $f(x)$ al entorno local del elemento e integrar en este. Otra forma habria sido mover las funciones de forma a la posicion gloabal.

La matriz elemental del elemento 1:

$$\bar{\bar{K}}^{e_1} \bar{a}^{e_1} = \begin{pmatrix} \int N_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} dx & \int N_i \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} dx & \int N_i \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} dx \\ \int N_j \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} dx & \int N_j \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} dx & \int N_j \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} dx \\ \int N_k \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} dx & \int N_k \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} dx & \int N_k \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int N_i f\left(x\right)^{e_1} dx \\ \int N_j f\left(x\right)^{e_1} dx \\ \int N_k f\left(x\right)^{e_1} dx \end{pmatrix}$$

La matriz elemental del elemento 2:

$$\bar{\bar{K}}^{e_2} \bar{a}^{e_2} = \begin{pmatrix} \int N_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} dx & \int N_i \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} dx & \int N_i \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} dx \\ \int N_j \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} dx & \int N_j \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} dx & \int N_j \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} dx \\ \int N_k \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} dx & \int N_k \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} dx & \int N_k \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int N_i f\left(x\right)^{e_2} dx \\ \int N_j f\left(x\right)^{e_2} dx \\ \int N_k f\left(x\right)^{e_2} dx \end{pmatrix}$$

Ensablando la matriz global da:

$$\bar{\bar{K}}\bar{a} = \begin{pmatrix} K_{1,1}^{e_1} & K_{1,2}^{e_1} & K_{1,3}^{e_1} & 0 & 0 \\ K_{2,1}^{e_1} & K_{2,2}^{e_1} & K_{2,3}^{e_1} & 0 & 0 \\ K_{3,1}^{e_1} & K_{3,2}^{e_1} & K_{3,3}^{e_1} + K_{1,1}^{e_2} & K_{1,2}^{e_2} & K_{1,3}^{e_2} \\ 0 & 0 & K_{2,1}^{e_2} & K_{2,2}^{e_2} & K_{2,3}^{e_2} \\ 0 & 0 & K_{3,1}^{e_2} & K_{3,2}^{e_2} & K_{3,3}^{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^{e_1} \\ f_2^{e_1} \\ f_3^{e_1} + f_1^{e_2} \\ f_2^{e_2} \\ f_3^{e_2} \end{pmatrix}$$

2 Ejercicio 2

Ecuacion Diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+Q-c\left(T-T_{amb}\right)=0 \tag{6}$$

- Donde k cte escalar.
- Donde Q cte escalar, al menos dentro de 1 elemento.

CC:

$$k\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}=-h\left(T-T_{amb}\right) \qquad \Gamma_{\text{inf}} \tag{7}$$

$$k\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}=-\bar{q} \qquad \Gamma_{q} \tag{8}$$

$$T=\bar{T} \qquad \Gamma_{\phi} \tag{9}$$

Nuestra aproximacion sera:

$$T\approx\hat{T}=\sum a_m N_m\left(x\right) \tag{10}$$

Las condiciones Dirichlet en los bordes Γ_ϕ se impondran en la matriz ensamblada, es decir se impondran los coeficientes a a el valor correspondiente.

Nuestra aproximacion de MRP sera:

$$\int W_l\left(k\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial x^2}+Q+c\left(\hat{T}-T_{amb}\right)\right)d\Omega+$$
$$\int \bar{W}_l\left(-k\frac{\partial\hat{T}}{\partial\vec{n}}+h\left(\hat{T}-T_{amb}\right)\right)d\Gamma_{\text{inf}}+\int \bar{W}_l\left(k\frac{\partial\hat{T}}{\partial\vec{n}}+\bar{q}\right)d\Gamma_q=0$$

Debilitamos:

$$-k\int\frac{\partial W_l}{\partial x}\frac{\partial\hat{T}}{\partial x}d\Omega+k\int W_l\frac{\partial\hat{T}}{\partial\vec{n}}d\Gamma_{\text{inf}+q+\phi}+\int W_l\left(Q+c\left(\hat{T}-T_{amb}\right)\right)d\Omega+$$
$$\int \bar{W}_l\left(-k\frac{\partial\hat{T}}{\partial\vec{n}}+h\left(\hat{T}-T_{amb}\right)\right)d\Gamma_{\text{inf}}+\int \bar{W}_l\left(k\frac{\partial\hat{T}}{\partial\vec{n}}+\bar{q}\right)d\Gamma_q=0$$

Elegimos:

$$\bar{W}_l=-W_l \qquad en \quad \Gamma_{\text{inf}}$$
$$W_l=0 \qquad en \quad \Gamma_{\phi}$$
$$\bar{W}_l=-W_l \qquad en \quad \Gamma_{q}$$

$$-k\int \frac{\partial W_l}{\partial x}\frac{\partial \hat{T}}{\partial x}d\Omega + \int W_l\left(Q + c\left(\hat{T} - T_{amb}\right)\right)d\Omega - h\int W_l\left(\hat{T} - T_{amb}\right)d\Gamma_{\inf} - \int W_l\bar{q}d\Gamma_q = 0$$

Usamos Galerkin, es decir $W_l = N_l$:

$$-k\int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial \hat{T}}{\partial x}d\Omega + \int N_l\left(Q + c\left(\hat{T} - T_{amb}\right)\right)d\Omega - h\int N_l\left(\hat{T} - T_{amb}\right)d\Gamma_{\inf} - \int N_l\bar{q}d\Gamma_q = 0$$

Reemplazamos $\hat{T}$:

$$\sum -k\int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial \sum a_m N_m}{\partial x}d\Omega + \int N_l\left(Q + c\left(\sum a_m N_m - T_{amb}\right)\right)d\Omega - \\ h\int N_l\left(\sum a_m N_m - T_{amb}\right)d\Gamma_{\inf} - \int N_l\bar{q}d\Gamma_q = 0$$

$$\sum -k\int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x}d\Omega a_m + c\int N_l N_m d\Omega a_m + \int N_l\left(Q - cT_{amb}\right)d\Omega - \\ h\int N_l\left(N_m - T_{amb}\right)d\Gamma_{\inf} a_m - \int N_l\bar{q}d\Gamma_q = 0$$

$$\sum\left[-k\int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x} + cN_l N_m d\Omega - h\int N_l\left(N_m - T_{amb}\right)d\Gamma_{\inf}\right]a_m = \\ -\int N_l\left(Q - cT_{amb}\right)d\Omega + \int N_l\bar{q}d\Gamma_q$$

Las matrices elementales son:

$$K^e_{l,m} = k\int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x} + cN_l N_m d\Omega^e - h\int N_l\left(N_m - T_{amb}\right)d\Gamma^e_{\inf} \tag{11}$$

$$f^e_l = \int N_l\left(Q - cT_{amb}\right)d\Omega^e - \int N_l\bar{q}d\Gamma_q \tag{12}$$

2.1 Caso particular

Se condidera el caso donde:

- c = 0
- k = 1
- Q = 1 para $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

- Q $= 0$ para $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

Condiciones de contorno:

- $\bar{T} = 1$ en $x = 0$
- $\bar{T} = 0$ en $x = 1$

Ya que las condiciones Dirichlet las impondremos en la matriz ensamblada luego las matrices elementales se simplificaran a:

$$K^e_{l,m} = k \int \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} d\Omega^e \tag{13}$$

$$f^e_l = Q \int N_l d\Omega^e \tag{14}$$

2.2 Funciones de Forma

Usaremos elementos formados por 2 nodos y funciones de forma lineales que sera:

- $N_i = \frac{h-x}{h}$
- $N_j = 1 - \frac{h-x}{h}$

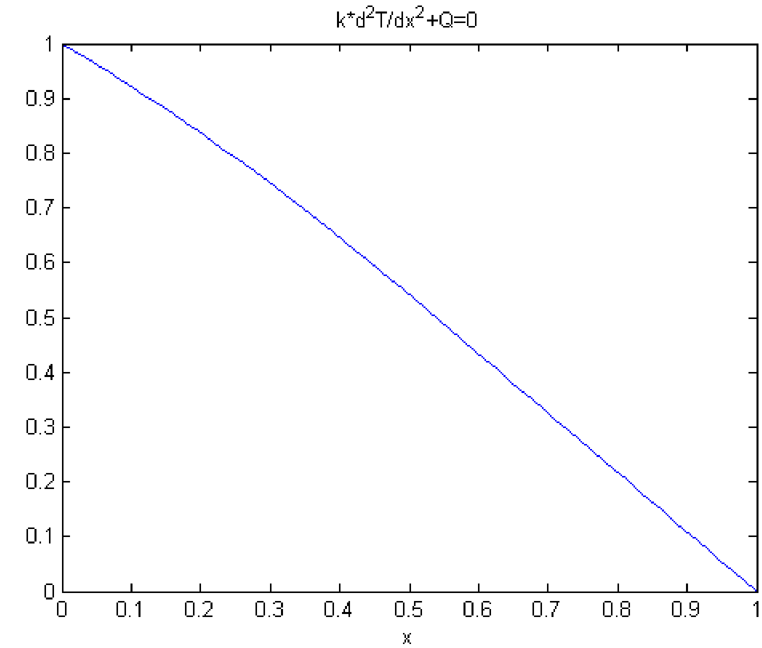
Donde h es el ancho de cada elemento. Con derivadas:

- $\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{-1}{h}$
- $\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{h}$

2.3 Resultados

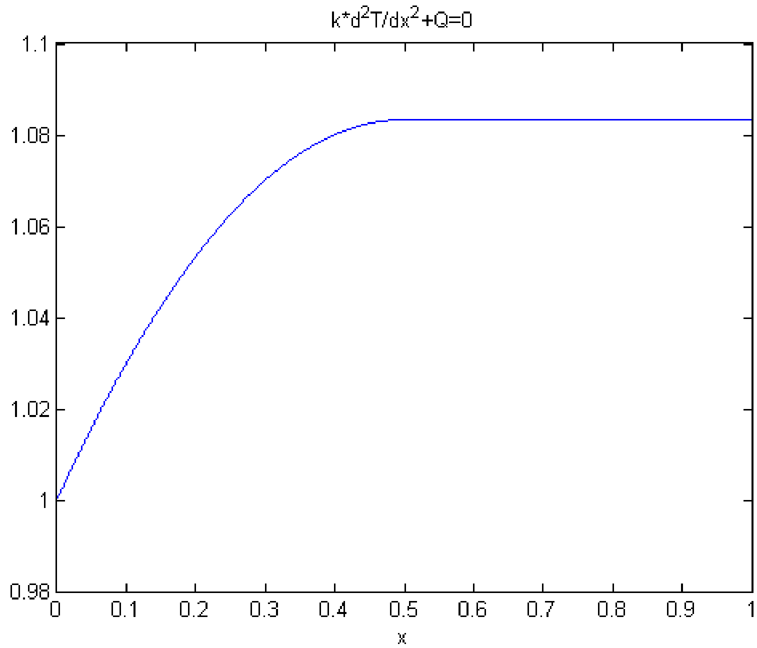
Tomaremos $L = 1$. El resultado con 2 condiciones de contorno Dirichlet siguientes es:

- En $x = 0$ condicion Dirichlet $T = 1$
- En $x = 1$ condicion Dirichlet $T = 0$

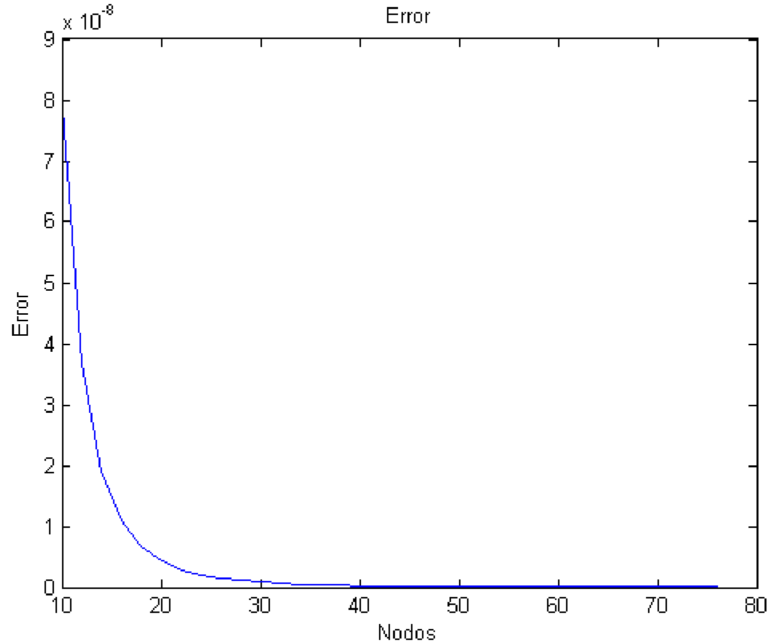


El resultado con 1 condiciones de contorno Dirichlet y una Newmann tal que:

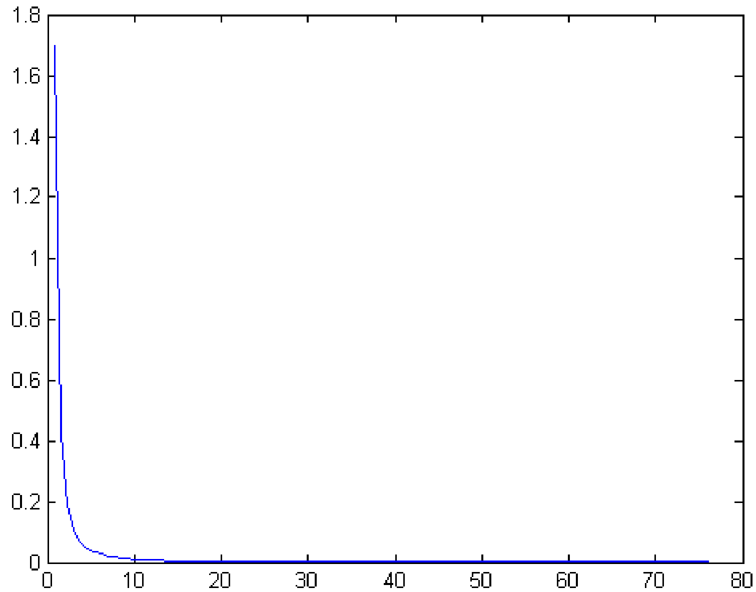
- En $x = 0$ condicion Dirichlet $T = 1$
- En $x = 1$ condicion Newmann $k\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$



Haciendo pruebas de error de la aproximacion del metodo de elementos finitos, en el caso de fronteras Dirchlet, con respecto a la solucion analitica, podemos ver que a medida que refinamos la malla el error disminuye de la siguiente forma:



El error se midio como el error cuadratico medio.
Es decir que el error disminuye de forma cuadratica a medida que se agregan nodos a la malla, y este aumento de nodos en la malla significa un aumento igual de elementos, ya que se tomaron elementos lineales formados por 2 nodos.
Podemos ver que la grafica de la funcion $y = \frac{1}{x^2}$ es:



Tiene la misma tendencia que el resultado del error por esto decimos que el error disminuye cuadraticamente con la cantidad de nodos.

3 Ejercicio 3

3.1 Analisis del problema

Ecuacion Diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+Q=0 \tag{15}$$

- Donde k cte escalar.
- Donde Q cte escalar, al menos dentro de 1 elemento.

CC:

$$k\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}=-\bar{q} \qquad \Gamma_q \tag{16}$$

$$\phi=\bar{\phi} \qquad \Gamma_\phi \tag{17}$$

Nuestra aproximacion sera:

$$\phi \approx \hat{\phi}=\sum a_m N_m\left(x,y\right) \tag{18}$$

Las condiciones Dirichlet en los bordes Γ_ϕ se impondran en la matriz ensamblada, es decir se impondra los coeficientes a a el valor correspondiente.

Nuestra aproximacion de MRP sera:

$$k\int W_l\left(\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial y^2}\right)d\Omega+\int W_l Q d\Omega\int \bar{W}_l\left(k\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\vec{n}}+\bar{q}\right)d\Gamma_q=0$$

Utilizando Galerkin, osea: $W_l=N_l$:

$$k\int N_l\left(\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial y^2}\right)d\Omega+\int N_l Q d\Omega\int \bar{W}_l\left(k\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\vec{n}}+\bar{q}\right)d\Gamma_q=0$$

Debilitamos porque nuestra funcion de forma N es solo lineal y no tiene segunda derivada:

$$-k\int\left(\frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}+\frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y}\right)d\Omega+\int kN_l\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\vec{n}}d\Gamma_{\phi+q}+\int N_l Q d\Omega+\int\bar{W}\left(k\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\vec{n}}+\bar{q}\right)d\Gamma_q=0$$

Tomaremos: $\bar{W}_l=-W_l$ en Γ_q y $W_l=0$ en Γ_ϕ ya que como estas son condiciones Dirichlet las satisfaceremos como dijimos antes en la matriz ensamblada. Vemos que la condicion natural a este problema(Newmann) se anula:

$$-k\int\left(\frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}+\frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y}\right)d\Omega+\int N_lQd\Omega-\int N_l\bar{q}d\Gamma_q=0$$

Reemplazamos $\hat{\phi}$ en la ecuacion:

$$\sum -k\int\left(\frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x}a_m+\frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial y}a_m\right)d\Omega=-\int N_lQd\Omega+\int N_l\bar{q}d\Gamma_q$$
$$\sum -k\int\left(\frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x}+\frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial y}\right)d\Omega a_m=-\int N_lQd\Omega+\int N_l\bar{q}d\Gamma_q$$

Formamos el sistema global:

$$\bar{\bar{K}}\bar{a}=\bar{f} \tag{19}$$

Donde $\bar{\bar{K}}$, $\bar{a}$ y $\bar{f}$ son el resultado del ensablado de las marices y vectores de los problemas elemetales:

$$\bar{\bar{K^e}}\bar{a^e}=\bar{f^e} \tag{20}$$

Donde:

$$K_{l.m}=k\int\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_m^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_m^e}{\partial y}d\Omega^e \tag{21}$$

$$f_l^e=\int N_l^eQd\Omega^e-\int N_l^e\bar{q}d\Gamma_q^e \tag{22}$$

Donde Ω^e es el dominio del elemento en cuestion(en este caso esta integrando sobre el dominio del triangulo). Y Γ_q son los bordes con condicion Newmann del elemento(puede ser 0, 1, 2 o 3 bordes en este caso).

3.2 Funciones de forma

Las funciones seran triangulares lineales, estan seran de la forma:

$$N_m^e=a_m+b_mx+c_my \tag{23}$$

Donde a_m, b_m y c_m son los coefiecientes de la funcion lineal.

Cada elemento triangular tiene las funciones:

- N_i^e
- N_j^e
- N_k^e

Luego:

$$\frac{\partial N_m^e}{\partial x} = b_m \tag{24}$$

$$\frac{\partial N_m^e}{\partial y} = c_m \tag{25}$$

El metodo para calcular los coeficientes para el elemento i se debe:

- Armar la matriz:
- Armar el vector de incognitas:
- Armar el vector independiente b para cada funcion de forma:

3.3 Resultados

$$\bar{\bar{K}}^e = k\int \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x}\frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y}\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_k^e}{\partial y}\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_k^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_k^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\right) \end{pmatrix} d\Omega^e$$

Reemplazamos por las funciones de forma, y notando que cualquier derivada parcial de la funcion de forma da una cte, luego podemos sacar todo de la integral sobre el dominio del elemento Ω^e. Resolvemos la integral ya que sabemos que la integral sobre el dominio del elemento las derivadas parciales de las funciones de forma son ctes, luego es igual al area sobre el elemento:

$$\bar{\bar{K}}^e = k\Delta^e \begin{pmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k^2 + c_k^2 \end{pmatrix}$$

Aca Δ^e es el area del triangulo.

$$\bar{f}^e = \begin{pmatrix} Q\int N_i^e d_\Omega^e - \bar{q}\int N_i^e d\Gamma_q^e \\ Q\int N_j^e d_\Omega^e - \bar{q}\int N_j^e d\Gamma_q^e \\ Q\int N_k^e d_\Omega^e - \bar{q}\int N_k^e d\Gamma_q^e \end{pmatrix}$$

Consideramos que dentro de 1 elemento Q es cte con respecto al espacio. Otra forma podria haber sido interpolar Q dentro del elemento. Idem con $\bar{q}$. Podemos resolver la integral sobre Ω^e:

$$\bar{f}^e = \begin{pmatrix} Q\frac{1}{3}\Delta^e - \bar{q}\int N_i^e d\Gamma_q^e \\ Q\frac{1}{3}\Delta^e - \bar{q}\int N_j^e d\Gamma_q^e \\ Q\frac{1}{3}\Delta^e - \bar{q}\int N_k^e d\Gamma_q^e \end{pmatrix}$$

Ya que Q es cte en el elemento, y la integral $\int N_l d\Omega^e$ es igual a $1/3\Delta^e$. La integral de linea sobre Γ_q podemos resolver en base a donde este el borde:

Si el borde esta en los nodos ij:

$$\bar{f}^e = \begin{pmatrix} Q\frac{1}{3}\Delta^e - \frac{1}{2}\bar{q}\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\ Q\frac{1}{3}\Delta^e - \frac{1}{2}\bar{q}\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\ Q\frac{1}{3}\Delta^e \end{pmatrix}$$

Si el borde esta en los nodos jk:

$$\bar{f}^e = \begin{pmatrix} Q\frac{1}{3}\Delta^e \\ Q\frac{1}{3}\Delta^e - \frac{1}{2}\bar{q}\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \\ Q\frac{1}{3}\Delta^e - \frac{1}{2}\bar{q}\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \end{pmatrix}$$

Si el borde esta en los nodos ik:

$$\bar{f}^e = \begin{pmatrix} Q\frac{1}{3}\Delta^e - \frac{1}{2}\bar{q}\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \\ Q\frac{1}{3}\Delta^e \\ Q\frac{1}{3}\Delta^e - \frac{1}{2}\bar{q}\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \end{pmatrix}$$

Si los bordes estan en ij y jk podemos hacer:

$$\int f_l^e d\Gamma_q = \int f_l^e d\Gamma_{ij} + \int f_l^e d\Gamma_{jk}$$

Analogamente para otro borde.

Los coeficientes elementales son:

$$^e = \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{pmatrix}$$

4 Ejercicio 4

4.1 Analisis del problema

Ecuacion Diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+Q=0 \tag{26}$$

Donde k cte escalar.
Donde Q cte escalar,al menos dentro de 1 elemento.
CC:

$$k\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}=-\bar{q} \qquad\qquad \Gamma_q \tag{27}$$
$$\phi=\bar{\phi} \qquad\qquad \Gamma_\phi \tag{28}$$

Nuestra aproximacion sera:

$$\phi\approx\hat{\phi}=\sum a_m N_m(x,y) \tag{29}$$

Las condiciones Dirichlet en los bordes Γ_ϕ se impondran en la matriz ensamblada, es decir se impondra los coeficientes a a el valor correspondiente.

Nuestra aproximacion de MRP sera:

$$k\int W_l\left(\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial y^2}\right)d\Omega+\int W_l Q d\Omega+\int \bar{W}\left(k\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\vec{n}}+\bar{q}\right)d\Gamma_q=0 \tag{30}$$

Debilitamos:

$$-k\int\left(\frac{\partial W_l}{\partial x}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}+\frac{\partial W_l}{\partial y}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y}\right)d\Omega+\int k\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\vec{n}}d\Gamma_{q+\phi}+\int W_l Q d\Omega+\int \bar{W}_l\left(k\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\vec{n}}+\bar{q}\right)d\Gamma_q=0 \tag{31}$$

Elegiremos:

$W_l=0 \qquad \forall(x,y)\in\Gamma_\phi$ *ya que establecemos Dirichlet en matriz global*
$\bar{W}_l=-W_l \qquad \forall(x,y)\in\Gamma$ *ya que anula Newmann*

Ademas usaremos galerkin luego:

$$W_l=N_l$$

$$-k\int\left(\frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}+\frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y}\right)d\Omega+\int N_l Q d\Omega-\int N_l\bar{q}d\Gamma_q=0 \tag{32}$$

$$-k\int\frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}+\frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y})d\Omega=-\int N_lQd\Omega+\int N_l\bar{q}d\Gamma_q \tag{33}$$

Reemplazando $\hat{\phi}$ y multiplicando por -1 mam:

$$\sum k\int\frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x}+\frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial y})d\Omega a_m=\int N_lQd\Omega-\int N_l\bar{q}d\Gamma_q \tag{34}$$

4.2 Funciones de Forma

Las funciones de forma seran rectangulos bilineales, su funcion sera de la forma:

$$N=\frac{(h_x^e-x)(h_x^e-y)}{h_x^eh_y^e} \tag{35}$$

Tomaremos el origen de cada elemento en el nodo i. Luego las funciones de forma son:

$$\begin{aligned}
N_i&=\frac{(h_x^e-x)(h_x^e-y)}{h_x^eh_y^e}\\
N_j&=\frac{(h_x^e-(x-h_x^e))(h_x^e-y)}{h_x^eh_y^e}\\
N_k&=\frac{(h_x^e-x)(h_x^e-(y-h_y^e))}{h_x^eh_y^e}\\
N_l&=\frac{(h_x^e-(x-h_x^e))(h_x^e-(y-h_y^e))}{h_x^eh_y^e}
\end{aligned}$$

Vemos que las funciones cumplen la condicion de ser 1 en su nodo, y 0 en el resto de los nodos.

4.3 Resultados

$$\bar{\bar{K}}^e=k\int\begin{pmatrix}
\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_i^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y} & \frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y} & \frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_l^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\\
\frac{\partial N_j^e}{\partial x}\frac{\partial N_i^e}{\partial x}+\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x}+\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x}\frac{\partial N_l^e}{\partial x}+\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\\
\frac{\partial N_k^e}{\partial x}\frac{\partial N_i^e}{\partial x}+\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x}+\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial x}\frac{\partial N_l^e}{\partial x}+\frac{\partial N_k^e}{\partial y}\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\\
\frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_i^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y} & \frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_k^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_k^e}{\partial y} & \frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_l^e}{\partial x}+\frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_l^e}{\partial y}
\end{pmatrix}d\Omega^e$$

Vemos que a excepcion del elemento lineal triangular, las derivadas parciales no son ctes, luego no podemos sacar todo afuera de la integral y resolver facilmente. Una opcion es realizar una integracion numerica, utilizando por ejemplo cuadratura de Gauss.

Para resolver mas facilmete se puede considerar, al igual que en el ejercicio 3, que Q y $\bar{q}$ son ctes con respecto al espacio.

$$\bar{f}^e = \begin{pmatrix} \int N_i^e Q d_\Omega^e - \int N_i^e \bar{q} d_{\Gamma_q^e} \\ \int N_j^e Q d_\Omega^e - \int N_j^e \bar{q} d_{\Gamma_q^e} \\ \int N_k^e Q d_\Omega^e - \int N_k^e \bar{q} d_{\Gamma_q^e} \\ \int N_l^e Q d_\Omega^e - \int N_l^e \bar{q} d_{\Gamma_q^e} \end{pmatrix}$$

$$\bar{a}^e = \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \\ a_l \end{pmatrix}$$

5 Ejercicio 5

5.1 Implementacion

Ecuacion Diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + Q = 0 \tag{36}$$

Dominio: $\Omega = \{x \in [0,1] \qquad \wedge \qquad y \in [0,1]\}$

Donde k cte escalar.
Donde Q cte escalar,al menos dentro de 1 elemento.
CC:

$$k\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = -\bar{q} \qquad\qquad \Gamma_q \tag{37}$$

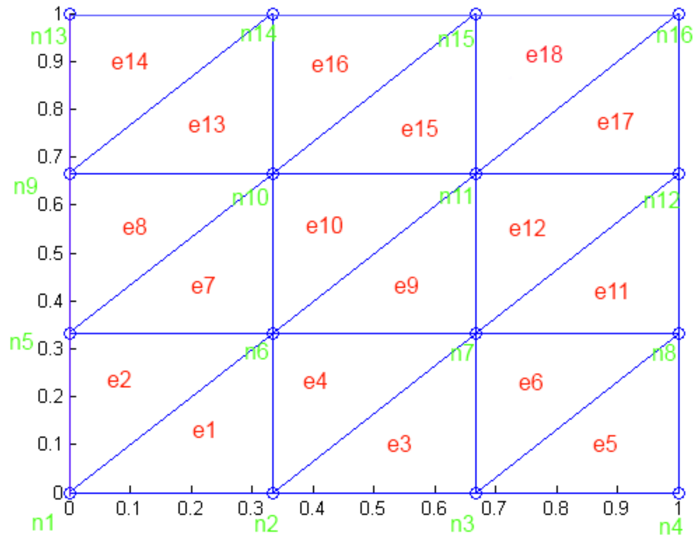
$$\phi = \bar{\phi} \qquad\qquad \Gamma_\phi \tag{38}$$

Para resolver este problema utilizaremos los resultados del ejercicio 3.

En la implementacion tomaremos un k cte global, y un Q seteado por nodos en la malla, luego en los calculos de cada elemento usaremos un promedio de los Q de los nodos. Otra forma habria sido utilizar interpolacion, utilizando la misma intepolacion para Q que la que se uso para $\hat{\phi}$, pero se opto por usar un promedio porque era mas simple y daba buen resultado:

$$Q_{ijk} = \frac{Q_i + Q_j + Q_k}{3}$$

Haremos un mallado estructurado, con nodos equiespaciado en el dominio cuadrado. Se lo hara de la siguente forma:



Donde e_i es el elemento i, y n_i es el nodo i. Por ejemplo el elemento e_1 esta compuesto por los nodos: n_1, n_2 , n_6.
Los nodos se almacenan en sentido de las agujas del reloj.

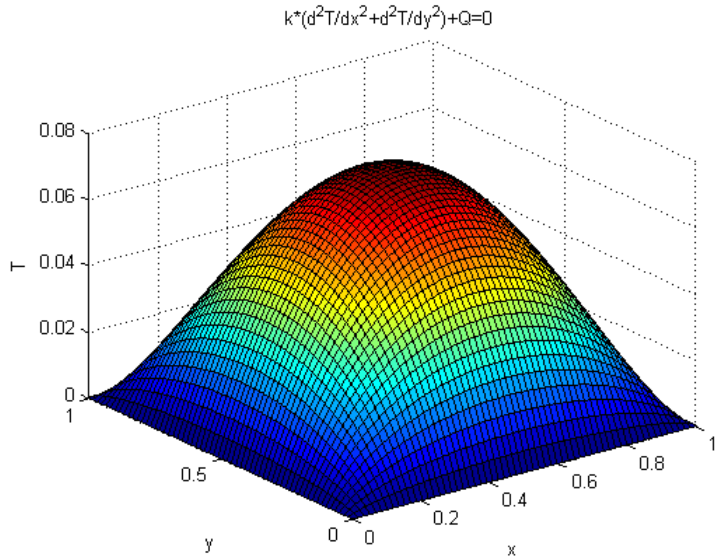
En la implementacion es posible inponer condiciones de contorno distintas para cada uno de los 4 bordes:

- Borde Superior
- Borde Inferior
- Borde Izquierdo
- Borde Derecho

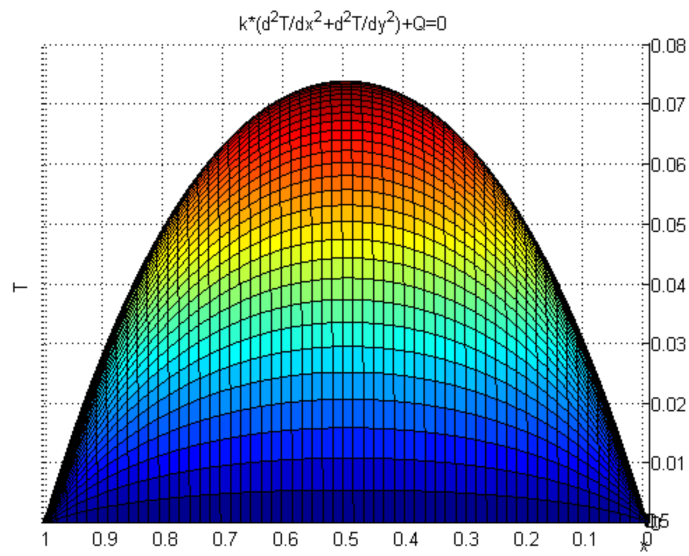
5.2 Resultados

la siguiente grafica se realizo con:

- Q = 1.0 en toda la malla
- k = 1.0



Viendo el grafico anterior de perfil podemos ver que la temperatura maxima llega a aproximadamente $0,073$:

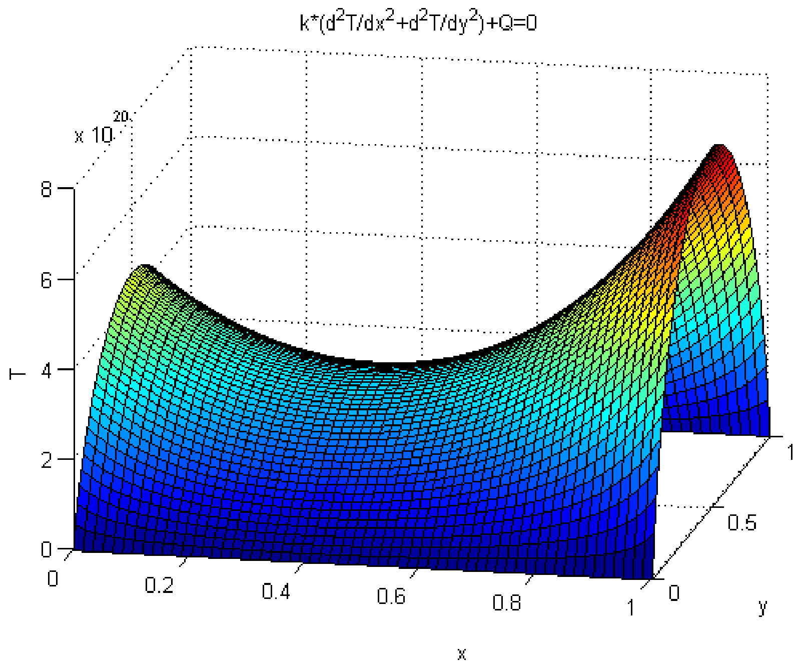


Usando el mismo Q, las siguientes graficas tendran:

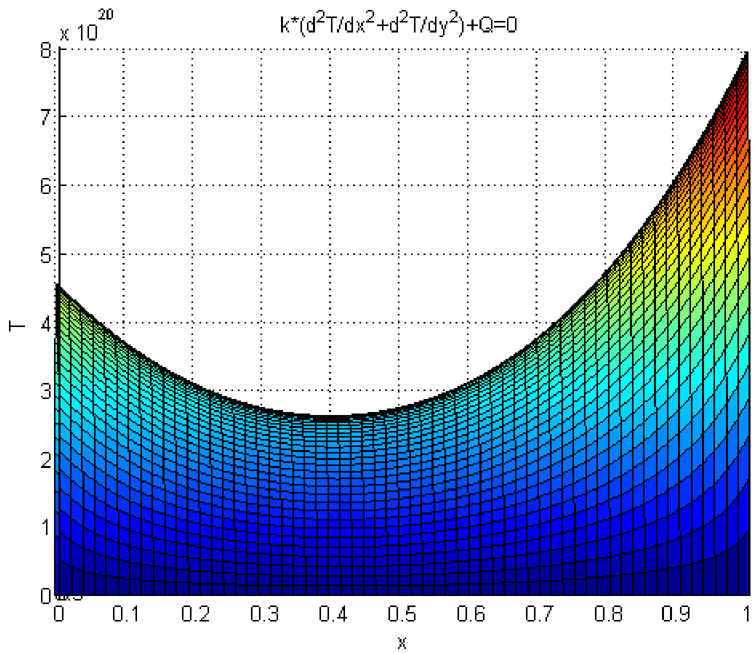
- En el borde $y = 0$ tendra condicion Dirichlet $T = 0$
- En el borde $y = 1$ tendra condicion Dirichlet $T = 2$

- En el borde $x = 0$ (no incluye las esquinas)tendra condicion Newmann con $q = -10$
- En el borde $x = 1$ (no incluye las esquinas)tendra condicion Newmann con $q = -20$

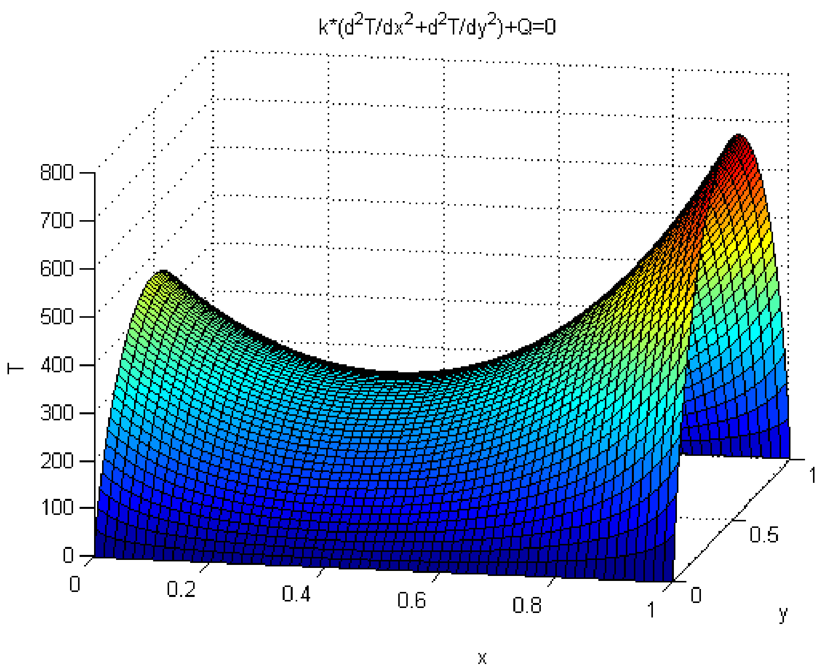
Con $k = 0.00000000000000000001$:



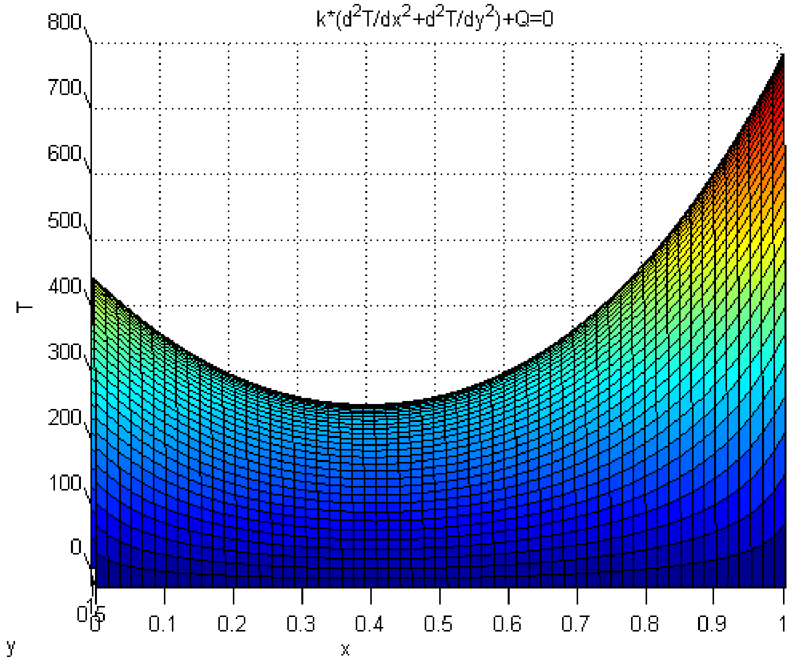
Vista de Perfil:



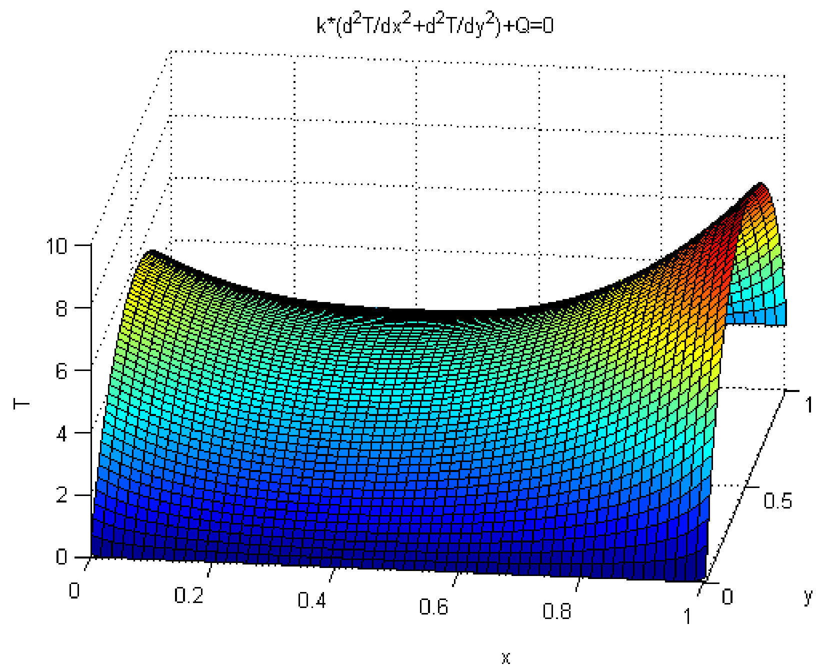
Con $k = 0.01$:



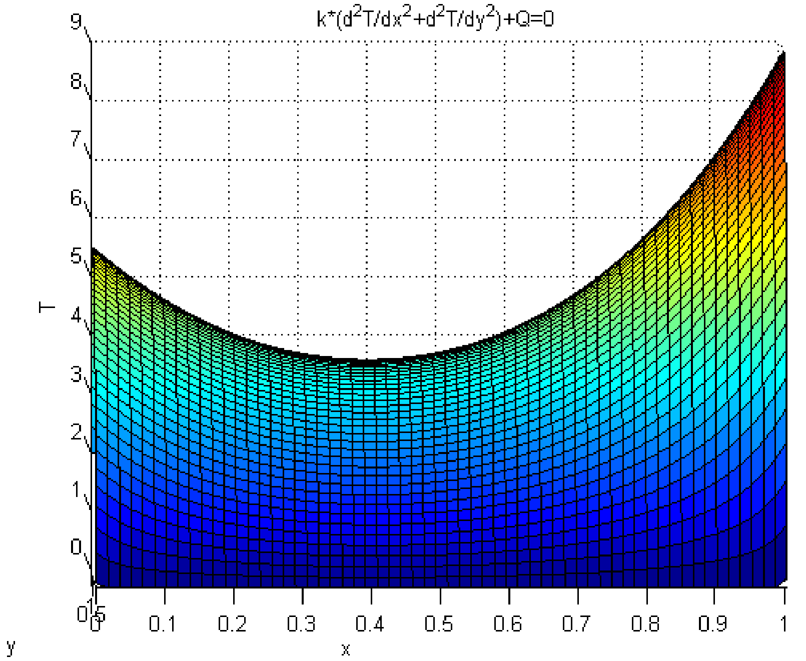
Vista de Perfil:



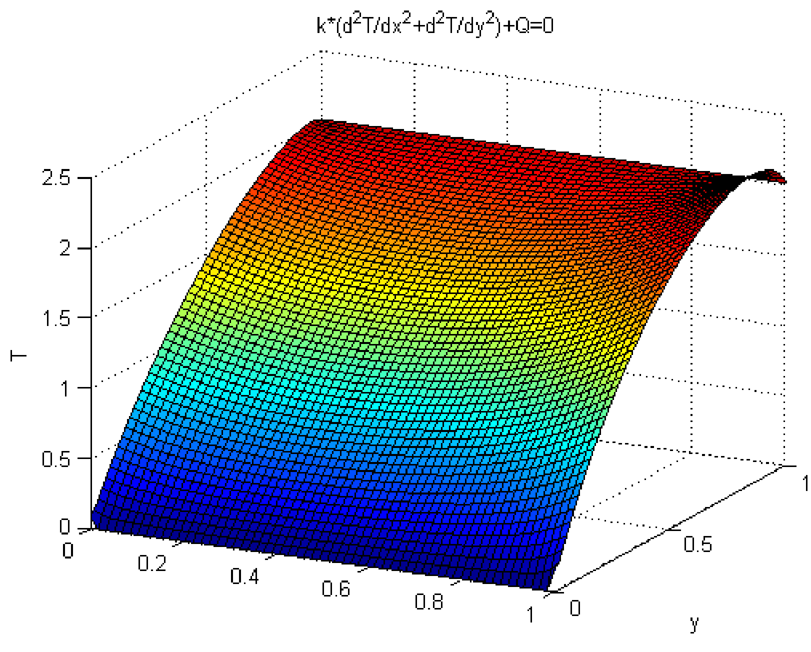
Con $k = 1.0$



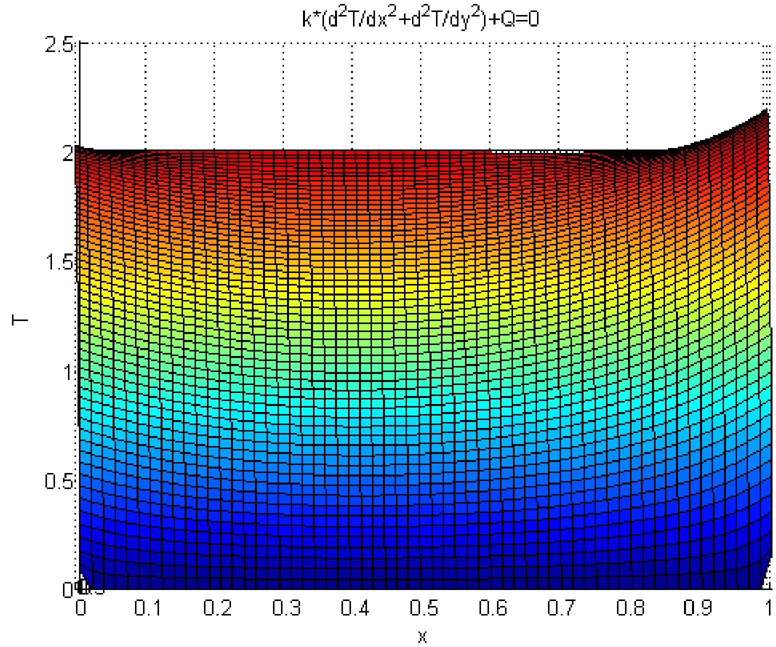
Vista de Perfil:



Con $k = 10.0$



Vista de Perfil:



Como es de esperarse con un k(difusividad) menor, la transferencia de calor atraves del material es menor y eso produce que halla picos de temperatura y depresiones de temperatura muy pronunciadas. Por otro lado un k grande hace que la transferencia sea mayor, lo que provoca que las diferencias de temperaturas sean menores. Cuando $k \to \inf$ hace que la temperatura tienda a ser cte en el material(lo que lo evitaria en el ejemplo serian las condiciones Dirichlet principalmente y Newmann).

En conclusion si el coeficiente de difusividad tiende a 0, es decir: $k \to 0$. Luego tendriamos segun la condicion de Newmann: $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = \frac{\bar{q}}{-k \to 0}$, lo cual significaria que el flujo en el borde tenderia a ser infinito. Por eso es que para valores de k chicos vemos que la superficie crece mucho en los bordes Newmann.

6 Ejercicio 6

6.1 Implementacion

Ecuacion Diferencial:

$$-\alpha\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+Q=0 \tag{39}$$

Dominio: $\Omega=\{x\in[0,1] \quad \wedge \quad y\in[0,1]\}$

Donde k cte escalar.
Donde Q cte escalar,al menos dentro de 1 elemento.
CC:

$$\phi=\bar{\phi} \qquad\qquad \Gamma_\phi \tag{40}$$

Nuestra aproximacion sera:

$$\phi\approx\hat{\phi}=\sum a_m(t)N_m(x,y) \tag{41}$$

Nuestra aproximacion de MRP sera:

$$\int W_l\left(-\alpha\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}+k\left(\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial y^2}\right)+Q\right)d\Omega=0 \tag{42}$$

Reemplazamos $\hat{\phi}$:

$$\int W_l\left(-\alpha\frac{\partial\left(\sum N_m a_m\right)}{\partial t}+k\left(\frac{\partial^2\left(\sum N_m a_m\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\sum N_m a_m\right)}{\partial y^2}\right)+Q\right)d\Omega=0 \tag{43}$$

$$\sum\int W_l\left(-\alpha N_m\frac{\partial a_m}{\partial t}+k\left(\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2}\right)a_m+Q\right)d\Omega=0 \tag{44}$$

$$\sum-\alpha\int W_l N_m d\Omega\frac{\partial a_m}{\partial t}+k\int W_l\left(\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2}\right)d\Omega a_m+\int W_l Q d\Omega=0 \tag{45}$$

Debilitamos ya que utilizaremos funciones de forma lineales:

$$\sum-\alpha\int W_l N_m d\Omega\frac{\partial a_m}{\partial t}+\left[-k\int\frac{\partial W_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x}+\frac{\partial W_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial y}d\Omega+k\int W_l\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\vec{n}}d\Gamma_\phi\right]a_m+\int W_l Q d\Omega=0 \tag{46}$$

Utilizamos Galerkin, $W_l=N_l$ y $W_l=0\forall(x,y)\in\Gamma_\phi$ ya que imponemos las condiciones Dirichlet en la matriz global ensamblada:

$$\sum -\alpha \int N_l N_m d\Omega \frac{\partial a_m}{\partial t} - k \int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial y} d\Omega a_m = -\int N_l Q d\Omega \tag{47}$$

Podemos ver que esto es identico al sistema:

$$\bar{\bar{C}}\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \bar{\bar{K}}\bar{a} = \bar{f} \tag{48}$$

Es decir que:

$$K_{l,m} = -k \int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial y} d\Omega \tag{49}$$

$$C_{l,m} = -\alpha \int N_l N_m d\Omega \tag{50}$$

$$f_l = -\int N_l Q d\Omega \tag{51}$$

Ahora discretizaremos en el tiempo, es decir discretizaremos $\frac{\partial a_m}{\partial t}$ utilizando un esquema derivado de diferencias finitas:

$$\frac{\partial a^{m+1}}{\partial t} = \frac{a^{m+1} - a^m}{\Delta t_m} \tag{52}$$

Utilizamos un esquema explicito o Forward Euler.
Reemplazando en el sistema:

$$\bar{\bar{C}}\left(\frac{a^{m+1} - a^m}{\Delta t_m}\right) + \bar{\bar{K}}\bar{a} = \bar{f}$$

$$\bar{\bar{C}}\frac{a^{m+1}}{\Delta t} = \left(\frac{\bar{\bar{C}}}{\Delta t} - \bar{\bar{K}}\right)\bar{a} + \bar{f}$$

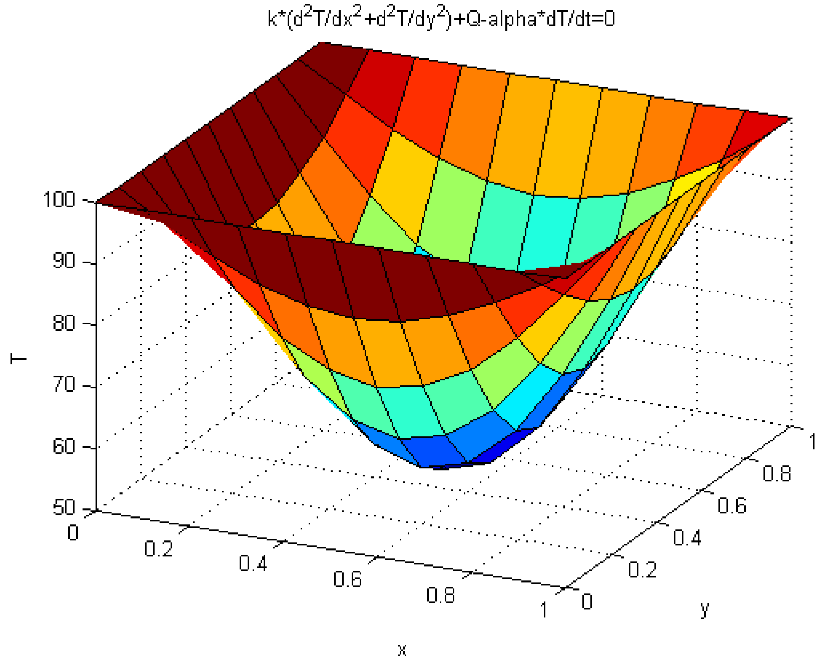
$$a^{m+1} = \Delta t C^{inv}\left[\left(\frac{\bar{\bar{C}}}{\Delta t} - \bar{\bar{K}}\right)\bar{a} + \bar{f}\right]$$

Esta ecuacion se utilizara para avanzar en el tiempo.

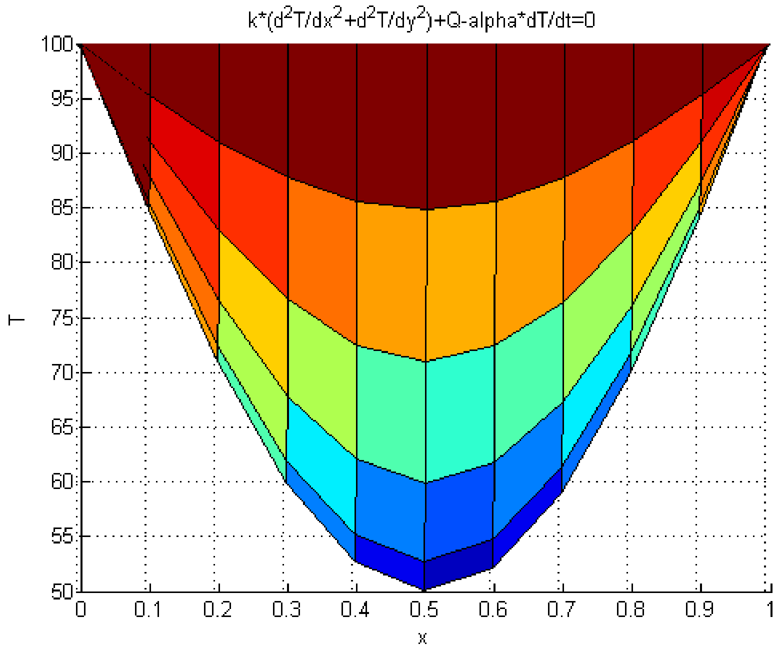
6.2 Resultados

La interpretacion del enunciado fue que aplicando un Q de $\mathbf{0}$ en toda la malla, una k y α igual a $\mathbf{1}$. Empezando toda la temperatura en $\mathbf{0}°C$, y con condiciones de borde tipo Dirichlet que mantienen la temperatura a $\mathbf{100}°C$. Se midio el tiempo que tardo el centro de la plancha en llegar a los $\mathbf{50}°C$.
Para resolver la $\bar{\bar{K}}$ se utilizo el resultado de la matriz $\bar{\bar{K}}$ del ejercicio 5, ya

que son identicas. La $\bar{f}$ tambien es similar a la del ejercicio 5. Para resolver la matriz $\bar{\bar{C}}$ se utilizo integracion numerica por cuadratura gaussiana en un triangulo, utilizando 8 puntos(en el codigo esta la implementacion de esto). El tiempo en alcanzar el estado de la siguiente grafica fue: **0.0012**



Visto de Perfil:



k*(d2T/dx2+d2T/dy2)+Q-alpha*dT/dt=0
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
T
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x