



Universidad Nacional del Litoral



Mecánica Computacional

Docentes:

Dr. Norberto Marcelo Nigro¹

MSc. Gerardo Franck²

Ing. Diego Sklar³

¹nnigro@intec.unl.edu.ar - ²gerardofranck@yahoo.com.ar - ³diegosklar@gmail.com

GUIA DE TRABAJOS PRACTICOS N° 3

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS 1D

Ejercicio 1

Dada una malla unidimensional formada por cinco (5) nodos equiespaciados y numerados consecutivamente de izquierda a derecha, con el extremo izquierdo en $x=0$ y el derecho en $x=1$, calcular la matriz

$$K_{ij} = \int_0^1 N_i N_j dx \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

usando:

- a. Funciones de prueba lineales a trozos definidas como:

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j \text{ nodos de la malla}$$

variando linealmente dentro de cada elemento.

- b. Usando funciones del tipo $N_i = x^i$. Comparar con la matriz obtenida en el punto anterior.
- c. Repetir el punto a pero usando la siguiente numeración:

x	i
0.00	1
0.25	5
0.50	3
0.75	4
1.00	2

y luego comparar con el punto a.

Ejercicio 2

Construya un subespacio de dimensión finita V_h de V consistente en funciones cuadráticas en cada subintervalo I_j de una partición $I=(0,1)$. ¿Cómo pueden elegirse los parámetros que describan estas funciones? Halle las funciones de base correspondientes, luego formule un método de elementos finitos para el siguiente problema:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Usando el subespacio V_h , escriba el sistema de ecuaciones lineales que resulta cuando se escoge una partición uniforme.

Ejercicio 3

Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales con sus condiciones de borde y utilizando una malla uniforme con un paso h , calcular la solución aproximada por el método de elementos finitos lineales, utilizando Galerkin. Especifique que tipo de condiciones de contorno se utiliza en cada uno de los problemas.

a.
$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi = x \quad 0 \leq x \leq 1$$
$$\phi(0) = \phi(1) = 0$$

b.
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi + x = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$
$$\phi(0) = 0 \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_1 = 1$$

Ejercicio 4

Considere el problema de conducción de calor 1D:

$$k\Delta T + Q - c(T - T_{\text{amb}}) = 0 \quad 0 < x < L$$

donde k es la conductividad del medio, T la temperatura, Q una fuente de calor interna, c una constante de pérdida de calor al medio ambiente y T_{amb} la temperatura del medio ambiente. Las condiciones de contorno en los extremos pueden ser:

$$T = \bar{T}, \quad \text{Dirichlet}$$

$$q \cdot \hat{n} = -k \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q}, \quad \text{Neumann - Flujo impuesto}$$

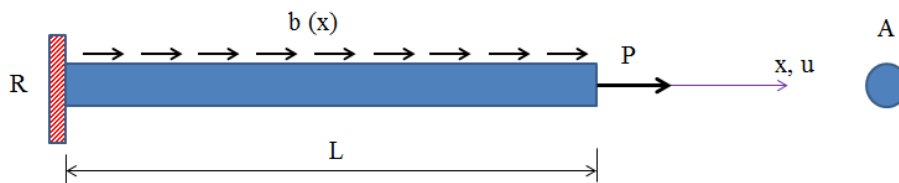
$$q \cdot \hat{n} = -k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_{\infty}), \quad \text{Robin - Convección}$$

- Considerar el caso estacionario, con $c = 0$, $k = 1$, $Q = 1$ en $x \leq \frac{1}{2}$ y $Q = 0$ en $x > \frac{1}{2}$, condición Dirichlet $\bar{T} = 1$ en $x = 0$ y $\bar{T} = 0$ en $x = L$. Escribir un programa para resolver el problema anterior por el método de elementos finitos usando una malla uniforme de paso $h = 1/N$, donde N es el número de segmentos. Mostrar cómo se reduce el error con respecto a la solución analítica al aumentar el número de intervalos N .
- Resolver el mismo problema con condición de contorno Neumann homogénea ($\bar{q} = 0$) en $x = L$.

Ejercicio 5

Considere los siguientes problemas de elementos finitos de barras:

- Analizar la barra de sección constante con una fuerza distribuida $b(x)$ a lo largo de su longitud la cual tiene un valor L y además se encuentra sometida a una fuerza puntual P . La sección transversal es constante y de valor A . Calcular los desplazamientos, tensiones y deformaciones.



- Analizar la barra de sección variable de la siguiente figura con dos tipos de discretización. La barra está sometida a una fuerza puntual P en el extremo derecho, tiene una longitud L y en la figura se visualiza la variación del área. Calcular los desplazamientos, tensiones y deformaciones.

