Guia 1

Emmanuel Rojas Fredini

Septiembre 23, 2010

1 Ejercicio 1

1.1 Solucion Analitica:

Nuestra ecuacion diferencial es:

$$-\frac{\partial T}{\partial t} + k\Delta T - c(T - T_{amb}) + Q = 0$$

Para:

$$0 \leq x \leq L \qquad \text{con} \qquad L = 1$$

Condiciones de Contorno:

$$\begin{aligned} T &= 1 & en \quad & x = 0 \\ T &= 0 & en \quad & x = L \quad con \quad L = 1 \end{aligned}$$

Primero resolveremos la ecuacion estacionaria correspondiente(es decir sin termino temporal). La ecuacion sera:

$$\begin{aligned} k\Delta T - c(T - T_{amb}) + Q = 0 \\ k\Delta T - c(T - T_{amb}) = -Q \end{aligned}$$

Al ser en 1D nuestro problema:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - c(T - T_{amb}) = -Q$$

Resolveremos primero de forma analitica y luego usando el metodo de Diferencias Finitas.

Solucion analitica por separacion de variables:
Tramo 1:

$$\int \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \int -1 dx$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} + C_1 = -x + C_2$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = -x + C$$
$$Con \qquad C = C_2 - C_1;$$

$$\int \frac{\partial T}{\partial x} dx = \int -x dx + \int C dx$$
$$T(x) + C_3 = \frac{-x^2}{2} + xC + C_4$$
$$T(x) = \frac{-x^2}{2} + xC + D$$
$$Con \qquad D = C_4 - C_3;$$

Tramo 2:

$$\int \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \int 0 dx$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} + C_1 = C_2$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = C$$
$$Con \qquad C = C_2 - C_1;$$

$$\int \frac{\partial T}{\partial x} dx = \int C dx$$
$$T(x) + C_3 = xC + C_4$$
$$T(x) = xC + D$$
$$Con \qquad D = C_4 - C_3;$$

Analizando las condiciones iniciales:

$$T = 1 \qquad en \qquad x = 0$$
$$T = 0 \qquad en \qquad x = L \quad con \quad L = 1$$

CC 1: (pertenece al tramo 1)

$$
\begin{aligned}
T(0) = 1 = \frac{-x^2}{2} + xC + D \\
1 = 0 + D \\
1 = D
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$T(x) = \frac{-x^2}{2} + xC + 1$$

CC 2: (pertenece al tramo 2)

$$
\begin{aligned}
T(1) = 0 = xC + D \\
0 = C + D \\
C = D
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$T(x) = xC + C$$

FUNDAMENTA: Tener presente que C del tramo 1 no es el mismo C del tramo 2 y D del tramo 1 no es el mismo que D del tramo 2. Asi que nos queda una incognita en cada tramo todavia.

Para mantener la continuidad C^1 en la ecuacion debemos pedir continuidad C^0 y C^1 en los dos tramos de la ecuacion.

Continuidad C^0:

$$
\begin{aligned}
T(1/2) &= T(1/2) \\
xC_1 - C_1 &= \frac{-x^2}{2} + xC_2 + 1 \\
-C_1 - 1 &= \frac{-x^2}{2} + x(C_2 - C_1)
\end{aligned}
$$

$$\frac{-x^2}{2} + x(C_2 - C_1) + (C_1 + 1) = 0$$

Continuidad C^1:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T(1/2)}{\partial x} &= \frac{\partial T(1/2)}{\partial x} \\
C_1 &= -x + C_2
\end{aligned}
$$

$$x + (C_1 - C_2) = 0$$

En fin tenemos el sistema:

$$
\begin{aligned}
\frac{-x^2}{2} + x(C_2 - C_1) + (C_1 + 1) = 0 \\
x + (C_1 - C_2) = 0
\end{aligned}
$$

Resolviendo sacamos:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{-9}{8} \qquad && \textit{Recordemos que } C_1 \textit{ es del segundo tramo} \\
C_2 &= \frac{-5}{8} \qquad && \textit{Recordemos que } C_2 \textit{ es del primer tramo}
\end{aligned}
$$

En fin nuestra solucion Analitica queda:

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \frac{-x^2}{2} + x\frac{-5}{8} + 1 \qquad && Parax \leq \frac{1}{2} \\
T(x) &= \frac{9}{8}(-x + 1) \qquad && Parax > \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

1.2 Metodo de Diferencias Finitas:

Para calcular la solucion de forma numerica utilizaremos aproximaciones a las derivadas y resolveremos por MDF.

Sabemos que:

$$
\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} \qquad Con \quad error \quad O(\Delta x^2)
$$

Siendo i el sub-indice que dice de que sample se esta tomando T, ie T_i es la temperatura de la muestra o punto i.

Si discretizamos nuestra ecuacion usando diferencias finitas nos queda:

$$
\begin{aligned}
k\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} - cT_i + cT_{amb} = -Q \\
k\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} - cT_i = -Q - cT_{amb} \\
\frac{k}{\Delta x^2}T_{i-1} + (\frac{-2k}{\Delta x^2} - c)T_i + \frac{k}{\Delta x^2}T_{i+1} = -Q - cT_{amb} \\
\frac{1}{\Delta x^2}(kT_{i-1} + (-2k - c\Delta x^2)T_i + kT_{i+1}) = -Q - cT_{amb} \\
(kT_{i-1} + (-2k - c\Delta x^2)T_i + kT_{i+1}) = -Q\Delta x^2 - cT_{amb}\Delta x^2
\end{aligned}
$$

Luego si N es nuestra cantidad de puntos en el dominio, ie $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta x & 2\Delta x & ... & 1 \end{pmatrix}$ con N elementos luego $\vec{T} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & ... & T_N \end{pmatrix}$, el sistema nos quedara:

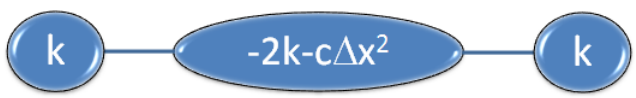
- i) C.C. 1 ?

- ii) $\frac{1}{\Delta x^2}(kT_1 + (-2 - c\Delta x^2)T_2 + T_3) = -Q\Delta x^2 - cT_{amb}\Delta x^2$
- iii) $\frac{1}{\Delta x^2}(kT_2 + (-2 - c\Delta x^2)T_3 + T_4) = -Q\Delta x^2 - cT_{amb}\Delta x^2$
- iv) $\frac{1}{\Delta x^2}(kT_3 + (-2 - c\Delta x^2)T_4 + T_5) = -Q\Delta x^2 - cT_{amb}\Delta x^2$
- ...
- ...
- N-1) $\frac{1}{\Delta x^2}(kT_{N-2} + (-2 - c\Delta x^2)T_{N-1} + T_N) = -Q\Delta x^2 - cT_{amb}\Delta x^2$
- N) C.C. 2 ?

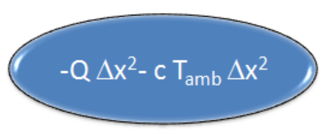
Estas equaciones nos definiran la matriz $\bar{\bar{A}}$ y el vector independiente $\bar{b}$ de nuestro sistema:

$$\bar{\bar{A}}\bar{x} = \bar{b} \tag{1}$$

Veamos como queda el stencil de nuestra matriz A:



Ademas el stencil del vector independiente $\bar{b}$ sera:



En fin $\bar{\bar{A}}$ sera:

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ... \\ k & -2k - c\Delta x^2 & k & 0 & 0 & ... \\ 0 & k & -2k - c\Delta x^2 & k & 0 & ... \\ 0 & 0 & k & -2k - c\Delta x^2 & k & ... \\ . & . & . & . & . & ... \\ . & . & . & . & . & ... \\ . & . & . & . & . & ... \\ ? & ? & ? & ? & ? & ... \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz sparse tribanda.

1.3 Condicione de Contorno:

El problema nos dice que esta sujeto a:

$$\begin{aligned} T &= 1 \qquad\qquad en \quad x = 0 \\ T &= 0 \qquad\qquad en \quad x = L \quad con \quad L = 1 \end{aligned}$$

Las C.C. son 2 condiciones Dirichlet, las que nos definen nuestra primera y ultima fila de la matriz $\bar{\bar{A}}$:

- C.C. 1 $T_1 = 1$
- C.C. 2 $T_N = 0$

$$\bar{\bar{A}} = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ k & -2k - c\Delta x^2 & k & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & k & -2k - c\Delta x^2 & k & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & k & -2k - c\Delta x^2 & k & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} T(0) \\ Q(\Delta x) \\ Q(2\Delta x) \\ Q(3\Delta x) \\ . \\ . \\ . \\ T(1) \end{pmatrix}$$

Notar que el primer y ultimo elemento del vector $\bar{b}$ son las condiciones iniciales o de contorno.
Podemos armar la matriz de forma inteligente, ya que la primera y ultima fila no dicen nada, podemos incluir las condiciones de contorno en la segunda y ante ultima fila de nuestra matriz, reemplazando en la segunda fila T_{i-1} por la condicion inicial, y analogamente en la ante ultima fila. No obstante se decidio no usarlo por motivos de simpleza y legibilidad.

Dado que en nuestro problema:

$$\begin{aligned} k &= 1 \\ c &= 0 \\ T_{amb} &= 0 \\ Q(x) &= 1 \quad si \quad x \leq \frac{1}{2} \quad y \quad Q(x) = 0 \quad si \quad x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La matriz queda:

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Y el vector $\bar{b}$ queda:

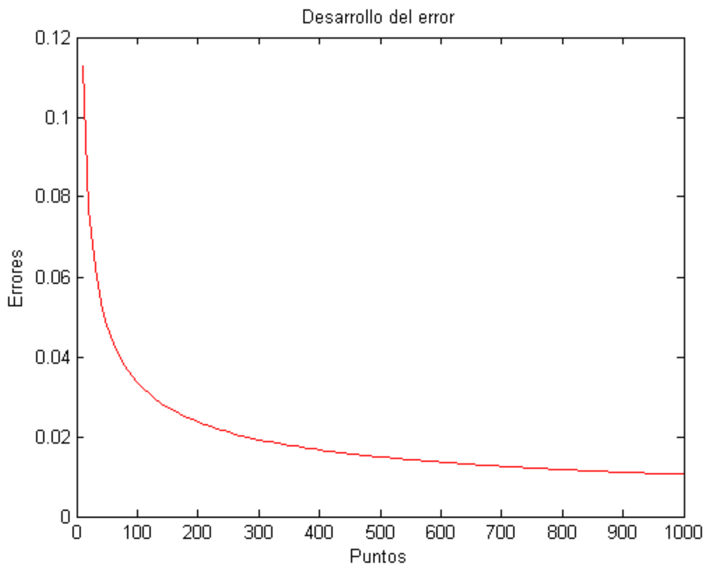
$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \Delta x^2 \\ . \\ \Delta x^2 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

En fin resolvemos el sistema:

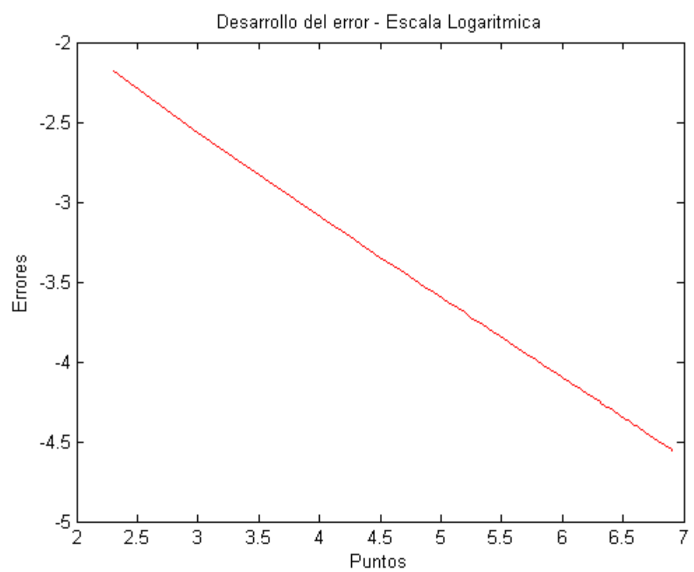
$$\bar{x} = \bar{\bar{A}}^{-1}\bar{b} \tag{2}$$

1.4 Analisis del error:

El error para el rango $N = [10, 1000]$ con paso de 10:

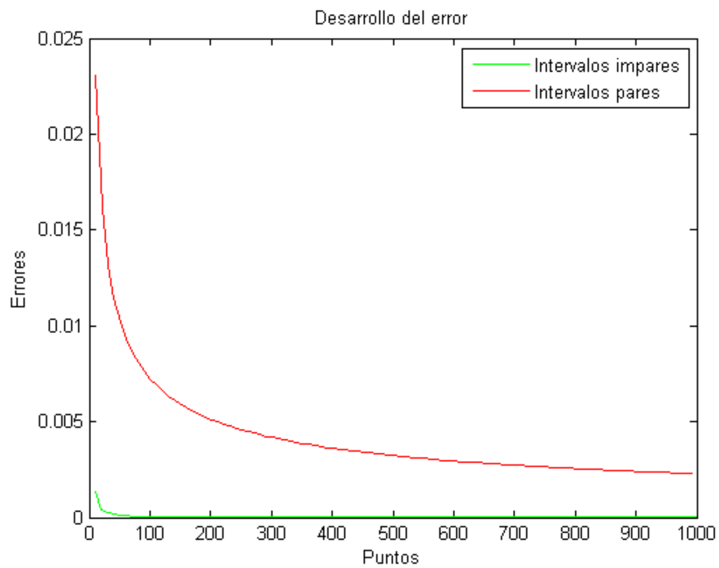


El mismo error que el grafico anterior pero esta vez con dominio y rango logaritmico:



Vemos que al aumentar N el error se reduce rapidamente. Podemos ver por la pendiente de la grafica(por las propiedades del logaritmo) es de orden de error $O(\Delta x^2)$ como sabiamos.

Ademas al tener la ecuacion definida en 2 tramos, si tomamos un numero par o impar de intervalos (Notar que un numero par de intervalos significa un numero impar de puntos y vice versa) el error cambiara considerablemente. Esto es debido a que si en el vector de puntos $\bar{X}$ contiene el punto intermedio donde se separan las definiciones de la ecuacion, nuestro calculo se adaptara mejor a la solucion analitica.



Como es de esperarse la solucion con un numero impar de intervalos es mucho mas correcta que la que tiene un numero par de intervalos.

2 Ejercicio 2

2.1 Diferencias Finitas esquema temporal:

Nuestra ecuacion diferencial es:

$$-\frac{dT}{dt} + k\Delta T - c(T - T_{amb}) + Q = 0 \tag{3}$$

Para:

$$0 \leq x \leq L \qquad \text{con} \qquad L = 1$$

Condiciones de Contorno:

$$
\begin{aligned}
T &= 1 \qquad\qquad en \quad x = 0\\
q &= 0 \qquad\qquad en \quad x = L \quad con \quad L = 1
\end{aligned}
$$

Para calcular la temperatura atravez del tiempo utilizamos el esquema explicito. Usaremos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T_i^n}{\partial dx^2} &= \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} & O(\Delta x^2)\\
\frac{\partial T_i^n}{\partial dt} &= \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} & O(\Delta t)
\end{aligned}
$$

Discretizando y reemplazando en la ecuacion diferencial. Tenemos que la iteracion es de la forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{-T_i^{n+1} + T_i^n}{\Delta t} &= -k\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} + cT_i^n - cT_{amb} - Q\\
T_i^{n+1} &= T_{i-1}^n \frac{kdt}{dx^2} + (-cdt - *\frac{2dt}{dx^2} + 1)T_i^n + T_{i+1}^n \frac{kdt}{dx^2} + Q(x)dt + T_{amb}dt;
\end{aligned}
$$

En cuanto a las condiciones de contorno:

Condicion de Contorno 1: Dirichlet

$$
T_1^n = 1 \qquad\qquad Para \quad todo \quad tiempo \quad n
$$

Condicion de Contorno 2: Newmann

$$
\begin{aligned}
q &= -k\frac{\partial T}{\partial x}\\
q &= -k\frac{T_i + T_{i-1}}{\Delta x}\\
T_i &= T_{i-1} - q\frac{\Delta x}{k}
\end{aligned}
$$

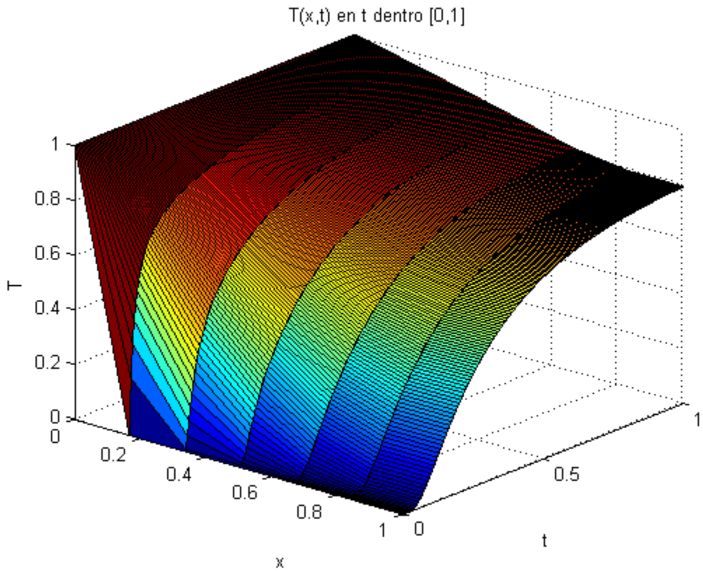
Reemplazando $q = 0$:

$$
T_i = T_{i-1}
$$

2.2 Resultados:

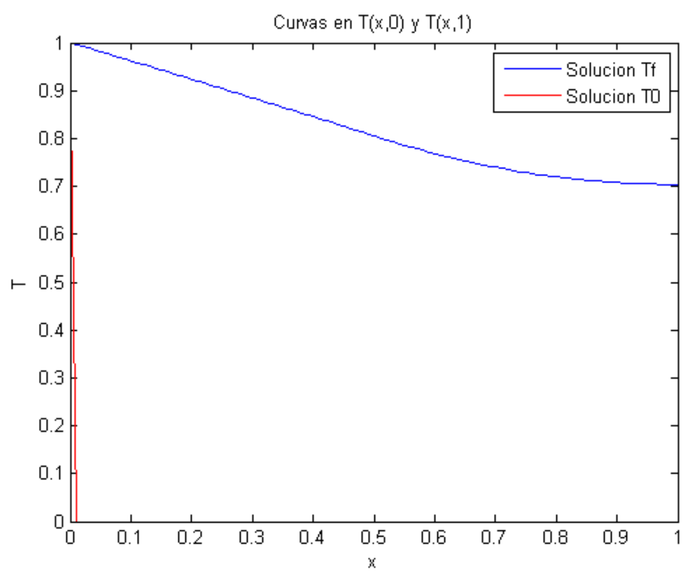
Se tomo como estado inicial un estado totalmente frio, ie temperatura 0, a excepcion de $T(x = 0)$ donde su valor es 1 por ser una condicion de Dirichlet.

Si guardamos el historial atravez del tiempo de la temperatura $T(x, y)$, y luego la graficamos como una superficie, teniendo como ejes x y t. Vemos:

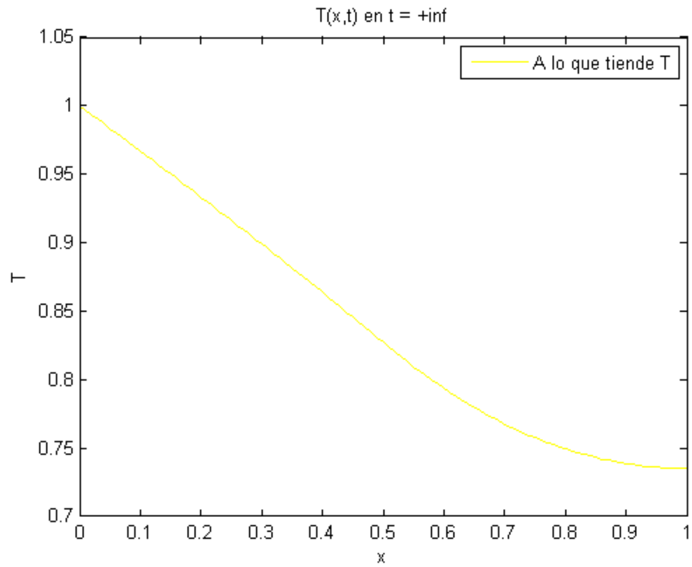


Tomamos solo 7 puntos atravez de x para dar mas visibilidad.

Las graficas de las curvas iniciales y finales de la temperatura son:



Vemos que la curva final tiende a ser estacionaria, esta curva sera:



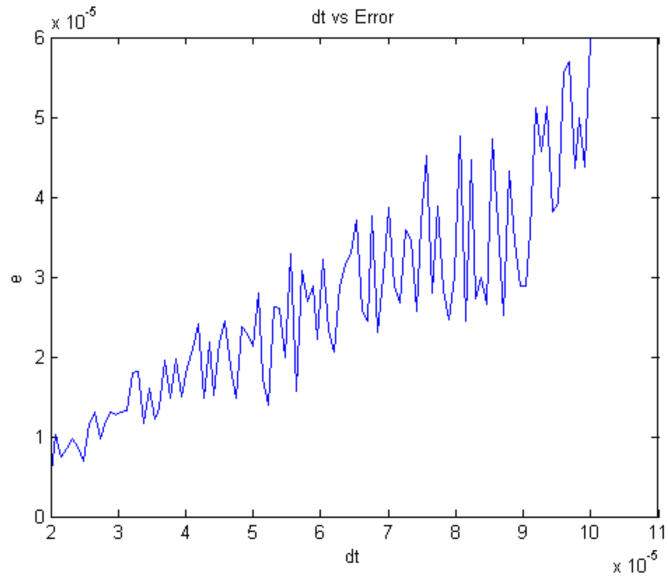
Esto es debido a la perdida de temperatura en el termino convectivo.

2.3 Errores:

El error del MDF en timepo y espacio usando el esquema Explicito es $O(\Delta t)$, lo cual es un resultado bastante malo, la unica ventaja de este metodo es la facilidad computacional del calculo.
Tomamos la solucion dando un paso de $\frac{1}{1000000}$ como solucion pseudo-analitica de forma arbitraria. Comparamos los errores de soluciones con un paso Δt mayor, calculando el error con la norma 2 del vector de error.
Nuestro rango de Δt varia entre:

$$\Delta Inicial = \frac{1}{50000}$$
$$\Delta Final = \frac{1}{10000}$$

Graficamos tomando 100 pasos de forma lineal de ese intervalo. Esto nos da la siguiente curva:



Si bien esta claramente afectada por ruido, creemos que este es consecuencia de algun error numerico minimo, ya que la tendencia es claramente lineal y el error es infinitesimal en este rango de pasos de tiempo.

3 Ejercicio 3

3.1 Diferencias Finitas esquema temporal:

Al igual que el ejercicio anterior la ecuacion diferencial es:

$$-\frac{dT}{dt} + k\Delta T - c(T - T_{amb}) + Q = 0 \tag{4}$$

Para:

$$0 \leq x \leq L \qquad \text{con} \qquad L = 1$$

Condiciones de Contorno:

$$\begin{aligned} T &= 1 && en && x = 0 \\ q &= 0 && en && x = L \quad con \quad L = 1 \end{aligned}$$

Para calcular la temperatura atravez del tiempo utilizamos el esquema Cranck-Nicholson. Usaremos:

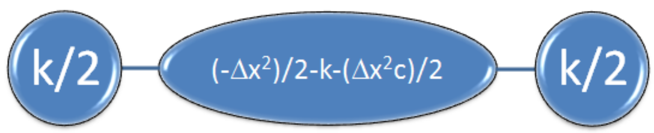
$$\frac{-T_i^{n+1}+T_i^n}{\Delta t}+k\frac{T_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}-2T_i^{n+\frac{1}{2}}+T_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}-cT_i^{n+\frac{1}{2}}=-Q-cT_{amb}$$

$$\frac{-T_i^{n+1}+T_i^n}{\Delta t}+\frac{k}{2}[\frac{T_{i-1}^n-2T_i^n+T_{i+1}^n}{\Delta x^2}+\frac{T_{i-1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}]-c[\frac{T_i^n+T_i^{n+1}}{2}]=-Q-cT_{amb}$$

Haciendo unos re-ordenamientos tenemos:

$$\frac{k}{2}T_{i-1}^{n+1}+(\frac{-\Delta x^2}{\Delta t}-k-\frac{\Delta x^2 c}{2})T_i^{n+1}+\frac{k}{2}T_{i+1}^{n+1}=\frac{-k}{2}T_{i-1}^n+(\frac{-\Delta x^2}{\Delta t}+k+\frac{\Delta x^2 c}{2})T_i^n+\frac{-k}{2}T_{i+1}^n-Q\Delta x^2-T_{amb}\Delta x^2 c$$

Esto nos define un sistema de ecuaciones cuyo stencil de solucion sera:



En cuanto a las condiciones de contorno, debemos agregar las 2 equaciones:

Condicion de Contorno 1: Dirichlet

$$T_1^{n+1}=1$$

Luego usando la deducion del ejericio 2, de la condicion de Newmann, tendremos la definicion de la segunda condicion.

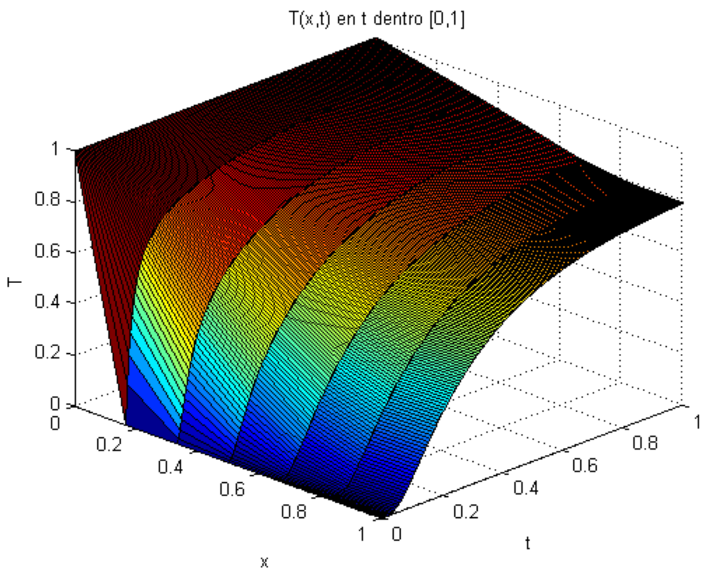
Condicion de Contorno 2: Newmann

$$\frac{T_N^{n+1}-T_{N-1}^{n+1}}{\Delta x}=0$$

3.2 Resultados:

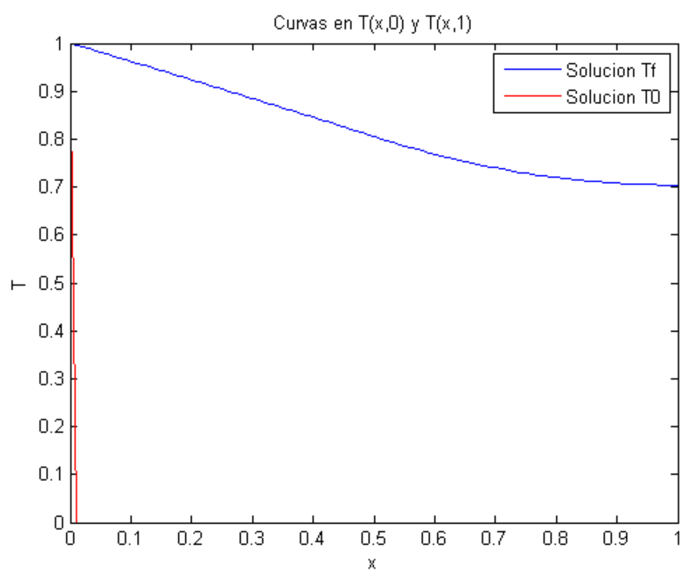
Al igual que en el ejercicio 2, se tomo como estado inicial un estado totalmente frio, ie temperatura 0, a excepcion de $T(x=0)$ donde su valor es 1 por ser una condicion de Dirichlet.

Si guardamos el historial atravez del tiempo de la temperatura $T(x,y)$, y luego la graficamos como una superficie, teniendo como ejes x y t. Vemos:

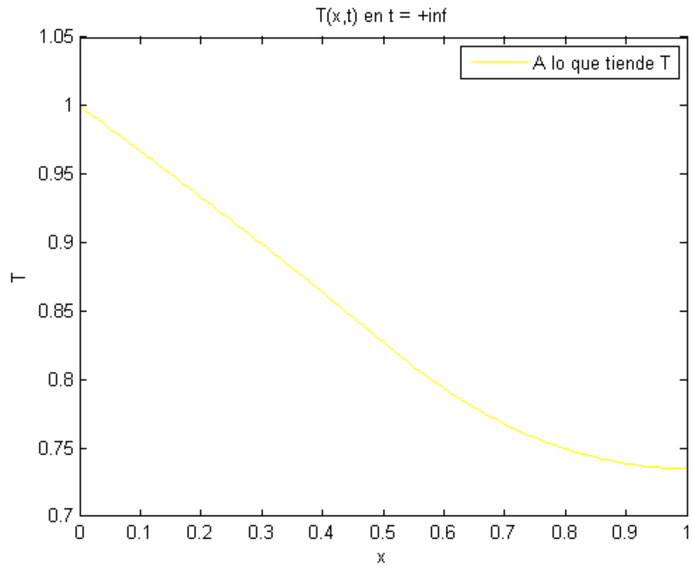


Tomamos solo 7 puntos al igual que el grafico del Ejercicio 2.

Las graficas de las curvas iniciales y finales de la temperatura son:



Al igual que el ejercicio anterior, por tener la misma ecuacion diferencial, vemos que la curva final tiende a ser estacionaria, esta curva sera:



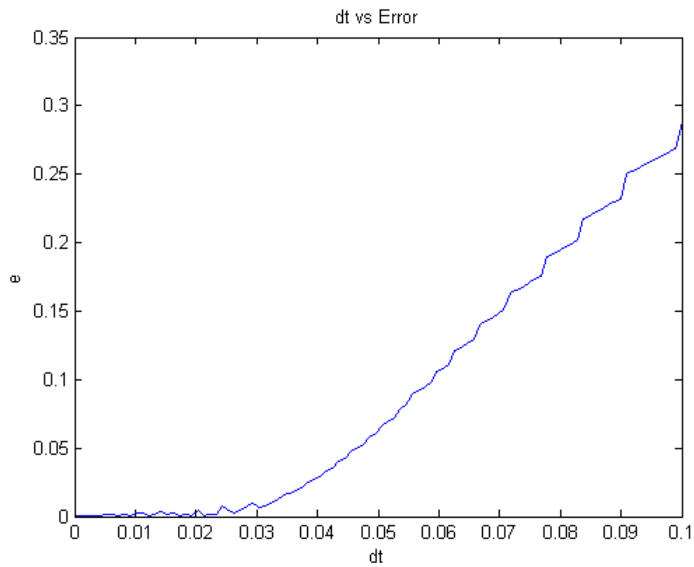
Esto es debido a la perdida de temperatura en el termino convectivo.

3.3 Errores:

El error del MDF en timepo y espacio usando el esquema Crank-Nicholson es $O(\Delta t^2)$, mucho mejor resultado que el del metodo exlpicito, la desventaje es que es computacionalmente mas pesado.
Tomamos la solucion dando un paso de $\frac{1}{10000}$ como solucion pseudo-analitica de forma arbitraria. Comparamos los errores de soluciones con un paso Δt mayor, calculando el error con la norma 2 del vector de error.
Nuestro rango de Δt varia entre:

$$\Delta Inicial = \frac{1}{10000}$$
$$\Delta Final = \frac{1}{10}$$

Graficamos tomando 100 pasos de forma lineal de ese intervalo. Esto nos da la siguiente curva:



Al igual que el error obtenido del metodo explicito esta afectada por ruido, creemos que este es consecuencia de algun error numerico minimo, ya que la tendencia es claramente cuadratica y el error es infinitesimal en este rango de pasos de tiempo.