GUÍA 4: 2D

Franco Victorio, Emmanuel Rojas Fredini, Esteban XXX

1. EJERCICIO 4

1.1. Solución general

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0
\end{aligned}
$$

Expresamos la ecuación diferencial en forma matricial:

$$\bar{\bar{\mathcal{L}}}^t \bar{\sigma} + \bar{b} = \bar{0}$$

Donde usamos la definición:

$$\bar{\bar{\mathcal{L}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Usando las siguientes relaciones entre tensión y deformación:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \bar{\bar{D}} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \bar{\bar{\mathcal{L}}} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

Podemos expresar:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \bar{\bar{D}}\bar{\bar{\mathcal{L}}} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\bar{\bar{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces re-escribimos la ecuación como:

$$\bar{\bar{\mathcal{L}}}^t \bar{\bar{D}} \bar{\bar{\mathcal{L}}} \bar{\hat{u}} + \bar{b} = \bar{0}$$

Por otro lado podemos formular las CC Neumann como:

$$\bar{\bar{\mathcal{L}}}n^t \bar{\sigma} = \bar{t}$$

$$\bar{\bar{\mathcal{L}}}n^t \bar{\bar{D}} \bar{\bar{\mathcal{L}}} \bar{\hat{u}} - \bar{t} = \bar{0}$$

Donde usamos las siguientes definiciones:

$$\bar{\bar{\mathcal{L}}}n = \begin{pmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{pmatrix}$$

$$\bar{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

Planteamos los residuos:

$$\int \bar{\bar{W}}_l R_\Omega d\Omega + \int \bar{\bar{W}}_l R_{\Gamma_q} d\Gamma_q = bar0$$

Donde:

$$\bar{\bar{W}}_l = \begin{pmatrix} W_l & 0 \\ 0 & W_l \end{pmatrix}$$

Remplazamos los residuos y debilitamos, definiendo $\bar{\bar{W}}_l' = -\bar{\bar{W}}_l$.

$$\begin{aligned} \int \bar{\bar{W}}_l \left(\bar{\bar{\mathcal{L}}}^t \bar{\bar{D}} \bar{\bar{\mathcal{L}}} \bar{\hat{u}} + \bar{b} \right) d\Omega + \int \bar{\bar{W}}_l' \left(\bar{\bar{\mathcal{L}}} \bar{\bar{n}}^t \bar{\bar{D}} \bar{\bar{\mathcal{L}}} \bar{\hat{u}} - \bar{t} \right) d\Gamma_q = \bar{0} \\ \int \left(\bar{\bar{\mathcal{L}}} \bar{\bar{W}}_l \right)^t \bar{\bar{D}} \bar{\bar{\mathcal{L}}} \bar{\hat{u}} d\Omega + \int + \bar{\bar{W}}_l \bar{b} d\Omega + \int \bar{\bar{W}}_l \bar{t} d\Gamma_q = \bar{0} \\ \int \left(\bar{\bar{\mathcal{L}}} \bar{\bar{W}}_l \right)^t \bar{\bar{D}} \bar{\bar{\mathcal{L}}} \bar{\hat{u}} d\Omega = - \int \bar{\bar{W}}_l \bar{b} d\Omega - \int \bar{\bar{W}}_l \bar{t} d\Gamma_q \end{aligned}$$

Remplazando la aproximacion de $\bar{\hat{u}}$ utilizaremos la definicion:

$$\bar{\bar{N}}_m = \begin{pmatrix} N_m & 0 \\ 0 & N_m \end{pmatrix}$$

De esta forma llegamos a las expresiones elementales:

$$K_{lm}^e = \int \left(\bar{\bar{\mathcal{L}}} \bar{\bar{W}}_l \right)^t \bar{\bar{D}} \bar{\bar{\mathcal{L}}} \bar{N}_m^e d\Omega$$

Podemos simplificar la expresión como:

$$K_{lm}^e = \int \left(\bar{\bar{B}}_l^e \right)^t \bar{\bar{D}} \bar{\bar{B}}_m^e d\Omega$$

Donde:

$$\bar{\bar{B}}_m^e = \bar{\bar{\mathcal{L}}}\bar{\bar{N}}_m^e$$

El vector independiente elemental es:

$$f_l^e = -\int \bar{\bar{W}}_l \bar{b} d\Omega - \int \bar{\bar{W}}_l \bar{t} d\Gamma_q$$

1.2. Solución especifica: Elementos Triangulares (genericos) Lineales

Utilizaremos las funciones de forma siguientes:

$$\bar{\hat{u}} = \begin{pmatrix} a_{i1}N_i + a_{j1}N_j + a_{k1}N_k \\ a_{i2}N_i + a_{j2}N_j + a_{k2}N_k \end{pmatrix}$$
$$\bar{N_m}(x,y) = \begin{pmatrix} a_m + b_m x + c_m y \\ a_m + b_m x + c_m y \end{pmatrix}$$

El cálculo de los coeficientes se revela en la tabla 1.

-	a	b	c
i	$\frac{x_j y_k - x_k y_j}{2area}$	$\frac{y_j - y_k}{2area}$	$\frac{x_k - x_j}{2area}$
j	$\frac{x_k y_i - x_i y_k}{2area}$	$\frac{y_k - y_i}{2area}$	$\frac{x_i - x_k}{2area}$
k	$\frac{x_i y_j - x_j y_i}{2area}$	$\frac{y_i - y_j}{2area}$	$\frac{x_j - x_i}{2area}$

Tabla 1: Coeficientes

Podemos evaluar que la matriz $\bar{\bar{B}}_m^e$:

$$\bar{B}_m^e = \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & c_m \\ c_m & b_m \end{pmatrix}$$

Luego en la tabla 2 resumimos las matrices elementales $\bar{\bar{B}}_m^e$.

$$K_{lm}^e = \int \left(\bar{\bar{B}}_l^e\right)^t \bar{\bar{D}}\bar{\bar{B}}_m^e d\Omega \rightarrow K_{lm}^e = \left(\bar{\bar{B}}_l^e\right)^t \bar{\bar{D}}\bar{\bar{B}}_m^e area\rho$$
$$f_l^e = -\int \bar{\bar{W}}_l \bar{b} d\Omega - \int \bar{\bar{W}}_l \bar{t} d\Gamma_q \rightarrow f_l^e = -\int \bar{\bar{W}}_l \bar{b} d\Omega - \frac{1}{2}\bar{t}distancia$$

-	$\bar{\bar{B}}$ elemental
i	$\bar{B}_i^e = \frac{1}{2area}\begin{pmatrix} y_j - y_k & 0 \\ 0 & x_k - x_j \\ x_k - x_j & y_j - y_k \end{pmatrix}$
j	$\bar{B}_j^e = \frac{1}{2area}\begin{pmatrix} y_k - y_i & 0 \\ 0 & x_i - x_k \\ x_i - x_k & y_k - y_i \end{pmatrix}$
k	$\bar{B}_k^e = \frac{1}{2area}\begin{pmatrix} y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_j - x_i \\ x_j - x_i & y_i - y_j \end{pmatrix}$

Tabla 2: Matrices $\bar{\bar{B}}$

En particular la fuerza $\bar{b}$ en el problema es $\bar{0}$ por lo que no es necesario calcularla. Además el problema solo presenta condiciones Neumann naturales en la sección superior e inferior por lo que se anula el termino de frontera de f_l^e.

1.3. Solución especifica: Elementos Cuadrangulares (alineados con los ejes) Bilineales

Utilizaremos las funciones de forma siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{\hat{u}} &= \begin{pmatrix} a_{i1}N_i + a_{j1}N_j + a_{k1}N_k + a_{q1}N_q \\ a_{i2}N_i + a_{j2}N_j + a_{k2}N_k + a_{q2}N_q \end{pmatrix} \\ \bar{N_m}\left(x, y\right) &= \begin{pmatrix} a_m + b_m x + c_m y + d_m xy \\ a_m + b_m x + c_m y + d_m xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El cálculo de los coeficientes se revela en la tabla 3.

-	**a**	**b**	**c**	**d**
i	$\frac{(x_i+\Delta x)(y_i+\Delta y)}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{-(y_i+\Delta y)}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{-(x_i+\Delta x)}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{1}{\Delta x \Delta y}$
j	$\frac{-x_i(y_i+\Delta y)}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{(y_i+\Delta y)}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{x_i}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{-1}{\Delta x \Delta y}$
k	$\frac{x_i y_i}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{-y_i}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{-x_i}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{1}{\Delta x \Delta y}$
q	$\frac{-(x_i+\Delta x)y_i}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{y_i}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{(x_i+\Delta x)}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{-1}{\Delta x \Delta y}$

Tabla 3: Coeficientes

Podemos evaluar que la matriz $\bar{\bar{B}}_m^e$:

$$\bar{B}^e_m = \begin{pmatrix} b_m + d_m y & 0 \\ 0 & c_m + d_m x \\ c_m + d_m x & b_m + d_m y \end{pmatrix}$$

Luego en la tabla 4 resumimos las matrices elementales $\bar{\bar{B}}^e_m$.

-	$\bar{B}$ elemental
i	$\bar{B}^e_i = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \begin{pmatrix} -y_i - \Delta y + y & 0 \\ 0 & -x_i - \Delta x + x \\ -x_i - \Delta x + x & -y_i - \Delta y + y \end{pmatrix}$
j	$\bar{B}^e_j = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \begin{pmatrix} y_i + \Delta y - y & 0 \\ 0 & y_i + \Delta y - x \\ y_i + \Delta y - x & y_i + \Delta y - y \end{pmatrix}$
k	$\bar{B}^e_k = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \begin{pmatrix} -y_i + y & 0 \\ 0 & -x_i + x \\ -x_i + x & -y_i + y \end{pmatrix}$
q	$\bar{B}^e_q = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \begin{pmatrix} y_i - y & 0 \\ 0 & x_i + \Delta x - x \\ x_i + \Delta x - x & y_i - y \end{pmatrix}$

Tabla 4: Matrices $\bar{\bar{B}}$

$$K^e_{lm} = \int \left(\bar{\bar{B}}^e_l\right)^t \bar{\bar{D}}\bar{\bar{B}}^e_m d\Omega$$

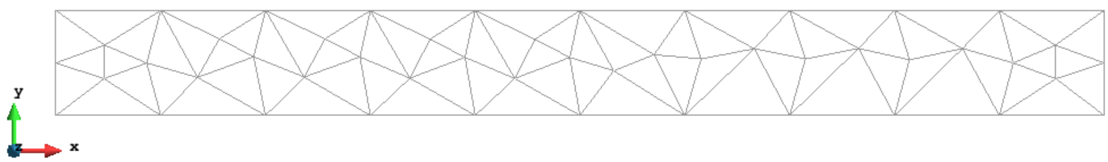
$$f^e_l = -\int \bar{\bar{W}}_l \bar{b} d\Omega - \int \bar{\bar{W}}_l \bar{t} d\Gamma_q \rightarrow f^e_l = -\int \bar{\bar{W}}_l \bar{b} d\Omega - \frac{1}{2}\bar{t} distancia$$

Es necesario realizar una integración de la matriz elemental, pero al ser los elementos cuadriláteros alineados con los ejes luego la integración numérica es sencilla.

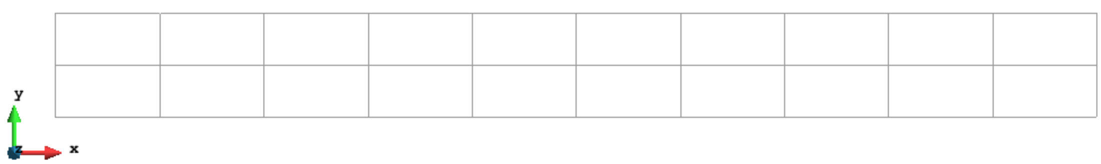
1.4. Resultados

La geometría de la viga y su mallado fue realizada utilizando el software GID™. En la figura 1 se puede ver ejemplos de las mallas obtenidas. Para la resolución del problema se escribió un conjunto de scripts de Matlab™ que se adjuntan.

Los resultados obtenidos se pueden ver en la 2. Se grafica como malla rellena la malla original utilizando el color para determinar la norma de desplazamiento de los nodos y en



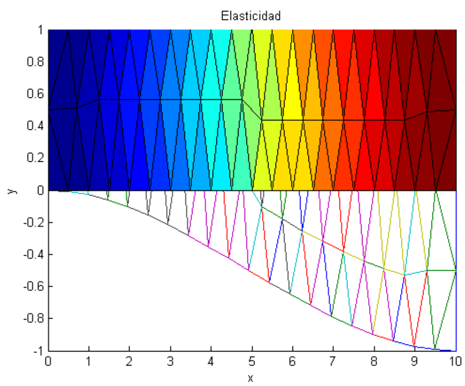
(a) Malla de triangulos no estructurada



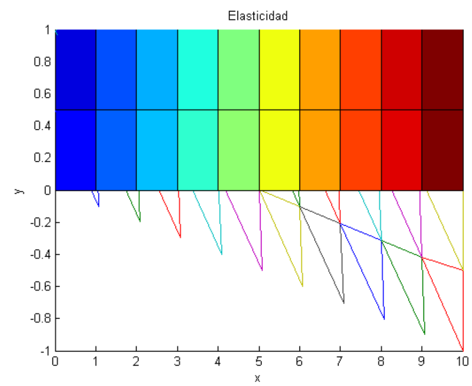
(b) Malla de cuadrangulos estructurada

Figura 1: Mallas

malla *wireframe* la malla desplazada. Se puede apreciar como se cumple la CC Dirichlet impuesta tanto en el lado izquierdo, que esta fijo, como en le derecho, donde se flexiona la viga. Sobre la parte superior e inferior se considero CC Neumann naturales por lo cual se ve que no fueron aplicadas fuerzas sobre esos lados y su desplazamiento es debido a la flexión del lado derecho. Además se aprecia que la malla de triángulos esta mas refinada por lo que se puede apreciar en más detalle la solución. Por ultimo en la figura 3 se puede ver un diagrama de campo vectorial con los desplazamientos producidos en la solución, en particular este es el campo producido por la solución sobre la malla triangular.



(a) Resultado sobre la malla de trangulos



(b) Resultado sobre la malla de cuadrangulos

Figura 2: Desplazamientos

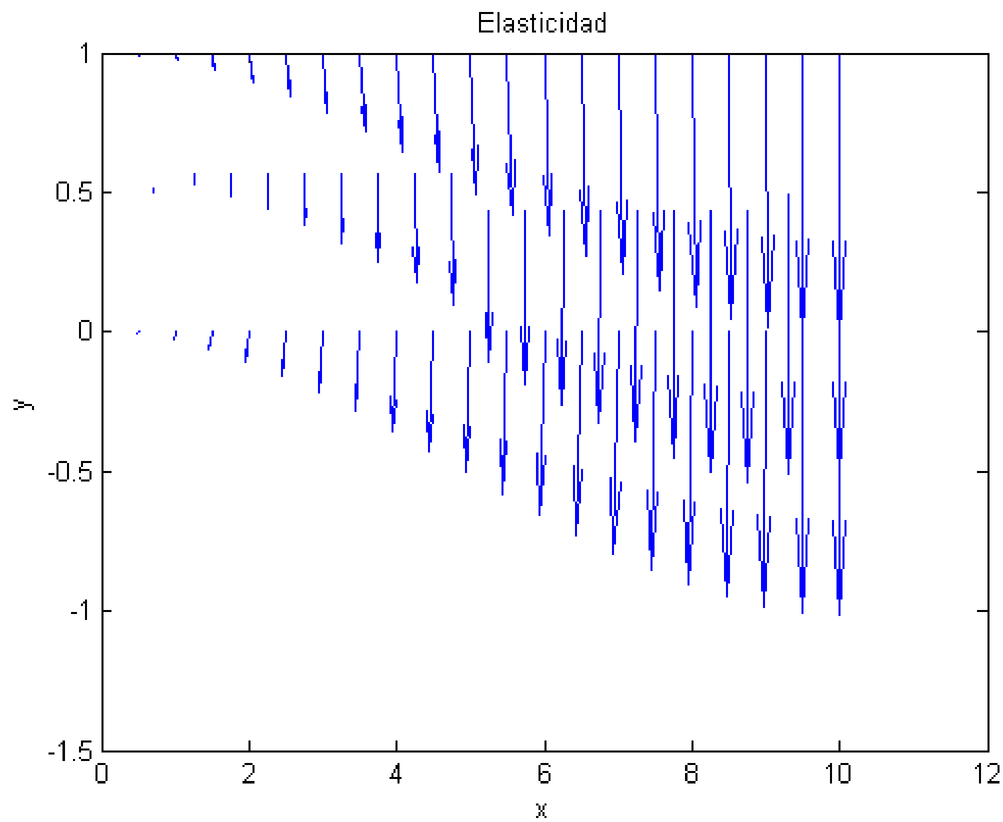


Figura 3: Campo vectorial de desplazamientos