GUÍA 3: 1D

Franco Victorio, Emmanuel Rojas Fredini, Esteban XXX

1. EJERCICIO 4

Ecuacion Diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+Q-c\left(T-T_{amb}\right)=0 \tag{1}$$

- Donde k cte escalar.
- Donde Q cte escalar, al menos dentro de 1 elemento.

CC:

$$k\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}=-h\left(T-T_{amb}\right) \qquad \Gamma_{\text{ínf}} \tag{2}$$

$$k\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}=-\bar{q} \qquad \Gamma_{q} \tag{3}$$

$$T=\bar{T} \qquad \Gamma_{\phi} \tag{4}$$

Nuestra aproximacion sera:

$$T\approx\hat{T}=\sum a_m N_m\left(x\right) \tag{5}$$

Las condiciones Dirichlet en los bordes Γ_ϕ se impondran en la matriz ensamblada, es decir se impondran los coeficientes a a el valor correspondiente.

Nuestra aproximacion de MRP sera:

$$\int W_l\left(k\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial x^2}+Q+c\left(\hat{T}-T_{amb}\right)\right)d\Omega+$$

$$\int \bar{W}_l\left(-k\frac{\partial\hat{T}}{\partial\vec{n}}+h\left(\hat{T}-T_{amb}\right)\right)d\Gamma_{\text{ínf}}+\int \bar{W}_l\left(k\frac{\partial\hat{T}}{\partial\vec{n}}+\bar{q}\right)d\Gamma_q=0$$

Debilitamos:

$$-k\int \frac{\partial W_l}{\partial x}\frac{\partial \hat{T}}{\partial x}d\Omega + k\int W_l\frac{\partial \hat{T}}{\partial \vec{n}}d\Gamma_{\text{inf}+q+\phi} + \int W_l\left(Q + c\left(\hat{T} - T_{amb}\right)\right)d\Omega +$$
$$\int \bar{W}_l\left(-k\frac{\partial \hat{T}}{\partial \vec{n}} + h\left(\hat{T} - T_{amb}\right)\right)d\Gamma_{\text{ínf}} + \int \bar{W}_l\left(k\frac{\partial \hat{T}}{\partial \vec{n}} + \bar{q}\right)d\Gamma_q = 0$$

Elegimos:

$$\begin{aligned} \bar{W}_l &= -W_l & en \quad \Gamma_{\text{ínf}} \\ W_l &= 0 & en \quad \Gamma_\phi \\ \bar{W}_l &= -W_l & en \quad \Gamma_q \end{aligned}$$

$$-k\int \frac{\partial W_l}{\partial x}\frac{\partial \hat{T}}{\partial x}d\Omega + \int W_l\left(Q + c\left(\hat{T} - T_{amb}\right)\right)d\Omega - h\int W_l\left(\hat{T} - T_{amb}\right)d\Gamma_{\text{ínf}} - \int W_l\bar{q}d\Gamma_q = 0$$

Usamos Galerkin, es decir $W_l = N_l$:

$$-k\int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial \hat{T}}{\partial x}d\Omega + \int N_l\left(Q + c\left(\hat{T} - T_{amb}\right)\right)d\Omega - h\int N_l\left(\hat{T} - T_{amb}\right)d\Gamma_{\text{ínf}} - \int N_l\bar{q}d\Gamma_q = 0$$

Reemplazamos $\hat{T}$:

$$\sum -k\int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial \sum a_m N_m}{\partial x}d\Omega + \int N_l\left(Q + c\left(\sum a_m N_m - T_{amb}\right)\right)d\Omega -$$
$$h\int N_l\left(\sum a_m N_m - T_{amb}\right)d\Gamma_{\text{ínf}} - \int N_l\bar{q}d\Gamma_q = 0$$

$$\sum -k\int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x}d\Omega a_m + c\int N_l N_m d\Omega a_m + \int N_l\left(Q - cT_{amb}\right)d\Omega -$$
$$h\int N_l\left(N_m - T_{amb}\right)d\Gamma_{\text{ínf}}a_m - \int N_l\bar{q}d\Gamma_q = 0$$

$$\sum \left[-k\int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x} + cN_lN_m d\Omega - h\int N_l\left(N_m - T_{amb}\right)d\Gamma_{\text{ínf}}\right]a_m = -\int N_l\left(Q - cT_{amb}\right)d\Omega + \int N_l\bar{q}d\Gamma_q$$

Las matrices elementales son:

$$K^e_{l,m} = k\int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x} + cN_lN_m d\Omega^e - h\int N_l\left(N_m - T_{amb}\right)d\Gamma^e_{\text{ínf}} \tag{6}$$

$$f^e_l = \int N_l\left(Q - cT_{amb}\right)d\Omega^e - \int N_l\bar{q}d\Gamma_q \tag{7}$$

1.1. Caso particular

Se condidera el caso donde:

- c = 0
- k = 1
- Q = 1 para $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
- Q = 0 para $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

Condiciones de contorno:

- $\bar{T} = 1$ en $x = 0$
- $\bar{T} = 0$ en $x = 1$

Ya que las condiciones Dirichlet las impondremos en la matriz ensamblada luego las matrices elementales se simplificaran a:

$$K^e_{l,m} = k\int \frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x}d\Omega^e \tag{8}$$

$$f^e_l = Q\int N_l d\Omega^e \tag{9}$$

1.2. Funciones de Forma

Usaremos elementos formados por 2 nodos y funciones de forma lineales que sera:

- $N_i = \frac{h-x}{h}$
- $N_j = 1 - \frac{h-x}{h}$

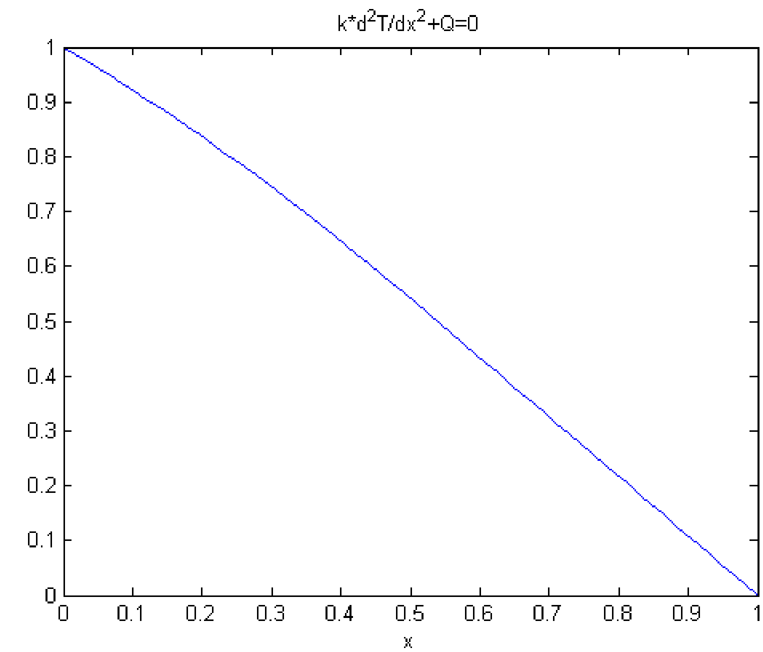
Donde h es el ancho de cada elemento. Con derivadas:

- $\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{-1}{h}$
- $\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{h}$

1.3. Resultados

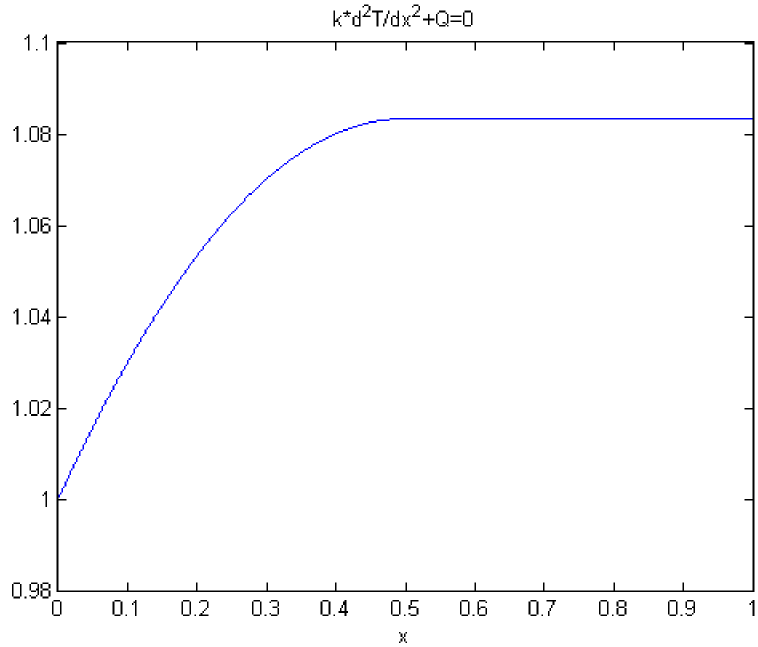
Tomaremos $L = 1$. El resultado con 2 condiciones de contorno Dirichlet siguientes es:

- En $x = 0$ condicion Dirichlet $T = 1$
- En $x = 1$ condicion Dirichlet $T = 0$

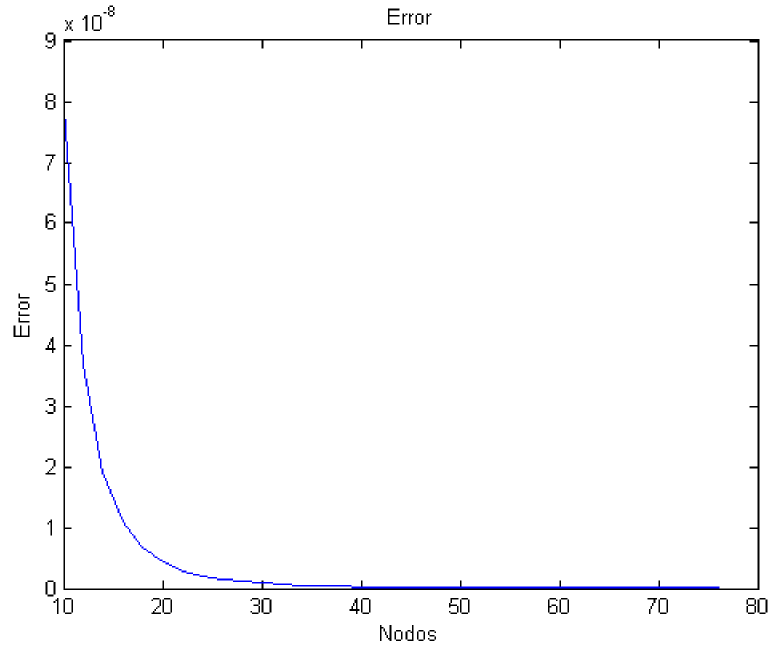


El resultado con 1 condiciones de contorno Dirichlet y una Newmann tal que:

- En $x = 0$ condicion Dirichlet $T = 1$
- En $x = 1$ condicion Newmann $k\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$



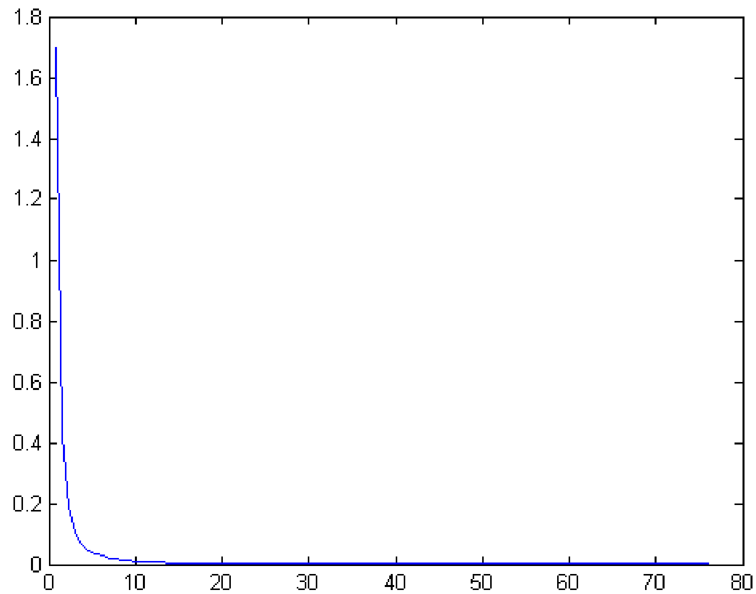
Haciendo pruebas de error de la aproximacion del metodo de elementos finitos, en el caso de fronteras Dirchlet, con respecto a la solucion analitica, podemos ver que a medida que refinamos la malla el error disminuye de la siguiente forma:



El error se midio como el error cuadratico medio.

Es decir que el error disminuye de forma cuadratica a medida que se agregan nodos a la malla, y este aumento de nodos en la malla significa un aumento igual de elementos, ya que se tomaron elementos lineales formados por 2 nodos.

Podemos ver que la grafica de la funcion $y = \frac{1}{x^2}$ es:



Tiene la misma tendencia que el resultado del error por esto decimos que el error disminuye cuadraticamente con la cantidad de nodos.