

GUÍA 1

Emmanuel Rojas Fredini

1. EJERCICIO 1

- a) Para el cálculo se utilizara el método de los coeficientes indeterminados. Primero realizaremos el desarrollo en serie de Taylor de los nodos que utilizaremos en la aproximación deseada:

$$u_{i-3} = u_i - 3\Delta x u'_i + \frac{9}{2}\Delta x^2 u''_i - \frac{27}{6}\Delta x^3 u'''_i + \frac{81}{24}\Delta x^4 u^{(4)}_i + O(\Delta x^5)$$

$$u_{i-2} = u_i - 2\Delta x u'_i + \frac{4}{2}\Delta x^2 u''_i - \frac{8}{6}\Delta x^3 u'''_i + \frac{16}{24}\Delta x^4 u^{(4)}_i + O(\Delta x^5)$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x u'_i + \frac{1}{2}\Delta x^2 u''_i - \frac{1}{6}\Delta x^3 u'''_i + \frac{1}{24}\Delta x^4 u^{(4)}_i + O(\Delta x^5)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x u'_i + \frac{1}{2}\Delta x^2 u''_i + \frac{1}{6}\Delta x^3 u'''_i + \frac{1}{24}\Delta x^4 u^{(4)}_i + O(\Delta x^5)$$

Luego sumamos cada una de las series de Taylor multiplicando cada una por un coeficiente diferente obtenemos:

$$\begin{aligned} au_{i-3} + bu_{i-2} + cu_{i-1} + du_i + eu_{i+1} &= (a + b + c + d + e)u_i + \Delta x(-3a - 2b - c + e)u'_i \\ &+ \frac{\Delta x^2}{2}(9a + 4b + c + e)u''_i + \frac{\Delta x^3}{6}(-27a - 8b - c + e)u'''_i \\ &+ \frac{\Delta x^4}{24}(81a + 16b + c + e)u^{(4)}_i + O(\Delta x^5) \end{aligned}$$

Si imponemos que la expresión anterior sea igual a $\frac{\Delta x^2}{2}u''_i + O(\Delta x^5)$ luego obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -27 & -8 & -1 & 0 & 1 \\ 81 & 16 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al solucionar el sistema obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{24} \end{pmatrix}$$

b) Al utilizar los coeficientes en la ecuación tenemos:

$$-\frac{1}{24}u_{i-3} + \frac{1}{6}u_{i-2} + \frac{1}{4}u_{i-1} - \frac{5}{6}u_i + \frac{11}{24}u_{i+1} = \frac{\Delta x^2}{2}u''_i + O(\Delta x^5)$$

Luego despejando u''_i :

$$\frac{-u_{i-3} + 4u_{i-2} + 6u_{i-1} - 20u_i + 11u_{i+1}}{12\Delta x^2} = u''_i + O(\Delta x^3)$$

Donde resulta evidente que el orden de error de la aproximación es $O(\Delta x^3)$.

2. EJERCICIO 2

2.1. Solución Analítica:

La ecuación diferencial del calor es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + k\Delta T + c(T - T_{amb}) + Q = 0$$

Para:

$$0 \leq x \leq L \quad \text{con} \quad L = 1$$

Sujeta a las condiciones de contorno (C.C.):

$$q\bar{n} = -k \frac{\partial T}{\partial \bar{n}}$$

Como el problema es 1D la normal \bar{n} es simplemente x :

$$\begin{aligned} 10 &= -k \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} && \text{en} \quad x = 0 \\ 0 &= -k \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} && \text{en} \quad x = L \quad \text{con} \quad L = 1 \end{aligned}$$

Al ser en particular la ecuación estacionaria la que requiere resolver el ejercicio se omite el término temporal, es decir $\frac{\partial T}{\partial t}$. La ecuación será:

$$\begin{aligned} k\Delta T + c(T - T_{amb}) + Q &= 0 \\ k\Delta T + c(T - T_{amb}) &= -Q \end{aligned}$$

Además al ser en 1D nuestro problema:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + c(T - T_{amb}) = -Q$$

Remplazando los parámetros de la ecuación y utilizando las CC se llega a que la solución analítica es:

$$\begin{aligned} T(x) &= k_1 \sin(x) + k_2 \cos(x) + 4x^2 - 4x - 8 \\ k_1 &= -6 \\ k_2 &= -\frac{6\cos(1) - 4}{\sin(1)} \end{aligned}$$

2.2. Método de Diferencias Finitas:

Para calcular la solución de forma numérica utilizaremos aproximaciones a las derivadas y resolveremos por MDF.

Sabemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d^2T}{dx^2} &\approx \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} & \text{Con error } O(\Delta x^2) \\ \frac{dT}{dx} &\approx \frac{-3T_i + 4T_{i+1} - T_{i+2}}{2\Delta x} & \text{Con error } O(\Delta x^2) \\ \frac{dT}{dx} &\approx \frac{3T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{2\Delta x} & \text{Con error } O(\Delta x^2)\end{aligned}$$

Siendo i el sub-indice que dice de que *sample* se esta tomando T , ie T_i es la temperatura de la muestra o punto i .

Si discretizamos nuestra ecuación usando diferencias finitas nos queda:

$$\begin{aligned}k \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} + cT_i - cT_{amb} &= -Q \\ k \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} + cT_i &= -Q + cT_{amb} \\ \frac{k}{\Delta x^2} T_{i-1} + \left(\frac{-2k}{\Delta x^2} + c\right) T_i + \frac{k}{\Delta x^2} T_{i+1} &= -Q + cT_{amb} \\ \frac{1}{\Delta x^2} (kT_{i-1} + (-2k + c\Delta x^2)T_i + kT_{i+1}) &= -Q + cT_{amb} \\ (kT_{i-1} + (-2k + c\Delta x^2)T_i + kT_{i+1}) &= -Q\Delta x^2 + cT_{amb}\Delta x^2\end{aligned}$$

Luego si N es nuestra cantidad de puntos en el dominio, ie $\vec{x} = (0 \ \Delta x \ 2\Delta x \ \dots \ 1)$ con N elementos luego $\vec{T} = (T_1 \ T_2 \ \dots \ T_N)$, el sistema nos quedara:

- I) C.C. 1 ?
- II) $(kT_1 + (-2k + c\Delta x^2)T_2 + kT_3) = -Q\Delta x^2 + cT_{amb}\Delta x^2$
- III) $(kT_2 + (-2k + c\Delta x^2)T_3 + kT_4) = -Q\Delta x^2 + cT_{amb}\Delta x^2$
- IV) $(kT_3 + (-2k + c\Delta x^2)T_4 + kT_5) = -Q\Delta x^2 + cT_{amb}\Delta x^2$
- ...
- ...

- N-1) $(kT_{N-2} + (-2k + c\Delta x^2)T_{N-1} + kT_N) = -Q\Delta x^2 + cT_{amb}\Delta x^2$
- N) C.C. 2 ?

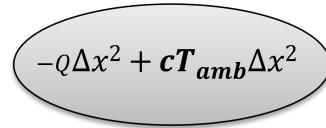
Estas ecuaciones nos definirán la matriz $\bar{\bar{A}}$ y el vector independiente \bar{b} de nuestro sistema:

$$\bar{\bar{A}}\bar{x} = \bar{b} \quad (1)$$

Veamos como queda el stencil de nuestra matriz $\bar{\bar{A}}$:



Ademas el stencil del vector independiente \bar{b} sera:



En fin $\bar{\bar{A}}$ será:

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & \dots \\ k & -2k + c\Delta x^2 & k & 0 & 0 & \dots \\ 0 & k & -2k + c\Delta x^2 & k & 0 & \dots \\ 0 & 0 & k & -2k + c\Delta x^2 & k & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ ? & ? & ? & ? & ? & \dots \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz sparse tribanda.

2.3. Condición de Contorno:

El problema nos dice que está sujeto a:

$$\begin{aligned} 10 &= -k \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} && \text{en } x = 0 \\ 0 &= -k \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} && \text{en } x = 1 \end{aligned}$$

Las C.C. son dos condiciones Neumann, las que nos definen nuestra primera y última fila de la matriz \bar{A} . Para ello utilizaremos las aproximaciones a la derivada primera:

- C.C. 1 $-k(-3T_1 + 4T_2 - T_3) = 20\Delta x$
- C.C. 2 $-k(T_{N-2} - 4T_{N-1} + 3T_N) = 0$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3k & -4k & k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ k & -2k - c\Delta x^2 & k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -2k - c\Delta x^2 & k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -2k - c\Delta x^2 & k & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k & 4k & -3k \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 20\Delta x \\ Q(\Delta x)\Delta x^2 \\ Q(2\Delta x)\Delta x^2 \\ Q(3\Delta x)\Delta x^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notar que el primer y último elemento del vector \bar{b} son las condiciones iniciales o de contorno.

En este caso optamos por utilizar aproximaciones a la derivada primera descentradas y de orden igual a las aproximaciones de los nodos internos. Otra opción hubiese sido utilizar nodos ficticios y usar aproximaciones centradas en las C.C..

Dado que en nuestro problema varios parámetros están establecidos se simplifica el problema:

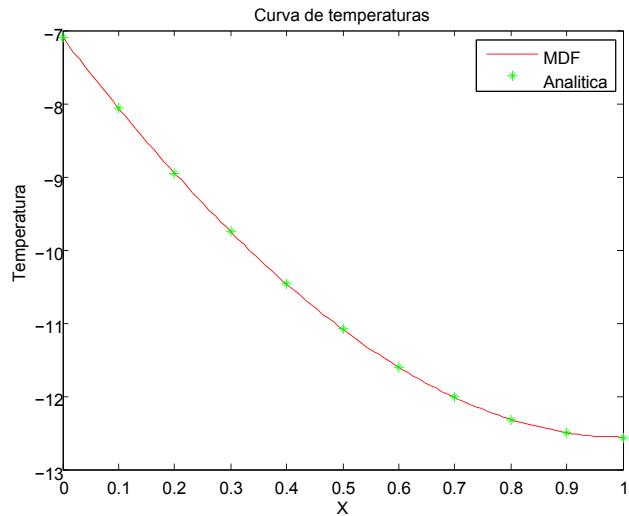
$$k = 1$$

$$c = 1$$

$$T_{amb} = 0$$

$$Q(x) = 1 - 4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$$

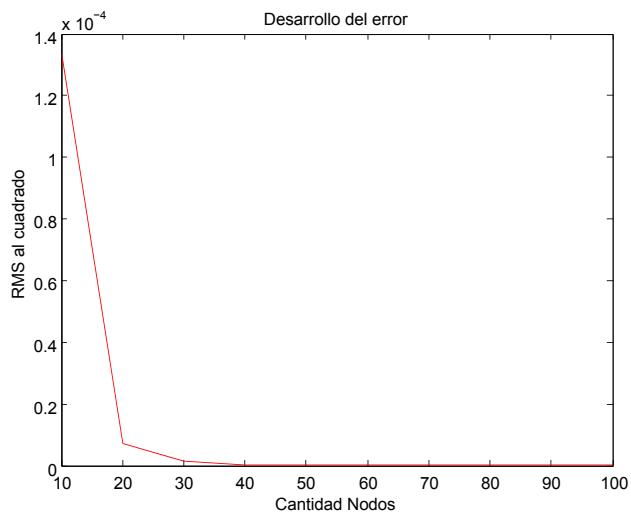
En fin resolvemos el sistema:



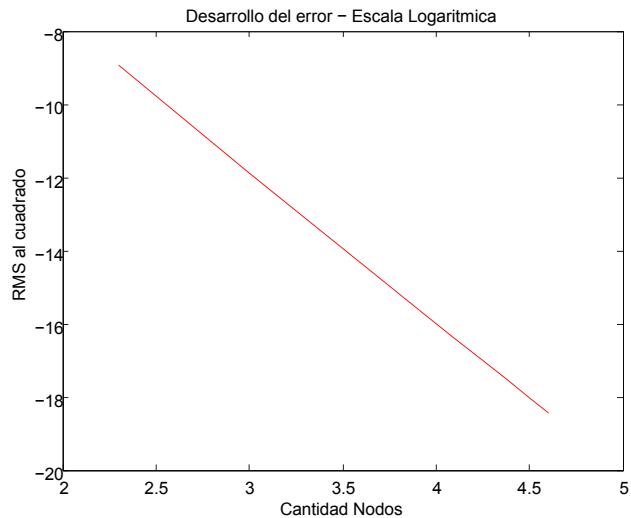
$$\bar{x} = \bar{A}^{-1} \bar{b} \quad (2)$$

2.4. Análisis del error:

El error para el rango de nodos $N = [10, 100]$ con paso de 10 se puede ver en la figura 1a. Vemos que al aumentar N el error se reduce rápidamente. El orden de error se muestra evidente cuando se analiza la curva de error en escala logarítmica. De esta forma en la figura 1b podemos ver por la pendiente de la grafica (por las propiedades del logaritmo) que el orden de error es $O(\Delta x^2)$.



(a) Error



(b) Error en escala logarítmica

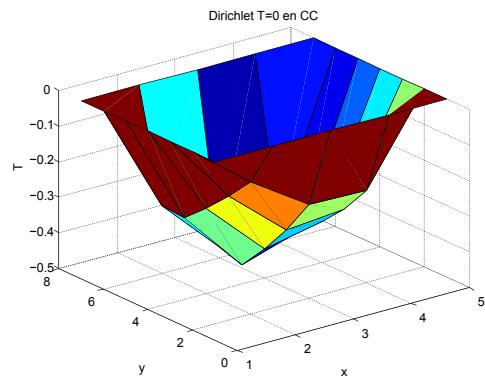
Figura 1: Graficas de error

3. EJERCICIO 3

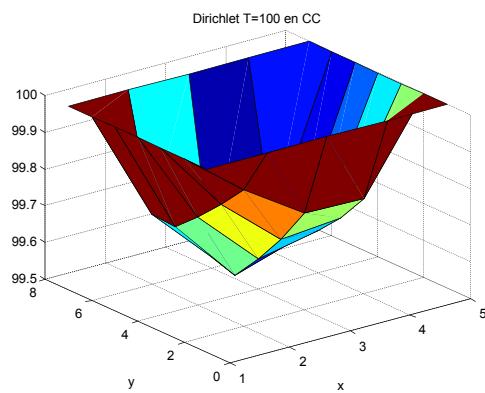
Para el problema 2D se utilizaron las aproximaciones siguientes y sus análogos correspondientes a las derivadas con respecto a y :

$$\begin{aligned}\frac{d^2T}{dx^2} &\approx \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} && \text{Con error } O(\Delta x^2) \\ \frac{dT}{dx} &\approx \frac{-3T_i + 4T_{i+1} - T_{i+2}}{2\Delta x} && \text{Con error } O(\Delta x^2) \\ \frac{dT}{dx} &\approx \frac{3T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{2\Delta x} && \text{Con error } O(\Delta x^2)\end{aligned}$$

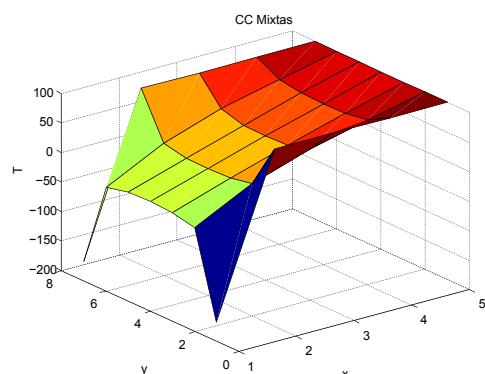
Para el enunciado *a* se puede ver en la [2a](#) el resultado de la prueba. En el siguiente enunciado se solicitaba que se calculara la solución para una *C.C.* con temperaturas impuestas más elevadas, el resultado se puede ver en [2b](#). A simple vista se puede notar que las graficas de [2a](#) y [2b](#) son idénticas en forma pero la segunda esta elevada en temperaturas para satisfacer la *C.C.* impuesta. Por ultimo en [2c](#) se puede ver el grafico solicitado en el enunciado *c*. Acá sucede que en las esquinas donde se solapan las *C.C.* no es posible aplicar las dos y en el grafico se impuso la condición Neumann de forma arbitraria.



(a) Gráfico de enunciado a



(b) Gráfico de enunciado b



(c) Gráfico de enunciado c

4. EJERCICIO 4

Al realizar aproximaciones numéricas a las derivadas en el caso de mallas homogéneamente espaciadas como utilizamos en los ejercicios anteriores obtenemos resultados como los que utilizamos. No obstante si la malla esta heterogéneamente espaciada debemos tenerlo en cuenta. Consideraremos que los nodos están espaciados de su nodo anterior y siguiente por Δx_- y Δx_+ respectivamente. De esta forma podemos realizar la serie de Taylor teniendo esto en cuenta:

$$T_{i+1} = T_i + \Delta x_+ \frac{dT_i}{dx} + O(\Delta x_+^2)$$
$$T_{i-1} = T_i - \Delta x_- \frac{dT_i}{dx} + O(\Delta x_-^2)$$

Luego despejando la primera derivada $\frac{dT_i}{dx}$:

$$\frac{dT_i}{dx} \approx \frac{T_{i-1} + T_{i+1}}{\Delta x_- + \Delta x_+}$$

De forma equivalente podemos aproximar la segunda derivada como:

$$\frac{d^2T_i}{dx^2} \approx \frac{2}{\Delta x_+(\Delta x_+ + \Delta x_-)} T_{i+1} - \frac{2}{\Delta x_-\Delta x_+} T_i + \frac{2}{\Delta x_-(\Delta x_+ + \Delta x_-)} T_{i-1}$$

Se resolvió la ecuación diferencial utilizando las aproximaciones derivadas. En la figura 2 puede verse la aproximación utilizando los nodos con espaciado no uniforme y la aproximación usando la misma cantidad de nodos pero igualmente espaciados. En la figura también se muestra la solución analítica para comparar.

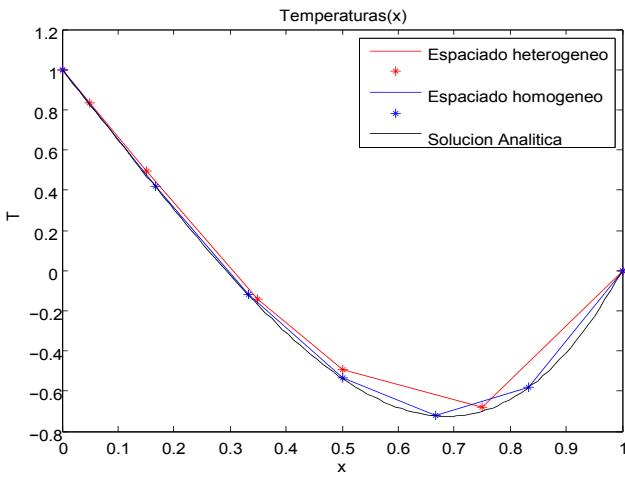


Figura 2

5. EJERCICIO 5

Para la resolucion de la ecuacion de calor no estacionaria [3](#) se emplearon tres tecnicas de discretizacion temporal/espacial: Esquema Explicito, Implicito y Cranck-Nicholson.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 100(x + y) \quad (3)$$

En el video [3](#) se puede ver el resultado de la simulación utilizando el esquema explicito. En el video [4](#) se puede ver la simulación utilizando el esquema implícito. Por ultimo en el video [5](#) se observa la simulación usando el esquema Cranck-Nicholson. Para los tres videos se utilizo un $\Delta t = dt = 0,002$ con un tiempo final de simulación de 0,6 y una disposición espacial idéntica. Se utilizo el mismo Δt para las tres simulaciones solo para obtener los mismos *frames* y producir videos comparables.

Las conclusiones son que el esquema explicito no converge para cualquier paso temporal sino que es muy sensible a éste. Además el refinamiento espacial también afecta convergencia, si se desea un gran refinamiento espacial se requiere un paso de tiempo menor. Por otro lado el esquema implícito es estable independientemente del paso del tiempo. El esquema Cranck-Nicholson es mas estable que el explicito pero si el paso de tiempo es muy grande diverge la solución.

(Cargando video...)

Figura 3: Esquema Explicito

(Cargando video...)

Figura 4: Esquema Implicito

(Cargando video...)

Figura 5: Esquema Cranck-Nicholson