



Procesamiento Digital de Señales

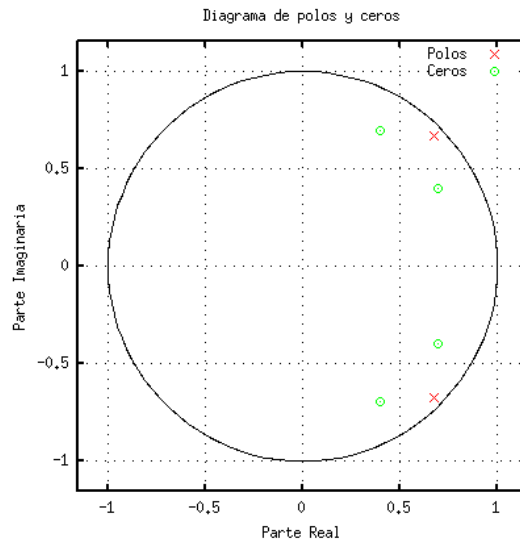
Guías de Trabajos Prácticos VII – X

Integrantes:

Genzelis, Lucas
Rojas Fredini, Emmanuel
Yones, Cristian

Guía de Trabajos Prácticos VII – Filtros Digitales

1. a) A continuación se observa el diagrama de polos y ceros del filtro en el plano Z:



b) En primer lugar se procede a calcular los coeficientes de los polinomios en z^{-1} que forman el numerador y el denominador de la función de transferencia del filtro. Como se conocen las raíces de cada uno de estos polinomios (siendo c_1, c_2, c_3 y c_4 las correspondientes al numerador -ceros- y p_1, p_2, p_3 y p_4 las correspondientes al denominador -polos-), puede utilizarse el operador de convolución para encontrar dichos coeficientes:

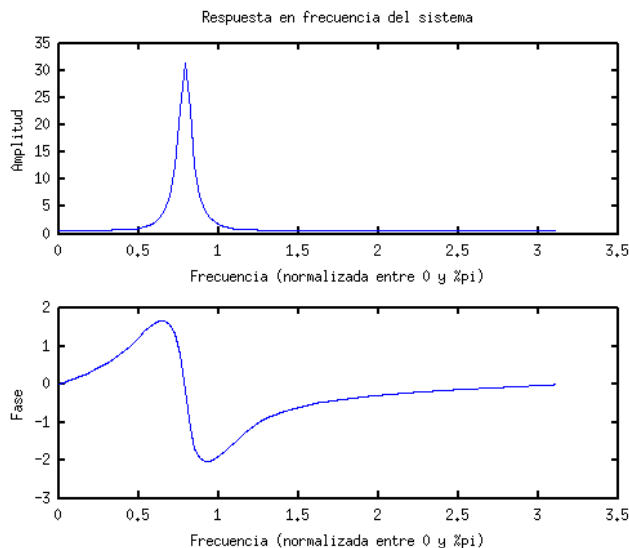
```
num=conv(conv([-1 c1],[-1 c2]),conv([-1 c3],[-1 c4]));
```

```
den=conv(conv([-1 p1],[-1 p2]),conv([-1 p3],[-1 p4]));
```

Luego la función de transferencia del filtro tendrá la forma:

$$H(z) = \frac{(num(1) + num(2) * z.^{-1} + num(3) * z.^{-2} + num(4) * z.^{-3} + num(5) * z.^{-4})}{(den(1) + den(2) * z.^{-1} + den(3) * z.^{-2} + den(4) * z.^{-3} + den(5) * z.^{-4})}$$

Para encontrar la respuesta en frecuencia del filtro entre 0 y π , basta con evaluar dicha función sobre una semicircunferencia de radio unitario definida con un ángulo entre 0 y π .



c) Para esto debe hallarse el valor máximo g tomado por la respuesta en frecuencia del filtro. Luego se procede a dividir por este término la función de transferencia previamente identificada:

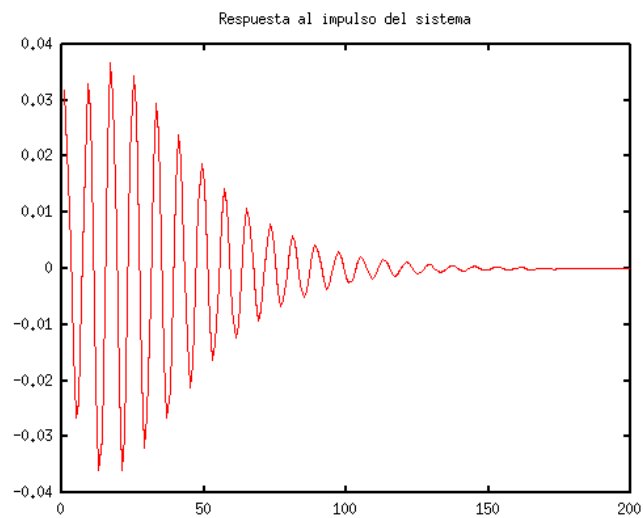
$$H_{norm}(z) = \frac{1}{g} \frac{(num(1) + num(2) * z^{-1} + num(3) * z^{-2} + num(4) * z^{-3} + num(5) * z^{-4})}{(den(1) + den(2) * z^{-1} + den(3) * z^{-2} + den(4) * z^{-3} + den(5) * z^{-4})}$$

Si lo que se desea es obtener los coeficientes del filtro para escribirlo en términos de su ecuación en diferencias $y(n) = \sum_{k=1}^p \text{coeffsal}(k) * y(n-k) + \sum_{k=0}^q \text{coeffent}(k+1) * x(n-k)$, éstos pueden calcularse como:

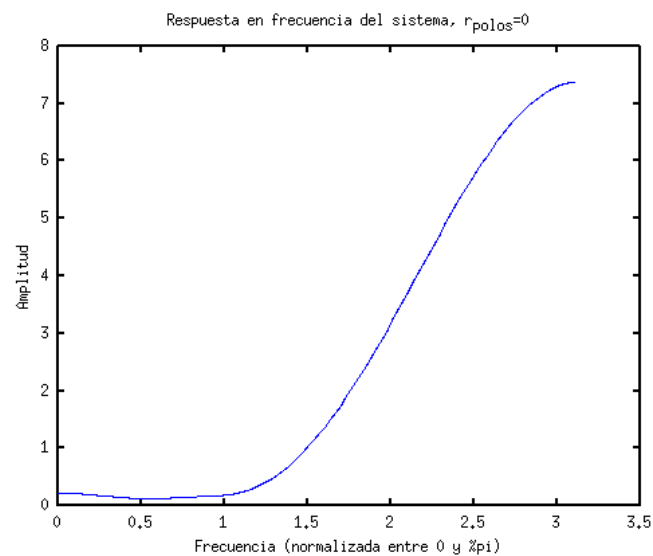
```
coeffent=1/g*num/den(1);
```

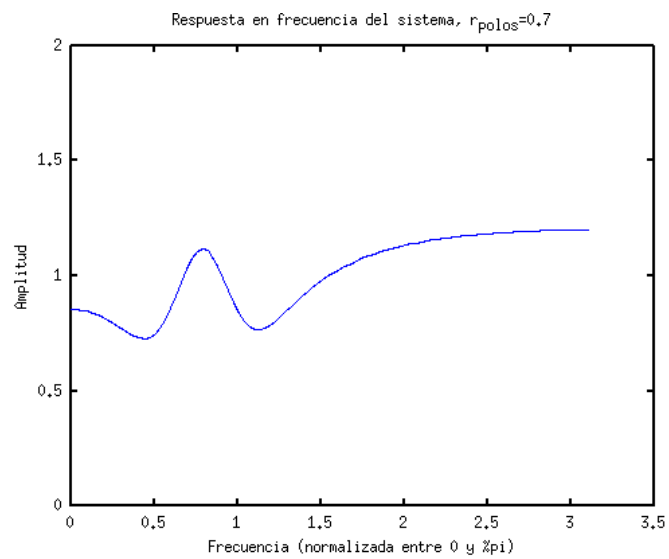
```
coeffsal= - den(2:end)/den(1);
```

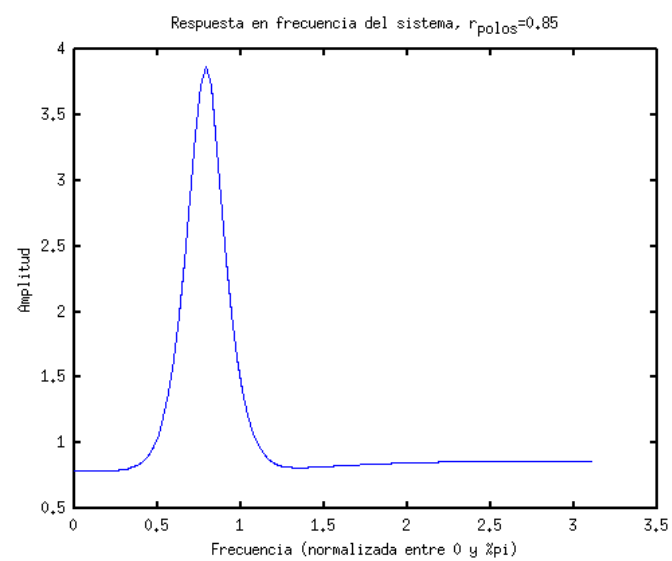
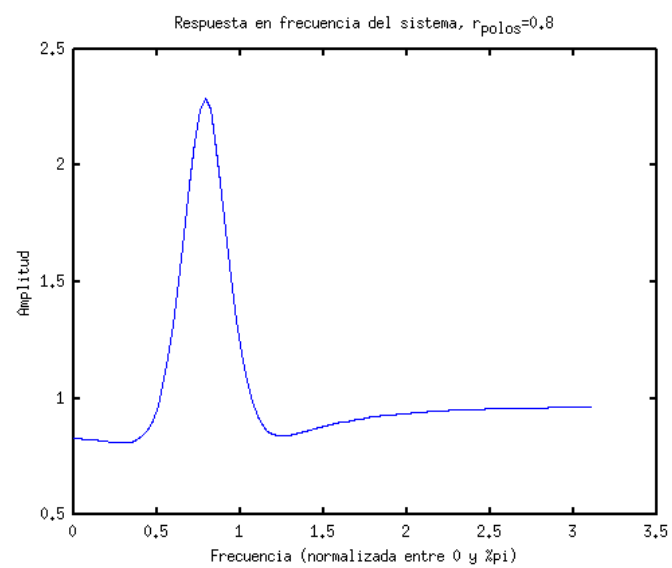
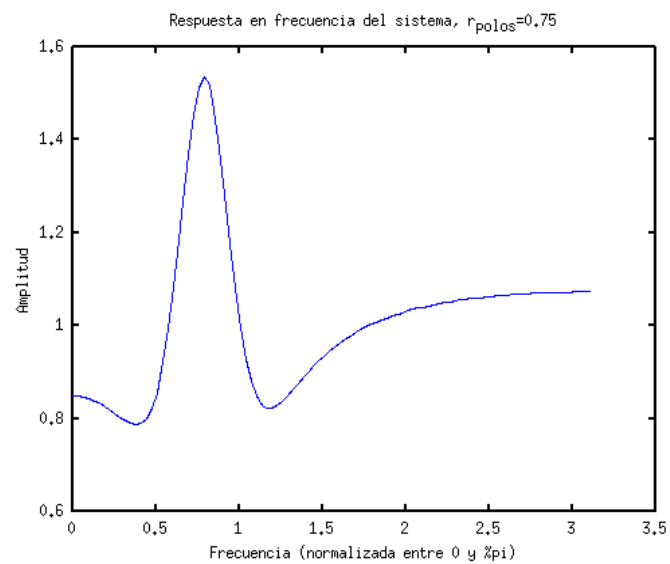
Utilizando estos coeficientes puede obtenerse, por ejemplo, la respuesta al impulso del sistema (es decir, el filtro) para las 200 primeras muestras:

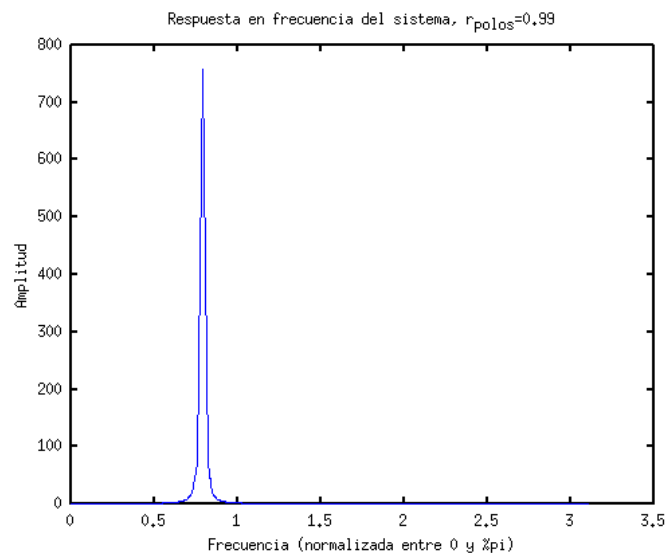
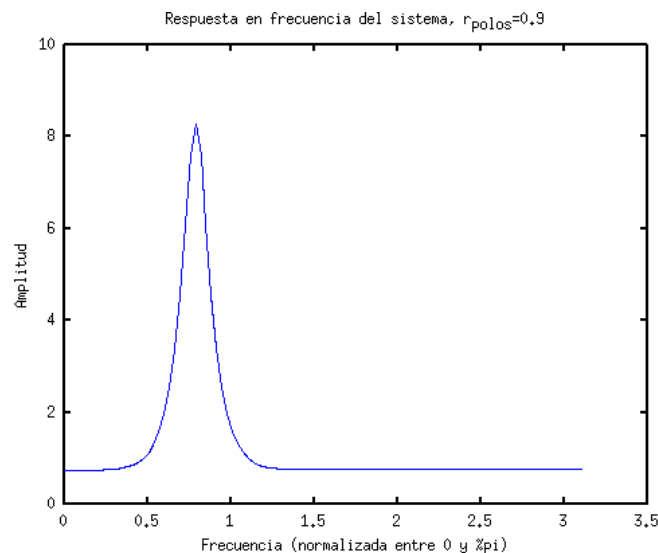


d) Modificando el radio de los polos, pueden obtenerse las siguientes respuestas en frecuencia:









Algunas conclusiones que pueden elaborarse a partir de la observación de estas gráficas son:

- Cuando el radio de los polos es pequeño, el filtro se parece a uno pasa-altos, ya que los ceros cerca del círculo unitario para frecuencias bajas hacen disminuir la amplitud de la respuesta en frecuencia, mientras que los polos la hacen aumentar una vez que la influencia de los ceros ha disminuido, es decir, para frecuencias mayores.
- Cuando el radio de los polos es mayor que el de los ceros, el filtro se aproxima cada vez más a un pasa-banda, ya que la influencia de los polos es grande en un intervalo de frecuencias, que se encuentra limitada por los ceros puestos a sus lados. Fuera de este intervalo, la influencia de los ceros es predominante, y por ende, la amplitud de la respuesta en frecuencia se hace cada vez más pequeña.
- El hecho de que los polos sean de multiplicidad 2 le da a cada uno una mayor influencia, es decir, los hace "pesar" más.

e) Para esto se procedió de dos formas alternativas, obteniéndose resultados equivalentes. La primera consistió en muestrear la respuesta en frecuencia del filtro en valores equiespaciados entre 0 y 2π , y aplicarle a lo obtenido la transformada discreta inversa de Fourier. Esta técnica presenta dos inconvenientes: el primero, se está reemplazando una respuesta al impulso de duración infinita por otra de duración finita, lo que obviamente introducirá errores de truncamiento ocasionados por la porción de la respuesta no tenida en cuenta. El segundo consiste en el aliasing temporal ocasionado por la naturaleza periódica de la transformada discreta de Fourier. Sin embargo, en casos como éste en que la respuesta al impulso decrece hasta tomar

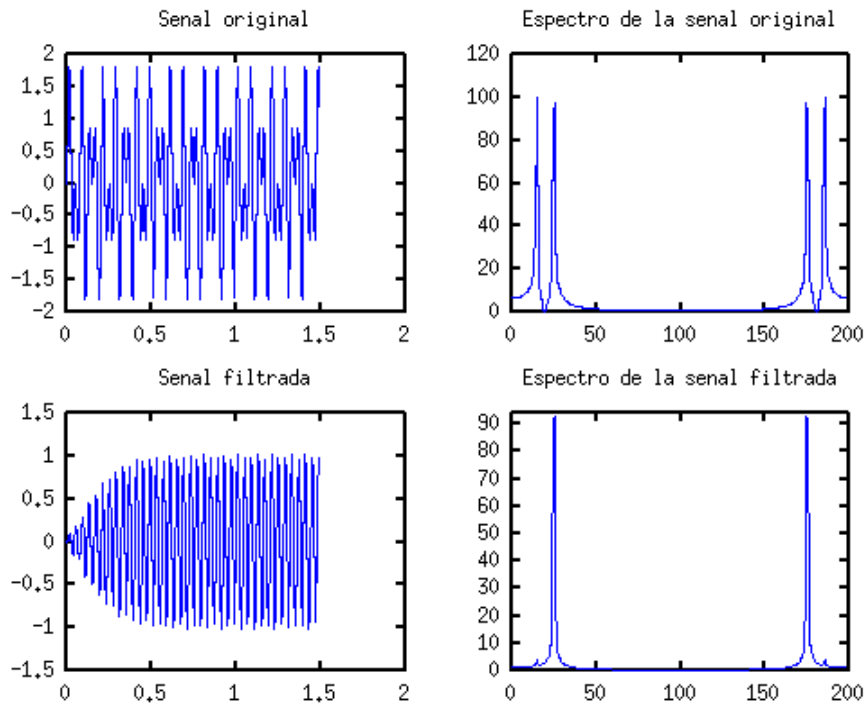
valores insignificantes, pueden obtenerse resultados tan precisos como se requiera tomando el número suficiente de muestras de la respuesta al impulso.

La segunda forma consistió en plantear el sistema de la forma

$$y(n) = \sum_{k=1}^p \text{coeffsal}(k) * y(n-k) + \sum_{k=0}^q \text{coeffent}(k+1) * x(n-k) \quad , \text{ tal como se explicó en el inciso c, y}$$

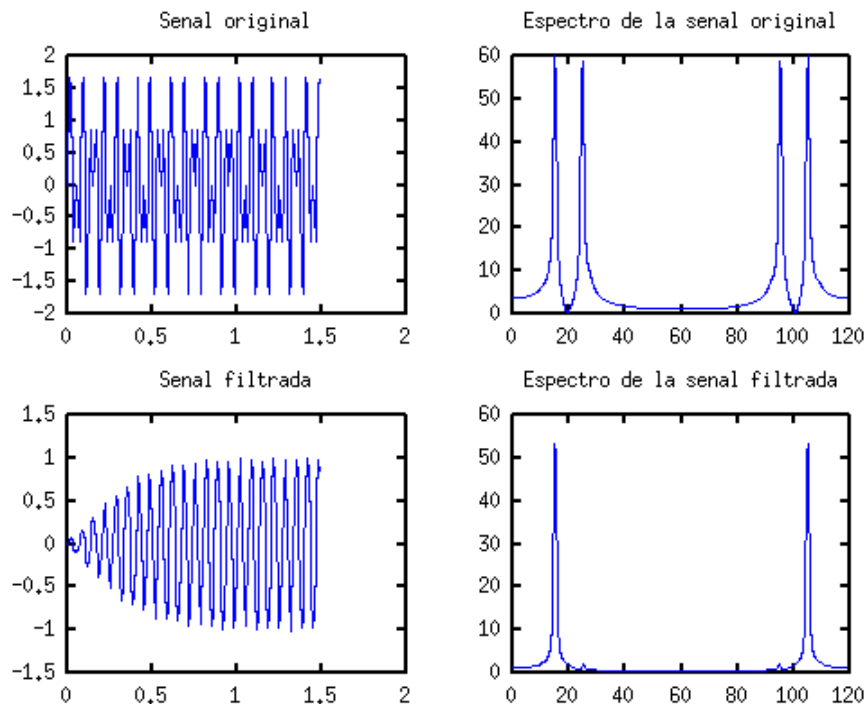
aplicar a la señal de entrada esta ecuación en diferencias.

A continuación se muestran los resultados obtenidos:



Como puede verse, el filtro eliminó casi por completo la senoidal de 15 Hz, prácticamente sin alterar la magnitud de la de 25 Hz.

f) Procediendo de forma equivalente al caso anterior, se obtienen los siguientes resultados:



Como puede verse, en este caso el filtro eliminó casi por completo la senoidal de 25 Hz, prácticamente sin alterar la magnitud de la de 15 Hz.

Para comprender la razón por lo que esto ha ocurrido, primero debe analizarse cómo es vista una señal muestreada a una frecuencia f_1 (120 Hz) si la tomamos como si estuviese muestreada a una frecuencia f_2 (200 Hz). Esta "frecuencia aparente" será menor cuanto mayor sea la frecuencia a la que está muestreada realmente, y mayor cuanto mayor sea la frecuencia con la que se considera que está muestreada, es decir, se tendrá un factor de proporcionalidad igual a f_2/f_1 . Luego, en este caso, las senoidales de 15Hz y 25Hz serán tomadas por el filtro como una senoidal de $15\text{Hz} * 200\text{Hz}/120\text{Hz}=25\text{Hz}$ y otra de $25\text{Hz} * 200\text{Hz}/120\text{Hz}=41.66\text{Hz}$. Luego, es esperable que el filtro deje pasar la senoidal de 15Hz y atenúe (casi anulando) la senoidal de 25Hz.

2. Para llevar adelante este proceso, debe partirse de un filtro pasa-bajos normalizado de Butterworth. Un filtro como éste puede caracterizarse mediante su respuesta en frecuencia, a través de la expresión

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}.$$

Además, para cualquier función de transferencia, es correcto afirmar que $|H(j\omega)|^2|_{\omega=s/j} = H(s) * H(-s)$

Luego, para este caso, se tiene $H(s) * H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n * s^{2n}}.$

Como lo que se desea es obtener $H(s)$, debe factorizarse esta última expresión. Además, con el objeto de obtener un filtro de fase mínima, se seleccionarán aquellas raíces en el lado izquierdo del plano s .

$$1 + (-1)^n * s^{2n} = 0$$

$$s^{2n} = (-1)^{n+1}$$

Las raíces de esta ecuación son calculadas por medio del siguiente algoritmo:

```

fi=angle((-1)^(n+1));
polos=[];
for k=0:2*n-1
    p=e^(j*(fi+2*k*pi)/(2*n));
    if(real(p)<0)
        polos=[polos,p];
    end
end

```

La función de transferencia normalizada tendrá la forma $H_{norm}(s) = \frac{1}{(s-p_1)*(s-p_2)*...*(s-p_n)}$

Ahora, como lo que se busca es un filtro pasa-altos con frecuencia de corte $\omega_c = 500 * 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, se

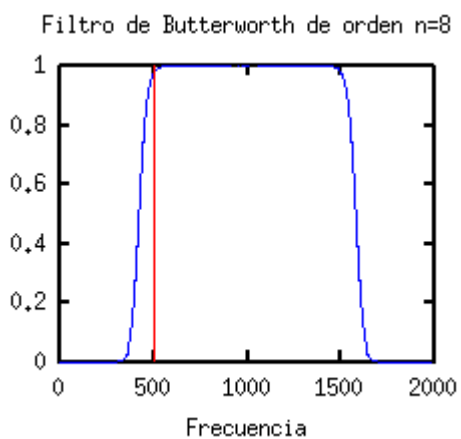
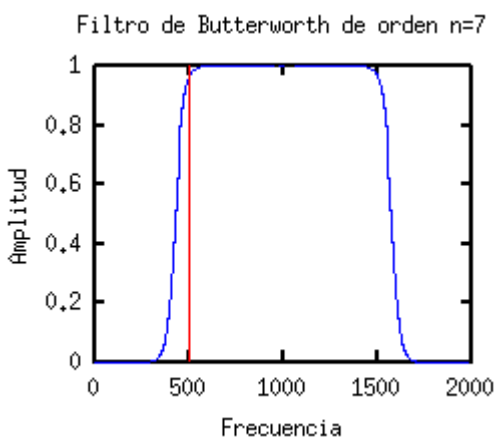
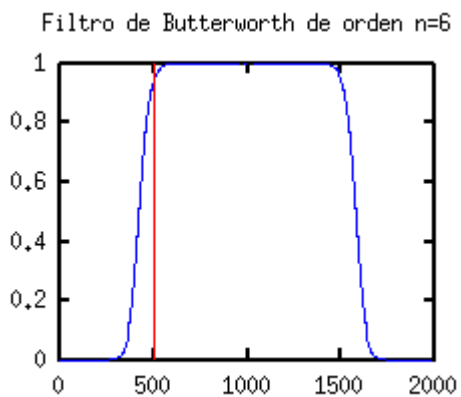
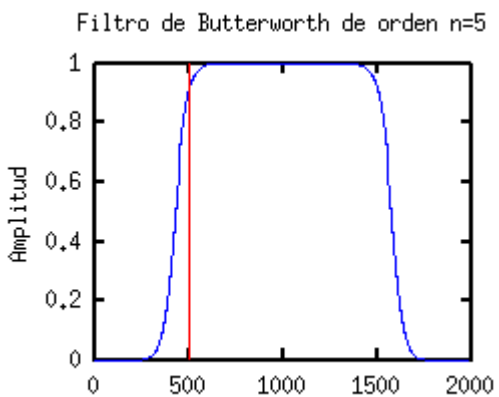
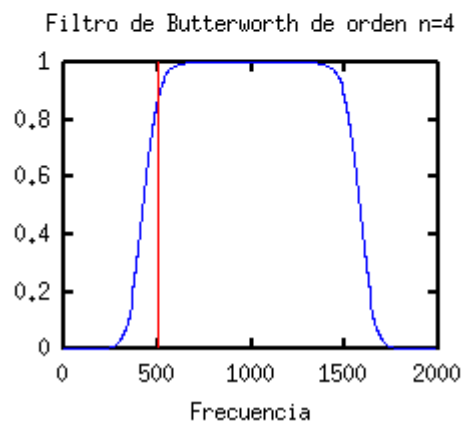
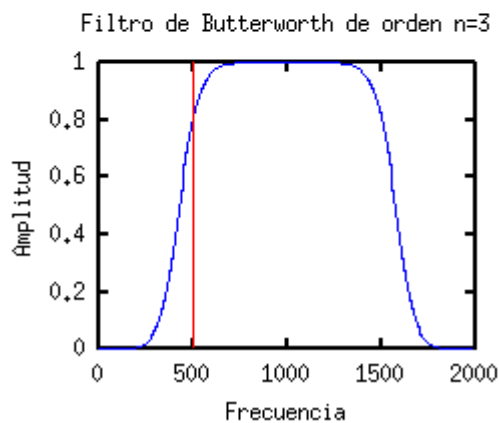
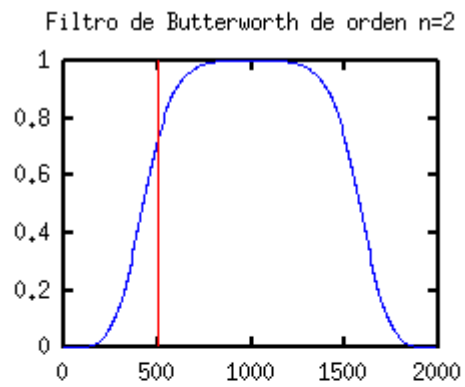
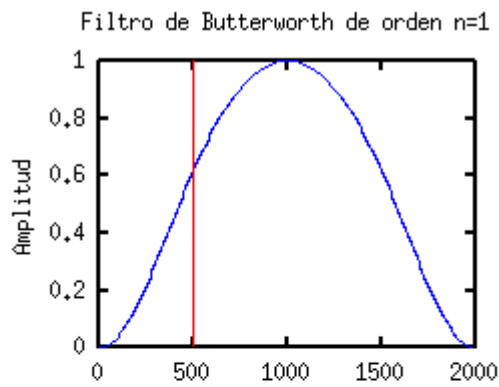
reemplaza s por $\frac{\omega_c}{s}$ en la ecuación precedente, obteniéndose:

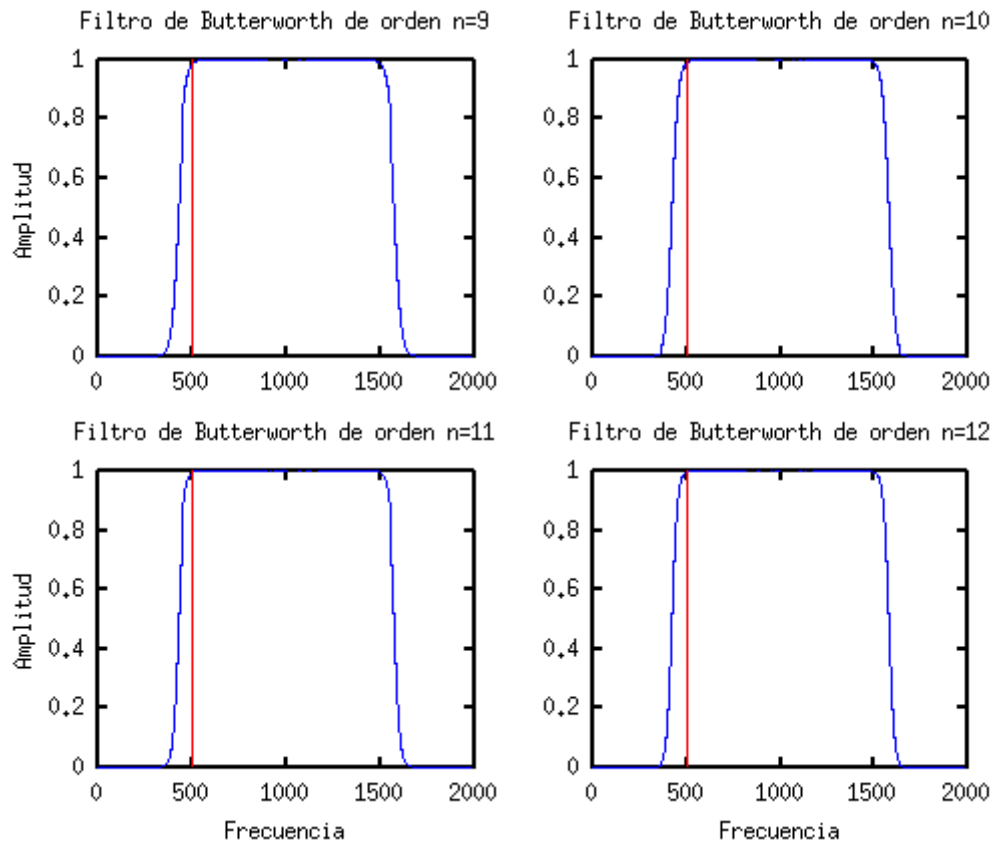
$$H(s) = \frac{1}{(\frac{\omega_c}{s} - p_1) * (\frac{\omega_c}{s} - p_2) * ... * (\frac{\omega_c}{s} - p_n)} = \frac{s^n}{(\omega_c - p_1 * s) * (\omega_c - p_2 * s) * ... * (\omega_c - p_n * s)}$$

En este punto, se realiza una transformación conforme bilineal para obtener la función de transferencia en z del filtro digital, suponiendo una frecuencia de muestro de 2000Hz, es decir, un período de muestro $T=1/2000$ s.

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{\left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^n}{\left[\omega_c - p_1 * \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right] * \left[\omega_c - p_2 * \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right] * ... * \left[\omega_c - p_n * \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]}$$

Para obtener la respuesta en frecuencia del filtro, evalúo la función de transferencia sobre el círculo unitario. A continuación se presentan los resultados obtenidos:

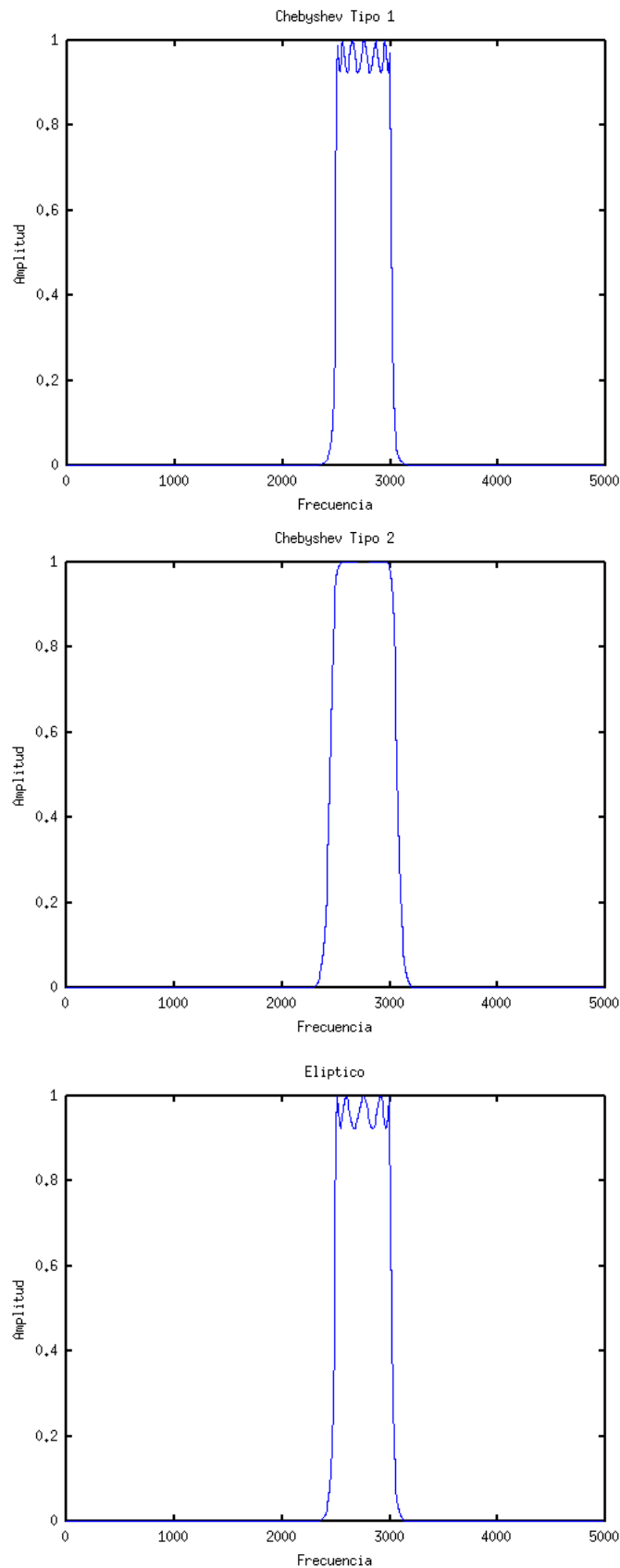




Como puede observarse en las gráficas, la banda de transición es cada vez más angosta, es decir, que la función de transferencia decrece más rápidamente luego de la frecuencia de paso. Además, en la banda de paso la atenuación es menor cuanto mayor sea el orden, y en la de rechazo es mayor cuanto mayor sea el orden.

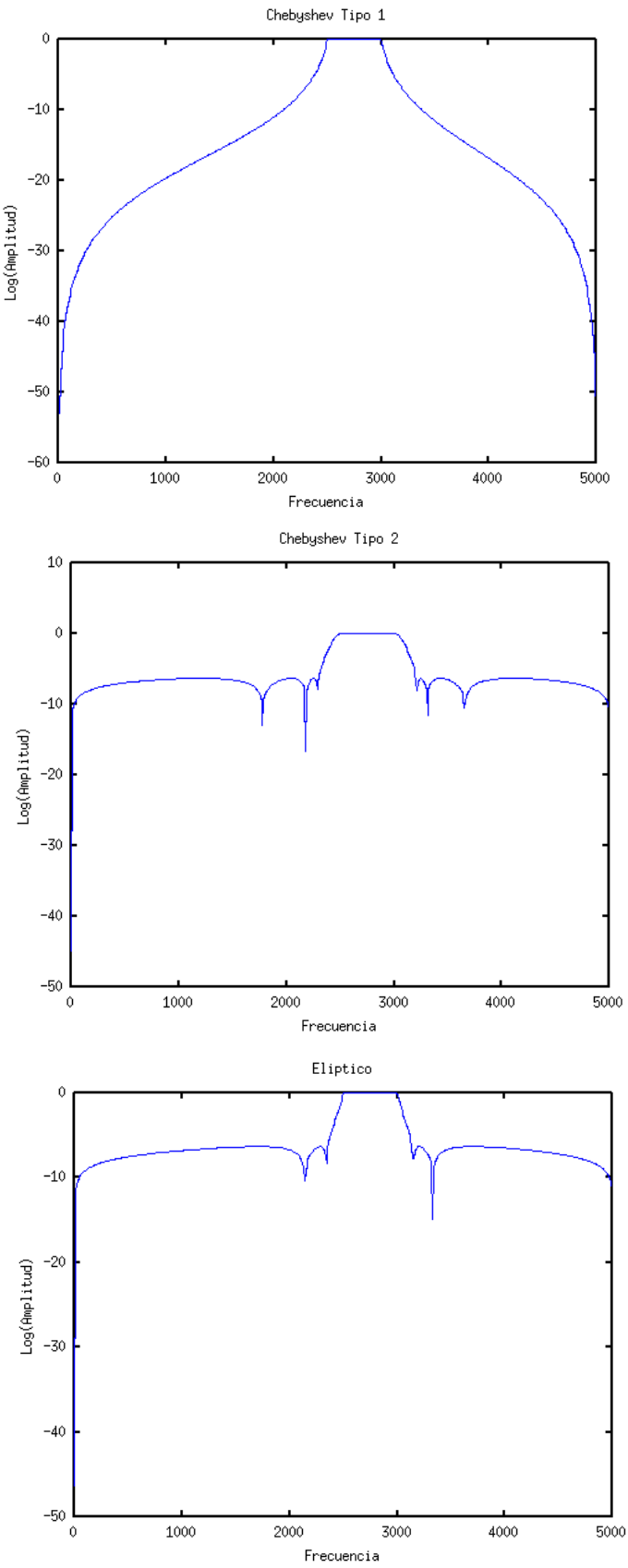
Un punto a considerar es el hecho de que la frecuencia de corte es algo menor a 500Hz. Esto se debe al mapeo no lineal realizado por la transformación conforme utilizada. Una forma de evitar este problema es utilizar una frecuencia de muestreo mayor (si se utiliza una frecuencia de muestreo de 6000Hz, por ejemplo, no se aprecia este problema). Otra alternativa es calcular qué frecuencia sería mapeada a 500Hz por la transformación, y utilizar esa frecuencia como frecuencia de corte en los cálculos realizados, de manera que la frecuencia de corte efectiva resulte ser 500 Hz.

3. Utilizando las funciones ya implementadas en Octave para estos fines, se encuentra que para satisfacer esos requerimientos, un filtro de Butterworth necesitará un orden de 29, los filtros de Chebyshev tipo I y II necesitarán un orden de 7, y el filtro Elíptico o de Cauer necesitará un orden de 5. A continuación se presentan las gráficas de las respuestas en frecuencias de estos filtros con dichos órdenes¹:

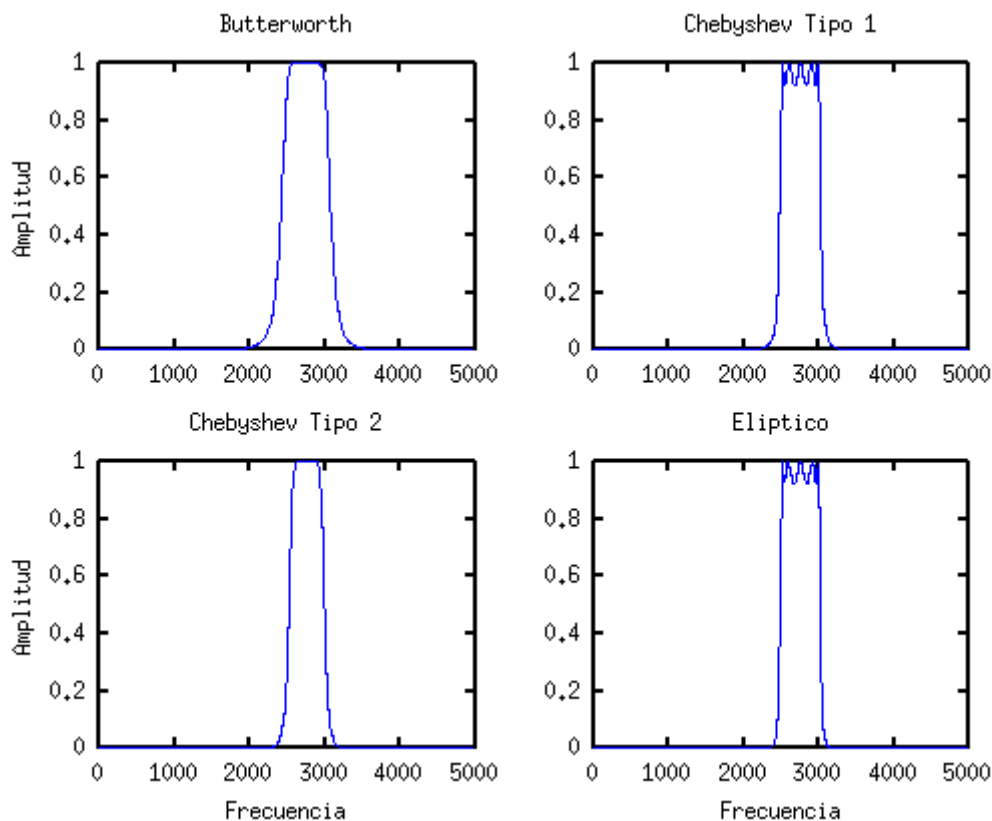


1 El filtro de Butterworth no se grafica puesto que presenta problemas de convergencia para un orden tan alto (de hecho, comienzan a observarse problemas de estabilidad a partir de un orden de 17)

Puede ser conveniente observar estas gráficas en escala logarítmica, de forma que sea posible percibir los rizados en las bandas de rechazo de los filtros Chebyshev Tipo II y Elíptico.



A continuación se presentan las respuestas en frecuencia de todos estos filtros, con el menor de todos los órdenes obtenidos anteriormente, es decir, 5:



Como puede verse, el filtro Elíptico es el que presenta las mejores características. Luego de éste, siguen sendos filtros de Chebyshev, y finalmente el de Butterworth.

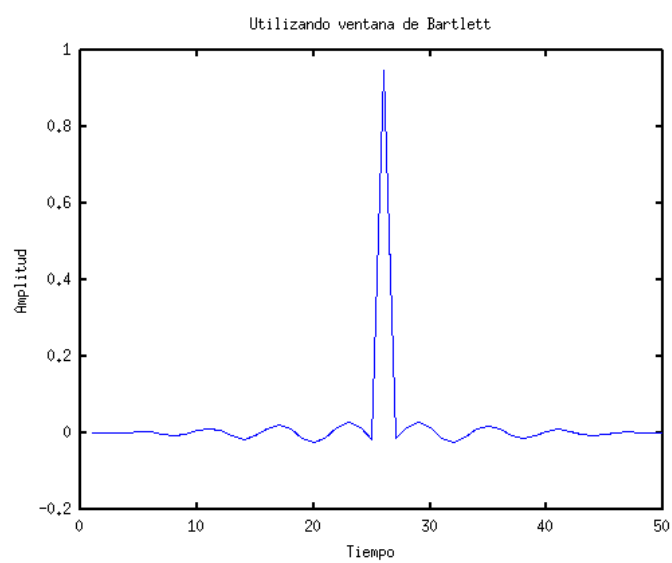
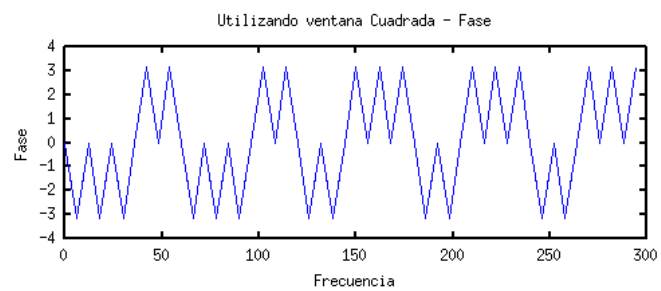
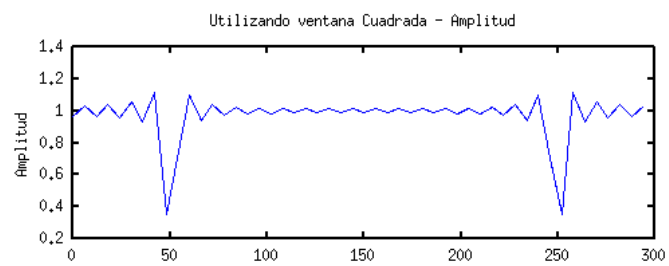
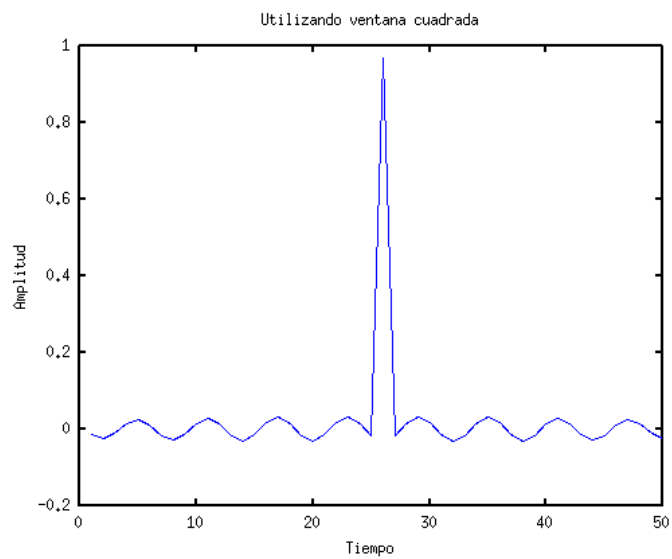
Esto puede deberse en parte al hecho de que los filtros de Chebyshev tipo I y II cuentan con un grado más de libertad que el de Butterworth (la amplitud de los rizados en las bandas de paso y rechazo, respectivamente), lo que permite lograr mejores resultados con un menor orden. El filtro Elíptico, al contar con un grado más de libertad que los filtros de Chebyshev (tanto la amplitud de los rizados en las bandas de paso como la amplitud de éstos en las bandas de rechazo), permite lograr resultados aún mejores.

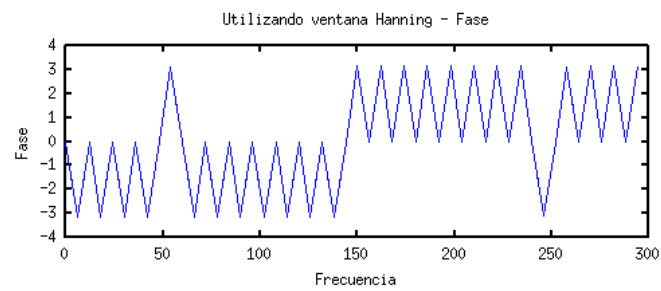
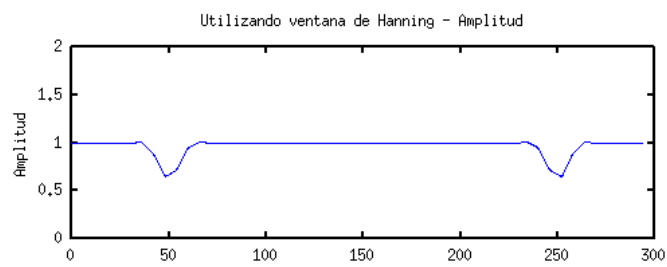
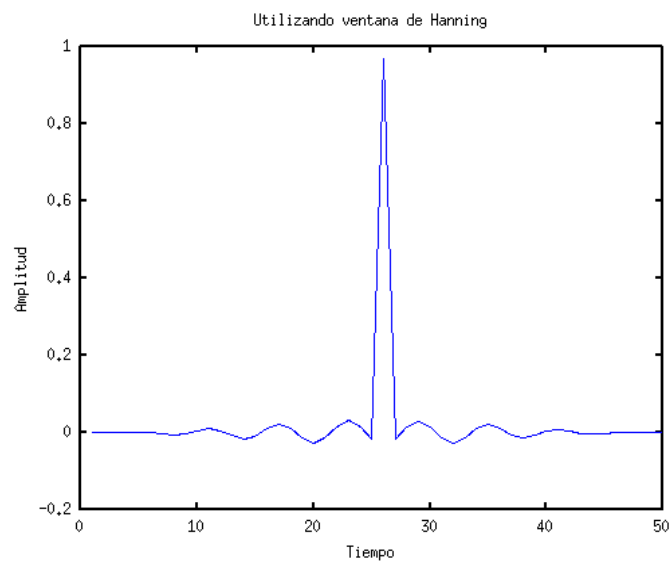
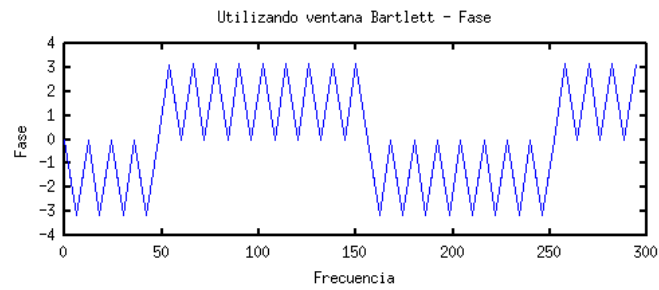
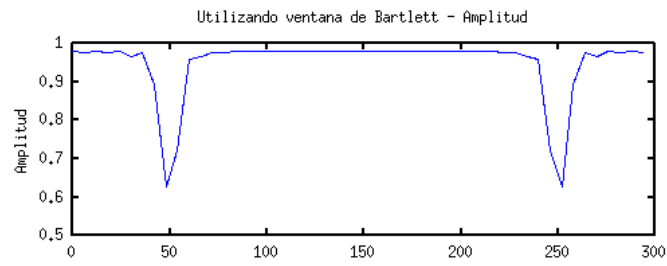
4. Para lograr este objetivo se siguen los siguientes pasos:

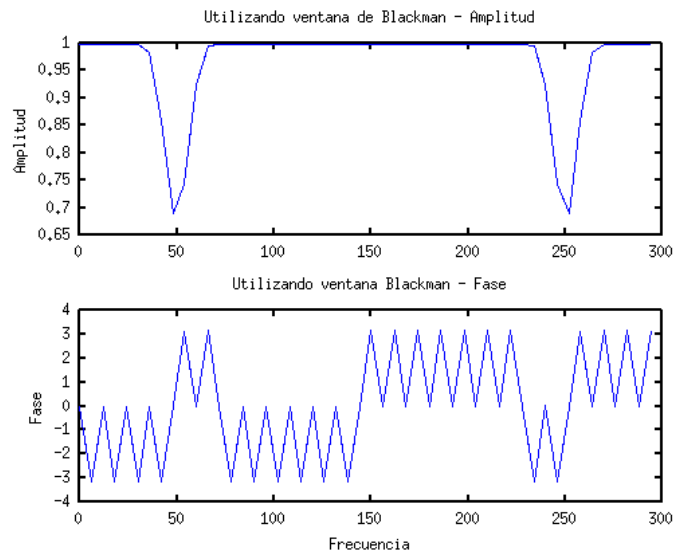
- Se comienza especificando la respuesta en frecuencia de un filtro ideal que anule la banda de 48 a 52 Hz. Si bien sería deseable que sólo anule la frecuencia de 50 Hz, dejando el resto sin alterar, esto no es posible mediante un filtro FIR (podría aproximarse mucho mejor mediante un filtro IIR, aunque, por supuesto, se tendría como desventaja la no linealidad del retardo de grupo).
- Se muestrea dicha respuesta en frecuencia en $5N$ puntos, donde N es la cantidad de muestras deseadas para la respuesta al impulso. Se procede de esta forma, tomando más puntos de los que se consideraría inicialmente necesarios, con el objeto de atenuar los efectos del aliasing temporal.
- Se aplica a lo obtenido la transformada discreta inversa de Fourier, obteniendo la respuesta al impulso, pero con más muestras de las necesarias.
- Se aplica una ventana centrada en la muestra correspondiente al tiempo 0 (es decir, la que se halla en el centro), con soporte sólo en N muestras. De esta forma se obtiene la respuesta al impulso de la longitud deseada.
- Por último es necesario aplicar un retardo temporal, de forma de obtener un sistema causal, es decir, que la primera muestra debe corresponderse con el tiempo 0. Esto no se realiza de forma explícita (es decir, no se realiza un procesamiento adicional), sino que simplemente se considera que lo obtenido en el paso anterior corresponde al intervalo $[0; N-1]$.

A continuación se presentan los gráficos de las respuestas al impulso tomando diferentes números de muestras, y distintas ventanas de truncado.

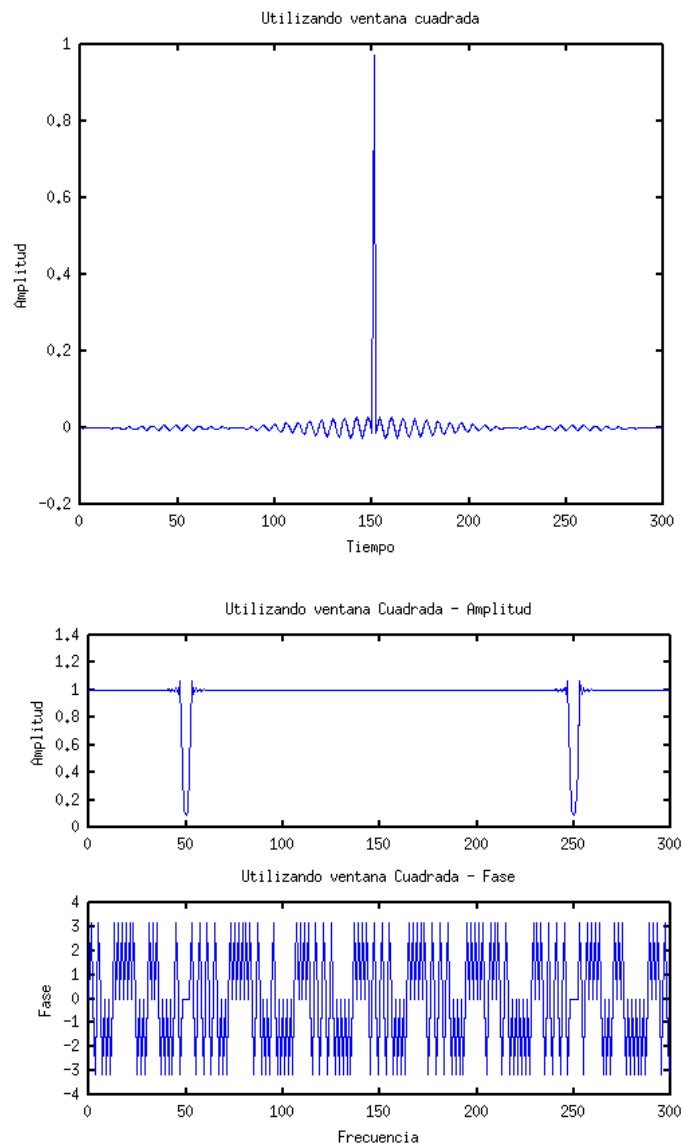
Utilizando 50 muestras:

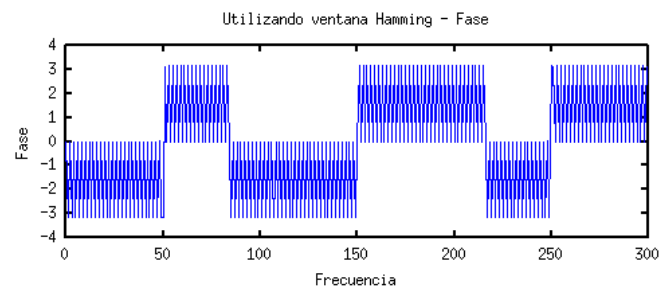
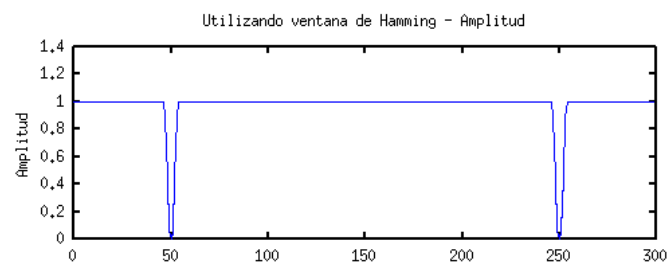
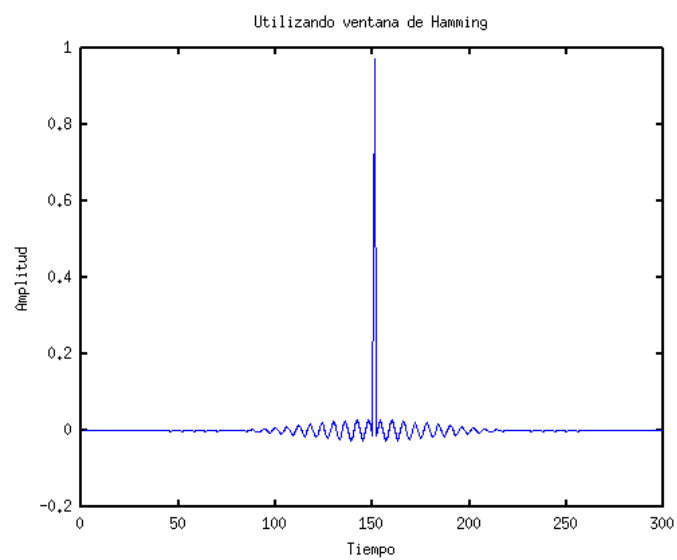
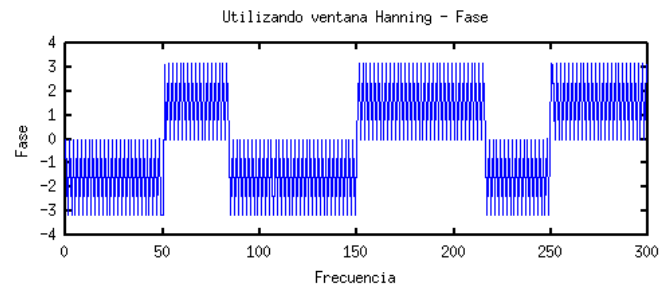
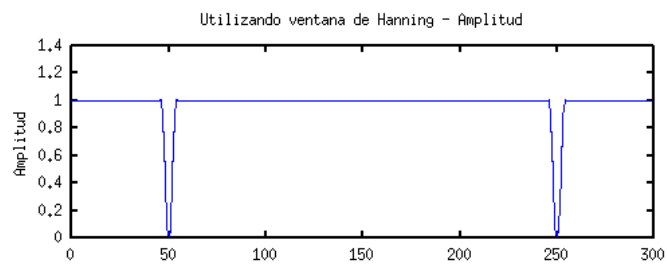


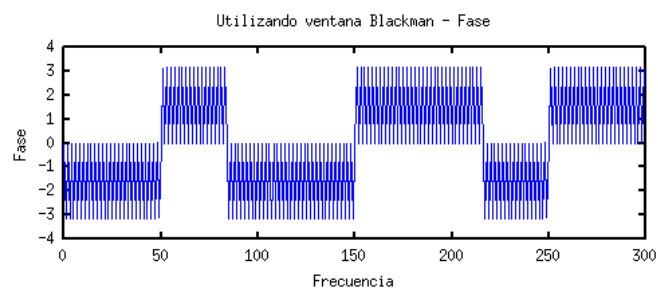
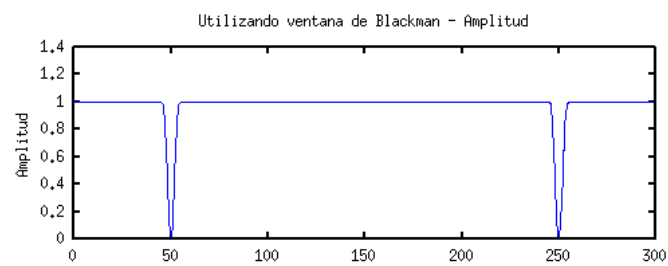
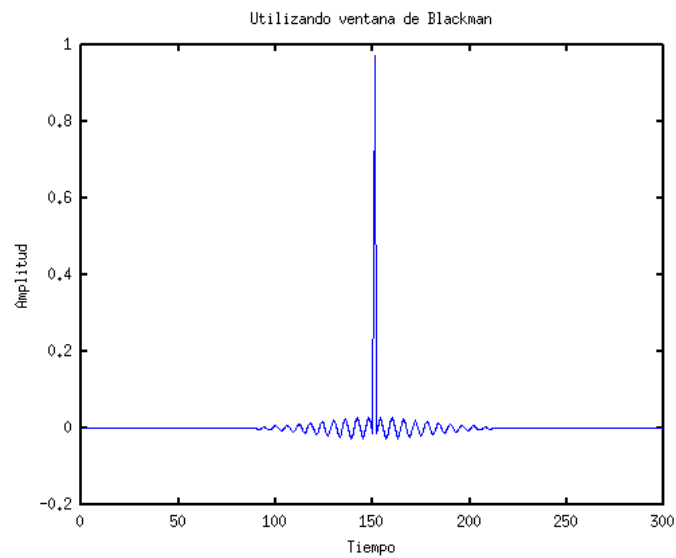




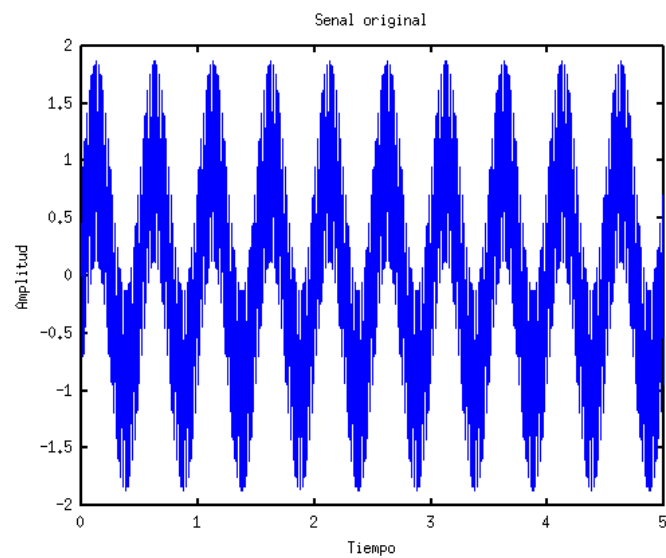
Utilizando 300 muestras:



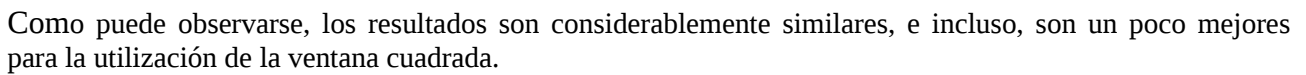




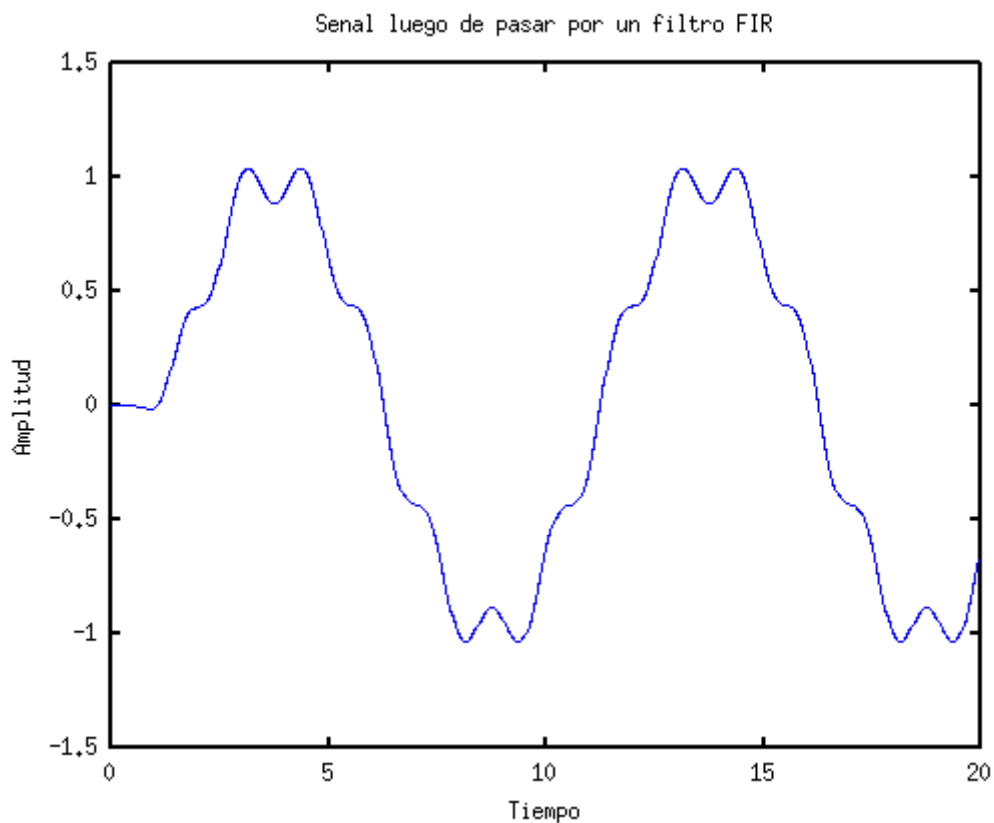
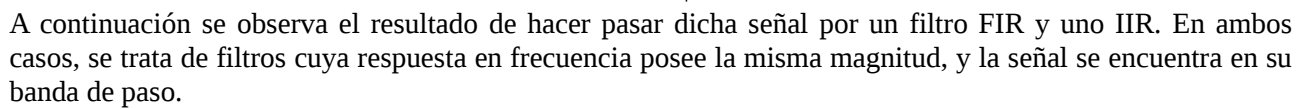
Como ejemplo de aplicación, supongamos que se tiene una señal que ha sido ensuciada con un ruido de 50 Hz.

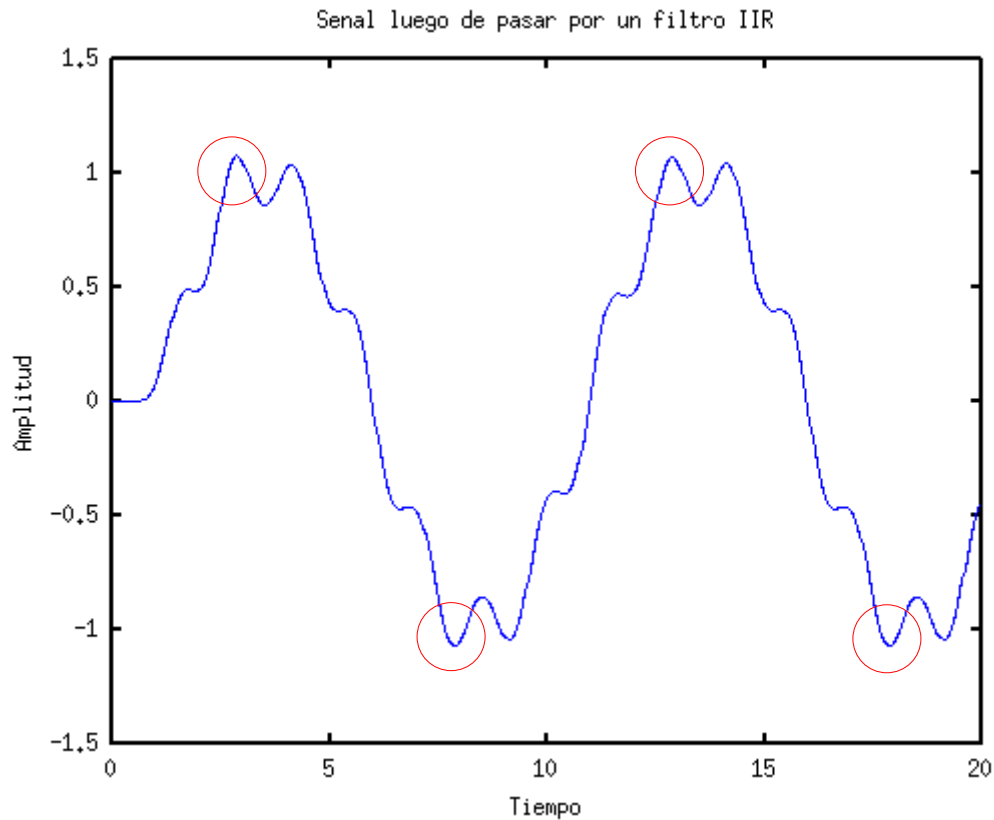


Para 50 muestras, se tendrá:



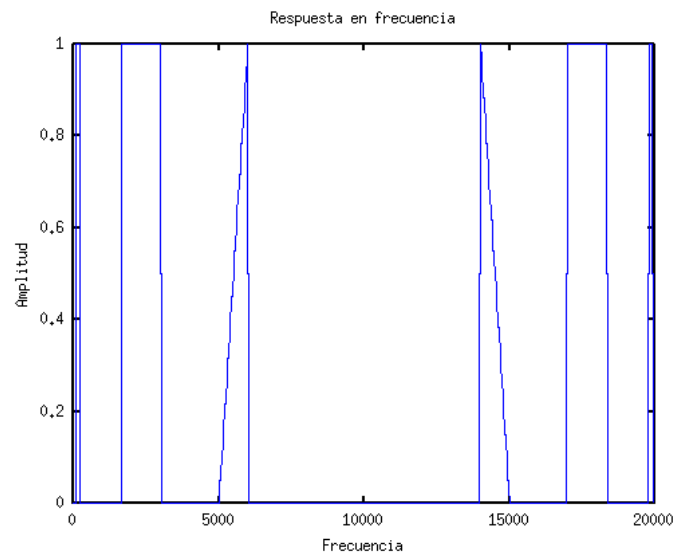
Por ejemplo, considérese la señal que se grafica a continuación, formada por la suma de dos senoidales.





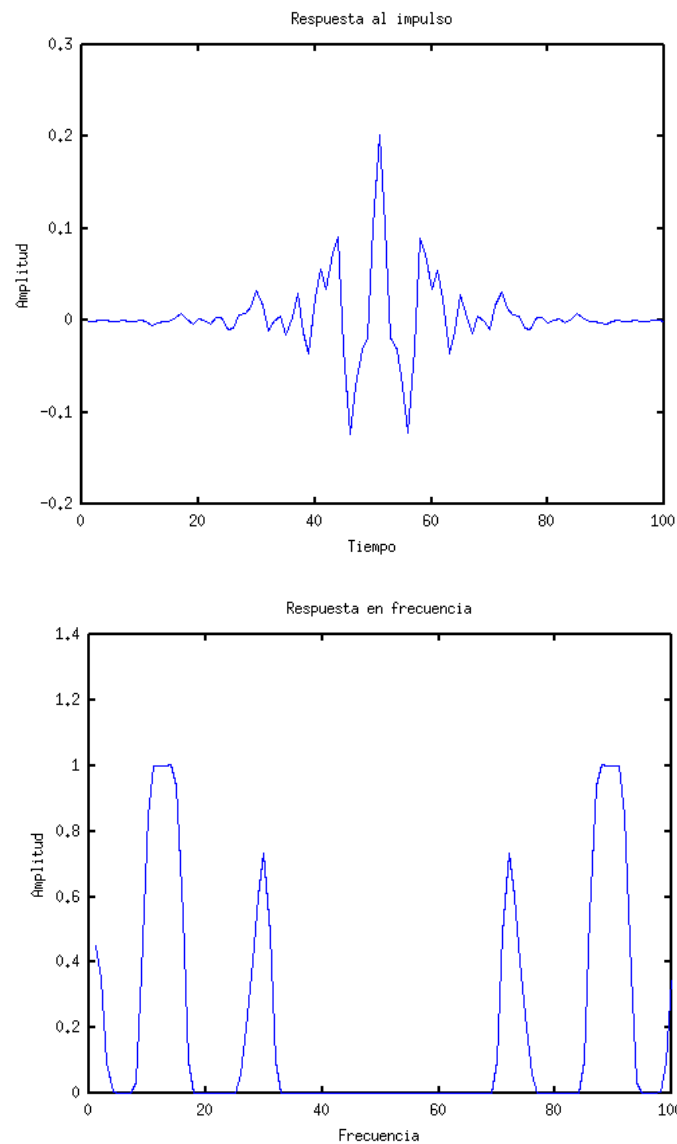
Como puede observarse, la forma de la señal se conserva exactamente luego de pasar por el filtro FIR. Sin embargo, cuando ésta atraviesa el filtro IIR se introducen distorsiones en la misma, debido a la no linealidad del retardo de grupo aplicado por dicho filtro.

6. La respuesta en frecuencia del filtro que se pretende diseñar debería ser como la que se observa a continuación:



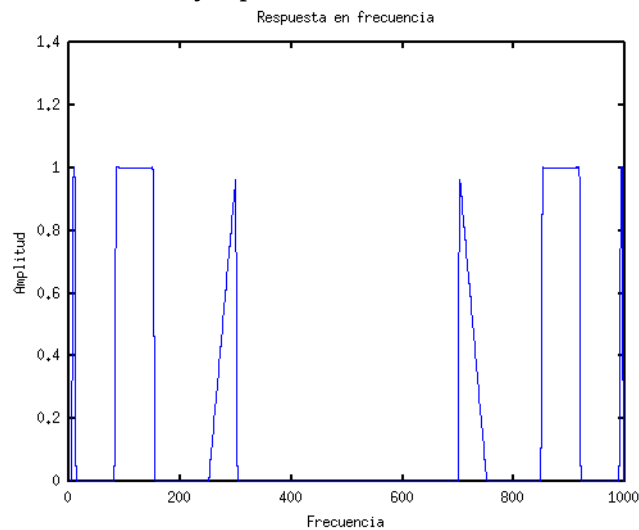
Donde se ha supuesto que las señales serán muestreadas a una frecuencia de 20000 Hz.

Siguiendo los pasos delineados en el punto 4, utilizando 100 muestras para la respuesta al impulso, y una ventana de Hamming para realizar el truncado, se obtiene:



Como puede observarse, se presentan diferencias significativas entre la respuesta en frecuencia esperada y la efectivamente obtenida. Esto puede deberse, en parte, a la complejidad del filtro diseñado.

Sin embargo, puede tomarse una cantidad mayor de muestras, hasta obtener una respuesta en frecuencia tan cercana a la modelada como se desee. Por ejemplo, utilizando 1000 muestras, se obtiene:



Este resultado es mucho más cercano al pretendido. Por supuesto, deberá asumirse un compromiso entre precisión y costo computacional.

7. A continuación se detalla el algoritmo a seguir para las dos partes de este problema.

Multiplexado

- Se selecciona la frecuencia de muestreo a utilizar. Como las portadoras se encuentran en el rango 30-50 KHz, y se necesita un ancho de banda de 250 Hz para la señal de ECG, 100 Hz para la señal de PA y 8000Hz para la señal de voz, asumiendo que se deja una banda libre de 500 Hz entre cada una de ellas, una buena elección es tomar una frecuencia de muestreo de 160000 Hz. La misma se toma cuatro veces superior a la frecuencia máxima esperada, en vez de dos como es habitual, puesto que al demodular se generan copias del espectro de la señal centradas en 2 veces la frecuencia de la portadora, por lo que si sólo se tomase el doble, se generaría aliasing.
- Se sobremuestra cada una de las señales a la frecuencia de muestreo calculada.
- Se agregan ceros al final de las señales de ECG y PA de forma que tengan la misma duración que la señal de voz.
- Se calculan las 3 portadoras sp1, sp2 y sp3, con frecuencias de 30125 Hz, 30800 Hz y 35350 Hz, respectivamente.
- Se resta a cada señal su valor medio, puesto que así se disminuyen posibles problemas de precisión numérica.
- Se multiplica punto a punto la señal de ECG por sp1, la señal de PA por sp2 y la señal de voz por sp3. De esta forma se traslada el espectro de la señal de ECG a la banda 30000-30250 Hz, de la señal de PA a la banda 30750-30850 Hz, y de la señal de voz a la banda 31350-39350 Hz.
- Se suman los 3 resultados anteriores, obteniendo la señal a transmitir.

Demultiplexado

- En primer lugar se elaboran filtros FIR pasa-banda para cada una de las bandas descriptas anteriormente. La opción por filtros FIR y no IIR se debe a que los primeros pueden elaborarse con fase lineal, lo que posibilita que no se altere la forma de las señales. Además, esta propiedad permitirá utilizar demodulación sincrónica, lo que se verá más adelante. El proceso utilizado en la construcción de los filtros es análogo al desarrollado en el punto 4.
- Se aplica el filtro F1 con banda de paso 30000-30250 Hz, obteniendo ECG_mod.
- Se aplica el filtro F2 con banda de paso 30750-30850, obteniendo PA_mod.
- Se aplica el filtro F3 con banda de paso 31350-39350 Hz, obteniendo voz_mod.
- Cada una de las señales obtenidas debe multiplicarse nuevamente por la señal portadora correspondiente. Sin embargo, esto no puede hacerse directamente debido al retardo introducido en las señales como consecuencia de la aplicación del filtro. Lo que se hace es filtrar cada una de las portadoras con el filtro correspondiente, lo cual no alterará su módulo, puesto que se encuentran en sus bandas de paso, pero introducirá en ellas un retardo que permitirá aplicar la demodulación sincrónica. Es decir, se aplica a sp1 el filtro F1, a sp2 el filtro F2 y a sp3 el filtro F3, obteniendo sp1_f, sp2_f y sp3_f, respectivamente.
- Se multiplica punto a punto sp1_f con ECG_mod, sp2_f con PA_mod y sp3_f con voz_mod.
- Las señales obtenidas deberán pasarse por filtros pasa-bajos, también FIR para no alterar su forma. Debe procederse así puesto que cada señal obtenida presenta no sólo el espectro deseado, sino también copias de este espectro centradas en 2 y -2 veces la frecuencia de las portadoras. Cada filtro pasa-bajos tendrá como frecuencia de paso 125 Hz (para la señal de ECG), 50 Hz (para la señal de PA) y 4000 Hz (para la señal de voz).
- Por último, se suma a cada señal el valor medio restado durante la modulación, obteniendo finalmente las señales deseadas.