

Guía de Trabajos Prácticos X: Tiempo-Frecuencia

1. El principio de incertidumbre de Heisenberg enuncia que existe un límite en la resolución o precisión con la que se puede calcular un par de variables físicas según la física clásica. Esta idea es aplicable también a la STFT, donde una buena resolución temporal implica una peor resolución frecuencial y vice-versa. Matemáticamente enunciamos:

Principio de incertidumbre tiempo-frecuencia:

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$$

Donde:

- σ_t es la varianza temporal de la señal
- σ_ω es la varianza frecuencia de la señal

Dada una cierta ventana $w(n)$ esa desigualdad se transforma en una igualdad, quedando determinada exactamente la resolución de una varianza en función de la otra.

Interpretando geométricamente, podemos decir que existe un rectángulo de área al menos $\frac{1}{2}$ en el mejor caso (mejor ventana) de incertidumbre.

Para nuestro caso discreto el principio se puede enunciar como sigue:

Principio de incertidumbre tiempo-frecuencia (Discreto):

$$dt df = 1$$

Donde:

- $dt = T_{\text{ventana}}$
- $df = \frac{1}{T_{\text{ventana}}}$

Implementación de STFT

```
function E=Espectrograma(x, Wwidth, overlap, fm, t)
% Espectrograma -- Usando FFT
% Uso
% E = Espectrograma(x, Wwidth, overlap, fm, t)
% Entradas
% - x          señal sobre la cual hacer el espectrograma
```

```

%      - Wwidth  cantidad de elementos por ventana o vector de ventana
%      donde el ancho de ventana sera la cantidad de elementos de Wwidth
%      - overlap solapamiento de las ventanas
%      - fm      frecuencia de muestreo(opcional)
%      - t       vector de tiempos(opcional)
%  Salidas
%      - E la matriz de espectrograma E[a,t]

if( length(Wwidth) > 1 )
    Window = Wwidth;
    Wwidth = length(Wwidth);
end

if nargin < 5,
    t = [1:length(x)];
end
if nargin < 4,
    fm=length(x);
end

dt = t(2)-t(1);

%Paso entre ventanas
step = Wwidth - overlap;
%Cantidad de ventanas
Wcount = floor( (length(x)-step)/step );

aux = exist('Window');
%Si no paso una venatna por parametro la calculo
if( exist('Window') ~= 1 )%si es 1 es una variable... sino es 2 un
nombre reservado
    Window = hamming(Wwidth)';
end
E = zeros(Wwidth,Wcount);
for wi= 1:Wcount

    ini = (wi-1)*step+1;
    fin = ini+Wwidth -1;

    %Por definicion de espectrograma:
    % E = | STFT |.^2

    E(:,wi) = abs( fft( x(ini:fin).*Window ) ).^2;

end

colormap(jet);

%Esta linea grafica solo la parte positiva de la transformada de
Fourier
imagesc([t(1):dt:t(end)], [0:fm/(2*length(x)):fm/2],E([1:Wwidth/2],:));
colorbar
axis('xy')

```

```

%Leyendas
xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('Frecuencia [Hz]');
title('Espectrograma');

```

end

Análisis

Usaremos para el análisis una señal senoidal con frecuencia creciente linealmente en el tiempo como sigue:

$$x[n] = \sin\left(2\pi \frac{1}{2} m t[n]^2\right)$$

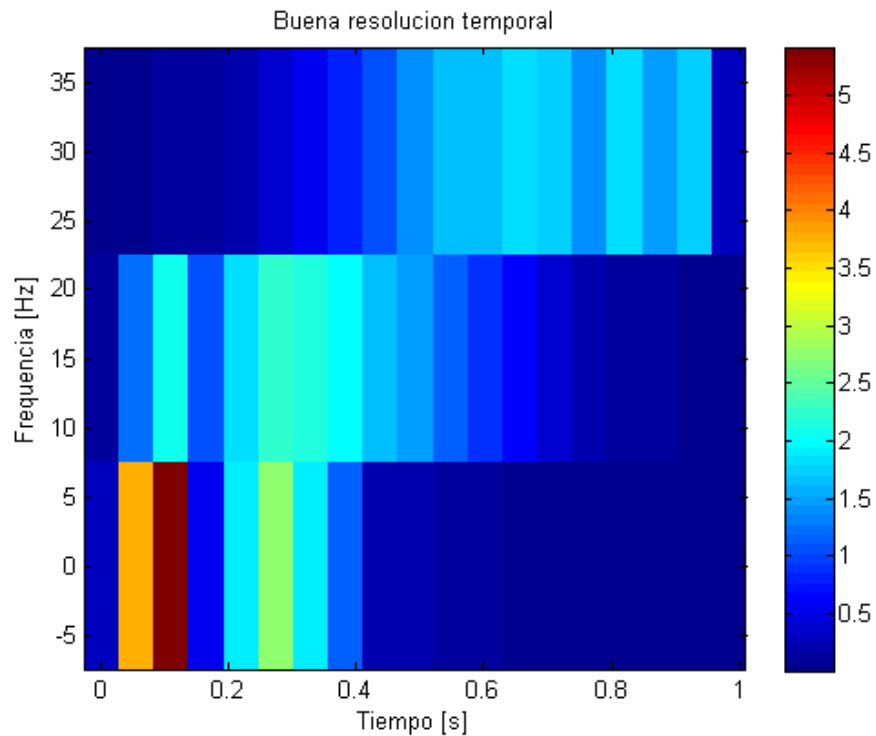
Con:

- $m = 30$
- $t = [0: \frac{1}{60}: 1 - \frac{1}{60}]$

El overlap de las STFT será de un 50% del ancho de la ventanas.

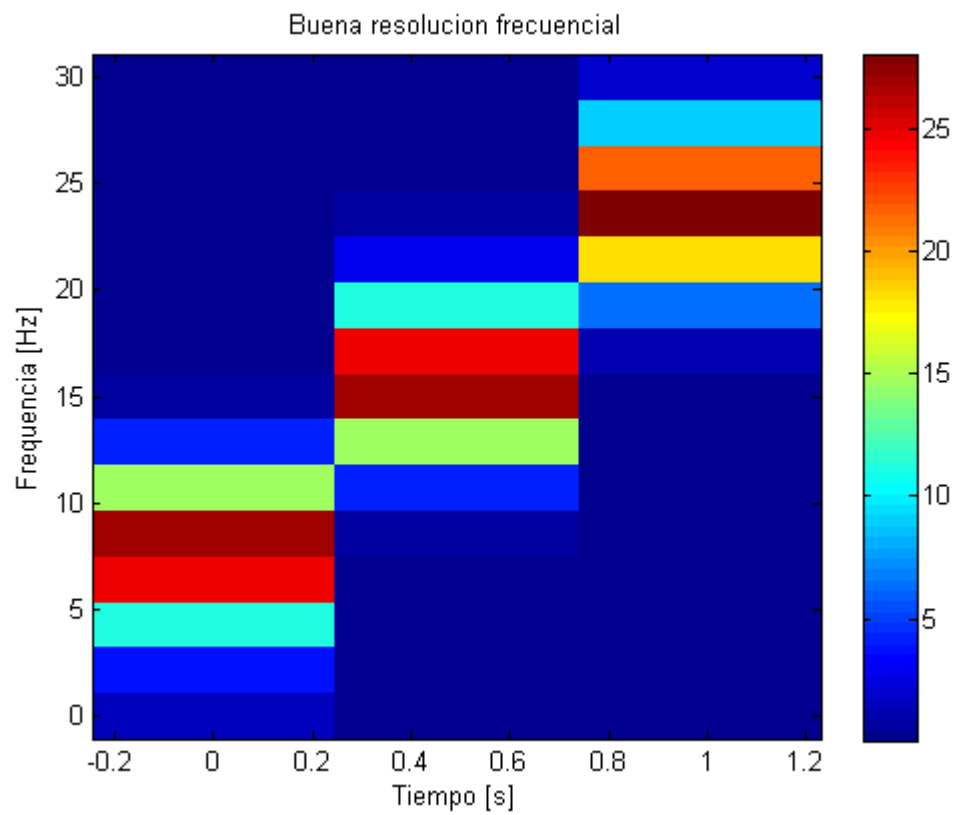
- dt bueno:

Si usamos una buena resolución temporal, usando una ventana de 6 muestras. Luego el resultado será:

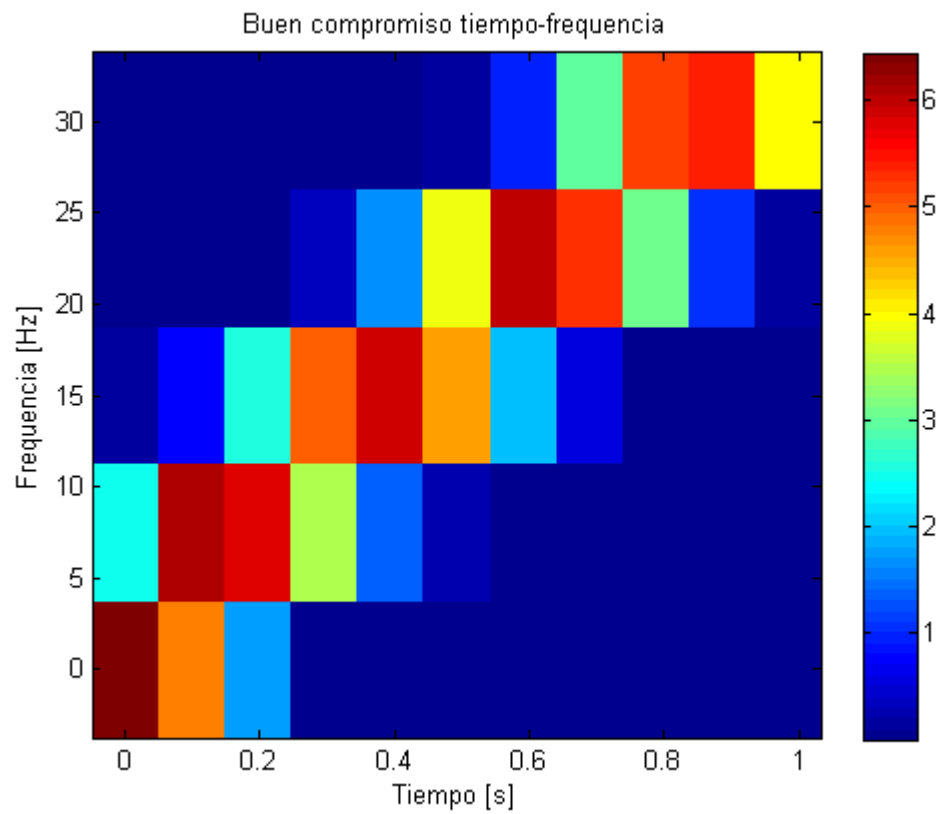


- df bueno:

Si usamos una buena resolución frecuencial, usando una ventana de 30 muestras. Luego el resultado será:



- Buen compromiso tiempo-frecuencia:
Usando una ventana de 10 muestras. Luego el resultado será:



Conclusión: Dependiendo de la necesidades de análisis es el ancho de ventana a usar.

2. Sabemos que:

$$x = \sin(\theta)$$

Pero lo que conocemos de la señal es como varía θ , que lo hace con pendiente m . Sabemos que:

$$\theta = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$f = \omega = mt + 100$$

$$\int 2\pi\omega dt = 2\pi \int mt + 100 dt$$

$$\theta = 2\pi \frac{1}{2} mt^2 + 2\pi 100t + C$$

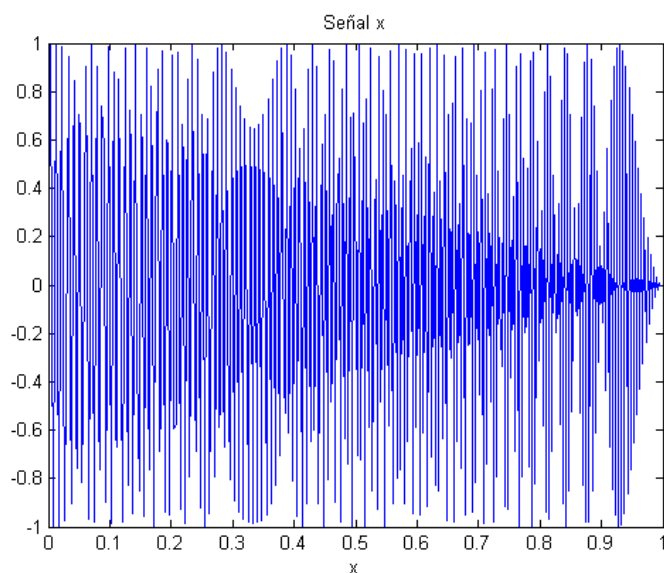
Tomaremos $C = 0$ y $m = 100$ ya que el ejercicio pide que ω crezca a razón de 100Hz por segundo.

$$\theta = 2\pi \frac{1}{2} 100t^2 + 2\pi 100t$$

Entonces:

$$x = \sin\left(2\pi\left(\frac{1}{2} 100t^2 + 100t\right)\right)$$

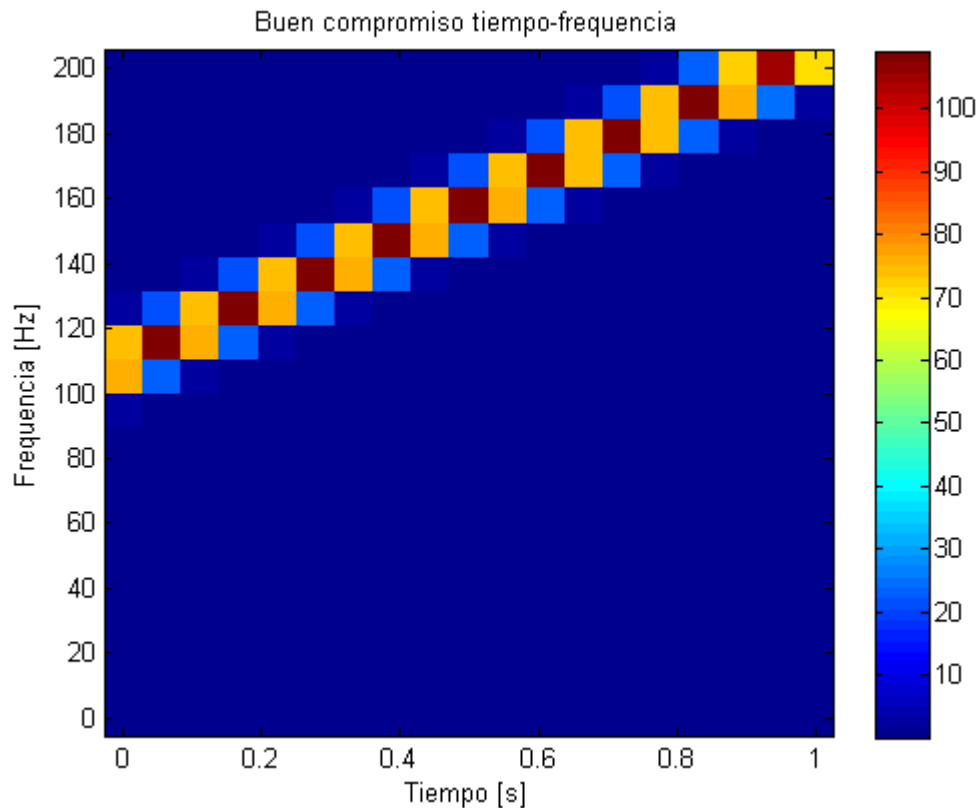
La señal será luego:



El espectrograma de la señal se calculó usando:

- $t = [0: \frac{1}{400}: 1 - \frac{1}{40}]$
- Ventanas de 40 muestras.
- Ventaneo usando ventanas de Hamming.

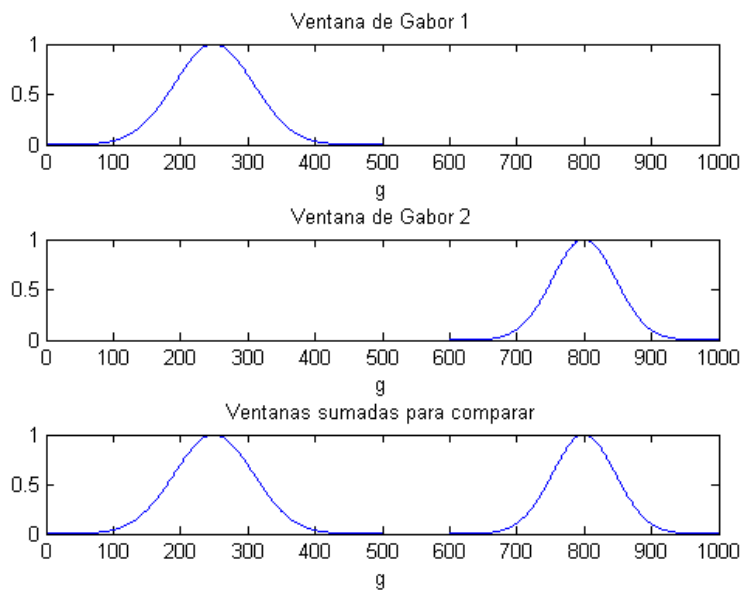
El resultado es:



Claramente se ve en el resultado como las energías de las frecuencias crecen desde 100 hasta 200 en el lapso de 1 segundo.

El balance de resolución tiempo frecuencia que se eligió fue tal que los rectángulos de incertidumbre sean aproximadamente cuadrados. Esa selección sólo se tomó en pos de que la gráfica sea lo más amigable a la vista posible, ya que no es necesario un análisis más profundo ni de los valores frecuenciales ni de los temporales.

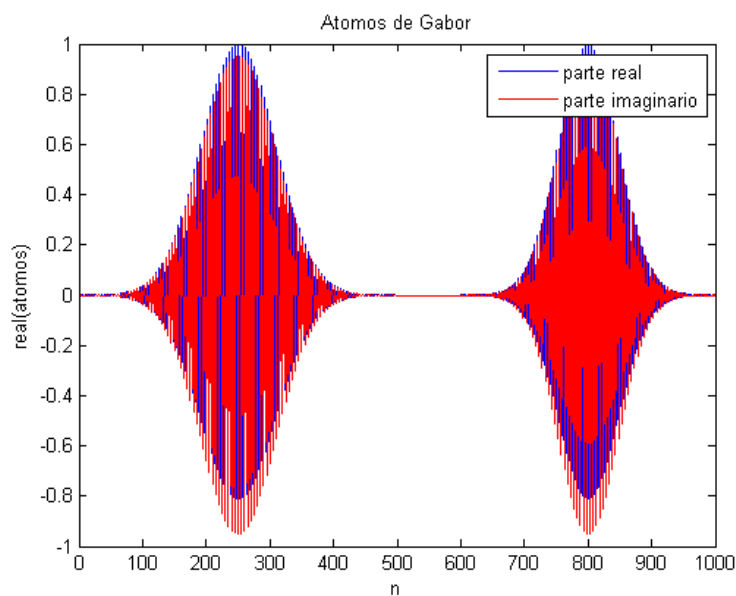
3. Las ventanas de Gabor que se eligieron fueron:



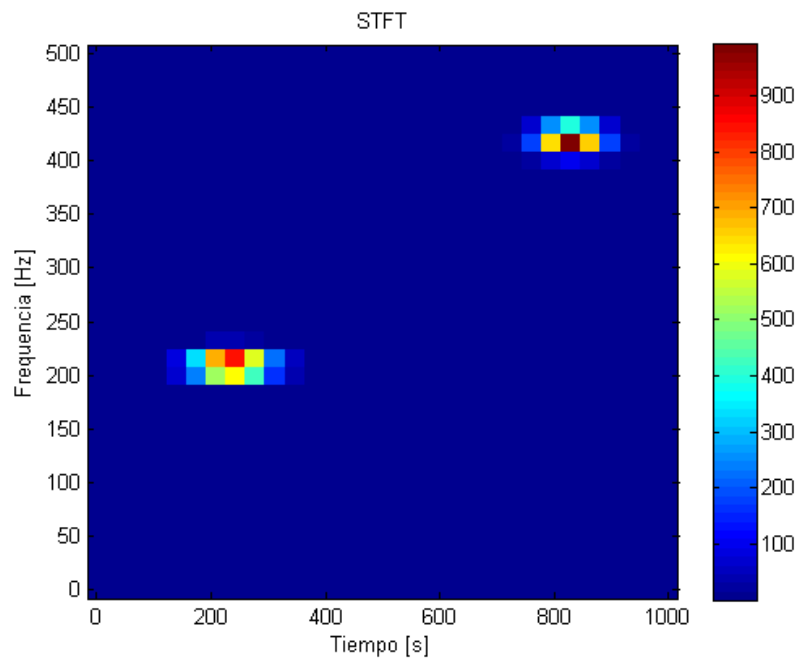
Las ventanas son afectadas por las siguientes exponenciales complejas respectivamente:

- $e^{\frac{j2\pi n200}{N}}$
- $e^{\frac{j2\pi n400}{N}}$

Y la señal es muestreada entre 0 y 1 con $fm = 1000$. Los átomos de Gabor resultantes son:

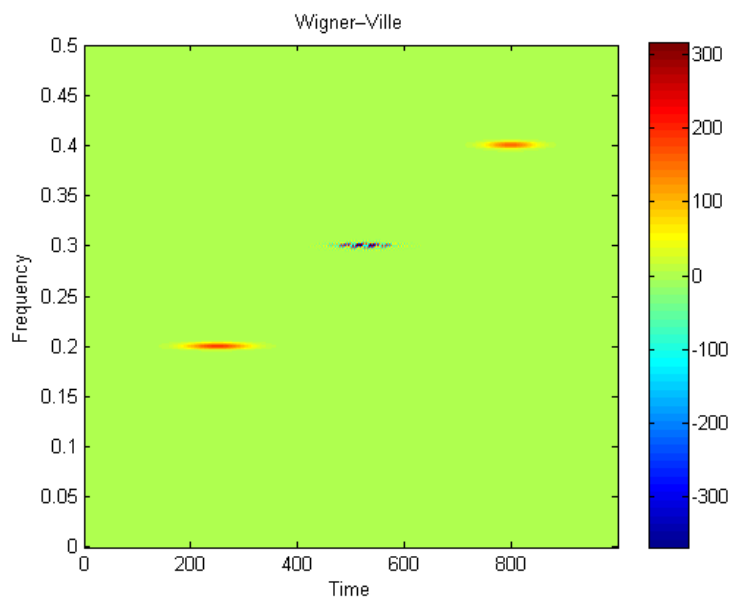


Luego calculamos el espectrograma tomando ventanas de 63 elementos y overlap de 31 elementos para que así tengamos la suficiente resolución temporal para poder distinguir claramente el primer átomo de Gabor que es más corto temporalmente. Esto nos da:



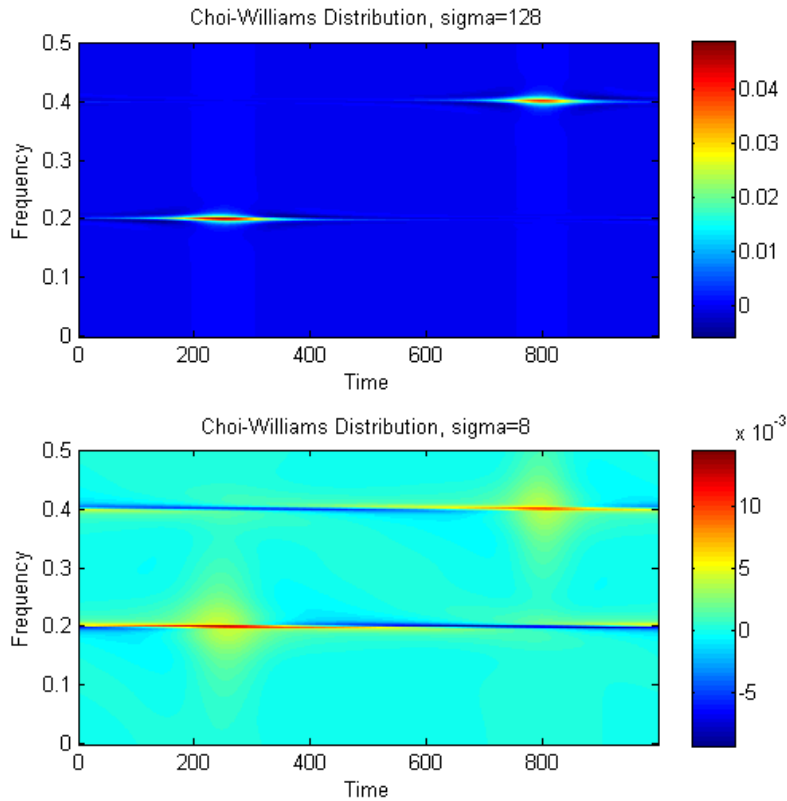
Podemos ver que se ven los 2 átomos, donde el primero es más largo temporalmente que el segundo. Las frecuencias no quedan muy especificadas por el espectrograma, sería necesario un ventaneo usando ventanas mayores para poder tener más resolución frecuencial.

La distribución de Wigner-Ville nos da:



Vemos que en esta aparecen los términos de interferencia entre los 2 átomos. A pesar de esto los átomos están muy bien definidos en esta distribución.

El kernel de Choi-Williams nos da:

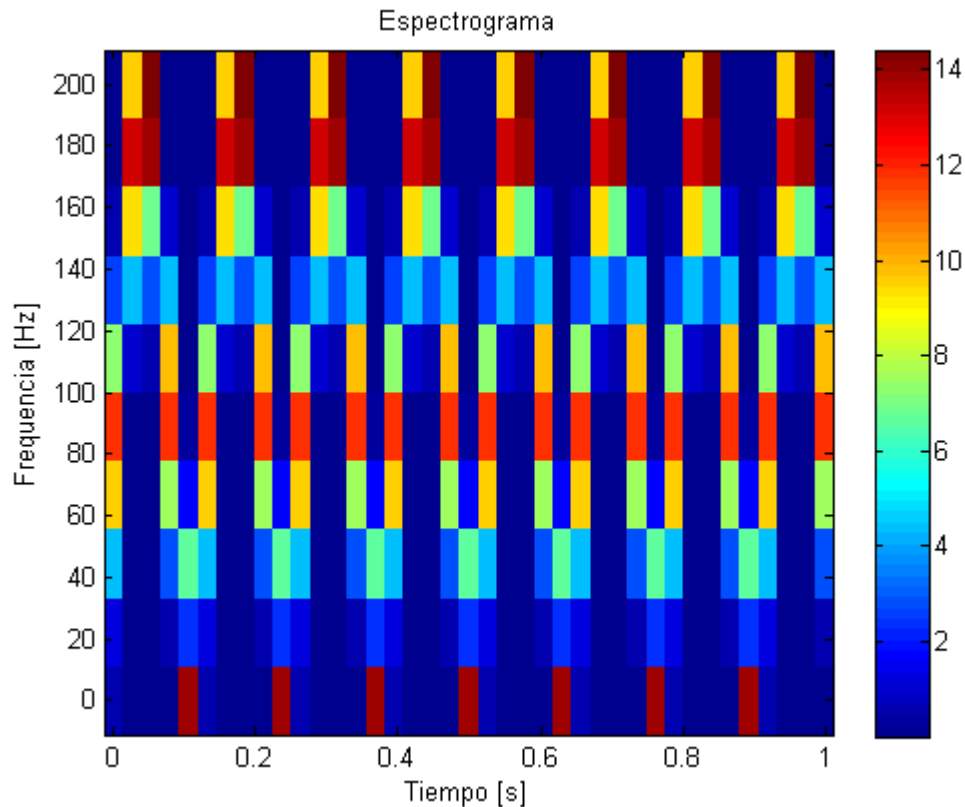


Podemos apreciar que el suavizado aplicado eliminó al parecer en su totalidad los términos de interferencia, siendo ahora más claro el espectrograma ya que posee la resolución de Wigner-Ville pero sin la interferencia. Sin embargo, el alisado que realizó produjo que los átomos se deformen en planchas o cruces.

4. Por lo deducido en el ejercicio 2, la señal estará definida como:

$$x = \sin\left(2\pi \frac{1}{2}(8 fm)t^2\right)$$

El espectrograma de la señal usando la transformada de Gabor, con ventanas de 20 muestras nos da:



Vemos claramente que el gráfico a primera vista no tiene sentido. Recordando el fenómeno de aliasing en Fourier podemos notar que lo que sucede es que al tener, una vez que la señal avanza en el tiempo, frecuencias muy altas empiezan a entrar en la señal y al pasar el límite $\frac{fm}{2}$ aparecen frecuencias de aliasing. Analizando un poco más vemos que la selección de una ventana con mucha resolución temporal nos sirvió para captar el comienzo de la señal donde las frecuencias son inferiores a $\frac{fm}{2}$ y por ende podemos ver cómo las frecuencias crecen linealmente (con mala resolución frecuencial claro ya que de darle menor resolución temporal no las podríamos ver), y una vez que la recta de frecuencias pasa la franja de $\frac{fm}{2}$ recién empiezan a aparecer las frecuencias producidas por el aliasing.

5. Haciendo un razonamiento análogo al del ejercicio 2:

$$\theta = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$f = \omega = e^t$$

$$\int 2\pi\omega dt = 2\pi \int e^t dt$$

$$\theta = 2\pi e^t + 2\pi C$$

Tomaremos $C = 0$ ya que queremos comenzar desde el ángulo 0 . Nos queda la fórmula:

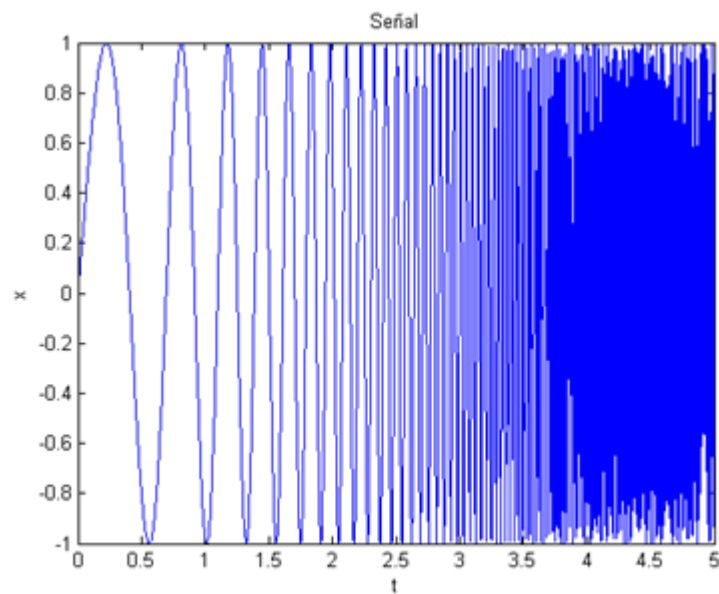
$$\theta = 2\pi e^t$$

Entonces:

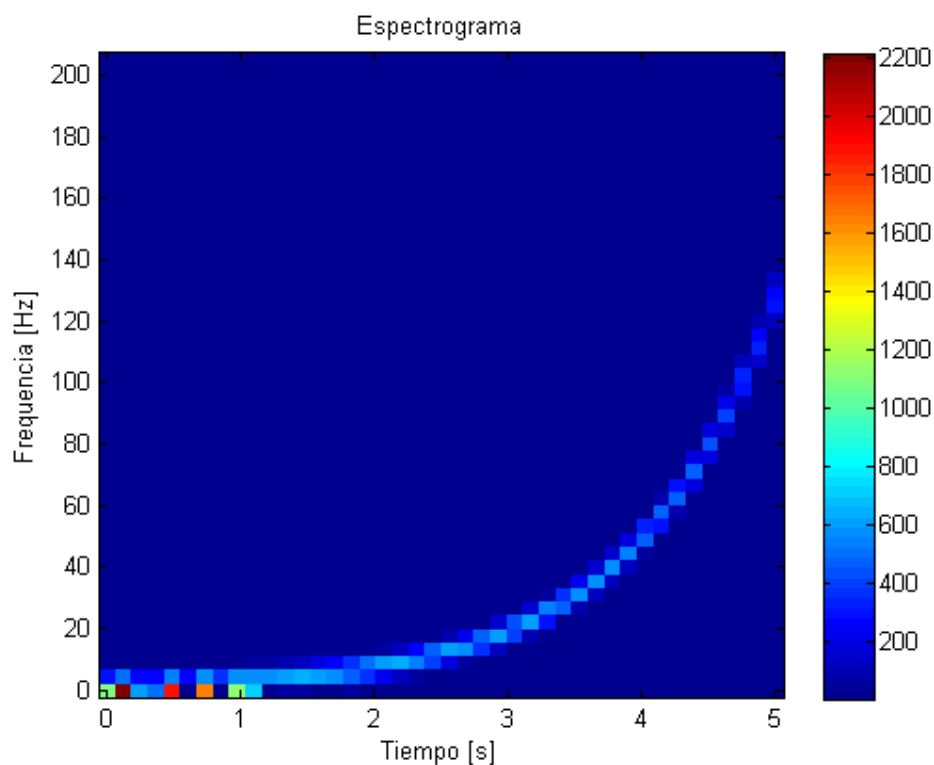
$$x = \sin(2\pi e^t)$$

Muestrearemos la señal con:

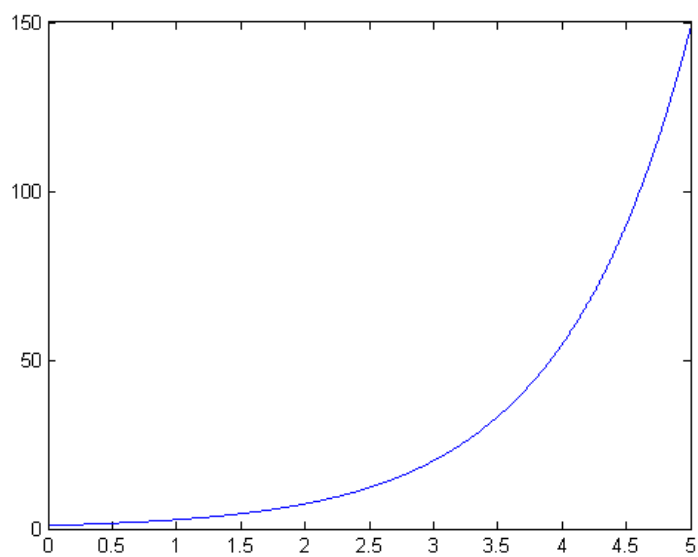
- $t = [0; \frac{1}{2048}; 5 - \frac{1}{2048}]$



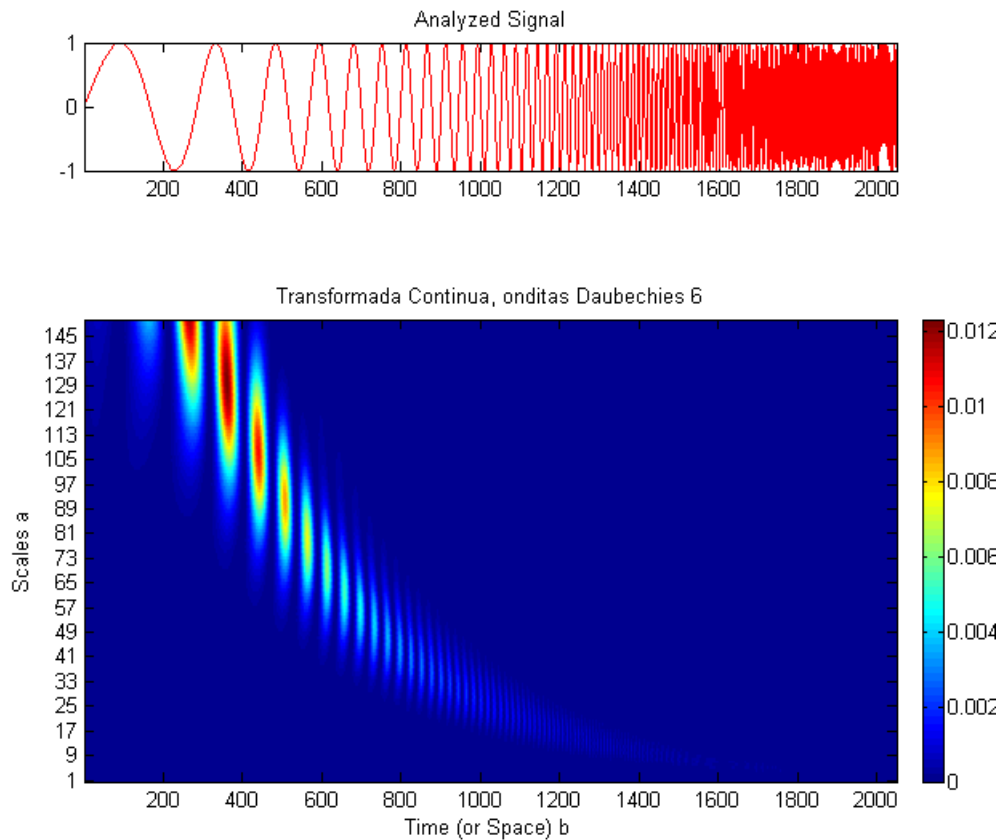
El espectrograma calculado con STFT es:



Vemos que se comporta como era de esperar ya que la función exponencial entre 1 y 5 alcanza aproximadamente un valor de 150:

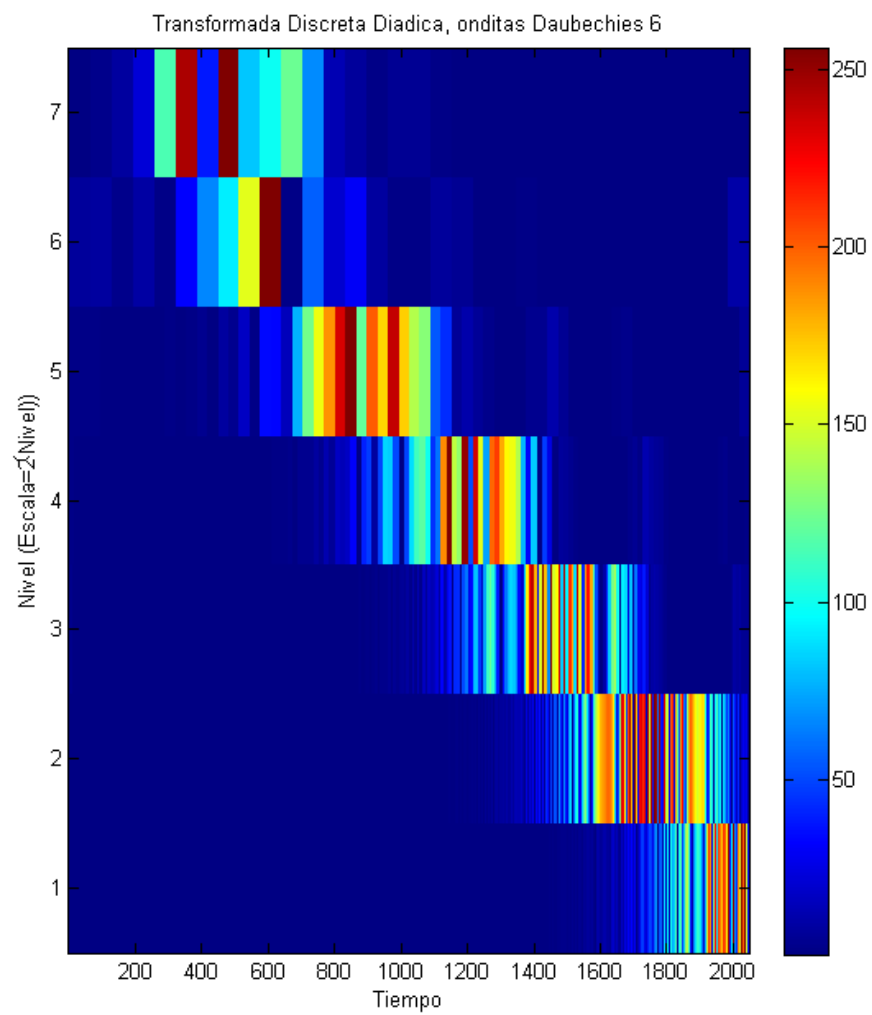


La transformada Wavelet Continua de la señal usando onditas tipo Daubechies de orden 6 nos da:

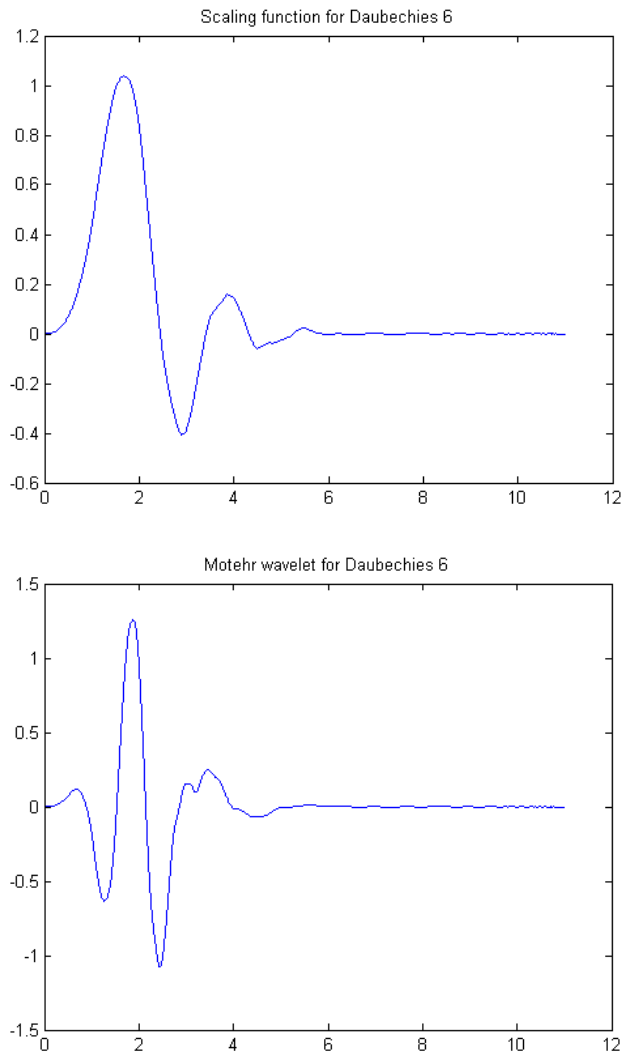


Podemos ver las características de la transformada en el gráfico. Vemos que la resolución en el plano escala-tiempo no es uniforme, sino que en las bajas frecuencias la resolución frecuencial es buena pero la temporal es mala, esto se puede ver al comienzo de la gráfica (ya que la frecuencia no ha crecido lo suficiente) donde se ve que la resolución temporal es baja, además en las altas frecuencias la resolución temporal es mejor pero a costas de perder resolución frecuencial, se ve también al final de la gráfica (ya que la frecuencia ha crecido mucho a este punto) donde se ve que la resolución temporal es buena distinguiéndose pequeñísimos cambios en el tiempo pero la información en frecuencias se ve poco específica. También es fundamental que notemos en la gráfica, que ya no se grafica frecuencia-tiempo como en el espectrograma, sino que escala-tiempo donde escala es la escala aplicada a la ondita. De la escala podemos inferir la frecuencia teniendo en cuenta que a factores de escala grandes la ondita tendrá frecuencias bajas y a factores de escala pequeños la ondita tendrá frecuencias altas. Esto último se ve en el gráfico donde comienza con componentes altas en escala, es decir frecuencias bajas, y termina con componentes bajas de escala, es decir frecuencias altas. Notemos que según lo explicado antes se mantiene la relación entre resolución temporal y frecuencial establecida por el principio de Heisemberg.

Por otro lado la transformada Wavelet Discreta Diádica de la señal usando onditas tipo Daubechies de orden 6 nos da:



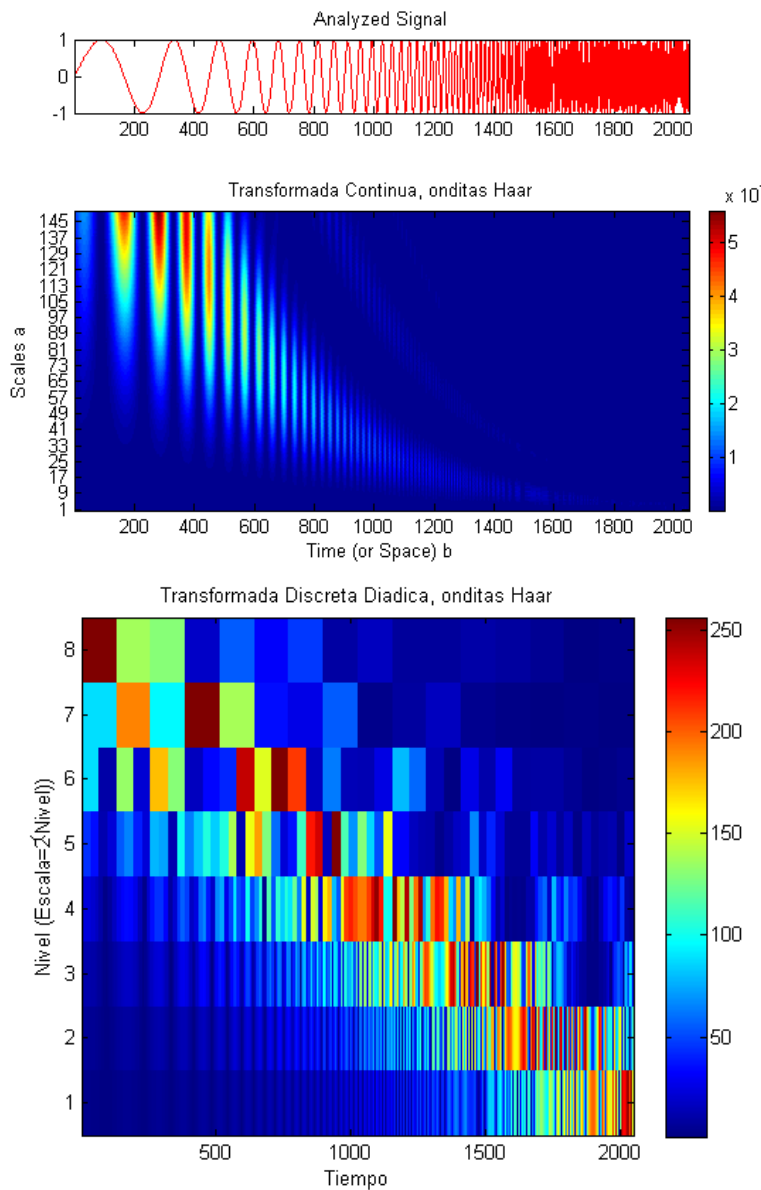
La ondita base de esas transformaciones fue Daubechies orden 6, ésta tiene la función de escala y madre:



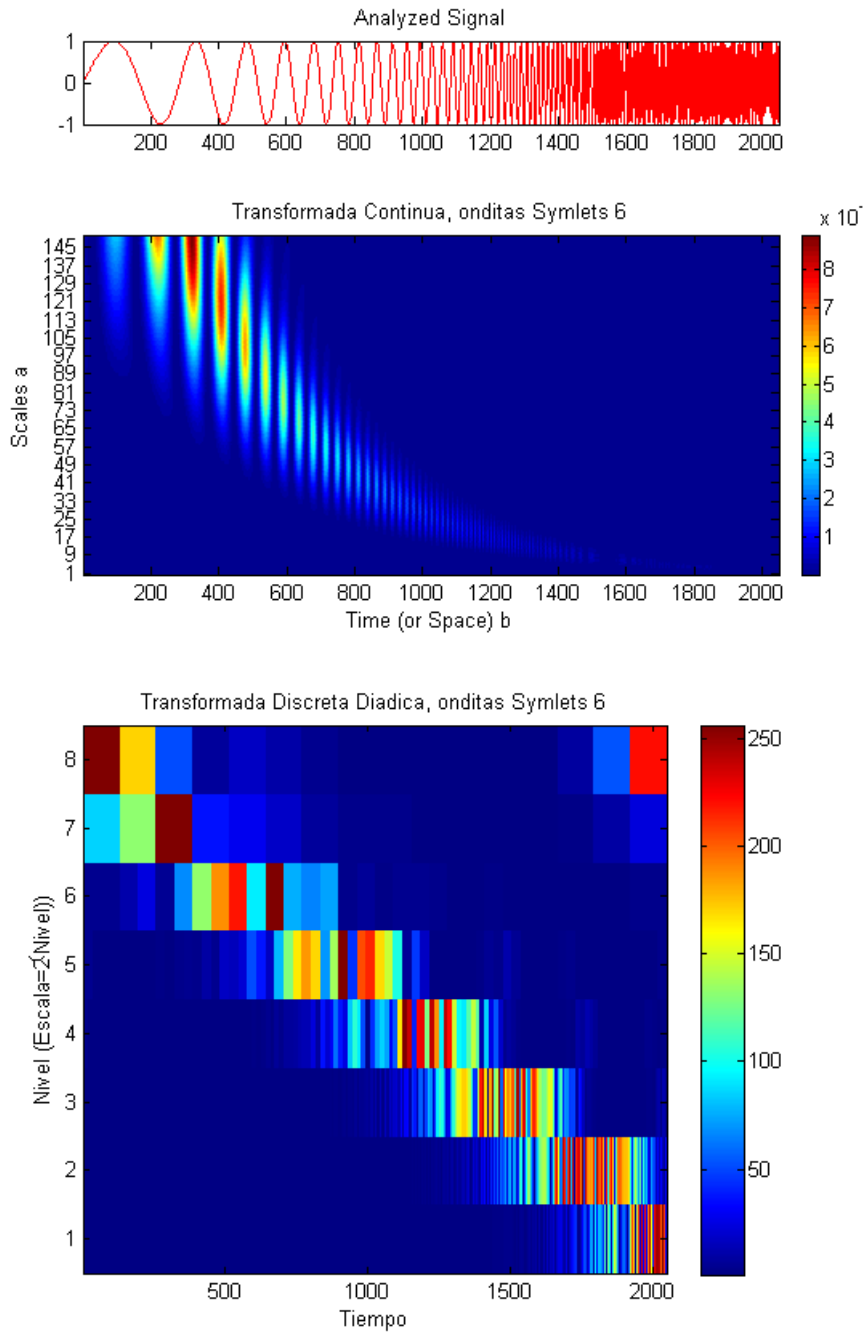
El resto de las transformadas usando otras funciones onditas varían, en general es visible a simple vista que algunas onditas generan un rango temporal más amplio de energías en ciertas escalas, además donde hay máximos locales de energía con cada ondita depende de la forma de ésta ya que será el desplazamiento y la escala donde se correlacione mejor la ondita con la señal. Resumiendo, la morfología de las onditas cambia claramente la correlación entre ésta (trasladada y escalada) y la señal, y por esto posee diferencias. No obstante todas las transformadas son en cierta medida similares, en cuanto a la representatividad para este ejemplo. Por dar otro ejemplo, el escalograma usando ondita Haar, como ésta es un escalón, el escalograma resultante es el más confuso ya que las energías están más esparcidas temporalmente por lo que resulta mucho más difícil descifrar las frecuencias de la señal en el tiempo.

Entre las gráficas de la transformada wavelet continua muestreada y la discreta diádica a primera vista los pasos de muestreo en desplazamiento como en escala se diferencian claramente. La principal diferencia que hay que tener en cuenta entre estas dos es que los niveles de escala en la transformada diádica avanzan en potencias de 2, ie de a intervalos $[2^j, 2^{j+1}]$. Este paso de la escala en la transformada diádica es la razón por la cual los gráficos de la señal en transformada diádica tienen forma lineal en vez de exponencial, como es en la transformada wavelet continua muestreada. Por último hay que tener en cuenta que en la transformada diádica tenemos el nivel de escala.

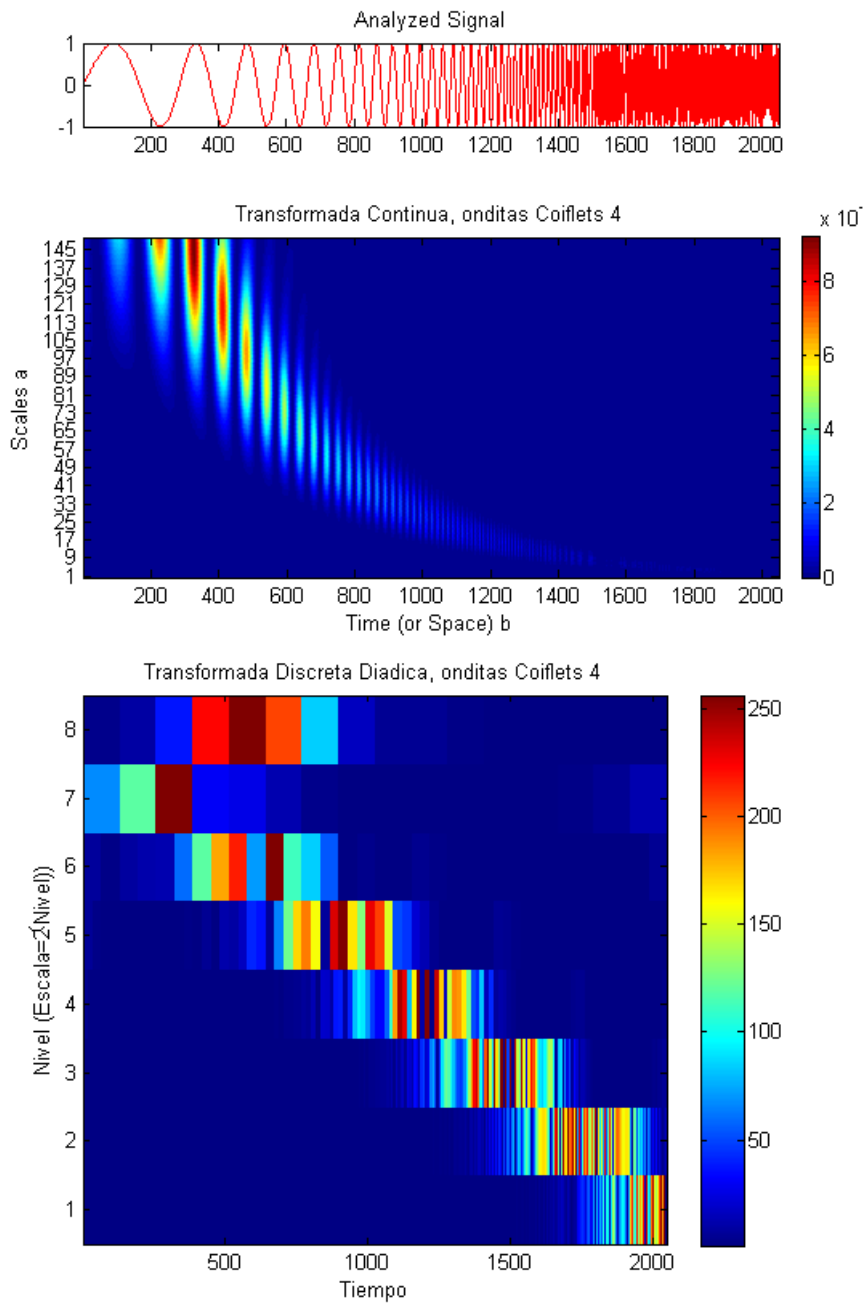
Transformada usando Onditas de Haar:



Transformada usando Onditas de Symlets:



Transformada usando Onditas de Coiflets:



Transformada usando Onditas de Meyer:

