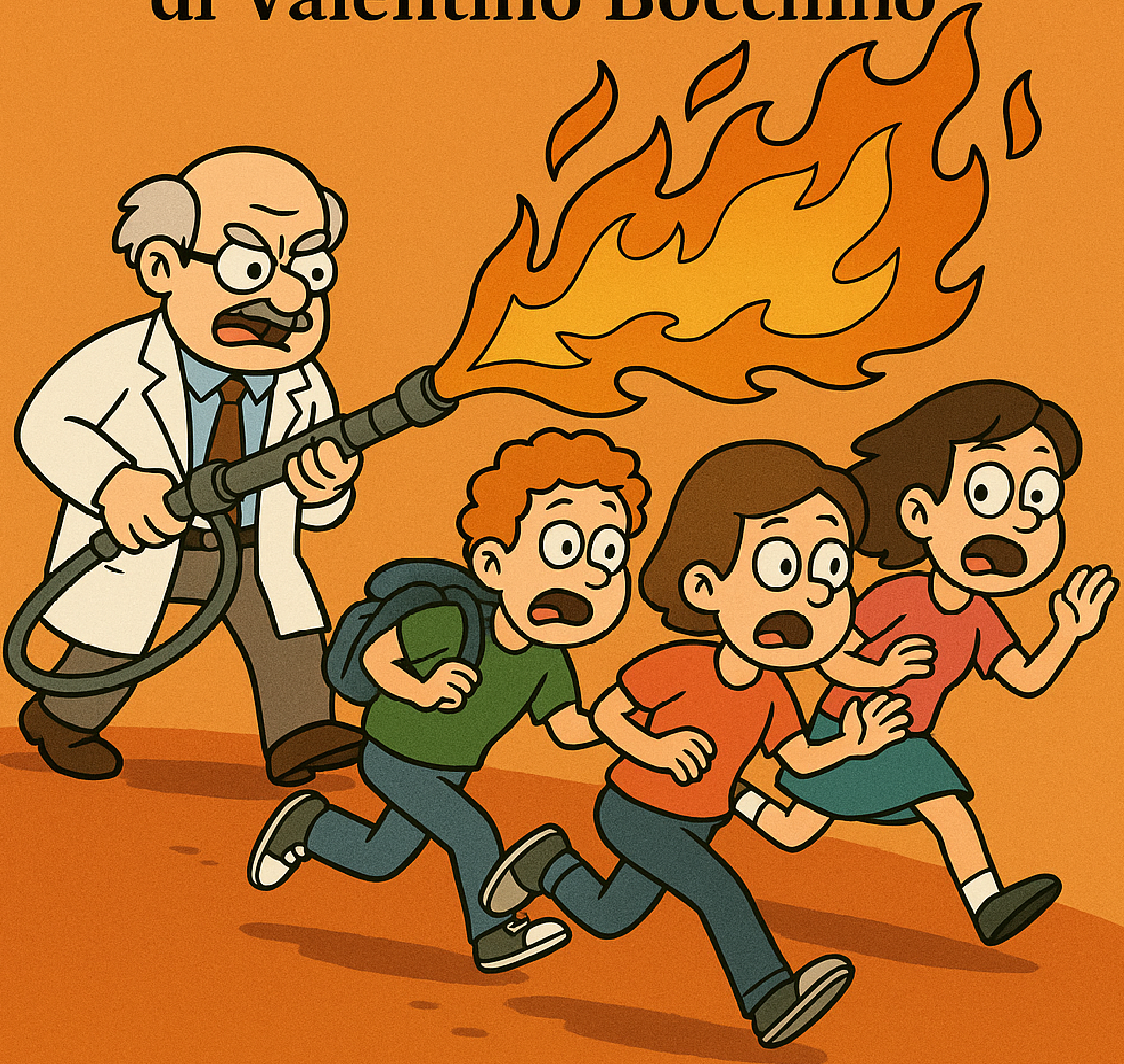
ROGHI LINEARI

di Valentino Bocchino



In copertina, la rappresentazione artistica di un normale appello (*rogo*) di M.D.A.G.2, A.A. 2024/2025.
A sinistra uno dei professori, a destra gli studenti.
In particolare, uno degli studenti ha osato consegnare un foglio di brutta.
Gli altri invece sono ordinarie vittime dell'esame.
Rappresentazione e commento di natura puramente satirica, ogni riferimento a persone o fatti specifici è del tutto casuale e non intenzionale.

Indice

Parte I
Cose utili

1 Prodotti notevoli

1. Quadrato di un binomio con somma
   $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
2. Quadrato di un binomio con differenza
   $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
3. Prodotto tra la somma di due termini e la loro differenza
   $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$
4. Cubo di un binomio con somma
   $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5. Cubo di un binomio con differenza
   $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
6. Quadrato di un trinomio con somma
   $(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$
7. Quadrato di un trinomio con differenza
   $(A-B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB + 2AC - 2BC$
8. Somma di due cubi
   $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$
9. Differenza di due cubi
   $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$
10. Trinomio speciale
    $x^2 + sx + p = (x+a)(x+b)$ *se e solo se*:
    $s = a+b, p = a\cdot b$

2 Equazioni di 2° grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0 \rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\Delta = 0 \rightarrow x = -\left(\dfrac{b}{2a}\right)$	$\Delta < 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

3 Potenze

$a^0 = 1$	$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a\cdot b)^{\frac{m}{n}}$
$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$	$\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$
$\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$	$a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$
$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$	

4 Tabelle goniometriche

$\alpha(°, \text{rad})$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$0°, 0$	0	1	0
$30°, \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°, \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°, \frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$
$180°, \pi$	0	-1	0
$270°, \frac{3}{2}\pi$	-1	0	$\nexists$
$360°, 2\pi$	0	1	0

Le funzioni $\cos(), \sin(), \tan()$, hanno periodo $2\pi, 2\pi, \pi$ rispettivamente.

5 Angoli/Archi associati

α e $-\alpha$	α e $\pi - \alpha$	α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$
$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

α e $\frac{3}{2}\pi - \alpha$	α e $2\pi - \alpha$
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos(\alpha)$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$	$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

α e $\pi + \alpha$	α e $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$	α e $\dfrac{3}{2}\pi + \alpha$
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\cos(\alpha)$
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \sin(\alpha)$
$\tan(\pi+\alpha) = \tan(\alpha)$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$	$\tan\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

6 Equazioni goniometriche elementari

	$\sin(\vartheta) = a$	$\cos(\vartheta) = a$
con $a < -1$ oppure $a > 1$	$\nexists\vartheta$	$\nexists\vartheta$
con $0 < a < 1$	$\vartheta = \arcsin(a) + 2k\pi$ $\vee$ $\vartheta = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi$	$\vartheta = \arccos(a) + 2k\pi$ $\vee$ $\vartheta = 2\pi - \arccos(a) + 2k\pi$
con $-1 < a < 0$	$\vartheta = \pi + \arcsin(\lvert a \rvert) + 2k\pi$ $\vee$ $\vartheta = 2\pi - \arcsin(\lvert a \rvert) + 2k\pi$	$\vartheta = \pi - \arccos(\lvert a \rvert) + 2k\pi$ $\vee$ $\vartheta = \pi + \arccos(\lvert a \rvert) + 2k\pi$

Parte II
Insiemi numerici, gruppi e campi

7 Numeri naturali, interi, razionali e reali

- $\mathbb{N}$ insieme dei numeri **naturali**
- $\mathbb{Z}$ insieme dei numeri **interi**: $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Q}$ insieme dei numeri **razionali**: $\{..., -3, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2, \frac{10}{3}, ...\}$
  Sono tutti quei numeri esprimibili con il rapporto $\frac{a}{b}$, dove $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$
- $\mathbb{R}$ insieme dei numeri **reali**: $\{..., 0, 1, \sqrt{2}, 2, \pi, ...\}$
  *L'insieme $\mathbb{R}$ è **completo***: Ovvero, rappresenta ogni possibile numero, inclusi quelli che $\mathbb{Q}$ non può rappresentare.

8 Gruppi

Sia $(A, *)$ una *coppia* formata da un insieme A non vuoto e un'operazione binaria $*$ su A.
Diremo che $(A, *)$ è un gruppo se:

- l'operazione $*$ è *associativa*
  $\forall a, b, c \in A$ vale: $a * (b * c) = (a * b) * c$
- se esiste l'elemento neutro $e \in A$ per l'operazione $*$
  $\forall a \in A$ vale: $e+a= a+e= a$
- ogni elemento $a \in A$ è *invertibile*

Se vale anche la proprietà **commutativa**:

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ vale: $a + b = b + a$

Allora siamo di fronte ad un **gruppo commutativo/abeliano**.
Per l'**addizione** $+$:

$$(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+) \text{ sono } \textit{gruppi } \boldsymbol{commutativi}.$$

Per la **moltiplicazione** $\cdot$:
Se escludiamo lo 0 da $\mathbb{C},\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$, possiamo scrivere: $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}, \mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\setminus\{0\}, \mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.
$\mathbb{C}^\times,\mathbb{R}^\times,\mathbb{Q}^\times$ vengono detti insiemi moltiplicativi.
Le coppie:

$$(\mathbb{C}^\times,\cdot),(\mathbb{R}^\times,\cdot),(\mathbb{Q}^\times,\cdot)$$

Sono *gruppi* ***commutativi***. In particolare, vengono detti *gruppi moltiplicativi dei complessi, dei reali e dei razionali* rispettivamente.
Vuoi saperne di più? Vedi "Rigurgiti di Unicorno"

8.1 Proprietà di $\mathbb{R}$

Su $\mathbb{R}$ sono definite due *operazioni binarie* $+$ e $\cdot$ che godono delle seguenti proprietà:

1. Per l'**addizione** $+$:
   - 1.1 L'elemento neutro esiste ed è 0. Quindi $\forall a \in \mathbb{R}$ vale: $0+a=a+0=a$
   - 1.2 Vale la proprietà **commutativa**. Quindi $\forall a,b \in \mathbb{R}$ vale: $a+b=b+a$
   - 1.3 Vale la proprietà **associativa**. Quindi $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ vale: $a+(b+c)=(a+b)+c$
   - 1.4 $\forall a \in \mathbb{R}$ esiste un ***opposto*** $-a$ tale che: $a+(-a)=(-a)+a=0$
2. Per la **moltiplicazione** $\cdot$:
   - 2.1 L'elemento neutro esiste ed è 1. Quindi $\forall a \in \mathbb{R}$ vale: $1\cdot a=a\cdot 1=a$
   - 2.2 Vale la proprietà **commutativa**. Quindi $\forall a,b \in \mathbb{R}$ vale: $a\cdot b=b\cdot a$
   - 2.3 Vale la proprietà **associativa**. Quindi $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ vale: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
   - 2.4 $\forall a \in \mathbb{R}$, con $a\neq 0$ esiste un ***inverso*** a^{-1} tale che: $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$
   - 2.5 Vale la proprietà **distributiva**. Quindi $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ vale: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Inoltre, per la moltiplicazione usiamo la notazione moltiplicativa dei gruppi e pertanto:
$a\cdot b=ab$, ecc.ecc....
Per l'addizione invece vale la notazione additiva.
In particolare, ricorda che:

- $(\mathbb{R},+)$ è un **gruppo commutativo** (*abeliano*)
- $(\mathbb{R}^\times,\cdot)$, con $\mathbb{R}^\times=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ è anch'esso un **gruppo commutativo** (*abeliano*)

Per il punto seguente (9) $\mathbb{R}$ è un **campo**.

9 Definizione di campo

Un campo è un insieme A dotato di due operazioni binarie $+$ e $\cdot$ che soddisfano i seguenti assiomi:

1. $(A,+)$ è un gruppo commutativo, avente come elemento neutro 0_A.
2. $(A^\times,\cdot)$ con $A^\times=A\setminus\{0\}$ è un gruppo commutativo, avente come elemento neutro 1_A.
3. Vale la proprietà **distributiva**. Quindi $\forall a,b,c \in A$ vale: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

I punti 1 e 2 implicano che A non deve soltanto avere un neutro (come da definizione di gruppo) ma che questo neutro deve essere 0 e 1 rispettivamente.
$\mathbb{Q},\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono **campi**.

Parte III
Numeri complessi

10 Definizione di un numero complesso

10.1 Forma algebrica/cartesiana di un numero complesso

Un numero complesso z in forma algebrica viene scritto come

$$z = a + bi$$

dove a e b sono numeri reali arbitrari, mentre i rappresenta ***l'unità immaginaria***.
In particolare:
a rappresenta la parte reale del numero e b rappresenta la parte immaginaria.
Scriviamo quindi: $a = \mathrm{Re}(z)$ e $b = \mathrm{Im}(z)$
Nell'insieme $\mathbb{C}$ possiamo quindi indicare sia i numeri che *non* hanno un'unità immaginaria (numeri in $\mathbb{R}$), sia numeri che invece ne hanno una.
Quindi in realtà anche $\sqrt{7} \in \mathbb{C}$ perché $\sqrt{7} = \sqrt{7} + 0i$
Ricordiamo che $\mathbb{C}$ è quindi *un'estensione* di $\mathbb{R}$.

10.2 Potenze ennesime dell'unità immaginaria

Per i vale:

Potenza	Risultato
i^0	1
i^1	i
i^2	-1
i^3	$i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
i^4	$i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$
$\vdots$	$\vdots$

Le potenze di i sono cicliche (si ripetono).

10.3 Operazioni tra numeri complessi in forma algebrica

1. **Per la somma:**
$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$
Tutto funziona normalmente. In particolare, le parti reali si sommano tra di loro, così come le parti immaginarie, formando un nuovo numero sempre del tipo $a + bi$.

2. **Per la moltiplicazione:**
$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bd \cdot i^2 = ac + bci + adi + bd \cdot (-1) =$
$= ac + bci + adi - bd = ac - bd + (ad + bc)i$
Anche qui funziona tutto normalmente, tuttavia il risultato finale è diverso perché va considerato che $i^2 = -1$, come evidenziato nei passaggi.

11 Proprietà di $\mathbb{C}$

11.1 Addizione e moltiplicazione.

Rispetto alle operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$ l'insieme $\mathbb{C}$ gode delle stesse proprietà di $\mathbb{R}$.
Vedi il punto 8.1
In particolare, anche $\mathbb{C}$ è un ***campo****. Vedi il punto (9)*
ATTENZIONE! $\mathbb{C}$ *non* è un insieme ordinato: non esistono numeri complessi *maggiori* o *minori* di altri numeri complessi.

11.2 Coniugio

Dato un numero complesso $z = a+bi$ il suo coniugio è:

$$\overline{z} = a-bi$$

Notiamo che se $z \in \mathbb{R}$ ($b = 0$) allora:

$$z = \overline{z}$$

quindi $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

11.3 Modulo/norma

Non la chiamiamo valore assoluto!
Dato un numero complesso $z = a + bi$ il suo modulo è definito dal seguente numero reale:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$|z| = 0$ quando $a = b = 0$ ($z = 0$) mentre è strettamente positivo quando $|z| \neq 0$.
Il prodotto tra z e $\overline{z}$ è:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Vedere il punto (11.2)

11.4 Inverso

Ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ ha un inverso z^{-1} così definito:

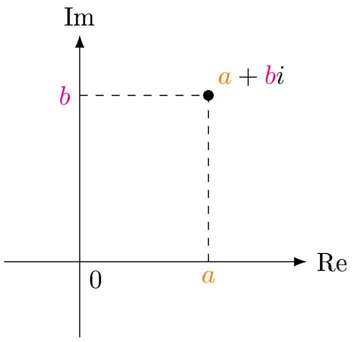
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

12 Il piano complesso

I numeri reali sono rappresentabili con una retta.
Osservando un numero complesso $a + bi$, notiamo che un numero complesso è in effetti una coppia (a, b) dove a e b sono entrambi coefficienti reali. Un numero complesso è quindi a tutti gli effetti una coppia ordinata $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

12.1 Rappresentazione come punto

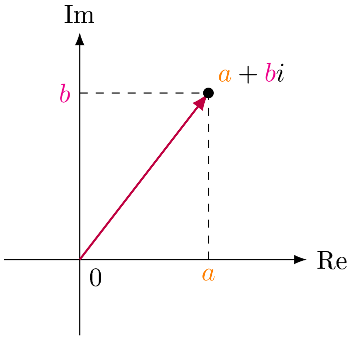
Possiamo quindi rappresentare un qualunque numero complesso su un piano, indicando con Re l'asse dei numeri reali e con Im l'asse dei numeri immaginari:



NOTA: A volte, $a + bi$ può essere scritto come $x + yi$ proprio perché la parte reale è rappresentata sull'asse delle ascisse mentre quella immaginaria sull'asse delle ordinate.

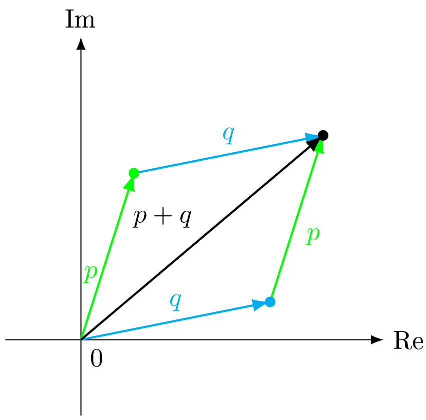
12.2 Rappresentazione come vettore

Possiamo anche rappresentare un numero complesso come un vettore che parte dall'origine e arriva alle coordinate del punto:



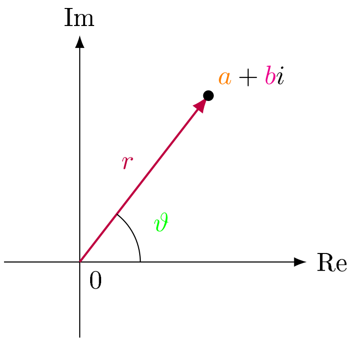
12.3 Somma di numeri complessi: Regola del parallelogramma

Abbiamo due numeri complessi $p = (a + bi)$ e $q = (c + di)$ vogliamo calcolare la loro somma $p + q$.
Possiamo usare la regola del parallelogramma:



13 Coordinate polari

Facendo riferimento al punto 12.2 possiamo dire che un numero complesso $a + bi$ può essere anche espresso come una coppia (r, ϑ), dove r rappresenta il modulo (la lunghezza del vettore) e ϑ rappresenta l'angolo.
ϑ viene anche detto *argomento*, meno frequentemente viene anche chiamato *fase* o *anomalia*.



13.1 Conversione da polari a cartesiane e viceversa

Per passare **dalle coordinate polari a quelle cartesiane**:

$$a = r \cdot \cos\vartheta, b = r \cdot \sin\vartheta$$

Per passare dalle **coordinate cartesiane a quelle polari**:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\vartheta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0, b > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } a = 0, b < 0 \\ \nexists & \text{se } a = 0, b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a > 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi & \text{se } a > 0, b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{se } a < 0, b \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

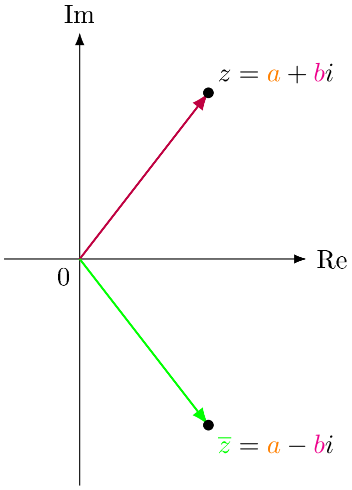
Osserviamo la relazione con il **modulo**:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

NOTA: A volte, $a + bi$ può essere scritto come $x + yi$ proprio perché la parte reale è rappresentata sull'asse delle ascisse mentre quella immaginaria sull'asse delle ordinate.

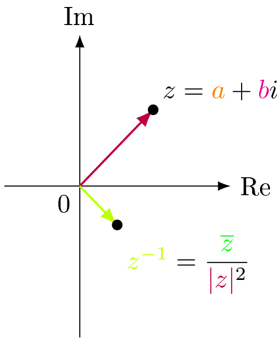
13.2 Rappresentazione grafica del coniugio

Il coniugio di un numero complesso cambia segno alla coordinata immaginaria, quindi corrisponde alla riflessione del numero complesso rispetto all'asse reale:



13.3 Rappresentazione grafica dell'inverso

L'inverso riflette rispetto all'asse reale il numero complesso e ha come modulo il reciproco del modulo del numero complesso:



13.4 Scritture in forma polare

Il numero complesso $z = (r, \vartheta)$ può anche essere scritto come:

$$r \cdot (\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta)$$

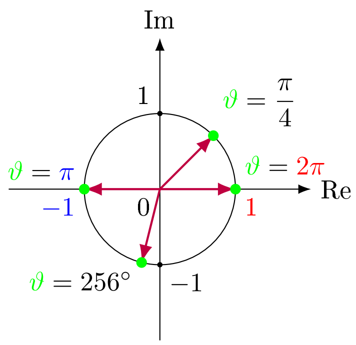
oppure come:

$$r \cdot e^{i \cdot \vartheta} = r \cdot (\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta)$$

Vale solo se $z \neq 0$

13.5 Numeri complessi e circonferenza unitaria

Un qualunque numero complesso scritto in forma polare con $r = 1$, è del tipo $e^{i \cdot \vartheta}$.
Tutti i numeri complessi $e^{i \cdot \vartheta}$ rappresentano, al variare di ϑ la **circonferenza unitaria**:



In particolare:

- *con* $\vartheta = \pi$ otteniamo l'**identità di Eulero**: $e^{i \cdot \pi} = -1$ meglio nota come:

$$e^{i \cdot \pi} + 1 = 0$$

- *con* $\vartheta = 2\pi$ otteniamo invece:

$$e^{i \cdot 2\pi} = 1$$

14 Operazioni in forma polare

14.1 Confronto tra numeri in forma polare

Due numeri complessi $z_0 = r_0 \cdot e^{i \cdot \vartheta_0}$ e $z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \vartheta_1}$ *entrambi non nulli* sono lo stesso numero **se e solo se** valgono entrambi i fatti seguenti:

1. $r_0 = r_1$
2. $\vartheta_0 = \vartheta_1 + 2k\pi$
   per un qualunque $k \in \mathbb{Z}$

14.2 Prodotto tra numeri complessi

Siano $z_0 = r_0 \cdot e^{i \cdot \vartheta_0}$ e $z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \vartheta_1}$ due numeri complessi. Per il loro prodotto $z_0 \cdot z_1$ vale la seguente:

$$r_0 \cdot e^{i \cdot \vartheta_0} \cdot r_1 \cdot e^{i \cdot \vartheta_1} = r_0 \cdot r_1 \cdot e^{i \cdot (\vartheta_0 + \vartheta_1)}$$

14.3 Potenze e radici ennesime di un numero complesso

Siano $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \vartheta}$ e $z_0 = r_0 \cdot e^{i \cdot \vartheta_0}$ due numeri complessi in forma polare.
Vogliamo risolvere un'equazione del tipo:

$$z^n = z_0$$

dove z_0 è un numero complesso che conosciamo e z^n è un numero che non conosciamo: è un numero che se elevato alla n restituisce z_0.

La prima cosa che dobbiamo notare è che generalmente z^n **non è unico** ovvero, per l'equazione esistono più soluzioni. In particolare, l'equazione ha esattamente n soluzioni. Le soluzioni di questa equazioni vengono dette ***radici ennesime di*** z_0.
Per ogni soluzione r rimane invariato ed il suo valore lo si ricava con

$$r = \sqrt[n]{r_0}$$

ϑ invece varia per ogni soluzione. Ogni valore di ϑ si può trovare con la seguente formula:

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

dove $k \in \mathbb{Z}$.
Geometricamente, questo significa che le radici ennesime sono tutte posizionate su una **circonferenza** *centrata rispetto all'origine* del piano complesso. Il **raggio** di tale circonferenza è proprio $\sqrt[n]{r_0}$.
Ad esempio, con $z_0 = 81 \cdot e^{i \cdot \pi}$ l'equazione $z^4 = 81 \cdot e^{i \cdot \pi}$ ha quattro soluzioni. Stiamo infatti cercando le radici quarte di z_0.
Per Abbiamo:

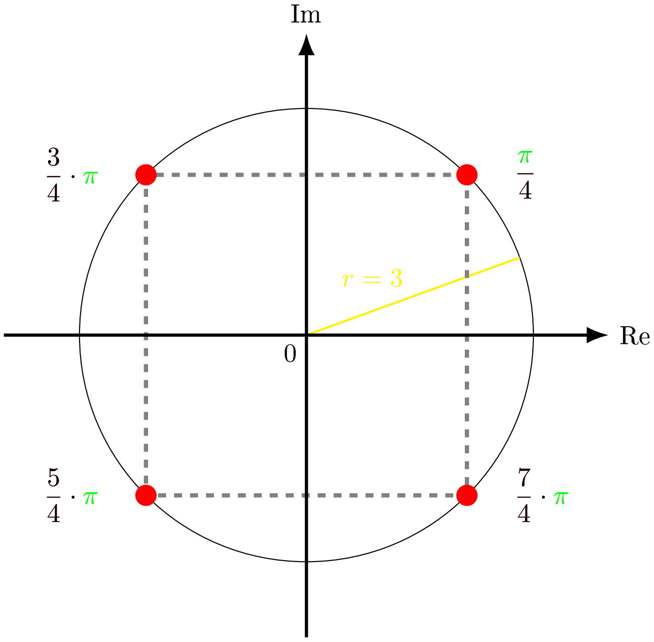
$$r = \sqrt[4]{81} = 3$$

Per abbiamo:

$$\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi + 2 \cdot \pi}{4}, \frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4}, \frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4}$$

ovvero:

$$\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4} \cdot \pi, \frac{5}{4} \cdot \pi, \frac{7}{4} \cdot \pi$$



Parte IV
Monomi e polinomi

15 Monomi

Un monomio è composto da un coefficiente (parte numerica) e da una parte letterale.
Esempi di monomi: $4x^2, 2xz, \sqrt{2}y^4$

15.1 Grado di un monomio

Il grado di un monomio è la somma degli esponenti presenti sulle parti letterali.
Prendendo l'esempio di prima:
$4x^2$ è di secondo grado.

$2xz = 2x^1 z^1$ è di secondo grado.
$\sqrt{2}y^4$ è di quarto grado.
Un monomio di grado 0 è soltanto un numero (non ha parte letterale).

16 Polinomi

Un polinomio è una somma di monomi.

16.1 Forma normale

Un polinomio è *ridotto in forma normale* quando scritto come somma di monomi aventi parti letterali tutte diverse tra loro e coefficienti tutti non nulli.
Anche il polinomio nullo 0 è da considerarsi come scritto in forma normale.

16.2 Grado di un polinomio

Per determinare il grado di un polinomio:

1. Riscrivere il polinomio in forma normale
2. Cercare il monomio di grado massimo. Il grado di tale monomio è il grado del polinomio.

16.3 Polinomi omogenei

Un polinomio è **omogeneo** se tutti i suoi *monomi* hanno lo stesso grado.
Ad esempio:

$$3xy^2 + 4x^3 - \frac{2}{3}x^2y + 7y^3$$

è omogeneo perché tutti i suoi monomi sono dello stesso grado (3° grado).
Nota: il polinomio può essere a più variabili come nell'esempio, oppure a singola variabile x, l'importante è che tutti i monomi siano *dello stesso grado*.
Vale la pena anticipare che:

1. I polinomi *omogenei di primo grado* rappresentano le *applicazioni lineari* (singolarmente o a sistema)
2. I polinomi *omogenei di secondo grado* rappresentano le *forme quadratiche*.

16.4 Polinomi con una singola variabile x

I polinomi in cui compare una sola variabile vengono indicati con $p(x)$ oppure più semplicemente con p.
Un polinomio $p(x)$ può essere descritto ordinando i suoi monomi scrivendo prima quello di grado più alto per poi arrivare a quello di grado più basso (che scriviamo come ultimo). In formule:

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

n è il grado di $p(x)$. Ovviamente non scriviamo i monomi con un coefficiente a nullo.
a_0 è un polinomio di grado 0 (è un numero, non ha parte letterale).

16.5 Insiemi dei polinomi

Denotiamo con $\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{C}[x]$ gli insiemi dei polinomi dove compare una singola variabile x, con coefficienti in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$ rispettivamente.
Possiamo anche indicare con $\mathbb{R}_k[x]$ e $\mathbb{C}_k[x]$ degli insiemi più ristretti: k rappresenta il grado massimo, pertanto questi insiemi raccolgono solo quei polinomi che hanno un grado $\leq k$.

16.6 Divisione tra polinomi

Se il grado del divisore $D(x)$ è maggiore del dividendo $P(x)$, allora abbiamo come quoziente $Q(x) = 0$ e come resto $R(x) = P(x)$
Per tutti gli altri casi:

1. Prendiamo i polinomi $P(x)$ e $D(x)$, riscriviamoli in forma normale, avendo cura di ordinare i vari monomi in del polinomio in forma *decrescente*

2. Se $P(x)$ e $D(x)$ non sono completi bisogna aggiungere degli 0 per i termini intermedi. Ad esempio, se abbiamo:
   $D(x) = x^4 + x + 2$, allora scriveremo $D(x) = x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 2$

Per descrivere bene la procedura, facciamo un esempio: vogliamo calcolare $\dfrac{x^4 + 2x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$
Scriviamo la tabella:

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
+x^4 & 0x^3 & +2x^2 & +x & -1 & +x^2 & +x & +1 \\
\cline{6-8}
 & & & & & & &
\end{array}$$

Calcoliamo $\dfrac{+x^4}{+x^2} = +x^2$
Scriviamo quindi:

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
+x^4 & 0x^3 & +2x^2 & +x & -1 & +x^2 & +x & +1 \\
\cline{6-8}
 & & & & & +x^2 & &
\end{array}$$

Moltiplichiamo quindi $+x^2$ con ogni monomio di $x^2 + x + 1$ e scriviamo i risultati invertendo il segno:

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
+x^4 & 0x^3 & +2x^2 & +x & -1 & +x^2 & +x & +1 \\
\cline{6-8}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & +x^2 & &
\end{array}$$

Come con le divisioni normali, eseguiamo le somme algebriche:

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
+x^4 & 0x^3 & +2x^2 & +x & -1 & +x^2 & +x & +1 \\
\cline{6-8}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & \downarrow & \downarrow & +x^2 & & \\
\cline{1-5}
/ & -x^3 & +x^2 & +x & -1 & & &
\end{array}$$

Continuiamo finché non otteniamo un risultato con grado minore di $x^2 + x + 1$. Tale risultato sarà il nostro resto:

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
+x^4 & 0x^3 & +2x^2 & +x & -1 & +x^2 & +x & +1 \\
\cline{6-8}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & \downarrow & \downarrow & +x^2 & -x & +2 \\
\cline{1-5}
/ & -x^3 & x^2 & +x & -1 & & & \\
 & +x^3 & +x^2 & +x & \downarrow & & & \\
\cline{1-5}
/ & / & +2x^2 & +2x & -1 & & & \\
 & & -2x^2 & -2x & -2 & & & \\
\cline{1-5}
/ & / & / & / & -3 & & &
\end{array}$$

Abbiamo quindi: $Q(x) = x^2 - x + 2$ e come $R(x) = -3$
Nota: Se la divisione tra polinomi ha resto nullo, allora si parla di divisione esatta e si dice che $D(x)$ divide $P(x)$ scritto anche come $D(x)|P(x)$. La notazione è la stessa usata per i numeri, ad esempio per dire che 3 divide 9, possiamo scrivere $3|9$.

17 Radici di un polinomio

Un numero a è una radice di un polinomio $p(x)$ se $p(a) = 0$.
Per verificare se a è effettivamente una radice è utile la seguente:
Il numero a è una radice di $p(x)$ se e solo se $(x - a)|p(x)$.
Quindi se la divisione

$$\frac{p(x)}{(x - a)}$$

ha resto 0, allora a è una radice.

17.1 Molteplicità di una radice

La molteplicità di una radice a di un polinomio $p(x)$ è il massimo numero k tale che $(x-a)^k | p(x)$.

17.2 Numero di radici reali di un polinomio, contate con molteplicità

Un polinomio $p(x)$ di grado $n \geq 1$ ha ***al più*** n radici in $\mathbb{R}$ **contate con molteplicità**.

17.3 Teorema fondamentale dell'algebra: radici complesse di un polinomio

Nel punto 17.2 diciamo che in generale un polinomio ha al massimo n radici reali.
Se invece consideriamo anche le radici complesse, allora esso **ha esattamente** n **radici**, *contate con molteplicità*.

17.4 Polinomi a coefficienti reali con radici complesse

Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali.
Per il punto 17.3 sappiamo che $p(x)$ ha esattamente n radici complesse.
Se z è una radice complessa di $p(x)$, allora anche il suo coniugato $\overline{z}$ è una radice.
Inoltre, z e $\overline{z}$ hanno la stessa *molteplicità*.

Parte V
Spazi vettoriali

18 Spazio euclideo

Uno spazio euclideo in n dimensioni viene indicato con $\mathbb{R}^n$, dove:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2 \times \cdots \times \mathbb{R}_n$$

Ogni elemento in $\mathbb{R}^n$ può essere descritto come una successione di numeri reali.
Per esempio un elemento $x \in \mathbb{R}^2$ è una successione (r_1, r_2) più comunemente nota come (x, y).
In parole povere, stiamo parlando delle "coordinate".

18.1 Origine

L'origine dello spazio euclideo si denota con 0 oppure con O ed è descritto con una successione tutta nulla $(0, \ldots, 0)$

18.2 Il vettore colonna

Una successione che descrive un punto *(Vedi 18)* può essere scritta come un vettore colonna, oppure come un vettore riga.
Usiamo tendenzialmente il ***vettore colonna***:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dove $x_1, \ldots, x_n$ sono le *coordinate* del punto x.

19 Operazioni tra vettori

19.1 Somma vettoriale

Dati due vettori:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La loro somma produce un nuovo vettore che ha come coordinate la somma delle coordinate:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}^2$ la somma vettoriale produce lo stesso risultato della regola del parallelogramma.

19.2 Prodotto per scalare

DA NON CONFONDERE CON IL "PRODOTTO SCALARE"
Dato un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ ed un vettore

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eseguire ***il prodotto per scalare*** su x significa calcolare un nuovo vettore λx le cui coordinate sono il prodotto tra λ e le coordinate di x:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}^2$ il prodotto scalare "allunga" o "accorcia" un vettore $|\lambda|$ volte e lo ribalta (punta in direzione opposta) se λ è negativo.

20 Spazi vettoriali generici

In generale non esiste solo lo spazio euclideo. Vogliamo studiare tutti gli spazi diversi da $\mathbb{R}^n$ ma che hanno le stesse proprietà.

20.1 Lo spazio vettoriale V nel campo $\mathbb{K}$

Fissiamo un campo $\mathbb{K}$. Gli elementi in $\mathbb{K}$ sono detti **scalari**.
Uno spazio vettoriale in un campo $\mathbb{K}$ è un insieme V di elementi detti vettori.
L'insieme V gode di due operazioni binarie:

- La somma vettoriale (*vedi il punto 19.1*)
  Per ogni $v, w \in V$ deve esistere la loro somma in V: $v + w \in V$
- Il prodotto per scalare (*vedi il punto 19.2*)
  Per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ e per ogni vettore $v \in V$deve esistere un $\lambda v \in V$

Queste operazioni devono funzionare esattamente come quelle nello spazio euclideo. In particolare:

- $(V, +)$ è un gruppo commutativo
  - Ha come elemento neutro 0_V. Dove non genera ambiguità si può semplicemente indicare come 0.
    ATTENZIONE! Perché non è detto che l'elemento neutro di V coincida con l'elemento neutro di $\mathbb{K}$.
    Vedere inoltre il punto 20.2
- Vale la proprietà **distributiva**:
  - Rispetto alla somma vettoriale:
    Per ogni $v, w \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ vale: $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
  - Rispetto alla somma di scalari:
    Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e per ogni $v \in V$ vale: $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
- Vale la proprietà **associativa** rispetto al prodotto per scalare:
  Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e per ogni $v \in V$ vale: $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
- Per il prodotto per scalare, l'**elemento neutro** è $1 \in \mathbb{K}$:
  Per ogni $v \in V$ vale:$1 \cdot v = v$

v, w sono vettori e λ, μ sono scalari.

20.2 Elementi neutri 0_V e $0_{\mathbb{K}}$

Per quanto visto al punto 20.1 per ogni vettore $v \in V$ vale la seguente relazione:

$$0_{\mathbb{K}} \cdot v = 0_V$$

Ovvero, calcolando il prodotto per scalare tra un qualunque vettore $v \in V$ e l'elemento neutro di $\mathbb{K}$ si ottiene l'elemento neutro di V.

21 Sottospazio vettoriale

Un sottospazio vettoriale W è uno spazio vettoriale contenuto a sua volta in un altro spazio vettoriale V.
Fissato quindi un campo $\mathbb{K}$ e uno spazio vettoriale V in $\mathbb{K}$,
un sottospazio vettoriale è un sottoinsieme $W \subset V$ che soddisfa 3 proprietà:

1. $0_V \in W$ ovvero, l'elemento neutro di V deve essere presente anche in W.
   L'elemento neutro si riferisce all'operazione di somma vettoriale in W, quindi al gruppo commutativo $(W, +)$

2. Per ogni $v, v' \in W$ esiste $v + v' \in W$ ovvero, presi due vettori qualunque in W, la loro somma deve essere sempre in W.
   Chiusura rispetto all'operazione $+$

3. Per ogni $v \in W$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ esiste $\lambda \cdot v \in W$ ovvero, preso un vettore qualunque in W ed uno scalare qualunque in $\mathbb{K}$, il loro prodotto per scalare deve essere sempre in W.
   Chiusura rispetto all'operazione di prodotto per scalare.

21.1 Sottospazi banali e totali

Ogni spazio vettoriale possiede sempre per definizione due sottospazi:
Consideriamo uno spazio vettoriale V qualunque. Esso contiene:

1. Il **sottospazio banale** W, che contiene solo l'origine: $W = \{0\}$

2. Il **sottospazio totale** W che contiene tutto lo spazio vettoriale V: $W = V$

22 Spazi vettoriali notevoli

22.1 Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}$

Su un campo $\mathbb{K}$ è possibile definire uno spazio vettoriale V che contiene tutto $\mathbb{K}$.
Quindi si può dire che se $\mathbb{K}$ è un campo allora è anche uno *spazio vettoriale su se stesso.*

22.2 Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$

Così come in $\mathbb{R}$, anche per un generico campo $\mathbb{K}$ possiamo definire spazi vettoriali con più dimensioni, determinate da $n \in \mathbb{N}$.
Per gli spazi $\mathbb{K}^n$ valgono le stesse considerazioni fatte nelle sottosezioni 18 e 19.

22.3 Lo spazio delle successioni in $\mathbb{K}$

Vedere il punto 22.2.
Stiamo descrivendo uno spazio $\mathbb{K}^n$ dove n è infinito.
Pertanto, gli scalari in questo spazio vettoriale rappresentano ciascuno una successione.
Nonostante spaventi il fatto che siano vettori con un numero infinito di componenti, possiamo verificare che questo spazio è uno spazio vettoriale a tutti gli effetti, in particolare:

- Possiamo sommare tra loro due successioni, ottenendone una nuova che sarà sempre presente nello spazio vettoriale.

- Possiamo scegliere un numero arbitrario in $\mathbb{K}$ e usarlo per calcolare il prodotto per scalare di una qualunque successione. Otterremo sempre una nuova successione, sempre presente nello spazio delle successioni.

22.4 Lo spazio delle funzioni $[0, 1] \to \mathbb{K}$

Fissiamo un campo $\mathbb{K}$.
Consideriamo l'intervallo $[0, 1]$ nell'insieme $\mathbb{R}$, ovvero tutti i numeri in $\mathbb{R}$ tra 0 e 1, estremi inclusi.
Sul campo $\mathbb{K}$ possiamo definire uno spazio vettoriale che ha un numero di dimensioni pari al numero di elementi nell'intervallo $[0, 1]$.
Stiamo quindi considerando sempre uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con infinite dimensioni.
Successivamente possiamo considerare una qualunque funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{K}$.
f associa ad ogni numero dell'intervallo $[0, 1]$ un valore in $\mathbb{K}$.
In altre parole, per ogni dimensione dello spazio vettoriale, assegna uno scalare $\mathbb{K}$.
Lo spazio vettoriale è quindi composto da infiniti vettori. Ognuno di questi vettori rappresenta una particolare funzione f.
In parole povere, ci sono infinite funzioni del tipo $f : [0, 1] \to \mathbb{K}$.
Ogni vettore ha infiniti scalari (dimensioni infinite).

22.5 Lo spazio $\mathbb{K}[x]$ dei polinomi

Fissato un campo $\mathbb{K}$ indichiamo con $\mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi che hanno coefficienti in $\mathbb{K}$.
Ogni vettore in $\mathbb{K}[x]$ rappresenta quindi un polinomio.
Verificando le richieste della definizione, notiamo che $\mathbb{K}[x]$ è uno spazio vettoriale.
In particolare, si verifica banalmente che valgono la somma e il prodotto per scalare.

22.6 Il sottospazio di $\mathbb{K}[x]$

Per lo spazio $\mathbb{K}[x]$ vedi il punto 22.5
Facendo riferimento alle nozioni di sottospazio vettoriale (*al punto 21*), con la notazione:

$$\mathbb{K}_n[x]$$

Possiamo indicare il **sottospazio vettoriale** di $\mathbb{K}[x]$ composto da tutti i polinomi di grado n con coefficienti in $\mathbb{K}$.

23 Combinazioni lineari e sottospazio generato

23.1 Combinazioni lineari

Prendiamo uno spazio vettoriale V qualsiasi. Siano $v_1, \ldots, v_k$ dei vettori arbitrari di V.
Una combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_k$ è un qualsiasi vettore v che si ottiene come:

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono scalari arbitrari.
Una combinazione lineare prende uno scalare per ogni vettore coinvolto ed esegue il prodotto per scalare. Dopodiché applica la somma vettoriale sui risultati dei prodotti per scalare.
Ovviamente, tutti i vettori devono appartenere a V e tutti gli scalari devono appartenere al campo di V.

23.2 Sottospazio generato (Span)

Notiamo che la formula al punto 23.1 descrive in realtà un **insieme** di combinazioni lineari:
Variando il valore assunto dagli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ otteniamo nuovi vettori v.
L'insieme di tutti questi vettori è l'insieme descritto da quella formula.
In particolare: *ogni insieme di combinazioni lineari è un* ***sottospazio vettoriale*** *di V e viene detto* ***sottospazio generato*** *o più comunemente* ***Span***.
Il sottospazio generato viene indicato con:

$$\text{Span}(v_1, \ldots, v_k)$$

In particolare, lo $\text{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ non è altro che l'insieme delle composizioni lineari ottenibili con

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k$$

variando gli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

23.3 Dipendenza/Indipendenza lineare

Prendiamo una combinazione lineare qualsiasi:

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k$$

1. Se l'unico modo per ottenere il vettore nullo ($v = 0$) è quello di imporre che tutti gli scalari siano nulli ($\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$) allora i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono *linearmente* **indipendenti** tra loro.

   1.1 Se i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono indipendenti, allora un qualsiasi sottoinsieme di $v_1, \ldots, v_k$ è anch'esso formato da vettori indipendenti tra loro.

2. Se invece esiste un altro modo per ottenere il vettore nullo, oltre a quello appena descritto, allora i vettori sono *linearmente* **dipendenti** tra loro.

   2.1 I vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono **dipendenti** tra loro *se e solo se* **almeno uno** di loro è esprimibile come combinazione lineare degli altri.
   Questo perché esiste almeno un $\lambda_i \neq 0$ (i è l'indice dello scalare diverso da 0) tale che $v = 0$. Facciamo alcuni passaggi:
   $v = 0 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_i \cdot v_i + \cdots + \lambda_k \cdot v_k$
   $0 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_i \cdot v_i + \cdots + \lambda_k \cdot v_k$
   Sottraiamo da entrambi i lati $\lambda_i \cdot v_i$:
   $-\lambda_i \cdot v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k$
   Moltiplichiamo per -1 da entrambi i lati:
   $\lambda_i \cdot v_i = -\lambda_1 \cdot v_1 - \cdots - \lambda_k \cdot v_k$
   Siccome $\lambda_i \neq 0$ possiamo dividere entrambi i lati per λ_i:

   $$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \cdot v_1 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \cdot v_k$$

   2.1.1 **Casi particolari:**

   2.1.1.1 Un singolo vettore v_1 è *linearmente* **dipendente** *se e solo se* $v_1 = 0$

   2.1.1.2 Due vettori v_1, v_2 sono *linearmente* **dipendenti** tra loro *se e solo se* sono **multipli** ovvero, possono essere scritti come $v_1 = k \cdot v_2$ dove $k \in \mathbb{K}$. ($\mathbb{K}$ è il campo a cui appartiene lo spazio vettoriale dei vettori v_1, v_2)

ATTENZIONE! *Può nascere una confusione dovuta al fatto che un insieme di combinazioni lineari generi un sottospazio. Tuttavia, la dipendenza/indipendenza lineare è una proprietà di un insieme di vettori e non di un insieme di combinazioni lineari! In parole povere, non è una proprietà dei sottospazi, ma una proprietà di un insieme di vettori.*

24 Sottospazi in somma diretta

Sia V uno spazio vettoriale e siano V_1, V_2 sottospazi.
V_1 e V_2 sono in *somma diretta*:

$$V_1 \oplus V_2$$

se e solo se sono *disgiunti* tra loro:

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}$$

La somma diretta è un sottospazio vettoriale con elementi $v = v_1 + v_2$, dove $v \in V_1 \oplus V_2, v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$.

25 Basi

Un insieme di vettori $v_1, \ldots, v_k$ è una base per lo spazio vettoriale V se soddisfa le seguenti condizioni:

1. I vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono *linearmente* **indipendenti** tra loro.
   Vedi il punto 23.3

2. L'insieme delle combinazioni lineari con i vettori $v_1, \ldots, v_k$ generano tutto V, ovvero: $V = \text{Span}(v_1, \ldots, v_k)$.
   Vedi il punto 23.2

Per ogni spazio vettoriale V può esistere più di una base. Tuttavia, tutte le basi di V hanno lo stesso numero k di vettori in comune.
Per approfondire questa proprietà vai al punto 26

25.1 Base canonica in $\mathbb{K}^n$

Una base canonica è composta da un numero di vettori pari alle dimensioni dello spazio vettoriale. Ciascuno di questi vettori ha tutte le componenti nulle eccetto per la componente della dimensione che rappresenta, che avrà come valore 1.
Ad esempio, per lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ abbiamo come base canonica i vettori $e_1, \ldots, e_n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notare come e_2 rappresenti la 2° dimensione, e pertanto ha 1 nella seconda componente e 0 in tutte le altre.
Lo stesso per e_1 che rappresenta la 1° e e_n che rappresenta l'ultima (*l'ennesima*).
Si verifica banalmente che $e_1, \ldots, e_n$ sono indipendenti tra loro.
Inoltre, $e_1, \ldots, e_n$ rappresentano tutto lo spazio $\mathbb{K}^n$ poiché ogni vettore v in $\mathbb{K}^n$ è rappresentabile nella forma:

$$v = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \lambda_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avendo cura di assegnare il valore di ogni componente di v al rispettivo scalare λ_i.

25.2 Base canonica in $\mathbb{K}_n[x]$

Nello spazio dei polinomi di grado $\leq n$ con coefficienti in $\mathbb{K}$, l'insieme degli *elementi*:

$$\{1, x, x^2, \ldots x^n\}$$

formano una *base canonica* di $\mathbb{K}_n[x]$.
Nota: li chiamo elementi per facilitare la comprensione ma in realtà li possiamo considerare come vettori che hanno tutte le componenti nulle tranne la componente della dimensione che rappresentano, che vale 1. Ad esempio:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con questa precisazione, possiamo far valere tutto quello che abbiamo detto al punto 25.1

25.3 Coordinate

Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di V.
Ogni vettore $v \in V$ può essere scritto in modo unico come:

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k$$

I coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono le ***coordinate** di v rispetto alla base $\mathcal{B}$*.
Indichiamo tali coefficienti con un vettore colonna $[v]_{\mathcal{B}}$:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Per capire meglio, guarda il punto 25.1

26 Dimensione di uno spazio vettoriale

Per il concetto di base vedi il punto 25
Distinguiamo 2 casi:
Lo spazio vettoriale V:

1. *ha una base* composta da k vettori:
   In questo caso diciamo che V ha dimensione k: $\dim(V) = k$
2. **non** *ha una base:*
   In questo caso V ha dimensione ∞: $\dim(V) = \infty$

ATTENZIONE! Per lo spazio dei polinomi (ad esempio $\mathbb{K}_n[x]$) la notazione può trarre in inganno:
La n di $\mathbb{K}_n[x]$ rappresenta il grado massimo dei polinomi nello spazio $\mathbb{K}_n[x]$.
Quindi se abbiamo il numero k di elementi/vettori di una base per $\mathbb{K}_n[x]$ allora scriveremo n come $n = k - 1$.
Se invece abbiamo già n allora dobbiamo cercare una base con $k = n + 1$ elementi/vettori.
In particolare, è importante non confondere il grado n con la dimensione k dello spazio vettoriale.

26.0.1 Legame tra base e dimensioni

Se conosciamo la dimensione k di uno spazio vettoriale V e abbiamo un insieme $v_1, \dots, v_k$ di vettori, per verificare se $v_1, \dots, v_k$ è una base di V serve verificare **solo una** delle due proprietà al punto 25 (*l'altra segue automaticamente*).

Parte VI
Matrici

27 Lo spazio vettoriale delle matrici $M(m, n, \mathbb{K})$

Con i punti seguenti, guardiamo la somma e il prodotto per scalare con le matrici.
Fissiamo un campo $\mathbb{K}$.
Una *matrice* A con m righe e n colonne a coefficienti in $\mathbb{K}$ è una **tabella rettangolare** del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dove tutti gli elementi a sono elementi (*scalari*) di $\mathbb{K}$.
Brevemente, possiamo dire che A è una matrice $m \times n$.
La matrice A ha quindi m righe. Possiamo scrivere le *singole* righe di una matrice in questa notazione:

$$A_i = (a_{i1} \cdots a_{in})$$

Dove i rappresenta il numero della riga che stiamo indicando.
Anche le colonne hanno una loro notazione:

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Dove j rappresenta la colonna che stiamo rappresentando.
Notiamo che in questo contesto, scriviamo j come esponente di A e rappresentiamo la colonna della matrice come un **vettore colonna**.
Chiamiamo $m \times n$ la taglia della matrice. Per ogni "taglia" di matrice esiste uno spazio vettoriale che possiamo indicare come $M(m, n, \mathbb{K})$.
Se vuoi scoprire il perché guarda il punto 29.1

28 Diagonale principale di una matrice

La diagonale principale di una matrice A è formata da tutti gli elementi a_{ij} che hanno $i = j$.
Questa definizione si applica anche alle matrici rettangolari ed è particolarmente utile in quelle quadrate.

29 Somma e prodotto per scalare con le matrici

29.1 Somma tra matrici

Per la somma vettoriale, se due matrici sono della stessa **taglia**, ovvero hanno lo stesso numero m di righe e lo stesso numero n di colonne, allora la loro somma è **definita**:
Prendiamo due matrici A e B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

La loro somma è:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

La somma **non è definita** tra matrici di taglie diverse.
Quindi, per ogni *taglia* di matrice esiste uno spazio vettoriale.
In uno spazio vettoriale di matrici non troveremo mai matrici di taglie diverse tra loro.
Altrimenti non sarebbe uno spazio vettoriale perché la somma vettoriale non sarebbe definita.

29.2 Prodotto per scalare con le matrici

Scelto un qualunque scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, il prodotto per scalare di una matrice è sempre definito.
Prendiamo la nostra matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il suo prodotto per scalare con λ è così definito:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

I sottospazi delle matrici $n \times n$

30 Trasposta di una matrice

La trasposta di una matrice A si indica con ${}^{t}A$ e si ottiene scambiando righe e colonne.
Quindi ad esempio la riga 3 di A diventa la colonna 3 di ${}^{t}A$.
Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow {}^{t}A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

30.1 Proprietà della trasposizione

1. L'operazione di trasposizione è un operatore lineare nello spazio delle matrici:
   1.1 Rispetto alla somma: ${}^{t}(A + B) = {}^{t}A + {}^{t}B$
   1.2 Rispetto al prodotto per scalare: ${}^{t}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot ({}^{t}A)$

   Questo significa che è un operatore che rispetta le stesse proprietà di linearità della somma vettoriale e del prodotto per scalare.

2. In un qualunque spazio vettoriale $M(n)$ di matrici ***quadrate***:
   2.1 Se $A \in M(n)$ allora anche ${}^{t}A \in M(n)$.
   2.2 **Simmetrica/Antisimmetrica**:
      2.2.1 $A \in M(n)$ è **simmetrica** *se e solo se* ${}^{t}A = A$.

2.2.2 $A \in M(n)$ è **antisimmetrica** *se e solo se* ${}^{t}A = -A$.

3. **Trasposta del prodotto fra matrici**:
   Vale la seguente:
   $$ {}^{t}(A \cdot B) = {}^{t}B \cdot {}^{t}A $$
   In particolare, se abbiamo più prodotti concatenati tra loro, allora vale:
   $$ {}^{t}(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) = {}^{t}A_1 \cdot \dots \cdot {}^{t}A_k $$
   con la notazione al pedice intendiamo matrici diverse tra loro e non le righe di una matrice!

31 Rango di una matrice

Consideriamo una matrice A di taglia $m \times n$ (Con m righe e n colonne) a coefficienti in $\mathbb{K}$.

31.1 Rango per colonne

Il rango di A (anche detto rango *per colonne* di A) è la **dimensione** dello spazio generato dalle colonne:

$$ \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n) \subset \mathbb{K}^m $$

Qui $\mathbb{K}^m$ potrebbe far confondere ma in realtà è corretto.
Ogni colonna è un vettore che ha un numero di componenti pari al numero di righe.
Quindi ogni vettore colonna vive nello spazio $\mathbb{K}^m$ e ogni vettore riga vive nello spazio $\mathbb{K}^n$.
Il rango viene solitamente indicato con: $\mathrm{rk}(A)$
ATTENZIONE! Perché $\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$ descrive uno spazio vettoriale ma **non** la sua dimensione (*quello che ci interessa*).
In particolare, non è detto che i vettori $A^1, \dots, A^n$ siano una **base** di $\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$. Infatti:
Il rango di A è il *massimo numero* di colonne ***linearmente indipendenti*** di A.

31.2 Rango per righe

Il rango per righe di A è la **dimensione** dello spazio generato dalle righe:

$$ \mathrm{Span}(A_1, \dots, A_m) \subset \mathbb{K}^n $$

Per capire meglio, vedere il punto 31.1
Il rango per righe di A corrisponde al **rango per colonne** della trasposta ${}^{t}A$.

31.3 Proprietà del rango

1. **Per ogni matrice A il rango per righe è uguale al rango per colonne.**
2. *Segue dalla prima*: $\mathrm{rk}({}^{t}A) = \mathrm{rk}(A)$
3. **Le mosse di Gauss** (*sia sulle righe che sulle colonne*) **non alterano il rango della matrice.**
4. Il determinante di una matrice quadrata A è nullo se $\mathrm{rk}(A) \neq n$ dove n sono le colonne/righe di A
   Vedi il punto 44.3
5. Se $A \sim B$ allora $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$
   Vedi il punto 39.1

32 Prodotto tra matrici

Iniziamo elencando i fatti seguenti:

1. Il prodotto tra due matrici A e B è definito solo quando il numero di colonne di A coincide con il numero di righe di B.
   Consideriamo quindi due matrici A e B di taglia $m \times n$ e $n \times p$ rispettivamente.

2. **Il prodotto tra matrici non è commutativo**:
   Per via del punto 1, l'esistenza del prodotto $A \cdot B$ non garantisce l'esistenza del prodotto $B \cdot A$
   Inoltre, anche nel caso dove A e B sono matrici quadrate della stessa dimensione, in generale $A \cdot B \neq B \cdot A$

3. Il prodotto tra A e B produce una nuova matrice che chiamerò P di taglia $m \times p$.
   Ho scelto di chiamarla P per evitare confusione.

Per quanto detto nel punto 1, il numero di coefficienti in una qualunque riga di A è uguale al numero di coefficienti in una qualunque colonna di B.
Per popolare la nuova matrice P, consideriamo un singolo elemento $p_{i,j}$ alla volta.
Per determinare l'elemento p nella riga i, colonna j (denotato come p_{ij}) nella matrice P, procediamo in questo modo:

1. Prendiamo il primo elemento della *riga* i nella matrice A, che indichiamo come a_{i1}.
2. Prendiamo il primo elemento della *colonna* j nella matrice B, che indichiamo come b_{1j}.
3. Calcoliamo il prodotto di questi due elementi: $a_{i1} \cdot b_{1j}$
4. Reiteriamo i punti 1-3, fino a quando non esauriamo le coppie (ovvero, calcoliamo fino alla coppia $a_{in} \cdot b_{nj}$)
5. Sommiamo i prodotti. Il risultato della sommatoria è il valore di p_{ij}:

$$p_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{12} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Per quanto appena descritto, il prodotto tra matrici viene spesso chiamato **prodotto riga per colonna**.

32.1 Esempio di calcolo

Prendiamo le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il prodotto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+6 & 2+0 & 0+6 & 1+0 \\ 1+3 & -2+0 & 0+3 & -1+0 \\ 0+9 & 0+0 & 0+9 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ 9 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

32.2 Proprietà del prodotto tra matrici

Siano A, B e C matrici.

1. **Proprietà associativa**:
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
   Solo se $A \cdot (B \cdot C)$ oppure $(A \cdot B) \cdot C$ sono definiti. Questo significa che anche $B \cdot C$ oppure $A \cdot B$ devono essere definiti.
   Se un solo lato dell'uguaglianza è definito allora anche l'altro lato è definito.

2. **Proprietà distributiva**:

   2.1 *Vale la seguente:*
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
   Solo se sono definiti $B + C$ e il prodotto $A \cdot (B + C)$. Oppure solo se $A \cdot B$ e $A \cdot C$ sono definiti e la loro somma è definita.
   Se un solo lato dell'uguaglianza è definito allora anche l'altro lato è definito.

2.2 *Vale la seguente:*

$$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Solo se sono definiti $A+B$ e il prodotto $(A+B) \cdot C$. Oppure solo se $A \cdot C$ e $B \cdot C$ sono definiti e la loro somma è definita.
Se un solo lato dell'uguaglianza è definito allora anche l'altro lato è definito.

3. ***Compatibilità del prodotto tra matrici con il prodotto per scalare***:

$$\lambda(A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$$

Solo se il prodotto $A \cdot B$ è definito.

4. **Trasposta del prodotto tra matrici**:

$$^{\mathrm{t}}(A \cdot B) =^{\mathrm{t}} B \cdot^{\mathrm{t}} A$$

Fare riferimento al punto 30.1

5. **Traccia e prodotto tra matrici**

$$\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$$

Vedi il punto 34.1

Parte VII
Matrici quadrate

Generalmente, lo spazio $M(m, n, \mathbb{K})$ ha $m \neq n$, infatti la definizione generale di matrice parla di una *tabella rettangolare.*
Tuttavia, esistono casi *particolari* dove $m = n$.
In questo caso parliamo di matrici $n \times n$, contenute nello spazio $M(n, n, \mathbb{K})$. Anziché scrivere $M(n, n, \mathbb{K})$ scriviamo $M(n, \mathbb{K})$.
Le matrici $n \times n$ vengono dette matrici quadrate.

33 Sottospazi delle matrici $n \times n$

Per la definizione di diagonale principale, vai al punto 28
Prendendo uno spazio vettoriale $M(n, \mathbb{K})$ di matrici quadrate, possiamo considerare i sottospazi di M:

33.1 Matrici diagonali

Hanno tutti i numeri al di fuori della diagonale principale uguali a 0.
In simboli: $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$
Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Notiamo che anche nella diagonale principale possono esserci degli 0. L'importante è che non esistano valori $\neq 0$ al di fuori della diagonale.
Indichiamo con $D(n, \mathbb{K})$ il sottoinsieme di $M(n, \mathbb{K})$. $D(n, \mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$.

33.2 Matrici triangolari

Distinguiamo due casi. Infatti esistono le matrici triangolari...

1. ...**superiori** che hanno solo zeri **sotto** la diagonale.
   In simboli: $a_{ij} = 0, \forall i > j$
   Ad esempio:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
   Anche qui, non è necessario che la parte superiore della matrice abbia solo valori non nulli. L'importante è che sotto la diagonale non ci siano valori.
   Indichiamo con $T^s(n, \mathbb{K})$ il sottoinsieme di $M(n, \mathbb{K})$. $T^s(n, \mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$.

2. ...**inferiori** che hanno solo zeri **sopra** la diagonale.
   In simboli: $a_{ij} = 0, \forall i < j$
   Ad esempio:
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
   Anche qui, non è necessario che la parte inferiore della matrice abbia solo valori non nulli. L'importante è che sopra la diagonale non ci siano valori.
   Indichiamo con $T^i(n, \mathbb{K})$ il sottoinsieme di $M(n, \mathbb{K})$. $T^i(n, \mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$.
   In alcuni casi si parla semplicemente di matrici triangolari, quando si sa appunto che sono triangolari ma non si sa (oppure non importa) se sono superiori e/o inferiori.

33.3 Matrici simmetriche

Hanno "*gli stessi valori in entrambi i lati della diagonale*".
In simboli: $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$
Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -6 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 7 & -4 & -5 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Notiamo che sulla diagonale non viene imposto alcun vincolo. L'importante è che i valori da entrambi i lati siano "*specchiati*".
Indichiamo con $S(n, \mathbb{K})$ il sottoinsieme di $M(n, \mathbb{K})$. $S(n, \mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$.

33.4 Matrici antisimmetriche

Hanno "*gli stessi valori in entrambi i lati della diagonale*" **ma col segno invertito**.
In simboli: $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$
Prendendo ispirazione dall'esempio delle matrici simmetriche:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -7 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 7 & -4 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Importante! Qui la diagonale deve essere sempre nulla, perché va rispettato $a_{ij} = -a_{ji}$. A meno che non si lavori in campi numerici particolari, la definizione ammette soltanto lo 0 come numero sulla diagonale.
Indichiamo con $A(n, \mathbb{K})$ il sottoinsieme di $M(n, \mathbb{K})$. $A(n, \mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$.
Attenzione! Ci sono matrici che possono soddisfare più definizioni contemporaneamente. L'esempio più importante è al punto 33.5

33.5 Caso particolare: matrice quadrata nulla

Una matrice quadrata di qualunque taglia che ha come elementi soltanto 0 rispetta tutte e 5 le condizioni.
La matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è **diagonale**, **triangolare superiore**, **triangolare inferiore**, **simmetrica**, **antisimmetrica**.

34 Traccia di una matrice quadrata

La traccia di una matrice quadrata è definita come la **somma** di tutti gli elementi sulla *diagonale principale* di una matrice *quadrata*:

$$\mathrm{tr}(A) = A_{11} + \cdots + A_{nn}$$

34.1 Traccia e prodotto tra matrici

Siano A e B due matrici quadrate. Vale la seguente relazione:

$$\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$$

35 Matrice identità

La matrice identità è una **matrice quadrata** (quindi di taglia $n \times n$) che ha:

- 1 come unico valore per tutti gli elementi della diagonale principale
- 0 per tutti gli altri coefficienti fuori dalla diagonale.

Ovvero:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

36 Matrice dei cofattori

Consideriamo una matrice quadrata A.
Ogni elemento a_{ij} di A ha un suo cofattore. Tutti i cofattori di A formano la matrice dei cofattori di A, denotata con $\mathrm{cof}(A)$.
In particolare, ogni cofattore di a_{ij} si trova con:

$$(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

Per un esempio vedi il punto 45.1

36.1 Proprietà della matrice di cofattori

Vale la seguente:

$$A \cdot {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{cof}(A)) = \det(A) \cdot I_n = {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{cof}(A)) \cdot A$$

Ricordiamo a scanso di equivoci che in generale il prodotto tra matrici non è commutativo! Per questo è peculiare il fatto che in questo caso $A \cdot {}^{t}(cof(A)) = {}^{t}(cof(A)) \cdot A$

37 Inversa di una matrice quadrata

Sia A una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$. A è invertibile *se e solo se* $\det(A) \neq 0$.
Vedi anche il punto 44.3
Se è invertibile, allora la sua inversa è definita come:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{cof}(A))$$

38 Matrici diagonali

Come abbiamo visto al punto 29.2 una matrice diagonale D è una matrice:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

In altre parole, ammette numeri $\neq 0$ solo nella diagonale principale.

38.1 Proprietà (*comodità*) delle matrici diagonali

Per le matrici diagonali valgono le seguenti:

1. Moltiplicazione *riga per colonna* con un vettore:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x_1 \\ \lambda_2 \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \cdot x_n \end{pmatrix}$$

2. Moltiplicazione *riga per colonna* (prodotto) tra due matrici, entrambi diagonali:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdot \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \cdot \mu_n \end{pmatrix}$$

3. **Potenze** notevoli di una matrice diagonale:
   Sia A una matrice diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   Elevare A alla k (A^k) (da non confondere con la notazione di colonna) significa calcolare:

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

39 Matrici simili e partizionamento di $M(n)$

Sia $M(n)$ l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$.
Due matrici $A, B \in M(n)$ sono dette *simili* (o *coniugate*) se esiste una matrice invertibile $M \in M(n)$ tale che:

$$A = M^{-1} \cdot B \cdot M$$

Due matrici simili si indicano con $A \sim B$.

39.1 Proprietà di matrici simili

Se $A \sim B$, allora valgono le seguenti:

1. $\text{rk}(A) = \text{rk}(B)$
2. $\det(A) = \det(B)$
3. A è invertibile *se e solo se* B è invertibile

4. Matrici diagonali e diagonalizzabili:

    4.1 Se A è diagonale allora B è diagonalizzabile.

    4.2 Se A è diagonalizzabile allora B è diagonalizzabile.
    Se B è diagonalizzabile allora A è diagonalizzabile.

    Fare riferimento al punto 78.

5. $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$
   Due matrici simili condividono lo stesso polinomio caratteristico.
   Vedi il punto 79

39.2 La similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza

La similitudine $\sim$ tra matrici è una relazione di equivalenza.
Evito di spiegare cosa sia una relazione di equivalenza, l'importante è capire che questo significa che valgono le seguenti:

1. **Proprietà riflessiva**:
   Ogni matrice è simile a se stessa. Infatti se A è di dimensioni $n \times n$ e scegliamo $M = I_n$, vale la seguente:
   $$A = I_n^{-1} \cdot A \cdot I_n = A$$
2. **Proprietà simmetrica**:
   Se $A \sim B$, allora $B \sim A$.
3. **Proprietà transitiva**:
   Se $A \sim B$ e $B \sim C$, allora $A \sim C$.

39.3 Partizionamento di $M(n)$

L'insieme $M(n)$ è dunque partizionato in *sottoinsiemi disgiunti* formati da *matrici simili tra loro.*

40 Matrici simmetriche congruenti

Due matrici *simmetriche* (vedi il punto 29.2) S e S', entrambe di taglia $n \times n$, sono **congruenti** se esiste una matrice *invertibile* M tale che:
$$S =^{\mathrm{t}} M \cdot S' \cdot M$$
Attenzione a non confonderla con la similitudine.
La *congruenza* tra matrici *simmetriche* è una **relazione di equivalenza**.
Per due matrici S e S' **congruenti** valgono le seguenti:

1. $\det(S)$ e $\det(S')$ hanno lo stesso segno.
   Inoltre, se $\det(S) = 0$ (*oppure* $\det(S') = 0$) allora:
   $$\det(S) = \det(S') = 0$$
2. Una qualunque matrice simmetrica S di taglia $n \times n$ è congruente a se stessa:
   $$S =^{\mathrm{t}} I_n \cdot S \cdot I_n$$
   dove I_n è la matrice identità.
3. Se S è congruente a S', allora S' è congruente a S.
4. Se S è congruente a B e B è congruente a S', allora S è congruente a S'.

Parte VIII
Determinante di una matrice quadrata

41 Determinante di matrici con $n = 1, 2, 3$

41.1 Determinante di una matrice con $n = 1$

Se $n = 1$ allora la matrice A è: $A = (a_{11})$ e ha come determinante $\det(A) = a_{11}$.

41.2 Determinante di una matrice con $n = 2$

Se $n = 2$ allora la matrice A è:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e ha come determinante $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

41.3 Determinante di una matrice con $n = 3$ (Regola di Sarrus)

Se $n = 3$ allora la matrice A è:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ricopiamo la matrice sulla sua destra e tracciamo le *diagonali*:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Calcoliamo i prodotti tra gli elementi di ciascuna *diagonale* e sommiamoli tra loro:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

Ricopiamo la matrice sulla sua destra e tracciamo le *antidiagonali*:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Calcoliamo i prodotti tra gli elementi di ciascuna *antidiagonale* e sommiamoli tra loro:

$$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

Sottraiamo alla *somma dei prodotti delle diagonali, la somma dei prodotti delle antidiagonali*:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$$

Il determinante det(A) è quindi:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

NOTA: *È possibile ricopiare la matrice una sola volta e tracciare le diagonali e le antidiagonali direttamente. È anche possibile utilizzare direttamente le formule senza rappresentarle graficamente.*
Esiste una versione più rapida della regola che permette di non ricopiare l'intera matrice. In generale, sta a voi scegliere il metodo più semplice, purché funzioni e sia semplice da ricordare!

42 Determinante di matrici particolari

42.1 Determinante di una matrice triangolare

In questo caso, n può avere dimensioni qualunque. L'importante è che A sia ***triangolare superiore/inferiore****.*
Prendiamo 2 matrici A e B. A è *triangolare superiore* e B è *triangolare inferiore*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Per queste matrici il determinante si ottiene calcolando il **prodotto** degli elementi della *diagonale principale*:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{nn}, \det(B) = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{nn}$$

ATTENZIONE a non confondersi con il concetto di *traccia* che *somma* gli elementi anziché **moltiplicarli** tra loro.

Quanto detto vale anche per matrici che sono **sia triangolari superiori che triangolari inferiori**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{nn}$$

42.2 Determinante della matrice identità

Per quanto detto nei punti 35 e 42.1 il determinante di una matrice identità qualunque è:

$$\det(I_n) = 1$$

42.3 Determinante della trasposta

Il determinante di una matrice trasposta è uguale al determinante della matrice originale:

$$\det({}^{t}A) = \det(A)$$

42.4 Determinante di matrici con una riga/colonna nulla

Siano A e B matrici quadrate con taglia $n \times n$ qualunque. A e B hanno rispettivamente almeno una riga e una colonna tutta nulla:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Per A e B i determinanti sono:

$$\det(A) = \det(B) = 0$$

43 Proprietà del determinante (mosse di Gauss)

43.1 Determinante di una matrice ottenuta scambiando 2 righe/colonne

Sia A una qualunque matrice di taglia $n \times n$. Se A' è ottenuta scambiando 2 righe o 2 colonne di A,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

oppure:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

allora:

$$\det(A') = -\det(A)$$

43.2 Moltiplicazione di una riga/colonna per uno scalare

Sia A' una matrice ottenuta **moltiplicando** tutti gli elementi *di una riga o colonna* di A per un numero c:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & \cdots & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Oppure:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c \cdot a_{nn} \end{pmatrix}$$

Allora vale la seguente:

$$\det(A') = c \cdot \det(A)$$

43.3 Aggiunta del multiplo di una riga/colonna ad un'altra riga

Scegliamo uno scalare arbitrario $\lambda = 3$. Consideriamo la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Possiamo scegliere una riga o una colonna a caso. Scegliamo la riga 2 e moltiplichiamola per $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot a_{21} & 3 \cdot a_{22} & \cdots & 3 \cdot a_{2n} \end{pmatrix}$$

Ora creiamo una nuova matrice A' dove sommiamo la riga 2 moltiplicata per 3 ad un'altra riga, ad esempio l'ultima riga:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + 3 \cdot a_{21} & a_{n2} + 3 \cdot a_{22} & \cdots & a_{nn} + 3 \cdot a_{2n} \end{pmatrix}$$

Vale la seguente:

$$\det(A') = \det(A)$$

Nota che nella matrice A' la riga R_2 è identica alla riga R_2 in A. Solo la riga R_n viene modificata.

44 Altre proprietà del determinante

44.1 Determinante e moltiplicazione per scalare

Sia A una matrice quadrata di taglia $n \times n$ e sia $\lambda \cdot A$ la stessa matrice moltiplicata per uno scalare.
Allora:

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$$

44.2 Determinante della matrice $-A$

Sia A una matrice quadrata di taglia $n \times n$.
Per calcolare $\det(-A)$ ricordiamoci che scrivere $-A$ equivale a scrivere $-1 \cdot A$.
Pertanto si applica quanto detto al punto 44.1, ovvero:

$$\det(-A) = (-1)^n \cdot \det(A)$$

44.3 Determinante con colonne/righe non tutte linearmente indipendenti

Se A è una matrice composta da una riga o una colonna linearmente **dipendente** dalle altre, allora:

$$\det(A) = 0$$

44.4 Determinante del prodotto tra matrici (Teorema di Binet)

Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine (stessa taglia $n \times n$). Allora:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

44.5 Determinante della matrice inversa

Sia A una matrice quadrata invertibile (vedi il punto 37). Allora:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

44.6 Determinante di matrici simili

Se $A \sim B$, allora

$$\det(A) = \det(B)$$

Vedi il punto 39.1

45 ULTIMA SPIAGGIA: Sviluppo di Laplace

Se nessuno dei punti VIII.x (*nemmeno combinati insieme*) riesce a trovare il determinante allora dobbiamo usare *purtroppo* questo metodo.
Nota: anche se una delle proprietà precedenti era applicabile, questo metodo porta comunque alla soluzione corretta.
Consideriamo una matrice A:

1. Scegliamo una riga i o una colonna j che contiene più zeri possibile
2. Per quella riga o per quella colonna, consideriamo tutti gli elementi *non nulli*.
3. Per ciascun elemento a_{ij} *non nullo* calcoliamo: $a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$
4. Una volta che abbiamo eseguito per tutti gli elementi il punto 3, sommiamo tutti i risultati del punto 3. Il determinante di A è dato dalla somma di tutti i risultati del punto 3.

Al punto 3 compare il **complemento/cofattore algebrico**. Per saperne di più, vedi il punto 36.

45.1 Esempio

Facciamo un esempio con la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scegliamo la seconda colonna perché contiene più zeri.
Consideriamo l'elemento 1_{12}. Calcoliamo quindi:

$$1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det(A_{12}) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che ottenere la matrice A_{12} significa conservare i valori in verde e scartare quelli in rosso (*e magenta*):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A_{12} usando la regola di Sarrus. Tracciamo le diagonali:

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Tracciamo le antidiagonali:

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Calcoliamo:

$$-1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot -1 \cdot -3 =$$

$$= 1 + 3 + 0 - 0 - 2 - 6 = -4$$

Abbiamo quindi:

$$-1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-4) = 4$$

Reiteriamo il procedimento. Consideriamo l'elemento 1_{42}. Calcoliamo quindi:

$$1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \det(A_{42}) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per A_{42} utilizziamo nuovamente Sarrus. Tracciamo le diagonali:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{matrix}$$

Tracciamo le antidiagonali:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{matrix}$$

Calcoliamo:

$$2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \cdot 2 =$$

$$-2 + 12 + 0 + 4 - 3 - 0 = 11$$

Abbiamo quindi:

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 11 = 11$$

Calcoliamo quindi il determinante di A:

$$\det(A) = 4 + 11 = 15$$

Parte IX
Sistemi lineari

Un sistema lineare è un insieme di i equazioni lineari in j variabili:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1j} \cdot x_j = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1} \cdot x_1 + \cdots + a_{ij} \cdot x_j = b_i \end{cases}$$

I numeri a_{ij} sono i **coefficienti** e i b_i sono i **termini noti** del sistema.
Coefficienti, termini noti e variabili sono tutti definiti in un campo $\mathbb{K}$.
Possiamo raggruppare i coefficienti in una matrice A e i termini noti in un vettore colonna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \end{pmatrix}$$

A viene detta *matrice dei coefficienti* e b viene detto *vettore dei termini noti.* Questi possono essere raggruppati in un'unica matrice C di taglia $i \times (j+1)$:

$$C = (A|b)$$

C viene detta *matrice completa.*

46 Mosse di Gauss

Vogliamo trovare l'insieme S delle soluzioni del sistema.
Le seguenti *mosse* non alterano l'insieme delle soluzioni ma manipolano C, agevolando la risoluzione del sistema lineare.
R_i è la i-esima riga di C.

I. Scambiare due righe.
Denotiamo l'operazione con $R_i \longleftrightarrow R_n$ dove n è l'indice di un'altra riga nella matrice C.

II. Moltiplicare una riga per uno scalare $\lambda \neq 0$.
Denotiamo l'operazione con $R_i \longrightarrow \lambda \cdot R_i$

III. Aggiungere ad una riga un'altra riga moltiplicata per uno scalare λ qualsiasi.
Denotiamo l'operazione con $R_i \longrightarrow R_i + \lambda \cdot R_n$ dove n è l'indice di un'altra riga nella matrice C.

ATTENZIONE! Qui stiamo risolvendo sistemi lineari quindi le mosse di Gauss **non** valgono per le colonne (a differenza di quanto detto nei punti 43.x)

47 Matrici a scalini

Chiamiamo ***pivot*** il primo elemento *non* nullo di una riga.
Una matrice a scalini ha ogni *pivot* strettamente più a destra di quello precedente.
Ad esempio, le matrici A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono entrambe a scalini. Invece le matrici C e D:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 7 \\ 10 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

non sono a scalini.
Per una matrice ridotta con Gauss-Jordan, puoi passare direttamente al punto 49

48 Algoritmo di Gauss

L'algoritmo di Gauss permette di trasformare qualunque matrice in una matrice a scalini.
Sia C una matrice da ridurre a scalini

1. Se necessario, eseguiamo delle mosse di Gauss di tipo I per fare in modo che le righe con il pivot più a sinistra stiano in alto e quelle col pivot più a destra stiano più in basso.

2. Per ogni riga R_i con $i \geq 2$ e con $c_{i1} \neq 0$ sostituiamo R_i con la riga:

$$R_i - \left(\frac{c_{i1}}{c_{11}} \cdot R_1\right)$$

   In questo modo, la nuova riga R_i avrà $C_{i1} = 0$.
   Nota: Non è necessario riordinare la matrice. Ordinare la matrice è obbligatorio solo quando l'algoritmo prevede di tornare al punto 1.

3. A questo punto, se la matrice non è ancora ridotta a scalini, lavoriamo sulla sottomatrice:
   Scriviamo una nuova matrice omettendo la prima colonna e la prima riga di C. Dopodiché utilizziamo di nuovo Gauss su quella sottomatrice tornando al punto 1.

Una volta elaborate tutte le sottomatrici, sostituiamo tutti i valori ottenuti nella matrice originale. La matrice è ora ridotta a scalini.

49 Algoritmo di Gauss-Jordan

L'algoritmo di Gauss-Jordan è composto in 3 fasi e applica anch'esso delle trasformazioni che alterano la matrice C senza alterare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare. Tali trasformazioni agevolano ulteriormente la definizione delle soluzioni di un sistema. Le 3 fasi sono le seguenti:

1. Ridurre la matrice C a scalini con l'algoritmo di Gauss
2. Utilizzare le mosse di Gauss di tipo III per far sì che **tutti i numeri** sopra un pivot siano nulli.
3. Utilizzare le mosse di Gauss di tipo II per ottenere tutti i pivot uguali a 1.

49.1 Esempio di applicazione di Gauss-Jordan

Applichiamo Gauss-Jordan alla seguente matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & -4 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 1 & 0 & \frac{5}{4} & -2 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

49.1.1 Primo punto: applichiamo l'algoritmo di Gauss

Applichiamo l'algoritmo di Gauss, iniziando a riordinare la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \\ 1 & 0 & \frac{5}{4} & -2 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & \frac{3}{2} & -4 & 1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Applichiamo per le righe R_2 e R_3 il passo 2 dell'algoritmo di Gauss:

$$R_2 - \left(\frac{c_{21}}{c_{11}} \cdot R_1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} & -2 & 3 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_3 - \left(\frac{c_{31}}{c_{11}} \cdot R_1\right) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix} - \left(\frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Riscriviamo la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -4 & 1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice non è ancora ridotta a scalini. Lavoriamo quindi sulla sottomatrice C'

$$C' = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -4 & 1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Notiamo che non serve riordinarla. Applichiamo quindi il punto 2 dell'algoritmo di Gauss alle righe R_2 e R_3:

$$R_2 - \left(\frac{c'_{21}}{c'_{11}} \cdot R_1\right) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{29}{36} & -\frac{11}{18} & -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

$$R_3 - \left(\frac{c'_{31}}{c'_{11}} \cdot R_1\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -4 & 1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} - \left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 & -\frac{17}{6} \end{pmatrix}$$

Riscriviamo la sottomatrice:

$$C' = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{29}{36} & -\frac{11}{18} & -\frac{11}{9} \\ 0 & -5 & 3 & -\frac{17}{6} \end{pmatrix}$$

La matrice non è ancora ridotta a scalini. Lavoriamo quindi sulla sottomatrice C'':

$$C'' = \begin{pmatrix} \frac{29}{36} & -\frac{11}{18} & -\frac{11}{9} \\ -5 & 3 & -\frac{17}{6} \end{pmatrix}$$

La matrice è già ordinata. Applichiamo il punto 2 dell'algoritmo di Gauss alla riga R_2:

$$R_2 - \left(\frac{c''_{21}}{c''_{11}} \cdot R_1\right) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -\frac{17}{6} \end{pmatrix} - \left(\frac{-5}{\frac{29}{36}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{29}{36} & -\frac{11}{18} & -\frac{11}{9} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{23}{29} & -\frac{1.813}{174} \end{pmatrix}$$

Riscriviamo la matrice:

$$C'' = \begin{pmatrix} \frac{29}{36} & -\frac{11}{18} & -\frac{11}{9} \\ 0 & -\frac{23}{29} & -\frac{1.813}{174} \end{pmatrix}$$

La matrice è ora ridotta a scalini, sostituiamo tutto nella matrice originale:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{29}{36} & -\frac{11}{18} & -\frac{11}{9} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{29} & -\frac{1.813}{174} \end{pmatrix}$$

49.1.2 Annullamento dei valori sopra i pivot

Applichiamo ora il secondo passo dell'algoritmo di Gauss-Jordan: Facciamo in modo che sopra i pivot tutti i valori siano nulli.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{-3} & \boxed{\frac{1}{2}} & 0 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & \boxed{1} & \boxed{-2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{29}{36} & \boxed{-\frac{11}{18}} & -\frac{11}{9} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{29} & -\frac{1.813}{174} \end{pmatrix}$$

Usiamo la mossa di Gauss di tipo III sulla prima riga:

$$R_1 \longrightarrow R_1 - \left(\frac{\boxed{-3}}{\frac{3}{2}} \cdot R_2 \right)$$

$$R_1 - \left(\frac{\boxed{-3}}{\frac{3}{2}} \cdot R_2 \right) = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{-3} & \frac{1}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix} - \left(\frac{\boxed{-3}}{\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{0} & \frac{5}{2} & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Applichiamo il medesimo procedimento sulle righe R_2 e R_3:

$$R_2 \longrightarrow R_2 - \left(\frac{\boxed{1}}{\frac{29}{36}} \cdot R_3 \right)$$

$$R_2 - \left(\frac{\boxed{1}}{\frac{29}{36}} \cdot R_3 \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \boxed{1} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{\boxed{1}}{\frac{29}{36}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{29}{36} & -\frac{11}{18} & -\frac{11}{9} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \boxed{0} & -\frac{36}{29} & \frac{117}{58} \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 - \left(\frac{\boxed{-\frac{11}{18}}}{-\frac{23}{29}} \cdot R_4 \right)$$

$$R_3 - \left(\frac{\boxed{-\frac{11}{18}}}{-\frac{23}{29}} \cdot R_4 \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{29}{36} & \boxed{-\frac{11}{18}} & -\frac{11}{9} \end{pmatrix} - \left(\frac{\boxed{-\frac{11}{18}}}{-\frac{23}{29}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{29} & -\frac{1.813}{174} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{29}{36} & \boxed{0} & \frac{16.907}{2.484} \end{pmatrix}$$

Riscriviamo la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \boxed{\frac{5}{2}} & \boxed{-4} & 6 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \boxed{-\frac{36}{29}} & \frac{117}{58} \\ 0 & 0 & \frac{29}{36} & 0 & \frac{16.907}{2.484} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{29} & -\frac{1.813}{174} \end{pmatrix}$$

Azzeriamo $\boxed{\frac{5}{2}}$ su R_1:

$$R_1 \longrightarrow R_1 - \left(\frac{\boxed{\frac{5}{2}}}{\frac{29}{36}} \cdot R_3 \right)$$

$$R_1 - \left(\frac{\boxed{\frac{5}{2}}}{\frac{29}{36}} \cdot R_3 \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \boxed{\frac{5}{2}} & -4 & 6 \end{pmatrix} - \left(\frac{\boxed{\frac{5}{2}}}{\frac{29}{36}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{29}{36} & 0 & \frac{16.907}{2.484} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \boxed{0} & -4 & -\frac{2.087}{138} \end{pmatrix}$$

Azzeriamo $\boxed{-\frac{36}{29}}$ su R_2:

$$R_2 \longrightarrow R_2 - \left(\frac{\boxed{-\frac{36}{29}}}{-\frac{23}{29}} \cdot R_4 \right)$$

$$R_2 - \left(\frac{\boxed{-\frac{36}{29}}}{-\frac{23}{29}} \cdot R_4 \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & \boxed{-\frac{36}{29}} & \frac{117}{58} \end{pmatrix} - \left(\frac{\boxed{-\frac{36}{29}}}{-\frac{23}{29}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{29} & -\frac{1.813}{174} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & \boxed{0} & \frac{843}{46} \end{pmatrix}$$

Riscriviamo la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \boxed{-4} & -\frac{2.087}{138} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{843}{46} \\ 0 & 0 & \frac{29}{36} & 0 & \frac{16.907}{2.484} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{29} & -\frac{1.813}{174} \end{pmatrix}$$

Azzeriamo $\boxed{-4}$ in R_1:

$$R_1 \longrightarrow R_1 - \left(\frac{\boxed{-4}}{-\frac{23}{29}} \cdot R_4 \right)$$

$$R_1 - \left(\frac{\boxed{-4}}{-\frac{23}{29}} \cdot R_4 \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \boxed{-4} & -\frac{2.087}{138} \end{pmatrix} - \left(\frac{\boxed{-4}}{-\frac{23}{29}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{29} & -\frac{1.813}{174} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \boxed{0} & \frac{5.165}{138} \end{pmatrix}$$

Riscriviamo la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{5.165}{138} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{843}{46} \\ 0 & 0 & \frac{29}{36} & 0 & \frac{16.907}{2.484} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{29} & -\frac{1.813}{174} \end{pmatrix}$$

49.1.3 Trasformiamo in 1 tutti i pivot

Trasformiamo in 1 tutti i pivot:

$$R_1 \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot R_1$$

$$\frac{1}{2} \cdot R_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{5.165}{138} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5.165}{276} \end{pmatrix}$$

$$R_2 \longrightarrow \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot R_2$$

$$\frac{2}{3} \cdot R_2 = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{843}{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{281}{23} \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longrightarrow \frac{1}{\frac{29}{36}} \cdot R_3$$

$$\frac{36}{29} \cdot R_3 = \frac{36}{29} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{29}{36} & 0 & \frac{16.907}{2.484} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{583}{69} \end{pmatrix}$$

$$R_4 \longrightarrow \frac{1}{-\frac{23}{29}} \cdot R_4$$

$$-\frac{29}{23} \cdot R_4 = -\frac{29}{23} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{29} & -\frac{1.813}{174} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1.813}{138} \end{pmatrix}$$

Riscriviamo la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5.165}{276} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{281}{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{583}{69} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1.813}{138} \end{pmatrix}$$

Abbiamo finito. *Ora posso andare a piangere nell'angolino.*

50 Risoluzione di un sistema lineare

Scriviamo la matrice completa C e applichiamo Gauss-Jordan.
Distinguiamo 3 casi:

1. Sull'ultima colonna (*colonna dei termini noti*) **compare un pivot**: il sistema **non** ha soluzione: $S = \emptyset$.

2. La matrice ha un pivot per ogni colonna:
   Ogni pivot rappresenta una variabile x_j. Il valore di x_j è dato dal termine noto presente sulla riga del pivot che rappresenta x_j.

3. La matrice ***non*** ha un pivot per ogni colonna:
   Ad esempio, possiamo avere una matrice di questo tipo:

   $$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{24} & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$$

   Procediamo in questo modo:
   Assegniamo ad ogni colonna che *non* contiene un pivot un parametro t.
   Ricordandoci che ogni colonna rappresenta una variabile x_j nel sistema, questo significa assegnare un parametro ad ognuna di queste variabili.
   Un parametro rappresenta l'assenza di vincoli: i parametri possono infatti assumere un qualunque valore in $\mathbb{K}$.
   Quindi nell'esempio abbiamo $x_1 = t_1, x_3 = t_2, x_5 = t_3, x_6 = t_4$. Abbiamo quindi:

   $$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{24} & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_2 + a_{12} \cdot t_2 + a_{15} \cdot t_4 = b_1 \\ x_4 + a_{24} \cdot t_3 = b_2 \\ x_7 = b_3 \end{cases}$$

   Riscriviamo il sistema in funzione delle variabili:

   $$\begin{cases} x_2 + a_{12} \cdot t_2 + a_{15} \cdot t_4 = b_1 \\ x_4 + a_{24} \cdot t_3 = b_2 \\ x_7 = b_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = b_1 - a_{12} \cdot t_2 - a_{15} \cdot t_4 \\ x_4 = b_2 - a_{24} \cdot t_3 \\ x_7 = b_3 \end{cases}$$

   Scriviamo la soluzione in questo modo:

   $$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = b_1 - a_{12} \cdot t_2 - a_{15} \cdot t_4 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = b_2 - a_{24} \cdot t_3 \\ x_5 = t_3 \\ x_6 = t_4 \\ x_7 = b_3 \end{cases}$$

Abbiamo finito. *Notiamo infine che i coefficienti a_{ij} dei parametri vanno conservati. Inoltre, nessuna variabile (eccetto x_1) dipende dal parametro t_1.*

51 Sistema omogeneo associato

Ogni sistema lineare (*vedi il punto* IX) ha un sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1j} \cdot x_j = 0 \\ \vdots \\ a_{i1} \cdot x_1 + \cdots + a_{ij} \cdot x_j = 0 \end{cases}$$

Nel sistema omogeneo associato, tutti i valori noti sono nulli: $b_1 = b_2 = \cdots = b_i = 0$.
Indichiamo con $(A|0)$ la matrice completa del sistema omogeneo associato e con S_0 l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

51.1 Il sottospazio vettoriale S_0

L'insieme delle soluzioni $S_0 \subset \mathbb{K}^j$ formano un **sottospazio vettoriale** di $\mathbb{K}^j$.
Le soluzioni S del sistema lineare **non** sono invece un sottospazio vettoriale, *a meno che* $(A|b) = (A|0)$ e quindi $S = S_0$.

51.1.1 Ottenere S da S_0

Se il sistema ha soluzione ($S \neq \emptyset$), allora possiamo costruire l'insieme S delle soluzioni conoscendo soltanto una soluzione $x \in S$:
Fissiamo una soluzione $x \in S$ qualsiasi. Consideriamo la somma $x + y_n$ dove y_n è una soluzione in S_0 ($y_n \in S_0$).
L'insieme delle soluzioni $x + y_0, x + y_1, \dots, x + y_n$ è proprio l'insieme S.
Notiamo che la soluzione x fissata non cambia, cambia solo y_n.
x viene anche detta **soluzione particolare**.
S è dunque un *sottospazio affine* (vedi il punto 52)

52 Sottospazio affine

Sia V uno spazio vettoriale. Un sottospazio affine di V è un qualsiasi sottoinsieme S del tipo

$$S = \{x + v | v \in W\} =: x + W$$

dove x è un punto fissato di V e W è un sottospazio vettoriale di V ($W \subset V$).
Attenzione a non confondersi! Perché un *sottospazio affine (generalmente)* ***non*** *è un sottospazio vettoriale. Questo perché non è detto che un sottospazio affine contenga l'origine.*

53 Scrivere un sistema come combinazione lineare

Un sistema lineare (*vedi il punto* IX) può essere scritto come:

$$x_1 A^1 + \cdots + x_j A^j = b$$

dove $A^1, \dots, A^j$ sono le *colonne* di A (*e non di* $(A|b)$) e b è il *vettore colonna dei termini noti.*
Ad esempio, possiamo scrivere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 17x_3 - 6x_4 = 10 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_4 = -28 \\ -7x_1 - 2x_2 - x_4 = 68 \end{cases}$$

come:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -28 \\ 68 \end{pmatrix}$$

ho sparato dei coefficienti completamente a caso.
Ricordando quanto detto al punto 23.1, il vettore b dei termini noti può essere una soluzione del sistema solo se b è il risultato della **combinazione lineare** $x_1 A^1 + \cdots + x_j A^j$.
In particolare, facendo riferimento al punto 23.2, il vettore b deve far parte del *sottospazio generato*:

$$b \in \text{Span}(A^1, \dots A^j)$$

54 Rango di una matrice a scalini

Il rango di una matrice a scalini corrisponde al numero di pivot della matrice.
Inoltre, come accennato nel punto 31.3 le mosse di Gauss non alterano il rango della matrice.
Questo è molto importante! Significa che per trovare il rango di una matrice qualunque possiamo applicare Gauss (o Gauss-Jordan) sulla matrice e contare i pivot.

55 Teorema di Rouché-Capelli

Un sistema lineare ha soluzioni *se e solo se*:

$$\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A)$$

Il rango della matrice completa $C = (A|b)$ deve essere uguale al rango della matrice A dei coefficienti.
Se il sistema ha soluzione, allora l'insieme delle soluzioni $S \subset \mathbb{K}^j$ è un sottospazio affine **di dimensione** $j - \mathrm{rk}(A)$.
Ricordiamo che con j intendiamo il numero delle colonne di A.

56 Numero di soluzioni di un sistema lineare

Facendo riferimento al punto 55, possiamo inoltre precisare che un sistema lineare in un campo $\mathbb{K}$ infinito ha:

- 0 soluzioni se $\mathrm{rk}(A|b) \neq \mathrm{rk}(A)$
- 1 soluzione se $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A)$ e $\mathrm{rk}(A) = j$
- ∞ soluzioni se $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A)$ e $\mathrm{rk}(A) < j$

dove j è il numero di colonne di A.

57 Soluzione con una matrice quadrata A dei coefficienti

Se la matrice A dei coefficienti:

1. è quadrata $j \times j$
2. il suo rango equivale al numero di colonne j: $\mathrm{rk}(A) = j$ *oppure* ha $\det(A) \neq 0$
   se una delle due condizioni è verificata, l'altra segue automaticamente, vedi il punto 44.3

Allora A è **invertibile** *vedi il punto 37* e il sistema ha **un'unica soluzione** data da:

$$x = A^{-1}b$$

Ricordiamo che b è il vettore colonna dei termini noti.

Parte X
Applicazioni lineari

Un'applicazione lineare è un **omomorfismo** *di spazi vettoriali sullo stesso campo* $\mathbb{K}$.
Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione lineare è una **funzione**:

$$f : V \longrightarrow W$$

tale che:

1. $f(v + v') = f(v) + f(v')$ per ogni $v, v' \in V$
   *f **preserva l'operazione di somma vettoriale** tra gli spazi vettoriali:*
   La somma a sinistra dell'uguaglianza avviene in V mentre la somma a destra avviene in W.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ per ogni $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$
   *f **preserva l'operazione di prodotto per scalare** tra gli spazi vettoriali:*
   Il prodotto a sinistra avviene in V mentre quello a destra avviene in W.

3. $f(0_V) = f(0_{\mathbb{K}} \cdot v) = 0_{\mathbb{K}} \cdot f(v) = 0_W$ per ogni $v \in V$
   *f **preserva l'origine**. In altre parole, f fa coincidere lo 0 di V con lo 0 di W.*
   I passaggi $f(0_{\mathbb{K}} \cdot v) = 0_{\mathbb{K}} \cdot f(v)$ sono diretta conseguenza del punto 2 che dice che f preserva il prodotto per scalare.
   Notiamo che il prodotto per scalare $0_{\mathbb{K}} \cdot v$ è definito in V mentre invece $0_{\mathbb{K}} \cdot f(v)$ è definito in W.

Come conseguenza di questi punti possiamo osservare che f **preserva le combinazioni lineari**:
Sia $v \in V$ un vettore espresso come combinazione lineare in V. Abbiamo:

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = f(\lambda_1 v_1) + \cdots + f(\lambda_k v_k) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_k f(v_k)$$

Notiamo in particolare che siccome gli scalari λ sono per definizione in $\mathbb{K}$ ($\lambda \in \mathbb{K}$), f manda una combinazione lineare di vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$ in una combinazione lineare (*con gli stessi scalari* λ) delle loro immagini $f(v_1), \ldots, f(v_k)$.
A scanso di equivoci, precisiamo che la somma

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

avviene in V, mentre le somme

$$f(\lambda_1 v_1) + \cdots + f(\lambda_k v_k) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_k f(v_k)$$

avvengono in W. In particolare, in questa uguaglianza

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = f(\lambda_1 v_1) + \cdots + f(\lambda_k v_k)$$

l'applicazione ha associato la somma di V a quella di W (*punto 1*), mentre nell'uguaglianza

$$f(\lambda_1 v_1) + \cdots + f(\lambda_k v_k) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_k f(v_k)$$

l'applicazione ha associato il prodotto per scalare di V a quello di W (*punto 2*).

58 Funzione nulla, funzione identità

Esistono sempre.

58.1 Funzione nulla

Dati due spazi vettoriali V, W qualsiasi su $\mathbb{K}$, la funzione nulla è un'*applicazione lineare*

$$f : V \longrightarrow W$$

tale che

$$f(v) = 0_W$$

per ogni $v \in V$.
La funzione nulla restituisce sempre lo 0 di W.

58.2 Funzione identità

Dato uno spazio vettoriale V qualsiasi, la funzione identità è un'*applicazione lineare*

$$\mathrm{id} : V \longrightarrow V$$

tale che

$$f(v) = v$$

per ogni $v \in V$.
La funzione identità manda ogni vettore in se stesso.

59 L'applicazione lineare L_A

Consideriamo una matrice A di taglia $m \times n$ e definiamo l'applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

usando il prodotto riga per colonna tra matrici e vettori: $L_A(x) = Ax$. In particolare:

$$L_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

L_A prende in ingresso un vettore colonna a n entrate (tante entrate quante le colonne di A) e restituisce un vettore a m entrate (tante entrate quante le righe della matrice).
Il vettore restituito è il risultato del prodotto *riga per colonna*.
La lettera L sta per *left* perché moltiplichiamo la matrice A *a sinistra* del vettore x.
Ricordiamo infatti che $Ax \neq xA$.

60 Nucleo e immagine

Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare.

- Il suo **nucleo** $\text{Ker}(f)$ è il sottoinsieme di V così definito:

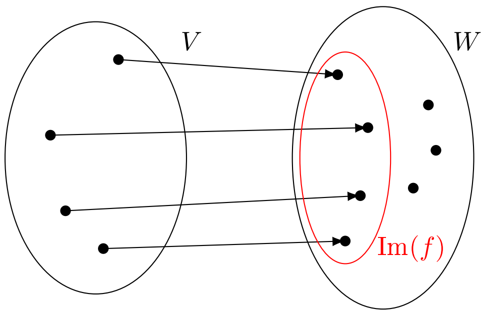
$$\text{Ker}(f) = \{v \in V | f(v) = 0_W\}$$

  Il nucleo corrisponde all'insieme dei vettori $v \in V$ che hanno come immagine 0_W.
  In altre parole, sono tutti quegli argomenti che fanno restituire 0 alla funzione (nel nostro caso 0_W).

- La sua **immagine** $\text{Im}(f)$ è il sottoinsieme di W così definito:

$$\text{Im}(f) = \{w \in W | \exists v \in V \text{ tale che } f(v) = w\}$$

  In altre parole, fanno parte dell'immagine tutti quegli elementi che f può *produrre/raggiungere*.
  Quindi w fa parte dell'insieme delle immagini *se e solo se* esiste un $v \in V$ tale che $f(v) = w$.
  L'immagine è l'insieme di tutti i possibili risultati di f.



60.1 Proprietà di Ker(f) e Im(f)

Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare.

- Il suo **nucleo** $\text{Ker}(f)$ è un *sottospazio vettoriale* di V
- La sua **immagine** $\text{Im}(f)$ è un *sottospazio vettoriale* di W
- Se $v_1, \ldots v_n$ sono *generatori* di V, allora $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ sono generatori di $\text{Im}(f)$.
  In altre parole: $\text{Im}(f) = \text{Span}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$
  Vedi il punto 60.2

60.2 Immagine di L_A

Per quanto visto al punto 60.1, l'immagine dell'applicazione lineare L_A è lo spazio generato dalle colonne di A:

$$\text{Im}(L_A) = \text{Span}(A^1, \ldots, A^n)$$

Questo ci permette di collegare il concetto di *rango per colonne*. Infatti abbiamo:

$$\text{rk}(A) = \dim(\text{Span}(A^1, \ldots, A^n)) = \dim(\text{Im}(L_A))$$

60.3 Nucleo di L_A

Trovare il nucleo di $L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ significa chiedersi quale/i x soddisfano $L_A(x) = 0$:

$$\text{Ker}(L_A) = \{x \in \mathbb{K}^n | L_A(x) = 0\}$$

Siccome L_A restituisce Ax, questo si riduce alla risoluzione del sistema lineare $Ax = 0$:

$$\text{Ker}(L_A) = \{x \in \mathbb{K}^n | L_A(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = 0\}$$

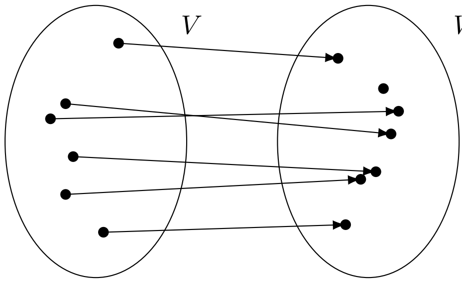
In particolare, stiamo cercando l'insieme S_0 delle soluzioni di $Ax = 0$:

$$\text{Ker}(L_A) = \{x \in \mathbb{K}^n | L_A(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = 0\} = S_0$$

61 Funzioni iniettive, suriettive, biettive

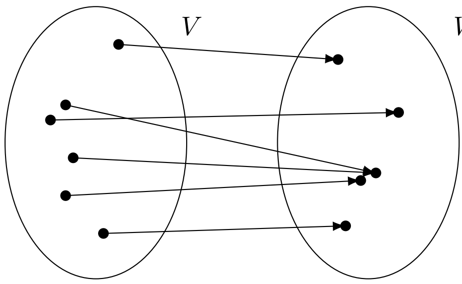
Sia $f : V \longrightarrow W$ una *funzione.*

- f è iniettiva *se e solo se* $\text{Ker}(f) = \{0\}$ oppure *se e solo se* $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$



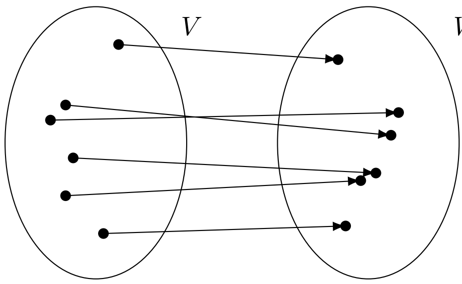
Per ogni elemento di V esiste un'immagine distinta in W. È tuttavia possibile che non tutti gli elementi di W vengano raggiunti.

- f è suriettiva *se e solo se* $\text{Im}(f) = W$ oppure *se e solo se* $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(W)$



Ogni elemento di W è raggiunto da almeno una freccia. È quindi possibile avere elementi di W raggiunti da più frecce.

- f è biettiva *se e solo se* $\text{Ker}(f) = \{0\}$ e $\text{Im}(f) = W$ oppure *se e solo se* $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(V) = \dim(W)$
In altre parole, f è biettiva se e solo se è sia *iniettiva* che *suriettiva.*



Tutti gli elementi di W sono raggiunti da una sola freccia.

Nelle definizioni ho accennato alla relazione tra dimensioni di dominio codominio e immagine, presente nel punto 63.3

62 Proprietà di funzioni biettive: Funzione inversa

Sia $f : V \longrightarrow W$ una funzione **biettiva**.
Allora:

1. Per f **esiste sempre un'unica** *inversa* f^{-1}.
   Solo le funzioni biettive sono invertibili.
2. L'inversa f^{-1} è anch'essa *biettiva*.
3. Se f (*oltre ad essere biettiva*) è anche un'*applicazione lineare*, allora:
   f^{-1} è anch'essa un'applicazione lineare.
   Le applicazioni lineari biettive vengono dette isomorfismi. Vedi il punto 64

63 Dimensioni del dominio

63.1 Dimensione del dominio V

Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Se il suo dominio V ha dimensione *finita*, allora vale la seguente:

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$$

63.2 Dimensione del dominio di L_A

Definiamo l'applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

dove $\mathbb{K}^n$ corrisponde a V. Più precisamente n corrisponde alle dimensioni di V:

$$n = \dim(V)$$

Analogamente, $\mathbb{K}^m$ corrisponde a W.
Per capire come mai ho menzionato V e W, vai al punto 63.1.
Grazie ai punti 60.2 e 60.3, possiamo concludere che:

$$\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{rk}(A), \qquad \mathrm{Ker}(L_A) = S_0$$

dove S_0 è l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = 0$.
Quindi possiamo certamente asserire che:

$$\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = \dim(\mathrm{rk}(A)), \dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = \dim(S_0)$$

Dunque, la formula al punto 63.1 (*adattata al contesto*):

$$\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) + \dim(\mathrm{Im}(L_A)) = n$$

Si trasforma in:

$$\dim(S_0) + \dim(\mathrm{rk}(A)) = n$$

Riordinando abbiamo:

$$\dim(S_0) = n - \dim(\mathrm{rk}(A))$$

che è esattamente il teorema di Rouché-Capelli al punto 55

63.3 Relazioni tra dim(Im(f)), dim(V) e dim(W)

Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Vale la seguente:

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(V)$$

Inoltre:

1. f è *iniettiva* $\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$
   oppure $\Leftrightarrow \dim(V) \leq \dim(W)$
2. f è *suriettiva* $\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(W)$
   oppure $\Leftrightarrow \dim(V) \geq \dim(W)$
3. f è *biettiva* $\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(W) = \dim(V)$

Vedere il punto 61

64 Isomorfismi

Un'applicazione lineare

$$f : V \longrightarrow W$$

è un **isomorfismo** se è *biettiva*.
Gli spazi vettoriali V e W (sullo stesso campo $\mathbb{K}$) *collegati da* f vengono detti *isomorfi*.
Ricordiamoci anche che un isomorfismo ha un'inversa così come definito al punto 62

64.1 Dimensioni di spazi isomorfi tra loro

Dai punti 63.3 e 64 abbiamo che due spazi V e W:

$$\text{sono } \textit{isomorfi} \iff \dim(V) = \dim(W)$$

64.2 Isomorfismo tra V e $\mathbb{K}^n$

Sia V un qualunque spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$.
V è isomorfo a $\mathbb{K}^n$.
Questo significa che per ogni spazio V su un campo $\mathbb{K}$ con $\dim(V) = n$ esiste sempre un isomorfismo tale che $f : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$.

65 Lo spazio delle applicazioni lineari $f : V \longrightarrow W$

Siano $V, W \in \mathbb{K}$ due spazi vettoriali e siano $f_1, f_2, \ldots, f_n$ applicazioni lineari definite come:

$$f : V \longrightarrow W$$

Allora le applicazioni lineari $f_1, f_2, \ldots, f_n$ formano uno spazio vettoriale che denotiamo come:

$$\mathcal{L}(V, W)$$

In particolare, prese due funzioni f_1, f_2 qualunque le operazioni di somma vettoriale e prodotto per scalare sono così definite:

$$(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v), \qquad (\lambda \cdot f_1)(v) = \lambda \cdot f_1(v)$$

65.1 Dimensione di $\mathcal{L}(V, W)$

La dimensione di $\mathcal{L}(V, W)$ è data da:

$$\dim(\mathcal{L}(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$$

66 Composizione di applicazioni lineari

66.1 La composizione conserva la linearità

Siano

$$f : V \longrightarrow W, \qquad g : W \longrightarrow Z$$

due funzioni lineari. La loro composizione:

$$g \circ f : V \longrightarrow Z$$

è anch'essa un'applicazione lineare.
Se vuoi lavorare con le composizioni delle matrici associate, vai al punto 72

66.2 Composizione di L_A

Siano $A \in M(k, m, \mathbb{K})$ e $B \in M(m, n, \mathbb{K})$ due matrici che *condividono lo stesso campo* $\mathbb{K}$.
Inoltre, A ha un numero m di colonne uguale al numero di righe di B.
Consideriamo le due applicazioni lineari L_A:

$$L_A : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^k, \qquad L_B : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

Per la loro composizione:

$$L_A \circ L_B : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$$

vale la seguente relazione:

$$L_A \circ L_B = L_{A \cdot B}$$

Ricorda! La composizione si legge da *destra* verso *sinistra*:

$$L_A(x) \circ L_B(x) = L_A(L_B(x))$$

Parte XI

Matrice associata ad un'applicazione lineare

Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali definiti su $\mathbb{K}$.
Siano inoltre:

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \qquad \mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

due basi di V e W rispettivamente.
Poiché $\mathcal{C}$ è una base di W esistono scalari unici $a_1, \ldots, a_m$ tali che per ogni v_n:

$$f(v_n) = a_1 \cdot w_1 + \cdots + a_m \cdot w_m$$

Raccogliamo quindi gli $a_1, \ldots, a_m$ nel vettore colonna delle coordinate di $f(v_n)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$

$$[f(v_n)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi costruire una matrice che in ogni colonna contiene le coordinate di un $f(v_n)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$:
Definiamo la matrice associata a f nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ come la matrice A di taglia $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

che raggruppa questi coefficienti a_{mn} e la indichiamo col simbolo

$$A = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

Ricordati che la base di *partenza* $\mathcal{B}$ è all'*apice*, mentre la base di *arrivo* è al *pedice*.
Ricorda: la base $\mathcal{B}$ appartiene al *dominio* V mentre la base $\mathcal{C}$ appartiene al *codominio* W.

67 Calcolare la matrice associata

Vediamo un esempio:
Consideriamo l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(2) \\ p(-2) \end{pmatrix}$$

ovvero, f assegna ad ogni polinomio $p(x)$ di secondo grado un vettore colonna che contiene sulla prima riga il risultato di $p(2)$ e sull'ultima riga il risultato di $p(-2)$.

Definiamo le basi

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \qquad \mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$$

di $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}^2$ rispettivamente. Calcoliamo i valori di f per i vettori della base $\mathcal{B}$:

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad f(x^2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Scriviamo quindi la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Siccome $\mathcal{C}$ è canonica, abbiamo finito. $A = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$

Se invece $\mathcal{C}$ fosse stata una base qualunque, *per esempio*:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Allora dovevamo eseguire un passaggio in più. Prendiamo il risultato

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ci stiamo chiedendo, in una combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{C}$ con quali coefficienti a_1 e a_2 possiamo scriverlo :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questo si traduce in un sistema lineare:

$$\begin{cases} 1 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 \\ 1 = a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ -a_1 + a_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

abbiamo quindi il vettore delle coordinate di $[f(1)]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Continuiamo:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 \\ -2 = a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot 1 \end{cases} \to \begin{cases} a_1 = 2 \\ -a_1 + a_2 = -2 \end{cases} \to \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 4 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 \\ 4 = a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot 1 \end{cases} \to \begin{cases} a_1 = 4 \\ -a_1 + a_2 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 8 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

La nostra matrice associata è quindi:

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

68 Matrice associata di L_A con basi canoniche

Definiamo una matrice A di taglia $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Per questa matrice, definiamo l'applicazione lineare:

$$L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

e per $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ usiamo le basi canoniche $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ rispettivamente.

In questo caso, la matrice associata di L_A, ovvero $[L_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ è proprio A!:

$$A = [L_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

È importante notare che sia la base di partenza che quella di arrivo devono essere ***entrambe*** *canoniche perché funzioni.*

68.1 Perché le usiamo? - Trovare immagini di vettori con $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$

Definiamo un'applicazione lineare con le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$:

$$f : V \longrightarrow W, \qquad \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}, \qquad \mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$$

dove $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono le basi di V e W rispettivamente.
Sia $v \in V$ un vettore qualunque. Vale la seguente:

$$[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

In altre parole, se abbiamo v espresso come coordinate di $\mathcal{B}$ ($[v]_{\mathcal{B}}$), trovare il risultato di $f(v)$ espresso nella base $\mathcal{C}$ ($[f(v)]_{\mathcal{C}}$) diventa molto semplice: è sufficiente eseguire il prodotto (*riga per colonna*) tra la matrice associata $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ e il vettore $[v]_{\mathcal{B}}$.

69 Una qualunque applicazione lineare può essere scritta come L_A

Facendo riferimento al punto 68.1, se assegniamo:

$$x = [v]_{\mathcal{B}}, \qquad y = [f(v)]_{\mathcal{C}}, \qquad A = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$$

allora abbiamo:

$$y = Ax = L_A(x)$$

In particolare, L_A è definita come:

$$L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

dove $\mathbb{K}^n$ corrisponde a V e $\mathbb{K}^m$ corrisponde a W. Quindi $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$.
Questo significa che scelta una matrice associata, una qualunque applicazione lineare può essere scritta come un'applicazione L_A.

70 Matrice associata della funzione identità

Sia V uno spazio vettoriale con $\dim(V) = n$ e sia $\mathcal{B}$ una sua base.
Ricordiamo che la funzione identità è così definita (vedi il punto 58.2):

$$\mathrm{id} : V \longrightarrow V, \qquad \mathrm{id}(v) = v, \forall v \in V$$

La sua matrice associata corrisponde alla matrice identità:

$$[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = I_n$$

Dove I_n è la matrice identità (vedi il punto 35)
Nota: le basi di partenza e arrivo devono essere identiche.
Per la matrice associata della funzione identità con basi diverse vedere il punto 74.

71 Isomorfismo tra $\mathcal{L}(V, W)$ e $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$

Fissiamo due spazi vettoriali $V, W \in \mathbb{K}$.
Come visto nel punto 65, tutte le applicazioni lineari del tipo:

$$f : V \longrightarrow W$$

formano uno spazio vettoriale.
Fissate due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ qualsiasi per gli spazi V e W rispettivamente, l'applicazione lineare:

$$g : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M(m, n, \mathbb{K})$$

che associa ad ogni $f : V \longrightarrow W$ la sua matrice associata $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ è un **isomorfismo**.
Nota: $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$.

72 Composizione con le matrici associate

Siano

$$f : U \longrightarrow V, \qquad g : V \longrightarrow W$$

due applicazioni lineari.
Siano $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ basi di U, V e W rispettivamente.
Per la matrice associata della loro composizione vale la seguente:

$$[g \circ f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}} = [g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} \cdot [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$$

73 Isomorfismi e inversa della matrice associata

Sia

$$f : V \longrightarrow W$$

un'applicazione lineare e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ basi di V e W rispettivamente.
f è un isomorfismo ***se e solo se*** la matrice associata $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ è invertibile.
Se la matrice è invertibile, allora la sua inversa è la matrice associata a f^{-1}.
La matrice associata della funzione inversa ha le basi invertite poiché dominio e codomino si ***scambiano di posto.***:

$$\left([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}\right)^{-1} = [f^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

74 Matrice del cambiamento di base

Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ due basi di V.
La matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ è la matrice:

$$A = [\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$$

In particolare, questa matrice permette di trasformare le coordinate di un qualunque vettore rispetto alla base $\mathcal{B}$ ($[v]_{\mathcal{B}}$) nelle coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}$ ($[v]_{\mathcal{C}}$):

$$[v]_{\mathcal{C}} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

La matrice A ha un'inversa A^{-1} che ha l'effetto opposto:

$$A^{-1} = [\mathrm{id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

Per costruire A usiamo esattamente gli stessi procedimenti al punto 67.
Infatti la matrice del cambiamento di base non è altro che la matrice associata della funzione identità.
Ricordiamo anche quanto detto al punto 70:

$$[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = I_n$$

74.1 Cambiare le basi di partenza e di arrivo di una matrice associata

Sia

$$f : V \longrightarrow W$$

un'applicazione lineare.
Siano $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ due basi di V e $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ due basi di W. Sia $[f]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{C}_1}$ la matrice associata a f.
Per cambiare le basi di partenza e arrivo, ovvero per ottenere $[f]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{C}_2}$ è sufficiente applicare la seguente:

$$[f]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{C}_2} = [\mathrm{id}_W]^{\mathcal{C}_1}_{\mathcal{C}_2} \cdot [f]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{C}_1} \cdot [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}$$

75 Endomorfismo

Sia V uno spazio vettoriale. Un endomorfismo è un'applicazione lineare:

$$f : V \longrightarrow V$$

La matrice associata a un endomorfismo è sempre quadrata.

75.1 Relazione tra endomorfismo e matrici simili

Consideriamo per uno spazio vettoriale V, l'endomorfismo:

$$f : V \longrightarrow V$$

e le basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.
Siano $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ e $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ due matrici associate di f con basi diverse.
La formula del cambiamento di base lega queste due matrici:

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Osserviamo che

$$\left([\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

Quindi se scriviamo $A = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}, B = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ e $M = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ allora abbiamo:

$$A = M^{-1} \cdot B \cdot M$$

che è proprio la formula della similitudine tra matrici (vedi punto 39).
Nota: non è detto che due matrici simili $A \sim B$ rappresentino un endomorfismo.
Tuttavia, un endomorfismo è rappresentabile con 2 matrici $A \sim B$ simili.
A e B possono avere basi diverse tra loro, ma le basi di partenza e arrivo devono essere identiche per ciascuna matrice.

Parte XII
Autovalori e Autovettori

Sia

$$T : V \longrightarrow V$$

un *endomorfismo* di uno spazio vettoriale V definito su un campo $\mathbb{K}$.
Un **auto*vettore*** di T è un vettore $v \neq 0$ in V tale che:

$$T(v) = \lambda \cdot v$$

per qualche scalare $\lambda \in \mathbb{K}$.
Lo scalare λ viene detto **auto*valore*** di T *relativo* a v.
A differenza di v, λ può essere anche nullo ($\lambda = 0$).

76 Multipli di un autovettore

Sia

$$T : V \longrightarrow V$$

un endomorfismo.
Se $v \in V$ è un auto*vettore* per T con auto*valore* λ, allora qualsiasi multiplo:

$$w = \mu v$$

di v, con $\mu \neq 0$ è anch'esso un auto*vettore* con lo stesso auto*valore* λ.

77 Endomorfismi e matrici diagonalizzabili

Un endomorfismo

$$T : V \longrightarrow V$$

è *diagonalizzabile* se V ha una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ composta da auto*vettori* per T.
Dire che un endomorfismo è *diagonalizzabile* significa dire che la sua matrice associata

$$A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

è diagonale. (vedi il punto 29.2).

Infatti, A è diagonale *se e solo se* i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono tutti auto*vettori* per T.
Sulla diagonale di A troviamo gli **auto*valori***:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

78 Diagonalizzabilità di matrici simili

Una matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ è *diagonalizzabile* se è simile ad una matrice diagonale D, in simboli: $A \sim D$.
Questo significa che A è diagonalizzabile $\iff$ esiste una matrice *invertibile* M tale che:

$$D = M^{-1} \cdot A \cdot M$$

dove D è una matrice diagonale.

79 Polinomio caratteristico

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Il *polinomio caratteristico* di A è così definito:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Valgono le seguenti:

1. p_A è un polinomio di grado n.
2. Due matrici simili $A \sim B$ condividono lo stesso polinomio caratteristico.

   2.1 Facendo riferimento al punto 75.1, se abbiamo un endomorfismo

   $$T : V \longrightarrow V$$

   allora tutte le matrici associate a T che sono simili tra loro, (*ovvero che hanno basi diverse tra loro, ma stessa base in partenza e in arrivo*) condividono lo stesso polinomio caratteristico.
   Quindi ad esempio, fissate le basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ di V, se:

   $$A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, B = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$$

   allora sappiamo che:

   $$A \sim B$$

   quindi possiamo dire che:

   $$p_T(\lambda) = p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

   ovvero, possiamo parlare direttamente del polinomio caratteristico di T.

80 Auto*valori* e polinomio caratteristico

Gli **auto*valori*** di T corrispondono alle *radici* del polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$.
Per le radici di un polinomio vedere il punto 17.
In breve, gli autovalori sono tutti i λ che soddisfano

$$p_T(\lambda) = 0$$

81 Auto*vettori* con auto*valori* distinti

Se $v_1, \ldots, v_k \in V$ sono auto*vettori* per T, con auto*valori* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ distinti, allora sono linearmente indipendenti.
Se nessun autovettore ha lo stesso autovalore di un altro autovettore, allora questi autovettori sono indipendenti tra loro.

81.1 Radici del polinomio caratteristico e diagonalizzabilità

Se il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ ha n radici distinte in $\mathbb{K}$, l'endomorfismo $T : V \longrightarrow V$ è **diagonalizzabile**. Qui n è $\dim(V)$, ovvero la taglia della matrice (*quadrata*) associata a T.

82 Autospazio

Sia

$$T : V \longrightarrow V$$

un endomorfismo.
Per ogni auto*valore* λ di T, definiamo l'autospazio come **l'insieme di tutti gli auto*vettori* v con autovalore λ, insieme all'origine** $0 \in V$ (*ricorda che* $0 \in V$ ***non*** *è un* auto*valore* per definizione). In formule:

$$V_\lambda = \{v \in V | T(v) = \lambda v\} = \ker(T - \lambda \mathrm{id}_V)$$

id_V *è la funzione identità.*

82.1 T diagonalizzabile e sottospazi in somma diretta

L'endomorfismo T è diagonalizzabile *se e solo se*:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$$

Vedi il punto 24

83 Molteplicità algebrica e geometrica

Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo e sia λ un auto*valore* per T.
La molteplicità **algebrica** di λ viene denotata con $m_a(\lambda)$ e rappresenta la molteplicità di λ come *radice* del polinomio caratteristico p_T:

$$p_T(\lambda) = 0$$

Per la molteplicità delle radici di un polinomio vedere il punto 17.1
La molteplicità **geometrica** di λ viene denotata con $m_a(\lambda)$ ed è invece la *dimensione* dell'*autospazio* (vedi il punto 82) associato a λ:

$$m_g(\lambda) = \dim(V_\lambda)$$

Nonostante possano essere diverse tra loro, le molteplicità di λ condividono una relazione importante (vedi il punto seguente: 83.1).

83.1 Disuguaglianze tra molteplicità

Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo.
Per ogni autovalore λ_0 di T valgono le seguenti disuguaglianze:

$$1 \leq m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0)$$

84 Teorema (*finale*) di diagonalizzabilità

Raccogliendo tutto quello che abbiamo visto finora possiamo dire che:
Un endomorfismo $T : V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile *se e solo se* valgono *entrambi* i fatti seguenti:

1. $p_T(\lambda)$ ha n radici in $\mathbb{K}$, contate con *molteplicità*
2. $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni *autovalore* λ di T.

Parte XIII
Prodotti scalari

Da non confondere con il prodotto ***per*** *scalare!*

In questa sezione il nostro campo di riferimento sarà $\mathbb{R}$ (quindi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
Sia V uno spazio vettoriale definito sul campo $\mathbb{R}$.
Un prodotto scalare su V è un'applicazione lineare:

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$(v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle$$

Il prodotto scalare soddisfa i seguenti assiomi *per ogni* $v, v', w, w' \in V$ *e per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Linearità rispetto alla prima variabile:**

$$\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$$

Il prodotto scalare conserva la somma vettoriale rispetto alla prima variabile.

2. **Omogeneità rispetto alla prima variabile:**

$$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

Il prodotto scalare conserva il prodotto ***per*** *scalare rispetto alla prima variabile.*

3. **Il prodotto scalare è simmetrico:**

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

Dai punti 1 e 2, seguono automaticamente:

4. **Linearità rispetto alla seconda variabile:**

$$\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$$

Il prodotto scalare conserva la somma vettoriale rispetto alla seconda variabile.

5. **Omogeneità rispetto alla prima variabile:**

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

Il prodotto scalare conserva il prodotto ***per*** *scalare rispetto alla seconda variabile.*

Applicando questi 5 punti, notiamo che vale la seguente:

$$\langle v, 0 \rangle = \langle 0, w \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0$$

Siccome il prodotto scalare è lineare sia sulla prima che sulla seconda variabile, diciamo che è **bilineare**.
Nota: *Il prodotto scalare "collassa" le dimensioni: prende dei vettori e li trasforma in un numero reale* $\langle v, w \rangle$.
Quando vogliamo definire un prodotto scalare, usiamo per convenzione la lettera g e scriviamo:

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

e invece di $\langle v, w \rangle$ scriviamo $g(v, w)$.
Esistono due tipi di prodotto scalare (vedi il punto 85)

85 Prodotto scalare degenere, prodotto scalare definito positivo

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$. Un prodotto scalare

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

può essere:

- **Degenere**:
  se esiste un $v \neq 0$ tale che $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni w
  Questo ha un significato molto profondo:
  Significa che esistono vettori v ***non nulli****, che a prescindere da w, fanno sì che il risultato sia nullo.*
  In altre parole, il prodotto scalare degenere ***perde*** *informazioni perché coppie di vettori non nulli vengono comunque mappate in 0.*

oppure

- **Definito positivo**:
  se $\langle v, v\rangle > 0$ per ogni $v \neq 0$

con $v, w \in V$
Ho scritto ***oppure*** in **grassetto** e *corsivo* per enfatizzare che un prodotto scalare non può mai essere entrambe le cose:
è definito positivo *oppure* è degenere.

Parte XIV

Prodotti scalari su $\mathbb{R}^n$

In questa sezione il nostro campo di riferimento sarà $\mathbb{R}$ (quindi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

86 Prodotto scalare euclideo

Il **prodotto scalare euclideo** è un particolare prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ ed è così definito:

$$\langle x, y\rangle = {}^{\mathrm{t}}x \cdot y$$

Il vettore colonna x diventa quindi un vettore riga perché viene trasposto.
Con $\cdot$ intendiamo il classico prodotto tra matrici *riga per colonna*.
Il prodotto scalare euclideo è **definito positivo**.

87 Prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e matrici simmetriche

Ogni prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$ può essere scritto come un prodotto scalare g_S così definito:

$$g_S(x, y) = {}^{\mathrm{t}}x \cdot S \cdot y$$

dove S è un'opportuna matrice *simmetrica*.

88 Matrice simmetrica del prodotto scalare euclideo

Anche il **prodotto scalare euclideo** su $\mathbb{R}^n$ può essere scritto come:

$$g_S(x, y) = {}^{\mathrm{t}}x \cdot S \cdot y$$

In questo caso, S è la matrice identità:

$$S = I_n$$

89 Scorciatoia per calcolare g_S

Per calcolare questi prodotti possiamo prima procedere calcolando $S \cdot y$ per poi calcolare ${}^{\mathrm{t}}x \cdot (S \cdot y)$.
Tuttavia esiste un metodo più semplice. Definiamo:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Vale la seguente:

$$g_S\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \cdot s_{11} \cdot y_1 + \cdots + x_1 \cdot s_{1n} \cdot y_n + \cdots + x_n \cdot s_{n1} \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot s_{nn} \cdot y_n$$

Ad esempio:

$$g_S\left(\left(\begin{array}{c}1\\2\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}3\\4\end{array}\right)\right)=\left(\begin{array}{cc}1 & 2\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc}2 & 1\\1 & 3\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c}3\\4\end{array}\right)=1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 1\cdot 4+2\cdot 1\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4=40$$

In formule, questa scorciatoia viene espressa in questo modo:

$$g_S(x,y)={}^{t}x\cdot S\cdot y=\sum_{i,j=1}^{n}x_iS_{ij}y_j$$

90 Prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ con basi canoniche

Per calcolare il prodotto:

$$g_S(e_i,e_j)$$

dove e_i, e_j sono due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, vale la seguente:

$$g_S(e_i,e_j)={}^{t}e_i\cdot S\cdot e_j=s_{ij}$$

In altre parole, calcolare questo prodotto scalare significa prendere l'elemento s_{ij} della matrice S di taglia $n\times n$.
Guarda bene il punto 25.1

91 Matrice associata di un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$

Sia V uno spazio vettoriale reale e sia

$$g: V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$$

un prodotto scalare. Sia inoltre

$$\mathcal{B}=\{v_1,\dots v_n\}$$

una base per V.
La matrice associata al prodotto scalare g nella base $\mathcal{B}$ è la matrice *simmetrica* S il cui elemento s_{ij} è dato da:

$$s_{ij}=g(v_i,v_j)$$

La matrice S viene anche indicata come $[g]_{\mathcal{B}}$.
Attenzione! Questa matrice S non è quella in ${}^{t}x\cdot S\cdot y$, ma è appunto quella associata rispetto ad una base $\mathcal{B}$.
Se la base $\mathcal{B}$ è la **base canonica** allora $[g]_{\mathcal{B}}=S$.
Attenzione! In questo ultimo caso invece S è proprio la matrice simmetrica in ${}^{t}x\cdot S\cdot y$.

91.1 Calcolare g con la matrice associata $S=[g]_{\mathcal{B}}$

Riprendiamo dal punto 91:

$$g_S(x,y)={}^{t}x\cdot S\cdot y$$

Se x e y sono espressi rispetto alla base $\mathcal{B}$ e $S=[g]_{\mathcal{B}}$ allora abbiamo:

$$g(x,y)={}^{t}\,[x]_{\mathcal{B}}\cdot S\cdot[y]_{\mathcal{B}}$$

per ogni $x,y\in V$.
Se sappiamo come sono definiti g, $\mathcal{B}$, allora possiamo usare la seguente:
Siano x e y sempre espressi come vettori coordinare rispetto alla base $\mathcal{B}=\{v_1,\dots v_n\}$:

$$[x]_{\mathcal{B}}=\left(\begin{array}{c}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{array}\right),[y]_{\mathcal{B}}=\left(\begin{array}{c}\mu_1\\\vdots\\\mu_n\end{array}\right)$$

Allora costruiamo la matrice $S=[g]_{\mathcal{B}}$ in questo modo:

$$S=\left(\begin{array}{ccc}g(v_1,v_1) & \cdots & g(v_1,v_n)\\\vdots & \ddots & \vdots\\g(v_n,v_1) & \cdots & g(v_n,v_n)\end{array}\right)$$

dopodiché calcoliamo:

$$g(x,y) = {}^{\mathrm{t}}\,[x]_{\mathcal{B}} \cdot S \cdot [y]_{\mathcal{B}}$$

Per calcolare questo prodotto possiamo anche utilizzare la seguente (proprio come nel punto 89):

$$g(x,y) = \lambda_1 \cdot g(v_1,v_1) \cdot \mu_1 + \cdots + \lambda_1 \cdot g(v_1,v_n) \cdot \mu_n + \cdots + \lambda_n \cdot g(v_n,v_1) \cdot \mu_1 + \cdots + \lambda_n \cdot g(v_n,v_n) \cdot \mu_n$$

In formule, questo concetto viene espresso in questo modo:

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_j g(v_i,v_j)$$

91.2 Cambiare la base della matrice associata di g

Sia V uno spazio vettoriale reale e siano

$$\mathcal{B} = \{v_1,\ldots,v_n\}, \mathcal{B}' = \{v_1',\ldots,v_n'\}$$

due basi di V.
Definiamo il prodotto scalare:

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

Definiamo inoltre le matrici associate:

$$S = [g]_{\mathcal{B}}, S' = [g]_{\mathcal{B}'}$$

Definiamo la matrice del cambiamento di base (dalla base $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$) come:

$$M = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Ogni elemento s_{ij}' di S' è così definito:

$$s_{ij}' = g(v_i', v_j') = {}^{\mathrm{t}}[v_i']_{\mathcal{B}} \cdot S \cdot [v_j']_{\mathcal{B}} = {}^{\mathrm{t}}M^i \cdot S \cdot M^j$$

dove M^i è la colonna i di M mentre M^j è la colonna j di M.
La notazione $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è corretta perché si parte da v_i' che è espresso in $\mathcal{B}'$ per ottenere le sue coordinate in $\mathcal{B}$.
In particolare, per ottenere l'intera matrice S' vale la seguente:

$$S' = {}^{\mathrm{t}}M \cdot S \cdot M$$

Questo significa che due matrici associate a g ma con basi diverse sono *congruenti* tra loro. (Vedi il punto 40).

92 Forme quadratiche

Una forma quadratica $q(x)$ è una funzione definita da una matrice simmetrica S:

$$q(x) = {}^{\mathrm{t}}\, x \cdot S \cdot x$$

Applicando il punto 89 otteniamo:

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i S_{ij} x_j$$

Per tradurre in termini più semplici, definiamo:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Vale la seguente:

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \cdot s_{11} \cdot x_1 + \cdots + x_1 \cdot s_{1n} \cdot x_n + \cdots + x_n \cdot s_{n1} \cdot x_1 + \cdots + x_n \cdot s_{nn} \cdot x_n$$

Se $q(x)$ è una ***forma quadratica definita positiva***, allora vale:

$$q(x) = g_S(x, x) = {}^t x \cdot S \cdot x$$

Parte XV
Geometria di base

93 Norma

Sia V uno spazio vettoriale munito di *prodotto scalare definito positivo* a cui è associata la *forma quadratica* q.
La **norma** di un vettore $v \in V$ viene indicata come $\|v\|$ ed è il numero reale:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{q(x)}$$

Usiamo le doppie stanghette: $\|v\|$ per non confonderci con $|\lambda|$ che invece è il valore assoluto di uno scalare.
La norma di v viene anche detta *modulo* e va interpretata come la *lunghezza* del vettore v.

93.1 Proprietà della norma

Valgono le seguenti:

1. La norma funziona solo con prodotti scalari definiti positivi:
   $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. La norma preserva il prodotto per scalare:
   $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$
3. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:
   $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$
4. Disuguaglianza triangolare:
   $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

per ogni $v, w \in V$ *e per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$

94 Distanze tra punti

Una volta definita la norma, abbiamo essenzialmente definito la *lunghezza* di un vettore.
Quindi, se definiamo un vettore tra due punti, la sua lunghezza rappresenta la distanza tra loro.
In particolare, possiamo definire il vettore:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

Vale inoltre la seguente:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

La distanza tra due punti $P, Q \in V$ è il numero reale:

$$d(P, Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \|Q - P\|$$

La distanza tra punti gode delle seguenti **proprietà**:

1. $d(P, Q) > 0$ se $P \neq Q$ e $d(P, P) = 0$
2. $d(P, Q) = d(Q, P)$
3. $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$

95 Angolo tra due vettori

Sia V uno spazio vettoriale munito di un prodotto scalare definito positivo.
L'angolo tra due vettori $v, w \in V$ *non nulli* è il numero $\vartheta \in [0, \pi]$.
In particolare, il coseno di ϑ è così definito:

$$\cos(\vartheta) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}$$

Pertanto, per trovare ϑ utilizziamo:

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}\right)$$

In base al segno di $\langle v, w\rangle$ possiamo dire se ϑ è *acuto*, *retto* oppure *ottuso*:
Precisamente, ϑ è:

- **acuto** $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ se $\langle v, w\rangle$ è ***positivo***
- **retto** $\left(= \frac{\pi}{2}\right)$ se $\langle v, w\rangle$ è ***nullo*** (*Vedi i vettori ortogonali al punto 95.1*)
- **ottuso** $\left(> \frac{\pi}{2}\right)$ se $\langle v, w\rangle$ è ***negativo***

95.1 Vettori ortogonali

Sia V uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare definito positivo.
Due vettori $v, w \in V$ sono **ortogonali** se:

$$\langle v, w\rangle = 0$$

Ovvero, se l'angolo tra loro è retto (vedi il punto 95)

95.2 Vettori ortogonali della base canonica $\mathbb{R}^n$

Consideriamo il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^n$.
Due vettori e_i, e_j diversi fra loro ($i \neq j$) della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono sempre *ortogonali* tra loro. Infatti:

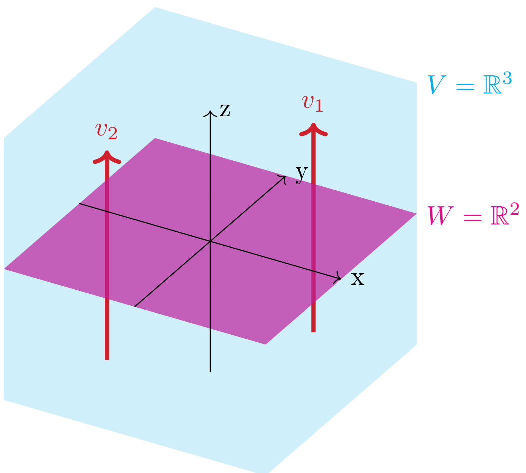
$$\langle e_i, e_j\rangle = 0$$

96 Complemento ortogonale/Sottospazio ortogonale

Sia V uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare e sia W un sottospazio di V.
Il *complemento ortogonale* o *sottospazio ortogonale* di W si indica con $W^\perp$ ed è l'insieme dei vettori $v \in V$ che sono *ortogonali* a tutti i vettori di W.
In simboli:

$$W^\perp = \{v \in V | \, \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in W\}$$

$W^\perp$ è un *sottospazio vettoriale* di V.
Facciamo un esempio grafico:
Definiamo $V = \mathbb{R}^3$, W come un qualunque piano $\mathbb{R}^2$ (un piano xy) e rappresentiamo due vettori v_1, v_2 di $W^\perp$:



Da qui si può vedere chiaramente che un qualunque vettore in W ha per forza un angolo retto con un qualunque vettore di $W^{\perp}$ (in questo particolare caso, sono tutti i vettori paralleli a z in $V = \mathbb{R}^3$).

97 Proiezione ortogonale

Sia V uno spazio vettoriale munito di un prodotto scalare definito positivo.
Sia w un vettore *non nullo* di V e $U = \mathrm{Span}(w)$ la retta generata da w.
Allora lo spazio V si **decompone in somma diretta** come:

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

Questo significa che ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come una somma vettoriale:

$$v = u + v'$$

dove $u \in U$ e $v' \in U^{\perp}$.
In particolare, la somma diretta induce una proiezione

$$p_U : V \longrightarrow U$$

In altre parole, l'esistenza della decomposizione in somma diretta implica l'esistenza di una funzione p_U che per ogni $v \in V$ restituisce la sua componente $u \in U$.
La funzione p_U viene anche scritta come p_w.
Questa funzione viene detta **proiezione ortogonale** e può essere descritta esplicitamente:

$$p_w(v) = p_U(v) = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} w = u$$

97.1 Coefficiente di Fourier

Nella proiezione ortogonale compare il **coefficiente di Fourier** che indichiamo come:

$$k = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$$

98 Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

98.1 Basi ortogonali

Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo.
Sia:

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

una base *ortogonale* di V. $\mathcal{B}$ ha le stesse caratteristiche e proprietà di una base qualunque, *eccetto per la seguente*:
tutti i vettori della base *ortogonale* sono a due a due ortogonali.
In simboli:

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0, \forall i \neq j$$

Per ottenere una base ortogonale utilizziamo l'algoritmo di Gram-Schmidt.

98.2 Algoritmo (ortogonalizzazione) di Gram-Schmidt

L'algoritmo di Gram-Schmidt permette di ortogonalizzare una qualunque famiglia di vettori linearmente indipendenti tra loro.
Se questa famiglia di vettori indipendenti è proprio una base, allora l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt restituisce a tutti gli effetti una **base ortogonale**.
Vediamo subito come funziona:
Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo.
Definiamo come $v_1, \ldots v_k \in V$ i vettori linearmente indipendenti tra loro da *ortogonalizzare*.
Infine, indichiamo con $w_1, , w_k \in V$ i vettori linearmente indipendenti *ortogonali*, ovvero i vettori che otteniamo dall'algoritmo.

I vettori $w_1, \ldots, w_k$ vengono calcolati induttivamente (in sequenza, uno dopo l'altro):

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - p_{w_1}(v_2) \\
w_3 &= v_3 - p_{w_1}(v_3) - p_{w_2}(v_3) \\
&\vdots \\
w_k &= v_k - p_{w_1}(v_k) - \cdots - p_{w_{k-1}}(v_k)
\end{aligned}$$

dove p è la proiezione ortogonale, pertanto abbiamo:

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 \\
w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 \\
&\vdots \\
w_k &= v_k - \frac{\langle v_k, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \cdots - \frac{\langle v_k, w_{k-1} \rangle}{\langle w_{k-1}, w_{k-1} \rangle} w_{k-1}
\end{aligned}$$

98.3 Basi orto*normali*

Se vogliamo invece ottenere una base ortonormale (oppure una famiglia di vettori ortonormali), seguiamo tutto il procedimento nel punto 98.2.
Otteniamo quindi una famiglia (o una base) di vettori ortogonali $w_1, \ldots, w_k$.
Indichiamo ora con $w'_1, \ldots, w'_k$ la famiglia vettori orto*normali*. Ciascun vettore w'_k si ottiene in questo modo:

$$w'_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}$$

In altre parole, prendiamo ciascun vettore e lo dividiamo per la sua norma.

98.4 Sviluppo di Fourier su base ortogonale

Le basi ortogonali sono utili per questo motivo:
Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo.
Sia inoltre $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base *ortogonale* per V. Per qualsiasi vettore $v \in V$ vale la seguente:

$$v = p_{v_1}(v) + \cdots + p_{v_n}(v)$$

In altre parole, ciascun vettore v è rappresentabile come la somma delle sue proiezioni ortogonali sugli elementi di $\mathcal{B}$.
Se espandiamo la formula otteniamo:

$$v = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \cdots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n$$

Parte XVI
Lo spazio euclideo

In questa sezione usiamo sempre il prodotto scalare euclideo sullo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$.

99 Isometrie del piano $\mathbb{R}^2$

99.1 Tipi di isometrie di $\mathbb{R}^2$

Le uniche matrici *ortogonali* in $M(2)$ (vedi il punto 99.6), ovvero le uniche isometrie di $\mathbb{R}^2$ sono:

$$\mathrm{Rot}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \mathrm{Rif}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

al variare di $\vartheta \in [0, 2\pi)$
In parole povere, **le isometrie di $\mathbb{R}^2$ sono *rotazioni* e *riflessioni*.**

99.2 Rotazione

Una rotazione di angolo ϑ è la trasformazione:

$$L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

determinata dalla matrice $A = \mathrm{Rot}_\vartheta$:

$$\mathrm{Rot}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

In altre parole, preso un qualunque punto $B \in \mathbb{R}^2$, espresso in coordinate polari:

$$B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho\cos(\varphi) \\ \varrho\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

L_A manda B nel punto ruotato in senso antiorario rispetto all'angolo ϑ. In particolare:

$$L_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varrho\cos(\varphi) \\ \varrho\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho(\cos(\vartheta)\cos(\varphi) - \sin(\vartheta)\sin(\varphi)) \\ \varrho(\sin(\vartheta)\cos(\varphi) + \cos(\vartheta)\sin(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho\cos(\vartheta + \varphi) \\ \varrho\sin(\vartheta + \varphi) \end{pmatrix}$$

La rotazione è a tutti gli effetti una rotazione *antioraria* rispetto all'origine, di angolo ϑ, del piano.
Il determinante della matrice $A = \mathrm{Rot}_\vartheta$ è sempre:

$$\det(\mathrm{Rot}_\vartheta) = \cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) = 1$$

99.3 Riflessione

Fissiamo un angolo ϑ e consideriamo la retta r che forma un angolo di $\frac{\vartheta}{2}$ con l'asse x.
Una **riflessione** *ortogonale* rispetto alla retta r è una trasformazione:

$$L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

determinata dalla matrice $A = \mathrm{Rif}_\vartheta$:

$$\mathrm{Rif}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Come con la rotazione, preso un qualunque punto espresso in coordinate polari:

$$B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho\cos(\varphi) \\ \varrho\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

la sua immagine è:

$$L_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varrho\cos(\varphi) \\ \varrho\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho(\cos(\vartheta)\cos(\varphi) + \sin(\vartheta)\sin(\varphi)) \\ \varrho(\sin(\vartheta)\cos(\varphi) - \cos(\vartheta)\sin(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho\cos(\vartheta - \varphi) \\ \varrho\sin(\vartheta - \varphi) \end{pmatrix}$$

In altre parole, ogni punto viene mandato nella sua riflessione ortogonale di angolo ϑ rispetto alla retta r.
Il determinante della matrice $A = \mathrm{Rif}_\vartheta$ è sempre:

$$\det(\mathrm{Rif}_\vartheta) = -\cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta) = -1$$

99.4 Le isometrie sono isomorfismi

Siano V e W due spazi vettoriali dotati ciascuno di un *prodotto scalare*.
Un'isometria è un isomorfismo:

$$T : V \longrightarrow W$$

tale che:

$$\langle v, w\rangle = \langle T(v), T(w)\rangle, \forall v, w \in V$$

In particolare, T è un'isometria *se e solo se*:

$$\langle v_i, v_j\rangle = \langle T(v_i), T(v_j)\rangle, \forall i, j$$

99.5 Proprietà delle isometrie

Sia

$$T : V \longrightarrow W$$

un *isomorfismo* tra spazi dotati di un prodotto scalare definito positivo.
I seguenti fatti sono ***equivalenti*** (se vale uno valgono tutti gli altri):

1. T è un'isometria
2. T preserva la norma:
   $\|T(v)\| = \|v\|, \quad \forall v \in V$
3. T preserva la distanza:
   $d(v, w) = d(T(v), T(w)), \quad \forall v, w \in V$

Dal punto di vista delle *matrici*, vale la seguente:
Siano V e V' due spazi vettoriali muniti dei prodotto scalari g e g' e di basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ *rispettivamente*.
Consideriamo l'isomorfismo:

$$T : V \longrightarrow V'$$

e definiamo le seguenti matrici:

$$S = [g]_{\mathcal{B}}, \qquad S' = [g']_{\mathcal{B}'}, \qquad A = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$$

L'isomorfismo T è un'isometria *se e solo se*:

$$S =^{\mathrm{t}} AS'A$$

99.6 Isometria in $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare euclideo

Consideriamo l'*endomorfismo*:

$$L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

L_A è un'*isometria se e solo se*:

$${}^{\mathrm{t}}AA = I_n$$

Una matrice $A \in M(n)$ a coefficienti reali tale che ${}^{\mathrm{t}}AA = I_n$ è detta ***ortogonale***.

100 Isometrie di $\mathbb{R}^3$

100.1 Tipi di isometrie di $\mathbb{R}^3$

Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ è una *rotazione* oppure una *antirotazione*.

100.2 Antirotazione in $\mathbb{R}^3$

Una antirotazione

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

è la *composizione* di una *rotazione* intorno a un asse r e di una riflessione rispetto al piano $U = r^{\perp}$

101 Prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$

Consideriamo due vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Il prodotto vettoriale tra v e w è il vettore:

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

101.1 Proprietà del prodotto vettoriale

Valgono le seguenti proprietà:

- Il vettore $v \times w$ è **ortogonale** sia a v che a w.
- $v \times w$ è **nullo** *se e solo se* v e w sono *dipendenti* tra loro, *in particolare*:
  - Se v e w sono *indipendenti*, allora la terna $\{v, w, v \times w\}$ è una **base** di $\mathbb{R}^3$
- $v \times w = -w \times v$ per ogni $v, w \in \mathbb{R}^3$

L'operazione del prodotto vettoriale:

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

è **bilineare**, ovvero:

1. **Rispetto alla prima variabile**:
   1.1 **Linearità:**
   $(v + v') \times w = v \times w + v' \times w$
   1.2 **Omogeneità:**
   $(\lambda v) \times w = \lambda(v \times w)$
2. **Rispetto alla seconda variabile**:
   2.1 **Linearità:**
   $v \times (w + w') = v \times w + v \times w'$
   2.2 **Omogeneità:**
   $v \times (\lambda w) = \lambda(v \times w)$

Per il prodotto vettoriale **non vale la proprietà associativa**:

$$(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$$

101.2 Prodotto vettoriale, norma e prodotto scalare euclideo

Vale la seguente:

$$\|v \times w\|^2 + \langle v, w\rangle^2 = \|v\|^2 \|w\|^2$$

101.3 Area del parallelogramma P tra v e w

Supponiamo che v e w siano indipendenti. Essi sono contenuti in un piano $\pi = \text{Span}(v, w)$.
Indichiamo con $P \subset \pi$ il parallelogramma avente come lati v e w.
L'**area** di P, indicata come $\text{Area}(P)$ vale:

$$\text{Area}(P) = \|v\| \|w\| \sin(\vartheta)$$

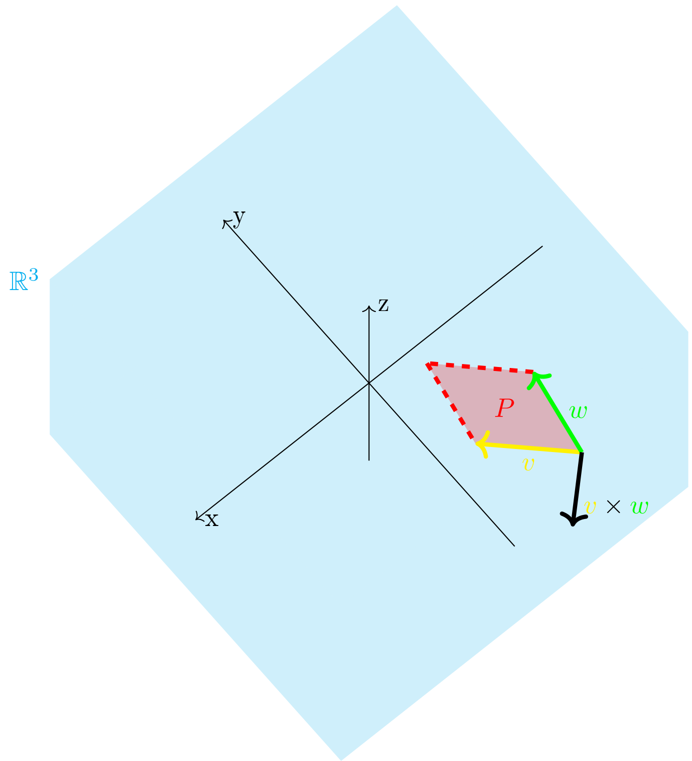
dove ϑ è l'angolo formato tra v e w.
In particolare, $\text{Area}(P)$ è il *modulo* del prodotto vettoriale (*vedi il punto* 101.4).

101.4 Modulo del prodotto vettoriale

Il modulo del prodotto vettoriale è:

$$\|v \times w\| = \|v\| \|w\| \sin(\vartheta) = \text{Area}(P)$$

dove ϑ è l'angolo formato tra v e w.



101.5 Regola della mano destra

Sappiamo che il vettore $v \times w$ è *ortogonale* al piano $v \times w$ e sappiamo ottenere il suo modulo (*la sua lunghezza*). Tuttavia non conosciamo il suo *segno*, in parole povere, non sappiamo se è *"sopra"* o *"sotto"* il piano.
Per conoscere il suo *verso*, usiamo la regola della mano destra.

102 Forma cartesiana e forma parametrica

Un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ può essere descritto come *luogo degli zeri* di un sistema di equazioni lineari omogenee.
Questa forma viene detta forma *cartesiana*. Ad esempio la forma cartesiana di una retta è:

$$ax + by + c = 0$$

La forma cartesiana è ***implicita***, perché descrive un sottospazio come un insieme di soluzioni di un sistema.
Esiste anche un'altra forma, detta forma *parametrica* che abbiamo visto prima.
Questa consiste nel descrivere un sottospazio vettoriale come un sottospazio generato da alcuni vettori (Span).
La forma parametrica è ***esplicita***, perché al variare di alcuni parametri, indica come sono fatti i punti del sottospazio.
Qualsiasi sottospazio di $\mathbb{R}^n$ può essere descritto in **entrambi i modi**.

102.1 Forma parametrica e cartesiana degli spazi affini

L'insieme S delle soluzioni di un sistema lineare è sempre *geometricamente* un sottospazio affine, ovvero un sottoinsieme di V definito come:

$$S = \{x + v | v \in W\}$$

dove x è un punto fissato di V e $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale.
In particolare, le soluzioni di un sistema lineare a coefficienti reali possono essere l'insieme vuoto $S = \emptyset$ oppure un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$. In simboli, se $S \neq \emptyset$ allora:

$$S = \{x + v | v \in S_0\}$$

dove x è un punto qualsiasi di S e S_0 è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato.
Per indicare un sottospazio affine S usiamo la scrittura:

$$S = x + W = \{x + v | v \in W\}$$

Due spazi affini $S = x + W$ e $S' = x' + W'$ **coincidono** *se e solo se* $W = W'$ e $x - x' \in W$

102.2 Da cartesiane a parametriche e viceversa

Nota: La forma parametrica **non è unica**: esistono infinite scritture diverse che descrivono lo stesso sottospazio affine (cambiando punto di partenza, vettori direttori o parametri). La forma cartesiana invece **è unica a meno di un fattore moltiplicativo**: se moltiplichiamo tutti i coefficienti per una stessa costante non nulla otteniamo ancora lo stesso sottospazio.

102.2.1 Da coordinate cartesiane a parametriche

Prendiamo il risultato:

$$\pi : x + 2y - z = 8$$

ottenuto al punto 102.2.2. Dobbiamo arrivare alla forma:

$$\pi = \{P_0 + tv_1 + sv_2 | t, s \in \mathbb{R}\}$$

Scegliamo un punto qualsiasi che appartiene al piano π. Ad esempio:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

appartiene al piano. Infatti: $0 + 2 \cdot 4 - 0 = 8 \longrightarrow 8 = 8 \longrightarrow$ ok!
Troviamo 2 vettori v_1, v_2 (non nulli e indipendenti tra loro) che con le loro componenti x, y, z risolvono l'equazione omogenea associata:

$$x + 2y - z = 0$$

Troviamo:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Una delle forme parametriche è dunque:

$$\pi : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} | t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

102.2.2 Da coordinate parametriche a cartesiane

Facciamo un esempio:
Consideriamo il piano π scritto in forma parametrica:

$$\pi : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dobbiamo arrivare alla forma:

$$\pi : ax + by + cz = d$$

Scriviamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2s \\ y = 2 - s \\ z = -3 + t \end{cases}$$

Ricaviamo s e t:

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2s \\ -y + 2 = s \\ z + 3 = t \end{cases}$$

Scegliamo l'equazione in cui compaiono tutte e tre le variabili (anche sotto forma di parametri) per ricavare la forma cartesiana:
Riordiniamo:

$$x = 1 + t + 2s \longrightarrow -x + t + 2s = -1$$

Procediamo sostituendo i valori ottenuti di s e t:

$$-x + z + 3 + 2 \cdot (-y + 2) = -1 \longrightarrow -x + z + 3 - 2y + 4 = -1$$

$$-x + z - 2y = -8 \longrightarrow -x - 2y + z = -8 \longrightarrow x + 2y - z = 8$$

Nota: se non compare un'equazione in cui sono presenti tutte le variabili, allora occorre risolvere un sistema contenente tutte le equazioni necessarie per descrivere tutte le variabili. Ovviamente le equazioni di questo sistema devono essere scritte avendo cura di sostituire i parametri.

103 Giacitura di S

Sia

$$S = x + W$$

uno spazio affine.
Lo spazio vettoriale W è determinato da S ed è detto *giacitura* di S.
Indichiamo la giacitura di S come:

$$W = \text{giac}(S)$$

Il punto x è invece un qualsiasi punto di S.
La dimensione di S è la dimensione della giacitura di W:

$$\dim(S) = \dim(\text{giac}(S)) = \dim(W)$$

104 Sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$

I sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ sono:

1. I punti
2. Le rette:
   Una retta affine r in $\mathbb{R}^3$ è descritta in forma cartesiana (implicita) come:
   $$r = \{ax + by + c = 0\}$$
   oppure in forma parametrica (esplicita) come un punto P_0 e un vettore v_1 che la generano:
   $$r = \{P_0 + tv | t \in \mathbb{R}\}$$
3. I piani:
   Un piano π affine in $\mathbb{R}^3$ è descritto in forma cartesiana (implicita) come:
   $$\pi = \{ax + by + cz = d\}$$
   oppure in forma parametrica (esplicita) come un punto P_0 e due vettori v_1, v_2 che generano la giacitura:
   $$\pi = \{P_0 + tv_1 + sv_2 | t, s \in \mathbb{R}\}$$
4. $\mathbb{R}^3$ (se stesso)

105 Intersezioni tra sottospazi affini

Tutti i sottospazi *vettoriali* si intersecano almeno nell'origine. I sottospazi affini invece, possono anche non intersecarsi.
Due sottospazi affini S e S' si dicono **incidenti** se:

$$S \cap S' \neq \emptyset$$

Se sono *incidenti* possiamo prendere $x \in S \cap S'$ e scrivere entrambi i sottospazi affini come:

$$S = x + W, S' = x + W'$$

In questo modo otteniamo:

$$S \cap S' = x + W \cap W'$$

Pertanto, l'intersezione non vuota è sempre uno spazio affine.
Inoltre, vale la seguente. Se:

$$\text{giac}(S) + \text{giac}(S') = \mathbb{R}^n$$

allora S e S' sono *incidenti*. (n è la dimensione dello spazio in cui sono contenuti S e S').

105.1 Calcolare l'intersezione

In base alla forma in cui sono scritti S e S' possiamo procedere in modi diversi.
Il primo metodo più banale consiste semplicemente nel convertire uno dei due nella forma dell'altro per poi procedere.
In particolare:

1. Se S e S' sono entrambi in forma *cartesiana,* allora la loro intersezione è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare composto dalle loro equazioni.

2. Se S e S' sono entrambi in forma *parametrica* allora si eguagliano le due forme e si risolve il sistema per i parametri liberi. La soluzione di tale sistema rappresenta l'intersezione.
   NOTA: Questo metodo può essere particolarmente dispendioso.

Supponendo di non voler convertire uno dei due, vale la seguente:
Se S è descritto in forma *cartesiana* e S' è nella forma *parametrica*, è sufficiente prendere le coordinate del punto generico P_0 di S' e sostituirle nell'equazione di S, per ottenere le coordinate della loro intersezione.

106 Angoli tra sottospazi incidenti

106.1 Angolo tra rette

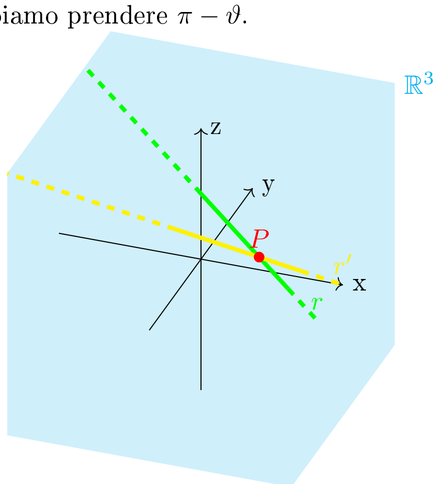
Siano r e r' due rette in $\mathbb{R}^3$ che si intersecano in un punto P.
Esprimiamo le rette come:

$$r = P + \text{Span}(v), r' = P + \text{Span}(v')$$

Quando due rette si intersecano in un punto otteniamo sempre 2 coppie di angoli (4 angoli). I due angoli della coppia sono uguali e opposti.
Quindi in realtà ci interessa trovare soltanto le due ampiezze. Tuttavia, trovata un'ampiezza, si possono agevolmente calcolare tutti gli altri angoli.
Pertanto, per convenzione, scegliamo sempre l'angolo acuto (o al massimo retto) come angolo dell'intersezione tra rette.
In particolare, usando la formula:

$$\cos(\vartheta) = \frac{\langle v, v' \rangle}{\|v\| \, \|v'\|} \longrightarrow \vartheta = \arccos\left(\frac{\langle v, v' \rangle}{\|v\| \, \|v'\|}\right)$$

Possiamo ottenere (in base alla scelta di v e v') un angolo retto oppure ottuso.
Se otteniamo un angolo ottuso, dobbiamo prendere $\pi - \vartheta$.

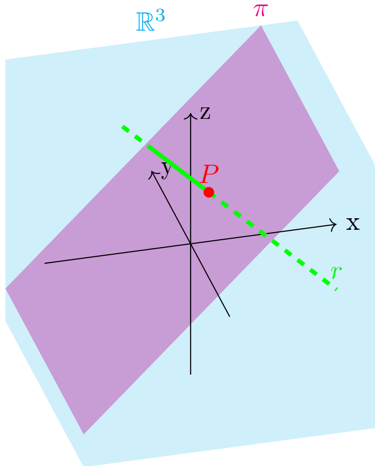


106.2 Angolo tra retta e piano

Siano r una retta e π un piano che si intersecano in un punto P. Esprimiamoli come:

$$r = P + t \cdot v, \pi = P + s \cdot u_1 + q \cdot u_2$$

dove $t, s, q \in \mathbb{R}$ sono parametri.



Per trovare l'angolo tra retta e piano seguiamo questo procedimento:

1. Trasliamo r, π e P in modo che l'intersezione avvenga all'origine.
   In altre parole imponiamo $P = 0$. Con $P = 0$, dobbiamo trasformare le scritture di r e π:
   È sufficiente prendere le coordinate di P e sottrarle a r e π. Quindi abbiamo:

   $$r = t \cdot v, \pi = s \cdot u_1 + q \cdot u_2$$

2. A questo punto, se u_1, u_2 non sono ortogonali, usiamo Gram-Schmidt per ortogonalizzarli.
   Otteniamo quindi i vettori w_1, w_2 *ortogonali*.

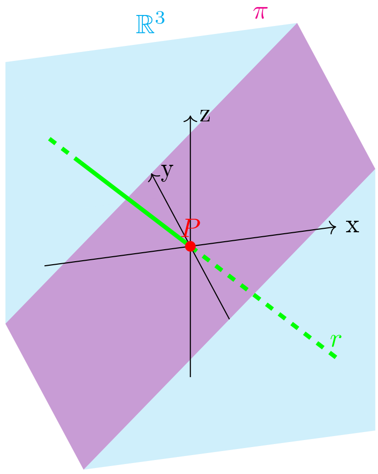
3. Calcoliamo il vettore v':

   $$v' = p_\pi(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

   3.1 Se $p_\pi(v) = 0$ allora $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

   3.2 Se $p_\pi(v) \neq 0$ allora ϑ è l'angolo tra i vettori v e v'(*vedi il punto* 95)

Vale la seguente proprietà:
La somma dell'angolo tra v e il piano π e l'angolo tra v e il vettore ortogonale a π è $\frac{\pi}{2}$.
Inoltre, il vettore v forma sempre un angolo *acuto* con il vettore ortogonale a π.
Ricorda: quanto detto funziona solo in $\mathbb{R}^3$ anche perché solo in $\mathbb{R}^3$ un'intersezione tra piani genera una retta.

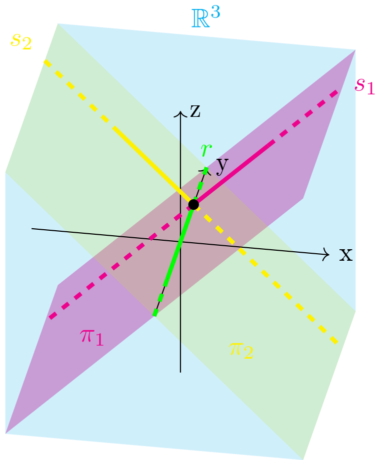


106.3 Angolo tra piani

Siano π_1 e π_2 due piani che si intersecano in una retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
L'angolo tra π_1 e π_2 viene detto *angolo diedrale* e può essere trovato in questo modo:

1. Scegliamo due rette s_1, s_2 sui piani π_1 e π_2 rispettivamente. Queste rette devono essere incidenti e ortogonali a r.

2. L'angolo *diedrale* è l'angolo retto tra le rette s_1, s_2 e così come nell'angolo tra rette, è acuto (o retto) per convenzione (*vedi il punto 106.1*).

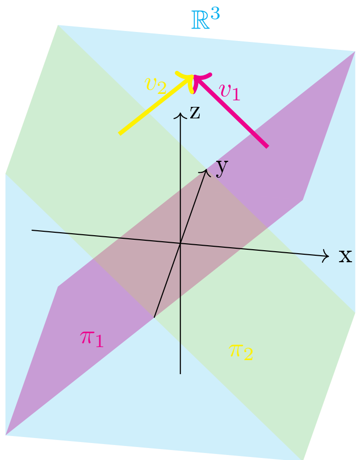


Esiste tuttavia un metodo più semplice:
Siano v_1 e v_2 due vettori ***non nulli ortogonali*** a π_1 e π_2 rispettivamente. L'angolo *diedrale* è proprio l'angolo tra i vettori v_1 e v_2. *Vedi il punto 95.*
In particolare, se π_1 e π_2 sono in forma cartesiana:

$$\pi_1 = \{a_1x + b_1y + c_1z = d_1\}, \qquad \pi_2 = \{a_2x + b_2y + c_2z = d_2\}$$

allora i vettori v_1 e v_2 sono semplicemente:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$



107 Distanze fra sottospazi disgiunti

Definiamo la distanza $d(S, S')$ tra due sottospazi affini S e S' di $\mathbb{R}^3$.
Se sono incidenti, la distanza è nulla:

$$S \cap S' \neq \emptyset \longrightarrow d(S, S') = 0$$

Se invece sono disgiunti, allora la loro distanza è sempre positiva:

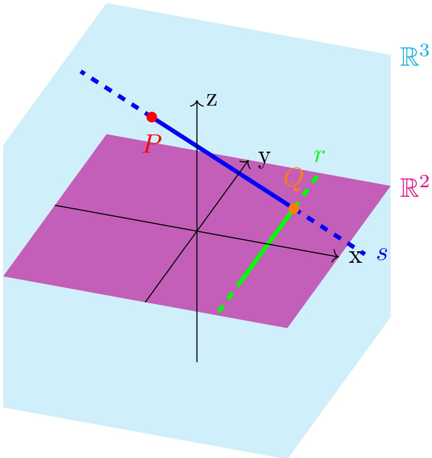
$$S \cap S' = \emptyset \longrightarrow d(S, S') > 0$$

Per la distanza tra punti vedere il punto 94

107.1 Distanza tra punto e retta

La distanza $d(P, r)$ tra un punto P e una retta r nello spazio $\mathbb{R}^3$ si ottiene nel modo seguente:

1. Tracciamo una retta s *perpendicolare* (ortogonale) a r e passante per il punto P.
2. Calcoliamo il punto Q, ovvero l'intersezione: $Q = s \cap r$
3. Abbiamo dunque:
$$d(P, r) = d(P, Q)$$



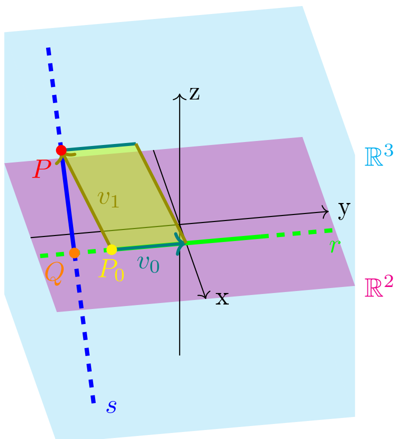
Esiste un metodo più semplice. Se la retta r è espressa in forma parametrica:

$$r = \{P_0 + tv_0\}$$

la distanza si calcola facilmente utilizzando il prodotto vettoriale:

$$d(P, r) = \frac{\|v_0 \times v_1\|}{\|v_0\|}$$

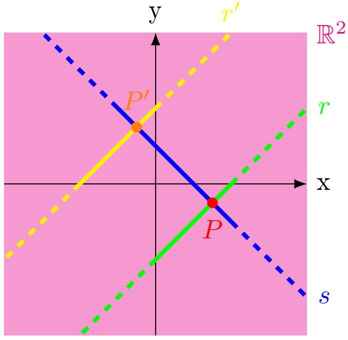
dove $v_1 = \overrightarrow{P_0P} = P - P_0$



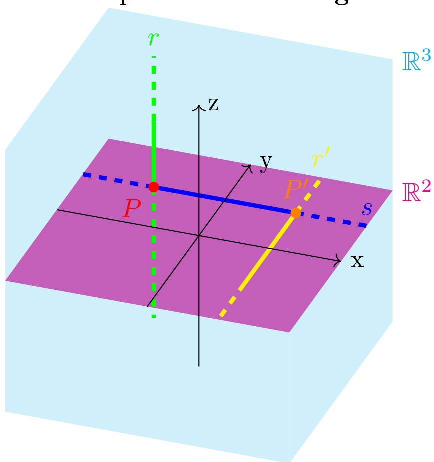
107.2 Distanza tra rette

Consideriamo due rette r e r'. Prima di parlare di distanza osserviamo che possiamo parlare di distanza solo se non sono incidenti. In particolare, se due rette *non* sono incidenti allora possono essere:

1. **Parallele**: ovvero, entrambe appartengono allo **stesso piano e sono disgiunte**.



2. **Sghembe**: se non appartengono allo stesso piano ma sono **disgiunte nello spazio**.



In entrambi i casi, esiste una retta s *perpendicolare* (ortogonale) ad entrambe.
Pertanto, la distanza $d(r, r')$ è definita come:

$$d(r, r') = d(P, P')$$

dove P e P' sono le intersezioni con la retta s e le rette r e r' rispettivamente:

$$P = r \cap s, P' = r' \cap s$$

Anche qui esistono delle scorciatoie che semplificano i conti. In particolare, consideriamo le rette:

$$r = \{P_0 + tv\}, r' = \{P_0' + uv'\}$$

in forma parametrica. Se r e r' sono **parallele**, allora vale:

$$d(r, r') = d(P_0, r')$$

e quindi applichiamo quanto detto al punto 107.1.
Se invece le rette sono **sghembe**, allora vale la seguente formula:

$$d(r, r') = \frac{|\det(v|v'|v'')|}{\|v \times v'\|}$$

dove $v'' = P_0P_0' = P_0' - P_0$

107.3 Distanza tra punto e piano

La distanza tra un punto P_0 e un piano π nello spazio si ottiene in questo modo:

1. Tracciamo una retta s *perpendicolare* (ortogonale) a π passante per P_0
2. Calcoliamo il punto Q, ovvero l'intersezione $Q = s \cap \pi$
3. Abbiamo dunque:
$$d(P_0, \pi) = d(P_0, Q)$$

Anche qui, se π e P_0 sono scritti come:

$$\pi = \{ax + by + cz = d\}, \qquad P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Allora vale la seguente:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Parte XVII
Prodotto hermitiano

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Un prodotto hermitiano si V è un'applicazione:

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

tale che:

$$(v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle$$

Il prodotto hermitiano soddisfa i seguenti assiomi:

1. $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$
2. $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$
3. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
   la barra indica il coniugio.

per ogni $v, v', w \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.
Da questi assiomi ricaviamo:

4. $\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$
5. $\langle v, \lambda w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$
6. $\langle 0, w \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$

Per ogni $v, w, w' \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.
La presenza del coniugio nel terzo assioma ci permette di definire la seguente:

7. $\langle v, v \rangle$ è un **numero reale**, per ogni $v \in V$

Gli assiomi 1,2 e 4 sono gli stessi dei prodotti scalari, mentre l'assioma 5 è diverso.
Per questa ragione, diciamo che il prodotto hermitiano è:

- **lineare** a sinistra (*rispetto al primo termine*)
- **antilineare** a destra (*rispetto al secondo termine*)

In particolare, il prodotto hermitiano è **sesquilineare** (*sesquilineare = 1,5)*. In altre parole, il prodotto hermitiano è lineare una volta e mezzo, ma non due.

108 Prodotto hermitiano definito positivo

Come per i prodotti scalari, anche un prodotto hermitiano può essere degenere o definito positivo.
In particolare, il prodotto hermitiano è *definito positivo* se:

$$\langle v, v \rangle > 0, \forall v \neq 0$$

Anche qui, per i prodotti hermitiani definiti positivi abbiamo:

- La norma: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
- Basi ortogonali/ortonormali. In particolare, Gram-Schmidt funziona anche qui.

109 Matrici hermitiane

Le matrici hermitiane nei prodotti hermitiani funzionano esattamente come le matrici simmetriche nei prodotti scalari. *Vedi il punto 87.*
Una matrice hermitiana H è una matrice ***quadrata*** a coefficienti complessi per cui vale:

$$^{t}H = \overline{H}$$

In particolare, per ogni $h_{ij} \in H$ deve valere:

$$h_{ij} = \overline{h_{ji}}$$

In altre parole, la matrice $\overline{H}$ ottenuta calcolando il coniugio di tutti i coefficienti di H deve essere uguale alla trasposta di H.
Facciamo un esempio:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}, {}^{t}H = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \overline{H} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{H} = {}^{t}H$ quindi H è hermitiana.
Da questa definizione notiamo subito le seguenti proprietà:

1. Gli elementi sulla *diagonale* di una matrice hermitiana *devono essere numeri reali.*
2. **Se abbiamo una matrice quadrata a coefficienti reali, allora è anche hermitiana *se e solo se* è simmetrica**.
   Infatti, non è assolutamente detto che una matrice hermitiana sia anche simmetrica.

110 Il prodotto hermitiano g_H

Una matrice hermitiana H determina un prodotto hermitiano g_H su $\mathbb{C}^n$ nel modo seguente:

$$g_H(x, y) = {}^{t}xH\overline{y}$$

Così come nei prodotti scalari g_S anche qui vale la seguente:

$$g_H(e_i, e_j) = h_{ij}$$

dove $h_{ij} \in H$ ed e_i, e_j sono elementi della base canonica $e_1, \dots, e_n$ di $\mathbb{C}^n$.

111 Matrice associata

Come nel caso in $\mathbb{R}$, sia V uno spazio vettoriale dotato di prodotto hermitiano g e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
Possiamo definire la matrice associata H nel modo seguente:

$$H_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

La lettera H ricorda che la matrice associata è una matrice hermitiana. In particolare, $H = [g]_{\mathcal{B}}$
Per ogni $v, w \in V$ possiamo scrivere:

$$\langle v, w \rangle = {}^{t}[v]_{\mathcal{B}} \cdot H \cdot \overline{[w]_{\mathcal{B}}}$$

112 Endomorfismi autoaggiunti

Indichiamo con V:

- uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo

oppure

- uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto hermitiano definito positivo

Un endomorfismo:

$$T : V \longrightarrow V$$

è autoaggiunto se:

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$$

per ogni $v, w \in V$.

112.1 Matrice associata di un endomorfismo autoaggiunto

Scegliamo una base $\mathcal{B}$ **ortonormale** di V. Sia inoltre:

$$T : V \longrightarrow V$$

un endomorfismo e $A = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ la sua matrice associata.
L'endomorfismo T è *autoaggiunto se e solo se* la matrice A è *hermitiana*.

112.2 Endomorfismo L_A autoaggiunto

Prendiamo le basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ o di $\mathbb{C}^n$ (*che sono ortonormali*). Sia inoltre A una matrice quadrata. Valgono le seguenti:

1. L'endomorfismo:
$$L_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
è *autoaggiunto* rispetto al prodotto hermitiano di $\mathbb{C}^n$ *se e solo se* la matrice A è *hermitiana*.

2. L'endomorfismo:
$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
è *autoaggiunto* rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^n$ *se e solo se* la matrice A è *simmetrica*.

Le matrici hermitiane/simmetriche possono quindi rappresentare:

1. Un prodotto hermitiano/scalare

2. Un endomorfismo autoaggiunto (rispetto a una base *ortonormale*)

112.3 Sottospazi invarianti

Sia V:

- uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto hermitiano definito positivo

oppure

- uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo

Sia inoltre:

$$T : V \longrightarrow V$$

un endomorfismo.
Un sottospazio $U \subset V$ è T-invariante se:

$$T(U) \subset U$$

ovvero se T manda tutti gli elementi di U in U.

112.3.1 Sottospazio invariante con endomorfismo autoaggiunto

Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo autoaggiunto e sia $U \subset V$ un sottospazio di V.
Se U è T-invariante, allora il sottospazio *ortogonale* di U, ovvero $U^{\perp}$ è anch'esso T-invariante. In simboli:

$$T(U^{\perp}) \subset U^{\perp}$$

Parte XVIII
Teorema spettrale

Un endomorfismo

$$T : V \longrightarrow V$$

è *autoaggiunto se e solo se* ha una base *ortonormale* di *autovettori* e tutti i suoi *autovalori* sono in $\mathbb{R}$

113 *Versione in* $\mathbb{R}^n$ *del teorema spettrale*

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare euclideo.
Consideriamo una matrice A di taglia $n \times n$ (*quadrata*) a coefficienti reali.
I seguenti fatti sono equivalenti (se vale uno allora valgono anche tutti gli altri):

1. A è simmetrica
2. L_A ha una base *ortonormale* di *autovettori*
3. esiste una matrice *ortogonale* M tale che:

$$^{\mathrm{t}}MAM = M^{-1}AM = D$$

dove D è una matrice diagonale.