

## Esercitazione 3

### Soluzione di Sistemi di Equazioni Lineari: Metodi Iterativi

#### I metodi del gradiente

Si tratta di metodi di Richardson *dinamici* corrispondenti a particolari scelte del parametro  $\alpha_k$  e utilizzati con matrici  $A$  simmetriche e definite positive. In particolare, il metodo del *gradiente* corrisponde alla scelta  $P = I$  e

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{r}^{(k)})^T A \mathbf{r}^{(k)}}, \quad \forall k \geq 0,$$

essendo  $\mathbf{z}^{(k)} \equiv \mathbf{r}^{(k)}$  per ogni  $k \geq 0$  in tal caso. Il metodo del *gradiente preconditionato* si ottiene invece per  $P \neq I$  non singolare e

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A \mathbf{z}^{(k)}}, \quad \forall k \geq 0.$$

Il metodo del gradiente in particolare è un metodo iterativo che determina l'iterata  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  tale per cui  $\Phi(\mathbf{x}^{(k+1)}) = \Phi(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)})$  è minimo lungo la direzione di discesa  $\mathbf{r}^{(k)}$ , essendo  $\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T A \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{b}$ . Nel metodo del gradiente le direzioni di discesa sono rappresentate dai residui  $\mathbf{r}^{(k)}$ , tali per cui  $\mathbf{r}^{(k+1)} \cdot \mathbf{r}^{(k)} = 0$  per ogni  $k \geq 0$ .

Se  $A$  e  $P$  sono simmetriche e definite positive, il metodo del gradiente (precondizionato) converge per ogni scelta di  $\mathbf{x}^{(0)}$  e vale:

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq d^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \quad \forall k \geq 0,$$

essendo  $d = \frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1}$  e  $K(P^{-1}A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$  il numero di condizionamento spettrale di  $P^{-1}A$ ;  $\|\mathbf{v}\|_A = \sqrt{\mathbf{v}^T A \mathbf{v}}$  è la norma dell'energia del vettore  $\mathbf{v}$  con  $A$  una matrice simmetrica e definita positiva.

#### I metodi del gradiente coniugato

Una valida alternativa al metodo del gradiente è il metodo del *gradiente coniugato*. La principale differenza si trova nella scelta della direzione di discesa, che non sarà più  $\mathbf{r}^{(k)}$ , bensì una generica  $\mathbf{p}^{(k)}$ . Il parametro di rilassamento  $\alpha_k$  sarà tale da minimizzare  $\Phi(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)})$ , perciò:

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{p}^{(k)})^T A \mathbf{p}^{(k)}}.$$

Le direzioni di discesa  $\mathbf{p}^{(k)}$  invece vengono costruite in modo tale da essere  $A$ -ortogonali, ovvero ortogonali rispetto al prodotto scalare indotto da  $A$  tra di loro:  $(\mathbf{p}^{(k)})^T A \mathbf{p}^{(j)} = 0$  per  $k \neq j$ . Osserviamo che il metodo del gradiente coniugato *non* è un metodo di Richardson. Se  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è simmetrica e definita positiva, il metodo del *gradiente coniugato* converge a  $\mathbf{x}$  per ogni scelta di  $\mathbf{x}^{(0)}$  in *al più*  $n$  iterazioni (in aritmetica esatta) e

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{2c^k}{1+c^{2k}} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A \quad \text{per } k = 0, 1, \dots,$$

dove  $c = \frac{\sqrt{K(A)} - 1}{\sqrt{K(A)} + 1}$  e  $K(A)$  è il numero di condizionamento spettrale di  $A$ .

Sia  $P$  una matrice non singolare e simmetrica e definita positiva; inoltre sia  $P^{\frac{1}{2}}$  la matrice tale che  $P^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}} = P$ . Il metodo del *gradiente coniugato preconditionato* (PCG) per la soluzione del sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  consiste nell'applicare l'algoritmo del gradiente coniugato sul sistema

$$P^{-\frac{1}{2}}AP^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y} = P^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = P^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}.$$

Se  $A$  e  $P$  sono simmetriche e definite positive, la convergenza del metodo del gradiente coniugato è garantita per ogni scelta di  $\mathbf{x}^{(0)}$  e la velocità di convergenza del metodo dipende da  $K(P^{-1}A)$  invece che da  $K(A)$ .

La funzione Matlab<sup>®</sup> `pcg` implementa il metodo del gradiente coniugato preconditionato. La sintassi per il comando è `[x,FLAG,RES,ITER]=pcg(A,b,TOL,MAXIT,P)`, dove `TOL` è la tolleranza per il criterio d'arresto (se non specificata, impostata a  $10^{-6}$ ), `MAXIT` il numero massimo di iterazioni (default: 20), `P` la matrice di preconditionamento (se non specificata, viene considerata la matrice identità, ossia non viene effettuato il preconditionamento), `x0` di default  $\mathbf{0}$ , `x` la soluzione del sistema, `RES` il residuo legato alla soluzione e `ITER` il numero di iterazioni effettuate.

## Esercizio 1

Si consideri il problema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , dove la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è pentadiagonale:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & -1 & & \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ & & & -1 & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ \vdots \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Si vuole risolvere tale problema con i metodi del gradiente, soddisfacendo una tolleranza di  $10^{-5}$ , a partire dal vettore soluzione iniziale  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, \dots, 0)^T$ .

1. Si implementi la funzione `gradiente.m` in grado di applicare il metodo del *gradiente preconditionato* ad un generico sistema lineare. La funzione deve avere la seguente intestazione:

$$[\mathbf{x}, k] = \text{gradiente}(A, \mathbf{b}, P, \mathbf{x0}, \text{tol}, \text{nmax}),$$

dove  $A$  è la matrice del sistema lineare,  $\mathbf{b}$  è il termine noto,  $P$  è il preconditionatore,  $\mathbf{x0}$  è il vettore iniziale, `tol` è la tolleranza (per il criterio di arresto del residuo normalizzato) e `nmax` è il numero massimo di iterazioni; in uscita la funzione restituisce la soluzione ottenuta  $\mathbf{x}$  ed il numero di iterazioni svolte  $k$ .

2. Si risolva ora il sistema lineare (1) precedente con il metodo del gradiente usando opportunamente la funzione `gradiente.m`. Quante iterazioni vengono effettuate? Rappresentare, in scala semilogaritmica, l'andamento degli errori relativi e dei residui normalizzati in funzione delle iterazioni  $k$ .
3. Si ripeta il punto precedente usando ora il metodo del gradiente coniugato tramite la funzione Matlab<sup>®</sup> `pcg`.
4. Si risolva il sistema lineare (1) per  $n = 16, 32, 64, 128$ , e  $256$ , visualizzando in un grafico l'andamento del numero di iterazioni effettuate da `gradiente.m` e `pcg`. Cosa si osserva? Confrontare, al variare di  $n$ , l'andamento del numero di iterazioni necessarie per il metodo con l'andamento del numero di condizionamento spettrale di  $A$ .

5. Si ripetano i punti 2 e 3 con i metodi del gradiente e gradiente coniugato preconditionato usando la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

## Esercizio 2

Si testi l'efficacia del preconditionamento sul seguente problema.

Per  $n = \{10, 20, \dots, 100\}$

1. si costruisca la matrice  $A$  simmetrica e definita positiva di Wathen di ordine  $n \times n$ , mediante il comando `A = gallery('wathen',n,n)`, ed il termine noto  $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)^T$  di dimensioni compatibili con  $A$ ;
2. si risolva il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con il comando `pcg`, senza preconditionamento, con tolleranza  $10^{-6}$ ;
3. si risolva il sistema mediante il comando `pcg`, con la medesima tolleranza, utilizzando la matrice di preconditionamento di Jacobi (ossia la matrice  $D$  che ha gli stessi elementi di  $A$  sulla diagonale principale ed è nulla altrove).

Si confronti quindi il numero di iterazioni necessarie per la convergenza dei due metodi PCG (con e senza preconditionatore), al variare di  $n$ .