

Esercitazione 2

Soluzione di Sistemi di Equazioni Lineari: Metodi Iterativi

I metodi di Richardson

La generica iterata di un metodo iterativo per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si può scrivere come:

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{r}^{(k)}, \quad k > 0,$$

dove la matrice P non singolare è detta *precondizionatore* e $\mathbf{x}^{(0)}$ è l'iterata iniziale assegnata. È possibile generalizzare questo metodo tramite l'introduzione di un parametro di accelerazione α_k :

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}, \quad k \geq 0, \text{ con } \alpha_k \neq 0.$$

Lo scopo di α_k è migliorare le proprietà di convergenza della successione $\{x^{(k)}\}$. Il metodo si definisce *stazionario* nel caso in cui $\alpha_k = \alpha$, con α costante assegnata, *dinamico* nel caso in cui α_k cambi ad ogni iterazione.

L'algoritmo del metodo di Richardson è il seguente: scelta P non singolare, assegnato $\mathbf{x}^{(0)}$, si ponga $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$ e per $k = 0, 1, \dots$ (fino a un criterio d'arresto soddisfatto)

$$\begin{aligned} &\text{risolvere } P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} \quad (\text{tramite un metodo diretto}) \\ &\text{calcolare il parametro di accelerazione } \alpha_k \neq 0 \\ &\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\ &\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)}. \end{aligned}$$

Nel caso del metodo di Richardson stazionario $\alpha_k = \alpha \neq 0$ è assegnato a priori.

Le proprietà di convergenza del metodo di Richardson stazionario dipende dalla corrispondente matrice di iterazione $B_\alpha = I - \alpha P^{-1}A$; ovvero la convergenza del metodo è garantita per ogni scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$ se e solo se $\rho(B_\alpha) < 1$.

Se $\alpha = 1$ e $P = D$, la matrice diagonale estratta da A , allora il metodo di Richardson stazionario coincide con il metodo di *Jacobi*. Se invece $\alpha = 1$ e $P = D - E$, la matrice triangolare inferiore estratta da A , otteniamo il metodo di *Gauss-Seidel*.

Se A e P sono entrambe simmetriche e definite positive, il metodo di Richardson *stazionario* converge per ogni possibile scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$ se solo se

$$0 < \alpha < 2/\lambda_{\max},$$

dove $\lambda_{\max}(> 0)$ è l'autovalore massimo di $P^{-1}A$. Inoltre il raggio spettrale $\rho(B_\alpha)$ della matrice di iterazione $B_\alpha = I - \alpha P^{-1}A$ è minimo quando

$$\alpha = \alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$$

essendo λ_{\min} l'autovalore minimo di $P^{-1}A$.

Criteri d'arresto

Tipicamente le iterazioni dei metodi vengono arrestate:

- quando la norma del residuo normalizzato è inferiore ad una certa tolleranza data:

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \varepsilon_1;$$

- oppure quando la differenza tra iterate successive è inferiore ad una certa tolleranza data:

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon_2.$$

Nell'implementazione dei metodi iterativi è sempre opportuno verificare che il numero massimo di iterazioni non sia stato raggiunto.

Esercizio 1

Si consideri il problema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è pentadiagonale:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & -1 & & \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ & & & -1 & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ \vdots \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Si vuole risolvere tale problema con il metodo di Richardson, soddisfacendo una tolleranza di 10^{-5} , a partire dal vettore soluzione iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, \dots, 0)^T$.

1. Utilizzando uno script si creino la matrice A (con $n = 50$), il termine noto \mathbf{b} ed il vettore soluzione iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$.
2. Si verifichi che la matrice A sia simmetrica e definita positiva e se ne calcoli il numero di condizionamento spettrale $K(A)$ (senza utilizzare il comando `cond`).
3. Si implementi la funzione `richardson.m` in grado di applicare il metodo di *Richardson preconditionato stazionario* ad un generico sistema lineare. La funzione deve avere la seguente intestazione:

$$[\mathbf{x}, k] = \text{richardson}(A, \mathbf{b}, P, \mathbf{x}_0, \text{tol}, \text{nmax}, \text{alpha}),$$

dove A è la matrice del sistema lineare, \mathbf{b} è il termine noto, P è il preconditionatore, \mathbf{x}_0 è il vettore iniziale, `tol` è la tolleranza (per il criterio di arresto del residuo normalizzato), `nmax` è il numero massimo di iterazioni ed `alpha` è il valore del parametro di accelerazione; in uscita la funzione restituisce la soluzione ottenuta \mathbf{x} ed il numero di iterazioni svolte k .

4. Si risolva il sistema lineare (1) con il metodo di Richardson stazionario non preconditionato ($P = I$), utilizzando i seguenti parametri di accelerazione: $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.33$ ed $\alpha = \alpha_{opt} = 2/(\lambda_{min} + \lambda_{max})$ (parametro di accelerazione ottimale) dove λ_{min} e λ_{max} sono rispettivamente l'autovalore minimo e l'autovalore massimo della matrice A . Per ciascun valore di α si calcoli il raggio spettrale della matrice di iterazione ($B_\alpha = I - \alpha A$) e si risolva il sistema tramite funzione `richardson.m` riportando a video il numero di iterazioni eseguite. Si utilizzino `nmax = 10000` e `tol = 10-6`.

5. Si consideri il metodo di *Jacobi* per risolvere il sistema lineare (1). Prima di applicare l'algoritmo del metodo se ne determinino le proprietà di convergenza. Si utilizzi poi la funzione `richardson.m` per risolvere il sistema lineare usando i dati precedenti. Si riporti il numero di iterazioni eseguite.
6. Si ripeta il punto 5 considerando il metodo di *Gauss-Seidel*.
7. Si consideri il seguente preconditionatore tridiagonale:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Si risolva il sistema lineare con il metodo di Richardson stazionario utilizzando come preconditionatore la matrice P , dopo aver verificato che sia simmetrica e definita positiva, e come parametro di accelerazione α_{opt} . Si calcolino il raggio spettrale della matrice di iterazione ed il numero di condizionamento spettrale di $P^{-1}A$. Si risolva il sistema utilizzando la funzione `richardson.m` riportando a schermo il numero di iterazioni eseguite.