

SERIE ENSEÑANDO A APRENDER

Estrategias de resolución de problemas

Lisette Poggiali

2009

fundación
EMPRESAS POLAR

INTRODUCCIÓN	7
NATURALEZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	9
¿Qué es un problema?	9
¿Qué es la Resolución de Problemas?	11
Etapas de la Resolución de Problemas	12
PROCESOS COGNOSCITIVOS ASOCIADOS A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	17
El papel de la representación en la resolución de problemas	17
Diferencias en las representaciones de expertos y novatos	20
LAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	25
Los métodos heurísticos	25
Trabajar en sentido inverso (working backwards)	27
Subir la cuesta (hill climbing)	28
Análisis medios-fin (means-ends analysis)	29
Los algoritmos	29
Los procesos de pensamiento divergente	30
Encontrar un patrón	31
Elaborar un cuadro	32
Adivinar y chequear	33
Hacer un dibujo	34
Hacer una Lista	34
FACTORES QUE AFECTAN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	37
Factores relacionados con los procesos	37
Factores dependientes del sujeto	38
Factores ambientales	38
METODOLOGÍAS PARA EL ANÁLISIS DE PROCESOS	41
La aritmética mental	41
El análisis de protocolos	43
Los estudios clínicos o de casos	44
La entrevista individual	44
El análisis de errores	45

ADQUISICIÓN Y DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICA	47
Problemas de naturaleza verbal	50
MODELOS Y PROGRAMAS PARA LA ENSEÑANZA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	61
Un modelo instruccional de cuatro fases para enseñar resolución de problemas	61
¡Resuélvelo! El programa de Montague	62
Programa de iniciación a la matemática basado en la resolución de problemas (PIMRP)	63
ESTRATEGIAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN	69
Estrategias de adición	69
Estrategias de sustracción	72
LA FUNCIÓN DEL LENGUAJE	77
COMPRENSIÓN DE LECTURA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	78
METACOGNICIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	81
IMPlicaciones pedagógicas	84
CONCLUSIONES	87
REFERENCIAS	88
ANEXO A. EJEMPLO DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA	94

Uno de los objetivos fundamentales de las instituciones educativas, desde el nivel de preescolar o educación inicial hasta el superior, es que los estudiantes adquieran conocimientos y desarrollen habilidades de diferente naturaleza que les permitan disponer de herramientas para aprender a aprender en su futuro personal y profesional. La capacidad para resolver problemas ha sido considerada una de las más importantes destrezas a desarrollar.

Organizaciones internacionales como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2000) y la Academia Nacional de Educación (ANE) de los Estados Unidos de Norteamérica (1997), han considerado la resolución de problemas como uno de los componentes más importantes del desempeño académico de los estudiantes del siglo XXI. En este sentido, la OCDE ha llevado a cabo un estudio cuyo propósito ha sido desarrollar indicadores que evidencien hasta qué punto los sistemas educativos de los países miembros han preparado a sus estudiantes, egresados del nivel de educación media o secundaria, para desempeñarse como ciudadanos constructivos en sus respectivas sociedades. Este estudio evaluativo más que determinar el dominio de los contenidos curriculares por parte de los estudiantes a su egreso del sistema, se centró en determinar si lo que han aprendido pueden trasferirlo a situaciones que van a encontrar en sus vidas cotidianas cuando compran, viajan, cocinan, manejan su dinero, etc. La ANE, por su parte, ha redefinido el concepto de desempeño académico y ha considerado la resolución de problemas como una de las habilidades que deben desarrollar los estudiantes durante su paso por el sistema escolar, habilidad que deben utilizar ya sea en sus estudios en el nivel superior o en su desempeño en el ámbito laboral.

Las actividades realizadas por los individuos cuando resuelven problemas pueden analizarse en función de las estrategias cognoscitivas involucradas en el proceso de resolución. Históricamente, el estudio de la resolución de problemas ha recibido una atención ocasional por parte de los educadores y los psicólogos educativos. Sin embargo, a partir de la década de los sesenta y del surgimiento del enfoque cognoscitivo en psicología y educación, el estudio sobre los procesos de pensamiento y de resolución de problemas se ha convertido en un área de gran relevancia.

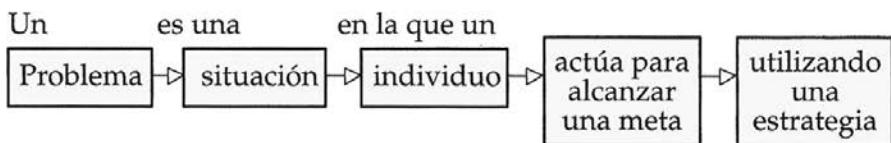
La investigación realizada en esta área evidencia dos aspectos importantes. En primer lugar, que ha habido un progreso sostenido en la formulación de una nueva conceptualización de las relaciones entre la resolución de problemas y el conocimiento. En segundo lugar, que se ha propiciado el desarrollo de una comprensión diferenciada de los procesos cognoscitivos involucrados en esta actividad de naturaleza tan compleja.

A pesar de que el área de resolución de problemas está relacionada con varias disciplinas (Física, Química, Matemática), este libro está referido a algunos aspectos teóricos generales y a otros más específicos relativos al área de la resolución de problemas en Matemática. En tal sentido, tiene como propósito familiarizar a los docentes con el área de la resolución de problemas, cuál es su naturaleza, qué componentes la conforman, qué estrategias se pueden enseñar a los estudiantes para resolver problemas, qué factores influyen en la resolución de problemas, cuáles metodologías existen para analizar los procesos involucrados en dicha actividad y qué implicaciones pedagógicas tiene esta área de conocimiento y de investigación.

¿QUÉ ES UN PROBLEMA?

Un problema ha sido definido como una situación en la cual un individuo desea hacer algo, pero desconoce el curso de la acción necesaria para lograr lo que quiere (Newell y Simon, 1972). Igualmente, como una situación en la cual un individuo actúa con el propósito de alcanzar una meta utilizando para ello alguna estrategia en particular (Chi y Glaser, 1983). Por su parte, Reys, Suydam y Lindquist (1995) señalaron que un problema implica una situación en la cual una persona desea algo y no sabe cómo obtenerlo de manera inmediata. Esto indica que el individuo que trata de resolver el problema, no tiene los recursos o el conocimiento para realizar la tarea, por lo que el problema debe ser resuelto utilizando diferentes destrezas y estrategias.

Gráfico 1.
¿Qué es un problema?

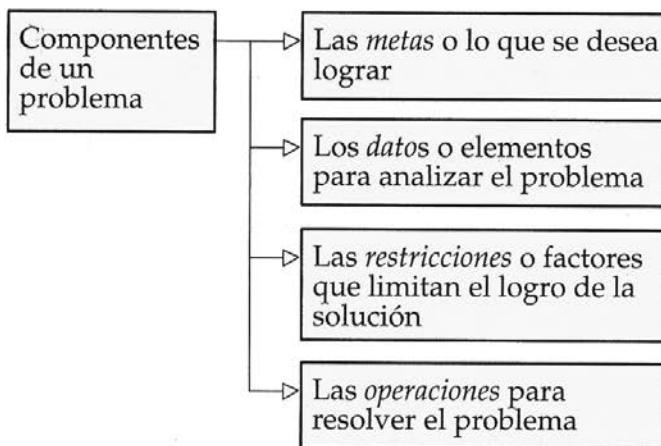


En el marco de la resolución de problemas, cuando se hace referencia a *la meta* o a *alcanzar lo que se quiere o lo que se desea*, significa lo que se aspira lograr: *la solución*. La meta o solución está asociada con un estado inicial y la diferencia que existe entre ambos se denomina *problema*. Las actividades llevadas a cabo por los sujetos tienen por objeto operar sobre el estado inicial para transformarlo en meta. De esta manera, se podría decir que los problemas tienen cuatro componentes: 1) las metas, 2) los datos, 3) las restricciones y 4) los métodos u operaciones (Mayer, 1983).

Las *metas* constituyen lo que se desea lograr en una situación determinada. En un problema puede haber una o varias metas. Estas pueden estar bien o mal definidas. En general, los problemas de naturaleza matemática son situaciones-problema con metas bien definidas. En el ejemplo: "Álvaro tiene 5 creyones. Javier le dio 8 creyones más. ¿Cuántos creyones tiene Álvaro en total?", la meta está

bien definida, consiste en saber cuántos creyones en total tiene Álvaro, después que Javier le dio 8 creyones. Por el contrario, los problemas de la vida real pueden tener metas no tan claramente definidas.

Gráfico 2.
Los componentes de un problema



Los *datos* consisten en la información numérica o verbal disponible con que cuenta el aprendiz para comenzar a analizar la situación problema. Al igual que las metas, los datos pueden ser pocos o muchos, pueden estar bien o mal definidos o estar explícitos o implícitos en el enunciado del problema. En el ejemplo anterior, los datos están bien definidos y son explícitos: 5 creyones y 8 creyones.

Las *restricciones* son los factores que limitan la vía para llegar a la solución. De igual manera, pueden estar bien o mal definidos y ser explícitos o implícitos. En el ejemplo anterior, no hay restricciones. Sin embargo, a continuación se ejemplifica lo que es una restricción.

Anita tiene una muñeca y quiere vestirla con pantalón y franela. Tiene cuatro pantalones de color rojo, blanco, azul y negro, y tiene tres franelas de color verde, amarillo y rosado. Ella quiere hacer diferentes combinaciones con todos los pantalones y las franelas verde y rosada. ¿Cuántas combinaciones diferentes puede hacer?

En el ejemplo anterior, la restricción consiste en que Anita sólo quiere utilizar dos de las tres fanelas, la verde y la rosada, en consecuencia, no todas las fanelas van a ser consideradas para las diferentes combinaciones que quiere hacer. Esto es una *restricción*.

Los *métodos u operaciones* se refieren a los procedimientos utilizados para resolver el problema. En el caso del ejemplo referido a los creyones, la operación a realizar es una adición, por lo tanto, el solucionador deberá aplicar el algoritmo de la suma.

¿QUÉ ES LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

Según Dijkstra (1991), la resolución de problemas es un proceso cognoscitivo complejo que involucra conocimiento almacenado en las memorias de corto y largo plazos.

La *resolución de problemas* consiste en un *conjunto de actividades mentales y conductuales*, a la vez que implica también factores de naturaleza cognoscitiva, afectiva y motivacional. Por ejemplo, si en un problema dado es necesario transformar mentalmente metros en centímetros, esta actividad sería de tipo cognoscitiva. Si se pregunta a un estudiante si está seguro que la solución del problema encontrada por él o ella es la correcta, tal actividad sería de tipo afectiva, mientras que resolver el problema, con papel y lápiz, siguiendo un algoritmo hasta alcanzar su solución, podría servir para ilustrar una actividad de tipo conductual. A pesar de que estos tres tipos de factores están involucrados en la actividad de resolución de problemas, la investigación realizada en el área ha centrado su atención, básicamente, en los factores cognoscitivos involucrados en la resolución.

Según Andre (1986), el proceso de resolución de problemas puede describirse a partir de los elementos considerados a continuación:

1. Una *situación* en la cual se quiere hacer algo, pero se desconocen los pasos precisos para alcanzar lo que se desea.
2. Un conjunto de *elementos* que representan el conocimiento relacionado con el problema.
3. El *análisis del problema, sus metas y datos* por parte del solucionador del problema, con la finalidad de formarse una representación del problema en su sistema de memoria.

4. La *operación sobre la representación* del problema, por parte del solucionador, con la finalidad de reducir la discrepancia entre los datos y las metas. La solución de un problema está constituida por la secuencia de operaciones que pueden transformar los datos en metas.
5. La *operación sobre los datos y las metas* permite que el solucionador utilice o pueda utilizar los siguientes tipos de información:
 - Información almacenada en su memoria de largo plazo en forma de esquemas o producciones.
 - Procedimientos heurísticos.
 - Algoritmos.
 - Relaciones con otras representaciones.
6. El proceso de operar sobre una representación inicial con el fin de encontrar una solución al problema, se denomina *búsqueda*. Como parte del proceso de búsqueda de la solución, la representación puede transformarse en otras representaciones.
7. La búsqueda continúa hasta que se encuentra una solución o el individuo que trata de resolver el problema se da por vencido.

ETAPAS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Varios investigadores han analizado la actividad de resolución de problemas y señalan que tal actividad es un proceso que involucra una serie de etapas. Desde hace mucho tiempo se viene investigando sobre las fases en la resolución de problemas. Es así como Wallas (1926), señaló que éstas incluyen las siguientes:

1. La *preparación* es la fase en la cual el solucionador analiza el problema, intenta definirlo en forma clara y recoge hechos e información relevante.
 2. La *incubación* es la fase en la cual el solucionador analiza el problema de manera inconsciente.
 3. La *inspiración* es la fase en la cual la solución al problema surge de manera inesperada.
 4. La *verificación* es la fase que involucra la revisión de la solución.
- Otros autores (Andre, 1986; Hayes, 1981), señalaron que las etapas en la resolución de problemas sirven para enfatizar el pensamiento

consciente y para aproximarse analíticamente a la solución, así como también para ofrecer una descripción de las actividades mentales de la persona que resuelve el problema. En tal sentido, Andre propuso que las etapas en la resolución de problemas son las especificadas en el Cuadro 1.

Cuadro 1.
Etapas en la resolución de problemas

1. *Darse cuenta del problema*, de que existe una discrepancia entre lo que se desea y lo que se tiene.
2. *Especificación del problema*, se trabaja una descripción más precisa del problema.
3. *Análisis del problema*, se analizan las partes del problema y se aísla la información relevante.
4. *Generación de la solución*, se consideran varias alternativas posibles.
5. *Revisión de la solución*, se evalúan las posibles soluciones.
6. *Selección de la solución*, se escoge aquella que tenga mayor probabilidad de éxito.
7. *Instrumentación de la solución*, se implementa la solución.
8. *Nueva revisión de la solución*, de ser necesario.

Es de hacer notar que las etapas se aplican usualmente a problemas aritméticos y algebraicos, pero también pueden aplicarse a muchos otros tipos de problemas no necesariamente relacionados con disciplinas académicas.

Por su parte, Polya (1965) señaló que un problema puede resolverse correctamente si se siguen los siguientes pasos:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan para llegar a la solución.
3. Ejecutar el plan.
4. Verificar el procedimiento.
5. Comprobar los resultados.

Schoenfeld (1985), a partir de los planteamientos de Polya (1965), propuso actividades de resolución de problemas que se pueden llevar a cabo en el aula, con la finalidad de propiciar situaciones

semejantes a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso de desarrollo de resolución de problemas. Su modelo de resolución abarca los siguientes pasos:

Análisis, Exploración y Comprobación de la Solución y puede aplicarse a problemas matemáticos y algebraicos. Aunque estos pasos no necesariamente tienen que ser aplicados en su totalidad, en el Anexo D se incluye un ejemplo de resolución de un problema matemático siguiendo este modelo.

Análisis

1. Trazar un diagrama, si es posible.
2. Examinar casos particulares.
3. Probar a simplificar el problema.

Exploración

1. Examinar problemas equivalentes: sustituir las condiciones por otras equivalentes, recombinar los elementos del problema de modo diferente, replantear el problema.
2. Examinar problemas ligeramente modificados: establecer submetas, descomponer el problema en casos y analizar caso por caso.
3. Examinar problemas ampliamente modificados: construir problemas análogos con menos variables, mantener fijas todas las variables menos una para determinar qué efectos tiene esa variable, tratar de sacar partido de problemas afines que tengan parecido en su forma, en sus datos o en sus conclusiones.

Comprobación de la Solución

1. Verificar la solución obtenida siguiendo criterios específicos: utilización de todos los datos pertinentes, uso de estimaciones o predicciones.
2. Verificar la solución obtenida siguiendo criterios generales: examinar la posibilidad de obtener la solución por otro método, reducir la solución a resultados conocidos.

A partir de las etapas propuestas por Polya (1965), Jones (2003) sugirió que este modelo se puede resumir en los siguientes pasos: *observar, planificar, resolver y evaluar*. En otras palabras, comprender el problema, diseñar un plan, llevarlo a cabo y, finalmente, repasar

el procedimiento con la finalidad de examinar la solución obtenida. Este proceso puede considerarse un modelo a seguir y utilizarse como un lineamiento para la resolución de problemas. Su aplicación sugiere el uso de estrategias como las que se enumeran a continuación.

1. *Visualizar* lo que se debe hacer manipulando objetos.
2. *Elaborar* un dibujo o un diagrama para evidenciar la información y las relaciones que hay en ella.
3. Buscar patrones, dibujos o números e identificarlos.
4. *Construir* un cuadro y organizar los datos para descubrir los patrones.
5. *Analizar* sistemáticamente todas las posibilidades.
6. *Predecir* y chequear las predicciones utilizando el conocimiento previo.
7. *Trabajar* hacia atrás a partir de una respuesta dada, es decir, trabajar a la inversa.
8. *Clasificar* información relevante para identificar información deseada, dada y necesitada y determinar la meta.
9. *Segmentar* el problema en problemas más sencillos.
10. *Modificar* la perspectiva de abordaje del problema y adoptar otro método o estrategia.
11. *Examinar* lo ejecutado con la finalidad de detectar si se cometieron errores.

En síntesis, como puede observarse, desde principios del siglo XX diferentes autores han propuesto pasos, fases o etapas que se deben cumplir para poder resolver problemas con éxito. Este aspecto es importante ya que permite, de antemano, planificar los pasos a seguir en la resolución de un problema, ejecutar esos pasos y, posteriormente, supervisar el proceso de resolución y comprobar la solución o resultado.

Montague (2002), señaló que cada día los individuos encuentran problemas que requieren de la Matemática para resolverlos. La cuestión está en cómo se puede ayudar a los estudiantes a convertirse en sujetos expertos solucionadores de problemas.

Desde hace aproximadamente diez años, esta autora se ha dedicado a examinar las dificultades que confrontan los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos. Los resultados de sus estudios han evidenciado que la resolución de problemas, eficiente y efectiva, depende de la habilidad de los estudiantes para seleccionar y aplicar procesos y estrategias cognoscitivas y metacognoscitivas que les permitan comprender, representar y resolver los problemas. Para Montague las estrategias cognoscitivas son las que contribuyen a hacer: *¿qué hacer?*, mientras que las metacognoscitivas son estrategias reflexivas: *¿qué estoy haciendo? ¿qué he hecho?*. Como una contribución a mejorar el proceso de resolución de problemas, Montague ha indicado que los procesos cognoscitivos asociados a la resolución de problemas son los siguientes:

1. Comprender la información lingüística y numérica contenida en el enunciado del problema.
2. Traducir y transformar esa información en notaciones matemáticas, algoritmos y ecuaciones.
3. Observar las relaciones entre los elementos del problema.
4. Formular un plan para resolver el problema.
5. Predecir los resultados.
6. Supervisar la vía hacia la solución a medida que se ejecutan los pasos para alcanzarla.
7. Detectar y corregir los errores durante la resolución del problema.

EL PAPEL DE LA REPRESENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un aspecto importante que se debe considerar en el proceso de resolución de problemas es la *representación*. Ésta consiste en la *transformación de la información presentada a una forma más fácil de almacenar en el sistema de la memoria*, e incluye la identificación de las metas y los

datos. La representación también se ha denominada espacio del problema para referirse a las representaciones mentales de los individuos acerca de su estructura y de los hechos, los conceptos y sus relaciones.

A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar cómo se puede representar un problema en la memoria.

Un autobús parte de la parada en la mañana. Se detiene en la primera parada y recoge 5 personas. Sigue hasta la próxima parada y allí suben 6 personas. Continúa hasta la siguiente parada y suben 4 personas. En la próxima parada suben 5 personas y se bajan 3. En la siguiente parada suben 5 personas y se bajan 4. En la parada siguiente suben 6 personas y se baja 1. La próxima vez suben 3 personas y se bajan 2. La vez siguiente se bajan 2 personas y no sube nadie. En la siguiente parada nadie espera por el autobús, de manera que éste no se detiene. En la próxima parada suben 10 personas y se bajan 3. En la siguiente suben 3 personas y se bajan 6. Finalmente, el autobús llega al terminal. ¿Cuántas paradas hay en la ruta del autobús?

(Tomado de Andre, 1986, p. 177)

La tendencia más común es que la mayoría de los estudiantes puedan decir cuántas personas llegan a la parada final, cuántas subieron o cuántas bajaron, pero muy pocos están en capacidad de indicar cuántas paradas hay en la ruta del autobús, debido a que seleccionaron la información numérica como datos importantes y la representaron internamente en la forma de operaciones aritméticas.

En términos de los procesos involucrados en la resolución de problemas, esto sucede porque la meta del problema no está bien definida a pesar de que hay datos numéricos explícitos precisos. El énfasis sobre el número de personas que suben y bajan del autobús hace posible que los estudiantes piensen que tienen que hacer algo con esos datos y, en tal sentido, construyen una meta, la cual se representa como el logro de una cantidad total. Esta decisión conduce a los estudiantes a seleccionar cierta información como relevante (número de personas que suben y bajan del autobús) e ignorar otra (número de paradas del autobús).

De acuerdo con Kintsch y Greeno (1985) y Nathan, Kintsch y Young (1992), la comprensión de los problemas verbales implica la construcción de diferentes niveles de representación. Algunos son textuales (texto base) y otros son situacionales o de alto nivel (situación modelo o problema modelo).

Para estos autores, se construye una sola representación de alto nivel coordinada con el texto base que especifica los elementos indispensables para resolver el problema: el problema modelo (PM). En este nivel de representación, sólo la información relevante a la solución del problema es extraída del texto base o inferida a partir del conocimiento previo relativo al tópico del problema.

En este marco de referencia, los problemas se comprenden, primero, por la creación de un conjunto de esquemas que representan los diferentes estados del problema y, segundo, por la agrupación de este conjunto de esquemas. Los procedimientos para la creación de los esquemas y su agrupación se ponen en práctica por la presencia de claves específicas en el texto: valores numéricos o expresiones lingüísticas específicas, tales como *cuántos*, *tiene*, entre otros. Las dificultades para resolver los problemas se deben por un error de apareamiento entre las formas lingüísticas contenidas en el problema como por ejemplo, *más... que* y el esquema (comparación).

Por su parte, Staub y Reusser (1995) señalaron que además del nivel textual se desarrollan dos representaciones de alto nivel: la situación modelo (SM) y el problema modelo (PM). El modelo propuesto por estos autores tiene como propósito proveer un análisis refinado de los procesos de comprensión del texto y de la situación del problema. El aspecto innovador e importante de este modelo es la construcción de una representación *no matemática*: la situación modelo (SM).

Moreau y Coquin-Viennot (2003), llevaron a cabo un estudio que tuvo como objetivo especificar la naturaleza de las representaciones construidas durante la lectura de un problema de naturaleza verbal, mediante el examen de cómo los niños entre 10 y 11 años, con alta o baja habilidad matemática, seleccionaban diferentes tipos de información. Los resultados obtenidos evidenciaron que los sujetos participantes en el estudio pudieron diferenciar entre la información indispensable para resolver el problema y aquélla que no lo era. Los

resultados de este estudio confirmaron el modelo de Staub y Reusser (1995), en cuanto a la conformación de dos representaciones. Igualmente, se confirmó la hipótesis referida a la diferencia en la selección de información en función de la habilidad matemática de los sujetos participantes. La comprensión de los problemas verbales involucra la construcción de una representación no matemática que especifica eventos, acciones y sus relaciones.

Kintsch y Greeno (1985), expresaron que una estrategia adecuada para resolver problemas es traducir cada oración del enunciado del problema a una representación mental interna y, luego, organizar la información relevante en otra coherente con la situación descrita en dicho enunciado. En este sentido, se puede concluir que las representaciones mentales, adecuadas o inadecuadas, utilizadas por los individuos para resolver problemas, pueden facilitar o inhibir la solución.

DIFERENCIAS EN LAS REPRESENTACIONES DE EXPERTOS Y NOVATOS

En la literatura sobre la resolución de problemas se pueden distinguir dos tendencias. La primera enfatiza el proceso de resolución y la segunda resalta el conocimiento base del individuo que resuelve el problema, particularmente la organización de ese conocimiento. En este sentido, podría señalarse que ha habido un cambio en el foco de interés en esta área. Éste ha pasado del análisis de las estrategias generales más o menos independientes de un dominio del conocimiento - como es el caso de los pasos sugeridos por Polya (1965) - al conocimiento base referido al área en la cual el individuo resuelve el problema como, por ejemplo, el conocimiento de la Matemática, de la Física o de la Química, necesario para resolver problemas en estas disciplinas. Resolver problemas en áreas o dominios específicos requiere, por lo tanto, del conocimiento de la disciplina involucrada. Sin embargo, se ha puesto en evidencia que la sola presencia del conocimiento almacenado en el sistema de memoria, no implica necesariamente que esté disponible cuando se resuelve el problema.

En años recientes, los investigadores en el área de la resolución de problemas han examinado la ejecución de individuos en tareas que requieren muchas horas de aprendizaje y de experiencia. Estos

estudios han focalizado su interés en el examen de las diferencias experto/novato en diferentes áreas del conocimiento.

Desde los inicios de la década de los ochenta, Chi, Feltovich y Glaser (1981) y Chi, Glaser y Rees (1982) realizaron algunos estudios con el fin de examinar el comportamiento de los individuos expertos y novatos cuando resuelven problemas de Física. Al resumir los diversos experimentos de sus estudios, estos autores concluyeron que los aspectos que diferencian a los expertos de los novatos cuando resuelven problemas de Física son los siguientes:

1. Las estructuras cognoscitivas (esquemas) de los expertos se basan en principios físicos (por ejemplo, el principio de la conservación de la energía y la segunda Ley de Newton), mientras que las de los novatos se basan en objetos (por ejemplo, planos inclinados) y en constructos (por ejemplo, fricción, gravedad).
2. Los contenidos de los esquemas de los expertos y los novatos no difieren significativamente en información; sin embargo, las estructuras de los novatos carecen de las relaciones importantes que constituyen la base de las soluciones. En los expertos existen vínculos entre la representación del problema y los principios físicos que constituyen la base para resolverlo, mientras que en los novatos estos vínculos no existen.
3. Las estructuras cognoscitivas de los expertos están ordenadas jerárquicamente, de arriba hacia abajo, con los conceptos más generales en la parte superior del nivel de abstracción, mientras que en los novatos, los diferentes niveles del conocimiento no están bien integrados y no hay acceso fácil de un nivel a otro.

Diversos investigadores en el área de la Matemática, han examinado los patrones de errores de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales con la finalidad de comprender sus procesos de razonamiento y proveer instrucción para remediarlos (Jitendra y Kameenui, 1996). Estos autores señalaron, que los diversos métodos para clasificar los errores en Matemática oscilan entre los errores simples de cálculo y otros más sofisticados derivados de teorías sustentadas en el análisis de errores en la lectura del enunciado del problema y en el procesamiento de esa información.

Los errores de cálculo contienen varias categorías como: operación equivocada, algoritmo defectuoso, algoritmo incompleto, error de agrupación, inversión inapropiada, error de identidad, error cero, respuesta aleatoria y error por descuido. Los errores basados en el análisis de errores en la lectura del enunciado del problema, incluyen errores de comprensión del enunciado del problema y de decodificación. Los errores derivados del enfoque de procesamiento de información, abarcan dificultades de lenguaje, representaciones espaciales, conocimiento inadecuado de conceptos y destrezas prerrequisitos, asociaciones incorrectas y aplicación de estrategias irrelevantes.

Como ya se planteó anteriormente, los resultados de los estudios que han examinado las diferencias entre los expertos y los novatos cuando resuelven problemas, han evidenciado que los primeros poseen más conocimiento específico que los novatos y que su conocimiento está organizado de manera más coherente, alrededor de un conjunto de ideas claves. Además del conocimiento específico, Yekovich, Thompson y Walker (1991), expresaron que los "expertos y los novatos también difieren en la manera cómo representan mentalmente los problemas. Los novatos representan aspectos superficiales del problema, mientras que los expertos representan el significado del problema" (p. 190). Finalmente, los expertos y los novatos evidencian diferencias estratégicas en la resolución de los problemas. Por ejemplo, los expertos tienden a utilizar un enfoque basado en esquemas para resolver los problemas en dominios bien definidos trabajando hacia adelante. Los novatos, por su parte, buscan el procedimiento para lograr la solución y trabajan hacia atrás.

El estudio de Jitendra y Kameenui (1996), tuvo como propósito determinar los efectos diferenciales de una estrategia específica y una general en los patrones de errores de expertos y novatos cuando resuelven problemas matemáticos verbales. Se estableció como criterio para diferenciar a los expertos de los novatos, que los sujetos que obtuvieran puntajes por encima de 75% en la tarea de entrenamiento se considerarían expertos y los sujetos cuya ejecución estuviera por debajo del 75% se considerarían novatos.

Los problemas verbales utilizados en el estudio fueron categorizados como problemas parte-todo (Putnam, 1987), parte-parte-todo (Carpenter y Moser, 1982) o problemas de clasificación (Silbert,

Carnine y Stein, 1990). Los problemas fueron problemas verbales sencillos de adición y sustracción de una operación, difíciles de una operación y de más de una operación, y se construyeron basándose en el esquema parte-todo. Ejemplos de estos problemas se presentan a continuación.

Problema verbal sencillo de una operación. MacFast vende 250 sándwiches cada día. El viernes, el récord de ventas de sándwiches de pollo fue 172. ¿Cuántos sándwiches que no eran de pollo se vendieron el viernes?

Problema verbal difícil de una operación. Había 250 niños en la fiesta. Juan trajo 145 vasos azules para la fiesta. Ana trajo 95 platos azules y 87 vasos rojos. ¿Cuántos vasos trajeron a la fiesta?

Problema verbal de más de una operación. Javier y Marcela trabajaron 320 horas en julio y 375 horas en agosto. Javier trabajó 150 horas en julio. En agosto, trabajó 125 horas. ¿Cuántas horas trabajó Marcela por todo en julio y en agosto?

La muestra estuvo conformada por 46 estudiantes de tercer grado de dos escuelas rurales. 19 estudiantes conformaron el grupo que recibió la estrategia específica (GEE) y 27 estudiantes recibieron la estrategia general (GEG). En ambos grupos había *expertos* y *novatos*. Los sujetos fueron entrenados en el uso de las estrategias durante dos días y recibieron los mismos problemas y la misma prueba al final de cada sesión de entrenamiento. Seguidamente al entrenamiento se realizó una fase de transferencia. En ella se evaluó la habilidad de los estudiantes para aplicar las estrategias aprendidas.

Los resultados obtenidos evidenciaron que los expertos mantuvieron un número relativamente bajo de errores en la postprueba. Por su parte, los patrones de errores de los novatos, tanto en la prueba de transferencia como en la que se administró una semana después, indicaron que la organización de su conocimiento y su uso de estrategias de resolución eran diferentes a la de los expertos. Los novatos, aparentemente, comprendieron de forma inadecuada los problemas y sus correspondientes relaciones semánticas, las cuales, a su vez, los condujeron a una representación inapropiada de los problemas. Las estrategias utilizadas por los novatos no fueron efectivas y tendían a seleccionar una operación independientemente

del significado del problema. Cuando los novatos tienen poca información sobre un problema, se apoyan en estrategias generales, las cuales, por naturaleza, son menos facilitadoras, particularmente cuando es necesario el conocimiento específico para alcanzar una solución.

Los resultados de los estudios realizados conducen a pensar que existe un nivel de interacción entre la estructura de conocimiento del sujeto y sus habilidades de procesamiento, y señalan que las relaciones entre el conocimiento base y los procesos en la resolución de problemas están mediadas por la calidad de su representación (Gagné y Glaser, 1987).

LAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Las estrategias para resolver problemas se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos en metas y obtener una solución. Las estrategias para la resolución de problemas incluyen los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente.

LOS MÉTODOS HEURÍSTICOS

Estas son estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizadas por los solucionadores de problemas, basadas en la experiencia previa con problemas similares. Estas estrategias indican las vías o posibles enfoques a seguir para alcanzar una solución. El heurístico es una estrategia de resolución de problemas mediante la cual el solucionador prueba diferentes enfoques posibles y evalúa el progreso hacia una solución satisfactoria después de cada intento.

De acuerdo con Monereo y colaboradores (1995), los *procedimientos heurísticos* son “acciones que comportan un cierto grado de variabilidad y su ejecución no garantiza la consecución de un resultado óptimo como, por ejemplo, reducir el espacio de un problema complejo a la identificación de sus principales elementos” (p. 20). Mientras que Duhalde y González (1997), señalaron que un *heurístico* es “un procedimiento que ofrece la posibilidad de seleccionar estrategias que nos acercan a una solución” (p. 106).

Los métodos heurísticos pueden variar en el grado de generalidad. Algunos son muy generales y se pueden aplicar a una gran variedad de dominios, mientras que otros pueden ser más específicos y se limitan a un área particular del conocimiento. La mayoría de los programas de entrenamiento en solución de problemas enfatizan procesos heurísticos generales como los planteados por Polya (1965) o Hayes (1981).

Los métodos heurísticos específicos están relacionados con el conocimiento de un área en particular. Éste incluye estructuras cognoscitivas más amplias para reconocer los problemas, algoritmos más complejos y una gran variedad de procesos heurísticos específicos.

Chi y colaboradores (1981, 1982), señalan que entre el conocimiento que tienen los expertos solucionadores de problemas están los *esquemas de problemas*. Éstos consisten en conocimiento estrechamente relacionado con un tipo de problema en particular y que contiene:

- *Conocimiento declarativo*: principios, fórmulas y conceptos.
- *Conocimiento procedimental*: conocimiento acerca de las acciones necesarias para resolver un tipo de problema en particular.
- *Conocimiento estratégico*: conocimiento que permite al individuo, solucionador del problema, decidir sobre las etapas o fases que debe seguir en el proceso de solución.

Diversos investigadores han estudiado el tipo de conocimiento involucrado en la resolución de un problema, encontrándose que los resultados apoyan la noción de que la eficiencia en la resolución de problemas está relacionada con el conocimiento específico del área en cuestión (Mayer, 1992; Stenberg, 1987). En este sentido, estos autores coinciden en señalar que los tipos de conocimiento necesarios para resolver problemas incluyen:

1. *Conocimiento declarativo*: por ejemplo, saber que un kilómetro tiene mil metros.
2. *Conocimiento lingüístico*: conocimiento de palabras, frases, oraciones.
3. *Conocimiento semántico*: dominio del área relevante al problema, por ejemplo, saber que si Álvaro tiene 5 bolívares más que Javier, esto implica que Javier tiene menos bolívares que Álvaro.
4. *Conocimiento esquemático*: conocimiento de los tipos de problema.
5. *Conocimiento procedimental*: conocimiento del o de los algoritmos necesarios para resolver el problema.
6. *Conocimiento estratégico*: conocimiento de los tipos de conocimiento y de los procedimientos heurísticos.

Ejemplo de Problema: Álvaro tiene un fuerte. Javier tiene tres bolívares más que Álvaro. ¿Cuántos bolívares tiene Javier?

Cuadro 2.

Tipos de conocimiento requeridos para resolver un problema
(Stenberg, 1987)

Paso	Tipos de Conocimiento	Ejemplos
Representación del Problema	Lingüístico	Javier tiene tres bolívares más que Álvaro significa: $J = A + 3$
Traducción	Declarativo	Un fuerte equivale a 5 bolívares
Integración	Procedimental	Problema de comparación, consistente en dos subunidades y una superunidad
Solución del Problema	Tipos de Conocimiento	
Planificación	Estratégico	El objetivo es sumar 3 + 5
Ejecución	Algorítmico	Procedimientos para contar

Entre los procedimientos heurísticos generales se pueden mencionar los siguientes:

TRABAJAR EN SENTIDO INVERSO (WORKING BACKWARDS)

Este procedimiento implica comenzar a resolver el problema a partir de la meta o metas y tratar de transformarlas en datos, yendo de la meta al principio. El procedimiento heurístico es utilizado en geometría para probar algunos teoremas; se parte del teorema y se trabaja hacia los postulados. Es útil cuando el estado-meta del problema está claro y el inicial no. Véase el ejemplo a continuación.

Problema. Juan caminó desde Santa Clara hasta Palo Alto. Le tomó 1 hora 25 minutos caminar desde Santa Clara hasta Los Altos. Luego le tomó 25 minutos caminar desde Los Altos hasta Palo Alto. Llegó a Palo Alto a las 2:45 p. m. ¿A qué hora salió Juan de Santa Clara?

Estrategia

Comprender	¿Qué hay que encontrar?	Hay que encontrar a qué hora salió Juan de Santa Clara.
Planificar	¿Cómo se puede resolver este problema?	Se puede trabajar en sentido inverso (<i>work backwards</i>) desde la hora que Juan llegó a Palo Alto. Se resta el tiempo que le tomó caminar desde Los Altos hasta Palo Alto. Luego se resta el tiempo que le tomó caminar desde Santa Clara hasta Los Altos.
Resolver	Comienza a las 2:45 p.m. Esta es la hora que Juan llegó a Palo Alto. Resta 25 minutos. Este es el tiempo que le tomó ir desde Los Altos hasta Palo Alto. La hora es: 2:20 p.m. Resta 1 hora 25 minutos. Este es el tiempo que le tomó llegar desde Santa Clara hasta Los Altos.	Juan partió de Santa Clara a las 12:55 p.m.

(Este ejemplo fue tomado de <http://www.mathstories.com>).

SUBIR LA CUESTA (HILL CLIMBING)

Este procedimiento consiste en avanzar desde el estado actual a otro que esté más cerca del objetivo, de modo que la persona que resuelve el problema, al encontrarse en un estado determinado, evalúa el nuevo estado en el que estará después de cada posible movimiento, pudiendo elegir aquél que lo acerque más al objetivo. Este tipo de procedimiento es muy utilizado por los jugadores de ajedrez.

ANÁLISIS MEDIOS-FIN (MEANS-ENDS ANALYSIS)

Este procedimiento permite al que resuelve el problema trabajar en un objetivo a la vez. Consiste en descomponer el problema en submetas, escoger una para trabajar, y solucionarlas una a una hasta completar la tarea eliminando los obstáculos que le impiden llegar al estado final. Según Mayer (1983), el que resuelve el problema debe hacerse las siguientes preguntas: ¿cuál es mi meta?, ¿qué obstáculos tengo en mi camino?, ¿de qué dispongo para superar estos obstáculos? En el estudio de Larkin, McDermott, Simon y Simon (1980), se encontró que los estudiantes de un curso introductorio de Física utilizaban el análisis medios-fin para resolver problemas, mientras que los físicos más expertos utilizaban otro procedimiento que evitaba la creación de muchas metas.

LOS ALGORITMOS

Estos son procedimientos específicos que señalan paso a paso la solución de un problema y que garantizan el logro de una solución siempre y cuando sean relevantes al problema.

Monereo y colaboradores (1995), señalaron que un procedimiento algorítmico es una sucesión completamente prefijada de acciones que hay que realizar, y su correcta ejecución lleva a una solución segura del problema como, por ejemplo, realizar una raíz cuadrada o coser un botón.

Por otra parte, Duhalde y González (1997) indicaron que un algoritmo es una prescripción efectuada paso a paso para alcanzar un objetivo particular. El algoritmo garantiza la obtención de lo que se propone para alcanzar la solución.

De esta manera, el algoritmo se diferencia del método heurístico en que éste último constituye sólo “una buena apuesta”, ya que ofrece una probabilidad razonable de que el estudiante se acerque a una solución. Por lo tanto, es aceptable que se utilicen los procedimientos heurísticos, en vez de los algorítmicos, cuando no se conoce la solución de un problema.

LOS PROCESOS DE PENSAMIENTO DIVERGENTE

Este tipo de procedimiento permite la generación de enfoques alternativos a la solución de un problema y están relacionados, principalmente, con la fase de inspiración y con la creatividad. Es decir, es el pensamiento creativo, imaginativo y flexible que genera una gran variedad y cantidad de ideas o respuestas a un problema.

La adquisición de habilidades para resolver problemas ha sido considerada como el aprendizaje de sistemas de producción que involucran tanto el conocimiento declarativo como el procedural. Existen diversos procedimientos que pueden facilitar o inhibir la adquisición de habilidades para resolver problemas, entre los cuales se pueden mencionar:

- Ofrecer a los estudiantes representaciones metafóricas.
- Permitir la verbalización durante la solución del problema.
- Hacer preguntas.
- Ofrecer ejemplos.
- Ofrecer descripciones verbales.
- Trabajar en grupo.
- Utilizar auto-explicaciones.

Además de las estrategias ya descritas, existen otras como, por ejemplo, encontrar un patrón, elaborar un cuadro, adivinar y chequear, hacer un dibujo o elaborar una lista. Éstas se ilustran a continuación.

ENCONTRAR UN PATRÓN

Problema. Carola ha construido una secuencia de números que comienza con 1, 3, 6, 10, 15. Si ella sigue este patrón, ¿cuáles son los próximos cuatro números en la secuencia?

Estrategia

<i>Comprender</i>	¿Qué hay que encontrar?	Hay que encontrar cuatro números después del número 15.
<i>Planificar</i>	¿Cómo se puede resolver este problema?	Se debe encontrar un patrón. Obsérvense los números. Los números nuevos dependen del que los precede.
<i>Resolver</i>	Obsérvense los números en la secuencia:	$3 = 1 + 2$ (el número inicial es 1, se añade 2 para llegar a 3); $6 = 3 + 3$ (el número inicial es 3, se añade 3 para llegar a 6); $10 = 6 + 4$ (el número inicial es 6, se añade 4 para llegar a 10); $15 = 10 + 5$ (el número inicial es 10, se añade 5 para llegar a 15). Los números nuevos son: $21, 28, 36$ y 45 ; $15 + 6 = 21$; $21 + 7 = 28$; $28 + 8 = 36$ y $36 + 9 = 45$

Este ejemplo fue tomado de <http://www.mathstories.com>

ELABORAR UN CUADRO

Problema. Álvaro ahorró 300 bolívares el lunes. Cada día después del lunes, Álvaro ahorró dos veces más que el día anterior. Si este patrón continúa, ¿cuántos bolívares habrá ahorrado Álvaro para el viernes?

Estrategia

<i>Comprender</i>	¿Qué hay que encontrar? ¿Qué se sabe?	Hay que encontrar cuántos bolívares habrá ahorrado Álvaro para el viernes. Se sabe que Álvaro ahorró Bs. 300 el lunes y que cada día ahorra dos veces más que el día anterior.
<i>Planificar</i>	¿Cómo se puede resolver este problema?	Se puede elaborar un cuadro como el que está debajo. Se escribe la cantidad de dinero que Álvaro ahorró cada día. Hay que recordar que se debe duplicar el número cada día.
<i>Resolver</i>	Se debe elaborar el cuadro	Para el viernes Álvaro habrá ahorrado Bs. 4.800,00.

Día	Cantidad de Dinero Ahorrado (Bs)
Lunes	Bs. 300
Martes	Bs. 600
Miércoles	Bs. 1 200
Jueves	Bs. 2 400
Viernes	Bs. 4 800

Este ejemplo se adaptó de los ejemplos que aparecen en <http://www.mathstories.com>

ADIVINAR Y CHEQUEAR

Problema. Ana y Judit vendieron 12 entradas para una fiesta entre las dos. Ana vendió dos entradas más que Judit. ¿Cuántas entradas vendió cada una?

Estrategia

<i>Comprender</i>	¿Qué hay que encontrar? ¿Qué se sabe?	Hay que encontrar cuántas entradas vendió Ana y cuántas Judit. Se sabe que entre las dos vendieron 12 entradas. También se sabe que Ana vendió 2 entradas más que Judit.
<i>Planificar</i>	¿Cómo se puede resolver este problema?	Se puede elaborar un cuadro como la que está debajo. Se escribe la cantidad de dinero que Álvaro ahorró cada día. Hay que recordar que se debe duplicar el número cada día.
<i>Resolver</i>	Se debe comenzar con un intento. Ver ejemplo debajo.	Se puede adivinar y chequear para encontrar dos números que sumen 12 y exista una diferencia de 2 entre ellos. Si el primer intento no funciona, se debe tratar con otros números diferentes. Resultado: Ana vendió 7 entradas y Judit vendió 5 entradas.

Primer Intento: Ana = 8 entradas, Judit = 4 entradas

Chequear: $8 + 4 = 12$; $8 - 4 = 4$ (Ana vendió 4 entradas más)

¡Estos números no son!

Segundo Intento: Ana = 7 entradas, Judith = 5 entradas

Chequear: $7 + 5 = 12$; $7 - 5 = 2$ (Ana vendió 2 entradas más)

¡Estos números sí son!

Este ejemplo fue tomado de <http://www.mathstories.com>

HACER UN DIBUJO

Problema. Laura tiene una bolsa con 3 cajitas grises, 4 amarillas y 1 negra. ¿Qué fracción de la bolsa de cajitas es gris?

Estrategia

Comprender	¿Qué hay que encontrar? ¿Qué se sabe?	Hay que encontrar cuántas cajitas hay por todo. Luego se debe encontrar qué fracción de la bolsa de cajitas es gris. Se sabe que en la bolsa hay 3 cajitas grises, 4 amarillas y 1 negra.
Planificar	¿Cómo se puede resolver este problema?	Se puede hacer un dibujo para mostrar la información. Luego utilizar el dibujo para encontrar la respuesta.
Resolver	Se deben dibujar 8 cajitas. Ver ejemplo debajo.	$\frac{3}{8}$ de las cajitas es gris.



Este ejemplo fue adaptado de los ejemplos que se encuentran en <http://www.mathstories.com>

HACER UNA LISTA

Problema. Isabella está tomando fotos de Jaime, Karen y Miguel. Ella les pregunta: "¿De cuántas maneras diferentes pueden hacer una fila?"

Estrategia

Comprender	¿Qué hay que encontrar?	Hay que encontrar de cuántas maneras diferentes pueden hacer una fila tres amigos.
Planificar	¿Cómo se puede resolver este problema?	Se puede hacer una lista para encontrar las diferentes maneras de conformar la fila. Seleccionar uno de los amigos para que sea el primero, y otro para que sea el segundo y el que quede será el tercero.
Resolver	Cuando se elabore la lista, se puede observar que hay dos maneras para que Jaime sea el primero, dos para que Karen sea la primera y dos para que Miguel sea el primero.	Hay 6 maneras diferentes de conformar la fila con los tres amigos: Jaime, Karen y Miguel.

Primero	Segundo	Tercero
Jaime	Karen	Miguel
Jaime	Miguel	Karen
Karen	Jaime	Miguel
Karen	Miguel	Jaime
Miguel	Karen	Jaime
Miguel	Jaime	Karen

Este ejemplo fue tomado de <http://www.mathstories.com>

Desde la perspectiva del enfoque cognoscitivo, se han revisado los factores que influyen en el proceso de resolución de problemas. Existen algunas categorías que permiten agrupar estos factores en: relacionados con los procesos, dependientes del sujeto y ambientales.

FACTORES RELACIONADOS CON LOS PROCESOS

Los procesos mentales desarrollados por los individuos mientras resuelven un problema, han sido objeto de estudio por parte de los investigadores del paradigma cognoscitivo. Por ejemplo, la mayor parte de las investigaciones en el área de la Matemática, directa o indirectamente, tienen por objeto analizar y generar modelos que reflejen los procesos subyacentes a la ejecución de los sujetos. Dentro de este marco se encuentran los trabajos de Suppes y Groen, quienes desde 1967 se han dedicado a explorar cómo los niños y las niñas de los primeros grados de Educación Básica resuelven problemas de adición con números menores de diez. Estos autores han examinado varios modelos y a partir de sus trabajos se han estudiado muchos otros procesos aritméticos, como la sustracción, la multiplicación, la división y las operaciones con fracciones. Tales modelos se han extendido para intentar explicar otros procesos.

En el análisis de los procesos involucrados en la resolución de problemas, la aritmética mental (análisis cronométrico) es la técnica que ha generado mejor información. En esencia, esta técnica consiste en medir el tiempo requerido por un sujeto para dar respuesta a un problema. Se parte del supuesto de que este tiempo está en función de los procesos cognoscitivos involucrados para resolver el problema.

El estudio de Groen y Parkman (1972), ilustra de alguna manera este tipo de análisis. En su estudio, estos autores presentaron a niños y niñas de primer grado, problemas de adición y les pidieron emitir la respuesta en el tiempo más breve posible. Los autores comprobaron que los datos obtenidos se ajustaban al algoritmo simple de la suma. Este consiste, en primer lugar, en tomar el valor del sumando mayor e ir añadiendo hacia arriba el número de veces que indica el sumando menor. Por ejemplo, $4 + 2 = 6$, el niño cuenta 4, 5, 6 y. En segundo lugar, al algoritmo de contar a partir de 1, comenzando por el primer sumando, así 1 y 5 es 6 porque el niño cuenta 1, 2, 3, 4, 5, 6. Los

resultados también indicaron que las estrategias de conteo que se desarrollan antes de la escolaridad, juegan un papel importante en la determinación de los procedimientos utilizados en la escuela, y los métodos que los niños y las niñas emplean no son necesariamente los mismos que se les enseñan a través de la instrucción.

FACTORES DEPENDIENTES DEL SUJETO

Clásicamente, se ha considerado que las características de los individuos tienen un papel importante en el éxito o fracaso en la resolución de problemas. Algunos factores son el conocimiento y la experiencia previa, la habilidad en la lectura, la perseverancia, las habilidades de tipo espacial, la edad y el sexo.

En la actualidad, existe una tendencia orientada hacia la construcción de modelos que representan las diferencias entre los solucionadores de problemas eficientes e inefficientes o las diferencias en la ejecución de la tarea por expertos y novatos, a las cuales se hizo referencia anteriormente. Los individuos expertos poseen mayor información que los novatos, lo cual facilita la representación del problema en términos de esquemas, estructuras, procedimientos y métodos heurísticos. Las representaciones abstractas habilitan a los expertos para enfrentar con mayor eficiencia los problemas.

FACTORES AMBIENTALES

Existe un gran número de factores externos que pueden afectar la ejecución en la resolución de problemas. Sin embargo, la comunidad de educadores en el área de la matemática está de acuerdo con concentrar su esfuerzo en factores relacionados con la instrucción para desarrollar estrategias expertas de pensamiento, para enseñar el uso de herramientas específicas de pensamiento y para entrenar en el uso de reglas generales y específicas de naturaleza heurística.

Las *estrategias expertas de pensamiento* pueden ser utilizadas independientemente del tipo y de la naturaleza del problema y se orientan hacia el desarrollo de un pensamiento original, divergente y de actitudes positivas hacia la resolución de problemas.

Las *herramientas específicas de pensamiento* son estrategias que tienden a equipar al sujeto que resuelve el problema con un conjunto de habilidades que supuestamente intervienen favorablemente, aunque su eficiencia no ha sido consistentemente comprobada.

Los *métodos instruccionales* diseñados para el entrenamiento en estrategias heurísticas generales o específicas han sido propuestos por Polya (1965). Entre las estrategias heurísticas específicas están: simplificar el problema o trabajar en sentido inverso; sin embargo, este tipo de estrategia es útil sólo en casos muy particulares. Las estrategias heurísticas generales, como ya se señaló anteriormente, se pueden utilizar en un amplio rango de problemas, siendo las principales el análisis medios-fin, la planificación y la organización de la información.

Nesher, Hershkovitz y Novotna (2003), realizaron un estudio con el propósito de identificar los factores que afectan la resolución de problemas con datos cuantitativos desconocidos cuya suma es conocida y en los cuales la relación de comparación entre dos pares de las cantidades se conoce también.

Para analizar los diferentes tipos de situaciones aplicaron un modelo de los procesos cognoscitivos que el solucionador utiliza para moverse desde el enunciado del problema hasta la selección de su representación, enfatizando los factores que afectan esta elección. Moverse desde el enunciado del problema hasta la representación implica un conjunto de transformaciones directas e indirectas. Este proceso depende de la estructura superficial del texto o enunciado del problema y de los esquemas matemáticos subyacentes.

Los factores referidos en este estudio fueron:

- 1) el promedio de las cantidades comparadas con el número de cantidades de referencia (el promedio de referencia),
- 2) el esquema de la situación, por ejemplo, el tipo de relación entre las dos relaciones de comparación dadas,
- 3) el orden de presentación de las relaciones de comparación,
- 4) las palabras utilizadas para describir las relaciones de comparación, por ejemplo, *tantas veces más* vs. *tantas veces menos*.

Los autores presumieron que la selección de los valores de estas variables en la formulación de un problema afecta la estrategia de solución. Además de estos factores, Nesher, Hershkovitz y Novotna (2003) señalaron que el factor más importante del modelo es lo que han denominado el *nivel de complejidad* de una solución, es decir, el número de operaciones teóricamente necesarias para ir desde el enunciado del problema a una representación de la solución.

Este modelo fue utilizado para analizar las estrategias de solución de un conjunto de 12 problemas de comparación de multiplicación por parte de 167 docentes y 132 estudiantes de 15 años. Los autores encontraron que los sujetos preferían soluciones a las cuales se llegaba a través de la ruta más corta. Igualmente, que interpretaron los enunciados de los problemas en términos de la palabra *más* que de la palabra *menos*.

Analizar procesos en el área de la resolución de problemas es una tarea que presenta algunas dificultades metodológicas, particularmente por el hecho de que los procesos no son observables sino inferibles a partir de la ejecución del sujeto que resuelve el problema. Las metodologías existentes para el análisis de procesos se han desarrollado, fundamentalmente, en el campo de la Matemática, siendo algunas de ellas las siguientes: la aritmética mental, el análisis de protocolos, los estudios clínicos o de casos, la entrevista individual y el análisis de los patrones de errores.

LA ARITMÉTICA MENTAL

Aunque la ejecución de operaciones aritméticas simples, mentales y escritas, forma parte de las actividades cotidianas de los individuos, pocos estudios se han dirigido al examen de la adquisición de las estrategias para resolver este tipo de operación.

Se han propuesto varios modelos que han tratado de explicar el aprendizaje y el desarrollo de problemas aritméticos de cálculo. Uno de estos modelos es el propuesto por Groen y Parkman (1972), el cual presume que la solución de un problema de cálculo se alcanza utilizando procesos de conteo, utilizando el sumando mayor para empezar a contar y luego añadir el sumando menor, contando uno por uno hasta alcanzar la solución.

Algunos modelos comparten el supuesto que la solución de un cálculo aritmético se caracteriza por la evocación directa de los hechos numéricos ($2 + 2 = 4$). Las representaciones cognoscitivas de los procedimientos para los cálculos aritméticos pueden organizarse y estructurarse en términos de las conexiones entre los elementos memorizados y el nivel de profundidad del almacenamiento. Ashcraft (1992, 1994), señaló que aunque los modelos difieren en aspectos específicos, comparten rasgos similares. Todos hipotetizan que la resolución de un problema se basa en la recuperación de los hechos numéricos de la memoria mediante el uso de estrategias de evocación de tales hechos.

Una perspectiva diferente es la propuesta por McCloskey, Macaruso y Whetstone (1992). Este modelo asume que el procesamiento de información numérica se debe a la actividad de tres módulos o

sistemas componentes funcionalmente distintos: el sistema de comprensión de los números, el sistema de producción de los números y el sistema de cálculo. Los módulos de comprensión y producción son mecanismos de elaboración de los números, de su procesamiento. La *comprensión* hace posible la transformación de la estructura superficial del número, ya sea alfabética o numéricamente, expresada en una representación abstracta de las cantidades, conformando así una base sobre la cual pueden operar los otros dos módulos o sistemas. La *producción* permite la traducción de la información abstracta en un código específico (palabras o números) para poder generar las respuestas de los procesos aritméticos. Finalmente, el sistema de *cálculo* opera sobre la representación abstracta de las cantidades utilizando la evocación de los hechos numéricos y el conocimiento de los signos aritméticos y de cálculo.

Los modelos antes descritos ofrecen diferentes hipótesis referidas al desarrollo de estrategias para resolver problemas aritméticos de cálculo, desde los intentos iniciales hasta el desarrollo de ejecuciones expertas. Lucangeli, Tressoldi, Bendotti, Bonanomi y Siegel (2003), señalaron que se ha planteado una evolución progresiva de estrategias desde el conteo inicial hasta los procesos automáticos para la evocación de resultados.

Los análisis del tiempo de reacción se han aplicado con éxito en el examen de tareas simples y relativamente directas, tales como juzgar *más que* y *menos que*, juzgar si una ecuación numérica simple es correcta o no, o calcular hechos numéricos de un solo dígito. Pero en estas tareas la ejecución sigue un conjunto bastante estricto y limitado de reglas o algoritmos, y se realizan rápidamente sin mucho procesamiento consciente por parte del individuo que las ejecuta.

La técnica supone la existencia de modelos hipotéticos del tiempo y de los pasos requeridos para resolver el problema, el cual se divide en pequeñas unidades discretas denominadas operaciones. Uno de los supuestos principales es que el tiempo requerido para resolver un problema está en función del número de pasos involucrados.

Las limitaciones de los estudios cronométricos tienen que ver con algunos de los supuestos siguientes: 1) los individuos no siempre son consistentes en el uso de las estrategias que utilizan, aunque se trate

de problemas idénticos o similares y 2) no existe una comprobación lo suficientemente robusta que evidencie que los tiempos para cada paso sean constantes.

EL ANÁLISIS DE PROTOCOLOS

Cuando las tareas son más complejas, cuando hay varios pasos que realizar, cuando se pueden seguir estrategias alternativas de solución o cuando las pausas y reconsideraciones son usuales en el transcurso de una solución, los tiempos de reacción no constituyen un método apropiado de análisis. Para examinar la ejecución de los individuos en este tipo de tarea más compleja, se utiliza la técnica del análisis de protocolos.

Los esquemas de protocolos se refieren a la producción de las secuencias de pasos de las acciones observables desarrolladas por un individuo cuando resuelve un problema. Estos esquemas de pasos han sido utilizados en forma extensiva en las áreas de la inteligencia artificial (IA) y en la enseñanza de la Matemática. En IA, el análisis de protocolos tiene como propósito el descubrimiento de las regularidades de la conducta de quien resuelve el problema. Los protocolos, por lo general, se traducen en programas que simulan, mediante el computador, el comportamiento ideal del sujeto.

En el área de la Matemática, los protocolos tienen como propósito realizar análisis cualitativos que permitan describir las estrategias útiles o documentar acerca de su nivel de efectividad. Ya en 1967, Kilpatrick diseñó un protocolo riguroso que sirvió de paradigma a muchos otros desarrollados posteriormente. En dicho protocolo, se esquematizan diversas conductas heurísticas consideradas importantes en la resolución de problemas matemáticos. El nivel de análisis debe ser lo más preciso posible y una vez definida la secuencia, ésta puede convertirse en símbolos que sirven como fuente de datos para análisis estadísticos.

Aunque los protocolos codifican básicamente conductas observables en secuencia, éstos pueden ser enriquecidos por otras técnicas complementarias, tales como *pensar en voz alta* o las *autoexplicaciones*. Es decir, la conducta implícita puede ser explicitada por el individuo. Las técnicas complementarias deben ser consideradas con cierta

cautela, pues en niños y niñas pequeños las verbalizaciones suelen ser bastante limitadas y cargadas de omisiones y distorsiones. Se recomienda su uso en adultos y en estudiantes de grados superiores.

LOS ESTUDIOS CLÍNICOS O DE CASOS

Esta técnica de análisis ha sido promovida por la escuela rusa. Kantowski (1978) describió en qué consiste: 1) el diseño no es experimental; 2) se trata de un estudio longitudinal; 3) se intenta captar procesos y cómo éstos se desarrollan; 4) el docente no es una variable control, por el contrario, constituye un elemento vital del ambiente; 5) los análisis cualitativos de los datos son más importantes que los cuantitativos.

Los estudios clínicos son experimentos desarrollados en ambientes naturales, en los que se pretende explorar toda la riqueza y la diversidad que normalmente exige la escuela y los procesos que en ella se desarrollan.

El resurgimiento de la técnica de estudios de casos se debe, entre otras causas, al impulso dado por Piaget, la escuela rusa y las contribuciones de otras disciplinas como la psicología social, la antropología, etc. Esta metodología ha probado ser eficiente para comprobar hipótesis, replicar experiencias y hacer predicciones.

LA ENTREVISTA INDIVIDUAL

Una manera directa de indagar acerca de los procesos es mediante la entrevista. Por lo general se presentan los problemas a los individuos en forma individual, y a partir de los registros de observación de su comportamiento - algunas preguntas formuladas por el entrevistador y de las respuestas del entrevistado - se infieren los procesos. Existen ciertas limitaciones a esta técnica. Una de ellas es que las explicaciones dadas por los niños y niñas no suelen ser muy precisas y, en consecuencia, pueden no reflejar los procesos desarrollados. La otra es que las inferencias extraídas por el entrevistador pueden presentar un alto grado de subjetividad.

EL ANÁLISIS DE ERRORES

Esta técnica ha sido muy útil en el diagnóstico de los errores y dificultades encontradas por los niños y niñas, sobre todo en la resolución de problemas aritméticos verbales.

Las destrezas aritméticas involucradas en la resolución de problemas de suma y de resta son procedimentales por naturaleza, por lo que estos tipos de tareas permiten observar, con bastante claridad, errores sistemáticos de tipo procedural. Los errores de los aprendices son sistemáticos cuando existe un procedimiento que genera el error. Brown y VanLehn (1980), señalan que "en casi todos los casos se ha encontrado que los errores sistemáticos consisten en desviaciones menores del procedimiento correcto" (p. 380).

Los errores cometidos por los niños y las niñas en problemas de adición y sustracción han sido clasificados como errores inconscientes, sistemáticos o aleatorios (Brown y Burton, 1978). De estos tres tipos de errores, el error aleatorio es el más difícil de remediar porque no sigue un patrón determinado, ya que puede deberse a falta de conocimiento sobre hechos básicos o a fallas en el procedimiento.

El estudio de Brown y Burton (1978), tuvo como objetivo examinar ejemplos de patrones de errores generados a partir de un programa diagnóstico simulado por computadora denominado *Buggy*. Este programa consiste en una enumeración extensa de errores sistemáticos, en los cuales incurren los niños y las niñas cuando resuelven problemas de sustracción de varios dígitos. Al analizar los detalles de los procedimientos utilizados en problemas de resta, pudieron no sólo predecir la mayoría de los errores cometidos por los estudiantes, sino también identificar el tipo de error y su sistematicidad.

Considérense los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{r} 45 - \\ \underline{27} \\ 22 \end{array} \quad \begin{array}{r} 78 - \\ \underline{25} \\ 53 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\,924 - \\ \underline{1\,751} \\ 1233 \end{array} \quad \begin{array}{r} 216 - \\ \underline{5} \\ 241 \end{array}$$

Podría decirse que este estudiante sabe algo sobre restar con varios dígitos, pero aplica incorrectamente la regla que indica que *siempre se resta el número menor del número mayor*; en este caso, en particular, el estudiante la aplica sin importar si el número mayor está en la fila de

arriba o en la de abajo. Aplicaciones incorrectas de reglas como éstas son las que conducen a los estudiantes a cometer el tipo de error considerado en el ejemplo anterior.

Es importante, entonces, que los docentes estén atentos a los procedimientos que utilizan los estudiantes para resolver tareas matemáticas como las antes exemplificadas. Es conveniente resaltar que cuando se aplican reglas o algoritmos para resolver dichas tareas, es necesario saber también cuándo se deben aplicar. Aquí entraría en juego no sólo los conocimientos declarativo y procedural, sino también el estratégico.

ADQUISICIÓN Y DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICA

Uno de los principales objetivos de la enseñanza de la Matemática, ha sido desarrollar en los estudiantes ciertos niveles de pericia que les permitan resolver problemas de manera eficiente, particularmente aquellos de naturaleza verbal. En tal sentido, tanto la enseñanza como el aprendizaje de la Matemática han constituido una preocupación constante de los docentes, los padres y representantes, los estudiantes y los administradores de la educación, no solamente en Venezuela, sino también en otros países del mundo. En los Estados Unidos, por ejemplo, uno de los seis objetivos educacionales para el año 2000 era lograr que los estudiantes norteamericanos ocuparan el primer lugar, a nivel mundial, en Matemática y Ciencias (Departamento de Educación, Oficina de Investigación Educativa y de Mejoramiento, 1991, pp. 3-4, citado en Mayer, 1992).

En Venezuela, han sido innumerables los esfuerzos por superar las deficiencias de los estudiantes, particularmente en el campo de la Matemática. Tales esfuerzos han sido desarrollados desde la Fundación Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (Fundación CENAMEC), institución que se ha dedicado por más de veinticinco años a la realización de actividades dirigidas a docentes y estudiantes de los diferentes niveles del sistema educativo, con el fin de mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, además de otras áreas del saber.

La Fundación Polar ha desarrollado dos proyectos denominados Matemática para Todos y el Mundo de la Matemática. Estos consisten en una colección de fascículos, encartados en un diario de circulación nacional, que presentan la Matemática apoyándose en cuatro áreas: Geometría, Medidas, Números y Gráficos, Probabilidad y Estadística.

El propósito de *Matemática para Todos* consiste en que “el enfoque y los contenidos tratados sean un medio para estimular la creatividad en los niños y jóvenes, en los docentes, en los padres y representantes y, en general, en todos aquellos que cada día aspiran incorporarse a esta área del conocimiento” (Fundación Polar, 2004, p. 5).

Los contenidos de *El Mundo de la Matemática* permiten a los lectores “conocer las sucesiones numéricas, descubrir la capacidad de los

modelos matemáticos para representar los fenómenos del mundo, las soluciones que aportan los sistemas de ecuaciones, las múltiples aplicaciones del álgebra, cómo se organizan los elementos del Universo, y la herramienta de predicción que es la Estadística” (Giménez de Mendoza, 2005, p. 3).

Así mismo, inicialmente con el apoyo técnico de la Fundación CENAMEC y luego con la asistencia de la Asociación Civil Consultores de Excelencia Profesional (CONEXPRO), esta organización desarrolla, desde el año 1997, el Programa de Actualización en Matemática (PAM). Este programa constituye un “modelo de capacitación que toma en cuenta tanto el aspecto pedagógico de la escuela como el organizacional y se implementa a través de talleres y actividades de seguimiento, con estrategias presenciales y de acompañamiento al docente en el aula” (p. 3). Está dirigido a los docentes de la primera y segunda etapas del nivel de Educación Básica. El programa toma en cuenta los siguientes elementos: El conocimiento y la actualización en didáctica de la matemática escolar, el conocimiento matemático de los docentes, la facilitación de actividades de aprendizaje autónomo y de nivelación de los estudiantes, y la gestión pedagógica de los equipos directivos y de coordinación en las escuelas. Hasta el presente, el PAM se ha ensayado en 163 escuelas y ha atendido a tres mil doscientos docentes, aproximadamente, en los estados Anzoátegui, Apure, Aragua, Bolívar, Distrito Metropolitano, Carabobo, Lara, Mérida, Miranda, Monagas, Vargas, Sucre y Zulia.

Los resultados de diversos estudios realizados han permitido determinar las dificultades de los estudiantes al resolver problemas. Entre estas dificultades se pueden mencionar las siguientes:

- Poco dominio de procedimientos heurísticos, generales y específicos, para resolver problemas.
- Bajo nivel de análisis o análisis superficial de la situación planteada en el enunciado del problema.
- Dificultad para planificar el proceso de resolución del problema: representación mental del enunciado del problema, aislamiento de la información relevante, organización de la información, planifi-

cación de estrategias de resolución, aplicación de procedimientos adecuados, verificación de la solución, revisión y supervisión de todo el proceso de resolución.

- Ausencia de conocimiento metacognoscitivo, lo cual le impide tener conciencia de los procesos y estrategias que utiliza para la resolución del problema y corregirlos, en caso de ser necesario.
- Tendencia a operar directamente sobre los datos explicitados en el enunciado del problema.
- Dificultad para encontrar los datos intermedios, no explícitos en el enunciado del problema.
- Tendencia a mantenerse dentro de lo que exige el problema, sin ir más allá de su planteamiento.
- Bajos niveles afectivos y motivacionales hacia la Matemática y hacia la resolución de problemas.
- Desconocimiento acerca de los tipos de conocimiento involucrados en la resolución de un problema.
- Desconocimiento de las etapas y de los pasos generales que se pueden seguir para resolver un problema.

Estos hallazgos han constituido el centro de la preocupación por parte de todos aquellos involucrados en la enseñanza de la Matemática y se ha concluido que ellos son la causa, en primer lugar, del fracaso consistente y generalizado por parte de los estudiantes en la adquisición de las habilidades matemáticas requeridas en los diferentes niveles del sistema educativo; en segundo lugar, de la dificultad evidente para realizar todas aquellas actividades que impliquen procesos de naturaleza matemática o algebraica; en tercer lugar, del desconocimiento de la importancia de la Matemática para la vida cotidiana y otras disciplinas, y, finalmente, por ignorar que la Matemática no sólo constituye un área específica del conocimiento, sino que está vinculada con la estructura de pensamiento de los individuos.

El área de la resolución de problemas, específicamente en el campo de la Matemática, ha sido objeto de interés por las diferentes corrientes del pensamiento que han dominado la teoría y práctica educativas.

Durante muchos años, el enfoque asociacionista enfatizó los principios generales del aprendizaje, particularmente la ley del efecto y la ley del ejercicio. Tanto la ejercitación como la práctica han tenido un papel fundamental en la historia de la enseñanza de la Matemática, especialmente en la aritmética. En un momento dado fue el medio principal de instrucción; sin embargo, hoy en día ambas forman parte del currículo de Matemática, aunque acompañadas de experiencias concretas y explicaciones de los principios matemáticos subyacentes.

Desde el punto de vista del enfoque cognoscitivo, se ha enfatizado el papel del razonamiento que permite al sujeto que resuelve el problema, comprenderlo, diseñar un plan, llevarlo a cabo y supervisarlo (Mayer, 1992). Este enfoque, según Schoenfeld (1985), representa un cambio de énfasis en la enseñanza de la Matemática, ya que en vez de preguntar *¿cuáles procedimientos debe dominar el aprendiz?*, la pregunta debe ser: *¿qué significa pensar matemáticamente?* En vez de enfatizarse el producto de la resolución del problema (obtener un resultado correcto), este enfoque sugiere enfatizar el proceso de resolución (qué sucede en la mente del estudiante cuando resuelve un problema).

PROBLEMAS DE NATURALEZA VERBAL

Existe consenso entre los investigadores en relación con la dificultad que presentan los problemas aritméticos de naturaleza verbal, es decir, expresados en palabras (Hegarty, Mayer y Monk, 1995). En consecuencia, el análisis de la estructura de los problemas verbales y las diversas estrategias utilizadas por los estudiantes para resolverlos se han constituido en el centro de numerosas investigaciones durante las últimas dos décadas (Cristou y Philippou, 1999). Estos estudios han evidenciado las dificultades que confrontan los estudiantes cuando resuelven problemas de esta naturaleza y las estrategias utilizadas por ellos dependiendo de la estructura del problema (Nesher y Hershkowitz, 1994).

Las teorías sobre la comprensión del lenguaje (Kintsch y van Dijk, 1978; Norman y Rumelhart, 1975), son congruentes con los estudios sobre la estructura textual específica de problemas de tipo verbal. Los estudios realizados han evidenciado que estos problemas, en

aritmética o en álgebra, deben tratarse como un género especial de texto que utiliza el conocimiento del lenguaje del sujeto, pero que en contextos matemáticos requieren una interpretación especial. Los autores señalan que es la complejidad del texto, más que las operaciones matemáticas involucradas, lo que influye en el procesamiento del problema.

Carpenter (1985), encontró que las principales variables son de naturaleza lingüística, es decir, variables de naturaleza sintáctica o semántica. Entre las variables sintácticas se encuentran el número de palabras, la secuencia de la información y la presencia de algunas palabras claves que puedan sugerir la realización de alguna operación matemática. Sin embargo, este autor considera que las variables semánticas son más importantes porque determinan los procesos utilizados por los aprendices en la resolución de problemas aritméticos de tipo verbal.

Resolver este tipo de problema implica construir una representación de las palabras del problema y encontrar la solución utilizando las reglas de la aritmética o del álgebra. Una de las dificultades que presentan los individuos en la resolución de problemas de tipo verbal parece ser la representación del problema; es decir, salirse del lenguaje (palabras, frases, oraciones) del problema a una representación mental coherente del mismo. Un subcomponente importante en el proceso de representación para problemas de tipo verbal es la traducción de cada oración. Existe cierta evidencia que señala que la habilidad para traducir proposiciones incrementa con la edad.

Otro aspecto en la representación de problemas de tipo verbal es reconocer tipos de problemas. Heller y Greeno (1979), definieron dos grupos de problemas verbales de una operación, correspondientes a los campos conceptuales de adición y multiplicación. Un problema pertenece al campo de la adición, cuando la operación para alcanzar la solución es una adición o una sustracción. Por otra parte, un problema pertenece al campo de la multiplicación, cuando la operación para llegar a la solución es una multiplicación o una división.

Los problemas verbales de una operación contienen ciertas estructuras y relaciones e incluyen tres cantidades que representan información numérica: dos de ellas se explicitan en el enunciado del problema y

la tercera se desconoce, es la cantidad requerida por la tarea a realizar. Los elementos dados son *elementos completos*, porque contienen la descripción de los objetos cuantificados y el valor numérico, mientras que el elemento desconocido es un *elemento incompleto*, ya que su valor numérico se desconoce (Nesher y Hershkovitz, 1994). En consecuencia, Christou y Philippou (1999) indicaron que un problema verbal sencillo, con estructura de adición o de multiplicación, es una relación entre tres componentes $R(a, b, c)$, donde a , b y c son los elementos del problema. La representación mental de los estudiantes de esta relación abstracta entre los tres elementos y la acción asociada con una relación de adición o de multiplicación, conforman el esquema del problema (p. 270).

El estudio de Greeno (1980), evidenció que los niños y las niñas aprenden a categorizar problemas en tipos; es decir, adquieren lo que se ha denominado *esquemas de problemas* y, en consecuencia, pueden decidir cuál operación matemática deben realizar para alcanzar la solución del problema.

Hinsley, Hayes y Simon (1977), encontraron que a medida que los estudiantes leen las primeras palabras del enunciado de un problema, tienden a tomar una decisión en relación con el tipo de problema que es. Estos autores pidieron a estudiantes universitarios clasificar diferentes tipos de problemas en categorías. Los resultados permitieron identificar dieciocho categorías, tales como trabajo, movimiento, interés, triángulos, etc. Los sujetos pudieron realizar la tarea de clasificación de los problemas evidenciándose, de esta manera, que poseen esquemas para problemas de tipo verbal.

Por su parte, Mayer (1981) analizó los problemas de tipo verbal de varios textos de álgebra y encontró cien tipos de problemas básicos. Algunos eran muy comunes (diez veces por cada mil problemas), mientras que otros eran muy poco frecuentes o muy raros (una vez por cada mil problemas). En un estudio posterior, este autor pidió a los estudiantes que leyeron y trataron de recordar una serie de problemas de tipo verbal. Los problemas con alta frecuencia generaron un nivel de recuerdo más elevado que los de baja frecuencia.

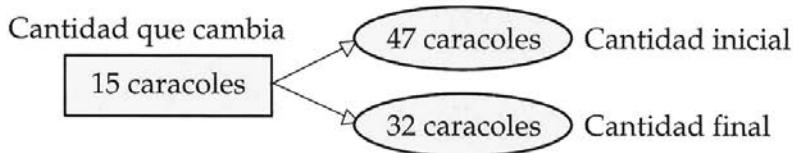
Desde el inicio de la década de los ochenta, varios autores se han dedicado al estudio de la estructura semántica de problemas aritméticos verbales. Carpenter y Moser (1984), clasificaron estos

problemas en términos de cuatro operaciones básicas: cambiar, combinar, comparar e igualar. Las cuatro operaciones determinan cuatro tipos de problemas cuyo nivel de dificultad diferirá dependiendo de la operación requerida (Cuadro 3).

Los *problemas de cambio* se caracterizan por la presencia de una acción implícita o explícita que modifica una cantidad inicial y pueden resolverse *juntando* o *separando* objetos. En el caso de un problema que implique cambio juntando objetos, hay una cantidad inicial y una acción directa o implícita que causa un incremento en su cantidad. Cuando el cambio es separando objetos, existe un conjunto dado y un subconjunto que debe ser removido del conjunto mayor produciendo un decremento. En ambos casos, los cambios ocurren en el tiempo. Existe una condición inicial (C1) la cual es seguida de un cambio (C2) que produce un resultado final (C3). (Véase el Cuadro 3 para los ejemplos que ilustran este tipo de problema).

En los *problemas de cambio*, ya sea *juntando* o *separando* objetos, se presentan tres modalidades. En la primera se da la cantidad inicial y la magnitud del cambio, y el sujeto debe obtener el resultado (Connie tenía 5 metros. Jim le dio 8 más. ¿Cuántas metros tiene Connie en total?). En la segunda se conoce la cantidad inicial y el resultado, y el sujeto debe obtener la magnitud del cambio (Connie tiene 5 metros. ¿Cuántas metros más necesita para tener 13?). En la tercera modalidad se desconoce la cantidad inicial y se dan los otros elementos (Connie tenía algunas metros. Jim le dio 5 más y ahora tiene 13 metros. ¿Cuántas metros tenía Connie al principio?).

Ejemplo. Silvia tenía 47 caracoles. En la mudanza se le perdieron 15. ¿Cuántos caracoles tiene ahora Silvia?



Ejemplo tomado de Jitendra, Hoff y Beck (1999), p. 52.

En los *problemas de combinación* se proponen dos cantidades que pueden considerarse aisladamente o como partes de un todo, sin que

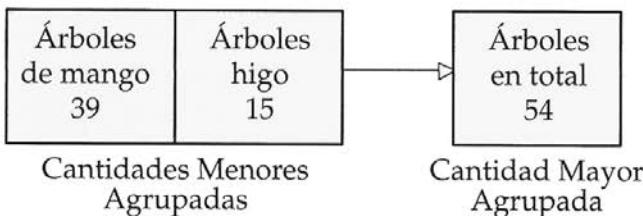
Cuadro 3.

Clasificación de problemas de tipo verbal (Carpenter y Moser, 1984)

Juntar - Cambiar	Separar - Cambiar
a) Connie tenía 5 metros. Jim le dio 8 más. ¿Cuántas metras tiene Connie en total? c) Connie tiene 5 metros. ¿Cuántas metras más necesita para tener 13? e) Connie tenía algunas metras. Jim le dio 5 más y ahora tiene 13 metros. ¿Cuántas metras tenía Connie al principio?	b) Connie tenía 13 metros. Le dio 5 a Jim. ¿Cuántas metras le quedan? d) Connie tenía 13 metros. Le dio algunas a Jim y ahora le quedan 8. ¿Cuántas metras le dio Connie a Jim? f) Connie tenía algunas metras. Le dio 5 a Jim. Ahora le quedan 8. ¿Cuántas metras tenía Connie al principio?
Combinar	Combinar
g) Connie tiene 5 metros rojas y 8 azules. ¿Cuántas metras tiene en total?	h) Connie tiene 13 metros. Cinco son rojas y el resto es azul. ¿Cuántas metras azules tiene Connie?
Comparar	Comparar
i) Connie tiene 13 metros y Jim tiene 5. ¿Cuántas metras más tiene Connie que Jim? k) Jim tiene 5 metros. Connie tiene 8 más que Jim. ¿Cuántas metras tiene Connie? m) Connie tiene 13 metros. Ella tiene 5 metros más que Jim. ¿Cuántas metras tiene Jim?	j) Connie tiene 13 metros y Jim tiene 5. ¿Cuántas metras menos tiene Jim que Connie? l) Jim tiene 5 metros. Él tiene 8 metros menos que Connie. ¿Cuántas metras tiene Connie? n) Connie tiene 13 metros. Jim tiene 5 metros menos que Connie. ¿Cuántas metras tiene Jim?
Igualar	Igualar
ñ) Connie tiene 13 metros. Jim tiene 5. ¿Cuántas metras tiene que ganar Jim para tener tantas metras como Connie? p) Jim tiene 5 metros. Si él gana 8 tendrá el mismo número de metras que tiene Connie. ¿Cuántas metras tiene Connie? r) Connie tiene 13 metros. Si Jim gana 5 metros tendrá tantas como Connie. ¿Cuántas metras tiene Jim?	o) Connie tiene 13 metros. Jim tiene 5. ¿Cuántas metras tiene que perder Connie para tener tantas metras como Jim? q) Jim tiene 5 metros. Si Connie pierde 8 metros tendrá tantas metras como Jim. ¿Cuántas metras tiene Connie? s) Connie tiene 13 metros. Si ella pierde 5 tendrá tantas metras como Jim. ¿Cuántas metras tiene Jim?

exista ningún tipo de acción. Los problemas de combinación pueden ser de dos tipos: en el primero se dan dos conjuntos y se pregunta por el resultado (Connie tiene 5 metas rojas y 8 azules. ¿Cuántas metas tiene en total?). En el segundo se da la cantidad de un conjunto y la cantidad total resultante, y se pregunta por la cantidad del otro conjunto (Connie tiene 13 metas. 5 son rojas y el resto es azul. ¿Cuántas metas azules tiene Connie?).

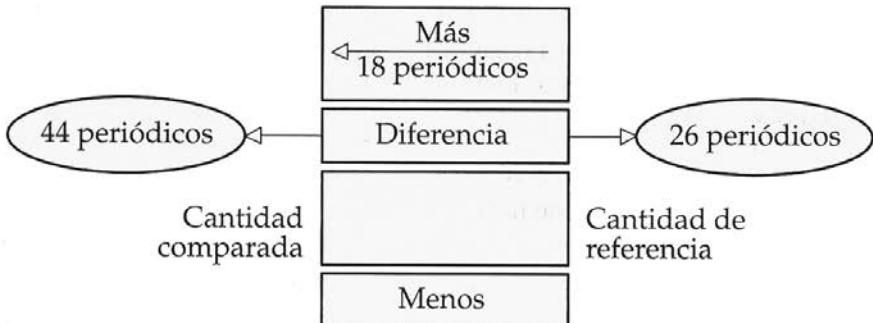
Ejemplo. Kay tiene en su jardín 39 árboles de mango y 15 árboles de higo. ¿Cuántos árboles tiene Kay en su jardín?



Ejemplo tomado de Jitendra, Hoff y Beck (1999), p. 52.

Los *problemas de comparación* presentan la relación entre dos cantidades distintas, ya sea para establecer la diferencia entre ellas o para hallar una cantidad desconocida a partir de una conocida y la relación entre ellas. Una de las cantidades cumple funciones de *referente* y la otra funciones de *comparado* (Jim tiene 5 metros. Connie tiene 8 metros más que Jim. ¿Cuántas metras tiene Connie?). El tercer elemento del problema es la diferencia o la cantidad que excede entre ambos conjuntos. Cada uno de los elementos puede servir de incógnita.

Ejemplo. Jim repartió 26 periódicos el lunes. Su amigo Larry repartió 44 periódicos. ¿Cuántos periódicos más repartió Larry que Jim?



Ejemplo tomado de Jitendra, Hoff y Beck (1999), p. 52.

Los *problemas de igualación*, por su parte, contienen elementos de los problemas de comparación y de cambio. En ellos se presenta una acción implícita basada en la comparación de dos cantidades distintas.

Hegarty, Mayer y Monk (1995), se dedicaron a examinar las razones por las cuales algunos estudiantes tienen éxito al resolver problemas de naturaleza verbal —particularmente aquellos que contienen enunciados de tipo relacional, es decir, oraciones que expresan una relación numérica entre dos variables— y encontraron que el proceso de comprensión ocupa un papel importante en la resolución de este tipo de problema. Estos autores señalaron que existen dos maneras de abordar tales problemas por parte de los solucionadores: el *enfoque directo* y el *enfoque significativo*.

En el *enfoque directo*, el solucionador de problemas selecciona los números y los términos claves de tipo relacional en el enunciado del problema (por ejemplo, *más*, *menos*) y desarrolla un plan de resolución el cual involucra la combinación de los números en el problema, utilizando las operaciones aritméticas destacadas por las palabras claves; por ejemplo, adición, si la palabra clave es *más* o sustracción, si la palabra clave es *menos*. De esta manera, el solucionador intenta traducir directamente las proposiciones claves en el enunciado del problema a un conjunto de operaciones de cálculo que generarán una respuesta, y no construye una representación cualitativa de la situación descrita en dicho enunciado. Se ha encontrado que este enfoque es bastante utilizado por los solucionadores menos exitosos. Este método también ha recibido el nombre de *calcule primero y piense después* (Stigler et al, 1990) y como el *método de la palabra clave* (Briars y Larkin, 1984).

En el *enfoque significativo*, el solucionador de problemas traduce el enunciado del problema a un modelo mental de la situación descrita en él. Este modelo mental se convierte, entonces, en la base para la construcción del plan de resolución.

Mayer (1992), resaltó la utilidad de diferenciar entre los procesos involucrados en la construcción de una representación de un problema y los implicados en su resolución, ya que la investigación cognoscitiva en el aprendizaje de la matemática algunas veces enfatiza los procesos, tales como procedimientos de cálculo y estrategias de resolución.

En este sentido, Hegarty, Mayer y Monk (1995) plantearon que el proceso de comprensión involucrado en los problemas de naturaleza verbal, abarcan las siguientes fases: 1) construcción de un texto base, 2) construcción de una representación matemática y 3) construcción de un plan de resolución.

Etapa 1: Construcción de un Texto Base. Esta etapa supone que el texto en un problema matemático que se procesa por pasos. En cada paso el solucionador lee una oración, es decir, una cláusula que expresa un segmento de información acerca de una de las variables o valores en el problema. En la construcción del texto base, el solucionador debe representar el contenido proposicional e integrarlo con la otra información en su representación del problema. En este proceso, el solucionador puede utilizar conocimiento de los tipos de enunciados que ocurren en problemas matemáticos (Mayer, 1981). Éste incluye asignaciones que expresan un valor para una variable, relaciones que expresan la relación cuantitativa entre dos variables y preguntas que expresan que se desconoce el valor de una determinada variable. Por ejemplo: En el supermercado A la margarina cuesta Bs. 905 la panelita. Esto es, 5 bolívares menos que en el supermercado B. Si usted necesita comprar 4 panelitas de margarina, ¿cuánto le costará comprarlas en el supermercado B?

Asignación 1: Costo de la panelita de margarina en el supermercado A: Bs. 905.

Relación: Costo de la margarina en el supermercado B: 5 bolívares más que en el supermercado A.

Asignación 2: Margarina que usted necesita: 4 panelitas.

Pregunta: Costo total de la margarina en el supermercado B.

Etapa 2: Construcción de una Representación Matemática. En esta segunda etapa de comprensión, el solucionador se guía por el objetivo de resolver un problema matemático y construye una representación. Es en esta etapa que los solucionadores se diferencian porque escogen un enfoque diferente: el directo o el significativo.

En el enfoque directo, esta segunda etapa consiste en que el solucionador toma la decisión de si el enunciado procesado contiene un hecho clave, por ejemplo, un número como 905 o una palabra clave

como más o menos en el enunciado del problema sobre las panelitas de margarina. En el enfoque significativo, los solucionadores intentan construir un modelo del problema y modifican el formato de su representación, de una basada en proposiciones a otra basada en objetos.

Etapa 3: Construcción de un Plan de Resolución. Una vez que el solucionador ha representado la información que cree relevante para la resolución del problema, está listo para planificar los cálculos aritméticos necesarios para resolverlo. En el caso del problema sobre el precio de las panelitas de margarina, el plan correcto es primero: añadir 5 bolívares al precio de las panelas en el supermercado A y, entonces multiplicar el resultado de este cálculo por cuatro. Un solucionador que utilice el enfoque directo, basará su resolución en palabras claves como menos y en los números del problema. Debido a que menos se asocia con la sustracción, el solucionador probablemente generará una solución incorrecta, es decir, restará 5 bolívares del precio de la panelita de margarina, en lugar de añadírselos.

Para concluir esta sección es conveniente señalar lo siguiente: los problemas aritméticos de naturaleza verbal son más difíciles de resolver que los presentados en forma matemática, porque demandan del sujeto solucionador del problema el desarrollo de otros procesos diferentes a los del cálculo y la ejecución. Los problemas de naturaleza verbal, como sugierieron Hegarty, Mayer y Monk (1995), implican la construcción de un texto base a partir del procesamiento del enunciado del problema, la construcción de una representación matemática, es decir, salirse del lenguaje del problema y utilizar las reglas de la aritmética o del álgebra y, finalmente, la construcción de un plan de resolución que permita obtener la solución del problema.

La ejecución exitosa en el campo de la resolución de problemas depende de la disponibilidad de los esquemas apropiados. Un esquema es “una estructura organizada conformada por ciertos elementos y sus relaciones vinculados a una situación y que puede utilizarse para comprender la información nueva” (Mayer, 1992, p. 228).

Nesher y Hershkovitz (1994), expresaron que el proceso de construir la representación de un problema verbal involucra diagramar o representar gráficamente el enunciado basándose en los esquemas

existentes. De esta manera, estos autores señalaron que el esquema constituye una vía para la comprensión de las relaciones semánticas subyacentes al texto y a su estructura matemática, y sirve como marco de referencia para la acción en una situación dada. En consecuencia, las diferencias en la dificultad en los variados tipos de problemas verbales pueden explicarse por las diferencias en la complejidad de los esquemas disponibles.

UN MODELO INSTRUCCIONAL DE CUATRO FASES PARA ENSEÑAR RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Manouchehri (2001), propuso un modelo de cuatro fases para la enseñanza de la resolución de problemas. Este autor partió de la premisa que los matemáticos observan los fenómenos, buscan patrones, formulan preguntas sobre sus observaciones y tratan de responderlas. Igualmente, expresó que lo que los matemáticos hacen es totalmente diferente a lo que se pide a los estudiantes que hagan en sus clases de matemáticas en las instituciones educativas. En líneas generales, a los estudiantes se les presentan ejercicios y problemas bien definidos, deben utilizar algoritmos específicos para resolver los problemas y la velocidad con la cual los resuelven es percibida como una evidencia de su competencia matemática. La idea es tratar que los estudiantes se involucren en actividades semejantes a las que realizan los matemáticos. El modelo propuesto por Manouchehri (2001), combina varias estrategias y convierte el proceso de resolución de problemas en el foco de su atención.

El modelo instruccional consta de cuatro fases: 1) proposición de problemas en grupos grandes, 2) resolución de problemas en grupos pequeños, 3) discusión de los hallazgos y de los resultados en grupos grandes y 4) asignaciones y proyectos. Su autor señala que el modelo es especialmente útil para ayudar a los estudiantes a vincular y explorar tópicos ya estudiados y que puede aplicarse como una actividad de cierre de un tema o de una unidad.

En la primera fase del modelo, el docente pide a los estudiantes que generen preguntas sobre tópicos matemáticos ya estudiados. Las preguntas se escriben en el pizarrón y los estudiantes las copian en sus cuadernos. Este proceso dura entre 10 y 15 minutos. Una vez finalizada esta sesión, el docente pide a los estudiantes que trabajen en grupos pequeños de acuerdo con su selección de las preguntas generadas. En esta fase, los grupos deben trabajar en la resolución de los problemas planteados en la primera fase. Al finalizar la fase, sigue una discusión a la cual se incorporan todos los estudiantes. En esta fase comparten sus hallazgos, sus resultados y su trabajo con los otros miembros de la clase. En la cuarta fase, se pide a los estudiantes que seleccionen los problemas propuestos en la primera fase y que trabajen

en ellos como tarea o como un proyecto especial. El docente supervisa el trabajo y el progreso de sus estudiantes pidiéndoles que expongan sus hallazgos en la cartelera en el salón de clases.

Adicionalmente, Manouchehri consideró que el modelo ofrecía la oportunidad para promover el pensamiento y el discurso similares a los de los matemáticos. La creación de un ambiente de esta naturaleza en clase, requiere que el docente le dedique tiempo a ayudar a los estudiantes a adquirir destrezas para la generación y la resolución de problemas, habilidades de comunicación que les permitan trabajar productivamente en grupos pequeños y grandes, y las destrezas necesarias para mantener una actitud favorable hacia la resolución de problemas.

¡RESUÉLVELO! EL PROGRAMA DE MONTAGUE

Montague (2002), desarrolló un programa instruccional para la enseñanza de la Matemática denominado *¡Resuélvelo!* En este programa, basado en resultados de diversas investigaciones, los docentes enseñan, de manera explícita, los procesos y las estrategias propias de la resolución de problemas matemáticos. A los estudiantes se les enseña a:

1. *Leer el problema.* Cómo leer los problemas matemáticos, incluyendo el uso de estrategias de comprensión del enunciado de los problemas como, por ejemplo, la focalización en la información importante, el desarrollo de vocabulario matemático y el reconocimiento de cuándo no comprenden las relaciones entre los términos matemáticos y los conceptos cuantitativos expresados en el problema.
2. *Parafrasear.* Cómo enunciar el problema en sus propias palabras para darle significado.
3. *Visualizar.* Cómo elaborar una representación o construir una imagen mental del problema.
4. *Elaborar hipótesis sobre las soluciones del problema.* Cómo decidir el número de operaciones necesarias para resolver el problema, seleccionar y ordenar estas operaciones y traducir la información en ecuaciones y algoritmos correctos.
5. *Estimar la respuesta.* Cómo centrarse en el tipo de resultado, por ejemplo, el número de metros en vez de centímetros y cómo

predecir la respuesta utilizando la información en el problema y la ruta hacia la solución.

6. *Calcular*. Cómo recordar los procedimientos correctos para utilizar los algoritmos y los hechos numéricos necesarios para tener precisión.
7. *Chequear el problema*. Cómo chequear el proceso de resolución para asegurarse que han comprendido el problema, que lo han representado adecuadamente, que han seleccionado una vía de solución apropiada y que han resuelto el problema correctamente.

En este Programa, los estudiantes también aprenden estrategias metacognoscitivas que pueden aplicar en cada paso. Estas incluyen:

1. Enunciar en voz alta o para sí mismos lo que el problema les está pidiendo que hagan.
2. Preguntarse si comprenden el problema.
3. Chequear su progreso.

Las estrategias metacognoscitivas los ayudan a tener acceso al conocimiento estratégico, les ofrecen lineamientos para aplicar estrategias cognoscitivas y contribuyen a regular el uso de estas estrategias y su ejecución en general.

PROGRAMA DE INICIACIÓN A LA MATEMÁTICA BASADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (PIMRP)

El Programa de Iniciación a la Matemática basado en la Resolución de Problemas (PIMRP), está dirigido a estudiantes de la primera etapa de Educación Básica en España. Fue diseñado por González del Pino (1911-1986).

Desde el punto de vista teórico, el PIMRP se basa en los fundamentos de la Psicología Cognoscitiva y, particularmente, en los supuestos del enfoque de Procesamiento de la Información y en los aportes de la Psicología soviética sobre los procesos de representación en el niño. Losos conceptos claves son, entre otros, contexto problemático, problema, resolución de problemas, pensamiento matemático, esquema lingüístico de interacción.

Desde el punto de vista curricular, el programa responde a una visión de cómo iniciarse en el aprendizaje de la Matemática y en la didáctica de esta disciplina. El propósito de este programa es "conducir de acuerdo con el perfil evolutivo del niño, con relación a la génesis y desarrollo del conocimiento matemático, la construcción del pensamiento matemático" (González Ramírez, 2000, p. 179). En función de este propósito, el PIMRP adopta una estructura curricular basada en la resolución de problemas, la cual permite guiar el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Esta metodología se articula con el Esquema Lingüístico de Interacción (ELI), el cual se convierte en "un instrumento mediador basado en la interacción social dentro del aula y en el lenguaje como herramienta conceptual que posibilita partir del conocimiento del estudiante antes de iniciarse en la enseñanza obligatoria" (p. 180).

El Cuadro 4 presenta cómo se desarrolla la interacción entre el docente y los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas y las distintas etapas que conforman la resolución de los problemas propuestos en el diseño del programa (González Ramírez, 2000, p. 180).

Cuadro 4.

Fases del esquema de interacción para la resolución de problemas

Fase 1: Comprensión del problema

- a) **Representación icónica del enunciado mediante un dibujo esquemático del mismo.** Debe responder a la pregunta: ¿Qué sabemos de este problema?
- b) **Descripción verbal del enunciado dibujado.** Esta descripción facilita la representación mental del problema. El profesor pregunta: ¿Qué queremos saber?
- c) **Aproximación a una estrategia de resolución.** Para guiar este proceso el docente pregunta: ¿Qué hay que hacer: juntar, quitar o repartir?

Fase 2: Ejecución de la operación

- a) **Supone la realización de la operación aritmética propiamente dicha.** La realización de la operación se realiza en dos momentos:

- Manipulando los elementos tangibles de la caja de cálculo (recursos inactivos).
- Haciendo una descripción verbal de los elementos que intervienen en la ejecución de la operación. El docente pregunta:

¿Qué número se escribe primero? (Primer número de la operación a realizar).

¿Eso qué es? (¿Qué representa el primer número de la operación a realizar?).

¿Qué número se escribe ahora? (Segundo número de la operación a realizar).

¿Eso qué es? (¿Qué representa el segundo número de la operación a realizar?).

¿Qué se dice para hacer la operación? (El alumno debe responder según el tipo de operación a realizar: juntar, quitar o repartir).

Fase 3: Verificación de los resultados

Supone hacer un análisis de los resultados obtenidos. El docente pregunta:

¿Ese qué número es? El alumno debe explicar qué significa el resultado.

De acuerdo con González Ramírez (2000), el Programa se desarrolla en doce unidades de aprendizaje y cada una de ellas gira alrededor del logro de unos objetivos generales y específicos basados en unos contenidos y unas actividades. Los contenidos del Programa están estructurados en nueve áreas: Resolución de Problemas, Composición de Números Naturales, Las Horas, Composición de Números Fraccionarios, Medición de Magnitudes, Geometría, Ángulos, Sistemas de Numeración, Operaciones y Cálculo.

Cada unidad de aprendizaje se inicia con la resolución de problemas. Desde el inicio del Programa se trabajan en paralelo los problemas de juntar (sumar), quitar (restar) y repartir (dividir). Luego se realizan las actividades complementarias propuestas en el Programa. La resolución de problemas y las actividades se estructuran en niveles de complejidad creciente. Las diferencias establecidas entre las

unidades de aprendizaje en el área Resolución de Problemas se basan en los siguientes aspectos (González Ramírez, 2000, p. 181):

1. La naturaleza de los problemas (gráfica, mixta y escrita).
2. El nivel de representación de los problemas (posesión o pertenencia de un objeto/valor o medida de objetos concretos).
3. La numeración con la que se trabaja.
4. La información ofrecida en el enunciado del problema.
5. El tipo de enunciado utilizado.
6. La estructura semántica de los problemas.

Desde la perspectiva metodológica, González Ramírez (2000) señaló que los elementos claves del Programa son: la atención más a los procesos que a los resultados; la importancia de la interacción verbal como base de la construcción del conocimiento matemático; el análisis y la reflexión metacognoscitiva sobre la resolución de los problemas; la estructura cíclica de las unidades de aprendizaje; el profesor como elemento mediador en el proceso de resolución de problemas y, finalmente, la utilización del Esquema Lingüístico de Interacción válido para todos los problemas del Programa (p. 181).

Esta autora realizó un estudio evaluativo del PIMRP en dos instituciones educativas en Sevilla, España. La recolección de los datos se basó en la observación del proceso de resolución de problemas durante todo un año escolar, en función de las fases planteadas en el Programa y en los indicadores establecidos para cada fase.

Los factores observados en el aula durante el desarrollo del PIMRP fueron los siguientes: la planificación de la tarea para comprenderla, el control de las actividades durante el proceso de resolución, el tipo de representación efectuada sobre el problema propuesto y el nivel de motivación hacia la tarea.

De acuerdo con González Ramírez (2000), los profesores participantes en el estudio señalaron que el PIMRP potencia (p. 193-194):

En el ámbito cognoscitivo:

- El razonamiento ordenado de acuerdo con una estructura lógica.
- El desarrollo de la atención.

- La adquisición de una herramienta válida que puede extrapolar a situaciones problemáticas de la vida real.
- El conocimiento experiencial como instrumento de aprendizaje.
- La capacidad de análisis y síntesis.
- La construcción del discurso matemático que facilita el paso del conocimiento informal a otro formal.
- La lectura de imágenes. Intercambio verbal-visual.

En el ámbito actitudinal:

- La toma de decisiones.
- El análisis de las situaciones.
- La autoestima y la seguridad en sí mismo.
- Las actitudes investigativas (curiosidad, búsqueda, tenacidad, estimación, planteamiento de hipótesis, entre otras).
- La motivación y el interés hacia el trabajo.
- La participación.

En el ámbito organizativo:

- La resolución impone un orden en cuanto a quién resuelve un problema en cada momento. Se debe establecer un sistema rotatorio, que permita la intervención de cada niño o niña cada día que se resuelven los problemas.
- La temporalidad. Los problemas se resuelven únicamente los días lunes, miércoles y viernes. El resto de las actividades se realizan los días martes y jueves.

En el ámbito social:

- El aula como lugar de encuentro y de construcción del conocimiento. Los problemas se resuelven de forma oral produciéndose una interacción entre estudiante y profesor. En esta interacción los estudiantes reciben retroalimentación del docente y de sus pares. Una vez que el problema se resuelve en forma oral, cada estudiante debe resolverlo en su cuaderno.

En cuanto a los aportes del PIMRP, los profesores que lo han desarrollado coinciden en señalar los siguientes:

- Satisfacción ante la labor docente.
- Nueva forma de abordar la Matemática.

- Orden y sistematización.
- Formación en una nueva metodología.
- Conocimiento de una estructura didáctica cíclica.
- Metodología para la resolución de problemas.
- Conocimiento de una estructura didáctica gradual.
- Motivación para la puesta en práctica.

González Ramírez (2000) concluyó, que el PIMRP para niños y niñas de la primera y la segunda etapas de Educación Básica evidenció resultados satisfactorios en los estudiantes sometidos a entrenamiento. Estos resultados pudieron apreciarse tanto en el desarrollo del proceso de resolución de problemas y en la consecución de los objetivos del Programa, como en los indicadores cualitativos estimados por los profesores que lo administraron. Los resultados globales indicaron que hubo un incremento real en el rendimiento en Matemática de los sujetos participantes en el Programa; sin embargo, debe considerarse más como un instrumento que facilita la construcción del pensamiento matemático que de incremento de conocimiento matemático.

Existen tres niveles de estrategias para realizar adiciones y sustracciones: el *modelaje directo* con objetos o con los dedos, el *conteo* de secuencias y los *hechos numéricos*.

ESTRATEGIAS DE ADICIÓN

En las operaciones de sumas realizadas por *modelaje directo*, los niños y las niñas utilizan la estrategia de *contar todos*. Esta estrategia consiste en utilizar objetos (palitos, granos, entre otros) o los dedos como formas para representar los elementos de los conjuntos. Seguidamente, se comienza a contar todos y cada uno de los elementos de ambos conjuntos unidos. Contar todos los elementos es una estrategia temprana utilizada por los niños. Por ejemplo, para un problema como $M + N = ?$ ($3 + 2 = 5$), la estrategia consiste en comenzar desde cero, luego incrementar M veces y luego N veces. Diversos estudios realizados han encontrado que un alto porcentaje de niños y niñas, entre 6 y 8 años, utilizan esta estrategia la mayor parte del tiempo.

Teóricamente, existen dos formas posibles para desarrollar esta estrategia. Una vez que los conjuntos son construidos, el niño o la niña puede juntar los dos conjuntos y, cuando están unidos, comenzar a contar las unidades; o puede comenzar a contarlas sin unir físicamente los conjuntos. Algunos niños y niñas utilizan diversas formas de organización de los elementos, pero estos arreglos no reflejan cambios en la estrategia.

El segundo nivel lo constituye el *conteo hacia adelante*, es decir, contar partiendo del primer sumando o del sumando mayor. Esta estrategia es más eficiente y menos mecánica que la de modelaje directo. El niño o la niña se han dado cuenta de que no es necesario construir la secuencia completa para contar. Contar hacia adelante es una estrategia más sofisticada que la estrategia de simple conteo. Para un problema del tipo $M + N = ?$, la estrategia es comenzar con M y luego incrementar N veces (contar a partir del primer sumando). Por ejemplo, para $4 + 3 = ?$, el niño comienza por *cuatro* y luego cuenta *cinco, seis, siete*, la respuesta es *siete*.

La resolución de problemas aritméticos no sólo se obtiene por modelaje o por conteo. Los niños aprenden una cantidad de hechos numéricos tanto en la escuela como fuera de ella y los aplican para resolver problemas diferentes. El estudiante memoriza una respuesta para cada problema simple, tal como 4 es la respuesta a $2 + 2$. Hechos de esta naturaleza se aprenden incluso antes de estudiar la tabla de sumar y se han denominado *hechos numéricos* conocidos.

El nivel de los *hechos numéricos* se refiere a que el estudiante utiliza el conocimiento de algunos hechos numéricos para obtener la respuesta a problemas. Por ejemplo, para el niño o la niña que aprendió que $6 + 6 = 12$, su recuperación es prácticamente automática. Si posteriormente debe resolver $6 + 8 = ?$, lo podrá resolver de la manera siguiente: $6 + 8 = 6 + (6 + 2) = (6 + 6) + 2 = 12 + 2 = 14$. Otra manera sería que el alumno ya sabe que $6 + 6$ es igual a 12 y que para llegar a 14 le faltan dos; así, cuenta 12 más uno = 13, más uno = 14.

A continuación se presentan estas estrategias en el contexto de estudios realizados con el propósito de examinar las estrategias de adición utilizadas por los estudiantes.

Svenson y Broquist (1975), al analizar las estrategias para resolver sumas sencillas encontraron tres niveles diferentes: sumar un dígito a la vez ($1 + 1$); sumar más unidades ($2 + 2, 3 + 2$, y así sucesivamente); y redondear los números en 10. Baroody (1987), encontró resultados similares y sugirió que el desarrollo de los diferentes tipos de estrategias dependía del nivel de instrucción y de la dificultad de la tarea. La efectividad del cálculo puede depender de la evocación de hechos aritméticos y, también, del desarrollo del conocimiento procedimental. Las estrategias más sencillas son aquellas contenidas en las reglas de las operaciones que involucran el número 1 ($n + 1$; $n - 1$; $n \times 1$; $n \div 1$). La evocación de este conocimiento procedimental puede facilitar la ejecución de cálculos mentales o escritos.

Al examinar las respuestas de niños y niñas de cinco años a problemas de adición, Siegler y Robinson (1982) encontraron diferentes tipos de estrategias: contar con los dedos, enumeración verbal y evocación mental. La selección de la estrategia dependió del nivel de confianza en los resultados obtenidos. Después de la presentación del problema, los niños y las niñas primero intentaron evocar la respuesta y

seguidamente, si no estaban seguros de ella, utilizaban una estrategia de apoyo como contar con sus dedos.

Los resultados de los estudios realizados por Carpenter y Moser (1984) y Fuson (1988), son similares. En adiciones mentales los niños utilizan diferentes niveles de estrategias. Contar todo fue la primera y la menos desarrollada. La segunda se basó en la adición del sumando más pequeño, una unidad tras otra, al sumando mayor, hasta alcanzar el resultado. La tercera estrategia consistió en evocar los resultados o los hechos numéricos directamente de la memoria.

Suppes y Groen (1967), propusieron cinco modelos sobre cómo los niños y las niñas suman dos conjuntos por conteo. La X en cada modelo representa la variable repetida en el conteo.

Cuadro 5.
Modelos de adición (Suppes y Groen, 1967)

<i>Modelo 1. $X = M + N$</i>	Se cuenta tantas veces como la suma de los números dados. Por ejemplo, $2 + 6 = ?$, se podría decir: 1, 2; 1, 2, 3, 4, 5, 6, es 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. La respuesta es 8
<i>Modelo 2. $X = M$</i>	Al sumar, se cuenta el primer número partiendo del segundo sumando. Por ejemplo, $2 + 6 = ?$, se podría decir: 6, 7, 8. La respuesta es 8
<i>Modelo 3. $X = N$</i>	Se cuenta solamente el segundo número partiendo del primer sumando. Por ejemplo, $2 + 6 = ?$, se podría decir: 3, 4, 5, 6, 7, 8, es decir, se empieza a contar desde 3. La respuesta es 8
<i>Modelo 4. $X = \max(M, N)$</i>	Al sumar, se suma el número mayor partiendo del menor
<i>Modelo 5. $X = \min(M, N)$</i>	Se cuenta el número menor partiendo del mayor

Las estrategias basadas en la manipulación de hechos numéricos o de la combinación frecuente de números, parece ser característica de la ejecución de solucionadores expertos, tanto jóvenes como adultos. Los estudios realizados sobre la adición de dos números, encontraron que los sujetos utilizan dos estrategias combinadas diferentes

(Beishuizen, Van Putten y Van Mulken, 1997). Esta estrategia se ha denominado la *estrategia 1010* [$87 + 39 = (80 + 30) + (7 + 9)$] o la *estrategia N10* [$27 + 29 = (27 + 10 + 10) + 9$]. En la estrategia 1010 o estrategia de descomposición, ambos números se separan en unidades y decenas para sumar o restar separadamente y luego se ensambla el resultado. En la estrategia N10, sólo el segundo operador es separado en unidades y decenas que luego se suman o se restan.

ESTRATEGIAS DE SUSTRACCIÓN

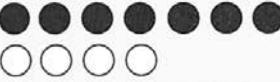
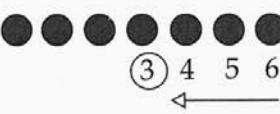
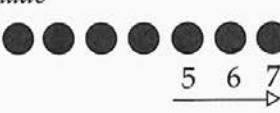
En las operaciones de sustracción se dan básicamente los mismos niveles que para la adición: modelaje directo utilizando objetos o los dedos, conteo y recuperación a partir de hechos numéricos. En relación con los dos primeros niveles, los niños y las niñas pueden utilizar diversas estrategias como las descritas en el Cuadro 5.

La estrategia *separar de* implica un proceso de sustracción. En primer lugar se representa la cantidad mayor (minuendo) y, posteriormente, se le quita la cantidad menor (sustraendo). La respuesta se obtiene contando los objetos no separados del conjunto mayor.

Las estrategias de conteo son paralelas a las estrategias por modelaje directo. La diferencia más importante es que en el modelaje el niño o la niña realizan las operaciones manipulando objetos. Los objetos concretos le brindan más seguridad en el desarrollo de las operaciones, pero el proceso cognoscitivo es similar. En el nivel de conteo, la estrategia paralela a *separar de* es *contar hacia atrás a partir de*. El niño toma como punto de partida el número mayor y de allí comienza a contar hacia atrás. Por ejemplo, $8 - 4 = ?$, se comienza con 8, menos uno 7, menos uno 6, menos uno 5, menos uno 4. La respuesta es 4. Esta secuencia contiene tantas denominaciones (nombres de números) como indica el número menor (sustraendo). El último número de la secuencia es la respuesta.

La estrategia *separar a* es muy similar a la estrategia *separar de* exceptuando que en la primera se van removiendo del conjunto mayor todos los elementos necesarios hasta igualar el número de objetos no removidos, con el número de elementos contenidos en el conjunto menor. La respuesta se obtiene contando el número de elementos removidos.

Cuadro 6.
Estrategias de Sustracción

Tipo	Descripción
Modelaje Directo	
<i>Separar de</i>	<p>Consiste en representar la cantidad mayor usando objetos o dedos. A esta cantidad se le quita la menor. La respuesta es el número de objetos que quedan. Ejemplo: $7 - 4 = ?$</p> 
<i>Separar a</i>	<p>Consiste en separar elementos de la cantidad mayor hasta que queda el número indicado por la cantidad menor. La respuesta se halla contando el número de los elementos separados. Ejemplo: $7 - 4 = ?$</p> 
<i>Contar hacia adelante</i>	<p>Consiste en representar con objetos la cantidad mayor y luego la menor. A ésta se le añaden los objetos necesarios para que sea equivalente a la cantidad mayor. La respuesta se consigue contando el número de elementos añadidos a la cantidad menor. Ejemplo: $7 - 4 = ?$</p> 
<i>Igualar</i>	<p>Consiste en disponer de dos cantidades de objetos en correspondencia uno a uno. La respuesta se obtiene contando los elementos no emparejados. Ejemplo: $7 - 4 = ?$</p> 
Conteo	
<i>Contar hacia atrás desde</i>	<p>Consiste en contar hacia atrás sin ayuda (objetos o dedos) a partir del minuendo, tantos pasos como marca la cantidad menor. El último número en la secuencia de conteo es la respuesta. Ejemplo: $7 - 4 = ?$ Se verbaliza a partir del minuendo (siete), es decir: seis, cinco, cuatro, tres. La respuesta es 3.</p> 
<i>Contar hacia adelante a partir de un número dado</i>	<p>Consiste en contar a partir del número menor hasta alcanzar el mayor. La respuesta se obtiene contando los números contados para equiparar ambas cantidades. Ejemplo: $7 - 4 = ?$ Se verbaliza: cinco, seis, siete. Los números contados son tres, por lo tanto, la respuesta es 3.</p> 

El último par de estrategias involucra adición. El niño comienza con la menor cantidad y va sumando hasta construir el conjunto mayor. Cuando se trabaja con objetos concretos, el niño coloca un número de objetos igual al número menor dado y va añadiendo objetos al conjunto, uno cada vez, hasta que el conjunto sea igual al número mayor. Contando el número de objetos añadidos se obtiene la respuesta.

La estrategia paralela de conteo se denomina *contar hacia adelante a partir de un número dado*, en la cual el niño o la niña comienza a contar hacia adelante partiendo del número menor. La secuencia finaliza cuando se alcanza el valor del número mayor. La respuesta se obtiene contando el número de palabras de la secuencia. Por ejemplo, $7-3=?$; tres más uno 4, más uno 5, más uno 6, más uno 7. La respuesta es 4.

Las estrategias de adición y sustracción analizadas representan diversos grados de abstracción. Por ejemplo, las estrategias de modelaje directo con objetos es un nivel de estrategias relativamente primitivo y de naturaleza concreta que corresponde, según Piaget, a los primeros estadios de desarrollo de la inteligencia. Sin embargo, las estrategias de conteo requieren habilidades que implican la representación del mundo de lo concreto y, por lo tanto, se trata de un nivel más sofisticado.

Esta diferencia entre los niveles y las estrategias propiamente dichas determinará que los niños o las niñas, dependiendo de su nivel de desarrollo intelectual, maduración y edad, entre otros factores, utilicen una u otra para resolver problemas aritméticos y algebraicos.

Los resultados de investigaciones realizadas señalan que los niños y las niñas menores tienden a utilizar estrategias de naturaleza concreta (modelaje directo con objetos o dedos), ya que les permite seguir, con mayor confianza, la secuencia de conteo y chequear el proceso varias veces. Los niños y las niñas mayores tienden a utilizar estrategias más eficientes en términos de tiempo. Igualmente, los niños y las niñas cambian las estrategias varias veces durante el proceso de adquisición de una determinada habilidad aritmética o algebraica (Goldman, 1989).

Los niños y las niñas inician sus procesos de adición con la estrategia de *contar todos*, es decir, representan los dos sumandos mediante objetos o dedos y, posteriormente, cuentan todos los elementos de

los conjuntos uno a uno. Una vez adquirida dicha estrategia, los niños y las niñas recurren a las de conteo, consistentes en contar el segundo sumando partiendo del primero. Una vez consolidada esta estrategia, se encuentran preparados para utilizar otros procedimientos más sofisticados como el Modelo Min, el cual asume que el niño o la niña selecciona el sumando mayor y le suma el menor.

En la descripción de los cambios ocurridos durante el desarrollo de los niños y las niñas, Siegler y Shrager (1983) sugirieron una estrategia de selección la cual depende de las características de los individuos. La propuesta supone que los niños y las niñas, en una primera instancia, tratan de resolver los problemas por recuperación de los hechos numéricos almacenados en su memoria. Si este procedimiento no les resulta eficiente, vuelven a intentar resolverlo por el mismo procedimiento de recuperación. Si en este segundo intento fracasan, prueban una estrategia diferente como, por ejemplo, alguna estrategia de conteo. De esta manera, los modelos de conteo se utilizan sólo cuando la recuperación de los hechos almacenados en la memoria no ha sido eficiente para resolver el problema (Carpenter, 1985).

En términos generales, los resultados de las investigaciones pueden resumirse así: 1) los niños y las niñas inicialmente ensayan estrategias del tipo *contar todos*, que paulatinamente se van disipando para dar origen a otras más eficientes como *contar hacia adelante* y *recuperar hechos numéricos conocidos*, 2) a pesar de que existe una variabilidad considerable en el uso de las estrategias dependiendo del tipo de problema, la estrategia de *contar hacia adelante* presenta un alto porcentaje de uso y perdura a lo largo de varios niveles de desarrollo en los niños y las niñas examinados.

Lo ideal es lograr que los niños y las niñas alcancen un repertorio de hechos numéricos que conforme la base para resolver un buen número de problemas. El acceso directo a los hechos numéricos almacenados en el sistema de memoria, presenta problemas de espacio en la capacidad de la memoria de corto plazo (MCP). Una forma de extender la capacidad de esta memoria es desarrollando automatización de la respuesta. En la medida en que ciertos procesos se puedan realizar automáticamente, sin necesidad de prestarle atención directa, habrá más espacio disponible en ella para los procesos que sí requieren atención. Para relacionar la automatización con el dominio del cálculo,

es necesario distinguir entre dos tipos de tareas aritméticas en las que es común el ensayo y la práctica. Por una parte están los llamados hechos numéricos, es decir, las combinaciones de números que conforman los bloques básicos de todos los cálculos y que son de cuatro tipos: suma, resta, multiplicación y división. Por otra parte están los algoritmos o procedimientos de cálculo, éstos son las secuencias de operaciones que se realizan utilizando los hechos numéricos para llegar a la resolución de problemas más complejos.

La práctica ayuda a que los hechos numéricos se puedan evocar instantáneamente de la memoria de largo plazo (MLP), permitiendo así que la memoria de corto plazo (MCP) pueda funcionar con mayor eficacia. Lo mismo sucede para el acceso automático de procedimientos memorizados o algorítmicos. Si un individuo tiene que reconstruir el procedimiento sobre cómo cambiar fracciones a su menor denominador común cada vez que los necesita, entonces el espacio disponible en la MCP es ocupado por procesos que podrían ser automáticos mediante una práctica apropiada. Así, entonces, la sugerencia es que ciertas destrezas básicas de cálculo –hechos numéricos y algoritmos– deben desarrollarse hasta el punto de convertirse en procesos automáticos, de manera que no compitan por el espacio en la MCP con procesos de alto nivel en la resolución de problemas (Resnick y Ford, 1981).

Desde los inicios de la década de los ochenta, Rimoldi (1984) ha venido estudiando el papel que tienen las estructuras lógicas y los sistemas simbólicos en la resolución de problemas. Este autor ha examinado los efectos de la edad, el sexo, el nivel socioeconómico, la pertenencia a grupos culturales diferentes, etc. La mayor parte de los estudios señalan, por una parte, la verificación de la hipótesis que establece la relación entre los conceptos de lenguaje y la estructura lógica y, por la otra, que la no resolución de un problema puede deberse a un uso deficiente o al desconocimiento del lenguaje utilizado en el enunciado. Este aspecto, sin embargo, no ha sido contemplado en toda su dimensión e importancia por los teóricos clásicos del área de resolución de problemas. En efecto, han sido los investigadores de la comprensión del discurso los que han argumentado y estudiado con más énfasis la relación entre el lenguaje, el sistema simbólico y las estructuras de pensamiento. El lenguaje y el sistema de símbolos constituyen el formato básico de información almacenada en la memoria y éste es un conocimiento que permite comprender y representar el problema. Sin control del sistema simbólico, es imposible pretender que un individuo opere satisfactoriamente aunque pueda ser capaz de traducir y comprender la estructura subyacente al problema (Kintsch, 1986).

Se ha observado que la mayor parte de los estudiantes, independientemente del nivel de escolaridad, resuelven menos problemas cuando éstos se presentan en forma verbal que cuando se presentan en forma matemática. Igualmente, se ha comprobado que en muchas situaciones problema, una de las principales dificultades estriba en transformar el estado inicial, formulado en lenguaje natural, al estado formal en lenguaje matemático. Una vez obtenida la transformación y si ésta es correcta, el problema está prácticamente resuelto.

Kintsch (1987), descubrió tres posibles fuentes de error al resolver problemas aritméticos sencillos presentados en forma verbal: 1) mal uso o desconocimiento de estrategias aritméticas, falsas concepciones y fracaso en el procedimiento de conteo, 2) comprensión equivocada del problema, principalmente, por factores lingüísticos, y 3) sobrecarga de elementos en la memoria de corto plazo.

La investigación reciente en el área de la resolución de problemas, ha señalado que los estudiantes de rendimiento regular también presentan deficiencias en la resolución de problemas matemáticos de naturaleza verbal (De Corte y Verschaffel, 1996). Sin embargo, también se ha encontrado que los resultados obtenidos parecen evidenciar que la mayoría de los estudiantes que tienen dificultad para resolver problemas de este tipo no tienen deficiencias cognoscitivas. De allí que algunos investigadores traten de explicar este fenómeno, indicando que la no aplicación del conocimiento matemático en los eventos de la vida real y otros factores como la cultura, las actividades realizadas en el salón de clases y la manera de presentar y enseñar las tareas matemáticas, constituyen razones probables del bajo rendimiento observado en relación con los problemas verbales (Wyndhamn y Saljo, 1997).

Numerosos estudios de tipo correlacional han indicado que existe una relación entre los logros en el área de la Matemática y la lectura, por lo que se ha concluido que los estudiantes buenos en lectura también son buenos en Matemática (Sovik, Frostrad y Heggberget, 1999).

Aunque se han desarrollado varios modelos para tratar de explicar la relación entre la lectura y la resolución de problemas (Kintsch y Greeno, 1985), éstos no se han verificado totalmente. Los investigadores parecen coincidir en que tales construcciones implican la interacción entre dos elementos: el texto, presentado de acuerdo con las reglas del lenguaje y el lector, con su conocimiento base lingüístico y conceptual.

En la escuela los estudiantes están acostumbrados a enfrentar problemas aritméticos presentados de manera verbal (textos) desde los primeros años de la Educación Básica, por lo que se asume que pueden comprender este tipo de texto utilizado para presentar las versiones verbales de las tareas aritméticas. Sin embargo, con este tipo de problema los estudiantes pueden tener dificultades porque deben construir un modelo mental para representarlo, comprenderlo y poderlo resolver.

Cuando un estudiante se encuentra con un problema de naturaleza verbal, generalmente selecciona una de las cuatro operaciones aritméticas. Esta selección puede estar basada en los rasgos superficiales del texto, como las palabras claves, o en un apareamiento de la situación

descrita y las operaciones. Las operaciones seleccionadas se aplican a los números que están en el texto y se realizan los cálculos necesarios.

Flick y Lederman (2002), señalaron que es necesario difundir el valor de enseñar lectura en el contexto de la Matemática, ya que la comprensión requiere la aplicación de destrezas del pensamiento de alto nivel. Ya la lectura no se concibe más como el significado de las palabras en un texto, más bien, leer es comprender que “el significado de un elemento químico está en la interacción que ocurre entre el lector y la Cuadro Periódica” (p. 105). Esto requiere hacer interpretaciones, elaborar inferencias y utilizar el conocimiento previo.

El interés sobre la relación entre la lectura y la Matemática proviene de diversas fuentes. Una de ellas emerge de la necesidad de que los estudiantes desarrollen destrezas de lectura de textos con diferentes tipos de contenido. La instrucción se dirige, especialmente, hacia el desarrollo de destrezas de lectura que utilizan los cuentos y las novelas como un medio de enseñanza. Pero los textos de Matemática son diferentes en formato, estructura y propósito y requieren destrezas diferentes, por lo que los estudiantes no leen estos textos como si fueran novelas o cuentos.

Sovik, Frostrad y Heggberget (1999), realizaron un estudio cuyo propósito fue examinar la relación entre la comprensión de lectura de estudiantes de nueve años de edad y el uso de estrategias para resolver problemas verbales de aritmética. Los autores hipotetizaron que los estudiantes que eran buenos en lectura y matemática, utilizarían estrategias deductivas en comparación con los estudiantes de otros grupos. La segunda hipótesis estableció que el coeficiente intelectual, más que la comprensión de lectura, sería una variable predictora de las estrategias utilizadas por los estudiantes en los problemas verbales. Se conformaron cuatro grupos con estudiantes de nueve años de edad con diferentes niveles de competencia en lectura y matemática. Se aplicaron tres tipos de pruebas para examinar las estrategias utilizadas por los estudiantes para alcanzar la solución a los problemas planteados.

Los resultados evidenciaron que había mucha semejanza entre el grupo 1 (eficientes en lectura y matemática) y el grupo 2 (eficientes en

matemática y deficientes en lectura) en lo referido a las estrategias utilizadas para resolver problemas verbales de adición y sustracción. Los sujetos de ambos grupos utilizaron estrategias deductivas mientras que los de los grupos 3 (eficientes en lectura y deficientes en matemática) y 4 (deficientes en lectura y matemática) utilizaron estrategias procedimentales para resolver los problemas. En relación con las estrategias aplicadas en los problemas de multiplicación y división, se encontró un patrón diverso de estrategias en los cuatro grupos; sin embargo, la mayoría de los sujetos utilizó estrategias deductivas. El coeficiente intelectual fue el único predictor significativo de las estrategias utilizadas por los sujetos.

Como ya se ha dicho anteriormente, Flavell (1976) introdujo el concepto de metacognición en el contexto de la psicología evolutiva. Este autor definió dicho concepto como “el conocimiento que tenemos sobre nuestros procesos y productos cognoscitivos o cualquier cosa relacionada con ellos.... La metacognición se refiere a la supervisión activa de estos procesos en relación con los objetos o datos cognoscitivos sobre los cuales se plantea un objetivo o una meta” (p. 232).

Para tener una mejor comprensión del desempeño exitoso en Matemática por parte de los estudiantes, es imprescindible el concepto de metacognición. Actualmente, la metacognición se ha convertido en un constructo general, multidimensional e inclusivo que permite a los aprendices ajustarse a variadas tareas de resolución de problemas y a diversas demandas y contextos (Boekaerts, 1999).

Se ha diferenciado entre el *conocimiento metacognoscitivo*, el *control ejecutivo* o las destrezas metacognoscitivas y las *concepciones o creencias metacognoscitivas*. Con respecto al conocimiento metacognoscitivo, se han descrito tres componentes: el conocimiento declarativo, el conocimiento procedimental y el conocimiento condicional o estratégico. En el ámbito de la Matemática, por ejemplo, los estudiantes saben que ellos tienen que chequear el proceso de resolución en divisiones de más de un dígito, pero también saben que no es necesario hacerlo cuando resuelven sumas de un solo dígito. Esto es conocimiento metacognoscitivo.

En cuanto a las destrezas metacognoscitivas, éstas se perciben como el control voluntario que tienen los individuos sobre sus propios procesos cognoscitivos. Desoete, Roeyers y Buysse (2001), expresaron que se ha acumulado cierta cantidad de información referida a las cuatro destrezas metacognoscitivas: predecir, planificar, supervisar y evaluar.

En el ámbito de la Matemática, la *predicción* se refiere a las actividades dirigidas a darse cuenta cuáles son ejercicios difíciles ($126 \div 5$) y cuáles son fáciles ($126 - 5$), para poder diferenciarlos con la finalidad de persistir en tareas que requieren cierto grado de esfuerzo. La *planificación* implica el análisis de los ejercicios (es un ejercicio de división en un problema de formato numérico), la evocación de conocimiento especí-

fico relevante y destrezas (cómo dividir), y secuenciar las estrategias de resolución de problemas (división de centenas, decenas y unidades). La *supervisión* se relaciona con preguntas como *¿Estoy siguiendo mi plan?* *¿Está funcionando mi plan?* *¿Debería utilizar papel y lápiz para resolver esta división?* La *evaluación* se refiere a la valoración de la tarea y del proceso seguido para obtener la respuesta.

La investigación en metacognición en el área de resolución de problemas, ha tratado de identificar procesos estratégicos que pueden aplicarse a todo tipo de problemas más que a áreas específicas. Brown (1987), identificó varios procesos estratégicos que los estudiantes deben adquirir para ayudarlos a convertirse en solucionadores efectivos de problemas. Estos son:

- Conocer las limitaciones como aprendiz.
- Estar consciente de las estrategias, de cómo se deben usar y cuándo cada una de ellas es apropiada.
- Identificar el problema a resolver.
- Planificar las estrategias apropiadas.
- Chequear y supervisar la efectividad del plan diseñado para resolver el problema.
- Evaluar la efectividad de los pasos anteriores de manera que el solucionador de problemas sepa cuando finalizar de trabajar en el problema.

En el Cuadro 7 se indican los pasos que, según Bañuelos (1995), se deben seguir en la resolución de un problema y las preguntas que el solucionador debe hacerse en cada paso con el fin de llevar a cabo un proceso metacognoscitivo en el transcurso de la resolución.

Cuadro 7.

Etapas y secuencias para desarrollar conocimiento metacognoscitivo para la resolución de problemas (Bañuelo, 1995)

Primero	Comprendión del problema
Comprender el problema	¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones? ¿Es posible cumplir las condiciones? ¿Son suficientes las condiciones para hallar la incógnita? ¿Son insuficientes? ¿Son redundantes? ¿Son contradictorias? Represento el problema con un Gráfico. Adopto una notación adecuada. Separo las diferentes partes de las condiciones, ¿Puede ponerlas por escrito?
Segundo	Concepción de un plan
Descubrir las relaciones entre los datos y la incógnita. Puede verse obligado a tomar en cuenta problemas auxiliares si no encuentra una relación inmediata. Debe llegar a tener un plan de resolución	¿He encontrado antes este problema? ¿Lo he visto de forma diferente? ¿Conozco algún problema relacionado? ¿Conozco algún teorema que me pueda ser útil? Reviso la incógnita. Intento recordar algún problema familiar que tenga una incógnita igual o parecida. ¿Puedo replantearme el problema? Si no puedo resolver el problema propuesto, intento resolver primero algún problema que se relacione con el mismo. ¿Puedo imaginarme un problema más sencillo relacionando con éste? ¿Algún problema más general? ¿Más particular? ¿Análogo? ¿Puedo resolver alguna parte del problema? Mantengo sólo una parte de las condiciones, abandono la otra parte. ¿Hasta qué punto se determina cómo puede entonces variar la incógnita? ¿Podría extraer algo práctico a partir de los datos? ¿Puedo pensar en otros datos adecuados para hallar la incógnita? ¿Puedo cambiar la incógnita, o los datos, o las dos cosas si hace falta, para que la incógnita esté más próxima a los datos nuevos? ¿He utilizado todas las condiciones? ¿He tomado en cuenta todos los elementos esenciales que intervienen en el problema?
Tercero	Ejecución del plan
Llevar a cabo un plan	Cuando llevo a cabo mi plan de resolución, comprobaré cada paso. ¿Puedo ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedo demostrar que es correcto?
Cuarto	Verificación
Examinar la solución obtenida	¿Puedo comprobar el resultado? ¿Puedo comprobar el razonamiento? ¿Puedo percibirlo a simple vista? ¿Puedo utilizar el resultado o el método para algún otro problema?

Uno de los aspectos importantes que conviene resaltar en esta sección, es que la resolución de problemas es una actividad conformada por diferentes tipos de procesos y, en este sentido, constituye una vía mediante la cual los individuos utilizan el conocimiento adquirido previamente –declarativo, procedimental o estratégico– con el fin de satisfacer las demandas de una situación nueva, no familiar.

En el sistema educativo venezolano es ya un hecho establecido que los docentes de áreas en las cuales hay que resolver problemas como Matemática, Física, Química, etc., le asignan gran importancia a la solución correcta. Sin embargo, es necesario modificar tal concepción y lograr que los docentes acepten la noción de que el objetivo fundamental en la enseñanza de resolución de problemas es contribuir a que los estudiantes desarrollen habilidades de pensamiento y procesos que permitan que éstos alcancen soluciones correctas.

Krulik y Rudnick (1982), sugirieron que el docente debe:

- Crear un ambiente apropiado para la resolución de problemas.
- Ofrecer un repertorio amplio y variado de problemas que generen una práctica intensiva y extensiva, además de que representen un reto para los estudiantes.
- Enseñar a los estudiantes a desarrollar estrategias que les permitan leer los problemas en forma analítica.
- Pedir a los estudiantes que inventen sus propios problemas.
- Permitir que los estudiantes trabajen en parejas o en pequeños grupos.
- Promover en los estudiantes el uso de estrategias alternativas: reconocer patrones de problemas, trabajar en sentido inverso, predecir y probar, simular, experimentar, reducir los datos, deducir, etc.
- Hacer preguntas mientras los estudiantes están en el proceso de discusión de los procedimientos para resolver problemas.
- Permitir que los estudiantes revisen sus respuestas.

- Utilizar estrategias que permitan el desarrollo de procesos del pensamiento.
- Hacer que los estudiantes representen, mediante un diagrama de flujo, sus propios procedimientos para resolver problemas.

En el área de la resolución de problemas, y más específicamente en el área de la Matemática, se han desarrollado varios modelos instruccionales: la instrucción directa, la autoinstrucción y la ejecución guiada o aprendizaje dirigido.

La *instrucción directa* se ha utilizado frecuentemente para enseñar estrategias propias de una tarea en particular. A los estudiantes se les enseña una secuencia de acción específica y se modela esa secuencia dentro del contexto de la tarea. Este tipo de instrucción se estructura, paso por paso, para asegurar el dominio del procedimiento antes de que el estudiante ejecute la tarea. La ayuda del docente se desvanece gradualmente y se utilizan la práctica y la revisión con el fin de afianzar las estrategias adquiridas.

El entrenamiento en *estrategias autoinstruccionales* implica ofrecer a los estudiantes un conjunto de ayudas verbales diseñadas para recordarles los pasos a seguir en la ejecución de la tarea. Las ayudas verbales se usan como mediadores de las operaciones cognoscitivas y metacognoscitivas y, con frecuencia, se utilizan en un contexto de modelaje, con el fin de ayudar a los estudiantes a adquirir las secuencias necesarias para alcanzar la solución del problema.

El *aprendizaje dirigido* se centra en la experiencia guiada. Este modelo instruccional intenta inducir a los estudiantes a involucrarse en procesos cognoscitivos y metacognoscitivos utilizados por los expertos. La adquisición de habilidades ocurre en forma progresiva. Básicamente los pasos son: 1) modelaje de la ejecución de la tarea por parte del docente, 2) uso de procedimientos propios de una ejecución experta y 3) retroalimentación de la ejecución de los estudiantes con el fin de aproximarlos a dicho nivel de pericia.

La enseñanza de los procesos de pensamiento involucrados en la resolución de problemas, debe ofrecer a los estudiantes más que estrategias

específicas relativas a una situación problema en particular, herramientas que puedan utilizar en otras situaciones. En síntesis, el objetivo a largo plazo debe ser el de lograr un estudiante estratégico que:

1. Posea un rango amplio y variado de procedimientos que pueda utilizar en cualquier situación.
2. Sea flexible en el uso de procedimientos en situaciones específicas.
3. Se involucre en actividades de supervisión del proceso de resolución de problemas, con el fin de determinar si las actividades que está realizando le permiten alcanzar la solución deseada.

En este libro se presentó información referida a la resolución de problemas: su naturaleza, su definición, los componentes que la conforman y los factores que la afectan. De igual manera, se señalaron diversas estrategias para la resolución de problemas con particular énfasis en la adquisición y desarrollo de estrategias en el área de la Matemática, específicamente de adición y sustracción. Así mismo, se presentaron algunos modelos y programas para la enseñanza de la resolución de problemas que actualmente se están poniendo en práctica. Finalmente, se dió información que vincula la resolución de problemas con otros aspectos como la función del lenguaje, la comprensión de la lectura y la metacognición.

REFERENCIAS

- Andre, T. (1986). Problem solving and education. En G. D. Phye & T. Andre (Eds.), *Cognitive classroom learning. Understanding, thinking and problem solving*. New York: Academic Press.
- Bañuelos, A. M. (1995). Resolución de problemas matemáticos en estudiantes de bachillerato. *Perfiles Educativos*, 67, 50-58.
- Baroody, A. (1987). Development of counting strategies for single-digit addition. *Education in Mathematics Education*, 18, 141-157.
- Beishuizen, M. , Van Putten, C. & Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning & Instruction*, 7, 87-106.
- Boekaerts, M. (1999). Metacognitive experiences and motivational state as aspects of self-awareness. Review and discussion. *European Journal of Psychology of Education*, 14, 571-584.
- Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation, and other more mysterious mechanisms. En E. Reiner & R. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Briars, D. J. & Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition & Instruction*, 1, 245-296.
- Brown, J. S. & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, 155-192.
- Brown, J. S. & VanLehn, K. (1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, 4, 379-426.
- Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: LEA.
- Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal of Research in Mathematics Education*, 15, 170-202.
- Chi, M. T. H. & Glaser, R. (1983). *Problem solving abilities*. Material mimeografiado.
- Chi, M. T. H. , Feltovich, P. J. & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152.
- Chi, M. T. H. , Glaser, R. & Rees, E. (1981). Expertise in problem solving. En R. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence*. Vol. 1. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Christou, C. & Philippou, G. (1999). Role of schemas in one-step word problems. *Educational Research and Evaluation*, 5(3), 269-289.
- De Corte, E. & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with multiplicative structures. *Learning & Instruction*, 6, 219-242.
- Desoete, A., Roeyers, H. & Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem solving in grade 3. *Journal of Learning Disabilities*, 34, 435-449.
- Dijkstra, S. (1991). Instructional design models and the representation of knowledge and skills. *Educational Technology*, 31(6), 19-26.
- Duhalde, M. E. y González, M. T. (1997). *Encuentros cercanos con la Matemática*. Buenos Aires: Aique.
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. En L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Flick, L. B. & Lederman, N. G. (2002). The value of teaching reading in the context of science and mathematics. *School Science and Mathematics*, 102(3), 105-106.
- Fundación Polar, Fundación CENAMEC y CONEXPRO (2002). *Programa de actualización en Matemática PAM*. Material mimeografiado. Caracas, Venezuela: Autor.
- Fundación Polar (2004). *Matemática para todos*. Caracas, Venezuela: Autor.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer.
- Gagné, R. M. & Glaser, R. (1987). Foundations in learning research. En R. M. Gagné (Ed.), *Instructional technology: Foundations*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Giménez de Mendoza, L. (2005). Presentación. En *El Mundo de la Matemática*. Caracas: Fundación Polar.
- Goldman, S. R. (1989). Strategy instruction in mathematics. *Learning Disability Quarterly*, 12, 43-55.
- González Ramírez, T. (2000). Metodología para la enseñanza de las Matemáticas a través de la resolución de problemas. Un estudio evaluativo. *Revista de Investigación Educativa*, 18(1), 175-100.
- Greeno, J. G. (1980). Trends in the theory of knowledge for problem solving. En D. T. Tuma & F. Reif (Eds.), *Problem solving and education. Issues in teaching and research*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Groen, G. J. & Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, 79, 329-344.

- Hayes, J. R. (1981). *The complete problem solver*. Philadelphia: Franklin Institute Preess.
- Hegarty, M. , Mayer, R. E. & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology, 87*, 18-32.
- Heller, J. & Greeno, J. G. (1979). Information processing analysis of mathematical problem solving. En R. Lesh, M. Mierkiewiz & M. Kantowski (Eds.), *Applied mathematical problem solving*. Columbus, OH: ERIC. (ERIC Document Reproduction Service N° ED 180 816).
- Hinsley, D. , Hayes, J. R. & Simon, H. (1977). From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. En M. A. Just & P. A. Carpenter (Eds.), *Cognitive processes in comprehension*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Jitendra, A. K. & Kameenui, E. J. (1996). Experts' and novices' errors patterns in solving part-whole mathematical word problems. *The Journal of Educational Research, 90*(1), 42-51.
- Jitendra, A. K. , Hoff, K. & Beck, M. M. (1999). Teaching middle school students with learning disabilities to solve word problems using a schema-based approach. *Remedial & Special Education, 20*(1), 50-64.
- Jones, C. (2003). Problem solving. What is it? *APMC, 8*(3), 25-28.
- Kantowski, M. G. (1978). The teaching experiments and soviet studies of problem solving. En I. L. Hatfiels & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop*. Columbus, OH: ERIC/ SMEAC.
- Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics. An exploratory study*. Tesis doctoral. Universidad de Stanford, California. Dissertation Abstracts International, 28, 4380^a.
- Kintsch, W. (1986). Learning from text. *Cognition & Instruction, 3*, 87-108.
- Kintsch, W. (1987). Understanding word problems: Linguistic factors in problem solving. En M. Nagao (Ed.), *Language and artificial intelligence*. North Holland: Elsevier Science Publisher B. V.
- Kintsch, W. & Greeno, J. G. (1984). *Understanding and solving arithmetic word problems*. Material mimeografiado.
- Kintsch, W. & VanDijk, T. A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review, 85*, 363-394.
- Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1982). Teaching problem solving to pre-service teachers. *Arithmetic Teacher, February*, 42-49.

- Larkin, J. H., McDermott, P., Simon, D. P. & Simon, H. A. (1980). Expert and novice performance in solving physics problems. *Science*, 208, 1335-1342.
- Lester, F. K. (1978). Mathematical problem solving in elementary school: Some educational and psychological considerations. En L. L. Hatfield & D. A. Brabard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Lucangeli, D., Tresoldi, P. E., Bendotti, M., Bonanonne, M. & Siegel, L. S. (2003). Effective strategies for mental and written arithmetic calculation for the third to the fifth grade. *Educational Psychology*, 23(5), 507-520.
- Manouchehri, A. (2001). A four point instructional model. *Teaching Children Mathematics*, November, 180-186.
- Mayer, R. E. (1981). Frequency norms and structural analysis of algebra story problems in to families, categories and templates. *Instructional Science*, 10, 135-175.
- Mayer, R. E. (1983). *Thinking, problem solving and cognition*. New York: Freeman.
- Mayer, R. E. (1992). Cognition and instruction: Their historic meeting within educational psychology. *Journal of Educational Psychology*, 84(4), 405-412.
- McCloskey, M., Macaruso, P. & Whetstone, T. (1992). The functional architecture of numerical processing mechanisms: Defending the modular model. En J. I. D. Campbell (Ed.), *The nature of the origins of mathematical skills*. Amsterdam: Elsevier.
- Monereo, C., Castelló, M., Clariana, M., Palma, M. y Pérez, M. L. (1995). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en la escuela*. Barcelona: Graó.
- Montague, M. (2002). Mathematical problem solving instruction: Components, procedures, and materials. En M. Montague & C. Waiger (Eds.), *Afterschool extensions: Including students with disabilities in afterschool programs*. Reston, VA: Exceptional Innovations.
- Moreau, S. & Coquin-Vennot, D. (2003). Comprehension of arithmetic word problems by fifth grade pupils: Representations and selection of information. *British Journal of Educational Psychology*, 73, 109-121.
- Nathan, M. J., Kintsch, W. & Young, E. (1992). A theory of algebra-word problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition & Instruction*, 9(4), 329-389.
- Nesher, P. & Hershkovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 1-23.

- Nesher, P. , Hershkovitz, S. & Novotna, J. (2003). Situation model, text base and what else? *Educational Studies in Mathematics*, 52, 151-176.
- Newell, A. & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Norman, D. A. & Rumelhart, E. E. (1975). *Explorations in cognition*. San Francisco: Freeman.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2000). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. La evaluación de la lectura, las matemáticas y las ciencias en el Proyecto PISA 2000. Informe del Proyecto internacional para la producción de indicadores de rendimiento de los alumnos*. Madrid, España: Autor.
- Polya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. Vol. 2, New York: Wiley.
- Putnam, R. T. (1987). Mathematics knowledge for understanding and problem solving. *International Journal of Educational Research*, 11(6), 687-705.
- Resnick, L. B. & Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, NJ: LEA.
- Reys, R. , Suydam, M. & Lindquist, M. (1995). *Helping children learn mathematics*. (4th edition). Mass. , USA: Allyn & Bacon.
- Rimoldi, H. J. (1984). Solución de problemas: Teoría, metodología y experimentación. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 39, 75-96.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Siegler, R. S. & Robinson, M. (1982). The development of numerical understanding. *Advances in Child Development and Behavior*, 16, 241-312.
- Siegler, R. S. & Shrager, J. (1983). *Strategies choices in addition: How children know what to do*. Trabajo presentado en el XVIII Simposio Anual Carnegie sobre Cognición. Pittsburgh, PA.
- Silbert, J. , Carnine, D. & Stein, M. (1990). *Direct instruction mathematics*. (2nd edition). Columbus, OH: Merrill.
- Sovik, N. , Frostrad, P. & Heggberget, M. (1999). The relation between reading comprehension and task-specific strategies used in arithmetic word problems. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 47(4), 371-398.
- Staub, F. C. & Reusser, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. En C. A. Weaver

- III, S. Mannes & C. R. Fletcher (Eds.), *Discourse comprehension. Essays in honor of W. Kintsch*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Sternberg, R. J. (1987). Razonamiento, solución de problemas e inteligencia. En R. J: Sternberg (Ed.), *Inteligencia humana, II. Cognición, personalidad e inteligencia*. Buenos Aires: Paidós.
- Stigler, J. W. , Lee, S. Y. & Stevenson, H. W. (1990). *Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Suppes, P. & Groen, G. J. (1967). Some counting models for first grade performance data on simple addition facts. En J. M. Scandura (Ed.), *Research in mathematics education*. Washington, DC; National Council of Teachers of Mathematics.
- Svenson, O. & Broquist, S. (1975). Strategies of solving simple addition problems. *Scandinavian Journal of Psychology*, 16, 143-149.
- Wallas, C. (1926). *The art of thought*. New York: Harcourt Brace Jovanovich.
- Wyndhamm, J. & Saljo, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning – a study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning & Instruction*, 7, 361-382.
- Yekovich, F. R. Thompson, M. A. & Walker, C. H. (1991). Generation and verification of inferences by experts and trained non experts. *American Educational Research Journal*, 28(1), 189-209.
- Problemas de naturaleza verbal. Vínculos a páginas de Internet**
- <http://www.geocities.com/Heartland/Ranch/2200/assess.htm> Cada problema presentado ofrece a los estudiantes varias estrategias de solución con representaciones gráficas o cuadros para utilizarlas en su resolución.
- <http://www.mathstories.com> Más de cinco mil problemas para ayudar a mejorar las destrezas de pensamiento crítico. La suscripción tiene un valor de US\$12 al año.
- <http://tqjunior.thinkquest.org/4471> Proyecto ThinkQuest creado por estudiantes de cuarto grado. Cada problema verbal tiene pasos detallados para resolver el problema. Se presentan estrategias con ejemplos de la vida real. Los estudiantes pueden crear sus propios problemas.

ANEXO A.

EJEMPLO DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

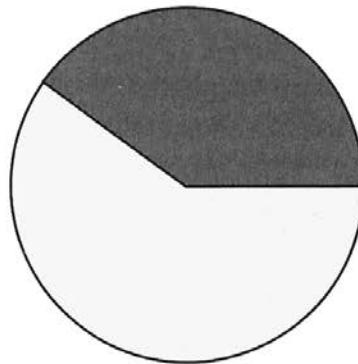
A continuación se ejemplifica, con un problema dado, las actividades para su resolución, de acuerdo con el modelo de Schoenfeld (1985) y a partir de los planteamientos de Polya.

Problema. En un salón de 35 alumnos aprobaron el 40%. Determinar el número de alumnos reprobados.

Resolución del problema

Análisis

Trazar un diagrama.



Total de alumnos: 35 alumnos que representan el 100%.

Exploración

- *Examinar problemas ligeramente modificados: establecer submetas y descomponer el problema.*

El enunciado del problema expresa que hay que determinar el número de alumnos reprobados, pero como sabemos que los aprobados y los reprobados representan la totalidad del curso, podemos resolver el problema estableciendo dos submetas.

Submeta 1. Transformar el 40% de aprobados en número de alumnos.

$$35 \text{ ——— } 100\%$$

$$X \text{ ——— } 40\%$$

$$X = (35 \times 40) / 100 = 1.400 / 100 = 14$$

14 alumnos representan el 40% de los alumnos aprobados.

Submeta 2. Transformar el 60% de reprobados en número de alumnos.

Esta submeta se puede resolver de dos formas.

a) Encontrando la diferencia entre el número total de alumnos del curso y el número de alumnos aprobados. Esto es:

$$35 - 14 = 21 \text{ alumnos}$$

b) Calculando el número de alumnos que representa el 60% del total.

Este cálculo nos permite predecir y verificar que la cantidad a obtener debe ser 21 alumnos, si hemos realizado bien el cálculo.

$$35 \text{ } \underline{\hspace{2cm}} 100\%$$

$$X \text{ } \underline{\hspace{2cm}} 60\%$$

$$X = (35 \times 60) / 100 = 2. 100 / 100 = 21 \text{ alumnos}$$

21 alumnos representan el 60% de alumnos reprobados.

Comprobación de la solución obtenida

- *Verificar la solución obtenida siguiendo criterios específicos: utilización de todos los datos pertinentes.*

Sumando los alumnos aprobados y reprobados debemos obtener el total de alumnos del curso. En efecto:

21 alumnos reprobados + 14 alumnos aprobados = 35 alumnos en el curso.