

Чисельне інтегрування. Ідея.

При використанні простих лінійних функцій форми ми змогли аналітично проінтегрувати вирази, будуючи матриці теплопровідності чи теплоємності. Однак іноді такий підхід може зустрітись з труднощами, що надалі буде продемонстровано у випадку функцій форми двовимірних і тривимірних функцій форми вищого порядку. Тому розглянемо можливість чисельного інтегрування матричних характеристик.

Переважну більшість формул для чисельного інтегрування запропоновано для інтегралів на проміжку $[-1,1]$. Тому при чисельному інтегруванні необхідно виконати заміну змінних.

Ідею використання формул для чисельного інтегрування матрично-векторних характеристик проілюструємо на ізопараметричних скінченних елементах першого порядку (ізопараметричними їх називають тому, що перетворення координат і апроксимацію шуканих функцій а межах елементів побудовано з використанням одних і тих же базисних функцій).

Розглянемо довільний елемент $[x_{i-1}, x_i]$ і побудуємо перетворення координат в такий спосіб, щоб отримати стандартний елемент $[-1,1]$. Для цього введемо локальну координату $\xi \in [-1,1]$, так що

$$x = N_{i-1}(\xi) \cdot x_{i-1} + N_i(\xi) \cdot x_i, \quad (\text{П.1})$$

де

$$N_{i-1}(\xi) = 0,5 \cdot (1 - \xi), \quad N_i(\xi) = 0,5 \cdot (1 + \xi). \quad (\text{П.2})$$

Як бачимо ці функції мають ті ж властивості, що і розглядувані нами лінійні функції форми, визначені на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$, а саме: рівність одиниці у відповідному вузлі та нулю – в іншому.

Використаємо функції (П.2) для апроксимації шуканої та вагової функції на розглядуваному скінченному елементі:

$$T = N_{i-1}(\xi) \cdot T_{i-1} + N_i(\xi) \cdot T_i \quad (\text{П.3})$$

$$w = w_{i-1}(\xi) \cdot w_{i-1} + N_i(\xi) \cdot w_i \quad (\text{П.4})$$

Тоді (див. співвідношення (П.11) з лекції «1_Моделювання тепло...»):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dw}{dx} dx = \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \begin{pmatrix} \left(\frac{dN_{i-1}}{dx} \right)^2 & \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_{i-1}}{dx} \\ \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_{i-1}}{dx} & \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 \end{pmatrix} dx \cdot \begin{pmatrix} T_{i-1} \\ T_i \end{pmatrix} \quad (\text{П.5})$$

інтегруємо чисельно. Для цього зазначимо, що

$$\frac{dN_{i-1}}{dx} = \frac{dN_{i-1}}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, \quad \frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, \quad (\text{П.6})$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_{i-1}}{d\xi} x_{i-1} + \frac{dN_i}{d\xi} x_i, \quad \frac{d\xi}{dx} = \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} \quad (\text{П.7})$$

Тоді

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \begin{pmatrix} \left(\frac{dN_{i-1}}{dx} \right)^2 & \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_{i-1}}{dx} \\ \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_{i-1}}{dx} & \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 \end{pmatrix} dx = \int_{-1}^1 \lambda \begin{pmatrix} \left(\frac{dN_{i-1}}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right)^2 & \frac{dN_{i-1}}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \\ \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_{i-1}}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 & \left(\frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \end{pmatrix} \frac{dx}{d\xi} d\xi. \quad (\text{П.8})$$

Введемо позначення

$$J = \frac{dx}{d\xi}, \quad (\text{П.9})$$

і застосуємо до співвідношення (П.8) квадратурну формулу Гауса порядку M , матимемо (покомпонентно):

$$k_{11} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \left(\frac{dN_{i-1}}{d\xi} J^{-1} \right)^2 J d\xi = \sum_{k=1}^M \lambda(\xi_k) \left(\frac{dN_{i-1}}{d\xi} J^{-1} \right) \Big|_{\xi=\xi_k}^2 J(\xi_k) v_k, \quad (\text{П.10})$$

$$k_{12} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \frac{dN_{i-1}}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} (J^{-1})^2 J d\xi = \sum_{k=1}^M \lambda(\xi_k) \left(\frac{dN_{i-1}}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} (J^{-1})^2 \right) \Big|_{\xi=\xi_k} J(\xi_k) v_k, \quad (\text{П.11})$$

$$k_{22} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \left(\frac{dN_i}{d\xi} J^{-1} \right)^2 J d\xi = \sum_{k=1}^M \lambda(\xi_k) \left(\frac{dN_i}{d\xi} J^{-1} \right) \Big|_{\xi=\xi_k}^2 J(\xi_k) v_k, \quad (\text{П.12})$$

де ξ_k , v_k - відповідно опорні точки і вагові коефіцієнти чисельного інтегрування, зокрема, для $M=2$

$$\xi_1 = -0,577350269; \xi_2 = 0,577350269; v_1 = v_2 = 1;$$

для $M=3$

$$\xi_1 = -0,77456669; \xi_2 = 0,0; \xi_3 = 0,77456669; v_1 = v_3 = 0.5555556; v_2 = 0.8888889.$$

Кількість точок інтегрування вибирають з умови точності обчислення інтегралу. Якщо підінтегральна функція лінійна, достатньо двох точок чисельного інтегрування. Якщо підінтегральна функція квадратична для точного обчислення інтегралу необхідно три точки інтегрування і так далі.

Отже, для чисельного інтегрування необхідно обчислити значення підінтегральної функції у заданих точках ξ_k , домножити на відомі вагові коефіцієнти v_k і підсумувати отримані значення.

Зазначимо, що у разі, коли коефіцієнт теплопровідності залежить від температури, можна також усереднити його на скінченному елементі і винести з-під інтегралу.

Теорія пружності. Статичні задачі.

Нехай на тіло, що займає область V евклідового простору з неперервною за Ліпшицем поверхнею S , діють об'ємні (задані по всьому об'єму тіла) сили F_i та поверхневі сили p_i , задані на частині S_σ поверхні S . На частині S_u поверхні S задані переміщення $u_i^{S_u}$. Іншими словами, маємо крайові умови

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad (\sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2 + \sigma_{i3} n_3 = p_i) \text{ на } S_f, \quad (\text{1-a})$$

$$u_i = u_i^{S_u} \text{ на } S_u, \quad (\text{1-б})$$

де $S = S_u \cup S_\sigma$; $S_u \cap S_\sigma = \emptyset$ і n_j – компоненти вектора одиничної нормалі до поверхні S тіла; $i, j = 1, 2, 3$. Відзначимо тут, що таку скорочену форму запису рівнянь, як (1-а) перед дужками, дуже часто використовують для спрощення запису; фактично це означає, що по індексу, який повторюється (у цьому випадку це j), відбувається підсумовування (що і показано в дужках).

Враховуючи, що індекси змінюються від 1 до 3, маємо три крайових умови (1-а)

Для області V , яку займає тіло, повинні виконуватись рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad \left(\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} + F_i = 0 \right), \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V, \quad (1-в)$$

співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}]\mathbf{u}) \quad (1-г)$$

та феноменологічні (матеріальні) залежності між напруженнями і деформаціями

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\{\varepsilon\}) \quad (1-д)$$

де σ_{ij} – декартові компоненти тензора напружень $\hat{\sigma}$ (три вектора сил на трьох площадках дають 9 компонент тензора; внаслідок симетричності тензора залишаються лише 6 компонент); x_j – декартові координати матеріальної точки; ε_{ij} – компоненти тензора деформації $\hat{\varepsilon}$ (внаслідок симетричності 6 компонент); u_i – компоненти вектора переміщень \mathbf{u} ; $[\mathbf{B}]$ – матриця геометричного оператора лінійної теорії пружності; C_{ijkl} – пружні сталі ($[\mathbf{D}]$ – матриця пружних сталих).

Зазначимо, що у співвідношенні (1-д) йде підсумовування по індексах, які повторюються, а саме по індексах $k, l = 1, 2, 3$.

Тож для визначення 15 невідомих функцій (компонент вектора переміщень та тензорів деформацій і напружень) маємо три рівняння рівноваги (1-в), 6 співвідношень між деформаціями і переміщеннями (1-г) та 6 феноменологічних залежностей (1-д) при крайових умовах (1-а), (1-б).

Для чисельної реалізації зручним може виявитись матрично-векторний запис основних співвідношень. З метою записати в такому вигляді ці співвідношення компоненти симетричних тензорів деформацій і напружень зберемо у вектори

$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23})^T$, $\{\sigma\} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ і введемо матриці геометричного оператора теорії пружності $[\mathbf{B}]$, пружних сталих $[\mathbf{D}]$ та напрямних косинусів зовнішньої нормалі до поверхні $[\mathbf{n}]$, які у загальному тривимірному випадку мають вигляд

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_3 \\ \nabla_2 & \nabla_1 & 0 \\ \nabla_3 & 0 & \nabla_1 \\ 0 & \nabla_3 & \nabla_2 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} G_{1111} & G_{1122} & G_{1133} & G_{1112} & G_{1113} & G_{1123} \\ G_{2211} & G_{2222} & G_{2233} & G_{2212} & G_{2213} & G_{2223} \\ G_{3311} & G_{3322} & G_{3333} & G_{3312} & G_{3313} & G_{3323} \\ G_{1211} & G_{1222} & G_{1233} & G_{1212} & G_{1213} & G_{1223} \\ G_{1311} & G_{1322} & G_{1333} & G_{1312} & G_{1313} & G_{1323} \\ G_{2311} & G_{2322} & G_{2333} & G_{2312} & G_{2313} & G_{2323} \end{bmatrix}, [\mathbf{n}] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \\ n_2 & n_1 & 0 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ 0 & n_3 & n_2 \end{bmatrix}$$

Матриця пружних сталих записана тут для загального анізотропного тіла (тіла, яке має різні властивості в різних напрямках). Для ізотропного тіла матриця пружних сталих істотно спрощується і набуває вигляду

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix},$$

де E, ν - модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона відповідно.

Після введення таких матричних характеристик рівняння рівноваги можна записати у вигляді

$$[\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} + \mathbf{F} = 0 \quad (1-в)$$

(співвідношення Коші та феноменологічні залежності між напруженнями і деформаціями у матричному вигляді записані в дужках виразів (1-г), (1-д)), а крайові умови (1-а) набувають такого матрично-векторного вигляду

$$[\mathbf{n}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T \quad (1-а)$$

Для розв'язування задачі теорії пружності (1) часто використовують формулювання задачі у переміщеннях. При цьому ключові рівняння відносно переміщень тіла отримують шляхом підстановки співвідношень (1-д) та (1-г) у рівняння (1-в). Як наслідок отримуємо три диференціальних рівняння еліптичного типу другого порядку відносно трьох компонент переміщень.

Однак, часто при розв'язуванні задач теорії пружності використовують еквівалентні варіаційні постановки. За найвідомішим і найуживанішим варіаційним підходом стан рівноваги тіла визначають з умови мінімуму функціоналу Лагранжа

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{F} ds - \int_{S_f} \mathbf{u}^T \mathbf{p} ds,$$

або, враховуючи (1-г) та (1-д),

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_V ([B]\mathbf{u})^T [D][B]\mathbf{u} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{F} dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{u}^T \mathbf{p} ds \quad (2)$$

на множині

$$V = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T : u_i = u_i^{S_u}, x \in S_u, u_i \in H^1(V)\} \quad (3)$$

де $H^1(V)$ - простір Соболева.

Розглянемо найпростіші механічні моделі. Введемо поняття стрижня.

Брусом називають прямолінійне чи криволінійне тіло, в якого один лінійний розмір значно більший двох інших лінійних розмірів.

Тіло бруса утворює рух плоского перерізу уздовж лінії, що проходить через центр тяжіння перерізу так, що ця лінія (яку називають віссю бруса) залишається перпендикулярною до його перерізу.

Вісь бруса – геометричне місце центрів тяжіння його поперечних перерізів.

Прямолінійні бруси, які працюють на розтяг-стиск, називають **стрижнями**

Розглянемо вертикальний, закріплений у верхній своїй точці стрижень довжиною L , який розтягується під власною вагою. Скеруємо вісь x уздовж осі стрижня. Оскільки плоский переріз стрижня залишається плоским і перпендикулярним до осі стрижня після прикладеного навантаження, переміщення всіх точок перерізу рівні переміщенню відповідної точки осі. Тому переміщення точок стрижня, його деформацію і напруження визначає одна компонента вектора переміщень, одна компонента тензора деформації і одна компонента тензора напружень. Тобто

$$\mathbf{u} = \{u\}, \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}\}, \{\sigma\} = \{\sigma_{xx}\}.$$

Основні співвідношення теорії пружності тоді набувають вигляду:

$$\sigma_{xx,x} + F_x = 0 \quad \left(\frac{d\sigma_{xx}}{dx} + F_x = 0 \right), \quad (x, y, z) \in V = [0, L] \times A, \quad (4)$$

(A – площа поперечного перерізу стрижня; $F_x = \rho g$ – вага стрижня),

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} \quad \left([\mathbf{B}] = \left[\frac{d}{dx} \right] \right) \quad (5)$$

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad ([\mathbf{D}] = E) \quad (6)$$

Задачу про визначення переміщень деформацій і напружень можна розв'язувати так, як ми розв'язували раніше, використовуючи метод зважених залишків.

Спочатку отримаємо ключове рівняння в переміщеннях, для чого (5) підставимо в (6) і отримане співвідношення – у (4).

Так ми отримаємо рівняння другого порядку на визначення переміщень стрижня

$$\frac{d}{dx} \left(E \frac{du}{dx} \right) + F_x = 0, \quad x, y, z \in V = [0, L] \times A \quad (7-a)$$

за крайових умов

$$u(0) = 0, \quad \sigma_{xx}(L) = 0 \quad (7-b)$$

(верхній край стрижня защемлений – тому вимога рівності переміщень при $x=0$; нижній край циліндра вільний від навантаження – тому вимога рівності нулю напружень на нижньому краю стрижня, при $x=L$).

Вже відомо, як розв'язувати таку крайову задачу (лекція «1_Моделювання Тепло...»). Тому для різноманітності розглянемо інший підхід – варіаційний.

Потенціальна енергія (2) у випадку стрижня з урахуванням (5) та (6) має вигляд

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A ([\mathbf{B}]u)^T E ([\mathbf{B}]u) dx dA - \int_0^L \int_A u F_x dx dA = \frac{EA}{2} \int_0^L ([\mathbf{B}]u)^T ([\mathbf{B}]u) dx - AF_x \int_0^L u dx. \quad (8)$$

Визначимо переміщення точок стрижня з умови мінімуму функціоналу (8).

Відповідно до концепції методу скінченних елементів представимо стрижень у вигляді об'єднання скінченних елементів:

$$[0, L] = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i]$$

Введемо апроксимації шуканих переміщень на кожному такому проміжку, використовуючи найпростіші лінійні функції форми $N_{i-1}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}$, $N_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$. Тоді переміщення на i -му елементі можна наблизити так:

$$u(x) = [N_{i-1}(x), N_i(x)] \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (9)$$

Тут в силу властивостей апроксимаційних функцій u_{i-1}, u_i - значення шуканих переміщень у вузлах i -го елемента.

Враховуючи введені апроксимації (9)

$$([\mathbf{B}]u)^T = (u_{i-1} \ u_i) \begin{bmatrix} \frac{dN_{i-1}(x)}{dx} \\ \frac{dN_i(x)}{dx} \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}]u = \begin{bmatrix} \frac{dN_{i-1}(x)}{dx} & \frac{dN_i(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix}; \quad (10)$$

$$([\mathbf{B}]u)^T ([\mathbf{B}]u) = (u_{i-1} \ u_i) \begin{bmatrix} \frac{dN_{i-1}(x)}{dx} \frac{dN_{i-1}(x)}{dx} & \frac{dN_{i-1}(x)}{dx} \frac{dN_i(x)}{dx} \\ \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{dN_{i-1}(x)}{dx} & \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{dN_i(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Відповідно

$$\Pi(u) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(u_{i-1}, u_i). \quad (12)$$

Підставимо введені апроксимації (9) та отримані співвідношення (10) і (11) у вираз для потенціальної енергії i -го скінченного елемента і згрупуємо відповідно усі змінні так, як ми це робили при розв'язуванні задачі теплопровідності. Тоді потенціальну енергію розглядуваного елемента можна компактно подати у такому матричному вигляді:

$$\Pi_i(u) = \frac{A}{2} \cdot (u_{i-1} \ u_i) \times \left([\mathbf{K}] \cdot \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} F_{i-1} \\ F_i \end{bmatrix} \right), \quad (13)$$

де

$$[\mathbf{K}]_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} E \begin{bmatrix} \frac{dN_{i-1}}{dx} \frac{dN_{i-1}}{dx} & \frac{dN_{i-1}}{dx} \frac{dN_i}{dx} \\ \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_{i-1}}{dx} & \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_i}{dx} \end{bmatrix} dx = \frac{E}{x_i - x_{i-1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F_{i-1} \\ F_i \end{bmatrix} = F_x \int_{x_{i-1}}^{x_i} \begin{bmatrix} N_{i-1} \\ N_i \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} F_x / 2 \\ F_x / 2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Тут $[\mathbf{K}]_i$ – матриця жорсткості i -го елемента.

Зауважимо, що інтегрування цього разу виконано аналітично. Його можна виконати і чисельно. Використовуючи ізопараметричні елементи першого порядку, побудовані з використанням апроксимаційних функцій $N_{i-1}(\xi) = 0.5(1-\xi)$, $N_i(\xi) = 0.5(1+\xi)$ в локальній системі координат елемента,

$$[\mathbf{K}]_i = \int_{-1}^1 [\mathbf{B}']^T E [\mathbf{B}'] \frac{dx}{d\xi} d\xi = \sum_{k=1}^M \left([\mathbf{B}']^T E [\mathbf{B}'] \frac{dx}{d\xi} \right)_k w_k.$$

Підсумовуючи відповідні вирази для всіх скінченних елементів аналогічно, як при розв'язуванні задачі теплопровідності, отримуємо

$$\Pi(\mathbf{q}) = A \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^T [\mathbf{K}] \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{F} \right), \quad \mathbf{q}^T = (u_0, u_1, \dots, u_n). \quad (15)$$

Як бачимо функціонал внаслідок проведеної дискретизації став функцією багатьох змінних (компонент u_0, u_1, \dots, u_n вектора \mathbf{q} . Відповідна умова мінімуму

$$\frac{d\Pi}{d\mathbf{q}} = [\mathbf{K}] \mathbf{q} - \mathbf{F} = 0 \quad (16)$$

приводить нас до системи лінійних алгебричних рівнянь на визначення вузлових значень переміщень. Матрицю $[\mathbf{K}]$ у (16) називають глобальною **матрицею жорсткості**.

Отже, визначення переміщень зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь $[\mathbf{K}] \mathbf{q} = \mathbf{F}$. Після отриманого розв'язку цієї системи рівнянь деформації і напруження визначаємо із співвідношень (5) і (6), враховуючи введені апроксимації (9).

Часто виникає необхідність дослідити напружено-деформований стан не одного стрижня, а стрижневої конструкції, яка складається з багатьох стрижневих складових.

Все сказане вище залишається вірним при побудові відповідних матрично-векторних елементів окремих стрижнів характеристик. Кожний стрижень при цьому відносять до своєї природної системи координат, і будують матрицю жорсткості та вектор правих частин елементів цього стрижня відносно координати x , що проходить по осі розглядуваного стрижня. Водночас вся стрижнева конструкція віднесена до глобальної системи координат X, Y (у двовимірному випадку). Оскільки розрахунки остаточно виконують відносно переміщень конструкції у цій глобальній системі координат, то записують зв'язок декартових координат переміщень вузлів конструкції з координатами переміщень тих же вузлів в локальній системі координат відповідного стрижня.

Для ілюстрації розглянемо i -й скінчений елемент (див. рис.1).

Тоді переміщення двох вузлів цього елемента у глобальних декартових координатах пов'язані з локальними переміщеннями співвідношенням

$$\begin{pmatrix} U_{i-1} \\ V_{i-1} \\ U_i \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & 0 \\ \sin \Theta_i & 0 \\ 0 & \cos \Theta_i \\ 0 & \sin \Theta_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix} \quad (17-a)$$

Аналогічно пов'язані і праві частини:

$$\begin{pmatrix} G_{i-1} \\ H_{i-1} \\ G_i \\ H_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & 0 \\ \sin \Theta_i & 0 \\ 0 & \cos \Theta_i \\ 0 & \sin \Theta_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{i-1} \\ f_i \end{pmatrix} \quad (17-6)$$

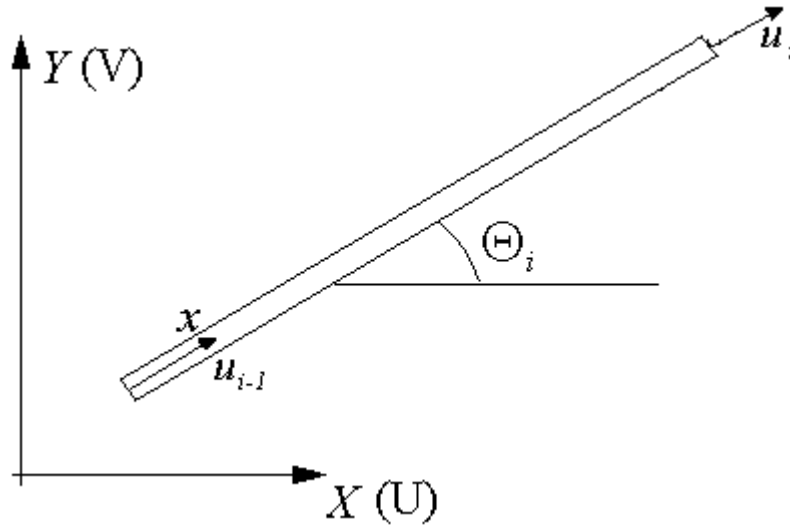


Рис. 1.

Враховуючи цей простий взаємозв'язок з допомогою матриці

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & \sin \Theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Theta_i & \sin \Theta_i \end{bmatrix} \left(\mathbf{T}_i^T = \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & 0 \\ \sin \Theta_i & 0 \\ 0 & \cos \Theta_i \\ 0 & \sin \Theta_i \end{bmatrix} \right),$$

можемо записати

$$\begin{pmatrix} G_{i-1} \\ H_{i-1} \\ G_i \\ H_i \end{pmatrix} = \mathbf{T}_i^T \begin{pmatrix} f_{i-1} \\ f_i \end{pmatrix} = \mathbf{T}_i^T [\mathbf{K}]_i \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix} = \mathbf{T}_i^T [\mathbf{K}]_i \mathbf{T}_i \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ V_{i-1} \\ U_i \\ V_i \end{pmatrix},$$

звідки бачимо, що праві частини \mathbf{F}_i^{XY} і матрицю жорсткості $[\mathbf{K}]_i^{XY}$ розглядуваного елемента у глобальних декартових координатах отримаємо з відповідних характеристик стрижневого елемента в локальних координатах за співвідношеннями

$$\mathbf{F}_i^{XY} = \mathbf{T}_i^T \begin{pmatrix} f_{i-1} \\ f_i \end{pmatrix} = \mathbf{T}_i^T \mathbf{f}_i, [\mathbf{K}]_i^{XY} = \mathbf{T}_i^T [\mathbf{K}]_i \mathbf{T}_i \quad (18)$$

Отже, проходимо елемент за елементом і будуємо їх матриці жорсткості і вектори правих частин у локальних системах координат, природно пов'язаними з відповідними стрижнями. Для кожного елемента за допомогою (18) обчислюємо далі ці характеристики у глобальних координатах і підсумовуємо їх у глобальні матрицю жорсткості і вектор правих частин. Розв'язавши отриману систему рівнянь, отримаємо переміщення вузлів стрижневої конструкції в глобальних координатах.

Зазначимо, що бруси можуть не лише працювати на стиск-розтяг, але і прогинатись під дією навантаження. Тоді такі бруси називають балками.

Ейлер і Бернуллі незалежно один від одного запропонували найпростішу модель балки, ввівши 5 аксіом:

1. Поперечний переріз бруса залишається жорстким і таким, що не деформується у власній площині.
2. Поперечний переріз бруса залишається плоским після прикладання навантаження.
3. Плоскі перерізи, перпендикулярні до поздовжньої осі бруса, залишаються перпендикулярними до неї і після деформації.
4. Переміщення і деформації малі, а поведінку бруса описує теорія пружності.
- 5 Матеріал бруса є пружним й ізотропним.

Рівняння балки Ейлера-Бернуллі в площині

Переміщення точок плоскої балки, її деформацію і напруження за дії силового навантаження, характеризоване вектором $\mathbf{p} = (p_x, p_y)^T$, визначають дві компоненти вектора переміщень

$$\mathbf{u} = (U, V)^T, \quad U(x, y) = u(x) - y \frac{dv}{dx}, \quad V(x, y) = v(x), \quad (19)$$

де балка віднесена до декартових координат x, y (x збігається з віссю балки, y – перпендикулярна до осі балки координата). Таке представлення поздовжнього переміщення U і поперечного переміщення (чи прогину) V довільної точки (x, y) балки через переміщення $u(x)$ і $v(x)$ відповідної точки x її осі виражає 3-ю аксіому з 5-ти, на яких базується теорія балок Ейлера-Бернуллі. Це дає можливість звести формально двовимірну задачу (коли шукані функції залежать від двох координат) до одновимірної.

Відповідно до цієї аксіоми деформація балки Бернуллі та її напружений стан у довільній точці визначають співвідношення:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2}, \quad \sigma_x = E \varepsilon_x \left([\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & -y \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{D}] = E \right).$$

чи в матричній формі

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}]\mathbf{u}, \quad \{\sigma\} = [\mathbf{D}]\{\varepsilon\} \left([\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & -y \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{D}] = E \right). \quad (20)$$

Знайдемо переміщення балки за дії силового навантаження, яке характеризує вектор $\mathbf{p} = (p_x, p_y)^T$, з умови мінімуму функціоналу (2), який з врахуванням прийнятих припущень набуває для балки Бернуллі-Ейлера вигляду

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{A0} ([\mathbf{B}]\mathbf{u})^T E ([\mathbf{B}]\mathbf{u}) dx dA - \int_0^L \mathbf{u}^T \mathbf{p} dx. \quad (21)$$

Відповідно до концепції методу скінченних елементів подамо балку у вигляді об'єднання скінченних елементів

$$[0, L] = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \quad (22)$$

і введемо апроксимації шуканих переміщень на кожному такому елементі, використовуючи лінійні функції

$$h_{i-1}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}, \quad h_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (23)$$

для поздовжніх переміщень і кубічні

$$N_1(x) = 1 + 2 \frac{x^3}{l_i^3} - 3 \frac{x^2}{l_i^2}, \quad N_2(x) = x - 2 \frac{x^2}{l_i} + \frac{x^3}{l_i^2}, \quad N_3(x) = 3 \frac{x^2}{l_i^2} - 2 \frac{x^3}{l_i^3},$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{l_i} + \frac{x^3}{l_i^2} \quad (l_i = x_i - x_{i-1}) \quad (24)$$

для прогинів. Тоді

$$u = h_1 u_{i-1} + h_2 u_i; \quad (25)$$

$$v = N_1 v_{i-1} + N_2 v'_{i-1} + N_3 v_i + N_4 v'_i. \quad (26)$$

Як бачимо, шукані переміщення на розглядуваному елементі визначаються через відомі апроксимаційні функції і 6 невідомих коефіцієнтів розкладу, позначених відповідно u_{i-1} , v_{i-1} , v'_{i-1} , u_i , v_i , v'_i , фізичний зміст яких очевидний (у зв'язку з властивостями апроксимаційних функцій) – це поздовжні переміщення, прогини і похідні від прогинів на лівому та правому кінці розглядуваного скінченного елемента.

У векторному вигляді (25) та (26) мають вигляд:

$$u(x) = [h_{i-1}(x) \quad h_i(x)] \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix}; \quad (27)$$

$$v(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{pmatrix} v_{i-1} \\ v'_{i-1} \\ v_i \\ v'_i \end{pmatrix} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (28)$$

Тоді для розглядуваного i -го скінченного елемента

$$\varepsilon_x = \left[\frac{d}{dx} \quad -y \frac{d^2}{dx^2} \right] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [h'_1 \quad -yN''_1 \quad -yN''_2 \quad h'_2 \quad -yN''_3 \quad -yN''_4] \cdot \mathbf{q} =$$

$$= ([h'_1 \quad 0 \quad 0 \quad h'_2 \quad 0 \quad 0] - y[0 \quad N''_1 \quad N''_2 \quad 0 \quad N''_3 \quad N''_4]) \cdot \mathbf{q}_i \quad (\varepsilon_x = [\mathbf{B}] \cdot \mathbf{q}_i = [\mathbf{B}_1 - y\mathbf{B}_2] \cdot \mathbf{q}_i) \quad (29)$$

де $\mathbf{q}_i = (u_{i-1} \quad v_{i-1} \quad v'_{i-1} \quad u_i \quad v_i \quad v')^T$.

З урахуванням введених апроксимацій

$$([\mathbf{B}] \mathbf{u}) = ([h'_1 \quad 0 \quad 0 \quad h'_2 \quad 0 \quad 0] - y[0 \quad N''_1 \quad N''_2 \quad 0 \quad N''_3 \quad N''_4]) \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ v_{i-1} \\ v'_{i-1} \\ u_i \\ v_i \\ v' \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$([\mathbf{B}] \mathbf{u})^T = (u_{i-1} \quad v_{i-1} \quad v'_{i-1} \quad u_i \quad v_i \quad v') \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} h'_1 \\ 0 \\ 0 \\ h'_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - y \begin{bmatrix} 0 \\ N''_1 \\ N''_2 \\ 0 \\ N''_3 \\ N''_4 \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$([\mathbf{B}] \mathbf{u})^T ([\mathbf{B}] \mathbf{u}) = \mathbf{q}_i^T \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} h'_1 \\ 0 \\ 0 \\ h'_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - y \begin{bmatrix} 0 \\ N''_1 \\ N''_2 \\ 0 \\ N''_3 \\ N''_4 \end{bmatrix} \end{pmatrix} ([h'_1 \ 0 \ 0 \ h'_2 \ 0 \ 0] - y[0 \ N''_1 \ N''_2 \ 0 \ N''_3 \ N''_4]) \mathbf{q}_i =$$

$$= \mathbf{q}_i^T \left(\begin{bmatrix} (h'_1)^2 & 0 & 0 & h'_1 h'_2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & (h'_2)^2 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} + y^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & (N''_1)^2 & N''_1 N''_2 & 0 & N''_1 N''_3 & N''_1 N''_4 \\ & & (N''_2)^2 & 0 & N''_2 N''_3 & N''_2 N''_4 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & (N''_3)^2 & N''_3 N''_4 \\ & & & & & (N''_4)^2 \end{bmatrix} \right) \mathbf{q}_i, \quad (32)$$

Підставляючи ці вирази у функціонал Лагранжа (21), записаний для і-го скінченного елемента, отримаємо

$$\Pi_i(\mathbf{q}_i) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_i^T [\mathbf{K}]^{(i)} \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_i^T \mathbf{F}^{(i)} \right), \quad (33)$$

де матриця жорсткості та вектор правих частин мають вигляд:

$$[\mathbf{K}]^{(i)} = \int_0^L \begin{bmatrix} EA(h'_1)^2 & 0 & 0 & EA h'_1 h'_2 & 0 & 0 \\ & EI_z (N''_1)^2 & EI_z N''_1 N''_2 & 0 & EI_z N''_1 N''_3 & EI_z N''_1 N''_4 \\ & & EI_z (N''_2)^2 & 0 & EI_z N''_2 N''_3 & EI_z N''_2 N''_4 \\ & & & EA(h'_2)^2 & 0 & 0 \\ & & & & EI_z (N''_3)^2 & EI_z N''_3 N''_4 \\ & & & & & EI_z (N''_4)^2 \end{bmatrix} dx; \quad (34)$$

$$\mathbf{F}^{(i)} = \left(p_x \frac{L}{2} \quad p_y \frac{L}{2} \quad p_y \frac{L^2}{12} \quad p_x \frac{L}{2} \quad p_y \frac{L}{2} \quad -p_y \frac{L^2}{12} \right)^T. \quad (35)$$

$$\text{Тут } EA = \int_A E dA; \quad EI_z = \int_A E y^2 dA; \quad \left(\int_A y E dA = 0 \right).$$

Підсумовуючи відповідні вирази для всіх скінченних елементів, отримуємо повну потенціальну енергію балки

$$\Pi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T [\mathbf{K}] \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{F}, \quad (36)$$

де $\mathbf{q} = (u_0 \ v_0 \ v'_0 \ u_1 \ v_1 \ v'_1 \ \dots u_n \ v_n \ v'_n)^T$ – повний вектор вузлових значень узагальнених переміщень балки; $[\mathbf{K}] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{K}]^{(i)}$ – глобальна матриця жорсткості; $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}^{(i)}$ – глобальний вектор вузлових навантажень.

Значення узагальнених переміщень у вузлах скінченно-елементного поділу балки знайдемо з умови мінімуму функціоналу

$$\Pi(\mathbf{q}) \rightarrow \min, \quad (37)$$

що приводить нас до системи лінійних алгебричних рівнянь

$$[\mathbf{K}] \mathbf{q} = \mathbf{F}. \quad (38)$$

Зазначимо, що можна побудувати матричні характеристики для балки чисельно, використовуючи ізопараметричні скінченні елементи, побудовані за допомогою базисних функцій:

$$\begin{aligned} h_1 &= 0.5(1 - \xi), \quad h_2 = 0.5(1 + \xi); \\ \left(x = h_1(\xi)x_{i-1} + h_2(\xi)x_i; \quad J = \frac{dx}{d\xi} = h_1'(\xi)x_{i-1} + h_2'(\xi)x_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} = l_i / 2 \right); \\ N_1 &= \frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi + 2); \quad N_2 = \frac{L}{8}(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1); \quad N_3 = -\frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi - 2); \\ N_4 &= \frac{L}{8}(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1). \end{aligned}$$