Розв’язування системи звичайних диференціальних рівнянь

Внаслідок застосування методу скінченних елементів до рівняння теплопровідності, як показано в попередній лекції, ми отримали задачу Коші, яку розв’язували покроково. Значення температури у вузлах скінченно-елементного поділу в момент часу $t_{k+1}=t_k+\Delta t_k$ $(k=0,1,...)$ визначали через відомі вузлові значення температури, отримані на попередньому кроці за часом (при $t=t_k$). При цьому була застосована різницева схема першого порядку. Узагальнимо її на випадок схеми вищого порядку.

Розглянемо процес обчислень шуканих величин на k-му кроці (в момент часу $t_{k+1}=t_k+\Delta t_k$) для рівняння другого порядку

$$[M]\ddot{\mathbf{x}}+[C]\dot{\mathbf{x}}+[K]\mathbf{x}=\mathbf{f}\,. \tag{1}$$

за початкових умов

$$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0;\ \dot{\mathbf{x}}(0)=\dot{\mathbf{x}}_0. \tag{2}$$

Усі міркування залишаються вірними й для рівняння 1-го порядку, яке отримуємо при $[M]=0$.

Подамо шукану функцію на даному кроці у вигляді ряду Тейлора із залишковим членом, вираженим через похідну цієї функції степені p за часом t $(0\le t\le \Delta t_k)$:

$$\mathbf{x}=\sum_{q=0}^{p-1}\overset{(q)}{\mathbf{x}}_k\frac{t^q}{q!}+\psi_k^{(p)}\frac{t^p}{p!}, \tag{3}$$

де $\overset{(q)}{\mathbf{x}}_k=\frac{d^q}{dt^q}\mathbf{x}_k$ (див рис. 1, який ілюструє такий розклад при p =2).

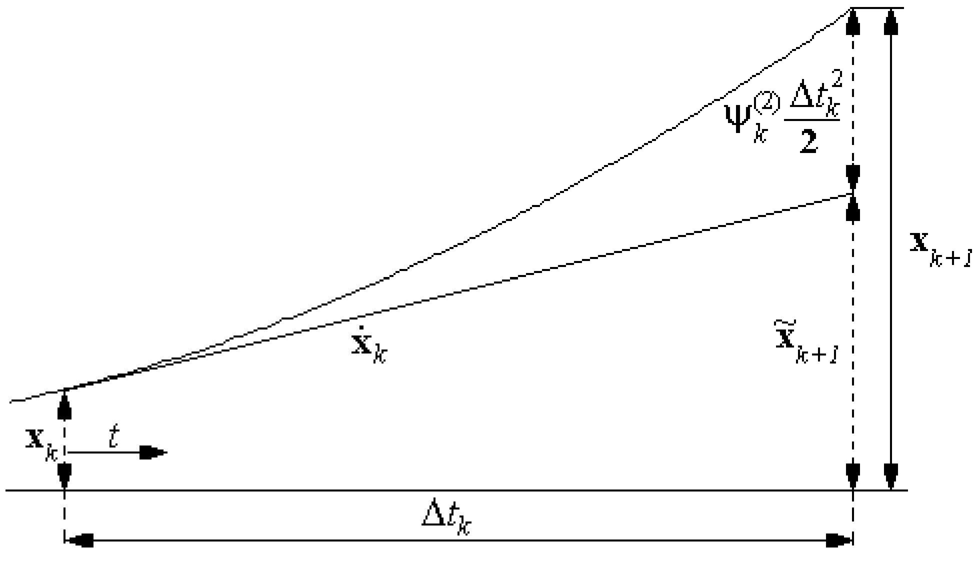

Рис. 1

Зокрема, для методів першого, другого та третього порядків відповідно матимемо розклади:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_k+\psi_k^{(1)}t,\qquad \dot{\mathbf{x}}=\psi_k^{(1)} \tag{4}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_k+\dot{\mathbf{x}}_k t+\psi_k^{(2)}\frac{t^2}{2},\qquad \dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{x}}_k+\psi_k^{(2)}t,\qquad \ddot{\mathbf{x}}=\psi_k^{(2)}; \tag{5}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_k+\dot{\mathbf{x}}_k t+\ddot{\mathbf{x}}_k\frac{t^2}{2}+\psi_k^{(3)}\frac{t^3}{6},\ \dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{x}}_k+\ddot{\mathbf{x}}_k t+\psi_k^{(3)}\frac{t^2}{2},\ \ddot{\mathbf{x}}=\ddot{\mathbf{x}}_k+\psi_k^{(3)}t. \tag{6}$$

Припустимо, що значення $\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k, .., \overset{(p-1)}{\mathbf{x}_k}$ є відомими на початку кроку; $\psi_k^{(p)}$ - невідомий вектор, з допомогою якого значення шуканої функції та її похідних до порядку $p-1$ включно на кінці кроку обчислимо так:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{q=0}^{p-1} \overset{(q)}{\mathbf{x}_k} \frac{(\Delta t_k)^q}{q!} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta t_k)^p}{p!}, \; \dot{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{q=1}^{p-1} \overset{(q)}{\mathbf{x}_k} \frac{(\Delta t_k)^{q-1}}{(q-1)!} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta t_k)^{p-1}}{(p-1)!},$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{q=2}^{p-2} \overset{(q)}{\mathbf{x}_k} \frac{(\Delta t_k)^{q-2}}{(q-2)!} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta t_k)^{p-2}}{(p-2)!} \dots \tag{7}$$

Для визначення $\psi_k^{(p)}$ запишемо співвідношення методу зважених залишків

$$\int_0^{\Delta t_k} W([M]\ddot{\mathbf{x}} + [C]\dot{\mathbf{x}} + [K]\mathbf{x} - \mathbf{f})dt = 0, \tag{8}$$

де W довільна ненульова функція t $(0 \le t \le \Delta t_k)$.

Підставимо (3) у (8). Отримаємо

$$\int_0^{\Delta t_k} \left[[M]\left(\sum_{q=2}^{p-2} \overset{(q)}{\mathbf{x}_k} \frac{t^{q-2}}{(q-2)!} + \psi_k^{(p)} \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \right) + [C]\left(\sum_{q=1}^{p-1} \overset{(q)}{\mathbf{x}_k} \frac{(t)^{q-1}}{(q-1)!} + \psi_k^{(p)} \frac{(t)^{p-1}}{(p-1)!} \right) + \right.$$

$$\left. +[K]\left(\sum_{q=0}^{p-1} \overset{(q)}{\mathbf{x}_k} \frac{(t)^q}{q!} + \psi_k^{(p)} \frac{(t)^p}{p!} \right) \right] W dt = \int_0^{\Delta t_k} \mathbf{f} W dt. \tag{9}$$

Розділимо (9) на $\int_0^{\Delta t_k} W dt$ ($W \ne 0$ в інтегральному розумінні) і введемо позначення

$$\int_0^{\Delta t_k} W t^q dt \left(\int_0^{\Delta t_k} W dt \right)^{-1} = \Theta_q (\Delta t_k)^q. \tag{10}$$

Тоді рівняння на визначення $\psi_k^{(p)}$ матиме вигляд

$$[M]\left(\sum_{q=2}^{p-1} \overset{(q)}{\mathbf{x}_k} \frac{(\Delta t_k)^{q-2}}{(q-2)!} \Theta_{q-2} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta t_k)^{p-2}}{(p-2)!} \Theta_{p-2} \right) + [C]\left(\sum_{q=1}^{p-1} \overset{(q)}{\mathbf{x}_k} \frac{(\Delta t_k)^{q-1}}{(q-1)!} \Theta_{q-1} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta t_k)^{p-1}}{(p-1)!} \Theta_{p-1} \right) +$$

$$+[K]\left(\sum_{q=0}^{p-1} \overset{(q)}{\mathbf{x}_k} \frac{(\Delta t_k)^q}{q!} \Theta_q + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta t_k)^p}{p!} \Theta_p \right) - \tilde{\mathbf{f}} = 0. \tag{11}$$

де $\int_0^{\Delta t_k} W \mathbf{f} dt \left(\int_0^{\Delta t_k} W dt \right)^{-1} = \tilde{\mathbf{f}}$.

Згрупувавши члени при невідомому $\psi_k^{(p)}$, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\left(\frac{(\Delta t_k)^{p-2}}{(p-2)!}\Theta_{p-2}[M]+\frac{(\Delta t_k)^{p-1}}{(p-1)!}\Theta_{p-1}[C]+\frac{(\Delta t_k)^{p}}{p!}\Theta_{p}[K]\right)\psi_k^{(p)} =$$

$$\tilde{\mathbf{f}}-[M]\tilde{\ddot{\mathbf{x}}}_{k+1}-[C]\tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{k+1}-[K]\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}. \qquad (12)$$

Тут

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}=\sum_{q=0}^{p-1}\overset{(q)}{\mathbf{x}}_k\frac{(\Delta t_k)^q}{q!}\Theta_q\,,\quad \tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{k+1}=\sum_{q=1}^{p-1}\overset{(q)}{\mathbf{x}}_k\frac{(\Delta t_k)^{q-1}}{(q-1)!}\Theta_{q-1}\,,\quad \tilde{\ddot{\mathbf{x}}}_{k+1}=\sum_{q=2}^{p-1}\overset{(q)}{\mathbf{x}}_k\frac{(\Delta t_k)^{q-2}}{(q-2)!}\Theta_{q-2}\,. \qquad (13)$$

є певними наближеннями значень $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$ у момент часу $t_{k+1}=t_k+\Delta t_k$.

Остаточно

$$\psi_k^{(p)}=\left(\frac{(\Delta t_k)^{p-2}}{(p-2)!}\Theta_{p-2}[M]+\frac{(\Delta t_k)^{p-1}}{(p-1)!}\Theta_{p-1}[C]+\frac{(\Delta t_k)^{p}}{p!}\Theta_{p}[K]\right)^{-1}\times$$

$$\times(\tilde{\mathbf{f}}-[M]\tilde{\ddot{\mathbf{x}}}_{k+1}-[C]\tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{k+1}-[K]\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}). \qquad (14)$$

Отже, значення шуканої функції $\mathbf{x}$ в момент часу t_{k+1} можна визначити за допомогою співвідношень (3), (13), (14) на основі значень цієї функції та її похідних в момент часу t_k. Для цього не треба використовувати значень цієї функції та її похідних у моменти часу t_{k-1}, t_{k-2},... (такі методи називають одно кроковими). Істотною перевагою такого підходу є те, що для нього не треба розробляти ніяких додаткових алгоритмів початку розрахунків (методи вищих порядків, як правило, самі не стартують). Зокрема, розглянутий однокроковий алгоритм $p-$порядку точності для розв'язування задачі Коші повністю визначений, якщо на початку (при $t=0$) визначені значення $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \ldots, \overset{(p-1)}{\mathbf{x}_0}$. За таких умов розрахунки проводимо за три етапи:

1. Обчислюємо значення $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\dot{\mathbf{x}}}, \tilde{\ddot{\mathbf{x}}}$ за співвідношеннями (13) на основі значень $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots, \overset{(q)}{\mathbf{x}}_k$ на початку кроку (при $t=t_k$);
2. Знаходимо $\psi_k^{(p)}$, використовуючи співвідношення (14);
3. За формулою (3) отримуємо значення шуканого розв'язку та його похідних в кінці кроку (при $t=t_{k+1}$).

Після чого повторюємо ці ж обчислення, але вже на наступному кроці за часом. При цьому похибка обчислень на проміжку $[t_k, t_{k+1}]$ є порядку $O(\Delta t_k^{p+1})$.

Зазначимо, що розглянутий метод розв'язування задачі Коші узагальнює цілий ряд відомих методів, які можна отримати як його часткові випадки. Так, наприклад, для $p=1$, вибираючи відповідним чином величину параметра Θ, отримуємо добре відомий метод Кренка – Ніколсона ($\Theta=0.5$), Гальоркіна ($\Theta=0.667$), повністю неявну ($\Theta=1$) чи явну ($\Theta=0$) схеми. Так для методів першого ($[M]=0$), другого та третього порядків для визначення $\psi_k^{(1)}$, $\psi_k^{(2)}$, $\psi_k^{(3)}$ відповідно матимемо рівняння:

$$\psi_k^{(1)}=\left([C]+\Theta_1\Delta t_k[K]\right)^{-1}\left(\tilde{\mathbf{f}}-[K]\mathbf{x}_k\right); \qquad (15)$$

$$\psi_k^{(2)} = \left([M] + \Theta_1 \Delta t_k [C] + \Theta_2 \frac{(\Delta t_k)^2}{2} [K] \right)^{-1} \left(\tilde{\mathbf{f}} - [C]\dot{\mathbf{x}}_k - [K]\left(\mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k \Theta_1 \Delta t\right)\right); \qquad (16)$$

$$\psi_k^{(3)} = \left(\Theta_1 \Delta t [M] + \Theta_2 \frac{(\Delta t_k)^2}{2} [C] + \Theta_3 \frac{(\Delta t_k)^3}{3!} [K] \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\tilde{\mathbf{f}} - [M]\ddot{\mathbf{x}}_k - [C]\left(\dot{\mathbf{x}}_k + \ddot{\mathbf{x}}_k \Theta_1 \Delta t_k\right) - [K]\left(\mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k \Theta_1 \Delta t_k + \ddot{\mathbf{x}}_k \Theta_2 \frac{(\Delta t_k)^2}{2} \right)\right). \qquad (17)$$

Адаптуємо для прикладу розглянутий метод до розв’язування задачі Коші (П.37), отриманої на попередній лекції. Скористаємось методом першого порядку ($p = 1$). За співвідношенням

$$\{T_h\}_{k+1} = \{T_h\}_k + \{\psi_{\mathrm{T}}\}\Delta t_k, \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t_k \qquad (18)$$

визначаємо значення температури у вузлах скінченно-елементного поділу в момент часу $t = t_{k+1}$. У формулі (18)

$$\{\psi_T\} = ([L_1]_{k+1} + \Theta \Delta t_k [L_0])^{-1} (\Theta\{f_T\}_{k+1} + (1-\Theta)\{f_T\}_k - [L_0]_k \{T_h\}_k), \Theta \in [0,1]. \qquad (19)$$