**Моделювання нелінійних процесів теплопереносу**

Температурне поле $T(x_1, x_2, x_3, t)$ у тривимірному тілі, що займає область $V \subset E^3$ (Евклідового простору), описує рівняння теплопровідності (теплопереносу)

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + Q, \qquad (x_1,\ x_2,\ x_3) \in V,\ t \in [0, \tau_*], \tag{1}$$

де $c = c(T)$ – об'ємна теплоємність; $\lambda = \lambda(T)$ – коефіцієнт теплопровідності; $Q$ – потужність наявних джерел тепла; $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ – декартові координати точки тіла; $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ - оператор Гамільтона. У іншій формі дане рівняння можна записати у вигляді

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \cdot \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_3}\right) + Q. \tag{1-а}$$

Зазначимо, що коефіцієнти $c$ та $\lambda$, характеристиками матеріалу; $\lambda$ характеризує здатність матеріалу поширювати тепло від однієї точки (чим більший цей коефіцієнт, тим швидше матеріал переносить тепло від однієї точки до іншої і відповідно швидше нагрівається чи охолоджується – залежно від умов, за яких перебуває тіло); с характеризує здатність акумулювати тепло. Загалом, ці характеристики залежать від температури (тобто за різних температур матеріал матиме різні здатності переносити та акумулювати тепло).

Для повного формулювання задачі теплопровідності (задачі на визначення температури у довільній точки тіла $(x_1,\ x_2,\ x_3) \in V$ в будь-який момент часу $t \in [0, \tau_*]$) необхідно до рівняння (1) додати крайові та початкові умови. Будемо вважати, що температура тіла у початковий момент часу $t = 0$ задана. Тоді початкова умова для задачі теплопровідності набуває вигляду

$$T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_0(x_1, x_2, x_3), \tag{2}$$

де $T_0(x_1, x_2, x_3)$ відома задана функція.

Будемо вважати, що тіло перебуває за умов так званого конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем через поверхню поверхні тіла $S$. Формально ця умова записується так:

$$-\lambda \vec{\nabla} T \mathbf{n} = \beta(T - T_S) + q,\ \ (x_1, x_2, x_3) \in S, \tag{3}$$

$$-\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = \beta(T - T_S) + q,\ (x_1, x_2, x_3) \in S,\ \ t \geq 0,$$

де $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор одиничної зовнішньої нормалі до поверхні; $\beta = \beta(T)$ – коефіцієнт тепловіддачі (показує як матеріал віддає-приймає тепло); $T_S$ – температура зовнішнього середовища; $q$ – густина теплового потоку через поверхню.

Варто відзначити, що умову (3) (при $q$=0 ) називають умовою третього роду. При $\beta = 0$ матимемо умову теплоізоляції (тіло не віддає і не приймає тепла через поверхню), яку називають умовою другого роду, а при $\beta \to \infty$ – поверхня тіла миттєво зрівнюється за температурою з температурою довкілля (умова першого роду). Отже, очевидно, що крайова умова (3) узагальнює в собі умови 1-го (коли на поверхні задана температура) та 2-го (коли на поверхні заданий тепловий потік) роду.

Оскільки за умов інтенсивного температурного навантаження тіло може нагріватись до достатньо високих температур, природно припустити, що теплообмін випромінюванням буде істотно впливати на розподіли температури. Задаючи узагальнений коефіцієнт теплообміну у вигляді

$$\beta(x_1, x_2, x_3, T) = \beta'(x_1, x_2, x_3, T) + \tilde{\lambda}\sigma_0(T^3 + T^2 T_S + T T_S^2 + T_S^3), \qquad (3\text{-а})$$

можна в межах крайової умови (3) врахувати також теплообмін випромінюванням

$$-\lambda\vec{\nabla}T\mathbf{n} = \tilde{\lambda}\sigma_0(T^4 - T_S^4),\ (x_1, x_2, x_3) \in S. \qquad (3\text{-б})$$

де $\tilde{\lambda}$ – ступінь чорноти поверхні тіла; $\sigma_0$ – постійна Стефана-Больцмана; $\beta'$ – коеф. тепловіддачі при конвективному теплообміні.

Таким чином, задача про визначення температурного поля у розглядуваному тілі полягає у знаходженні розв’язку $T(x_1, x_2, x_3, t)$ рівняння (1) в області $V$ за відомого початкового розподілу температури $T_0$ у тілі (умови (2)) та крайової умови (3).

За умов нагрівання-охолодження в тілі виникають неоднорідні температурні поля (в кожній точці тіла – своя температура), які спричиняють деформування тіла і виникнення в ньому напружень. Якщо рівень напружень в якійсь точці тіла в якийсь момент часу перевершує межу міцності матеріалу, тіло руйнується. Тому дуже важливо знати розподіли температури в тілі в довільний момент часу (щоб можна було оцінити рівень напружень), а отже надзвичайно важливо вміти розв’язувати задачу теплопровідності (1)-(3).

Для дуже багатьох часткових випадків рівняння теплопровідності (1) спрощується. Зокрема, для стаціонарних процесів (коли умови нагріву-охолодження не залежать від часу), маємо

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\lambda\vec{\nabla}T\right) + Q = 0, \qquad (x_1,\ x_2,\ x_3) \in V,\ t \in [0, \tau_*], \qquad (4)$$

Часто у рівнянні відсутні джерела тепла. Тоді отримуємо

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\lambda\vec{\nabla}T\right) = 0, \qquad (x_1,\ x_2,\ x_3) \in V,\ t \in [0, \tau_*], \qquad (5)$$

Коли маємо тіло якоїсь канонічної форми, наприклад, циліндр, рівняння можна ще більше спростити, записавши його в циліндричній системі координат (якщо зовнішні теплові умови також мають властивість осьової симетрії, тобто не залежать від кутової координати в циліндричній системі координат). Тоді з просторово тривимірного, воно стане двовимірним.

У загальному осесиметричному випадку рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат набуває вигляду

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + Q,\ (r, z) \in V_2, \qquad (6)$$

де $V_2$ - так званий меридіональний переріз тіла $V \subset E^3$.

Коли циліндр (радіуса $R$) дуже довгий, і нас цікавить розподіл температури уздовж радіусу, припускаємо, що температура не залежить від осьової координати $z$ (якщо теплові крайові умови не залежать від за $z$, так воно і є переважно у всьому циліндрі, за винятком можливо вузької області біля торців циліндра). Тоді необхідно знайти розподіл температури $T(r, t)$ у циліндрі

$$c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+Q \tag{7}$$

за початкової

$$T(r,0)=T_0(r), \tag{8}$$

та крайової

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial r}=\beta(T-T_S)\ \text{при}\ r=R \tag{9}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=0\ \text{при}\ r=0 \tag{10}$$

умов.

**Розв’язування задачі теплопровідності**

**Ідея методу скінченних елементів**

**Приклад розв’язування одновимірної стаціонарної задачі**

Визначимо розподіл температури по товщині стінки, яка однією своє поверхнею контактує з агресивним середовищем з температурою 1000°С, а іншою – перебуває за умов конвективного теплообміну (з коефіцієнтом тепловіддачі $\beta$) довкіллям, температура якого $T_s$=20°С. Товщина стінки $-L$.

Сформулюємо задачу теплопровідності.

Оскільки теплові умови, за яких перебуває стінка, не залежать від часу, а внутрішні джерела тепла відсутні, рівняння теплопровідності істотно спрощується і стає стаціонарним:

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)=0,\quad x\in[0,L]. \tag{П.1}$$

Крайові умови:

$$T=1000\ \text{при}\ x=0 \tag{П.2}$$

$$-\lambda\frac{dT}{dx}=\beta(T-T_S)\ \text{при}\ x=L. \tag{П.3}$$

Проілюструємо на цьому простому прикладі загальну методику розв’язування задачі теплопровідності за допомогою методу скінченних елементів.

**Етап 1**. Домножимо рівняння (П.1) на довільну ненульову на проміжку [0, $L$] вагову функцію $w$ і проінтегруємо отриману рівність по області визначення. Тоді отримаємо

$$\int_0^L\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)w\,dx=0. \tag{П.4}$$

Зауважимо, що $\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)w=\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}w\right)-\lambda\frac{dT}{dx}\frac{dw}{dx}$. Підставивши цю тотожність у (П.4), маємо

$$\int_0^L\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)w\,dx=\left(\lambda\frac{dT}{dx}w\right)\Bigg|_{x=L}-\left(\lambda\frac{dT}{dx}w\right)\Bigg|_{x=0}-\int_0^L\lambda\frac{dT}{dx}\frac{dw}{dx}dx=0. \tag{П.5}$$

Врахувавши умову (П.3), отримаємо остаточно

$$\int_0^L \lambda \frac{dT}{dx}\frac{dw}{dx}dx + \beta(T(L)-T_S)w(L) - \lambda(0)\left(\frac{dT}{dx}\right)_0 w(0) = 0. \qquad (\text{П.6})$$

Замість рівняння (П.1), яке містило **похідну другого порядку** від шуканої функції, отримали рівність (П.6), яка містить похідну лише **першого** порядку. При виведенні цієї рівності також вже враховано крайову умову (П.3). Тож на визначення шуканої функції $T$, маємо рівняння (П.6) і крайову умову (П.2).

Застосовану на цьому етапі побудови розв’язку процедуру в науковій літературі називають **методом зважених залишків** (домножили вихідне рівняння на довільну вагову функцію, проінтегрували, тобто зважили з вагою $w$, отримане співвідношення і понизили порядок підінтегрального виразу).

**Етап 2**. Подамо інтервал $[0, L]$, на якому шукатимемо розв’язок, у вигляді об’єднання множини $n$ скінченних проміжків $[x_{i-1}, x_i]$, де $0 = x_0 < x_1 \ldots < x_n = L$, $x_{i+1} = x_0 + i \cdot L/n$; $i = 1,2,\ldots,n$. Будемо називати ці проміжки надалі скінченними елементами. Тоді рівняння (П.6) можна записати так:

$$\int_0^L \lambda \frac{dT}{dx}\frac{dw}{dx}dx + \beta(T(L)-T_S)w(L) - \lambda_0\left(\frac{dT}{dx}\right)_0 w(0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \frac{dT}{dx}\frac{dw}{dx}dx + \beta(T_n - T_S)w_n - \lambda_0\left(\frac{dT}{dx}\right)_0 w_0 = 0. \qquad (\text{П.7})$$

Зауважимо, що в рівнянні (П.7) є член $\lambda_0\left(\frac{dT}{dx}\right)_0 w_0$, який стосується лише першого вузла ($(dT/dx)_0$ є похідною від температури у першому вузлі $x = x_0$; відповідно $\lambda_0, w_0$ також є відповідними значеннями у цьому ж вузлі) і присутній лише при записі рівняння для першого елемента, та член $\beta(T_n - T_S)w_n$, присутній лише в рівнянні для останнього елемента ($T_n = T(x_n)$).

Виберемо найпростіший лінійний СЕ:

Введемо апроксимацію як шуканої, так і вагової функції на кожному із скінчених елементів у вигляді

$$T(x) = N_{i-1}(x)\cdot T_{i-1} + N_i(x)\cdot T_i \qquad (\text{П.8})$$

$$w(x) = N_{i-1}(x)\cdot w_{i-1} + N_i(x)\cdot w_i, \qquad (\text{П.9})$$

де функції розкладу приймемо такими

$$N_{i-1} = (x_i - x)/(x_i - x_{i-1}),\ N_i = (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}). \qquad (\text{П.10})$$

Завдяки такому вибору функцій, які надалі будемо називати базисними функціями, а також функціями форми, враховуючи властивості цих функцій (їх рівність нулю на одному кінці скінченого елемента і одиниці – на протилежному кінці), коефіцієнти розкладу (П.8) є значеннями шуканої функції у крайніх точках скінченого елемента, тобто $T_{i-1} = T(x_{i-1})$; $T_i = T(x_i)$.

Підставимо подання (П.8) та (П.9) у рівність (П.7). Тоді для довільного скінченного елемента $i = 1, 2, \ldots, n$ матимемо

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \frac{dT}{dx}\frac{dw}{dx}dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda\left(\frac{dN_{i-1}(x)}{dx}T_{i-1} + \frac{dN_i(x)}{dx}T_i\right)\left(\frac{dN_{i-1}(x)}{dx}w_{i-1} + \frac{dN_i(x)}{dx}w_i\right)dx\,.$$

Перегрупуємо члени, збираючи їх біля відповідних значень вагових функцій. Тоді

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dw}{dx}dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda\left[\left(\left(\frac{dN_{i-1}}{dx}\right)^2 T_{i-1} + \frac{dN_{i-1}}{dx}\frac{dN_i}{dx}T_i\right)w_{i-1} + \left(\frac{dN_{i-1}}{dx}\frac{dN_i}{dx}T_{i-1} + \left(\frac{dN_i}{dx}\right)^2 T_i\right)w_i\right]dx =$$

$$= w_{i-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda\left(\left(\frac{dN_{i-1}}{dx}\right)^2 T_{i-1} + \frac{dN_i}{dx}\frac{dN_{i-1}}{dx}T_i\right)dx + w_i\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda\left(\frac{dN_{i-1}}{dx}\frac{dN_i}{dx}T_{i-1} + \left(\frac{dN_i}{dx}\right)^2 T_i\right)dx =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \begin{pmatrix} \left(\dfrac{dN_{i-1}}{dx}\right)^2 & \dfrac{dN_i}{dx}\dfrac{dN_{i-1}}{dx} \\ \dfrac{dN_i}{dx}\dfrac{dN_{i-1}}{dx} & \left(\dfrac{dN_i}{dx}\right)^2 \end{pmatrix} dx \cdot \begin{pmatrix} T_i \\ T_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_i \\ w_{i+1} \end{pmatrix}^T \frac{\lambda_c^{(i)}}{l_i}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{i-1} \\ T_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{П}.11)$$

де верхній індекс T означає транспонування; $l_i$ – довжину скінченого елемента ($l_i = x_i - x_{i-1}$); $\lambda_c^{(i)} = 0.5(\lambda_{i-1} + \lambda_i)$ – середнє значення коефіцієнта теплопровідності на розглядуваному скінченому елементі.

Матрицю

$$[K]^{(i)} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \begin{pmatrix} \left(\dfrac{dN_{i-1}}{dx}\right)^2 & \dfrac{dN_i}{dx}\dfrac{dN_{i-1}}{dx} \\ \dfrac{dN_i}{dx}\dfrac{dN_{i-1}}{dx} & \left(\dfrac{dN_i}{dx}\right)^2 \end{pmatrix} dx = \frac{\lambda_c^{(i)}}{l_i}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

у подальшому будемо називати матрицею теплопровідності (її розмірність дорівнює кількості невідомих на елементі – у нашому випадку 2 невідомі – по одній в кожному із вузлів елемента; вузлами є кінці елемента).

Рівняння (П.11) записано в матрично-векторному вигляді. По суті, це рівняння на визначення вузлових значень температури (температури у вузлах скінченно-елементного поділу) для усіх елементів, крім першого і останнього.

Подамо вираз $\lambda_0\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_0 w_0$, який буде присутній у рівнянні для першого елемента, в аналогічному матрично-векторному вигляді:

$$-\lambda_0\left(\frac{dT}{dx}\right)_0 w_0 = -(w_0, w_1)\lambda_0\begin{pmatrix} \dfrac{dN_0(0)}{dx}T_0 + \dfrac{dN_1(0)}{dx}T_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -(w_0, w_1)\lambda_0\begin{pmatrix} \dfrac{dN_0(0)}{dx} & \dfrac{dN_1(0)}{dx} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T \frac{\lambda_0}{l_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{П}.12)$$

оскільки

$$\frac{dT(0)}{dx} = \frac{dN_0(0)}{dx}\cdot T_0 + \frac{dN_1(0)}{dx}\cdot T_1 = -\frac{1}{l_1}T_0 + \frac{1}{l_1}T_1 = \frac{T_1 - T_0}{l_1}.$$

У такому ж матрично-векторному вигляді подамо вираз для $\beta(T_n - T_S)w_n$, який буде присутній у рівнянні для останнього скінченного елемента:

$$\beta(T_n - T_S)w_n = \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-1} \\ T_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ \beta T_S \end{pmatrix}. \qquad (П.13)$$

Побудуємо тепер глобальну систему рівнянь, яка складатиметься відповідно до (П.7) з суми рівнянь для кожного з $n$ елементів.

Щоб проілюструвати процес побудови цієї системи рівнянь розглянемо простий випадок $n = 2$ (тобто візьмемо 2 скінченні елементи однакової довжини $l = L/2$; відповідно матимемо три вузли $0 = x_0 < x_1 < x_2 = L$).

У цьому разі, враховуючи (П.11) - (П.13), отримаємо співвідношення

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T \frac{\lambda_c^{(1)}}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T \frac{\lambda_0}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T \frac{1}{l} \begin{pmatrix} \lambda_c^{(1)} + \lambda_0 & -\lambda_c^{(1)} - \lambda_0 \\ -\lambda_c^{(1)} & \lambda_c^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (П.14)$$

для першого елемента та

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^T \frac{\lambda_c^{(2)}}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ \beta T_S \end{pmatrix} = \text{чи}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^T \left( \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} & -\dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} \\ -\dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} & \dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \beta T_S \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (П.15)$$

для другого скінченого елемента.

Тож у нашому гіпотетичному випадку загалом маємо три невідомі $T_0, T_1, T_2$. Запишемо співвідношення (П.14) та (П.15), врахувавши ці три невідомі. Тоді

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^T \frac{1}{l} \begin{pmatrix} \lambda_c^{(1)} + \lambda_0 & -\lambda_c^{(1)} - \lambda_0 & 0 \\ -\lambda_c^{(1)} & \lambda_c^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (П.14-а)$$

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^T \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} & -\dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} \\ 0 & -\dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} & \dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta T_S \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (П.15-а)$$

Тепер рівняння для кожного з елементів формально записані в матрично-векторному вигляді відносно усіх невідомих; вони однакової розмірності, і ми можемо їх додати, отримавши загальну систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення трьох невідомих значень температури. Після загального підсумовування матрично-векторних характеристик окремих скінченних елементів отримаємо

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_c^{(1)} + \lambda_0}{l} & -\dfrac{\lambda_c^{(1)} + \lambda_0}{l} & 0 \\ -\dfrac{\lambda_c^{(1)}}{l} & \dfrac{\lambda_c^{(1)} + \lambda_c^{(2)}}{l} & -\dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} \\ 0 & -\dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} & \dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta T_s \end{pmatrix}. \qquad (\text{П.16})$$

Внаслідок довільності вагової функції отримаємо остаточну систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення значень температури у вузлах скінченно-елементного поділу $0 = x_0 < x_1 ... < x_n = L, \quad (n = 2)$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_c^{(1)} + \lambda_0}{l} & -\dfrac{\lambda_c^{(1)} + \lambda_0}{l} & 0 \\ -\dfrac{\lambda_c^{(1)}}{l} & \dfrac{\lambda_c^{(1)} + \lambda_c^{(2)}}{l} & -\dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} \\ 0 & -\dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} & \dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta T_s \end{pmatrix}. \qquad (\text{П.17})$$

Крайова умова (П.3) вже врахована на етапі побудови співвідношення методу зважених залишків. Врахуємо тепер умову (П.2). Найпростіше це зробити, модифікувавши систему рівнянь так, щоб ця крайова умова була тримана автоматично з розв’язку системи рівнянь (П.17). Для цього занулимо першу стрічку і перший стовпець матриці системи рівнянь, поставивши на місці діагонального елемента 1, а в правій частині – значення температури на краю. Тобто

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda_c^{(1)} + \lambda_c^{(2)}}{l} & -\dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} \\ 0 & -\dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} & \dfrac{\lambda_c^{(2)}}{l} + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ \beta T_s \end{pmatrix}. \qquad (\text{П.18})$$

Очевидно, що з розв’язку цієї системи рівнянь автоматично отримаємо $T_0 = 1000$ (див. перше рівняння). Бачимо також, що при $\beta \to \infty$ $T_2 = T_s$ (тобто, за допомогою умови конвективного теплообміну можемо змоделювати крайові умови 1-го роду).

**Щодо дослідження збіжності розв’язків**. Розв’язавши систему рівнянь (П.17), отримаємо значення температури у вузлах поділу $x_0 = 0, \; x_1 = L/2, \; x_2 = L$. Збільшуючи кількість скінченних елементів і, відповідно, кількість вузлів скінченно-елементного поділу природно сподіватись на отримання точнішого розв’язку. Природно сподіватись також, що з якогось числа елементів отримувані розв’язки будуть збігатись між собою. Тобто відмінності між ними будуть все менші і менші. За таких умов говорять, що метод скінченних елементів для розглядуваної задачі збігається і сподіваються, що він збігається до точного розв'язку задачі. У разі, коли для задачі відомий точний аналітичний розв'язок, отримувані послідовності розв'язків можна порівняти з ним і зробити певні висновки про точність методу скінченних елементів. Однак при розв'язуванні нелінійних задач часто аналітичний розв'язок невідомий. Тоді користуються практичним методом оцінки збіжності методу. Порівнюють розв'язки, отримані на різних скінченно-елементних поділах області визначення рівняння теплопровідності. Якщо розв'язки отримані на двох поділах, розміри елементів яких відрізняються удвічі, накладаються (відмінності між ними менше 1% і з подальшим зменшенням розмірів елементів зменшуються), говорять що метод скінченних елементів збіжний і вважають, що його розв'язок і є розв'язком розглядуваної задачі.

Дослідження збіжності розв'язків шляхом їх побудови на різних скінченно-елементних поділах називають дослідженням ***h*-збіжності**, де під $h$ розуміють характерний розмір скінченного елемента.

В подальшому будуть побудовані скінченні елементи вищого порядку (при їх побудові використовують базисні функції вищого порядку – другого, третього тощо). Очевидно, що можна досліджувати також ***p*-збіжність**, порівнюючи розв'язки, отримані з використанням скінченних елементів однакових розмірів, але різних порядків.

**Вправа**. Запишіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь для випадку $n=5$. І спробуйте її розв'язати та намалювати графік для $L$=1 м, $\beta=10$ Вт/м$^2$/град; $\lambda=20$ Вт/м/град, $T_s=20$ °С.

**Приклад розв'язування просторово одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності**

Визначимо тепер розподіл температури по товщині стінки, яка однією своє поверхнею контактує з агресивним середовищем з температурою 1000°С, а іншою – з довкіллям, температура якого $T_S=20$°С. Товщина стінки, як і в попередньому випадку, рівна $L$, початкова температура – $T_0=20$.

Задача про визначення температури $T(x,t)$ полягає в розв'язуванні рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)=c\rho\frac{\partial T}{\partial t},\ [x,t]\in[0,L]\times[0,\tau_*] \qquad (\text{П.19})$$

за початкової

$$T(x,0)=20 \qquad (\text{П.20})$$

та крайових умов:

$$\lambda\frac{dT}{dx}=\beta_1(T-1000)\ \text{при}\ x=0, \qquad (\text{П.21})$$

$$-\lambda\frac{dT}{dx}=\beta_2(T-T_S)\ \text{при}\ x=L\ \ \forall t\in[0,\tau_*]. \qquad (\text{П.22})$$

При формулюванні задачі використали крайові умови третього роду – як найзагальніші. Коефіцієнти тепловіддачі загалом можуть відрізнятись.

При побудові розв'язку сформульованої нестаціонарної задачі використаємо вже відому нам з розв'язування стаціонарної задачі методологію методу зважених залишків.

**Етап 1**. Домножимо рівняння (П.19) на довільну ненульову на проміжку [0, $L$] вагову функцію $w(x)$ і проінтегруємо отриману рівність за областю визначення. Тоді

$$\int_0^L\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)-c\rho\frac{\partial T}{\partial t}\right)wdx=0. \qquad (\text{П.23})$$

Понизимо порядок диференціювання за просторовою змінною у рівнянні (П.23). Для цього використаємо тривіальне співвідношення

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)w=\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}w\right)-\lambda\frac{dT}{dx}\frac{dw}{dx}, \tag{П.24}$$

яке отримане з формули диференціювання добутку функцій $\lambda\dfrac{dT}{dx}$ та $w$. Після підстановки (П.24) у (П.23)

$$\int_0^L\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)-c\rho\frac{\partial T}{\partial t}\right)wdx=\int_0^L\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)wdx-\int_0^L\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dw}{dx}dx-\int_0^L c\rho\frac{\partial T}{\partial t}wdx=$$

$$\left.\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}w\right)\right|_{x=L}-\left.\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}w\right)\right|_{x=0}-\int_0^L\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dw}{dx}dx-\int_0^L c\rho\frac{\partial T}{\partial t}wdx=$$

$$-\beta_2(T-T_S)w(L)-\beta_1(T-1000)w(0)-\int_0^L\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dw}{dx}dx-\int_0^L c\rho\frac{\partial T}{\partial t}wdx=0. \tag{П.25}$$

**Етап 2**. Подамо інтервал $[0, L]$ у вигляді $\bigcup\limits_{i=1}^{n}[x_{i-1},\ x_i]$, де $x_{i+1}=x_0+i\cdot L/n$; $i=1,2,\ldots,n$. Тоді

$$\int_0^L\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dw}{dx}dx+\int_0^L c\rho\frac{\partial T}{\partial t}wdx+\beta_2(T-T_S)w(L)+\beta_1(T-1000)w(0)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dw}{dx}dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}c\rho\frac{\partial T}{\partial t}wdx+\beta_2(T_n-T_S)w_n+\beta_1(T_0-1000)w_0=0, \tag{П.26}$$

де $T_n=T(x_n,t)$, $T_0=T(x_0,t)$, $w_n=w(x_n)$, $w_0=w(x_0)$

Виберемо найпростіші лінійні базисні функції для $i$-го скінченного елемента (П.10) і введемо апроксимації

$$T(x,t)=N_{i-1}(x)\cdot T_{i-1}(t)+N_i(x)\cdot T_i(t) \tag{П.27}$$

$$w(x)=N_{i-1}(x)\cdot w_{i-1}+N_i(x)\cdot w_i \tag{П.28}$$

Завдяки такому вибору функцій форми коефіцієнти розкладу (П.27) є значеннями температури у вузлах скінченно-елементного поділу, тобто $T_{i-1}(t)=T(x_{i-1},t)$, $T_i(t)=T(x_i,t)$.

Підставимо подання (П.27) та (П.28) у рівняння (П.26). Тоді для довільного $\forall i$: $i=1, 2,\ldots,n$ маємо:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dw}{dx}dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\lambda\left(\frac{dN_{i-1}(x)}{dx}T_{i-1}+\frac{dN_i(x)}{dx}T_i\right)\left(\frac{dN_{i-1}(x)}{dx}w_{i-1}+\frac{dN_i(x)}{dx}w_i\right)dx=$$

$$=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\lambda\left[\left(\left(\frac{dN_{i-1}}{dx}\right)^2T_{i-1}+\frac{dN_{i-1}}{dx}\frac{dN_i}{dx}T_i\right)w_{i-1}+\left(\frac{dN_{i-1}}{dx}\frac{dN_i}{dx}T_{i-1}+\left(\frac{dN_i}{dx}\right)^2T_i\right)w_i\right]dx=$$

$$= w_{i-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\lambda\left(\left(\frac{dN_{i-1}}{dx}\right)^2 T_{i-1}+\frac{dN_i}{dx}\frac{dN_{i-1}}{dx}T_i\right)dx + w_i\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{dN_{i-1}}{dx}\frac{dN_i}{dx}T_{i-1}+\left(\frac{dN_i}{dx}\right)^2 T_i\right)dx =$$

$$=\begin{pmatrix} w_{i-1}\\ w_i\end{pmatrix}^T [K]^{(i)}\begin{pmatrix} T_{i-1}\\ T_i\end{pmatrix}, \qquad (П.29)$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} c\rho\frac{\partial T}{\partial t}wdx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} c\rho\left(N_{i-1}(x)\dot{T}_{i-1}+N_i(x)\dot{T}_i\right)\left(N_{i-1}(x)w_{i-1}+N_i(x)w_i\right)dx =$$

$$\begin{pmatrix} w_{i-1}\\ w_i\end{pmatrix}^T [L]^{(i)}\begin{pmatrix} \dot{T}_{i-1}\\ \dot{T}_i\end{pmatrix}, \qquad (П.30)$$

де крапкою над символом температури позначена похідна за часом, а матриці

$$[K]^{(i)} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\lambda_i\begin{pmatrix} \left(\frac{dN_{i-1}}{dx}\right)^2 & \frac{dN_i}{dx}\frac{dN_{i-1}}{dx}\\ \frac{dN_i}{dx}\frac{dN_{i-1}}{dx} & \left(\frac{dN_i}{dx}\right)^2\end{pmatrix}dx\ , \qquad (П.31)$$

$$[L]^{(i)} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} c_i\rho_i\begin{pmatrix} (N_{i-1})^2 & N_{i-1}N_i\\ N_{i-1}N_i & (N_i)^2\end{pmatrix}dx\ ; \qquad (П.32)$$

$\lambda_i$, $c_i, \rho_i$ - усереднені по $i$-му елементу теплофізичні характеристики матеріалу.

Враховуючи (П.29)-(П.32), отримаємо поелементно такі диференціальні рівняння на шукані значення температури у вузлах скінченно-елементного поділу, записані в матрично-векторному вигляді:

$$i=1 \quad \begin{pmatrix} w_0\\ w_1\end{pmatrix}^T [K]^{(i)}\begin{pmatrix} T_0\\ T_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w_0\\ w_1\end{pmatrix}^T [L]^{(i)}\begin{pmatrix} \dot{T}_0\\ \dot{T}_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w_0\\ w_1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} \beta_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_0\\ T_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_0\\ w_1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 1000\,\beta_1\\ 0\end{pmatrix} \qquad (П.33)$$

$$\forall i:\ i=2,\ldots,n-1 \quad \begin{pmatrix} w_{i-1}\\ w_i\end{pmatrix}^T [K]^{(i)}\begin{pmatrix} T_{i-1}\\ T_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w_{i-1}\\ w_i\end{pmatrix}^T [L]^{(i)}\begin{pmatrix} \dot{T}_{i-1}\\ \dot{T}_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad (П.34)$$

$$i=n \quad \begin{pmatrix} w_{n-1}\\ w_n\end{pmatrix}^T [K]^{(i)}\begin{pmatrix} T_{n-1}\\ T_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w_{n-1}\\ w_n\end{pmatrix}^T [L]^{(i)}\begin{pmatrix} \dot{T}_{n-1}\\ \dot{T}_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w_{n-1}\\ w_n\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & \beta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{n-1}\\ T_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} w_{n-1}\\ w_n\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 0\\ \beta T_s\end{pmatrix} \qquad (П.35)$$

Якщо просумувати по усіх елементах рівняння (П.33) - (П.35), отримаємо матричне рівняння

$$\{w\}^T[K]\{T_h\}+\{w\}^T[L]\{\dot{T}_h\}=\{w\}^T\{f\} \qquad (П.36)$$

відносно вектора $\{T_h\}=(T_0, T_1, T_2, ..., T_n)^T$ значень температури у вузлах нашого поділу проміжку $[0, L]$ на елементи; $\{w\}^T=\{w_0, w_1, w_2, ..., w_n\}$.

Внаслідок довільності вагової функції $w$ отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$[K]\{T_h\}+[L]\{\dot{T}_h\}=\{f\} \qquad (П.37)$$

де глобальні матриці $[K]$ та $[L]$ і вектор правих частин $\{f\}$ отримуємо через підсумовування відповідних матрично-векторних характеристик окремих елементів (підсумовування матриць і правих частин детально розглянуто при побудові методики розв'язування стаціонарної задачі).

Доповнюючи систему рівнянь (П.37) початковою умовою (П.20), записаною у вузлах поділу, отримаємо задачу Коші (компоненти вектора вузлових значень температури $\{T_h\}$ залежать лише від часу).

Таким чином, застосування ідеї методу скінченних елементів дало можливість звести розглядувану задачу до системи звичайних диференціальних рівнянь.

**Етап 3**. **Розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь.** Історію зміни температури в часі простежимо в конкретні моменти часу $t_{k+1}=t_k+\Delta t_k$, $k=0,1,...$ (у початковий момент часу задана початкова температура). Визначимо розподіл температури в момент часу $t_{k+1}$ через відомі значення температурного поля, отримані на попередньому кроці за часом (при $t=t_k$). Для цього використаємо розклад шуканої функції (температури) в ряд Тейлора.

Зокрема, для методу **першого порядку** розклад функції на розглядуваному проміжку $[t_k, t_{k+1}]$ в ряд Тейлора набуває вигляду

$$\{T_h(t)\}=\{T_h(t_k)\}+\psi_k^{(1)}t, \qquad \{\dot{T}_h(t)\}=\psi_k^{(1)} \quad (t\in[t_k, t_{k+1}]), \qquad (П.38)$$

де $\psi_k^{(1)}$ є невідомий вектор, з допомогою якого значення шуканої функції та її похідної на кінці кроку обчислюють так:

$$\{T_h(t_{k+1})\}=\{T_h(t_k)\}+\psi_k^{(1)}\Delta t_k,\ \{\dot{T}_h(t_{k+1})\}=\psi_k^{(1)}. \qquad (П.39)$$

Для визначення $\psi_k^{(1)}$ запишемо співвідношення методу зважених залишків

$$\int_0^{\Delta_k t} W([K]\{T_h(t)\}+[L]\{\dot{T}_h(t)\}-\{f\})dt=0, \qquad (П.40)$$

де $W$ довільна ненульова функція $t$ $(0\le t\le \Delta t_k)$.

Підставимо (П.38) у (П.40). Отримаємо

$$\int_0^{\Delta_k t} W\left([K]\left(\{T_h(t_k)\}+\psi_k^{(1)}t\right)+[L]\psi_k^{(1)}\right)dt=\int_0^{\Delta_k t} W\{f\}dt, \qquad (П.41)$$

Розділимо (П.41) на $\int_0^{\Delta_k t} W dt$ ($W \neq 0$ в інтегральному розумінні) і введемо позначення

$$\int_0^{\Delta_k t} Wtdt \left( \int_0^{\Delta_k t} Wdt \right)^{-1} = \Theta \Delta_k t \,. \qquad (П.42)$$

Тоді рівняння на визначення $\psi_k^{(1)}$ матиме вигляд

$$[K]\left(\{T_h(t_k)\} + \psi_k^{(1)} \Theta \Delta_k t\right) + [L]\psi_k^{(1)} = \tilde{\mathbf{f}} \,, \qquad (П.43)$$

де $\int_0^{\Delta t} W\{f\}dt \left( \int_0^{\Delta t} Wdt \right)^{-1} = \tilde{\mathbf{f}}$

Таким чином на третьому етапі розглядувана задача зводиться до системи алгебричних рівнянь

$$([L] + \Theta \Delta_k t [K])\psi_k^{(1)} = \tilde{\mathbf{f}} - [K]\{T_h(t_k)\}. \qquad (П.44)$$

Зазначимо, що

$$\tilde{\mathbf{f}} = \Theta\{f_T\}_{k+1} + (1-\Theta)\{f_T\}_k \,. \qquad (П.45)$$

Розглянутий однокроковий алгоритм 1-го порядку точності для розв'язування задачі Коші повністю визначений, якщо на початку (при $t = 0$) визначені значення $\{T_h(x_k)\}$ температури у вузлах скінченно-елементного поділу (початкова умова (П.20)). Після розв'язування системи алгебричних рівнянь значення температури та її похідної в кінці кроку (при $t = t_{k+1}$) визначаємо за співвідношеннями (П.39). У такий спосіб, проходячи крок за кроком, отримуємо історію зміни температури у вузлах поділу.

Варто зазначити, що при обчисленнях є можливість змінювати крок $\Delta t$ (тому при побудові схеми і введено для кроку позначення $\Delta_k t$), оскільки розглянута схема є однокроковою (потребує значень шуканої функції лише на попередньому кроці).

Отримане сімейство методів узагальнює добре відомі методи. Наприклад, задаючи конкретний числовий параметр $\Theta$, отримуємо метод Кренка – Ніколсона ($\Theta = 0.5$), Гальоркіна ($\Theta = 2/3$), повністю неявну ($\Theta = 1$) чи явну ($\Theta = 0$) схеми.