Наведено означення мінімаксного наближення функцій многочленами, алгоритм його побудови, оцінку похибки наближення. Написано програму на мові Python, яка реалізує мінімаксний метод та метод найменших квадратів. З її допомогою наближено деякі характеристики газів цими методами.

The definition of minimax approximation for functions using polynomials, algorithm of its construction, error estimation of such approximation are presented. Python program that implements minmax method and least squares method is written. With help of this program some characteristics of gas using these methods are approximated.

# Зміст


Вступ ..... 5

1. Основні поняття мінімаксного наближення ..... 7

    1.1. Способи задання функціональних залежностей. Норма похибки ..... 7

    1.2. Існування мінімаксного многочленного наближення ..... 9

    1.3. Побудова мінімаксного наближення за схемою Ремеза ..... 10

    1.4. Заміна точок альтернансу ..... 12

    1.5. Частинні випадки побудови мінімаксних наближень ..... 14

    1.6. Похибка мінімаксного наближення ..... 15

2. Апроксимація теплофізичних характеристик технічно важливих газів ..... 17

    2.1. Отримання теплофізичних характеристик ..... 17

    2.2. Метод найменших квадратів ..... 20

    2.3. Порівняння результатів наближення ..... 22

3. Опис програми і отриманих результатів ..... 24

    3.1. Призначення програми ..... 24

    3.2. Умови застосування ..... 24

    3.3. Запуск програми та задання вхідних даних ..... 24

    3.4. Опис отриманих результатів ..... 29

Висновки ..... 33

Список використаної літератури ..... 34

Додатки ..... 37

    Додаток 1. Код програми ..... 37

    Додаток 2. Результати виконання програми ..... 40

# Вступ

Необхідність моделювання функціональних залежностей виникає в багатьох галузях прикладної математики та інформатики. При розв'язуванні багатьох задач науково-технічного характеру доводиться використовувати функції задані таблицею. Проте часто необхідно мати значення функції в точках, яких немає в таблиці. Також виникає необхідність використання простої функції замість складної.

Є два загальні підходи до моделювання функціональних залежностей, які відрізняються один від одного величиною похибки між цією залежністю і табличними даними. Перший підхід, коли в цих даних є певний ступінь похибки або «шуму», тому потрібно підібрати таку функціональну залежність яка показує загальний тренд даних. Це робиться тому що кожна окрема точка з цієї таблиці може мати похибку, і ми не намагаємось побудувати функцію, яка точно проходить через ці точки, бо ми будемо повторювати ці похибки. Одним із методів реалізації такого підходу є метод найменших квадратів.

Інший підхід, коли ми знаємо що табличні дані точні, ми намагаємось побудувати криву, яка точно проходить через табличні точки. Прикладами цього є: значення густини води або теплоємність газу як функція від температури. Оцінка значень в точках, які лежать між точними табличними даними називається інтерполяцією.

Мінімаксне наближення (його ще називають чебишовським) застосовують для побудови моделей функціональних залежностей різних фізичних величин: формування керуючих сигналів у системах автоматичного керування [18,22]; проектування контрольно-вимірювальних приладів, зокрема, термометрів, вологомірів, пірометрів для високоточного градуювання статичних характеристик їхніх сенсорів, розрахунку схем лінеаризації вимірювальних перетворювачів [6,7,14]; побудови математичних моделей різноманітних неперервних процесів маючи дискретні результати вимірювань їхніх значень [4,5,9,25]; для опису контурів проекцій деталей зі складними геометричними формами у машинобудуванні [10,22]; побудова алгоритмів обчислення функцій на мікропроцесорах для апроксимації складних функціональних залежностей простішими аналітичними виразами зручнішими для обчислення [2,12,17,24].

Особливістю моделей, які побудовані на основі мінімаксного (чебишовського) наближення, є те, що вони забезпечують найменшу із можливих похибку апроксимації при заданій кількості параметрів. Саме це зумовлює їхню практичну цінність в отриманні розв’язків задач, для яких важлива висока точність відтворення функціональної залежності [3,11]. До знаходження мінімаксного наближення зводиться розв’язування багатьох наукових та інженерних задач, так як воно значно переважає інші види наближень серед застосувань різних способів наближення функцій [23].

Метою моєї бакалаврської роботи є застосування мінімаксних многочленних наближень і методу найменших квадратів для моделювання функціональних залежностей.

У першому розділі наведено основні поняття мінімаксного наближення многочленами, алгоритми їх побудови.

Другий розділ присвячений апроксимації теплофізичних характеристик технічно важливих газів.

У третьому розділі описано програму, яка здійснює побудову мінімаксних многочленних наближень і метод найменших квадратів.

У висновках містяться висновки, отримані в результаті виконання бакалаврської кваліфікаційної роботи. У додатках містяться текст програми та скріншоти основних результатів роботи програми.

# 1. Основні поняття мінімаксного наближення

## 1.1. Способи задання функціональних залежностей. Норма похибки

Наближувана функціональна залежність $f(x)$ у практичних обчисленнях найчастіше задається або аналітично або дискретно (тобто у вигляді табличного задання) [15,16]. Таблично задану функцію можна представити у вигляді

$$y_k = f_k = f(x_k), k = \overline{1, N},$$

де значення аргумента $X = \{x_k\}_1^N \in [a,b]$. Припускатимемо, що аргументи $x_k$ упорядковані за зростанням:

$$a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_N \le b.$$

При застосуванні чисельних методів на комп'ютері врахувати всі значення функції $f(x)$ у всіх точках $[a,b]$ неможливо, бо кількість чисел, які можна представити є обмежена. Тому обчислювальні методи будують так, щоб розв'язок задачі на відрізку $[a,b]$ був еквівалентний її розв'язку на певній підмножині $X_0 \subset X \subset [a,b]$, яка містить обмежену кількость точок.

Для наближення функції $f(x)$ використовуємо простіший вираз

$$F(A,x) = F(a_0, a_1, \ldots, a_m; x), \tag{1}$$

з $m+1$ параметром [20]. Частинним випадком виразу (1) є многочлен степеня $m$

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m. \tag{2}$$

Точність наближення функції $f(x)$ за допомогою виразу (1) на проміжку $[a,b]$ характеризується віддалю між цими функціями. Спосіб виміру цієї віддалі визначає норму похибки наближення функції $f(x)$ за допомогою виразу (1) на проміжку $[a,b]$ (або на множині $X$). У загальному випадку у виразах для похибки використовують зважену віддаль (зважену різницю)

$$\rho(x) = \frac{f(x) - F(A, x)}{w(x)}, \tag{3}$$

де вага $w(x) > 0$ при $x \in [a,b]$, $w_k = w(x_k), k = \overline{1, N}$.

Вибір певного виду норми похибки залежить передусім від конкретних задач, які ставлять при наближенні функцій. У теоретичних дослідженнях часто використовується норма похибки $L_p$ [1,17]

$$\| f - F \|_{L_p} = \left( \int_a^b \left| \frac{f(x) - F(A,x)}{w(x)} \right|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{y_k - F(A, x_k)}{w_k} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Найчастіше використовують норми $L_1$, $L_2$ та $L_\infty$.

Норму $L_1$ вживають для зменшення суми площ, які обмежуються кривими $y = f(x)$ та $y = F(A, x)$ [15]

$$\| f - F \|_{L1} = \int_a^b \frac{|f(x) - F(A,x)|}{w(x)} \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} \frac{|y_k - F(A, x_k)|}{w_k}.$$

Норму $L_2$ або середньоквадратичну похибку зазвичай використовують при обробці дослідних даних

$$\| f - F \|_{L2} = \left( \int_a^b \left( \frac{f(x) - F(A,x)}{w(x)} \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} = \left( \sum_{k=1}^{N} \left( \frac{y_k - F(A, x_k)}{w_k} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Норму $L_\infty$ (чебишовська норма або норма $C$) використовують, щоб найточніше представити кожне значення наближуваної функції $f(x)$, за умови, що її значення відомі достатньо точно

$$\| f - F \|_{L\infty} = \| f - F \|_C = \max_{x \in [a,b]} \frac{|f(x) - F(A,x)|}{w(x)} = \max_{x_k \in X} \frac{|y_k - F(A,x)|}{w_k}.$$

Функцію (3) називають функцією похибки, а її графік - кривою похибки.

## 1.2. Існування мінімаксного многочленного наближення

За теоремою Вейєрштрасса [1,21] для довільних неперервних на обмеженому проміжку $[a,b]$ функцій $f(x)$ та $w(x)>0$ і довільного $\varepsilon>0$ можна знайти такий многочлен $P_m(x)$, що

$$|\rho(x)|=\frac{|f(x)-P_m(x)|}{w(x)}<\varepsilon, \quad x\in[a,b].$$

Очевидно, що найменше значення степеня $m$ многочлена $P_m(x)$ суттєво залежить від способу наближення. Серед усіх способів наближення функцій найменшу похибку а, отже, і найменший степінь $m$ при заданій точності $\varepsilon$, дає мінімаксне ( його ще називають найкраще чебишовське) наближення [16].

Вираз $F(A,x)\in F(B,x)$, для якого максимальне значення абсолютної величини зваженої похибки (3) досягає на проміжку $[a,b]$ найменшого значення

$$\min_{c\in B}\max_{x\in[a,b]}\frac{|f(x)-F(C,x)|}{w(x)}=\max_{x\in[a,b]}\frac{|f(x)-F(A,x)|}{w(x)}, \tag{4}$$

називають мінімаксним або найкращим чебишовським зваженим (з вагою $w(x)$) наближенням функції $f(x)$ виразом $F(A,x)$ на проміжку $[a,b]$. При $w(x)=1$ маємо мінімаксне абсолютне наближення, при $w(x)=f(x)$ - мінімаксне відносне.

Величину (4) називатимемо мінімальним (зваженим) відхиленням і позначаємо $E(f,W)\equiv\mu_0$; $E(f,1)\equiv E(f)\equiv\Delta_0$ - мінімальне абсолютне відхилення; $E(f,f)\equiv\delta_0$ - мінімальне відносне відхилення.

Розглянемо властивості мінімаксних наближень многочленами [15,16,23].

**Теорема 1.** Для будь-яких неперервних на проміжку $[a,b]$ функцій $f(x)$ та

$w(x) > 0$ і довільного $\varepsilon$, існує єдиний многочлен $P_m(x)$ степеня $m$, що має найменше відхилення $E(f,w)$.

**Теорема 2.** Нехай на проміжку $[a,b]$ задано неперервні функції $f(x)$ та $w(x) > 0$. Тоді для того, щоб деякий многочлен $P_m(x)$ степеня не вище $m$ був многочленом мінімаксного зваженого наближення функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ необхідно і достатньо, щоб на цьому проміжку знайшлась хоча б одна система з $m+2$ точок $T = \{t_k\}_{k=0}^{m+1}$ $a \le t_0 < t_1 < t_2 < \ldots \le t_{m+1}$, у яких зважена різниця (3) почергово набувала значень різних знаків і досягала за модулем найбільшого на $[a,b]$ значення тобто

$$\rho(t_0) = -\rho(t_1) = \rho(t_2) = \ldots = (-1)^{m+1}\rho(t_{m+1}) = \pm E(f,W). \tag{5}$$

Систему точок $T$ називають системою точок (чебишовського) альтернансу. Для побудови многочлена мінімаксного наближення необхідно визначити точки альтернансу. Точне їх значення можна знайти тільки у часткових випадках.

## 1.3. Побудова мінімаксного наближення за схемою Ремеза

Процес знаходження точок альтернансу будується ітераційними методами. Найчастіше на практиці застосовують методи розроблені українським математиком Є.Я. Ремезом [16, 19]. Наведу один із методів. Він складається з таких етапів.

1. На проміжку $[a,b]$ вибираємо початкове наближення $T_0$ до точок альтернансу

$$T : t_0^{(0)} < t_1^{(0)} < t_2^{(0)} < \ldots < t_{m+1}^{(0)}.$$

Точки альтернансу можна, наприклад, обчислити за такою формулою

$t_k^{(0)} = a + \dfrac{(b-a)k}{m+1}$.

2. Здійснюємо чебишовську інтерполяцію для множини точок $T_j = \{t_k\}_{k=0}^{m+1}, t_k^{(j)} < t_{k+1}^{(j)}, k = \overline{0,m}$, тобто визначаємо коефіцієнти многочлена $P_m^{(i)}(x)$ і величину $\mu_j$, для яких виконуються умови $\rho(t_k^{(j)}) = (-1)^k \mu_k \quad k = \overline{0,m+1}$. Для знаходження вказаних величин розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(t_0^{(j)}) - a_0 - a_1 t_0^{(j)} - \ldots - a_m (t_0^{(j)})^m = \mu_j w(t_0^{(j)}), \\ f(t_1^{(j)}) - a_0 - a_1 t_1^{(j)} - \ldots - a_m (t_1^{(j)})^m = -\mu_j w(t_1^{(j)}), \\ \\ f(t_{m+1}^{(j)}) - a_0 - a_1 t_{m+1}^{(j)} - \ldots - a_m (t_{m+1}^{(j)})^m = (-1)^{m+1} \mu_j w(t_{m+1}^{(j)}). \end{cases} \qquad (6)$$

Вона є системою $m+2$ алгебраїчних рівнянь з $m+2$ невідомими: $a_0, a_1, \ldots, a_m$ та $\mu$.

3. Перевіряємо виконання рівності

$$|\mu_j| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_m^{(j)}(x)| / w(x) \equiv \rho_j. \qquad (7)$$

Якщо рівність (7) виконується, то за теоремою 2 многочлен $P_m^{(j)}(x)$ і є многочлен найкращого (мінімаксного) наближення. При комп'ютерній реалізації алгоритму перевірку умови (7) заміняють перевіркою нерівності

$$\rho_j - |\mu_j| \le \varepsilon |\mu_j|, \qquad (8)$$

де $\varepsilon$ - допустима відносна помилка у визначенні похибки наближення. Її приймають рівною $\varepsilon = 10^{-2}$ або $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Якщо умова 7 чи 8 не виконується, то приймаємо $j := j+1$ і вибираємо наступне (уточнене) наближення до точок чебишовського альтернансу (переходимо до наступної ітерації). Далі алгоритм повторюємо продовжуючи виконувати з п.2.

При обчисленні на комп'ютері у цьому пункті іноді ще перевіряють умови

$$\left| t_k^{(j-1)} - t_k^{j} \right| < \eta, \quad k = \overline{0,m+1},$$

де $\eta$ - допустима помилка у визначенні точок альтернансу. Якщо остання нерівність справедлива для всіх точок $k=\overline{0,m+1}$ (тобто точки альтернансу змінюються несуттєво), то вважаємо, що многочлен мінімаксного наближення знайдено.

## 1.4. Заміна точок альтернансу

Існує кілька методів заміни точок альтернансу. Можлива заміна одної або кількох точок одночасно. Найпростішим алгоритмом є алгоритм Є.Я. Ремеза з одноточковою заміною (алгоритм Валлє-Пуссена) [16,19,23]. Опишемо цей алгоритм.

Нехай при виконанні пункту 3 ми знайшли точку $\tilde{x}$, для якої виконується $\rho_j = |\rho(\tilde{x})|$. Можливі три випадки взаємного розташування точок альтернансу та точки $\tilde{x}$:

1. $t_0^{(j)} < \tilde{x} < t_{m+1}^{(j)}$
2. $\tilde{x} < t_0^{(j)}$
3. $\tilde{x} > t_{m+1}^{(j)}$

Розглянемо спосіб заміни точок альтернансу для кожного випадку.

1. Знайдемо ціле число $\nu$ таке, що $t_\nu^{(j)} < \tilde{x} < t_{\nu+1}^{(j)}$. Якщо $(\rho(\tilde{x})) = (\rho(t_{m+1}^{(j)}))$, то робимо присвоєння $t_\nu^{(j+1)} := \tilde{x}$, у протилежному випадку $t_{\nu+1}^{(j+1)} := \tilde{x}$. Решту точок альтеранансу не змінюємо.

2. Якщо $\rho(\tilde{x}) = \rho(t_0^{(j)})$, то присвоюємо $t_0^{(j+1)} := \tilde{x}$. Решту точок альтернансу не змінюємо. Якщо це не так, то заміняємо усі точки альтернансу за формулами:

$$t_0^{(j+1)} := \tilde{x}; \quad t_k^{(j+1)} := t_{k-1}^{(j)}, \quad k = \overline{1, m+1}.$$

У цьому випадку із альтернансу виключається остання точка $t_{m+1}^{(j)}$

3. Якщо $\rho(\tilde{x}) = \rho(t_{m+1}^{(j)})$, то приймаємо $t_{m+1}^{(j)} := \tilde{x}.$ і решту точок альтернансу не змінюємо. Якщо це не так, то замінюємо усі точки альтернансу за формулами:

$$t_k^{(j+1)} := t_{k+1}^{(j)}, \quad k = \overline{0,m}; \quad t_{m+1}^{(j+1)} := \tilde{x}.$$

У цьому випадку із V-альтернансу виключається перша точка $t_0^{(j)}$.

Таким чином наступна система точок альтернансу відрізняєтся від попередньої тим, що точка $\tilde{x}$, у якій є максимум абсолютної величини зваженої похибки, вводиться у альтернанс замість однієї із старих точок.

Відомо, що алгоритм Валле-Пуссена для заміни точок альтернансу при знаходженні мінімаксного наближення неперервної функції многочленом на проміжку $[a,b]$ збігається незалежно від початкового наближення до точок альтернансу. Він збігається зі швидкістю гометричної прогресії у тому сенсі, що знайдуться такі числа $A$ та $0 < q < 1$, що відхилення $E^{(k)}(f,W)$ многочлена $P_m^{(k)}(x)$ від функції $f(x)$ будуть задовольняти нерівності

$$E^{(k)}(f,W) - E(f,W) \le Aq^k; \quad k = 1,2,\ldots$$

Фактична швидкість збіжності залежить від диференціальних властивостей функції та використовуваного алгоритму заміни точок альтернансу. Відомо, що коли $f(x) \in C^{m+1}[a,b], w(x) = 1$ або $w(x) = f(x)$ і $f^{(m+1)}(x)$ не змінює знак при $x \in [a,b]$, то граничні точки проміжку $[a,b]$ є точками альтернансу [16, 19]. Тому у цьому випадку алгоритм Валле-Пуссена для наближення многочленами невисоких степенів $m = \overline{0,2}$ практично не програє у швидкості порівняно з іншими алгоритмами типу Є.Я. Ремеза.

Зауважимо, що наведені властивості мінімаксного наближення непервної на $[a,b]$ функції $f(x)$ многочленом виконуються і для наближення табличної функції.

## 1.5. Частинні випадки побудови мінімаксних наближень

Приклад 1 [15]. Знайдемо мінімаксне абсолютне наближення сталою: $P_0(x) = \mathrm{A},\ \mathrm{w(x)} = 1$. У цьому випадку система рівнянь (6) має вигляд

$$f(t_0) - \mathrm{A} = \Delta, f(t_1) - \mathrm{A} = -\Delta.$$

Додамо два рівняння цієї системи і одержимо вираз для $A$: $A = \frac{f(t_0)+f(t_1)}{2}$.

Підставимо це значення у перше рівняння системи отримаємо вираз для похибки $\Delta$: $\Delta = \frac{f(t_0)-f(t_1)}{2}$. Очевидно, що точки альтернансу у цьому випадку співпадатимуть із точками мінімуму та максимуму функції $f(x)$. Тому

$$\Delta_0 = |\Delta| = \frac{1}{2}\left[\max_{x\in[a,b]} f(x) - \min_{x\in[a,b]} f(x)\right].$$

Якщо функція $f(x)$ монотонна, то ці значення досягаються на краях проміжку $[a,b]$. Тому у цьому випадку $\Delta_0 = |\Delta| = \frac{1}{2}|f(b) - f(a)|$.

Приклад 2. Знайдемо мінімаксне абсолютне наближення многочленом першого степеня (прямою): $P_1(x) = \mathrm{Ax + B},\ \mathrm{w(x)} = 1$. Система рівнянь (6) у цьому випадку складається із трьох рівнянь: $f(t_0) - \mathrm{A}t_0 - B = \Delta\ \ f(t_1) - \mathrm{A}t_1 - \mathrm{B} = -\Delta$, $f(t_2) - \mathrm{A}t_2 - B = \Delta$.

Віднімемо від третього рівняння системи перше і отримаємо вираз для параметра

$A$: $A = \frac{f(t_2)-f(t_0)}{t_2-t_0}$. Додамо два перші рівняння системи, отримаємо вираз для параметра $B$: $B = \frac{f(t_0)+f(t_1)-A(t_0+t_1)}{2}$.

Якщо $f(x) \in C^2[\mathrm{a,b}]$ і $f''(x)$ не змінює знак, то $t_0 = \mathrm{a}$, $t_2 = \mathrm{b}$, а в центральній точці альтернансу $t_1 = \mathrm{c}$ функція похибки має екстремум і $\delta'(\mathrm{c}) = 0$. Тому $f'(c) = A$. Прирівнюючи два вирази для коефіцієнта $A$, отримаємо трансцендентне рівняння для визначення точки c: $f'(\mathrm{c})(\mathrm{b}-\mathrm{a})=f(\mathrm{b})-f(\mathrm{a})$. Після визначення цієї точки знаходимо $A, B$ та $\Delta$ за формулами:

$$A=f(c), B=\frac{f(a)+f(c)-f(c)(a+c)}{2}, \Delta=\frac{f(a)-f(c)-f(c)(a-c)}{2}.$$

Розкладаючи у виразі для $\Delta$ функцію $f(a)$ в ряд в околі точки $c$:

$$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-c)^2,$$

де $\xi \in (a, c)$ маємо

$$\Delta_0=|\Delta|=\frac{1}{4}\left|f''(\xi)\right|(a-c)^2 \approx \frac{1}{16}\left|f''(\xi)\right|(b-a)^2.$$

## 1.6. Похибка мінімаксного наближення

Порівняємо максимальну похибку мінімаксного наближення многочленом з іншими наближеннями многочленом. Нехай $f(x) \in C^{m+1}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ і $f^{(m+1)}(x)>0$ при $x \in [a, c]$. Відомо, що у цьому випадку [16,17]

$$\mathrm{E}(f, 1)=\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{2^{2m+1}(m+1)!}(b-a)^{m+1}. \qquad (10)$$

Наблизимо таку функцію відрізком ряду Тейлора з $m+1$ коефіцієнтом в околі точки $x_0=\frac{a+b}{2}$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

де $|\xi|<|x-x_0|$. Очевидно, що при $x \in [a, b]$ максимальне значення залишкового члену ряду рівне [1,20]

$$\max_{x\in[a,b]}|R_m(x)|=\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{2^{m+1}(m+1)!}(b-a)^{m+1}, \qquad (11)$$

де $\xi \in (a, b)$. За цією ж формулою обчислюється похибка наближення ланкою ермітового сплайну непарного степеня. Із наведених формул (10) і (11) можна бачити, що використання мінімаксного наближення замість наближення іншими способами суттєво зменшує одержувану при цьому похибку.

# 2. Апроксимація теплофізичних характеристик технічно важливих газів

## 2.1. Отримання теплофізичних характеристик

В наш час у зв'язку з інтенсивним використанням технічно важливих газів у багатьох областях сучасної науки, техніки і технології, зокрема в енергетиці, геології, хімічній технології, газовій промисловості тощо, значно зростає потреба в більш точному визначенні їх параметрів і характеристик. Отримання надійних довідкових даних про теплофізичні властивості стиснутих газів при високих температурах пов'язано із значними труднощами. Це пояснюється тим, що існуючі експериментальні дані отримані в обмеженому температурному інтервалі з верхньою границею, яка не перевищує 800-1000К. Ця обставина не дозволяє використовувати традиційні методи для розрахунку параметрів при високих температурах, бо такі методи полягають в побудові емпіричних рівнянь за результатами експериментальних даних і розрахунку по ним дискретних значень параметрів і характеристик, оскільки ці рівняння непридатні для отримання даних за межами експериментально досліджуваної області [6,8].

Для усунення вказаних недоліків були створені методи отримання рівнянь, які відображають властивості реальних газів і які є придатні для екстраполяційних розрахунків теплофізичних властивостей. Для цих розрахунків доцільно застосовувати теоретично обґрунтовані рівняння, які дозволяють розраховувати будь-які теплофізичні властивості газів, якщо відомо закон міжмолекулярної взаємодії, і які містять мінімальну кількість невідомих констант – параметрів модельного потенціалу.

Таким рівнянням для газів є віріальне рівняння стану, віріальні коефіцієнти якого можуть бути розраховані на основі прийнятих функцій міжмолекулярної взаємодії, а параметри потенціалу визначаються із експериментальних значень густини. Ці рівняння дуже громіздкі і розв'язуються чисельно з використанням обчислювальної техніки. Багато коефіцієнтів виражаються через кратні інтеграли, які також не можуть бути обчислені аналітично, а тому обчислюються за допомогою квадратурних формул на комп'ютерах [1,13,20]. В результаті обчислень отримують дискретні значення певних характеристик газів (густина, фактор стискуваності, ізохорна та ізобарна теплоємності, швидкість звуку, теплопровідність, в'язкість тощо), при певних значеннях тиску і температури, що змінюються з доволі великим кроком. Для обчислення характеристик газів у проміжних точках потрібно затратити багато часу і зусиль. Тому доцільно апроксимувати отримані дані, наприклад, за мінімаксним критерієм або методом найменших квадратів і, маючи готові аналітичні вирази, обчислювати потрібні характеристики газів у проміжних точках з достатньо великою точністю [16,18,13].

Далі в таблиці 1 наведено залежності густини $\rho$, ізохорної $C_v$ і ізобарної $C_p$ теплоємностей водню Н від зміни тиску при температурі Т=500К. У таблиці 2 наведено значення густини, фактора стискуваності $z$, швидкості звуку $a$, в'язкості $\mu$ та теплопровідості λ кисню при температурі Т=500К і зміні тиску $p$.

Таблиця 1. Характеристики водню при Т=500К.

| **p** | **ρ** | **z** | **s** | $\mathbf{C_v}$ | $\mathbf{C_p}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.048 | 1.0004 | 72.293 | 10.389 | 14.514 |
| 1.0 | 0.483 | 1.0040 | 62.794 | 10.389 | 14.518 |
| 2.0 | 0.962 | 1.0080 | 59.933 | 10.389 | 14.522 |
| 3.0 | 1.438 | 1.0120 | 58.259 | 10.388 | 14.526 |
| 4.0 | 1.909 | 1.0160 | 57.070 | 10.388 | 14.530 |
| 5.0 | 2.377 | 1.0200 | 56.147 | 10.388 | 14.534 |
| 6.0 | 2.841 | 1.0240 | 55.393 | 10.388 | 14.538 |
| 8.0 | 3.759 | 1.0320 | 54.203 | 10.388 | 14.546 |
| 10.0 | 4.663 | 1.0400 | 53.278 | 10.388 | 14.554 |
| 12.0 | 5.553 | 1.0480 | 52.522 | 10.388 | 14.561 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16.0 | 7.293 | 1.0639 | 51.327 | 10.388 | 14.574 |
| 20.0 | 8.982 | 1.0797 | 50.399 | 10.389 | 14.587 |
| 25.0 | 11.026 | 1.0995 | 49.470 | 10.390 | 14.601 |
| 30.0 | 12.998 | 1.1192 | 48.709 | 10.391 | 14.614 |
| 35.0 | 14.903 | 1.1389 | 48.065 | 10.393 | 14.626 |
| 40.0 | 16.745 | 1.1584 | 47.506 | 10.396 | 14.636 |
| 45.0 | 18.526 | 1.1779 | 47.013 | 10.399 | 14.646 |
| 50.0 | 20.251 | 1.1973 | 46.571 | 10.402 | 14.655 |
| 60.0 | 23.542 | 1.2359 | 45.805 | 10.409 | 14.671 |
| 70.0 | 26.640 | 1.2742 | 45.157 | 10.417 | 14.685 |
| 80.0 | 29.564 | 1.3122 | 44.594 | 10.425 | 14.697 |

Таблиця 2. Характеристики кисню при T=500K.

| **p** | **ρ** | **z** | ***a*** | **η** | **λ** |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.77 | 1.0002 | 421.1 | 303.5 | 41.0 |
| 1.0 | 7.68 | 1.0018 | 422.5 | 304.3 | 41.2 |
| 2.0 | 15.34 | 1.0037 | 424.1 | 305.3 | 41.4 |
| 3.0 | 22.96 | 1.0057 | 425.8 | 306.3 | 41.6 |
| 4.0 | 30.55 | 1.0078 | 427.5 | 307.4 | 41.8 |
| 5.0 | 38.11 | 1.0099 | 429.3 | 308.4 | 42.1 |
| 6.0 | 45.63 | 1.0122 | 431.1 | 309.6 | 42.3 |
| 8.0 | 60.55 | 1.0169 | 434.8 | 311.9 | 42.8 |
| 10.0 | 75.31 | 1.0221 | 438.7 | 314.4 | 43.2 |
| 12.0 | 89.89 | 1.0275 | 442.8 | 316.9 | 43.7 |
| 16.0 | 118.49 | 1.0394 | 451.5 | 322.4 | 44.8 |
| 20.0 | 146.26 | 1.0525 | 460.8 | 328.3 | 45.8 |
| 25.0 | 179.75 | 1.0706 | 473.1 | 336.0 | 47.2 |
| 30.0 | 211.80 | 1.0903 | 486.2 | 344.2 | 48.6 |
| 35.0 | 242.39 | 1.1115 | 499.3 | 352.7 | 50.0 |
| 40.0 | 271.53 | 1.1339 | 513.8 | 361.3 | 51.4 |
| 45.0 | 299.25 | 1.1575 | 528.2 | 370.1 | 52.8 |
| 50.0 | 325.60 | 1.1820 | 542.8 | 378.9 | 54.2 |

## 2.2. Метод найменших квадратів

Нехай в результаті вимірювань деякої фізичної залежності, яка описується функцією $y(x)$ в точках $x_i \in [a,b]$, $i=\overline{1,n}$ отримаємо дискретні значення $y_i, i=\overline{1,n}$ [1,13,20]. За цими дискретними (табличними) даними потрібно побудувати аналітичну формулу

$$\overline{y}(x) = f(x, a_1, \ldots, a_m), \tag{1}$$

яка залежить від $m$ $(m<n)$ параметрів $a_i, i=\overline{1,m}$, причому функція $\overline{y}(x)$ має "досить добре" наближати функцію $y(x)$ на всьому проміжку $[a,b]$. Вигляд функції $f$ і кількість параметрів у деяких випадках відомі на основі додаткових міркувань. У інших випадках параметри і вигляд функції $f$ визначаються за графіком, побудованим за значеннями $y(x_i)$ так, щоб залежність (1) була досить простою і добре відображала величини, отримані в результаті вимірювань.

По виміряних значеннях будуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1, a_1, \ldots, a_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = f(x_n, a_1, \ldots, a_m). \end{cases} \tag{2}$$

Якщо вона має єдиний розв'язок, то його знаходять з будь-яких $m$ рівнянь системи (2). Однак, у загальному випадку $y_i, x_i, i=\overline{1,n}$ є отримані з деякою похибкою і точний вигляд залежності $\overline{y}(x)$ невідомий. Тому система (2) зазвичай є несумісною. Знайдемо параметри $a_1, \ldots, a_m$ так, щоб у деякому розумінні всі рівняння системи (2) задовольнялися з найменшою похибкою, тобто, щоб параметри $a_i, i=\overline{1,m}$ мінімізували функцію

$$S(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_1, \ldots, a_m)]^2.$$

Такий метод розв'язування системи (2) називають методом найменших квадратів. Якщо функція $S(a_1,\dots,a_m)$ досягає абсолютного мінімуму в області зміни параметрів $a_1,\dots,a_m$, то, розв'язуючи систему

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x,a_1,\dots,a_m)]\frac{\partial f(x,a_1,\dots,a_m)}{\partial a_k}, \quad k=\overline{1,m},$$

знаходимо точки, в яких може бути екстремум. Вибравши той розв'язок, який належить області зміни параметрів $a_1,\dots,a_m$ і в якому функція $S(a_1,\dots,a_m)$ має абсолютний мінімум, знаходимо незалежні значення параметрів $a_1,\dots,a_m$.

Якщо $f(x,a_1,\dots,a_m)$ лінійно залежить від параметрів $a_1,\dots,a_m$, тобто

$$f(x,a_1,\dots,a_m) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x)a_j,$$

то система (2) набуває вигляду

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} f_j(x)a_j, \quad i=\overline{1,n}. \tag{3}$$

Розв'язуємо систему (3) токим чином, щоб визначити невідомі, які мінімізують суму квадратів нев'язок, тобто суму вигляду

$$S(a_1,\dots,a_m) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \sum_{j=1}^{m} f_j(x)a_j\right]^2.$$

Для виконання умови мінімуму величини $S$, яка є функцією від параметрів $a_1,\dots,a_m$, розв'язуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \sum_{j=1}^{m} f_j(x)a_j\right] f_k(x_i) = 0, \quad k=\overline{1,m},$$

яку для зручності представляємо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} f_j(x_i)a_j\right] f_k(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i)y_i, \quad k=\overline{1,m}. \tag{4}$$

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4) з $m$ невідомими вважаємо наближеним розв’язком системи (2) за методом найменших квадратів. Найчастіше в якості $f_j(x)$ вибирають функції $x^j$. Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (4) розв’язують методом Гауса або методом Гауса з вибором головного елемента [1,19].

## 2.3. Порівняння результатів наближення

Було проведено мінімаксне наближення та наближення методом найменших квадратів експериментально отриманих залежностей: густини кисню $\rho$ від тиску $p$ при температурі $T = 500°K$. Результати наведено у таблицях 3 і 4.

Таблиця 3. Мінімаксне наближення.

| Степінь многочлена | Вигляд многочлена | Максимальна похибка |
|---|---|---|
| 1 | $6.5096\,x + 8.5642$ | 8,4452 |
| 2 | $-0.0267\,x^2 + 7.8638\,x - 0.3333$ | 0.3173 |
| 3 | $-7.3 \cdot 10^{-5}x^3 - 0.0216\,x^2 + 7.7771\,x - 0.1259$ | 0.1185 |
| 4 | $2.4 \cdot 10^{-6}x^4 - 0.003\,x^3 - 0.0141\,x^2 + 7.7026\,x - 0.0075$ | 0.0075 |

Таблиця 4. Метод найменших квадратів.

| Степінь многочлена | Вигляд многочлена | Максимальна похибка |
|---|---|---|
| 1 | $6.6257\,x + 6.3307$ | 12.0199 |
| 2 | $-0.0269\ x^2 + 7.8730\,x - 0.4356$ | 0.4187 |
| 3 | $-7.7 \cdot 10^{-5}x^3 - 0.0213x^2 + 7.7721\,x - 0.1369$ | 0.1328 |
| 4 | $2.5 \cdot 10^{-6}x^4 - 0.003\,x^3 - 0.0139x^2 + 7.7005\,x - 0.0051$ | 0.0114 |

Графіки наближуваних даних і многочленів побудованих за мінімаксним критерієм і метод найменших квадратів, наведено у додатку 2. Порівнюючи інформацію із таблиць 3 і 4 видно, що мінімаксне наближення є кращим ніж наближення за методом найменших квадратів, бо дає менші похибки для многочленів однакового степеня. Також перевага мінімаксного наближення над методом найменших квадратів має місце і для аналітично заданих функцій (див. додаток 2).

# 3. Опис програми і отриманих результатів

## 3.1. Призначення програми

Програма призначена для побудови апроксимацій функцій многочленами двома способами: мінімаксним наближенням, та методом найменших квадратів. Функція може бути задана двома способами: дискретним (у вигляді таблиці), або неперервним (аналітично). Програма дає змогу знайти коефіцієнти многочленів, максимальні похибки, побудувати графіки многочлена, яким наближуємо функцію, функції, яка наближується. Є можливість порівняти два наближення для певної функції.

## 3.2. Умови застосування

Вимоги до ПК:

- 32-розрядний (x86) або 64-розрядний (x64) процесор із тактовою частотою 1 ГГц або швидший;
- 1 гігабайт (ГБ) RAM (для 32-розрядної версії) або 2 ГБ (для 64-розрядної версії);

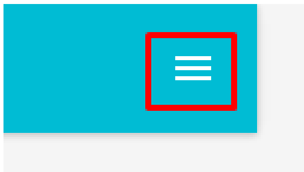
ОС: Windows 7/8/10

Для того, що запустити програму на комп'ютері достатньо мати сучасний браузер, наприклад, Google Chrome, Mozilla Firefox та доступ до мережі інтернет. Далі достатньо зайти на веб сторінку:

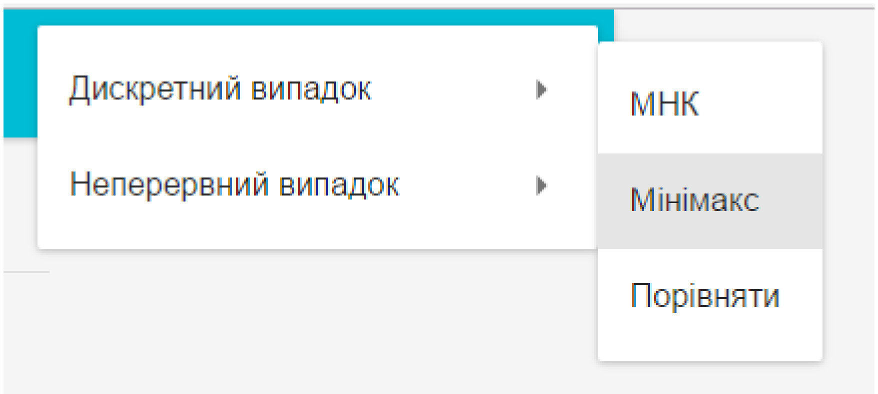
https://bodya17.github.io/diplom/index.html

## 3.3. Запуск програми та задання вхідних даних

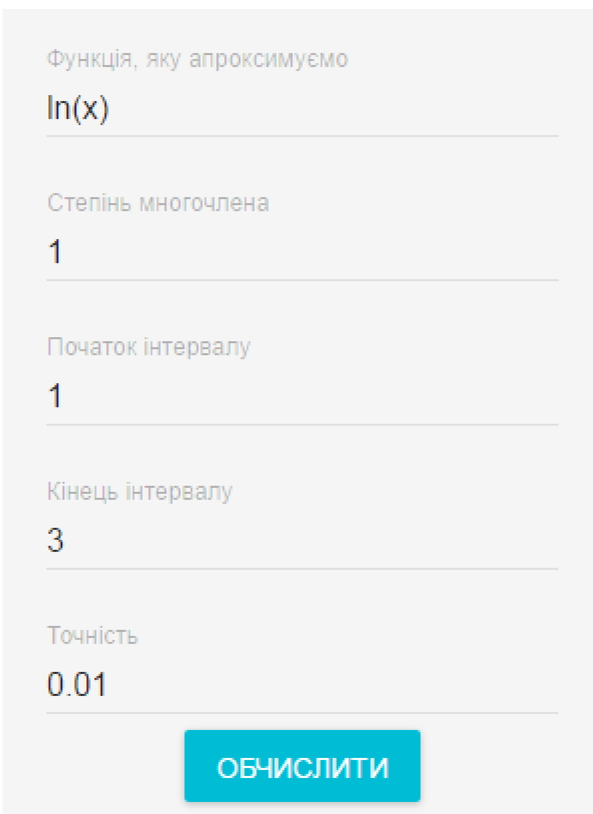
Для знаходження наближення функції, спочатку потрібно вибрати, яким чином задана функція (таблично чи аналітично). Це можна зробити натиснувши кнопку з правої сторони головного меню сайту.



Далі необхідно вибрати метод яким потрібно апроксимувати функцію.




Для неперервного випадку, потрібно заповнити наступну форму:

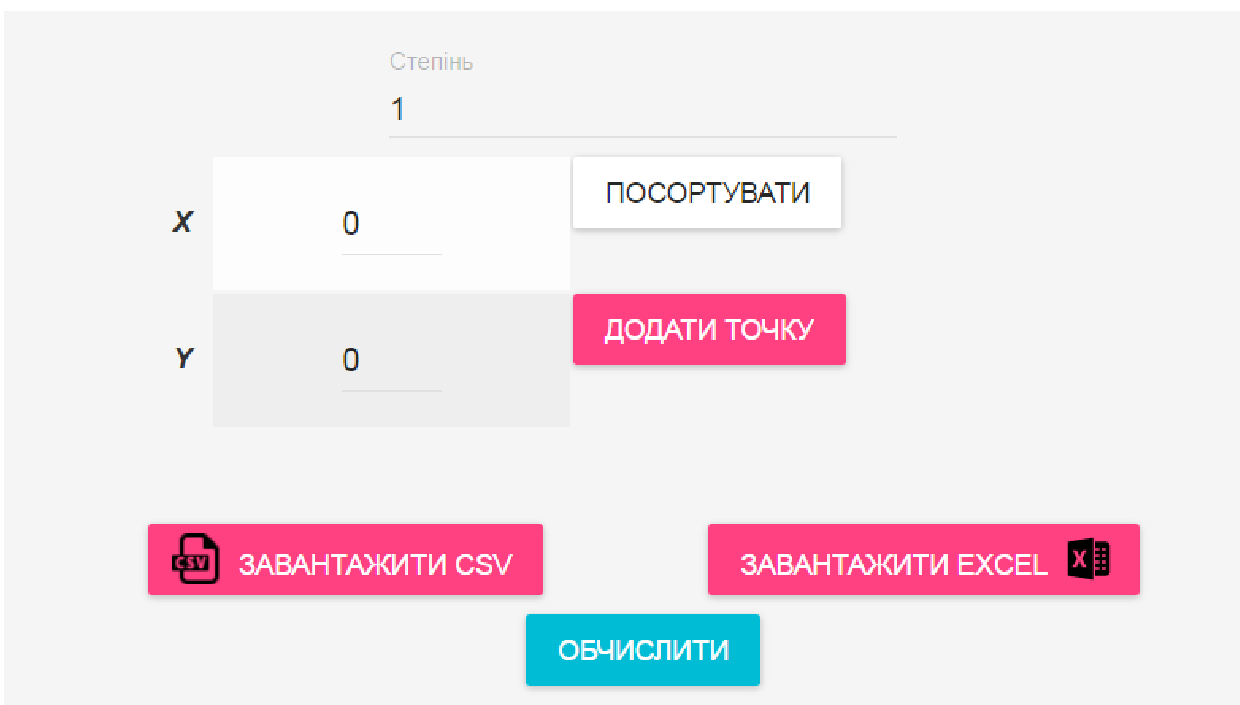


Як видно з рисунку, користувачу потрібно ввести функцію для апроксимації. Приклади вводу функцій:

| | |
|---|---|
| $e^x$ | e^x |
| $\sqrt{x}$ | sqrt(x) |
| $cos^2(x)$ | cos(x)^2 або (cos(x))^2 |
| $\frac{1}{x}$ | 1/x |

Точність – допустима відносна похибка у визначенні похибки наближення у мінімаксному наближенні.

Для дискретного випадку:




Тут можна задати степінь апроксимуючого многочлена та задати табличну функцію. Це можна зробити двома способами:

1) Вручну. За допомогою кнопки “ДОДАТИ ТОЧКУ” можна додати до таблиці, яка знаходиться лівіше, ще одну точку. Редагувати точки можна відразу в таблиці. При необхідності можна також вилучити точку навівши курсор на неї.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **X** | 16 | 20 | 25 |
| **Y** | 118.49 | 146.26 | 179.75 |

Також є можливість посортувати ці точки (по змінній x), натиснувши на відповідну кнопку.

2) Завантажити з файлу. Файл повинен бути у форматі CSV(Comma Separated Values), тобто значення які розділені комою. Перший стовпець – це значення $x$, другий – $y$. Приклад файлу CSV:

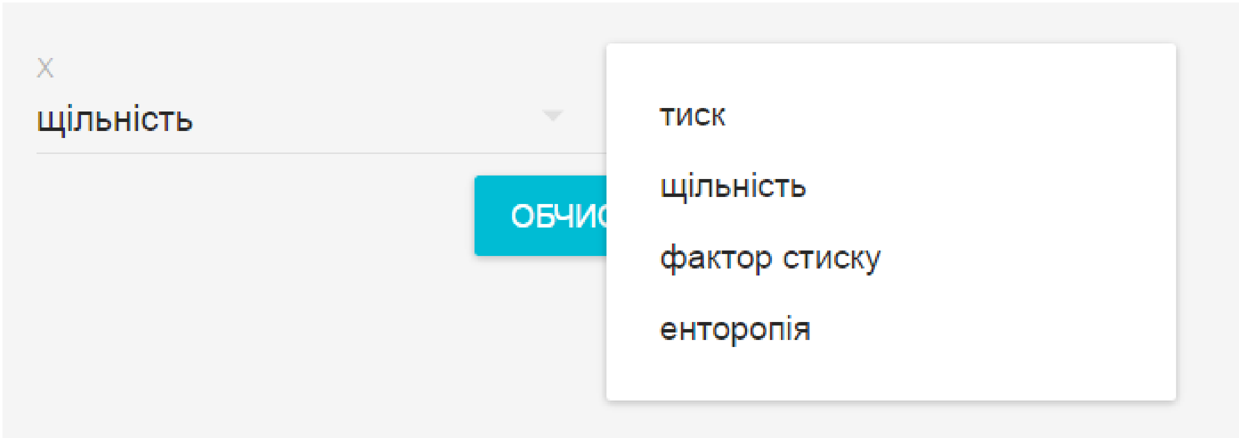
```
0.1,	0.77
1,	7.68
2,	15.34
3,	22.96
4,	30.55
5,	38.11
6,	45.63
8,	60.55
10,	75.31
12,	89.89
16,	118.49
20,	146.26
25,	179.75
30,	211.8
35,	242.39
40,	271.53
45,	299.25
50,	325.6
```

Рис. 1

Також файл може бути у форматі xlsx (Excel). Приклад Excel файлу.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | тиск | щільність | фактор стиску | енторопія |
| 2 | 0.1 | 0.048 | 1.0004 | 72.293 |
| 3 | 1 | 0.483 | 1.004 | 62.794 |
| 4 | 2 | 0.962 | 1.008 | 59.933 |
| 5 | 3 | 1.438 | 1.012 | 58.259 |
| 6 | 4 | 1.909 | 1.016 | 57.07 |
| 7 | 5 | 2.377 | 1.02 | 56.147 |
| 8 | 6 | 2.841 | 1.024 | 55.393 |
| 9 | 8 | 3.759 | 1.032 | 54.203 |
| 10 | 10 | 4.663 | 1.04 | 53.278 |
| 11 | 12 | 5.553 | 1.048 | 52.522 |
| 12 | 16 | 7.293 | 1.0639 | 51.327 |
| 13 | 20 | 8.982 | 1.0797 | 50.399 |
| 14 | 25 | 11.026 | 1.0995 | 49.47 |
| 15 | 30 | 12.998 | 1.1192 | 48.709 |
| 16 | 35 | 14.903 | 1.1389 | 48.065 |
| 17 | 40 | 16.745 | 1.1584 | 47.506 |
| 18 | 45 | 18.526 | 1.1779 | 47.013 |
| 19 | 50 | 20.251 | 1.1973 | 46.571 |
| 20 | 60 | 23.542 | 1.2359 | 45.805 |
| 21 | 70 | 26.64 | 1.2742 | 45.157 |
| 22 | 80 | 29.564 | 1.3122 | 44.594 |

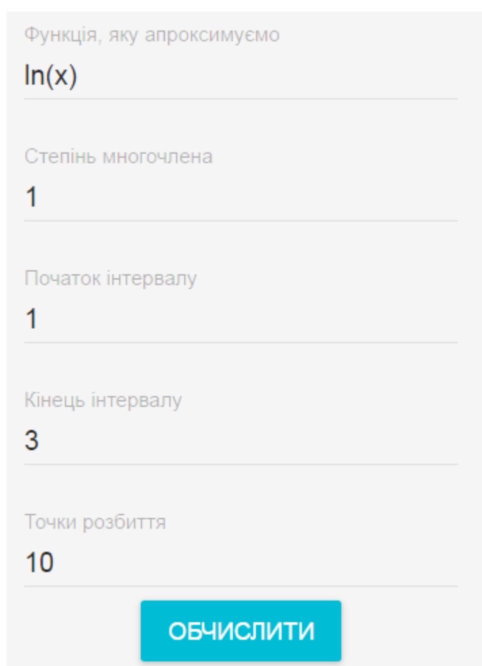
Далі необхідно вибрати яка величина – змінна $x$, а яка – $y$.




Після цього, незважаючи на спосіб, яким задали функцію (вручну чи завантажили з файлу), потрібно натиснути кнопку “ОБЧИСЛИТИ”. Коли запит обробиться на сервері, результати можна побачити на екрані.

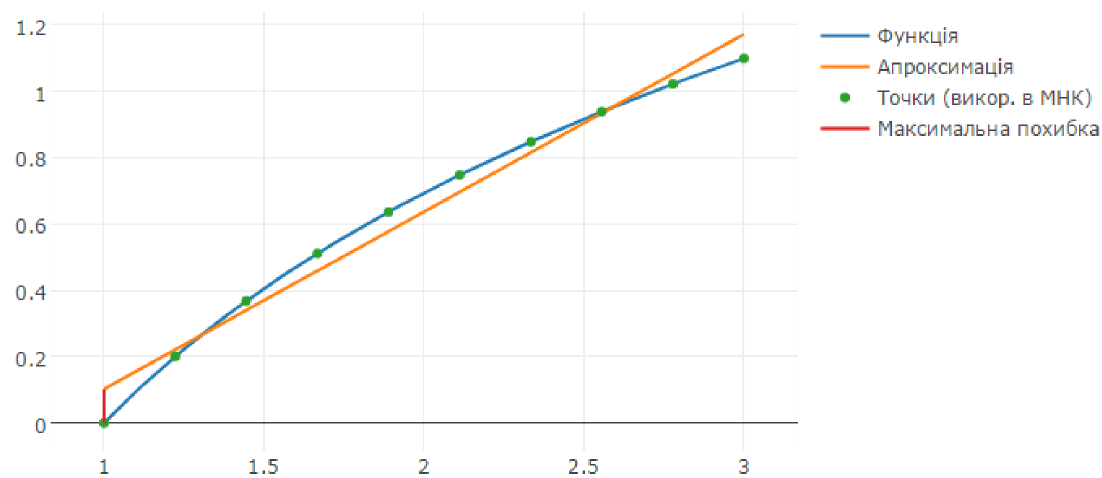
## 3.4. Опис отриманих результатів

Приклад отриманих результатів наближення функції $\ln(x)$, лінійним многочленом на проміжку [1,3], використовуючи метод найменших квадратів. Вхідні дані:



Вихідні дані:

| | |
|---|---|
| Аналітичний вигляд многочлена | $0.5347x - 0.4326$ |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 1.00000 |
| Максимальна похибка | 0.10207 |




Як можна побачити з рисунку, результатом роботи програми є вивід на екран аналітичного вигляду многочлена, значення $x$ в якій досягається максимальна похибка та величини цієї похибки. Також на екран виводяться такі графіки:

1) Графік функції що апроксимується (синій колір).
2) Графік апроксимуючого многочлена, в даному випадку лінійний (оранжевий колір).
3) Точки, які використовуються в програмі при обчислені коефіцієнтів многочлена (зелений колір).
4) Максимальна похибка (червоний колір).

Приклад отриманих результатів наближення табличної функції (рис. 1) многочленом другого степеня, використовуючи метод мінімаксного наближення.

Вхідні дані:

Степінь

2

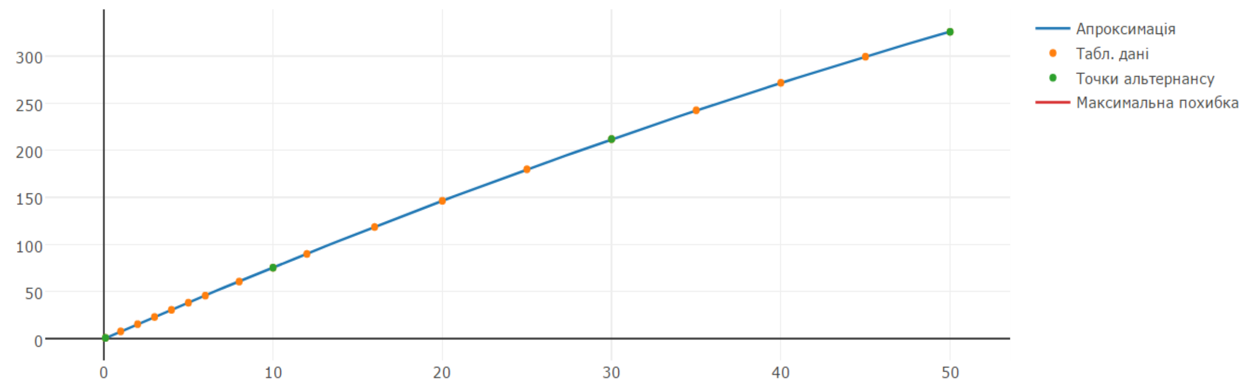
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 0.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| **Y** | 0.77 | 7.68 | 15.34 | 22.96 | 30.55 | 38.11 | 45.63 | 60.55 | 75.31 | 89.89 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 16 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | ПОСОРТУВАТИ |
| **Y** | 118.49 | 146.26 | 179.75 | 211.8 | 242.39 | 271.53 | 299.25 | 325.6 | ДОДАТИ |

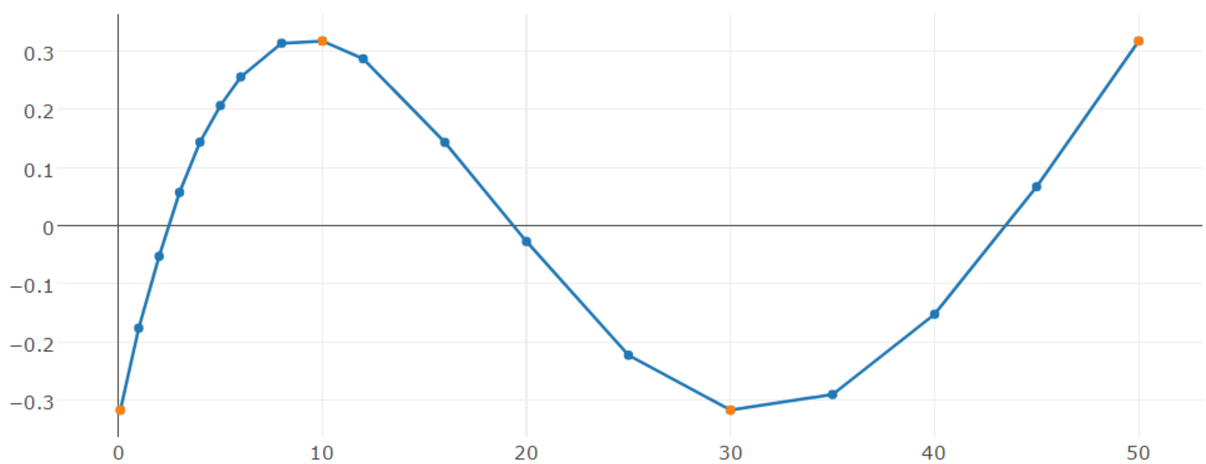
Вихідні дані:

| **Точка альтернансу** | 0.10 | 10.0 | 30.0 | 50.0 |
|---|---|---|---|---|
| **Похибка** | -0.3172523 | 0.3172523 | -0.3172523 | 0.3172523 |

| | |
|---|---|
| Максимальна похибка | -0.3172523 |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 30.0000000 |
| Аналітичний вигляд многочлена | $-0.0267x^2 + 7.8638x - 0.3333$ |




Графік функції похибки



Як можна побачити з рисунку, результатом роботи програми є вивід на екран аналітичного вигляду многочлена, значення *x* в якій досягається максимальна похибка та величини цієї похибки. Також на екран виводяться такі графіки:

1) Графік апроксимуючого многочлена, в даному випадку многочлен другого степеня (синій колір).
2) Табличні дані (оранжевий колір).
3) Точки альтернансу (зелений колір).
4) Максимальна похибка (червоний колір).
5) Графік функції похибки.

# Висновки

1) В роботі наведено поняття мінімаксного наближення функцій многочленами та метод найменших квадратів. Описано алгоритм Ремеза мінімаксної апроксимації та алгоритм Валлє-Пуссена заміни точок альтернасу.
2) Здійснено програмну реалізацію мінімаксного наближення неперервних функцій та дискретних даних многочленами довільної степені.
3) Здійснено програмну реалізацію методу найменших квадратів многочленами довільної степені.
4) Результати моделювання функціональних залежностей заданих як неперервними функціями, так і заданих у вигляді дискретних даних показали більшу ефективність (кращу точність) мінімаксного наближення над методом найменших квадратів. Тому його доцільно застосовувати, незважаючи на більшу складність при програмній реалізації.

# Список використаної літератури


1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – Москва: Наука, 1987. – 600с.

2. *Бердышев В. И., Петрак Л. В.* Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложение. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 297 с.

3. *Бердышев В. И.* Дифференцирование в задаче поиска аппроксимации, обеспечивающей наилучшую привязку // Докл. АН СССР. – 1999. – 366, №2. – С. 151-154.

4. *Вакал Л. П., Каленчук-Порханова А. О.* Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації // Мат. машини і системи. – 2006. – № 2. – С. – 15-24.

5. *Верлань А. Ф., Корсунов Н. И., Лобода В. А.* Электронные функциональные преобразователи систем автоматики. – Киев: Техника, 1981. – 240 с.

6. *Температурные* измерения / [О. А. Геращенко, А. И. Годов, А. К. Еремина и др.]: Под ред. О. А. Геращенко. – Киев: Наук. думка, 1989. – 704 с.

7. *Головко Д. Б., Рего К. Г., Скрипник Ю. О.* Основи метрології та вимірювань. – Київ: Либідь, 2001. – 408 с.

8. *Теплофизические* свойства технически важных газов при высоких температурах и давлениях: Справочник / [В. Н. Зубарев, А. Д. Козлов, В. М. Кузнецов и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 232 с.

9. *Каленчук-Порханова А. А., Вакал Л. П.* Наилучшая чебышевская аппроксимация для сжатия численной информации // Компьютерная математика: Сб. науч. тр. – 2009. – Вып. 1. – С. 111–119.

10. *Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В.* Среднеквадратичная аппроксимация сплайнами // Там же. – 1997. – 9, № 9. – С. 107 – 116.

11. *Коллатц Л., Альберт Ю.* Задачи по прикладной математике. – М.: Мир, 1978.

12. *Корсунов Н. И.* Выбор метода аппроксимации функций и повышение скорости их вычислений в микропроцессорных системах // Электроника и моделирование. – 1982. - № 2. – С. 49 – 52.

13. *Кутнів М. В.* Чисельні методи: Навчальний посібник. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2010.– 288 с.

14. *Луцик Я. Т., Гук О. П., Лах О. І., Стадник Б. І.* Вимірювання температурні: Теорія та практика. – Львів: Бескид Біт, 2006. – 560 с.

15. *Попов Б. О.* Чисельні методи рівномірного наближення сплайнами. Конспект лекцій. – Львів: ЛДУ, 1992. – 92 с.

16. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближения функций для технических приложений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 352 с.

17. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. – Киев: Наук. думка, 1984. – 599 с.

18. *Попов Я. Б.* Нелинейное наилучшее приближение градуировочных характеристик датчиков температуры // Электрон. моделирование. – 1999. – 21, № 4. – С. 119 – 123.

19. Ремез Є.Я. Основы численных методов чебышевского приближения . - Киев: Наук.думка, 1969. - 623 с.

20. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. -М.: Наука, 1989. - 432 с.

21. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Москва : Наука, 1962. — Т. 1. — 607 с.

22. *Шумейко А. А., Товстоног Е. А.* Асимптотически оптимальное весовое кусочно-линейное восстановление кривых // Системні технології. Прогресивні засоби одержання і технології виробництва матеріалів. – 1998. – С. 109 – 113.

23. *Яцук В. О., Малачівський П. С.* Методи підвищення точності вимірювань: підруч. [для студ. вищ. навч. закл.]. – Львів: Бескид Біт, 2008. – 368 с.

24. *Muller J. M.* Elementary Functions: Algorithms and Implementation. – Boston: Birkhauser, 1997. – 204 p.

25. *Rice J. R.* Approximative formulas for phyncal data // Pyro – dynamics. – 1969. – 6, № 314. – P. 231 – 256.

# Додатки

## Додаток 1. Код програми

Підпрограма для створення початкового альтернансу (дискретний випадок).

Вхідні параметри:

1) масив значень x

2) degree – степінь апроксимуючого многочлена

Результат виконання функції: початковий альтернанс

```
def make_initial_alternance(x, degree):
    alternance = [x[0]] # add first
    busy = []
    for i in range(degree):
        rand_index = np.random.randint(1, len(x)-1)
        while rand_index in busy:
            rand_index = np.random.randint(1, len(x)-1)
        busy.append(rand_index)
        alternance.append(x[rand_index])
    alternance.append(x[len(x)-1]) # add last
    alternance.sort()
    return alternance
```

В цій функції використана бібліотека *numpy([http://www.numpy.org/](http://www.numpy.org/))*.

Підпрограма для визначення максимального значення функції в дискретних точках.

Вхідні параметри:

1) func – функція

2) x_vals – масив дискретних точок

```
def max_error(func, x_vals):
    y_vals = func(x_vals)
    neg_err = min(y_vals)
    pos_err = max(y_vals)

    if abs(neg_err) > pos_err:
        e_max = neg_err
```

```
    else:
        e_max = pos_err
    return e_max
```

Результат виконання функції: максимальне значення заданої функції

Підпрограма для заміни точок альтернансу.

Вхідні параметри:

1) err_func – функція похибки

2) alternance – попередній альтернанс

3) x_vals – значення x для таблично заданої функції

Результат виконання функції: новий альтернанс

```
def change_alternance(err_func, alternance, x_vals):
    x_err = x_of_max_error(err_func, x_vals)
    temp = alternance[:]
    temp.append(x_err)
    temp.sort()
    index_of_x_err = temp.index(x_err)
    if index_of_x_err != 0 and index_of_x_err != (len(temp)-1):
        if sign(err_func(temp[index_of_x_err])) ==
sign(err_func(temp[index_of_x_err-1])):
            del temp[index_of_x_err-1]

        else: del temp[index_of_x_err+1]

    elif index_of_x_err == 0:
        if sign(err_func(temp[index_of_x_err])) == sign(err_func(temp[1])):
            del temp[1]
        else:
            del temp[len(temp)-1]
    elif index_of_x_err == (len(temp)-1):
        if sign(err_func(temp[index_of_x_err])) ==
sign(err_func(temp[index_of_x_err-1])):
            del temp[index_of_x_err-1]
        else:
            del temp[0]
    return temp
```

Підпрограма для побудови аналітичного вигляду многочлена.

Вхідні параметри:

1) t – альтернанс

2) degree – степінь апроксимуючого многочлена

3) f_discrete – дискретна функція

```
def pol(t, degree, f_discrete):
    x = Symbol('x')
    e = Symbol('e')
    vars_str = ' '.join(['a' + str(i) for i in range(degree+1)])
    variables = symbols(vars_str)
    eqs = []

    for i in range(degree+2):
        eqs.append(make_eq(variables, t[i], f_discrete(t[i])) + e)
        e *= -1
    if degree % 2 == 1:
        e *= -1

    solution = solve(eqs, variables + (e,))

    error_on_iteration = solution[e]
    polynom = x - x
    for i, v in enumerate(variables):
        polynom += solution[v] * x**i

    return [polynom, error_on_iteration]
```

Результат виконання функції: аналітичний вигляд многочлена.

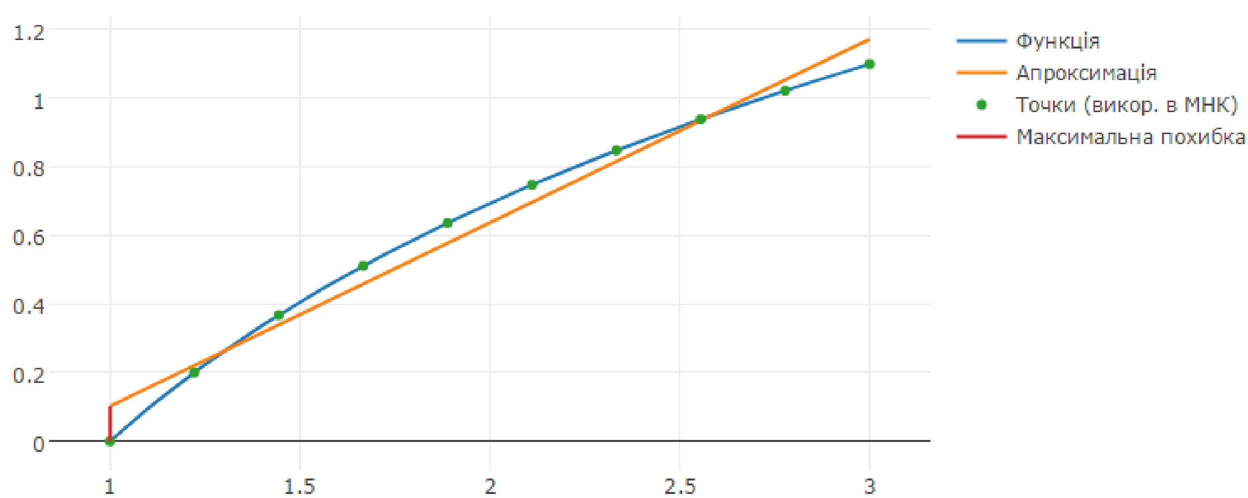
# Додаток 2. Результати виконання програми

**Неперервний випадок**

**Приклад 1.** Знайдемо наближення функції $\ln(x)$, лінійним многочленом на проміжку [1,3], використовуючи метод найменших квадратів.

Результат роботи програми:

| | |
|---|---|
| Аналітичний вигляд многочлена | $0.5347x - 0.4326$ |
| Значення $x$ в якому досягається максимальна похибка | 1.00000 |
| Максимальна похибка | 0.10207 |



**Приклад 2.** Знайдемо наближення функції $\ln(x)$, лінійним многочленом на проміжку [1,3], використовуючи мінімаксний метод.

Результат роботи програми:

Ітерація 1

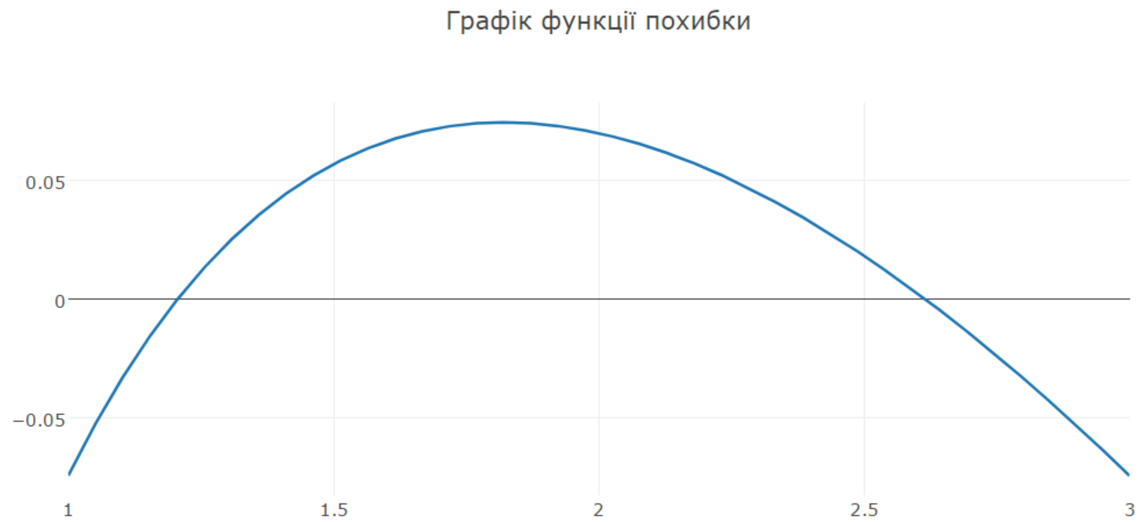
| | | | |
|---|---|---|---|
| **Точка альтернансу** | 1.0 | 2.0 | 3.0 |
| **Похибка** | -0.0719205 | 0.0719205 | -0.0719205 |

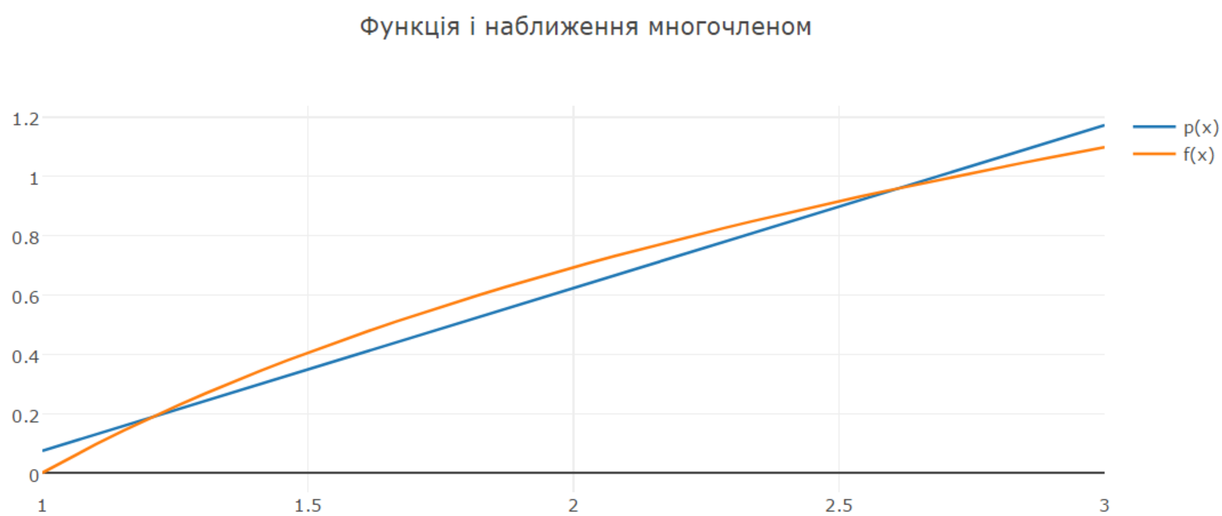
| | |
|---|---|
| Максимальна похибка | 0.0764850 |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 1.8204410 |
| Продовжуємо алгоритм бо | 0.0634653 > 0.01 |
| Аналітичний вигляд многочлена | $\mathbf{0.5493x - 0.4773}$ |

Ітерація 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Точка альтернансу** | 1.0 | 1.8204410 | 3.0 |
| **Похибка** | -0.0742027 | 0.0742027 | -0.0742027 |

| | |
|---|---|
| Максимальна похибка | -0.0742027 |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 3.0000000 |
| Алгоритм закінчено бо | 0.0000000 < 0.01 |
| Аналітичний вигляд многочлена | $\mathbf{0.5493x - 0.4751}$ |


Графік функції похибки
0.05
0
−0.05
1
1.5
2
2.5
3


Функція і наближення многочленом
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
1.5
2
2.5
3
p(x)
f(x)

**Приклад 3.** Знайдемо наближення функції $e^x$ многочленом третього степеня на проміжку $[-1,3]$, використовуючи мінімаксний метод.

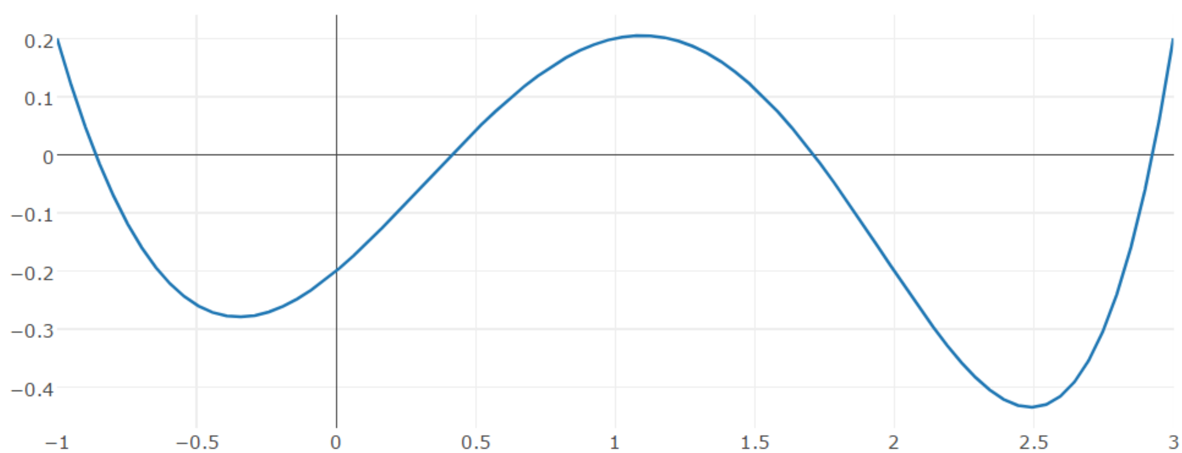
Результат роботи програми:

Ітерація 1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Точка альтернансу** | -1.0 | 0.0 | 1.0 | 2.0 | 3.0 |
| **Похибка** | 0.2004302 | -0.2004302 | 0.2004302 | -0.2004302 | 0.2004302 |

| | |
|---|---|
| Максимальна похибка | -0.4350982 |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 2.4900873 |
| Продовжуємо алгоритм бо | 1.1708217 > 0.01 |
| Аналітичний вигляд многочлена | $0.5782x^3 + 0.1422x^2 + 0.5969x + 1.2004$ |

Графік функції похибки

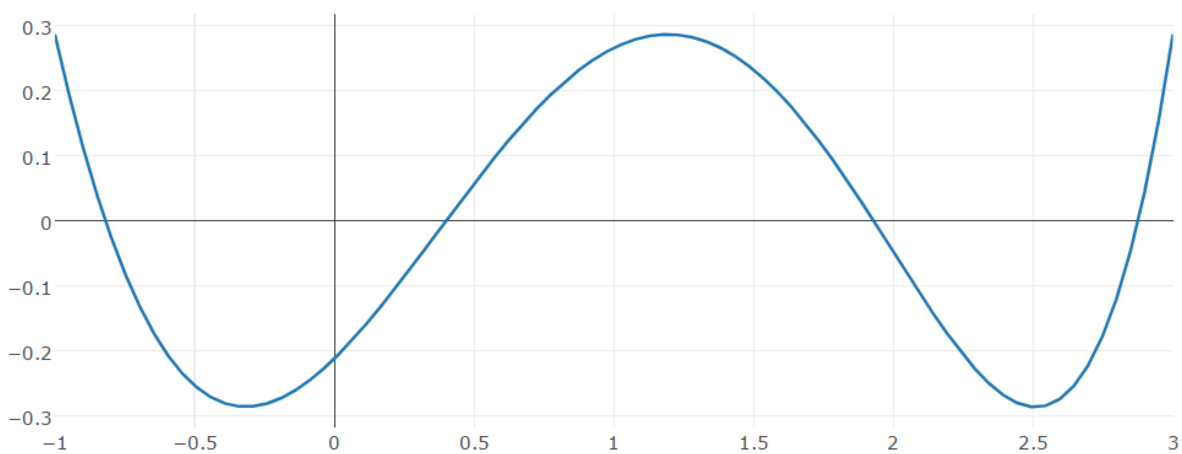


Ітерація 4

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Точка альтернансу** | -1.0 | -0.3155829 | 1.1925548 | 2.4900873 | 3.0 |
| **Похибка** | 0.2861835 | -0.2861835 | 0.2861835 | -0.2861835 | 0.2861835 |

| | |
|---|---|
| Максимальна похибка | -0.2867376 |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 2.5092877 |
| Алгоритм закінчено бо | 0.0019361 < 0.01 |
| Аналітичний вигляд многочлена | $0.6055x^3 + 0.0551x^2 + 0.5799x + 1.2121$ |

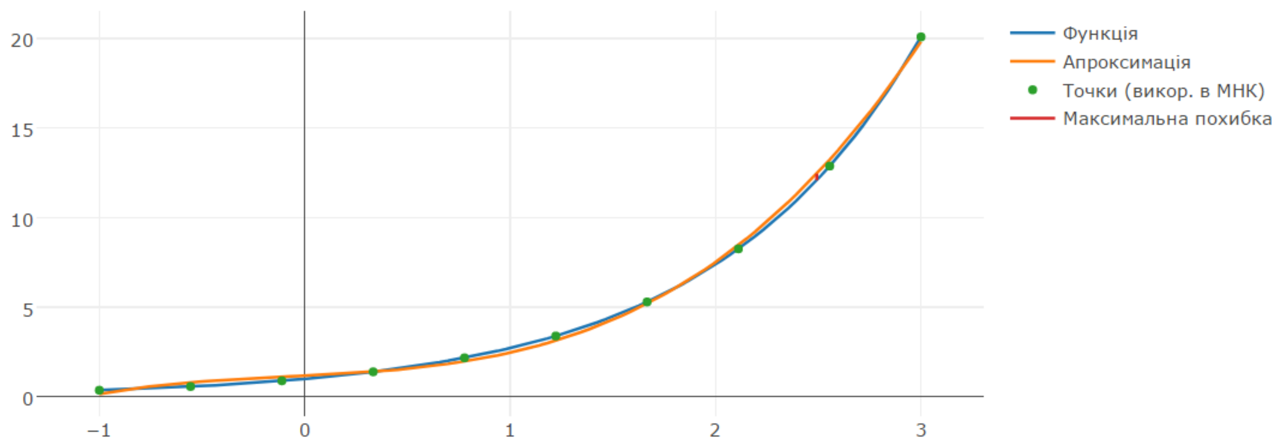
Графік функції похибки



**Приклад 4.** Знайдемо наближення функції $e^x$ многочленом третього на проміжку $[-1,3]$, використовуючи метод найменших квадратів.

Результат роботи програми:

| | |
|---|---|
| Аналітичний вигляд многочлена | $0.5812x^3 + 0.1377x^2 + 0.5712x + 1.1755$ |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 2.49239 |
| Максимальна похибка | 0.36421 |



**Дискретний випадок**

**Приклад 5.** Знайдемо наближення многочленом першого степеня, використовуючи мінімаксний метод для експериментально отриманих залежностей: густини кисню $\rho$ від тиску $p$ при температурі $\mathrm{T} = 500°K$.

| **p** | **ρ** |
|---|---|
| 0.1 | 0.77 |
| 1.0 | 7.68 |
| 2.0 | 15.34 |
| 3.0 | 22.96 |
| 4.0 | 30.55 |
| 5.0 | 38.11 |
| 6.0 | 45.63 |
| 8.0 | 60.55 |
| 10.0 | 75.31 |
| 12.0 | 89.89 |
| 16.0 | 118.49 |
| 20.0 | 146.26 |
| 25.0 | 179.75 |
| 30.0 | 211.80 |
| 35.0 | 242.39 |
| 40.0 | 271.53 |
| 45.0 | 299.25 |
| 50.0 | 325.60 |

Ітерація 1

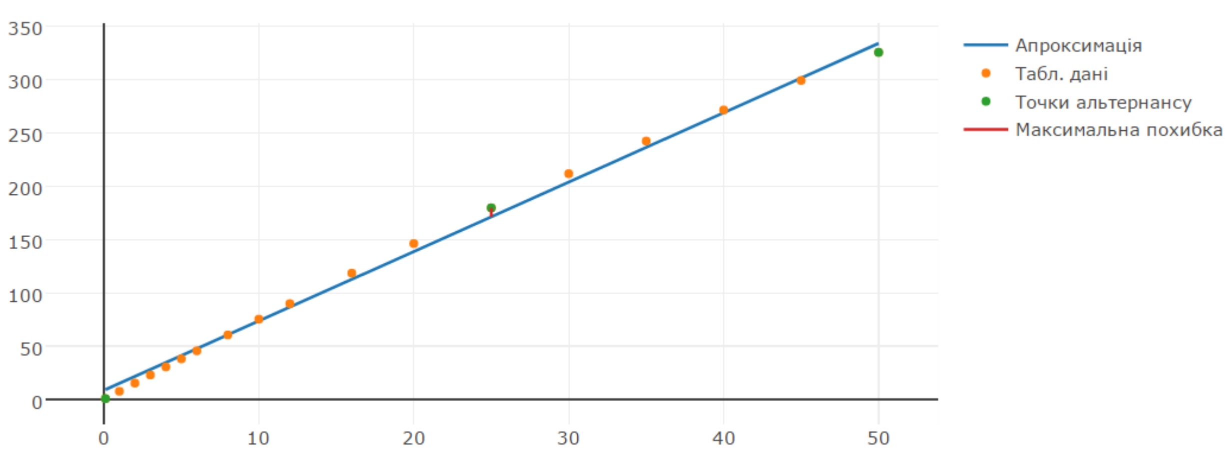
| | | | |
|---|---|---|---|
| **Точка альтернансу** | 0.10 | 8.0 | 50.0 |
| **Похибка** | 4.1770040 | -4.1770040 | 4.1770040 |

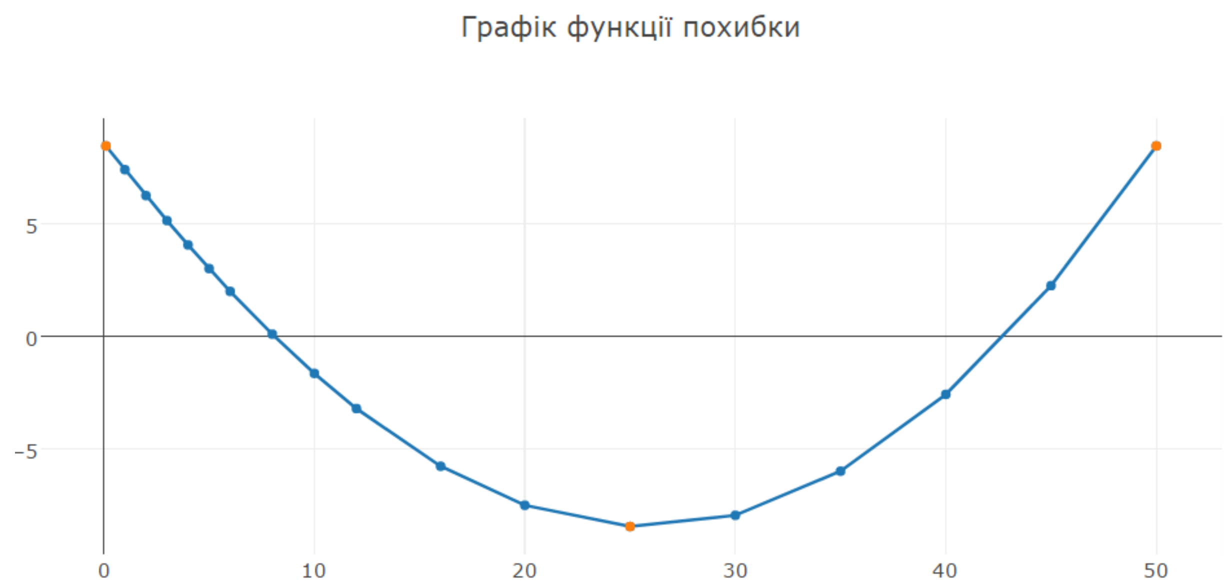
| | |
|---|---|
| Максимальна похибка | -12.7134770 |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 25.0000000 |
| Аналітичний вигляд многочлена | $6.5096x + 4.2960$ |

Ітерація 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Точка альтернансу** | 0.10 | 25.0 | 50.0 |
| **Похибка** | 8.4452405 | -8.4452405 | 8.4452405 |

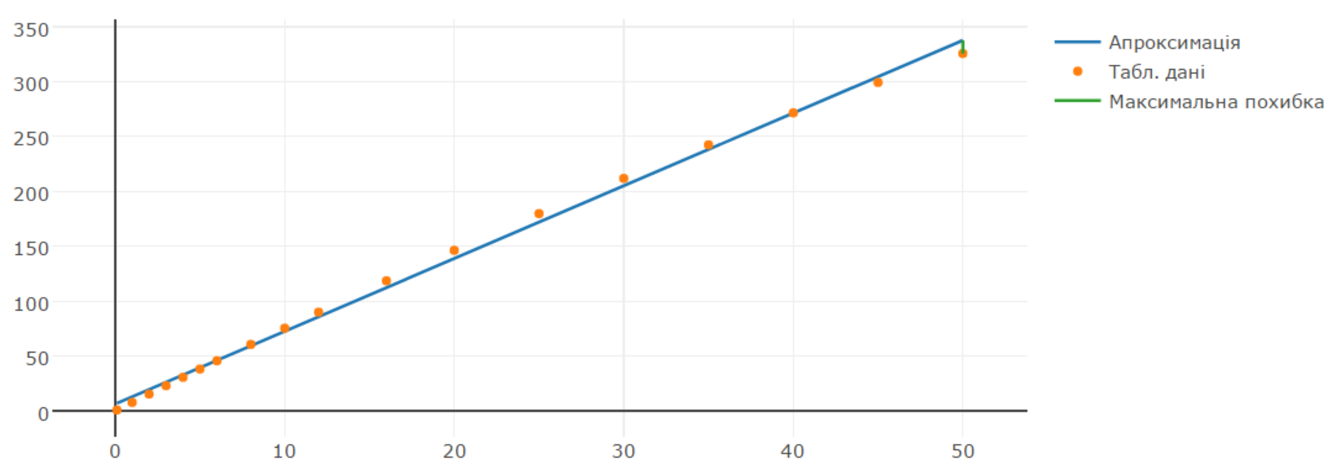
| | |
|---|---|
| Максимальна похибка | -8.4452405 |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 25.0000000 |
| Аналітичний вигляд многочлена | $6.5096x + 8.5642$ |






**Приклад 6.** Знайдемо наближення многочленом першого степеня, використовуючи метод найменших квадратів для тих самих даних які були використані у прикладі 5.

| | |
|---|---|
| Аналітичний вигляд многочлена | $6.6257x + 6.3307$ |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 50.00000 |
| Максимальна похибка | 12.01992 |



**Приклад 7.** Знайдемо наближення многочленом третього степеня, використовуючи мінімаксний метод для експериментально отриманих залежностей: густини водню $\rho$ від тиску $p$ при температурі $T = 500°K$.

| **p** | **ρ** |
|---|---|
| 0.1 | 0.048 |
| 1.0 | 0.483 |
| 2.0 | 0.962 |
| 3.0 | 1.438 |
| 4.0 | 1.909 |
| 5.0 | 2.377 |
| 6.0 | 2.841 |
| 8.0 | 3.759 |
| 10.0 | 4.663 |
| 12.0 | 5.553 |
| 16.0 | 7.293 |
| 20.0 | 8.982 |
| 25.0 | 11.026 |
| 30.0 | 12.998 |
| 35.0 | 14.903 |
| 40.0 | 16.745 |
| 45.0 | 18.526 |
| 50.0 | 20.251 |
| 60.0 | 23.542 |
| 70.0 | 26.640 |
| 80.0 | 29.564 |

Ітерація 1

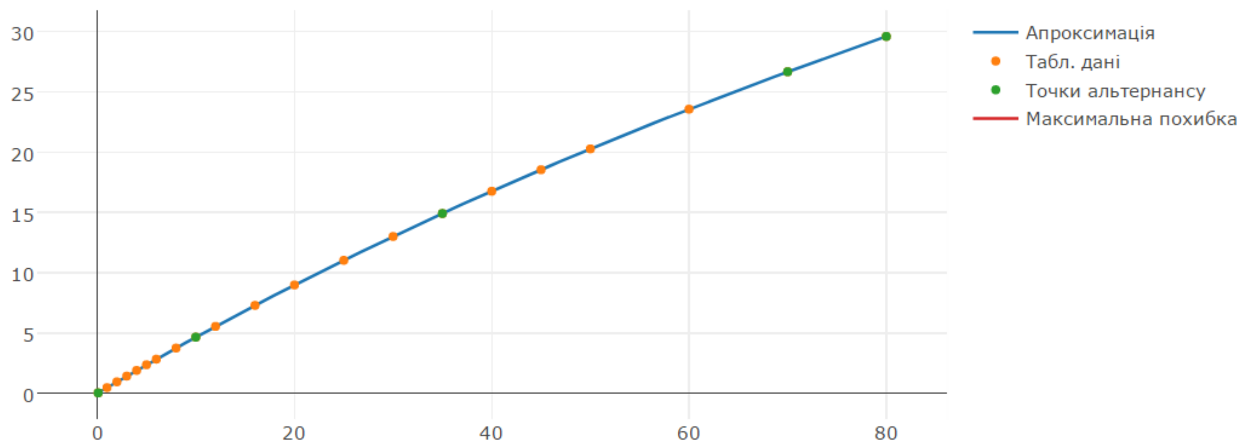
| **Точка альтернансу** | 0.10 | 16.0 | 35.0 | 40.0 | 80.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Похибка** | 0.0015012 | -0.0015012 | 0.0015012 | -0.0015012 | 0.0015012 |

| | |
|---|---|
| Максимальна похибка | -0.0175382 |
| Значення $x$ в якому досягається максимальна похибка | 60.0000000 |
| Аналітичний вигляд многочлена | $5.0033 \cdot 10^{-6}x^3 - 0.0018x^2 + 0.4835x + 0.0011$ |

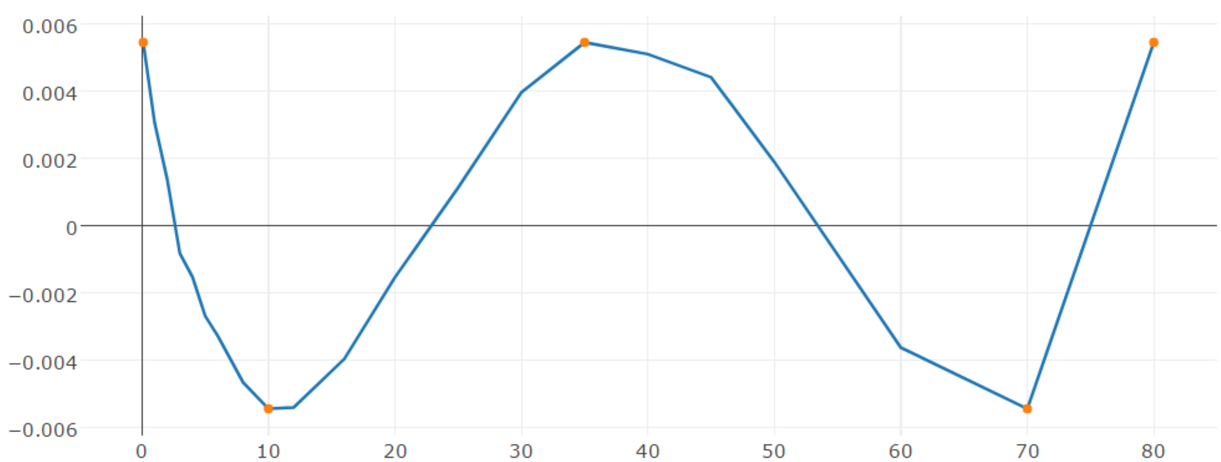
Ітерація 6

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Точка альтернансу** | 0.10 | 10.0 | 35.0 | 70.0 | 80.0 |
| **Похибка** | 0.0054551 | -0.0054551 | 0.0054551 | -0.0054551 | 0.0054551 |

| | |
|---|---|
| Максимальна похибка | -0.0054551 |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 70.0000000 |
| Аналітичний вигляд многочлена | $4.6710 \cdot 10^{-6} x^3 - 0.0017x^2 + 0.4826x + 0.0052$ |




Графік функції похибки



**Приклад 8.** Знайдемо наближення многочленом третього степеня, використовуючи метод найменших квадратів для тих самих даних які були використані у прикладі 7.

| | |
|---|---|
| Аналітичний вигляд многочлена | $4.7308 \cdot 10^{-6}x^3 - 0.0017x^2 + 0.4827x + 0.0056$ |
| Значення *x* в якому досягається максимальна похибка | 70.00000 |
| Максимальна похибка | -0.00710 |