## Основні поняття мінімаксного наближення

## 1.1 Способи задання функцій. Норма похибки

Наближувана функція  у практичних обчисленнях найчастіше задається або в аналітичному вигляді або у вигляді дискретних значень (табличне задання функції). Таблично задану функцію можна представити у вигляді



де значення аргумента . Далі припускатимемо, що аргументи упорядковані за зростанням:



При використанні наближених методів на ЕОМ неможливо врахувати значення функції  у всіх точках , бо кількість  чисел, що може бути представлена на ЕОМ обмежена. Тому обчислювальні методи повинні бути побудовані так, щоб розв’язок задачі на проміжку  був еквівалентний її розв’язку на характерній підмножині , що складається з обмеженої кількості точок.

Для наближення функції  використовуємо простіший вираз

 (1)

з  параметром. Частинним випадком виразу (1) є многочлен степеня 

 (2)

Якість наближення функції  за допомогою виразу (1) на проміжку  xарактеризується віддалю між цими функціями. Спосіб виміру цієї віддалі визначає норму похибки наближення функції  за допомогою виразу (1) на проміжку  (або на множині ). Для більшої загальності у виразах для похибки часто використовують зважену віддаль (зважену різницю)

 (3)

де вага  при , .

Використання тієї чи іншої норми похибки залежить передусім від конкретних задач, що стоять при наближенні функцій. У теоретичних дослідженнях часто використовується норма похибки .



Найбільш вживані частинні випадки цієї норми ,  та .

Норму  слід вживати там, де необхідно зменшити суму площ, що обмежуються кривими  та .



Норму  або середньоквадратичну похибку найчастіше використовують при обробці дослідних даних.



Норму  (її часто називають чебишовською нормою або нормою ) використовують, щоб найточніше представити кожне значення наближуваної функції . Припускається, що ця остання відома достатньо точно:



При обчисленнях з чебишовською нормою, функцію (3) звуть функцією похибки, її графік - кривою похибки.

## 1.2 Існування мінімаксного многочленного наближення

За теоремою Вейєрштрасса для довільних неперервних на обмеженому проміжку функцій  та  і довільного  можна знайти такий многочлен , що



Ясно, що найменше при цьому значення степеня  многочлена  суттєво залежить від способу наближення. Серед усіх способів наближення функцій найменшу похибку a, значить, і найменше  при заданому , дає найкраще чебишовське наближення.

Вираз , для якого максимальне значення абсолютної величини зваженої похибки (3) досягає на проміжку  найменшого значення

 (4)

звемо найкращим чебишовським зваженим (з вагою ) наближенням функції  за допомогою виразу виду  на проміжку .

У цій бакалаврській роботі розглянуто лише найкращі чебишовські наближення. Слова “чебишовські” і “зважені” будемо часом пропускати. При  маємо найкраще абсолютне наближення, при  - найкраще відносне.

Величину (4) називатимемо мінімальним (зваженим) відхиленням і позначаємо ;  - мінімальне абсолютне відхилення;  - мінімальне відносне відхилення.

Далі розглянемо властивості найкращих наближень многочленом.

**Теорема 1.** Для будь-яких неперервних на проміжку  функцій  та  і довільного , існує єдиний многочлен  степеня , що має найменше відхилення .

**Теорема 2.** Нехай на проміжку  задано неперервні функції  та . Тоді для того, щоб деякий многочлен  степеня не вище  був многочленом найкращого чебишовського зваженого наближення функції  на проміжку  необхідно і достатньо, щоб на цьому проміжку знайшлась принаймні одна система з  точок

, у яких зважена різниця (3) почергово набувала значень різних знаків і досягала за модулем найбільшого на  значення тобто:

 (5)

Система точок  із теореми 2 зветься системою точок (чебишовського альтернансу). Для побудови многочлена найкращого наближення необхідно визначити ці точки. Точно визначити їх значення можна тільки у часткових випадках.

### 1.3 Побудова мінімаксного наближення за схемою Ремеза

У загальному випадку процес знаходження точок  побудовано на ітераційних методах. Найбільше практичне значення мають методи розроблені українським математиком Є.Я. Ремезом. Коротко розглянемо один з методів. Він складається з таких етапів.

1. З проміжку  вибираємо початкове наближення  до альтернансу



Можна, наприклад, прийняти .

2. Здійснюємо чебишовську інтерполяцію для множини точок

, тобто визначаємо коефіцієнти многочлена  і величину , для яких виконуються умови . Для знаходження вказаних величин розв’язуємо систему рівнянь:

 (6)

Система є системою  алгебраїчних рівнянь з  невідомими:  та 

3. Перевіряємо виконання рівності

 (7)

Якщо рівність виконується, то у відповідності з теоремою 2 многочлен  і є шуканий многочлен найкращого наближення. При машинній реалізації алгоритму перевірку рівності заміняють перевіркою нерівності

 (8)

де  - допустима відносна помилка у визначенні похибки наближення. Можна, наприклад, прийняти  чи .

4. Якщо умова 7 чи 8 не виконується, то приймаємо  і вибираємо наступне (уточнене) наближення до точок чебишовського альтернансу (наступний V-альтернанс). Далі виконання алгоритму повторюється починаючи з п.2.

При обчисленнях на ЕОМ у цьому пункті іноді додатково перевіряються умови



де  - допустима помилка у визначенні точок альтернансу. Якщо остання нерівність справедлива для всіх точок , то вважаємо, що многочлен найкращого наближення знайдено.

### 1.4 Заміна точок альтернансу

Існує кілька методів заміни точок альтернансу. Можлива заміна одної або кількох точок одночасно. Найпростішим алгоритмом є алгоритм Є.Я. Ремеза з одноточковою заміною (алгоритм Валлє-Пуссена). Опишемо цей алгоритм.

Нехай при виконанні п.3 знайдена точка , для якої справедливо . Можливі три випадки взаємного розміщення точок V-альтернансу та точки :

1. 

2. 

3. 

Розглянемо спосіб заміни точок V-альтернансу у кожному випадку.

1. Знайдемо ціле число  таке, що . Якщо , то приймаємо , у протилежному випадку . Решту точок V-альтеранансу не змінюємо.

2. Якщо , то приймаємо , а решту точок V-альтернансу не змінюємо. Якщо це не так, то заміняємо усі точки альтернансу за формулами:



У цьому випадку із V-альтернансу виключається точка 

3. Якщо , то приймаємо  і решту точок V-альтернансу не змінюємо. Якщо це не так, то замінюємо усі точки V-альтернансу за формулами:



У цьому випадку із V-альтернансу виключається точка .

Отже черговий V-альтернанс відрізняєтся від попереднього тим, що точка , у якій досягається максимум абсолютної величини зваженої похибки, вводиться у V-альтернанс замість однієї із старих точок.

Відомо, що алгоритм Валле-Пуссена для заміни точок альтернансу при знаходженні найкращого наближення попередньої функції многочленом на проміжку  збігається незалежно від початкового наближення до точок альтернансу. Більш того у цьому випадку цей алгоритм збігається зі швидкістю гометричної прогресії у тому сенсі, що знайдуться такі числа  та , що відхилення  многочлена  від функції  будуть задовольняти нерівності



Фактична швидкість збіжності залежить від диференціальних властивостей функції та використовуваного алгоритму заміни точок альтернансу. Відомо, що коли  або  і  не змінює знак при , то граничні точки проміжку  є точками альтернансу. Тому у цьому випадку алгоритм Валле-Пуссена для наближення многочленами невисоких степенів  практично не програє у швидкості порівняно з іншими алгоритмами типу Є.Я. Ремеза.

Зазначимо, що всі перелічені властивості найкращого чебишовського наближення непервної при  функції  многочленом справедливі також і для наближення табличної функції. Більш того, при заміні неперервної функції її значенями в точках  різниця між відповідними відхиленнями при  прямує до нуля.

**1.5 Частинні випадки побудови мінімаксних наближень**

Приклад 1. Знайдемо найкраще абсолютне наближення сталою: . У даному випадку система рівнянь має вигляд

.

Додаючи два рівняння цієї системи, одержимо вираз для .  
Підставивши це значення у перше рівняння системи матимемо вираз для похибки . Очевидно, що точки альтернанту у цьому випадку збігатимуться із точками мінімуму та максимуму функції . Тому  
  
Якщо функція монотонна, то ці значення досягаються у границях проміжку . Тому у цьому випадку .

Приклад 2. Знайдемо найкраще абсолютне наближення прямою:  
. Система рівнянь складається у даному випадку із трьох рівнянь: , .

Віднявши від третього рівняння системи перше, одержуємо вираз для  
. Додавши два перші рівняння системи, одержуємо вираз для

Якщо і не змінює знак, то , а в центральній точці альтернанcу функція похибки має екстремум і Тому . Прирівнюючи два вирази для коефіцієнтуодержуємо трансцендентне рівняння для визначення точки :.

Після визначення цієї точки знаходимо та за формулами:

.

Розкладаючи у виразі для функцію в ряд в околі точки :   
, де маємо

* 1. **Похибка мінімаксного наближення**

Цікаво порівняти максимальну похибку найкращого чебишовського наближення многочленом з іншими наближенням многочленом. Припустимо, що і при . Відомо, що у цьому випадку

.

Нехай така функція наближена відрізком ряду Тейлора з коефіцієнтом в околі точки

де . Очевидно, що при у цьому випадку максимальне значення залишкового члену ряду становить

де . Такою самою формулою визначається похибка при наближенні і ланкою ермітового сплайну непарного степеня. Прилади показують, що використання найкращого чебишовського наближення замість наближення іншими способами суттєво зменшує одержувану при цьому похибку.