0.1 Варіаційні задачі на умовний екстремум

Означення. Якщо на функції, від яких залежить функціонал, крім граничних, накладені ще й інші умови, які називають ***зв'язками***, то такі задачі називаються **варіаційними задачами на умовний екстремум.**
Зв'язки поділяють на такі три види:

- **скінченні (голономні):** $\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = 0$;
- **диференціальні (неголономні):** $\varphi(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots y_n') = 0$;
- **інтегральні (ізопериметричні):** $J[y] = \int_a^b \varphi(x, y, y')dx = l = const.$

Задача Лагранжа

Дослідимо на екстремум функціонал

$$I[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')dx, \tag{1}$$

що залежить від n функцій $y_j(x)$, на які накладено умови (зв'язки)

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0, (i = \overline{1, m}, \quad m < n)$$

і які задовольняють граничні умови

$$y_j(a) = y_{ja}, \quad y_j(b) = y_{jb}, \quad (j = \overline{1, n}).$$

Побудуємо функцію Лагранжа:

$$F = f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n), \tag{2}$$

де λ_i - функції від незалежної змінної x. Умовний екстремум функціонала I досягається на тих самих кривих, на яких реалізується безумовний екстремум функціонала $I^* = \int_a^b F dx = \int_a^b \left(f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i\right) dx$. Для функціонала I^* канонічна система рівнянь Ейлера має вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}\right) = 0, (j = \overline{1, n}). \tag{3}$$

До цих рівнянь додаємо умови зв'язку

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0, (i = \overline{1, m}, \quad m < n) \tag{4}$$

і отримуємо систему $m+n$ рівнянь з $m+n$ невідомими $y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots \lambda_m$. З граничних умов знаходимо значення $2n$ невідомих констант інтегрування.

Приклад 1. Знайти екстремум функціонала

$$I[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} (y_1^2 + y_2^2 - {y_1'}^2 - {y_2'}^2)dx$$

за умови зв'язку $y_1 - y_2 - 2cos(x) = 0$ і граничних умов $y_1(0) = 1$,
$y_2(0) = -1, \quad y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1.$

► Запишемо функцію Лагранжа

$$F = y_1^2 + y_2^2 - {y_1'}^2 - {y_2'}^2 + \lambda(x)(y_1 - y_2 - 2cosx).$$

Знайдемо $\frac{\partial F}{\partial y_1} = 2y_1 + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} = 2y_2 - \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y_1'} = -2y_1', \quad \frac{\partial F}{\partial y_2'} = -2y_1'$. Тоді система (3) матиме вигляд

$$\begin{cases} 2y_1 + \lambda - \frac{d}{dx}\left(-2y_1'\right) = 0 \\ 2y_2 + \lambda - \frac{d}{dx}\left(-2y_2'\right) = 0 \end{cases}$$

У результаті отримуємо систему

$$\begin{cases} 2y_1 + \lambda(x) + 2y_1'' = 0, \\ 2y_2 + \lambda(x) + 2y_2^{''} = 0, \\ y_1 - y_2 - 2cosx = 0, \end{cases}$$

$$y_1(0) = 1, \quad y2(0) = -1, \quad y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1.$$

Додамо перші два рівняння і введемо нову невідому функцію z

$$2(y_1 + y_2)^{''} + 2(y_1 + y_2) = 0, \quad y_1 + y_2 = z.$$

Тоді маємо рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами $z'' + z = 0$, розв'язок якого $z = C_1cosx + C_2sinx$ або $y_1 + y_2 = C_1cosx + C_2sinx$. З граничних умов знаходимо значення сталих інтегрування $C_1 = 0, C_2 = 2$. Отже, $y_1 + y_2 = 2sinx$ і, додавши до нього умову зв'язку $y_1 - y_2 - 2cosx = 0$, остаточно знаходимо екстремаль

$$\begin{cases} y_1 = cosx + sinx, \\ y_2 = sinx - cosx. \end{cases}$$

Тоді $f = y_1^2 + y_2^2 - {y_1'}^2 - {y_2'}^2 = (cosx + sinx)^2 + (sinx - cosx)^2 -$

$$-(-sinx + cosx)^2 - (cosx + sinx)^2 = 0.$$

Оскільки $F''_{y_1'y_1'} = -2 < 0, \begin{vmatrix} F''_{y_1'y_1'} & F''_{y_1'y_2'} \\ F''_{y_2'y_1'} & F''_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, то на екстремалі $\begin{cases} y_1 = cosx + sinx \\ y_2 = sinx - cosx \end{cases}$ функціонал досягає сильного максимуму $I_{max} = 0$. ◄

<u>Ізопериметричні задачі</u>

У вузькому сенсі ізопериметричними називають задачі, в яких необхідно знайти геометричну фігуру максимальної площі при заданому периметрі.

Нехай функції $f(x, y, y')$ і $\varphi(x, y, y')$ мають неперервні частинні похідні другого порядку для $x \in [a, b]$ і будь-яких y, y'. Необхідно серед кривих $y = y(x) \in C^1[a, b]$ визначити ту, яка надає екстремуму функціоналу $I[y] = \int_a^b f(x, y, y')dx$ і задовольняє граничні умови $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ та інтегральне рівняння зв'язку $J[y] = \int_a^b \varphi(x, y, y')dx = l = const$.

Теорема Ейлера. Якщо крива $y = y(x)$, яка задовольняє інтегральне рівняння зв'язку $J[y] = \int_a^b \varphi(x, y, y')dx = l = const$ та граничні умови $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ і не є екстремаллю функціонала $J[y]$, надає екстремуму функціонала $I[y] = \int_a^b f(x, y, y')dx$, то існує така константа λ, що крива $y = y(x)$ є екстремаллю функціонала $I^*[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$, де $F(x, y, y') = f(x, y, y') + \lambda\varphi(x, y, y')$ — функція Лагранжа.
Закон взаємності ізопериметричних задач: Сукупність умовних екстремалей не залежить від того, чи шукати екстремум функціонала $I[y]$ для фіксованого значення функціонала $J[y]$ чи, навпаки, шукати екстремум для фіксованого значення $I[y]$.

Приклад 2. Знайти екстремум функціонала $\int_0^1 {y'}^2 dx$ за граничних умов $y(0) = 0, \quad y(1) = 5$ і обмеження $\int_0^1 xy dx = 1$.
► Запишемо для функції Лагранжа $F = {y'}^2 + \lambda xy$ рівняння Ейлера

$$\lambda x - 2y'' = 0 \Rightarrow y = \frac{\lambda}{12}x^3 + C_1 x + C_2.$$