

## 0.1 Варіаційні задачі на умовний екстремум

**Означення.** Якщо на функції, від яких залежить функціонал, крім граничних, накладені ще й інші умови, які називають **зв'язками**, то такі задачі називаються **варіаційними задачами на умовний екстремум**.

Зв'язки поділяють на такі три види:

- **скінченні (голономні):**  $\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = 0$ ;
- **диференціальні (неголономні):**  $\varphi(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0$ ;
- **інтегральні (ізопериметричні):**  $J[y] = \int_a^b \varphi(x, y, y') dx = l = \text{const.}$

### Задача Лагранжа

Дослідимо на екстремум функціонал

$$I[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx, \quad (1)$$

що залежить від  $n$  функцій  $y_j(x)$ , на які накладено умови (зв'язки)

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad (i = \overline{1, m}, \quad m < n)$$

і які задовольняють граничні умови

$$y_j(a) = y_{ja}, \quad y_j(b) = y_{jb}, \quad (j = \overline{1, n}).$$

Побудуємо функцію Лагранжа:

$$F = f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad (2)$$

де  $\lambda_i$  - функції від незалежної змінної  $x$ . Умовний екстремум функціонала  $I$  досягається на тих самих кривих, на яких реалізується безумовний екстремум функціонала  $I^* = \int_a^b F dx = \int_a^b (f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i) dx$ . Для функціонала  $I^*$  канонічна система рівнянь Ейлера має вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'_j} \right) = 0, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3)$$

До цих рівнянь додаємо умови зв'язку

$$\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad (i = \overline{1, m}, m < n) \quad (4)$$

і отримуємо систему  $m + n$  рівнянь з  $m + n$  невідомими  $y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ . З граничних умов знаходимо значення  $2n$  невідомих констант інтегрування.

**Приклад 1.** Знайти екстремум функціонала

$$I[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} (y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2) dx$$

за умови зв'язку  $y_1 - y_2 - 2\cos(x) = 0$  і граничних умов  $y_1(0) = 1$ ,  $y_2(0) = -1$ ,  $y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1$ .

Запишемо функцію Лагранжа

$$F = y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2 + \lambda(x)(y_1 - y_2 - 2\cos x).$$

Знайдемо  $\frac{\partial F}{\partial y_1} = 2y_1 + \lambda$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y_2} = 2y_2 - \lambda$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y_1'} = -2y_1'$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y_2'} = -2y_2'$ . Тоді система (3) матиме вигляд

$$\begin{cases} 2y_1 + \lambda - \frac{d}{dx}(-2y_1') = 0 \\ 2y_2 + \lambda - \frac{d}{dx}(-2y_2') = 0 \end{cases}$$

У результаті отримуємо систему

$$\begin{cases} 2y_1 + \lambda(x) + 2y_1'' = 0, \\ 2y_2 + \lambda(x) + 2y_2'' = 0, \\ y_1 - y_2 - 2\cos x = 0, \end{cases}$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1.$$

Додамо перші два рівняння і введемо нову невідому функцію  $z$

$$2(y_1 + y_2)'' + 2(y_1 + y_2) = 0, \quad y_1 + y_2 = z.$$

Тоді маємо рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами  $z'' + z = 0$ , розв'язок якого  $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  або  $y_1 + y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . З граничних умов знаходимо значення сталих інтегрування  $C_1 = 0, C_2 = 2$ . Отже,  $y_1 + y_2 = 2 \sin x$  і, додавши до нього умову зв'язку  $y_1 - y_2 - 2 \cos x = 0$ , остаточно знаходимо екстремаль

$$\begin{cases} y_1 = \cos x + \sin x, \\ y_2 = \sin x - \cos x. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } f = y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2 &= (\cos x + \sin x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 - \\ &- (-\sin x + \cos x)^2 - (\cos x + \sin x)^2 = 0. \end{aligned}$$

Оскільки  $F''_{y_1' y_1'} = -2 < 0$ ,  $\begin{vmatrix} F''_{y_1' y_1'} & F''_{y_1' y_2'} \\ F''_{y_2' y_1'} & F''_{y_2' y_2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ , то на екстремалі  $\begin{cases} y_1 = \cos x + \sin x \\ y_2 = \sin x - \cos x \end{cases}$  функціонал досягає сильного максимуму  $I_{max} = 0$ .

### Ізопериметричні задачі

У вузькому сенсі ізопериметричними називають задачі, в яких необхідно знайти геометричну фігуру максимальної площі при заданому периметрі.

Нехай функції  $f(x, y, y')$  і  $\varphi(x, y, y')$  мають неперервні частинні похідні другого порядку для  $x \in [a, b]$  і будь-яких  $y, y'$ . Необхідно серед кривих  $y = y(x) \in C^1[a, b]$  визначити ту, яка надає екстремуму функціоналу  $I[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$  і задовольняє граничні умови  $y(a) = y_a, y(b) = y_b$  та інтегральне рівняння зв'язку  $J[y] = \int_a^b \varphi(x, y, y') dx = l = const$ .

**Теорема Ейлера.** Якщо крива  $y = y(x)$ , яка задовольняє інтегральне рівняння зв'язку  $J[y] = \int_a^b \varphi(x, y, y') dx = l = \text{const}$  та граничні умови  $y(a) = y_a$ ,  $y(b) = y_b$  і не є екстремаллю функціонала  $J[y]$ , надає екстремуму функціонала  $I[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$ , то існує така константа  $\lambda$ , що крива  $y = y(x)$  є екстремаллю функціонала  $I^*[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ , де  $F(x, y, y') = f(x, y, y') + \lambda \varphi(x, y, y')$  — функція Лагранжа.

**Закон взаємності ізопериметричних задач:** Сукупність умовних екстремалей не залежить від того, чи шукати екстремум функціонала  $I[y]$  для фіксованого значення функціонала  $J[y]$  чи, навпаки, шукати екстремум для фіксованого значення  $I[y]$ .

**Приклад 2.** Знайти екстремум функціонала  $\int_0^1 y'^2 dx$  за граничних умов  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 5$  і обмеження  $\int_0^1 xy dx = 1$ .

Запишемо для функції Лагранжа  $F = y'^2 + \lambda xy$  рівняння Ейлера

$$\lambda x - 2y'' = 0 \Rightarrow y = \frac{\lambda}{12} x^3 + C_1 x + C_2.$$