

Міністерство освіти та науки України  
Національний університет “Львівська політехніка”



## **МЕТОДИ УТОЧНЕННЯ КОРЕНІВ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ**

**Інструкція до лабораторної роботи № 2**  
з курсу “Чисельні методи”

для студентів спеціальності  
122 “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”  
спеціалізації “Системна інженерія (інтернет речей)”

Затверджено  
на засіданні кафедри  
“Комп’ютеризовані  
системи автоматики”  
Протокол № 1 від 30.08.2017

**Львів 2017**

Методи уточнення коренів нелінійних рівнянь: Інструкція до лабораторної роботи № 2 з курсу “Чисельні методи” для студентів спеціальності 122 “Комп’ютерні науки та інформаційні технології” спеціалізації “Системна інженерія (інтернет речей)”/ Укл.: У.Ю. Дзелендзяк, А.Г. Павельчак – Львів: НУЛП, 2017. – 32 с.

Укладачі: У.Ю. Дзелендзяк, к.т.н., доцент  
А.Г. Павельчак, к.т.н., доцент

Відповідальний за випуск:  
А.Й. Наконечний, д.т.н., професор

Рецензент: З.Р. Мичуда, д.т.н., професор

**Мета роботи:** вивчити основні методи уточнення коренів нелінійних рівнянь з одним невідомим.

## 1. Загальні відомості

### 1.1. Постановка задачі.

Задача пошуку коренів нелінійного рівняння з одним невідомим виду

$$f(x)=0 \quad (1.1)$$

досить часто зустрічається на практиці як елементарний крок при розв'язуванні наукових та технічних проблем. На перший погляд вона виглядає достатньо простою, але знаходження її точного розв'язку є можливим лише тоді, коли  $f(x)$  є поліномом степені  $n \leq 4$ . Під знаходженням точного розв'язку мають на увазі певну процедуру обчислення кореня через параметри рівняння (наприклад, для рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ ). Коренем (розв'язком) рівняння (1.1) називають значення  $\bar{x}$ , при якому  $f(\bar{x}) = 0$ .

Корінь  $\bar{x}$  рівняння (1.1) називають простим, якщо  $f'(\bar{x}) \neq 0$ . В іншому випадку (тобто у випадку  $f'(\bar{x}) = 0$ ) корінь  $\bar{x}$  називають кратним. Ціле число  $m$  називають кратністю кореня  $\bar{x}$ , якщо  $f^{(k)}(\bar{x}) = 0$  для  $k = \overline{1, m-1}$  та  $f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$ . У геометричній інтерпретації корінь  $\bar{x}$  відповідає крапці перетину графіку функції  $y = f(x)$  з віссю  $Ox$ . Корінь  $\bar{x}$  є простим, якщо графік перетинає вісь  $Ox$  під ненульовим кутом, та кратним, якщо перетин відбувається під нульовим кутом (наприклад, графік функції дотикається вісі  $Ox$ ). Функція  $f(x)$ , що зображена на рис. 1, має чотири корені. Корені  $\bar{x}_1$  та  $\bar{x}_3$  – прості,  $\bar{x}_2$  та  $\bar{x}_4$  – кратні.

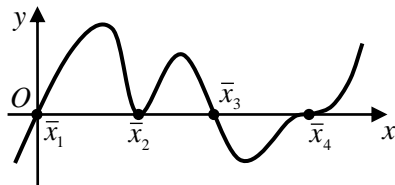


Рис.1.

Наприклад, рівняння  $x^3 - 3x + 2 = 0$

має три корені:  $x_1 = -2$  (простий) та  $x_2 = x_3 = 1$  (двократний); рівняння  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$  має один трикратний корінь, що є рівним одиниці.

Задача пошуку простих коренів є значно простішою (та частіше зустрічається), ніж задача пошуку кратних коренів. І тому, більшість

методів пошуку коренів нелінійного рівняння (1) орієнтовані саме на знаходження простих коренів.

## 1.2. Основні етапи розв'язування.

Розв'язування задачі пошуку кореня нелінійного рівняння здійснюється в три етапи:

- а) локалізація кореня або вибір початкового наближення  $x_0$ ;
- б) ітераційне уточнення кореня;
- в) перевірка умови збіжності ітераційного процесу.

Локалізація кореня. Відрізок  $[a, b]$ , що містить лише один корінь  $\bar{x}$  рівняння (1.1), називають відрізком локалізації кореня  $\bar{x}$ . Мету етапу локалізації вважають досягнутою, якщо для кожного шуканого кореня вдалося визначити відрізок локалізації (його довжину намагаються по можливості зробити мінімальною).

Перед тим як безпосередньо переходити до пошуку відрізків локалізації, доцільно виконати попереднє дослідження задачі на предмет того, чи взагалі існують корені рівняння (1.1), скільки їх і як вони розташовані на числовій вісі.

Універсального способу локалізації коренів немає. Іноді відрізок локалізації є наперед відомим або він визначається з фізичного міркування. У простих випадках добре підходить графічний метод. Для цього будують графік функції  $y = f(x)$  для рівняння (1.1) або представляють це рівняння у вигляді  $\varphi(x) = g(x)$  та будують графіки функцій  $y = \varphi(x)$  і  $y = g(x)$ . Значення дійсних коренів рівняння є абсцисами крапок перетину графіку функції  $y = f(x)$  з віссю  $Ox$  або абсцисами крапок перетину графіків функцій  $y = \varphi(x)$  і  $y = g(x)$ .

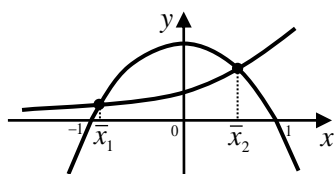


Рис.2.

Наприклад, маємо рівняння  $4(1 - x^2) - e^x = 0$ . Перетворимо його до вигляду  $1 - x^2 = 0,25e^x$  та побудуємо графіки функцій  $y = 1 - x^2$  і  $y = 0,25e^x$  (рис. 2). Абсциси крапок перетину цих графіків є коренями даного рівняння. З рис. 2 видно, що рівняння має два корені  $\bar{x}_1$  та  $\bar{x}_2$ , що розміщені на відрізках  $[-1, 0]$  та  $[0, 1]$ .

Також застосовують побудову таблиць значень функцій у вигляді  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . При такому способі локалізації про

наявність кореня на відрізку  $[x_{i-1}, x_i]$  судять по зміні знаку функції на кінцях відрізка згідно таких теорем математичного аналізу.

**Теорема 1.** *Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  та приймає на кінцях цього відрізка значення різних знаків, тобто  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то всередині цього відрізка  $[a, b]$  існує по крайній мірі один корінь рівняння (1).*

**Теорема 2.** *Якщо функція  $f(x)$  неперервна і монотонна на відрізку  $[a, b]$  та приймає на кінцях відрізка значення різних знаків, то всередині цього відрізка  $[a, b]$  міститься корінь рівняння (1), і цей корінь єдиний.*

**Теорема 3.** *Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  та приймає на кінцях відрізка значення різних знаків, а похідна  $f'(x)$  зберігає постійний знак всередині відрізка, то всередині відрізка існує корінь рівняння (1) і до того ж єдиний.*

Теорема мають зміст лише при умові неперервності функції  $f(x)$ .

Нажаль, корінь парної кратності не вдається локалізувати на основі зміни знаку за допомогою навіть дуже детальної таблиці. Це тому, що в малій околиці такого кореня функція має постійний знак.

Варто зазначити, що для пошуку кореня  $\bar{x}$  рівняння (1.1) не завжди є потреба виконувати усю задачу локалізації. Досить часто замість відрізка локалізації достатньо знайти добре *початкове наближення*  $x^{(0)}$  до кореня  $\bar{x}$ .

Ітераційне уточнення кореня. Ітераційний процес полягає в послідовному уточненні початкового наближення  $x^{(0)}$ . Кожний такий крок називається ітерацією. У результаті ітерацій відшукується послідовність наближених значень кореня  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ . Якщо ці значення зі збільшенням  $k$  прямують до істинного значення кореня  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ , то кажуть, що *ітераційний процес сходиться*.

Ітераційний метод називають однокроковим, якщо для обчислення чергового наближення  $x^{(n+1)}$  використовується лише одне попереднє наближення  $x^{(n)}$ , та  $k$ -кроковим, якщо для обчислення  $x^{(n+1)}$  використовуються  $k$  попередніх наближень  $x^{(n-k+1)}, x^{(n-k+2)}, \dots, x^{(n)}$ . Зазначимо, що для побудови ітераційної послідовності однокроковим методом необхідно задати лише одне початкове наближення  $x^{(0)}$ , в

той чай як при використанні  $k$ -крокового методу –  $k$  початкових наближень  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$ .

## 2. Метод поділу проміжку навпіл (бісекції чи дихотомії)

Нехай нам дано відрізок  $[a, b]$  на якому є локалізовано корінь  $\bar{x}$ , при цьому  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . В якості початкового наближення кореня  $x^{(0)}$  приймаємо середину цього відрізка

$$x^{(0)} = \frac{a+b}{2}. \quad (2.1)$$

Далі досліджуємо значення функції  $f(x)$  на кінцях відрізків  $[a, x^{(0)}]$  та  $[x^{(0)}, b]$ , тобто в крапках  $a, x^{(0)}, b$ . Той з відрізків, на кінцях якого  $f(x)$  приймає значення різних знаків, містить шуканий корінь, і тому його приймаємо в якості нового відрізка  $[a_1, b_1]$ . Другу половину відрізка  $[a, b]$ , на якому знак  $f(x)$  не змінюється, відкидаємо. В якості першого наближення кореня приймаємо середину нового відрізка

$$x^{(1)} = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad (2.2)$$

і т.д. Таким чином,  $k$ -е наближення обчислюється так

$$x^{(k)} = \frac{a_k + b_k}{2}. \quad (2.3)$$

Після кожної ітерації відрізок, на якому розміщений корінь, зменшується вдвоє, а після  $k$  ітерацій він звужується в  $2^k$  разів:

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}. \quad (2.4)$$

Графічна ілюстрація методу зображена на рис. 3.

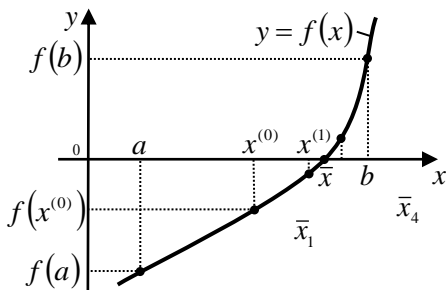


Рис.3.

Якщо наближений розв'язок  $\bar{x}$  необхідно знайти з точністю до деякого заданого малого числа  $\varepsilon$ , тоді має виконуватися така умова

$$b_k - a_k < 2\varepsilon. \quad (2.5)$$

Ітераційний процес можна завершити і тоді, коли значення функції  $f(x)$  після  $k$ -ї ітерації стане по модулю меншим  $\varepsilon$ , тобто

$$|f(x^{(k)})| < \varepsilon. \quad (2.6)$$

## Загальний алгоритм методу поділу проміжку навпіл

$$\begin{aligned} x &= \frac{b+a}{2} \\ fa &= f(a); \quad fx = f(x) \\ \text{якщо } fx \cdot fa &> 0 \rightarrow \{ a = x \} \\ \text{інакше} & \quad \{ b = x \} \end{aligned}$$

**Умова збіжності**  
 $b - a < 2\varepsilon$

### Опис алгоритму

1. На початку алгоритму задаємо значення величин  $a$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$ .
2. Обчислюємо  $x^{(k)}$ , значення функції у координатах  $a_k$ ,  $x^{(k)}$  та згідно умови  $fx \cdot fa > 0$  виконуємо наступне звуження робочого відрізка.
3. Здійснюємо перевірку умови збіжності. Якщо вона не виконується, то процес уточнення повторюємо (п.2).
4. Для перевірки вірності роботи алгоритму підставляємо наше уточнене значення кореня  $\bar{x}$  у функцію  $f(x)$ . Значення функції має бути близьким нулю, у залежності від вибраного значення  $\varepsilon$ .

Нехай нам замість значень відрізка  $[a, b]$  дано лише одну з його координат, наприклад  $a$ , та поставлено завдання самому віднайти відрізок локалізації кореня  $\bar{x}$ . При цьому вважається, що функція  $f(x)$  монотонно прямує до вісі  $Ox$ , однак не зазначається у якому саме напрямку. У такому випадку ми повинні здійснити табуляцію функції  $f(x)$  з вибраним з фізичних міркувань задачі кроком  $h$

$$b = a + h. \quad (2.7)$$

Після цього обчислюємо значення функції у крапках  $a$  та  $b$  і визначаємо напрямок руху вздовж кривої функції. Якщо значення за модулем функції  $f(b)$  є менше за значення за модулем функції  $f(a)$ , то нам необхідно рухатися вперед вздовж вісі  $Ox$  (рис. 4). В іншому випадку ми змушені рухатися назад з від'ємним кроком  $-h$ . На

кожному відрізку ми перевіряємо знак функцій  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Коли ця умова виконується, тоді переходимо до основної частини методу.

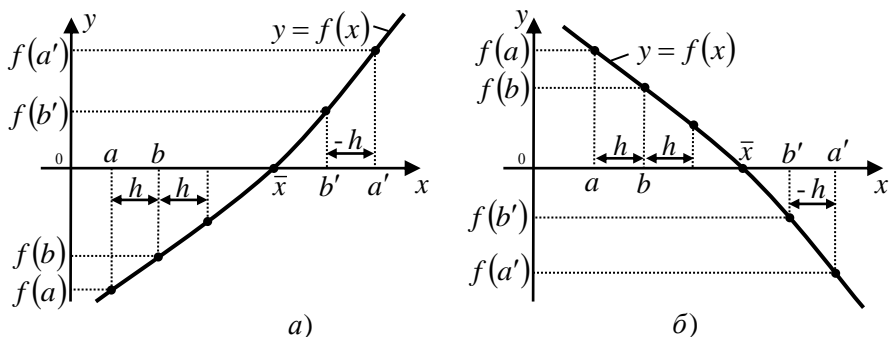


Рис.4.

### Загальний алгоритм методу поділу проміжку навпіл з пошуком ділянки локалізації

**Пошук ділянки локалізації:**

$$b = a + h$$

$$fa = f(a); \quad fb = f(b)$$

**якщо**  $(|fb| > |fa| \text{ та } fa \cdot fb > 0) \rightarrow \{ h = -1 \cdot h \}$

$$b = a + h$$

$$fb = f(b)$$

**поки**  $fa \cdot fb > 0$

$$a = b; \quad b = a + h$$

$$fa = f(a); \quad fb = f(b)$$

**Ітераційний процес:**

$$x = \frac{b + a}{2}$$

$$fa = f(a); \quad fx = f(x)$$

**якщо**  $fx \cdot fa > 0 \rightarrow \{ a = x \}$

**інакше**  $\{ b = x \}$

**Умова збіжності**

$$|fx| < \varepsilon$$



## Опис алгоритму

1. На початку алгоритму задаємо значення величин  $a$ ,  $h$ ,  $\varepsilon$ .
2. Визначаємо напрямок пошуку ділянки локалізації кореня  $\bar{x}$ . Обчислюємо координату  $b$ . У циклі виконуємо пошук ділянки локалізації кореня  $\bar{x}$ .
3. Ітераційний процес методу: обчислюємо  $x^{(k)}$ , значення функції у координатах  $a_k$ ,  $x^{(k)}$  та згідно умови  $fx \cdot fa > 0$  виконуємо наступне звуження робочого відрізка.
4. Здійснюємо перевірку умови збіжності. Якщо вона не виконується, то процес уточнення повторюємо (п.3).
5. Для перевірки вірності роботи алгоритму підставляємо наше уточнене значення кореня  $\bar{x}$  у функцію  $f(x)$ . Значення функції має бути близьким нулю, у залежності від вибраного значення  $\varepsilon$ .

## 3. Метод хорд

У літературі цей метод також зустрічається під назвами методу помилкового положення, методу лінійного інтерполювання та методу пропорційних частин.

Нехай нам дано відрізок  $[a, b]$  на якому є локалізовано корінь  $\bar{x}$ , при цьому  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Ідея методу хорд полягає в тому, що на достатньо малому проміжку  $[a, b]$  дуга кривої  $y = f(x)$  замінюється стягуючою хордою. В якості наближеного значення кореня  $\bar{x}$  приймається крапка перетину хорди з віссю  $Ox$  (рис. 5).

Запишемо рівняння хорди  $AB$

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad (3.1)$$

У крапці перетину з віссю  $Ox$   $y = 0$ , а  $x = x^{(0)}$ . Перепишемо рівняння (3.1)

$$x^{(0)} = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \quad (3.2)$$

Далі обчислюємо значення функції  $f(x^{(0)})$ . Якщо

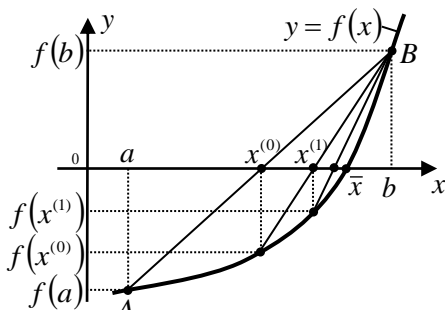


Рис.5.

$f(a) \cdot f(x^{(0)}) < 0$ , тоді ділянку  $[x^{(0)}, b]$  відкидаємо з розгляду, в іншому випадку відкидаємо ділянку  $[a, x^{(0)}]$ . Це реалізовується шляхом присвоєння координаті  $a$  чи  $b$  значення  $x^{(0)}$ . Після цього будуємо нову пряму та шукаємо її перетин з віссю  $Ox$  згідно такого рівняння

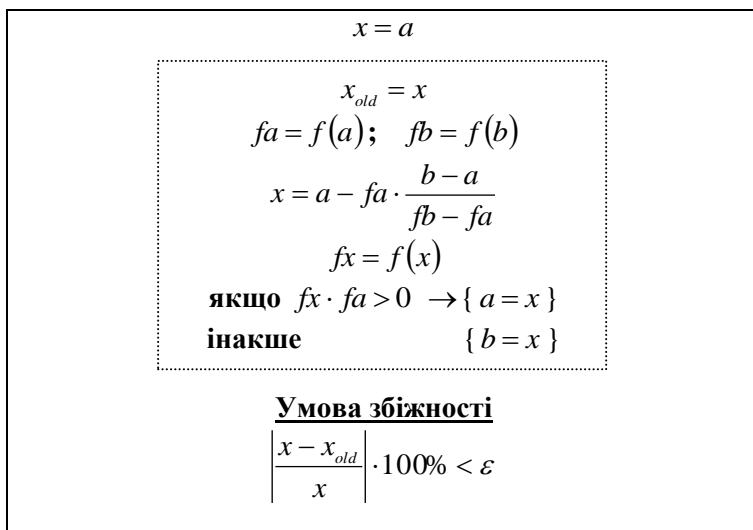
$$x^{(k)} = a_k - f(a_k) \cdot \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \quad (3.3)$$

Ітераційний процес завершується згідно умови близькості двох послідовних наближень

$$|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < \varepsilon \quad (3.4)$$

або згідно умови (2.6).

### Загальний алгоритм методу хорд



### Опис алгоритму

1. На початку алгоритму задаємо значення величин  $a$ ,  $b$  та відносну похибку  $\varepsilon$  у відсотках. При цьому приймаємо як найперше наближення для  $x$ , наприклад, значення координати  $a$ .
2. Обчислюємо значення функції у координатах  $a_k$ ,  $b_k$ , уточнене значення  $x^{(k)}$  і значення функції для нього  $f(x^{(k)})$  та згідно умови  $fx \cdot fa > 0$  виконуємо наступне звууження робочого відрізка.

3. Здійснюємо перевірку умови збіжності. Якщо вона не виконується, то процес уточнення повторюємо (п.2).
4. Для перевірки вірності роботи алгоритму підставляємо наше уточнене значення кореня  $\bar{x}$  у функцію  $f(x)$ . Значення функції має бути близьким нулю, у залежності від вибраного значення  $\varepsilon$ .

Якщо ж нам замість значень відрізка  $[a, b]$  дано лише одну з його координат, наприклад  $a$ , та поставлено завдання самому віднайти відрізок локалізації кореня  $\bar{x}$ , то підхід буде ідентичним тому, що описаний у попередньому методі поділу проміжку навпіл.

### Загальний алгоритм методу хорд з пошуком ділянки локалізації

**Пошук ділянки локалізації:**

$$\begin{aligned}
 & b = a + h \\
 & fa = f(a); \quad fb = f(b) \\
 & \text{якщо } (|fb| > |fa| \text{ та } fa \cdot fb > 0) \rightarrow \{ h = -1 \cdot h \} \\
 & b = a + h \\
 & fb = f(b) \\
 & \text{поки } fa \cdot fb > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a = b; \quad b = a + h \\
 & fa = f(a); \quad fb = f(b)
 \end{aligned}$$

**Ітераційний процес:**

$$\begin{aligned}
 & x = a \\
 & x_{old} = x \\
 & fa = f(a); \quad fb = f(b) \\
 & x = a - fa \cdot \frac{b - a}{fb - fa} \\
 & fx = f(x) \\
 & \text{якщо } fx \cdot fa > 0 \rightarrow \{ a = x \} \\
 & \text{інакше} \quad \{ b = x \}
 \end{aligned}$$

#### Умова збіжності

$$\left| \frac{x - x_{old}}{x} \right| \cdot 100\% < \varepsilon$$

## Опис алгоритму

1. На початку алгоритму задаємо значення величин  $a$ ,  $h$  та відносну похибку  $\varepsilon$  у відсотках.
2. Визначаємо напрямок пошуку ділянки локалізації кореня  $\bar{x}$ . Обчислюємо координату  $b$ . У циклі виконуємо пошук ділянки локалізації кореня  $\bar{x}$ . Приймаємо як найперше наближення для  $x$ , наприклад, значення координати  $a$ .
3. Ітераційний процес методу: обчислюємо значення функції у координатах  $a_k$ ,  $b_k$ , уточнене значення  $x^{(k)}$  і значення функції для нього  $f(x^{(k)})$  та згідно умови  $f(x) \cdot f(a) > 0$  виконуємо наступне звуження робочого відрізка.
4. Здійснюємо перевірку умови збіжності. Якщо вона не виконується, то процес уточнення повторюємо (п.3).
5. Для перевірки вірності роботи алгоритму підставляємо наше уточнене значення кореня  $\bar{x}$  у функцію  $f(x)$ . Значення функції має бути близьким нулю, у залежності від вибраного значення  $\varepsilon$ .

## 4. Метод Ньютона (дотичних)

В основі цього методу лежить розклад у ряд Тейлора нелінійної функції

$$f(x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + \frac{f''(x^{(0)})}{2!}(x - x^{(0)})^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x^{(0)})}{n!}(x - x^{(0)})^n + \dots, \quad (4.1)$$

де  $x = x^{(0)} + h$ .

Якщо взяти, що  $x$  є нашим шуканим коренем, та обмежитися в (4.1) двома членами ряду, то

$$0 \approx f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) \quad (4.2)$$

Виразимо з (4.2)  $x$  та одержимо таким чином перше наближення

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} \quad (4.3)$$

Аналогічно записується й для  $k$ -го наближення кореня  $\bar{x}$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} \quad (4.4)$$

Формула (4.4) відповідає рівнянню дотичної в крапці  $a$

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a), \quad (4.5)$$

де  $a = x^{(k-1)}$ ,  $x = x^{(k)}$  та  $y = 0$ .

У геометричному змісті, на відміну від попереднього методу, тут замість хорди проводиться дотична до кривої  $y = f(x)$  та шукається точка перетину цієї дотичної з віссю абсцис (рис. 6). Тобто, замість інтерполяції за двома значеннями функції в методі Ньютона відбувається екстраполяція (передбачення) за допомогою дотичної до кривої в заданій крапці.

Для закінчення ітераційного процесу можуть бути використані умови (3.4) або (2.6).

Початкове наближення вибирають так, щоб знак функції співпадав зі знаком другої похідної

$$f(x^{(0)}) \cdot f''(x^{(0)}) > 0 \quad (4.6)$$

### Зауваження.

Простота, логічна стійкість та велика збіжність роблять метод Ньютона надзвичайно привабливим. Однак для його практичного застосування слід подолати дві суттєві труднощі. Перша з них полягає в необхідності обчислення похідної  $f'(x)$ . Досить часто буває неможливо віднайти аналітичний вираз для  $f'(x)$ , а визначити наближене значення з високою точністю теж задача не з простих. В інших випадках, навіть коли обчислення похідної здійснити реально, ця операція є трудомісткою. У цих випадках використовують модифікації методу, уникаючи безпосереднього обчислення похідної.

Інша сторона медалі проблеми полягає у тому, що метод Ньютона має лише локальну збіжність. Невдалий вибір початкового наближення  $x^{(0)}$  (рис. 7) може взагалі призвести до розбіжності методу, а іноді й до аварійного зупину (коли на черговій ітерації похідна є близька до нуля).

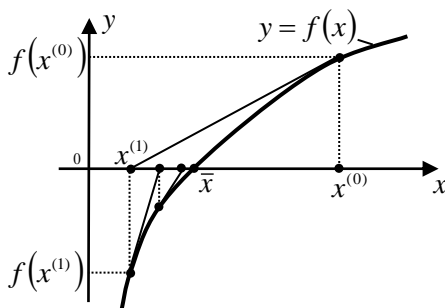


Рис.6.

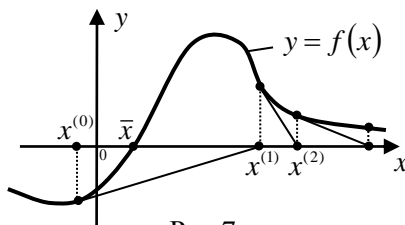


Рис.7.

## Загальний алгоритм методу Ньютона

$$\begin{aligned}x_{old} &= x \\fx &= f(x); \quad dfx = f'(x) \\x &= x - \frac{fx}{dfx}\end{aligned}$$

### Умова збіжності

$$\left| \frac{x - x_{old}}{x} \right| \cdot 100\% < \varepsilon$$

### Опис алгоритму

1. На початку алгоритму задаємо початкове наближення  $x^{(0)}$  та відносну похибку  $\varepsilon$  у відсотках.
2. Обчислюємо значення функції та її похідної в крапці  $x^{(k-1)}$ . Згідно ітераційної формули обчислюємо наступне наближення.
3. Здійснюємо перевірку умови збіжності. Якщо вона не виконується, то процес уточнення повторюємо (п.2).
4. Для перевірки вірності роботи алгоритму підставляємо наше уточнене значення кореня  $\bar{x}$  у функцію  $f(x)$ . Значення функції має бути близьким нулю, у залежності від вибраного значення  $\varepsilon$ .

## 5. Модифікації методу Ньютона

### 5.1. Спрощений метод Ньютона (метод паралельних січних)

Якщо похідна  $f'(x)$  неперервна, то її значення поблизу кореня  $\bar{x}$  майже незмінне. Тому можна спробувати обчислити значення похідної лише в крапці  $x^{(0)}$ , а потім замінити у формулі (4.4) значення  $f'(x^{(k-1)})$  на постійне  $f'(x^{(0)})$ . У результаті отримаємо розрахункову формулу спрощеного методу Ньютона:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(0)})}. \quad (5.1)$$

Геометрична інтерпретація методу (рис. 8) полягає у тому, що у крапці початкового наближення ми будуємо дотичну до графіку функції  $y = f(x)$ , і за перше наближення  $x^{(1)}$  вибираємо крапку

перетину з віссю  $Ox$ . Кожне наступне наближення отримують як крапку перетину з віссю  $Ox$  прямої, паралельної первинній дотичній, що проходить через координати  $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ .

Для закінчення ітераційного процесу можуть бути використані умови (3.4) або (2.6).

Спрощення обчислень у порівнянні з методом Ньютона досягається за рахунок різкого сповільнення швидкості збіжності.

При виборі початкового наближення  $x^{(0)}$  необхідно чітко дотримуватися виконання умови (4.6).

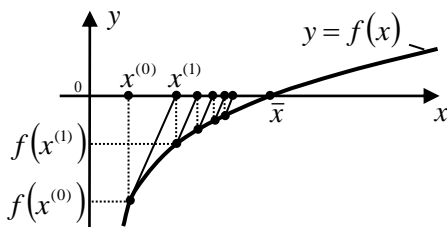


Рис.8.

### Загальний алгоритм спрощеного методу Ньютона

$dfx = f'(x)$ <div style="border: 1px dashed black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <math display="block">x_{old} = x</math> <math display="block">fx = f(x);</math> <math display="block">x = x - \frac{fx}{dfx}</math> </div> <p style="text-align: center;"><b><u>Умова збіжності</u></b></p> $\left  \frac{x - x_{old}}{x} \right  \cdot 100\% < \varepsilon$
---

### Опис алгоритму

1. На початку алгоритму задаємо початкове наближення  $x$  та відносну похибку  $\varepsilon$  у відсотках. Обчислюємо значення похідної функції в крапці  $x^{(0)}$ .
2. Обчислюємо значення функції в крапці  $x^{(k-1)}$  та згідно ітераційної формули вираховуємо наступне наближення.
3. Здійснюємо перевірку умови збіжності. Якщо вона не виконується, то процес уточнення повторюємо (п.2).
4. Для перевірки вірності роботи алгоритму підставляємо наше уточнене значення кореня  $\bar{x}$  у функцію  $f(x)$ . Значення функції має бути близьким нулю, у залежності від вибраного значення  $\varepsilon$ .

## 5.2. Метод січних

Щоб уникнути обчислення похідної в методі Ньютона, її заміняють різницевою формулою, знайденою за двома останніми ітераціями, тобто здійснюється заміна дотичної січноїю

$$f'(x^{(k-1)}) \approx \frac{f(x^{(k-2)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k-2)} - x^{(k-1)}}. \quad (5.2)$$

У результаті замість ітераційної формули (4.4) отримаємо таку

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{\frac{f(x^{(k-2)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k-2)} - x^{(k-1)}}} \quad (5.3)$$

Зазначимо, що зводити формулу (5.3) до спільного знаменника не варто, оскільки збільшиться втрата точності в розрахунках.

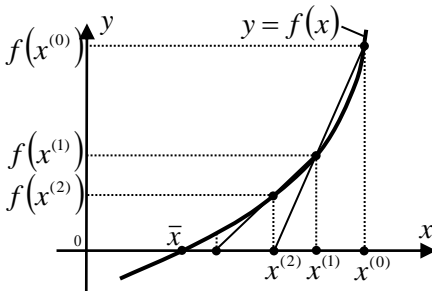


Рис.9.

Забуваємо, що метод січних двокроковий, так як для знаходження чергового наближення  $x^{(k)}$  потрібно знати значення двох попередніх наближень  $x^{(k-1)}$  та  $x^{(k-2)}$ , а для того, щоб почати обчислення, потрібно задати два початкових наближення  $x^{(0)}$  та  $x^{(1)}$ . На рис. 9 наведена геометрична ілюстрація методу. Чергове наближення  $x^{(k)}$  отримують тут як абсцису крапок перетину з віссю  $Ox$  січної, що проходить через крапки з координатами  $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$  та  $(x^{(k-2)}, f(x^{(k-2)}))$ .

Для закінчення ітераційного процесу можуть бути використані умови (3.4) або (2.6).

### Зуваження.

Варто зазначити, що метод січних, як і метод Ньютона (рис. 7), володіє тільки локальною збіжністю. Метод січних вимагає вибору двох близьких до  $\bar{x}$  (в загальному випадку – дуже близьких) початкових наближень  $x^{(0)}$  та  $x^{(1)}$ . Якщо ці наближення вибрані невдало, тоді метод січних розбігається (рис. 10).

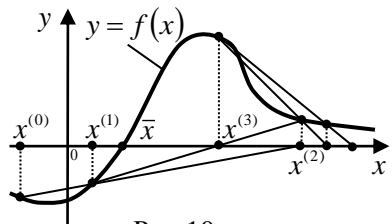


Рис.10.



## Загальний алгоритм методу січних

$$\begin{aligned}x_{older} &= x_{old}; & x_{old} &= x \\fx_{older} &= f(x_{older}); & fx &= f(x) \\x &= x - \frac{fx}{\frac{fx_{older} - fx}{x_{older} - x}}\end{aligned}$$

### Умова збіжності

$$\left| \frac{x - x_{old}}{x} \right| \cdot 100\% < \varepsilon$$

### Опис алгоритму

1. На початку алгоритму задаємо початкові наближення  $x_{old} = x^{(0)}$ ,  $x = x^{(1)}$  та відносну похибку  $\varepsilon$  у відсотках.
2. Обчислюємо значення функції в крапках  $x^{(k-2)}$  та  $x^{(k-1)}$ . Згідно ітераційної формули обчислюємо наступне наближення.
3. Здійснюємо перевірку умови збіжності. Якщо вона не виконується, то процес уточнення повторюємо (п.2).
4. Для перевірки вірності роботи алгоритму підставляємо наше уточнене значення кореня  $\bar{x}$  у функцію  $f(x)$ . Значення функції має бути близьким нулю, у залежності від вибраного значення  $\varepsilon$ .

### 5.3. Комбінований метод хорд та дотичних

Методи хорд та дотичних (Ньютона) дають наближення шуканого кореня з різних сторін. Тому часто їх поєднують разом, і наближення кореня відбувається швидше.

Якщо  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ , то метод хорд дає наближення кореня  $\bar{x}$  з недостатчею, а метод дотичних – з надлишком (рис. 11).

Якщо ж  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ , то методом хорд отримуємо наближення кореня  $\bar{x}$  з надлишком, а методом дотичних – з недостатчею (рис. 12).

Однак у всіх випадках шуканий корінь знаходиться між наближеними коренями, отриманими по методу хорд та методу дотичних.

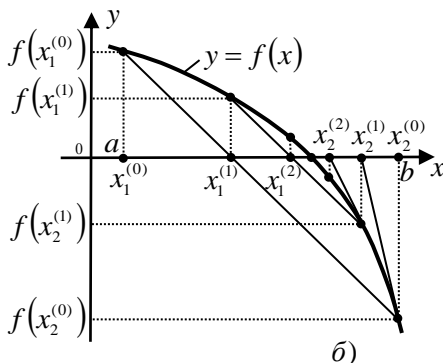
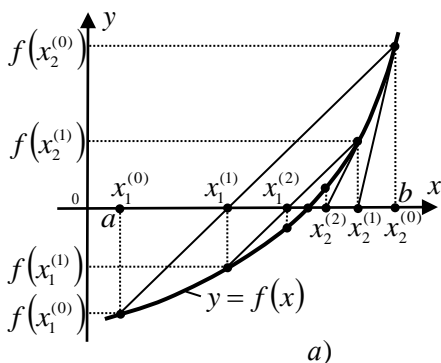


Рис.11.

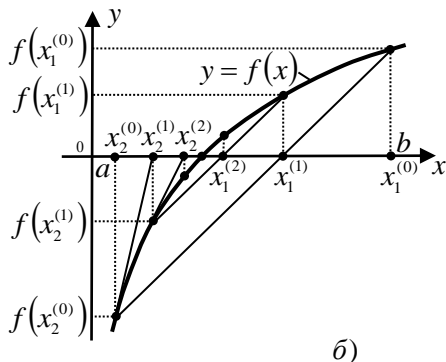
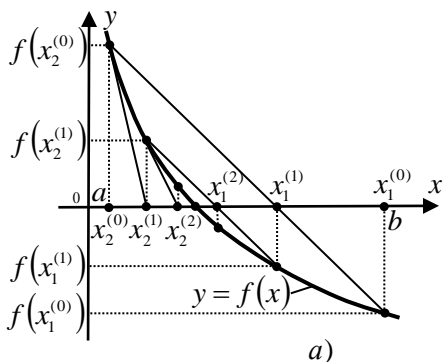


Рис.12.

Домовимся, що  $x_1$  відповідатиме наближеним значенням кореня  $\bar{x}$ , отриманим методом хорд, а  $x_2$  – методом дотичних.

Обчислення ведуться в такому порядку. Якщо  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$  (рис.11), то зі сторони кінця  $a$  знаходяться наближені значення кореня  $\bar{x}$ , отримані за методом хорд, а зі сторони кінця  $b$  – значення, отримані за методом дотичних, і тоді

$$x_1^{(1)} = a - f(a) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)}, \quad x_2^{(1)} = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad (5.4)$$

де  $x_2^{(0)} = b$ .

Коли ж  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$  (рис. 12), то зі сторони кінця  $a$  знаходяться наближені значення кореня  $\bar{x}$ , отримані за методом дотичних, а зі сторони кінця  $b$  – значення, отримані за методом хорд. Тоді

$$x_2^{(1)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad x_1^{(1)} = a - f(a) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)}, \quad (5.5)$$

де  $x_2^{(0)} = a$ .

Після  $k$ -го уточнення проміжок  $[a, b]$  у першому випадку звужується до  $[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}]$  та у другому – до  $[x_2^{(k)}, x_1^{(k)}]$ . Згідно формул (5.4) та (5.5) видно, що для методу хорд вирази в обох випадках є однаковими. Для методу дотичних як попереднє уточнення вибирається  $b$ , коли  $f(x_1) \cdot f(a) > 0$ , та  $a$  у протилежному випадку.

Ітераційний процес завершують згідно умови близькості двох наближень

$$|x_1^{(k)} - x_2^{(k)}| < \varepsilon \quad (5.6)$$

Кінцеве значення шуканого кореня дорівнює  $x = (x_1 + x_2)/2$ .

### Загальний алгоритм комбінованого методу хорд та дотичних

$$fa = f(a); \quad fb = f(b)$$

$$x_1 = a - fa \cdot \frac{b-a}{fb-fa}$$

$$fx_1 = f(x_1)$$

**якщо**  $fx_1 \cdot fa > 0 \rightarrow \{ a = x_1; \quad x_2 = b \}$

**інакше**  $\{ b = x_1; \quad x_2 = a \}$

$$fx_2 = f(x_2); \quad dfx_2 = f'(x_2)$$

$$x_2 = x_2 - \frac{fx_2}{dfx_2}$$

**якщо**  $a = x_1 \rightarrow \{ b = x_2 \}$

**інакше**  $\{ a = x_2 \}$

**Умова збіжності**

$$\left| \frac{x_1 - x_2}{x_1} \right| \cdot 100\% < \varepsilon$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

## Опис алгоритму

1. На початку алгоритму задаємо значення величин  $a$ ,  $b$  та відносну похибку  $\varepsilon$  у відсотках.
2. Обчислюємо значення функції в координатах  $a_k$ ,  $b_k$ , уточнене значення  $x_1^{(k)}$  за формулою хорд та значення функції для нього  $f(x_1^{(k)})$ . Згідно умови  $fx_1 \cdot fa > 0$  виконуємо наступне звуження робочого відрізка з одного кінця та визначаємо попереднє наближення для методу дотичних.
3. Обчислюємо значення функції та її похідної в крапці  $x_2^{(k-1)}$ . Згідно ітераційної формули методу Ньютона обчислюємо наступне наближення. Виконуємо звуження робочого відрізка з протилежного кінця до п.2.
4. Здійснюємо перевірку умови збіжності. Якщо вона не виконується, то процес уточнення повторюємо (п.2-3).
5. Обчислюємо кінцеве значення шуканого кореня  $\bar{x}$ .
6. Для перевірки вірності роботи алгоритму підставляємо наше уточнене значення кореня  $\bar{x}$  у функцію  $f(x)$ . Значення функції має бути близьким нулю, у залежності від вибраного значення  $\varepsilon$ .

Якщо в попередньому алгоритмі обчислення починали навпаки з методу Ньютона (рис. 13) та використовувати звужений вже ним проміжок  $[a, b]$ , то процес уточнення кореня пришвидшується. Однак при цьому слід чітко визначити з якого кінця проміжку  $[a, b]$  метод Ньютона має стартувати. Для цього необхідне забезпечення умови (4.6), бо в іншому випадку метод може розбігатися.

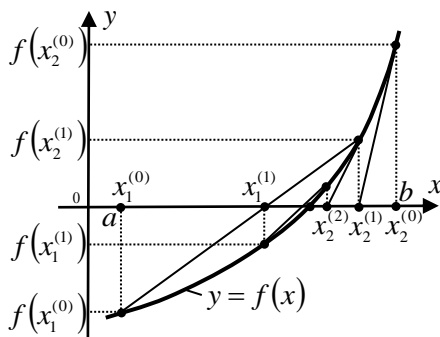


Рис.13.

## 5.4. Метод Стефенсена

Ітераційна формула методу Стефенсена має такий вигляд

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f(x^{(k-1)} + f(x^{(k-1)})) - f(x^{(k-1)})} \cdot f(x^{(k-1)}). \quad (5.7)$$

Можна вважати, що вона отримана в результаті заміни похідної  $f'(x^{(k-1)})$  наближенням

$$f'(x^{(k-1)}) \approx \frac{f(z^{(k-1)}) - f(x^{(k-1)})}{z^{(k-1)} - x^{(k-1)}}, \quad (5.8)$$

яке справедливе при умові  $z^{(k-1)} \approx x^{(k-1)}$  та витікає із визначення похідної

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \quad (5.9)$$

де  $z^{(k-1)} = x^{(k-1)} + f(x^{(k-1)})$ .

Основними перевагами цього методу є те, що він однокроковий, не потребує обчислення похідної  $f'(x)$ , та в той же час, як і метод Ньютона, сходиться квадратично, якщо корінь  $\bar{x}$  – простий, функція  $f(x)$  двічі неперервно диференційована в околиці кореня, а початкове наближення  $x^{(0)}$  вибрано близько до  $\bar{x}$ .

Геометрична ілюстрація методу Стефенсена наведена на рис. 14. Наближення  $x^{(1)}$  отримують як абсцису точки перетину з віссю  $Ox$  січної, що проходить через точки  $M$  та  $N$  з координатами, відповідно,  $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$  та  $(z^{(0)}, f(z^{(0)}))$ , де  $z^{(0)} = x^{(0)} + f(x^{(0)})$ . Значення  $z^{(0)}$

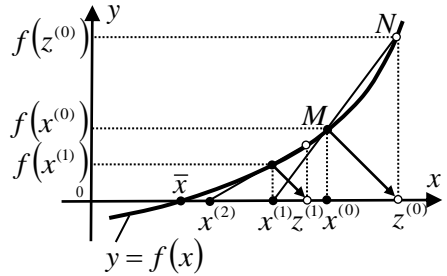


Рис.14.

відповідає абсцисі точки перетину з віссю  $Ox$  прямої  $y = f(x^{(0)}) - (x - x^{(0)})$ , що проходить через точку  $M$  та є паралельна прямій  $y = -x$ . Наступні наближення  $x^{(k)}$  будуються аналогічно.

Для закінчення ітераційного процесу можуть бути використані умови (3.4) або (2.6). Якщо графік різко зростає, що початкову умову необхідно вибрати поблизу кореня  $\bar{x}$ , інакше метод розбігається.

## Загальний алгоритм методу Стеффенсена

$$x_{old} = x$$
$$fx = f(x); \quad z = x + fx; \quad fz = f(z)$$
$$x = x - \frac{fx}{fz - fx} \cdot fx$$

**Умова збіжності**

$$\left| \frac{x - x_{old}}{x} \right| \cdot 100\% < \varepsilon$$

### Опис алгоритму

1. На початку алгоритму задаємо початкове наближення  $x^{(0)}$  та відносну похибку  $\varepsilon$  у відсотках.
2. Обчислюємо значення функцій у крапках  $x^{(k-1)}$  та  $z^{(k-1)}$ . Згідно ітераційної формули обчислюємо наступне наближення.
3. Здійснюємо перевірку умови збіжності. Якщо вона не виконується, то процес уточнення повторюємо (п.2).
4. Для перевірки вірності роботи алгоритму підставляємо наше уточнене значення кореня  $\bar{x}$  у функцію  $f(x)$ . Значення функції має бути близьким нулю, у залежності від вибраного значення  $\varepsilon$ .

## 6. Метод простої ітерації

Для використання цього методу вихідне нелінійне рівняння (1.1) записується в такому вигляді

$$x = g(x). \quad (6.1)$$

Нехай відомо початкове наближення шуканого кореня  $x^{(0)}$ . Підставляючи це значення в праву частину рівняння (6.1), отримаємо нове наближення

$$x^{(1)} = g(x^{(0)}). \quad (6.2)$$

Для  $k$ -ого наближення, відповідно,

$$x^{(k)} = g(x^{(k-1)}). \quad (6.3)$$

Ітераційний процес завершується при виконанні умови (3.4).

Геометрична ілюстрація методу наведена на рис. 15. Як видно з рисунку, шуканий корінь  $\bar{x}$  є абсцисою точки перетину графіків двох функцій:  $y=x$  та  $y=g(x)$ . Візьмемо певне початкове наближення  $x^{(0)}$  та отримаємо точку  $A^0$  на кривій  $y=g(x)$  з координатами  $(x^{(0)}, g(x^{(0)}))$ .

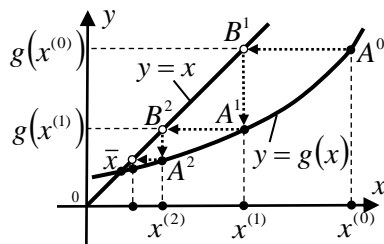


Рис.15

Лінія проєкції цієї точки на вісь  $Oy$  перетинає пряму  $y=x$  в точці  $B^1$ . Проекція  $B^1$  на вісь  $Ox$  дає нам чергове наближення  $x^{(1)}$  ( $x^{(1)} = g(x^{(0)})$ ). Обчислимо  $g(x^{(1)})$  та спроектуємо точку  $A^1$  графіка функції  $y=g(x)$  на вісь  $Oy$ , і тим самим отримаємо точку  $B^2$  на прямій  $y=x$  та її проєкцію  $x^{(2)}$  на вісь  $Ox$  ( $x^{(2)} = g(x^{(1)})$ ) і т.д.

Збіжність методу. На рис. 16 наведено геометричну ілюстрацію поведінки ітераційного процесу в 4-х найпростіших випадках взаємного розміщення прямої  $y=x$  та кривої  $y=g(x)$ .

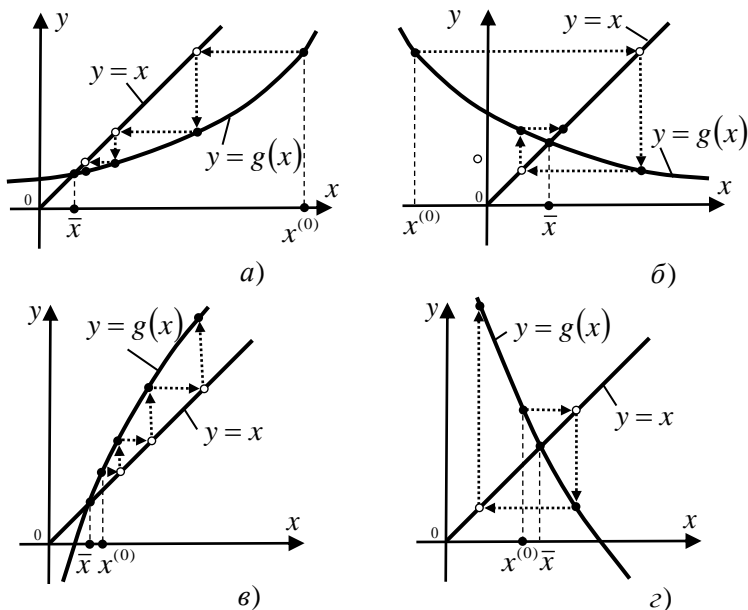


Рис.16

У випадках (а) та (б) метод простої ітерації сходиться при довільному початковому наближенні. І навпаки, у випадках (в) та (г) метод розбігається при будь-якому виборі початкового наближення. Зазначимо, що у випадках (а) та (б)  $|g'(x)| < 1$  (як видно з рисунку, модуль тангенса кута нахилу кривої  $y = g(x)$  до вісі  $Ox$  менший одиниці), а в інших випадках (в) та (г), навпаки,  $|g'(x)| > 1$ . Таким чином, збіжність методу простої ітерації забезпечується при виконанні умови

$$|g'(x)| < 1 \quad (6.4)$$

на відрізку  $[a, b]$  локалізації кореня  $\bar{x}$ .

Приведення рівняння до виду, зручного для ітерацій. Ключовий момент у застосуванні методу простої ітерації – еквівалентне перетворення рівняння (1.1) до вигляду (6.1).

А) Вираження невідомого  $x$  безпосередньо з рівняння  $y = f(x)$  шляхом еквівалентних перетворень.

Наприклад, рівняння  $x^3 - 3x + 1 = 0$  можна представити так: а)  $x = (x^3 + a)/3$ ; б)  $x = x^3 - 2x + 1$ ; в)  $x = \sqrt[3]{3x - 1}$ . Однак, для уточнення кореня на відрізку  $[0,2; 0,5]$  можна використовувати вирази (а), але не (б) та (в) (тут результат розбігається). А от на відрізку  $[1,4; 1,6]$  не можливо застосувати вирази (а) та (б), але збіжним є вираз (в).

Б) Представлення в такому вигляді:

$$x = x + \varphi(x) \cdot f(x), \quad (6.5)$$

де  $\varphi(x)$  – довільна неперервна знакопостійна функція. У найпростішому випадку  $\varphi(x) = \alpha = \text{const} \neq 0$

$$x = x + \alpha \cdot f(x), \quad (6.6)$$

Параметр  $\alpha$  визначається з умови (6.4):

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < \frac{2}{\max_{x \in [a, b]} |f'(x)|}, \quad \text{якщо } f'(x) < 0 \\ -\frac{2}{\max_{x \in [a, b]} |f'(x)|} < \alpha < 0, \quad \text{якщо } f'(x) > 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$



Для визначеності можемо взяти

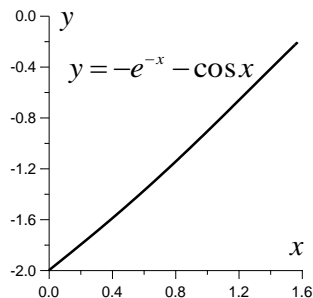
$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\max_{x \in [a, b]} |f'(x)|} & \text{якщо } f'(x) < 0 \\ -\frac{1}{\max_{x \in [a, b]} f'(x)} & \text{якщо } f'(x) > 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Початкове наближення слід вибирати з проміжку  $[a, b]$ .

Наприклад, для функції  $f(x) = e^{-x} - \sin x = 0$  на проміжку  $x \in [0, \pi/2]$  параметр  $\alpha$  обчислюється так

$$\alpha = \frac{1}{\max_{x \in [a, b]} |-e^{-x} - \cos x|} = \frac{1}{|-2|} = 0,5.$$

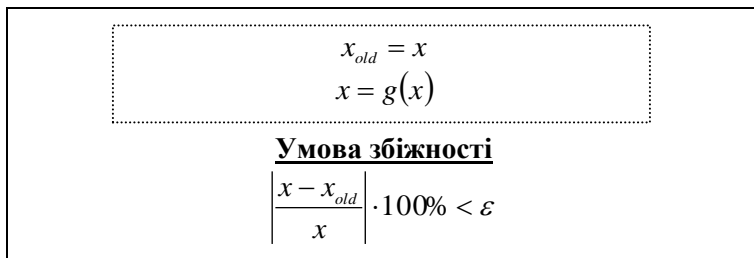
Як видно з рис. 17 максимальне за модулем значення похідної на проміжку  $[a, b]$  приймає значення 2.



Початкове наближення  $x^{(0)} = 0$ .

Рис. 17

## Загальний алгоритм методу простої ітерації



### Опис алгоритму

1. На початку алгоритму задаємо початкове наближення  $x^{(0)}$  та відносну похибку  $\varepsilon$  у відсотках.
2. Згідно ітераційної формули обчислюємо наступне наближення.
3. Здійснюємо перевірку умови збіжності. Якщо вона не виконується, то процес уточнення повторюємо (п.2).
4. Для перевірки вірності роботи алгоритму підставляємо наше уточнене значення кореня  $\bar{x}$  у функцію  $f(x)$ . Значення функції має бути близьким нулю, у залежності від вибраного значення  $\varepsilon$ .

## 7. Порядок виконання роботи

1. Вдома вивчити теоретичні відомості, необхідні для виконання лабораторної роботи.
2. Згідно варіанту (порядкового номера в журналі викладача) завдання (таблиця 1 та 2), вдома написати програму для реалізації алгоритму вказаного методу, а в лабораторії вписати програмний код та налагодити цю програму.
3. Отримані на комп'ютері числові результати представити викладачу.
4. По результатах виконаної роботи оформити звіт та здати його.

Таблиця 1. Завдання до лабораторної роботи

\*нелінійне рівняння вибирається з таблиці 2

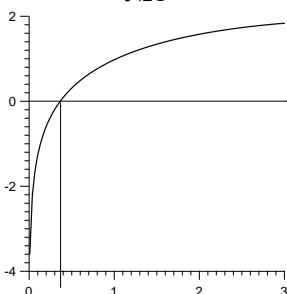
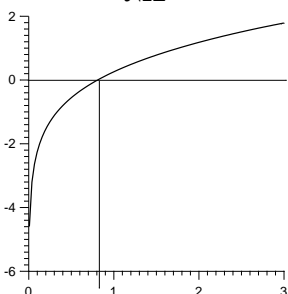
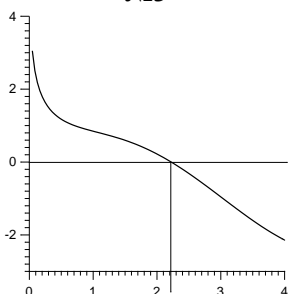
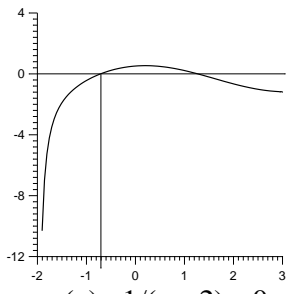
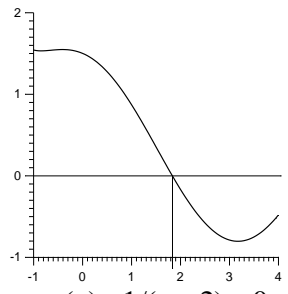
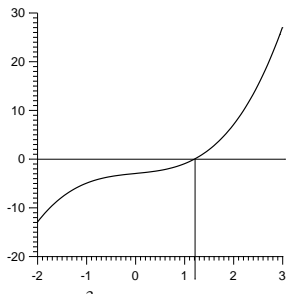
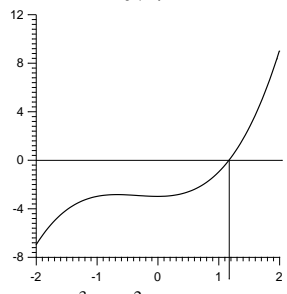
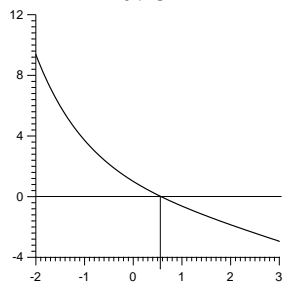
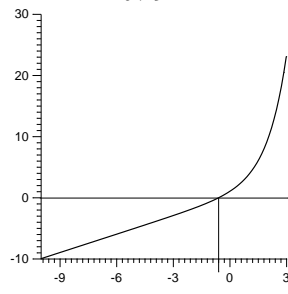
№ п/п	Завдання (метод та проміжок локалізації кореня)		
	Група 1	Група 2	Група 3
1	Метод поділу ділянки навпіл $x \in [0,1; 3]$	Метод простої ітерації $x \in [0,1; 3]$	Метод Стефенсена $x \in [0,1; 3]$
2	Метод поділу ділянки навпіл з пошуком ділянки локалізації $x \in [0,1; 3]$	Метод поділу ділянки навпіл $x \in [0,1; 3]$	Метод простої ітерації $x \in [0,1; 3]$
3	Метод хорд $x \in [0,1; 4]$	Метод поділу ділянки навпіл з пошуком ділянки локалізації $x \in [0,1; 4]$	Метод поділу ділянки навпіл $x \in [0,1; 4]$
4	Метод хорд з пошуком ділянки локалізації $x \in [-1,5; 0]$	Метод хорд $x \in [-1,5; 0]$	Метод поділу ділянки навпіл з пошуком ділянки локалізації $x \in [-1,5; 0]$
5	Метод Ньютона $x \in [0; 3]$	Метод хорд з пошуком ділянки локалізації $x \in [0; 3]$	Метод хорд $x \in [0; 3]$

6	Спрощений метод Ньютона $x \in [-2; 3]$	Метод Ньютона $x \in [-2; 3]$	Метод хорд з пошуком ділянки локалізації $x \in [-2; 3]$
7	Метод січних $x \in [0; 2]$	Спрощений метод Ньютона $x \in [0; 2]$	Метод Ньютона $x \in [0; 2]$
8	Комбінований метод хорд та дотичних $x \in [-2; 3]$	Метод січних $x \in [-2; 3]$	Спрощений метод Ньютона $x \in [-2; 3]$
9	Метод Стефенсена $x \in [-9; 3]$	Комбінований метод хорд та дотичних $x \in [-9; 3]$	Метод січних $x \in [-9; 3]$
10	Метод простої ітерації $x \in [-2,5; -0,5]$	Метод Стефенсена $x \in [-2,5; -0,5]$	Комбінований метод хорд та дотичних $x \in [-2,5; -0,5]$
11	Метод поділу ділянки навпіл $x \in [-2; 0]$	Метод простої ітерації $x \in [-2; 0]$	Метод Стефенсена $x \in [-2; 0]$
12	Метод поділу ділянки навпіл з пошуком ділянки локалізації $x \in [0,1; 16]$	Метод поділу ділянки навпіл $x \in [0,1; 16]$	Метод простої ітерації $x \in [0,1; 16]$
13	Метод хорд $x \in [-3; 2]$	Метод поділу ділянки навпіл з пошуком ділянки локалізації $x \in [-3; 2]$	Метод поділу ділянки навпіл $x \in [-3; 2]$
14	Метод хорд з пошуком ділянки локалізації $x \in [0,1; 3]$	Метод хорд $x \in [0,1; 3]$	Метод поділу ділянки навпіл з пошуком ділянки локалізації $x \in [0,1; 3]$

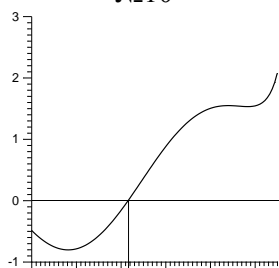
15	Метод Ньютона $x \in [-2,5; 0]$	Метод хорд з пошуком ділянки локалізації $x \in [-2,5; 0]$	Метод хорд $x \in [-2,5; 0]$
16	Спрощений метод Ньютона $x \in [-4; -2,5]$	Метод Ньютона $x \in [-4; -2,5]$	Метод хорд з пошуком ділянки локалізації $x \in [-4; -2,5]$
17	Метод січних $x \in [-4; -2,5]$	Спрощений метод Ньютона $x \in [-4; -2,5]$	Метод Ньютона $x \in [-4; -2,5]$
18	Комбінований метод хорд та дотичних $x \in [-2; 3]$	Метод січних $x \in [-2; 3]$	Спрощений метод Ньютона $x \in [-2; 3]$
19	Метод Стефенсена $x \in [-2; -3]$	Комбінований метод хорд та дотичних $x \in [-2; -3]$	Метод січних $x \in [-2; -3]$
20	Метод простої ітерації $x \in [-3; -1]$	Метод Стефенсена $x \in [-3; -1]$	Комбінований метод хорд та дотичних $x \in [-3; -1]$
21	Метод поділу ділянки навпіл $x \in [-1; 1]$	Метод простої ітерації $x \in [-1; 1]$	Метод Стефенсена $x \in [-1; 1]$
22	Метод поділу ділянки навпіл з пошуком ділянки локалізації $x \in [-2; 0]$	Метод поділу ділянки навпіл $x \in [-2; 0]$	Метод простої ітерації $x \in [-2; 0]$
23	Метод хорд $x \in [-2; 2]$	Метод поділу ділянки навпіл з пошуком ділянки локалізації $x \in [-2; 2]$	Метод поділу ділянки навпіл $x \in [-2; 2]$

24	Метод хорд з пошуком ділянки локалізації $x \in [-3; -1]$	Метод хорд $x \in [-3; -1]$	Метод поділу ділянки навпіл з пошуком ділянки локалізації $x \in [-3; -1]$
25	Метод Ньютона $x \in [1; 3]$	Метод хорд з пошуком ділянки локалізації $x \in [1; 3]$	Метод хорд $x \in [1; 3]$
26	Спрощений метод Ньютона $x \in [0,1; 6]$	Метод Ньютона $x \in [0,1; 6]$	Метод хорд з пошуком ділянки локалізації $x \in [0,1; 6]$
27	Метод січних $x \in [0; 5]$	Спрощений метод Ньютона $x \in [0; 5]$	Метод Ньютона $x \in [0; 5]$
28	Комбінований метод хорд та дотичних $x \in [0; 2]$	Метод січних $x \in [0; 2]$	Спрощений метод Ньютона $x \in [0; 2]$
29	Метод Стефенсена $x \in [0,1; 5]$	Комбінований метод хорд та дотичних $x \in [0,1; 5]$	Метод січних $x \in [0,1; 5]$
30	Метод простої ітерації $x \in [0,2; 2]$	Метод Стефенсена $x \in [0,2; 2]$	Комбінований метод хорд та дотичних $x \in [0,2; 2]$

Таблиця 2. Нелінійні рівняння  $f(x)=0$

<p>№1</p>  $\ln(x) + \cos(x/4) = 0$ $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{x}{4}\right)$	<p>№2</p>  $\ln(x) + \sin(x/4) = 0$ $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{4}\right)$	<p>№3</p>  $\sin(x/4) - \ln(x) = 0$ $f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{4}\right)$
<p>№4</p>  $\cos(x) - 1/(x+2) = 0$ $f'(x) = \frac{1}{(2+x)^2} - \sin(x)$	<p>№5</p>  $\cos(x) + 1/(x+2) = 0$ $f'(x) = \frac{-1}{(2+x)^2} - \sin(x)$	<p>№6</p>  $x^3 + x - 3 = 0$ $f'(x) = 1 + 3x^2$
<p>№7</p>  $x^3 + x^2 - 3 = 0$ $f'(x) = 2x + 3x^2$	<p>№8</p>  $e^{-x} - x = 0$ $f'(x) = -1 - e^{-x}$	<p>№9</p>  $e^x + x = 0$ $f'(x) = 1 + e^x$

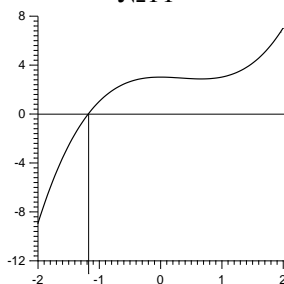
№10



$$\cos(x) - 1/(x-2) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{(-2+x)^2} - \sin(x)$$

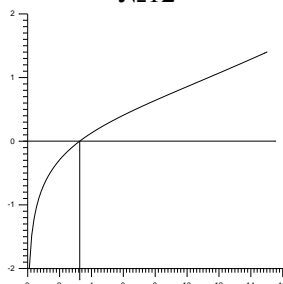
№11



$$x^3 - x^2 + 3 = 0$$

$$f'(x) = -2x + 3x^2$$

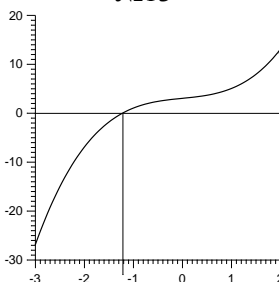
№12



$$\ln(x) + x = 0$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

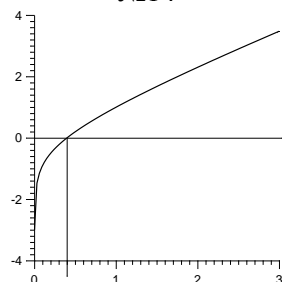
№13



$$x^3 + x + 3 = 0$$

$$f'(x) = 1 + 3x^2$$

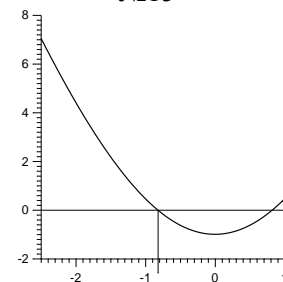
№14



$$\lg(x) + x = 0$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$$

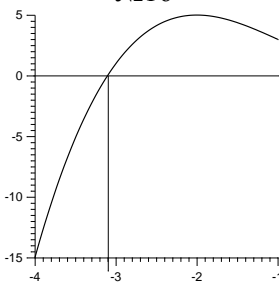
№15



$$x^2 - \cos(x) = 0$$

$$f'(x) = 2x + \sin(x)$$

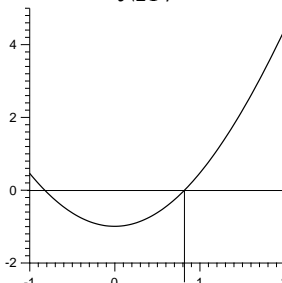
№16



$$x^3 + 3x^2 + 1 = 0$$

$$f'(x) = 6x + 3x^2$$

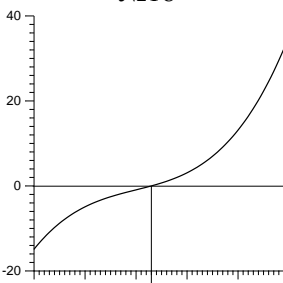
№17



$$x^2 - \cos(x) = 0$$

$$f'(x) = 2x + \sin(x)$$

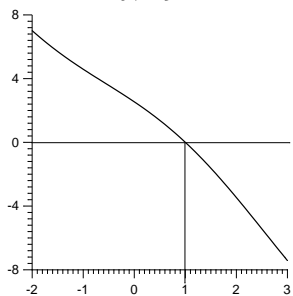
№18



$$x^3 + 3x - 1 = 0$$

$$f'(x) = 6x + 3x^2$$

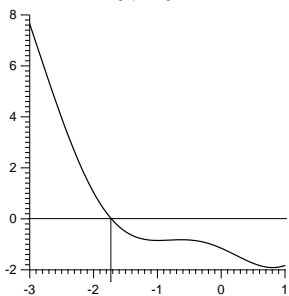
№19



$$\cos(x-1) - 3x + 2 = 0$$

$$f'(x) = -3 + \sin(1-x)$$

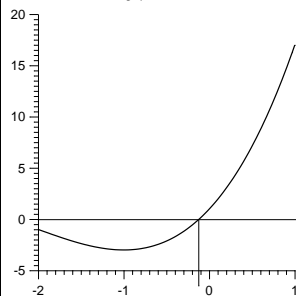
№20



$$x^2 - \sin(2x-1) - 2 = 0$$

$$f'(x) = 2x - 2\cos(1-2x)$$

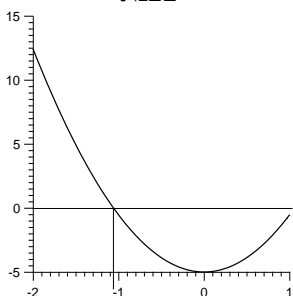
№21



$$x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$$

$$f'(x) = 9 + 12x + 3x^2$$

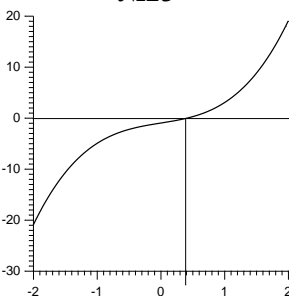
№22



$$4x^2 - \cos(x) - 4 = 0$$

$$f'(x) = 8x + \sin(x)$$

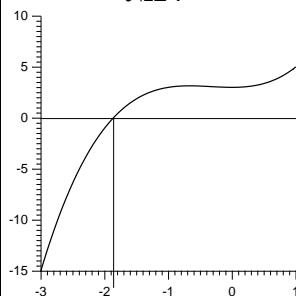
№23



$$2x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$f'(x) = 2 + 6x^2$$

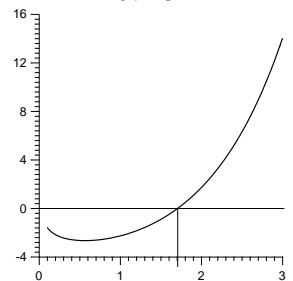
№24



$$x^3 + x^2 + 3 = 0$$

$$f'(x) = 2x + 3x^2$$

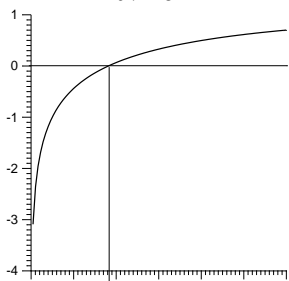
№25



$$e^x - \ln(x) - 5 = 0$$

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

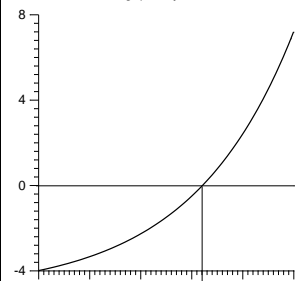
№26



$$\ln(x) - \sqrt{x/5} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{5}\sqrt{x}}$$

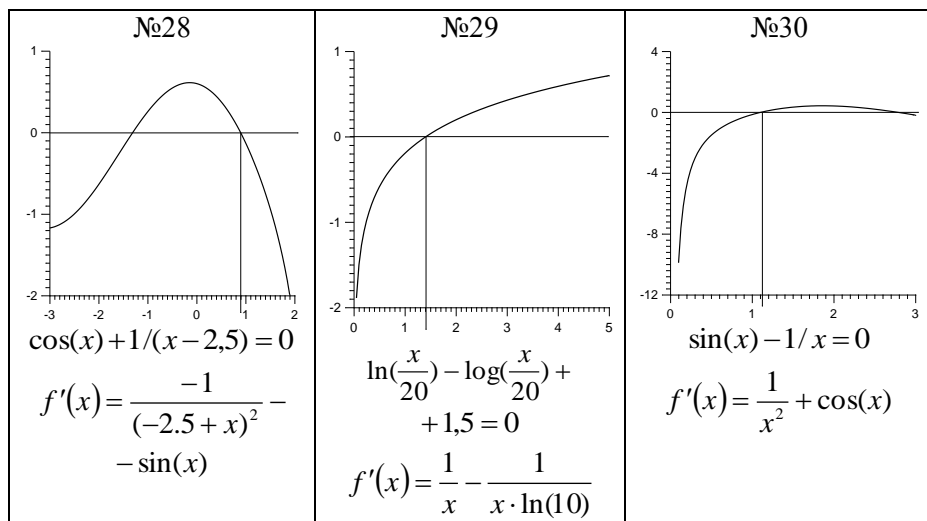
№27



$$\sqrt{e^x} - 5 = 0$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2}$$





## 8. Зміст звіту

1. Номер і назва лабораторної роботи, із зазначенням її виконавця.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Короткі теоретичні відомості, що необхідні для виконання лабораторної роботи.
5. Блок-схема розробленої програми.
6. Список ідентифікаторів констант, змінних, функцій, методів, використаних у програмі, та їх пояснення.
7. Остаточна версія програми.
8. Результати виконання програми.
9. Висновки.

## 9. Контрольні запитання

1. Який корінь нелінійного рівняння називають простим?
2. Який корінь нелінійного рівняння називають кратним?
3. У чому полягає локалізація коренів нелінійного рівняння?
4. Наведіть геометричну ілюстрацію методу поділу проміжку навпіл та поясніть принцип його роботи.
5. Наведіть геометричну ілюстрацію методу хорд та поясніть принцип його роботи.

6. Наведіть геометричну ілюстрацію методу Ньютона та поясніть принцип його роботи.
7. Наведіть геометричну ілюстрацію спрощеного методу Ньютона та поясніть принцип його роботи.
8. Наведіть геометричну ілюстрацію методу січних та поясніть принцип його роботи.
9. Наведіть геометричну ілюстрацію комбінованого методу хорд та дотичних та поясніть принцип його роботи.
10. Наведіть геометричну ілюстрацію методу Стефенса та поясніть принцип його роботи.
11. Наведіть геометричну ілюстрацію методу простої ітерації та поясніть принцип його роботи.
12. У чому полягає суть приведення рівнянь до вигляду придатного для методу простої ітерації.
13. Якою є умова збіжності для вашого досліджуваного методу.

## **10. Список літератури**

1. Практикум з обчислювальної математики. Основні числові методи. Лекції: Навчальний посібник для вузів / І.А.Анджейчак, В.Є.Анохін, І.М.Бойко та ін. – Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів. – 2001. – 150 с.
2. Комп'ютерні методи прикладної математики: Навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів / К.Х.Зеленський, В.М.Ігнатенко, О.П.Коц – К.: Академперіодика. – 2002. – 479 с.
3. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. – М.: Высш.шк. – 1994. – 544 с.

## ЗМІСТ

1. Загальні відомості .....	1
2. Метод поділу проміжку навпіл .....	4
3. Метод хорд .....	7
4. Метод Ньютона .....	10
5. Модифікації методу Ньютона .....	12
5.1. Спрощений метод Ньютона .....	12
5.2. Метод січних .....	14
5.3. Комбінований метод хорд та дотичних .....	15
5.4. Метод Стефенсена .....	19
6. Метод простої ітерації .....	20
7. Порядок виконання роботи .....	24
8. Зміст звіту .....	31
9. Контрольні запитання .....	31
10. Список літератури .....	32

## Навчальне видання

Методи уточнення коренів нелінійних рівнянь: Інструкція до лабораторної роботи № 2 з курсу “Чисельні методи” для студентів спеціальності 122 “Комп’ютерні науки та інформаційні технології” спеціалізації “Системна інженерія (інтернет речей)”.

Укладачі: Дзелендзяк Уляна Юріївна  
Павельчак Андрій Геннадійович