Міністерство освіти та науки України
Національний університет “Львівська політехніка”

ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ ДЛЯ RLC-ЛАНОК

Інструкція до лабораторної роботи № 5
з курсу “Чисельні методи”

для студентів спеціальності
122 “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”
спеціалізації “Системна інженерія (інтернет речей)”

Затверджено
на засіданні кафедри
“Комп’ютеризовані
системи автоматики”
Протокол № 1 від 30.08.2017

Львів 2017

Інтегрування систем диференціальних рівнянь. Розрахунок перехідного процесу для RLC-ланок: Інструкція до лабораторної роботи № 5 з курсу “Чисельні методи” для студентів спеціальності 122 “Комп’ютерні науки та інформаційні технології” спеціалізації “Системна інженерія (інтернет речей)” / Укл.: У.Ю. Дзелендзяк, А.Г. Павельчак,– Львів: НУЛП, 2017. – 12 с.

Укладачі: У.Ю. Дзелендзяк, к.т.н., доцент
А.Г. Павельчак, к.т.н., доцент

Відповідальний за випуск:
А.Й. Наконечний, д.т.н., професор

Рецензент: З.Р. Мичуда, д.т.н., професор

Мета роботи: вивчити основні методи розв'язування систем диференціальних рівнянь першого порядку.

1. Короткі теоретичні відомості

1.1. Явний метод Ейлера

Однокрокові методи призначені для розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку виду

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

Метод Ейлера є найпростішим методом розв'язування задачі Коші. Він дозволяє інтегрувати ДР першого порядку. Точність його не велика. h - настільки мале, що значення функції y мало відрізняється від лінійної функції $tg\alpha$ - тангенс кута нахилу дотичної в t_0

$$x_1 = x_0 + h \cdot \mathrm{tg}\alpha = x_0 + h \cdot x'(t_0) = x_0 + h \cdot f(x_0, t_0)$$

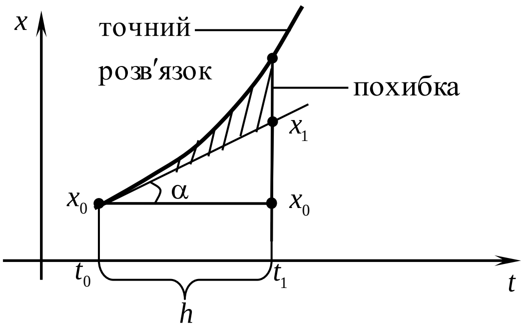


Рис.1.1.

Тобто крива заміняється дотичними. Рух відбувається не по інтегральній кривій, а по відрізках дотичної .

Метод Ейлера базується на розкладі функції x в ряд Тейлора в околі точки t_0

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + hxy(t_0) + \frac{1}{2!}h^2 x''(t_0) + \frac{h^3}{3!}x'''(t_0) + \ldots + \frac{h^p}{p!}x^{(P)}(t_0) + \ldots$$

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + x'(t_i)\Delta t_i + 0\left(\Delta t_i^2\right) \tag{1.2}$$

Якщо h мале, то, члени розкладу, що містять в собі h^2, h^3 і т.д. є малими високих порядків і ними можна знехтувати.

Тоді $x(t_0+h)\approx x(t_0)+hx'(t_0)=x(t_0)+hf(x_0,t_0)$ (1.3)

Похідну $x'(t_0)$ знаходимо з рівняння (1.1), підставивши в нього початкову умову. Таким чином можна знайти наближене значення залежної змінної при малому зміщенні h від початкової точки.

Для системи диференціальних рівнянь явний метод Ейлера записується так

$$\boxed{x_i^{(n+1)}=x_i^{(n)}+h\cdot f_i\left(x_i^{(n)},t^{(n)}\right),} \tag{1.4}$$

де $\dfrac{dx_i}{dt}=f(x_i,t)$ система диференціальних рівнянь.

Похибка методу має порядок h^2, оскільки відкинуті члени, що містять h в другій і вище степенях.

Недолік методу Ейлера – нагромадження похибок, а також збільшення об'ємів обчислень при виборі малого кроку h з метою забезпечення заданої точності.

1.2. Модифікований метод Ейлера

В методі Ейлера на всьому інтервалі h тангенс кута нахилу дотичної приймається незмінним і рівним $x'(t_n)$. Очевидно, що це призводить до похибки, оскільки кути нахилу дотичної в точках t_n та $t_{n+1}=t_n+h$ різні. Точність методу можна суттєво підвищити, якщо покращити апроксимацію похідної.

Це можна зробити, якщо, наприклад, використати середнє значення похідної на початку та в кінці інтервалу. В т.з. модифікованому методі Ейлера (метод Ейлера з перерахунком) спочатку обчислюється значення функції в наступній точці за звичайним методом Ейлера.

$$x*_{n+1}=x_n+hf(x_n,t_n) \tag{1.5}$$

Воно використовується для обчислення наближеного значення похідної в кінці інтервалу $f(x*_{n+1},\quad t_{n+1})$.

Обчисливши середнє між цим значенням похідної та її значенням на початку інтервалу, знайдемо більш точне значення x_{n+1}:

$$\boxed{x_{n+1}=x_n+\frac{1}{2}h\left[f(x_n,t_n)+f(x*_{n+1},t_{n+1})\right]} \tag{1.6}$$

Ілюстрація роботи методу наведена на рисунку 1.2.

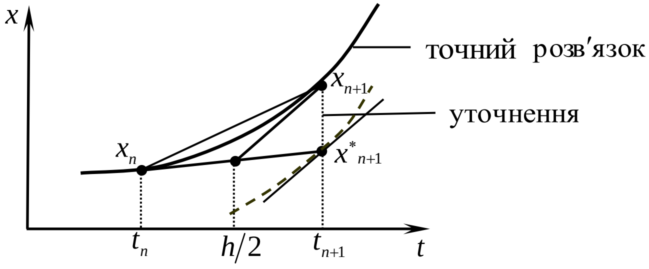


Рис.1.2.

1.3. Неявний метод Ейлера

Формула неявного методу Ейлера для системи диференціальних рівнянь виглядає так

$$\boxed{x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + h \cdot f\left(x_i^{(n+1)}, t^{(n+1)}\right),} \tag{1.7}$$

де $\dfrac{dx_i}{dt} = f\left(x_i, t\right)$ система диференціальних рівнянь.

На відміну від явного методу Ейлера, у неявному методі наша функція безпосередньо залежить від шуканого $x_i^{(n+1)}$, що в свою чергу вимагає розв'язування системи нелінійних рівнянь відносно $x_i^{(n+1)}$.

На прикладі одного диференціального рівняння геометрична ілюстрація методу виглядає так.

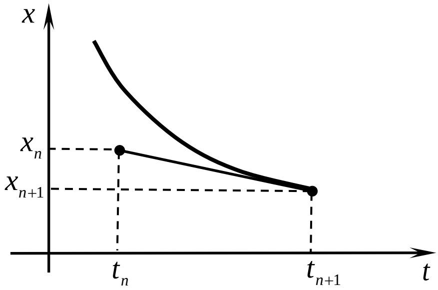


Рис.1.3.

Розв'язок на відрізку $\left[t_n, t_{n+1}\right]$ апроксимується дотичною $x = x_{n+1} + x'\left(t_{n+1}\right) \cdot \left(t - t_{n+1}\right)$, проведеною в крапці $\left(x_{n+1}, t_{n+1}\right)$ до інтегральної кривої, що проходить через цю крапку.

2. Приклад запису системи диференціальних рівнянь для RCL-ланки

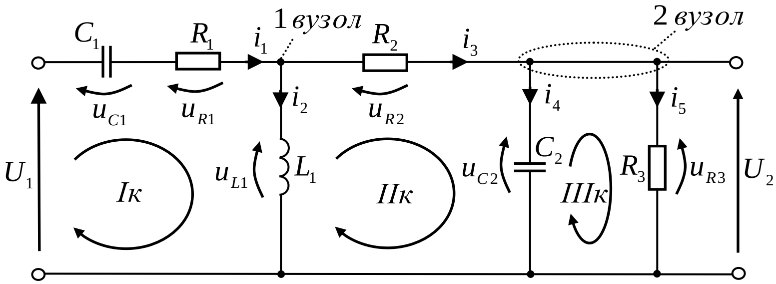


Рис.2.1.

Нам необхідно записати систему диференціальних рівнянь відносно динамічних CL-елементів цієї ланки

$$\begin{cases} \dfrac{du_{C1}}{dt} = \dfrac{i_1}{C_1} \\ \dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{u_{L1}}{L_1} \\ \dfrac{du_{C2}}{dt} = \dfrac{i_4}{C_2} \end{cases} . \qquad (2.1)$$

Для системи (2.1) необхідно виразити i_1, U_{L1} та i_4 через схемні константи та невідомі u_{C1}, i_2 та u_{C2}.

Запишемо рівняння струмів та напруг згідно 1-го та 2-го законів Кірхгофа.

Вузол 1: $i_1 = i_2 + i_3$. (2.2)

Вузол 2: $i_3 = i_4 + i_5$. (2.3)

Контур I: $u_1 - u_{C1} - u_{R1} - u_{L1} = 0$. (2.4)

Контур II: $u_{L1} - u_{R2} - u_{C2} = 0$. (2.5)

Контур III: $u_{C2} - u_{R3} = 0$. (2.6)

Згідно закону Ома запишемо значення напруг для активних опорів

$$U_{R1} = i_1 R_1; \qquad U_{R2} = i_3 R_2; \qquad U_{R3} = i_5 R_3. \tag{2.7}$$

Підставимо значення напруг опорів у рівняння контурів

Контур І: $u_1 - u_{C1} - i_1 R_1 - u_{L1} = 0$. (2.8)

Контур ІІ: $u_{L1} - i_3 R_2 - u_{C2} = 0$. (2.9)

Контур ІІІ: $u_{C2} - i_5 R_3 = 0$. (2.10)

Виразимо з 2-го контуру u_{L1} та підставимо у рівняння 1-го контуру

$$u_1 - u_{C1} - i_1 R_1 - i_3 R_2 - u_{C2} = 0. \tag{2.11}$$

Виразимо з рівняння 1-го вузла $i_3 = i_1 - i_2$ та підставимо у (2.11)

$$u_1 - u_{C1} - i_1 R_1 - i_1 R_2 + i_2 R_2 - u_{C2} = 0. \tag{2.12}$$

Виразимо з (2.12) i_1

$$i_1 = \frac{u_1 - u_{C1} + i_2 R_2 - u_{C2}}{R_1 + R_2}. \tag{2.13}$$

Підставимо (2.13) у рівняння 1-го вузла та знайдемо i_3

$$i_3 = i_1 - i_2 = \frac{u_1 - u_{C1} + i_2 R_2 - u_{C2}}{R_1 + R_2} - i_2. \tag{2.14}$$

Підставимо значення струму i_3 у вираз (2.9) та знайдемо u_{L1}

$$u_{L1} = i_3 R_2 + u_{C2} = \left(\frac{u_1 - u_{C1} + i_2 R_2 - u_{C2}}{R_1 + R_2} - i_2 \right) R_2 + u_{C2}. \tag{2.15}$$

З рівняння 3-го контуру (2.10) виразимо i_5

$$i_5 = \frac{u_{C2}}{R_3}. \tag{2.16}$$

Виразимо з рівняння 2-го вузла струм $i_4 = i_3 - i_5$ та підставимо сюди значення для струмів i_3 та i_5

$$i_4 = i_3 - i_5 = \frac{u_1 - u_{C1} + i_2 R_2 - u_{C2}}{R_1 + R_2} - i_2 - \frac{u_{C2}}{R_3}. \qquad (2.17)$$

Тепер підставляємо у систему (2.1) вирази для i_1, U_{L1} та i_4.

$$\begin{cases} \dfrac{du_{C1}}{dt} = \dfrac{\dfrac{u_1 - u_{C1} + i_2 R_2 - u_{C2}}{R_1 + R_2}}{C_1} \\ \dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{\left(\dfrac{u_1 - u_{C1} + i_2 R_2 - u_{C2}}{R_1 + R_2} - i_2\right) R_2 + u_{C2}}{L_1} \\ \dfrac{du_{C2}}{dt} = \dfrac{\dfrac{u_1 - u_{C1} + i_2 R_2 - u_{C2}}{R_1 + R_2} - i_2 - \dfrac{u_{C2}}{R_3}}{C_2} \end{cases}. \qquad (2.18)$$

Приймемо:

$$x[0] = u_{C1}; \quad x[1] = i_2; \quad x[2] = u_{C2}. \qquad (2.19)$$

Остаточно система диф. рівнянь буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx[0]}{dt} = \dfrac{\dfrac{u_1 - x[0] + x[1] R_2 - x[2]}{R_1 + R_2}}{C_1} \\ \dfrac{dx[1]}{dt} = \dfrac{\left(\dfrac{u_1 - x[0] + x[1] R_2 - x[2]}{R_1 + R_2} - x[1]\right) R_2 + x[2]}{L_1} \\ \dfrac{dx[2]}{dt} = \dfrac{\dfrac{u_1 - x[0] + x[1] R_2 - x[2]}{R_1 + R_2} - x[1] - \dfrac{x[2]}{R_3}}{C_2} \end{cases}. \qquad (2.20)$$

Вихідна напруга u_2, значення якої виводиться на друк, дорівнює

$$u_2 = u_{C2} = x[2]. \qquad (2.21)$$

3. Порядок виконання роботи

1. Вдома вивчити теоретичні відомості, необхідні для виконання лабораторної роботи.
2. Згідно варіанту (порядкового номера в журналі викладача) завдання (таблиця 1 та 2), вдома написати програму для реалізації алгоритму вказаного методу, а в лабораторії вписати програмний код та налагодити цю програму.
3. Отримані на комп'ютері числові результати представити викладачу.
4. По результатах виконаної роботи оформити звіт та здати його.

Таблиця 1. Завдання до лабораторної роботи

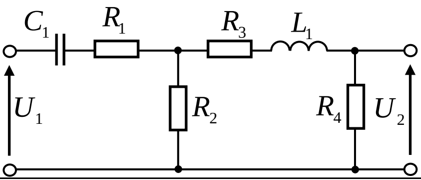
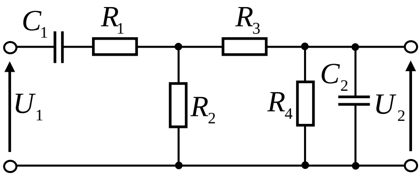
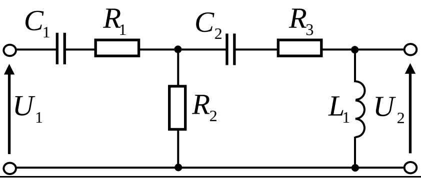
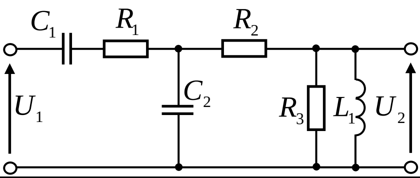
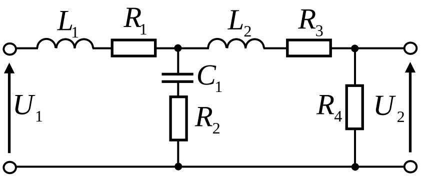
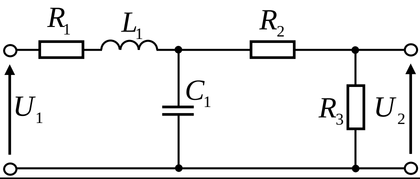
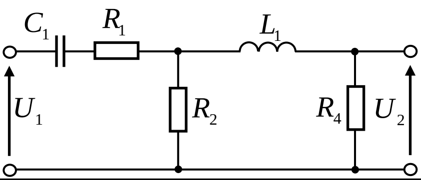
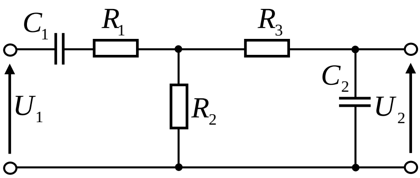
*** Схеми RCL-ланок вибираються з таблиці 2**

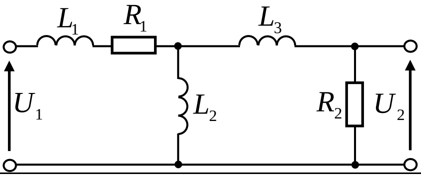
<table>
<tr><td rowspan="2">№ п/п</td><td colspan="3">Завдання
Для вказаної RCL-ланки скласти систему диференціальних рівнянь та виконати розрахунок перехідного процесу ланки зазначеним методом. Згідно отриманих даних побудувати графік перехідного процесу вихідної напруги U_2.
<u>Вхідні дані:</u> $U_1 = U_{\max}\sin(2\pi ft)$, $U_{\max} = 100$ В, $f = 50$ Гц, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 7$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $L_1 = 0{,}01$ Гн, $L_2 = 0{,}02$ Гн, $L_3 = 0{,}015$ Гн, $C_1 = 300\cdot10^{-6}$ Ф, $C_2 = 150\cdot10^{-6}$ Ф, $C_3 = 200\cdot10^{-6}$ Ф, $t_{інтегрування} = 0{,}2$ сек, $h = 0.00001$ (крок інтегрування).</td></tr>
<tr><td>Група 1</td><td>Група 2</td><td>Група 3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Явний метод Ейлера</td><td>Модифікований метод Ейлера</td><td>Неявний метод Ейлера</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Неявний метод Ейлера</td><td>Явний метод Ейлера</td><td>Модифікований метод Ейлера</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Модифікований метод Ейлера</td><td>Неявний метод Ейлера</td><td>Явний метод Ейлера</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Явний метод Ейлера</td><td>Модифікований метод Ейлера</td><td>Неявний метод Ейлера</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Неявний метод Ейлера</td><td>Явний метод Ейлера</td><td>Модифікований метод Ейлера</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Модифікований метод Ейлера</td><td>Неявний метод Ейлера</td><td>Явний метод Ейлера</td></tr>
</table>

7	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера
8	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера
9	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера
10	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера
11	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера
12	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера
13	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера
14	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера
15	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера
16	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера
17	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера
18	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера
19	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера
20	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера
21	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера
22	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера
23	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера
24	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера
25	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера
26	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера

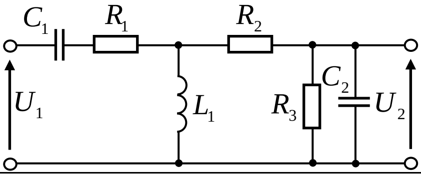
27	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера
28	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера
29	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера
30	Модифікований метод Ейлера	Неявний метод Ейлера	Явний метод Ейлера

Таблиця 2. Схеми RCL-ланок

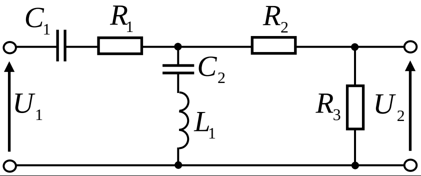
№1 	№2 
№3 	№4 
№5 	№6 
№7 	№8 
№9	№10



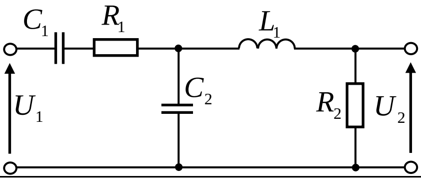
№11



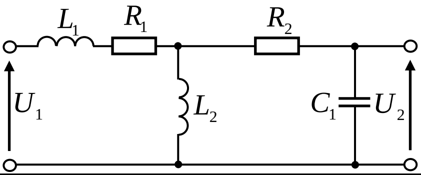
№12



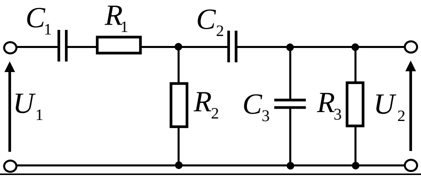
№13



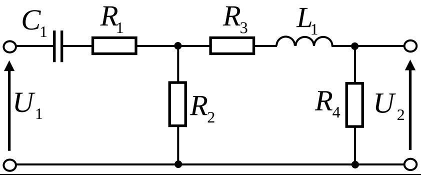
№14



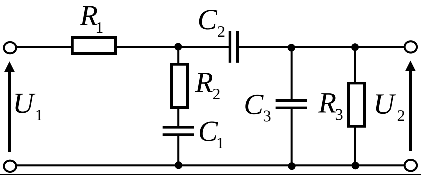
№15



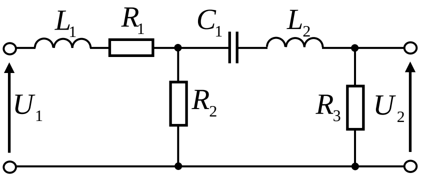
№16



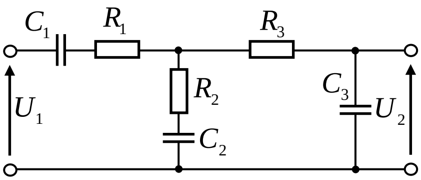
№17



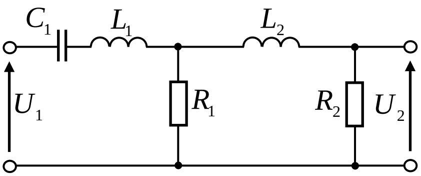
№18



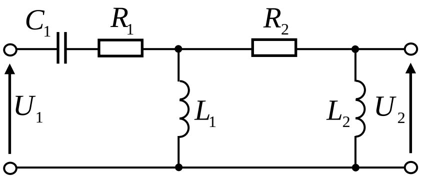
№19



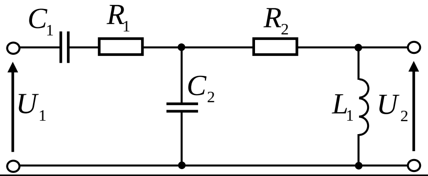
№20

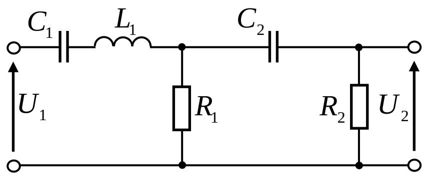


№21

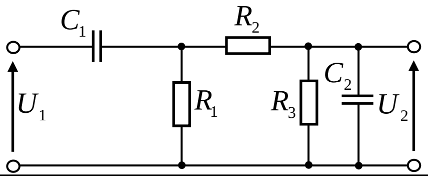


№22

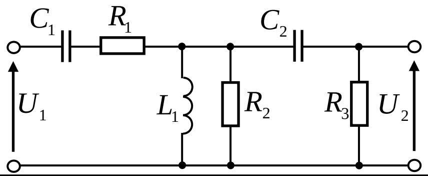




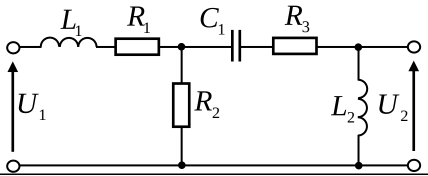
№23



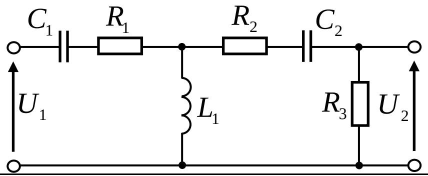
№24



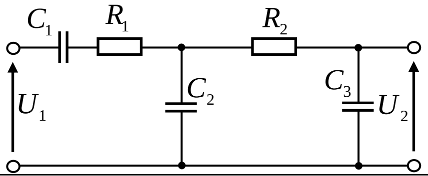
№25



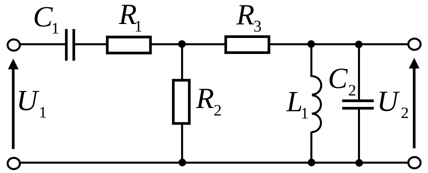
№26



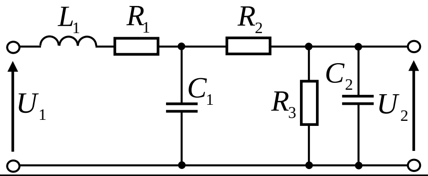
№27



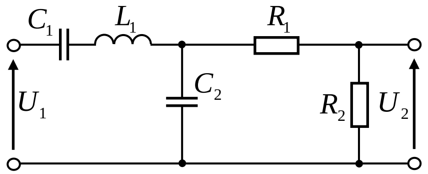
№28



№29



№30



4. Зміст звіту

1. Номер і назва лабораторної роботи, із зазначенням її виконавця.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Короткі теоретичні відомості, що необхідні для виконання лабораторної роботи.
5. Аналітичний вивід системи диференціальних рівнянь RCL-ланки.
6. Блок-схема розробленої програми.

7. Список ідентифікаторів констант, змінних, функцій, методів, використаних у програмі, та їх пояснення.
8. Остаточна версія програми.
9. Результати виконання програми та графік перехідного процесу.
10. Висновки.

5. Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу Коші.
2. В чому полягає суть явного методу Ейлера?
3. Наведіть формулу явного методу Ейлера.
4. В чому полягає суть неявного методу Ейлера?
5. Наведіть формулу неявного методу Ейлера.
6. В чому полягає відмінність між явним і неявним методом Ейлера?
7. Охарактеризуйте, загалом, однокрокові методи.

6. Список літератури

1. Практикум з обчислювальної математики. Основні числові методи. Лекції: Навчальний посібник для вузів / І.А.Анджейчак, В.Є.Анохін, І.М.Бойко та ін. – Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів. – 2001. – 150 с.

2. Комп’ютерні методи прикладної математики: Навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів / К.Х.Зеленський, В.М.Ігнатенко, О.П.Коц – К.: Академперіодика. – 2002. – 479 с.

3. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. – М.: Высш.шк. – 1994. – 544 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Інтегрування систем диференціальних рівнянь. Розрахунок перехідного процесу для RLC-ланок: Інструкція до лабораторної роботи № 5 з курсу “Чисельні методи” для студентів спеціальності 122 “Комп’ютерні науки та інформаційні технології” спеціалізації “Системна інженерія (інтернет речей)”.

Укладачі: Дзелендзяк Уляна Юріївна
Павельчак Андрій Геннадійович