Chapter 23: 条件期望

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

对于习题 23.1 到 23.6, 假设 Y 是 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 正的或可积随机变量, $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子 σ-代数.

Exercise #23. 1. 证明: $|\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}| \le \mathbb{E}\{|Y| \mid \mathcal{G}\}$.

证明. 若 $Y \ge 0$, 则 $|\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}| = \mathbb{E}\{|Y| \mid \mathcal{G}\}$.

若 Y 可积, 根据绝对值函数 $\varphi(x) = |x|$ 是凸函数, 则由 Jensen 不等式 (Thm 23.9) 立刻得出结论. □

Exercise #23. 2. 假设 $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, 其中 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{G}$ 的子 σ-代数. 证明:

$$\mathbb{E}\{\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}|\mathcal{H}\} = \mathbb{E}\{Y|\mathcal{H}\}.$$

证明. 由条件: $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. 首先, $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$ 可测的. 要证对于任意的 $H \in \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, 有

$$\int_H \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}|\mathcal{H}\} dP = \int_H \mathbb{E}\{Y|\mathcal{H}\} dP \overset{by\,def}{=} \int_H Y dP.$$

而左边的定义是 $\forall H \in \mathcal{H}$,

$$\int_H \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}|\mathcal{H}\} dP = \int_H \mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\} dP.$$

而 $H \in \mathcal{G}$,

$$\int_H \mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\} dP = \int_H Y dP.$$

显然. □

Exercise #23. 3. 证明: $\mathbb{E}\{Y \mid Y\} = Y \;\; a.s.$

证明. 由定义, 显然. □

Exercise #23. 4. 证明若 $|Y| \le c \;\; a.s.$ 则 $\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\} \le c \;\; a.s.$

证明. 根据引理 23.1, 定理 23.4, 显然. □

Exercise #23. 5. *若 $Y=\alpha$ a.s., 其中 α 是常数, 证明: $\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}=\alpha$ a.s.*

证明. 根据定义, 只需验证, $\forall G\in\mathcal{G}$,

$$\int_G \mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}dP=\int_G \alpha dP.$$

得证. □

Exercise #23. 6. *若 Y 是正的, 证明 $\{\mathbb{E}\{Y\mid\mathcal{G}\}=0\}\subset\{Y=0\}$, 以及 $\{Y=+\infty\}\subset\{\mathbb{E}\{Y\mid\mathcal{G}\}=+\infty\}$ a.s.*

证明. 若不然, 根据 $Y\geq 0$

$$P(Y>0,\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}=0)\neq 0.$$

而根据概率的连续性,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(Y\geq\frac{1}{n},\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}=0\}\right)=P(Y>0,\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}=0\})\neq 0.$$

于是, 存在充分大的 N 使得当 $n>N$ 时,

$$P\left(Y\geq\frac{1}{n},\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}=0\}\right)>0.$$

根据 $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ 的定义, $\forall G\in\mathcal{G}$,

$$\langle G,\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}\rangle=\langle G,Y\rangle.$$

取 $G=\mathbb{I}\{\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})=0\}$, 则

$$\langle G,\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}\rangle=0,\quad (\text{根据运算})$$

对于 $\langle G,Y\rangle,\forall n>0$,

$$0=\langle\mathbb{I}\{\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})=0\},Y\rangle\geq\langle\mathbb{I}\{\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})=0\},Y\mathbb{I}_{\{Y\geq 1/n\}}\rangle\geq\langle\mathbb{I}\{\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})=0\},\frac{1}{n}\rangle=\frac{1}{n}P(Y\geq 1/n,\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})=0).$$

矛盾! 所以 $\{\mathbb{E}\{Y\mid\mathcal{G}\}=0\}\subset\{Y=0\}$ a.s.

□

Exercise #23. 7. *设 X,Y 是独立的, 设 f 是 Borel 的使得 $f(X,Y)\in L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$. 令*

$$g(x)=\begin{cases}\mathbb{E}\{f(x,Y)\} & \text{if } |\mathbb{E}\{f(x,Y)\}|<\infty,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

证明: $g(X)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的 Borel 函数满足

$$\mathbb{E}\{f(X,Y)\mid X\}=g(X).$$

证明.

$$g^{-1}(B)=\Big\{\{x\in\mathbb{R}:\mathbb{E}\{f(x,Y)\}\in B\},\quad \text{if } 0\notin B,$$

根据 Fubini 定理,

2. 用定理 23.2, 23.6

$$\mathbb{E}\{f(X,Y)\mid X\}=\mathbb{E}\{\mathbb{E}\{f(X,Y)\mid X,Y\}\mid X\}$$

□

Exercise #23. 8. 设 Y 是 $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ 上的随机变量, 假设 $\mathbb{E}\{Y^2\mid X\}=X^2$ 以及 $\mathbb{E}\{Y\mid X\}=X$. 证明 $Y=X$ *a.s.*

Exercise #23. 9. 设 Y 是指数分布随机变量满足 $P(Y>t)=e^{-t},t>0$. 计算 $\mathbb{E}\{Y\mid Y\wedge t\}$, 其中 $Y\wedge t=\min(t,Y)$.

Exercise #23. 10 (Chebyshev 不等式)**.** 证明对于 $X\in L^2$, $a>0, P(|X|\geq a\mid\mathcal{G})\leq\dfrac{\mathbb{E}\{X^2\mid\mathcal{G}\}}{a^2}$. 其中 $P(A\mid\mathcal{G})=\mathbb{E}\{\mathbb{I}_A\mid\mathcal{G}\}$.

Exercise #23. 11 (Cauchy-Schwarz 不等式)**.** 对于 $X,Y\in L^2$, 证明:

$$(\mathbb{E}\{XY|\mathcal{G}\})^2\leq\mathbb{E}\{X^2|\mathcal{G}\}\mathbb{E}\{Y^2|\mathcal{G}\}.$$

Exercise #23. 12. 设 $X\in L^2$. 证明

$$\mathbb{E}\{(X-\mathbb{E}\{X|\mathcal{G}\})^2\}\leq\mathbb{E}\{(X-\mathbb{E}\{X\})^2\}.$$

Exercise #23. 13. 设 $p\geq 1,r\geq p$. 证明: 对于关于一个概率测度的期望来说 $L^p\supset L^r$.

Exercise #23. 14. 设 Z 是定义在 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量, 其中 $Z\geq 0$, $\mathbb{E}Z=1$. 定义一个新的概率测度 Q, 满足 $Q(\Lambda)=\mathbb{E}\{\mathbb{I}_\Lambda Z\}$. 设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个子 σ-代数, 设 $U=\mathbb{E}\{Z\mid\mathcal{G}\}$. 证明:

$$\mathbb{E}_Q\{X\mid\mathcal{G}\}=\frac{\mathbb{E}\{XZ\mid\mathcal{G}\}}{U},$$

其中 X 是任意的有界 $\mathcal{F}$-可测随机变量. 这里 $\mathcal{E}_Q\{X\mid\mathcal{G}\}$ 表示随机变量 X 关于概率测度 Q 的条件期望.

Exercise #23. 15. 证明: 赋范线性空间 $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是完备的, 其中 $1\leq p<\infty$.

Exercise #23. 16. 设 $X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ 以及 $\mathcal{G},\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数. 进一步假设 $\mathcal{H}$ 独立于 $\sigma(\sigma(X),\mathcal{G})$. 证明: $\mathbb{E}\{X\mid\mathcal{G}\}=\mathbb{E}\{X\mid\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})\}$ *a.s.*

Exercise #23. 17. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 独立同分布, 且是 L^1 上的随机变量. 令 $S_n=X_1+\cdots+X_n$, $\mathcal{G}_n=\sigma(S_n,S_{n+1},...)$. 证明: $\mathbb{E}\{X_1\mid\mathcal{G}_n\}=\mathbb{E}\{X_1\mid S_n\}$, $\mathbb{E}\{X_j\mid\mathcal{G}_n\}=\mathbb{E}\{X_j\mid S_n\},1\leq j\leq n$. 证明: $\mathbb{E}\{X_j\mid\mathcal{G}_n\}=\mathbb{E}\{X_1\mid S_n\},1\leq j\leq n$.

注. 用习题 *23.16* 的结论.

Exercise #23. 18. 设 $X_1,X_2,...,X_n$ 独立同分布, 且是 L^1 上的随机变量. 证明对于每一个 $1\leq j\leq n$, 有

$$\mathbb{E}\left\{X_j\mid\sum_{i=1}^n X_i\right\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

注. 用定理 *23.2* 的结论, 对称性来源于独立同分布条件.