Chapter 15: 独立随机变量的和

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

Exercise #15. 1. 设 $X_1, ..., X_n$ 是独立的随机变量, 假设 $\mathbb{E}\{X_j\} = \mu, \mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2 < \infty, 1 \leq j \leq n$. 令

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \quad \text{以及} \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \bar{X}\right)^2.$$

证明:

a) $\mathbb{E}\{\bar{X}\} = \mu$;

b) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$;

c) $\mathbb{E}\{S^2\} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$;

证明. a) $\mathbb{E}\{\bar{X}\} = \mathbb{E}\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\{X_j\} = \mu$;

b) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}(X_j) = \frac{\sigma^2}{n}$;

c) $\mathbb{E}\{S^2\} = \mathbb{E}\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \bar{X}\right)^2\} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\{(X_j - \bar{X})^2\}$.

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\{(X_j - \bar{X})^2\} = \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\{X_j^2\} - n\mathbb{E}\{\bar{X}^2\} = (n-1)\sigma^2$$

于是 $\mathbb{E}\{S^2\} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.

□

Exercise #15. 2. 设 $X_1, ..., X_n$ 是独立的随机变量, 且有有限的方差. 设 $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$. 证明:

$$\sigma^2_{\frac{1}{n}S_n} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma^2_{X_j}$$

并推导出若 $\sigma^2_{X_j} = \sigma^2, 1 \leq j \leq n$, 则 $\sigma^2_{\frac{1}{n}S_n} = \sigma^2/n$.

证明.

$$\sigma^2_{\frac{1}{n}S_n} = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma^2_{X_j}.$$

若 $\sigma^2_{X_j} = \sigma^2, 1 \le j \le n$, 则 $\sigma^2_{\frac{1}{n}S_n} = \sigma^2/n$. □

Exercise #15. 3. 证明*: 若* $X_1, ..., X_n$ 是独立同分布的随机变量, 则

$$\varphi_{S_n}(u) = (\varphi_X(u))^n,$$

其中 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

证明.

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n}(u) &= \mathbb{E}\left\{e^{iuS_n}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{e^{iu\sum_{j=1}^{n} X_j}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\prod_{j=1}^{n} e^{iuX_j}\right\} \\
&= \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left\{e^{iuX_j}\right\} \quad (\text{独立性}) \\
&= (\varphi_X(u))^n.
\end{aligned}$$

□

问题 4-8 是在讨论和数是一个随机数的 独立随机变量的和. 我们设 $X_1, X_2, ...$ 是一个独立同分布的随机变量无穷序列, 且 N 是正的, 取值为整数的随机变量, 它于序列 $\{X_n\}$ 独立. 进一步地, 令

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \text{以及} \quad S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

并约定当 $N = 0$ 时, $S_N = 0$.

Exercise #15. 4. 对于任意一个 *Borel* 集 *A*, 证明*:*

$$P(S_N \in A \mid N = n) = P(S_n \in A).$$

证明.

$$\begin{aligned}
P(S_N \in A \mid N = n) &= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \in A \mid N = n\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \in A\right) \quad (\text{独立性}) \\
&= P(S_n \in A).
\end{aligned}$$

□

Exercise #15. 5. 假设 $\mathbb{E}\{N\}<\infty$ 以及 $\mathbb{E}\{|X_j|\}<\infty$. 证明:

$$\mathbb{E}\left\{S_N\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{S_n\right\}P(N=n)$$

注.

$$\mathbb{E}\left\{S_N\right\}=\mathbb{E}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}S_n\mathbb{I}_{\{N=n\}}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{S_n\mathbb{I}_{\{N=n\}}\right\}.$$

证明. 由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\{|S_n\mathbb{I}_{\{N=n\}}|\}\leq\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\{|S_n|\}P(N=n)\leq\sum_{n=0}^{\infty}n\mathbb{E}\{|X_j|\}P(N=n)=\mathbb{E}\{|X_j|\}\mathbb{E}\{N\}<\infty,$$

于是根据控制收敛定理, 我们有期望求和可交换. 于是

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{S_N\right\}&=\mathbb{E}\left\{S_N1_{\{N\neq0\}}\right\}+\mathbb{E}\left\{S_N1_{\{N=0\}}\right\}\\
&=\mathbb{E}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}S_n1_{\{N=n\}}\right\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{S_n1_{\{N=n\}}\right\}\quad(\text{控制收敛定理})\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{S_n\right\}P(N=n).
\end{aligned}$$

□

Exercise #15. 6. 假设 $\mathbb{E}\{N\}<\infty$ 以及 $\mathbb{E}\{|X_j|\}<\infty$. 证明:

$$\mathbb{E}\{S_N\}=\mathbb{E}\{N\}\mathbb{E}\{X_j\}.$$

证明.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{S_N\}&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\{S_n\}P(N=n)\quad(\text{习题 }15.5)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}n\mathbb{E}\{X_j\}P(N=n)\\
&=\mathbb{E}\{X_j\}\sum_{n=0}^{\infty}nP(N=n)\\
&=\mathbb{E}\{X_j\}\mathbb{E}\{N\}.
\end{aligned}$$

□

Exercise #15. 7. *假设* $\mathbb{E}\{N\} < \infty$ *以及* $\mathbb{E}\{X_j\} < \infty$*. 证明:*

$$\varphi_{S_N}(u) = E\left\{\left(\varphi_{X_j}(u)\right)^N\right\}.$$

注.

$$\varphi_{S_N}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left\{e^{iuS_n} 1_{\{N=n\}}\right\}.$$

证明.

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_N}(u) &= \mathbb{E}\{e^{iuS_N}\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{iuS_N} \mathbb{I}_{\{N=n\}}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left\{e^{iuS_n} \mathbb{I}_{\{N=n\}}\right\} \quad (\text{控制收敛定理}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\{e^{iuS_n}\} P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{S_n}(u) P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{X_j}(u)^n P(N=n) \\
&= \mathbb{E}\left\{\left(\varphi_{X_j}(u)\right)^N\right\}.
\end{aligned}$$

其中, 期望求和可交换是由于控制收敛定理:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\{|e^{iuS_n} \mathbb{I}_{\{N=n\}}|\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\{|e^{iuS_n}|\} P(N=n) \le \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) = 1 < \infty.$$

□

Exercise #15. 8. *用 15.7 证明 15.6.*

证明. 这里的推导是形式的.

$$\begin{aligned}
i\mathbb{E}\{S_N\} &= \left.\frac{\partial}{\partial u} \varphi_{S_N}(u)\right|_{u=0} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial u} \mathbb{E}\left\{\left(\varphi_{X_j}(u)\right)^N\right\}\right|_{u=0} \\
&= \mathbb{E}\left\{N\left(\varphi_{X_j}(0)\right)^{N-1} i\varphi'_{X_j}(0)\right\} \\
&= \mathbb{E}\{N\} i\mathbb{E}\{X_j\}.
\end{aligned}$$

从而

$$\mathbb{E}\{S_N\} = \mathbb{E}\{N\}\mathbb{E}\{X_j\}.$$

□

Exercise #15. 9. 设 X, Y 是实值独立的随机变量. 假设 $X, X+Y$ 同分布. 证明: Y 几乎处处为 0.

证明. 由于 $X, X+Y$ 同分布, 那么 X 和 $X+Y$ 的特征函数相等, 即

$$\varphi_X(u) = \varphi_{X+Y}(u) = \mathbb{E}\{e^{iu(X+Y)}\} = \mathbb{E}\{e^{iuX}e^{iuY}\} = \mathbb{E}\{e^{iuX}\}\mathbb{E}\{e^{iuY}\} = \varphi_X(u)\varphi_Y(u).$$

由于 X 是实值随机变量, 于是 $\varphi_Y(u) = 1$, 这是退化分布 $\delta_0(x)$ 的特征函数. 根据唯一性定理, Y 服从取值为 0 的退化分布, 从而几乎处处为 0. □

Exercise #15. 10. 设 f, g 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}_+$ 上的函数, 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty \quad \textit{and} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx < \infty.$$

证明:

1. $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy$ 几处存在;
2. $f * g(x) = g * f(x)$;
3. 若 f, g 中的一个是连续函数, 则 $f * g$ 也是连续函数. 需要加条件: f 有界/g 有界/f 有紧支撑/g 有紧支撑.

证明. 1.

$$\int_{\mathbb{R}} f * g(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dydx$$
$$= \int g(y) \int f(x-y)dxdy = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$
$$\Rightarrow \|f * g\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1} < \infty \Rightarrow f * g \overset{\text{a.s.}}{<} \infty.$$

2.

$$f * g = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \quad g * f = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)dy$$

3. 设 $x_n \to x$, 则有逐点收敛性,

$$f\left(x_n - y\right) g(y) \to f(x-y)g(y)$$

首先, 假设 f 有界, 那么

$$\left|f\left(x_n - y\right) g(y)\right| \leqslant (\sup f)g(y) \in L'$$

由控制收敛定理, 有

$$f * g(x_n) \to f * g(x).$$

其次, 假设 f 有紧支撑, 那么 f 有界, 成立.

假设 g 紧支, 即存在 K 紧, 使得 $g(x) = 0, x \in K^c$, 那么定义

$$K' = \overline{\{x - y + 2 : y \in R, \alpha \in [-1, 1]\}}$$

那么 K' 也是紧的, 则对于充分大的 N,

$$\begin{aligned}&f\left(x_n-y\right)g(y)=f\left(x_n-y\right)g(y)\mathbb{I}_{(y\in k)}\\=&f(t)\cdot g(y)\mathbb{I}_{(y\in K)}\mathbb{I}_{t\in K'}\leqslant\left|\sup_{t\in K'}f(t)\right|\cdot g(y)\in L^1.\end{aligned}$$

由控制收敛定理, 有

$$f*g(x_n)\to f*g(x).$$

最后, 若 g 是有界的. 取简单函数 $f_m\uparrow f$ 逼近, 有

$$\|f_m-f\|_{L^1}\to 0.$$

根据 f 有界时的讨论,

$$\begin{aligned}&\left|\int f_m\left(x_n-y\right)g(y)dy-\int f\left(x_n-y\right)g(y)dy\right|\\\leqslant&\int\left|f_m\left(x_n-y\right)-f\left(x_n-y\right)\right|g(y)dy\\\leqslant&|\sup g|\cdot\int\left|f_m\left(x_n-y\right)-f\left(x_n-y\right)\right|dy\\=&|\sup g|\cdot\|f_m-f\|_{L^1}\end{aligned}$$

同理

$$\left|\int f_m(x-y)g(y)dy-\int f(x-y)g(y)dy\right|\leqslant|\sup g|\|f_m-f\|_{L^1}.$$

对于任意的 m, 当 n 充分大时, 有

$$\left|\int f_m\left(x_n-y\right)g(y)dy-\int f_m(x-y)g(y)dy\right|<\varepsilon$$

联合以上不等式, 即得结论.

$\square$

Exercise #15. 11. 设 X,Y 是独立同分布的. 进一步假设 $X+Y$ 和 $X-Y$ 独立. 证明:

$$\varphi_X(2u)=\{\varphi_X(u)\}^3\varphi_X(-u).$$

证明.

$$\begin{aligned}\varphi_X(2u)&=\mathbb{E}\{e^{i2uX}\}\\&=\mathbb{E}\{e^{iu(X+Y)}e^{iu(X-Y)}\}\\&=\mathbb{E}\{e^{iu(X+Y)}\}\mathbb{E}\{e^{iu(X-Y)}\}\quad\text{(独立性)}\\&=\varphi_X^2(u)\varphi_X(u)\varphi_X(-u)\\&=\{\varphi_X(u)\}^3\varphi_X(-u).\end{aligned}$$

$\square$

Exercise #15. 12. 设 X,Y 满足 *15.11* 的条件. 此外, $\mathbb{E}\{X\}=0,\mathbb{E}\{X^2\}=1$. 证明*:* X 服从标准正态分布.

注. 证明存在 $a>0$ 使得 $\varphi(u)\neq 0,\forall|u|\leq a$. 设 $\psi(u)=\dfrac{\varphi(u)}{\varphi(-u)}$, 其中 $|u|\leq a$, 证明 $\psi(u)=\{\psi(u/2^n)\}^{2^n}$*;* 接着证明 $\psi(u)\to 1$, 当 $n\to\infty$. 这推导出 $\varphi(t)=\{\varphi(t/2^n)\}^{4^n}$, 最后令 $n\to\infty$.

证明. 由于 $\mathbb{E}\{X\}=0$, 于是 $\varphi_X(0)=1$. 由于 $\mathbb{E}\{X^2\}=1$, 于是 $\varphi_X''(0)=-1$. 由于 $\varphi_X(u)$ 是特征函数, 那么 $\varphi_X(u)$ 是连续的, 且 $\varphi_X(u)$ 在 $u=0$ 处有连续的二阶导数. 于是 $\varphi_X(u)$ 在 $u=0$ 处的泰勒展开是

$$\varphi_X(u)=1-\frac{u^2}{2}+o(u^2).$$

由于 $\varphi_X(u)$ 是特征函数, 那么 $\varphi_X(u)$ 是有界的, 即存在 $a>0$ 使得 $\varphi(u)\neq 0,\forall|u|\leq a$. 设 $\psi(u)=\dfrac{\varphi(u)}{\varphi(-u)}$, 其中 $|u|\leq a$, 于是

$$\psi(u)=\frac{\varphi(u)}{\varphi(-u)}=\frac{\{\varphi(u/2)\}^3\varphi(-u/2)}{\{\varphi(-u/2)\}^3\varphi(u/2)}=\{\psi(u/2)\}^2.$$

于是用归纳法易证 $\psi(u)=\{\psi(u/2^n)\}^{2^n}$. 断言:

$$\lim_{n\to\infty}\{\psi(u/2^n)\}^{2^n}=1.$$

这是因为

$$\{\psi(u/2^n)\}^{2^n}=\left\{\frac{\varphi(u/2^n)}{\varphi(-u/2^n)}\right\}^{2^n}$$

分子:

$$\left\{\left[1+\frac{-\frac{1}{2}u^2}{4^n}+o\left(\frac{u^2}{4^n}\right)\right]^{4^n}\right\}^{2^{-n}}\xrightarrow{n\to\infty}\left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right)^{2^{-n}}.$$

同理, 分母趋于 $\left(e^{\frac{u^2}{2}}\right)^{2^{-n}}$, 最后令 $n\to\infty$, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\{\psi(u/2^n)\}^{2^n}=1$.

记 $\{\psi(u/2^n)\}^{2^n}=\psi_n(u)$,

$$\varphi_X(2u)=\varphi_X^3(u)\varphi_X(-u)=\varphi_X^4(u)\cdot\frac{\varphi_X(-u)}{\varphi_X(u)}=\varphi_X^4(u)\cdot\frac{1}{\psi_n(u)}\xrightarrow{n\to\infty}\varphi_X^4(u).$$

用归纳法, 易证

$$\varphi(t)=\{\varphi(t/2^n)\}^{4^n}=\left[1+\frac{-\frac{t^2}{2}}{4^n}+o\left(\frac{t^2}{4^n}\right)\right]^{4^n}\xrightarrow{n\to\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

根据唯一性定理, X 服从标准正态分布. □

Exercise #15. 13. 设 $X_1,X_2,...$ 是独立同分布的随机变量, 服从 $N(\mu,\sigma^2)$. 设 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}X_j$ 以及 $Y_j=X_j-\bar{X}$. 求出 $(\bar{X},Y_1,...,Y_n)$ 的联合特征函数. 设 $S^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}Y_j^2$. 并推导出 $\bar{X}$ 和 S^2 是独立的.

证明. 联合特征函数为

$$\varphi_{\bar{X},Y_1,\ldots,Y_n}(u_0,u_1,\ldots,u_n)=\mathbb{E}\left[\exp\left\{iu_0\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j+i\sum_{j=1}^{n}u_j\left(X_j-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\right\}\right]$$

合并同类项,

$$\exp\left(iu_0\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j+i\sum_{j=1}^{n}u_j\left\{X_j-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right\}\right)=\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\left(u_0/n+u_j-\bar{u}\right)X_j\right)$$

由于 X_i 独立同正态分布,

$$\mathbb{E}\left[e^{itX_j}\right]=\exp\left(it\mu-\frac{1}{2}t^2\sigma^2\right)$$

而

$$\sum_{j=1}^{n}\left(u_0/n+u_j-\bar{u}\right)^2=\sum_{i=1}$$

于是, 联合特征函数为

$$\begin{aligned}\varphi_{\bar{X},Y_1,\ldots,Y_n}(u_0,u_1,\ldots,u_n)&=\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\left(u_0/n+u_j-\bar{u}\right)\mu-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(u_0/n+u_j-\bar{u}\right)^2\right)\sigma^2\right\}\\&=\exp\{iu_0\mu\}\end{aligned}$$

□

Exercise #15. 14. 证明: $\left|1-e^{ix}\right|^2=2(1-\cos x)\le x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. 用这个断言证明: $|1-\varphi_X(u)|\le E\{|uX|\}$.

证明.

$$\begin{aligned}\left|1-e^{ix}\right|^2&=|1-\cos x-i\sin x|^2\\&=(1-\cos x)^2+\sin^2 x\\&=2(1-\cos x)\\&\le x^2.\end{aligned}$$

最后一个不等号由求导易得. 从而 $|1-e^{ix}|\le|x|$, 于是

$$\begin{aligned}|1-\varphi_X(u)|&=\left|1-\mathbb{E}\{e^{iuX}\}\right|\\&\le\mathbb{E}\{\left|1-e^{iuX}\right|\}\\&\le\mathbb{E}\{|uX|\}.\end{aligned}$$

□

Exercise #15. 15. 设 $A=\left[-\frac{1}{u},\frac{1}{u}\right]$. 证明:

$$\int_A x^2\mu_X(dx)\le\frac{12}{11u^2}\left\{1-\operatorname{Re}\varphi_X(u)\right\}.$$

注. $1-\cos(x)\geq 0, 1-\cos(x)\geq \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4, x\in\mathbb{R}$. 若 $z=a+ib$, 则 $\Re z=a$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$.

证明. $\square$

Exercise #15. 16. 若 φ 是一个特征函数, 证明 $|\varphi|^2$ 也是一个特征函数.

注. 设 X,Y 是独立的随机变量, 考察 $Z=X-Y$.

证明. 设 X,Y 独立同分布, 特征函数是 φ, 那么 $Z=X-Y$ 的特征函数是

$$\varphi_Z(u)=\mathbb{E}\{e^{iuZ}\}=\mathbb{E}\{e^{iu(X-Y)}\}=\mathbb{E}\{e^{iuX}\}\mathbb{E}\{e^{-iuY}\}=\varphi(u)\varphi(-u)=\varphi(u)\overline{\varphi(u)}=|\varphi|^2.$$

$|\varphi|^2$ 是一个特征函数. $\square$

Exercise #15. 17. 设 $X_1,...,X_\alpha$ 是独立指数随机变量, 其参数为 $\beta>0$. 证明 $Y=\sum_{i=1}^{\alpha}X_i\sim\Gamma(\alpha,\beta)$.

注. $Exp(\beta)\sim\Gamma(1,\beta)$.

证明. $\Gamma(\alpha,\beta)$ 分布的特征函数是 $\frac{\beta^\alpha}{(\beta-iu)^\alpha}$. 于是, Y 的特征函数是

$$\varphi_Y(u)=\varphi_X(u)^\alpha=\left(\frac{\beta}{\beta-iu}\right)^\alpha$$

这是 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 分布的特征函数. 根据唯一性定理, $Y\sim\Gamma(\alpha,\beta)$.

$\square$