Chapter 8&9: 概率测度的构造

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

Exercise #9. 1. 设 $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 是一个随机变量. 令

$$\mathcal{F} = \{A : A = X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\} = X^{-1}(\mathcal{B}).$$

证明: X 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 的一个随机变量.

证明. 根据 $\mathcal{F}$ 的定义, 对于任意的 $B \in \mathcal{B}$, 有 $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. 由此可知, X 是一个随机变量. □

Exercise #9. 2. 设 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 是一个概率空间, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是两 Ω 上的 σ-代数. 假设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$(我们称这种情况为 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子 σ-代数). σ-代数 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是独立的, 若对任意的 $A \in \mathcal{F}$ 和 $B \in \mathcal{G}$, 有 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. 假设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是独立的, X 同时是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 和 $(\Omega, \mathcal{G})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上的随机变量. 证明: X 几乎必然是常数, 即存在一个常数 c 使得 $P(X = c) = 1$.

证明. 由于 X 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 和 $(\Omega, \mathcal{G})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上的随机变量, 所以对于任意的 $B \in \mathcal{B}$, 有 $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ 和 $X^{-1}(B) \in \mathcal{G}$. 由于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是独立的, 所以对于任意的 $B \in \mathcal{B}$, 有

$$P\{X^{-1}(B)\} = P\{X^{-1}(B) \cap X^{-1}(B)\} = P\{X^{-1}(B)\}P\{X^{-1}(B)\}.$$

所以 $P\{X^{-1}(B)\}$ 可能的取值为 0 或 1. 由于 B 的任意性, 存在 $B_0 \in \mathcal{B}$ 使得 $P\{X^{-1}(B_0)\} = 1$. 不妨设 $B_0 = [a_0, b_0], a_0, b_0 \in \mathbb{R}$.

断言: 要么 $P\{X^{-1}([a_0, (a_0 + b_0)/2])\} = 1$, 要么 $P\{X^{-1}([(a_0 + b_0)/2, b_0])\} = 1$. 若不然, 可能的情况是在两个区间上, 概率值都大于零, 但是 $P\{X^{-1}(B)\}$ 可能的取值为 0 或 1, 于是两个区间上的值都是 1, 矛盾.

根据上述断言, 若 $P\{X^{-1}([a_0, (a_0 + b_0)/2])\} = 1$, 记 $a_1 = a_0, b_1 = (a_0 + b_0)/2$, 若 $P\{X^{-1}([(a_0 + b_0)/2, b_0])\} = 1$, 记 $a_1 = (a_0 + b_0)/2, b_1 = b_0$. 根据上述取法构造闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}_{n=0}^{\infty}$, 有 $b_n - a_n \to 0, n \to \infty, P_X([a_n, b_n]) = 1$. 根据实数上的闭区间套定理, 存在唯一的实数 c 使得 $c \in \cap_{n \geq 0}[a_n, b_n]$, 根据概率的连续性, 有 $P\{X = c\} = P_X(\{c\}) = \lim_{n \to \infty} P_X([a_n, b_n]) = 1$. 于是, X 几乎必然是常数. □

Exercise #9. 3. 给定 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, 设 $\mathcal{A}' = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$, 其中 $\mathcal{N}$ 是可忽略集. 假设 $X = Y \quad a.s.$ 其中 X 和 Y 是 Ω 上的实值函数. 证明: X 是 $(\Omega, \mathcal{A}')$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 的一个随机变量当且仅当 Y 是 $(\Omega, \mathcal{A}')$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 的一个随机变量.

证明. 根据定理 6.4, $\mathcal{A}'$ 是一个 σ-代数. 对函数 X 和 Y, 任取 $B \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} X^{-1}(B) &= \left\{X^{-1}(B)\backslash Y^{-1}(B)\right\} \cup \left\{X^{-1}(B) \cap Y^{-1}(B)\right\} \\ &= \left\{X^{-1}(B)\backslash Y^{-1}(B)\right\} \cup \left[Y^{-1}(B)\backslash \left\{Y^{-1}(B)\backslash X^{-1}(B)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

由于 $X = Y \quad$ a.s., 所以 $P\{X^{-1}(B)\backslash Y^{-1}(B)\} = 0$, $P\{Y^{-1}(B)\backslash X^{-1}(B)\} = 0$. $\left\{X^{-1}(B)\backslash Y^{-1}(B)\right\}$, $\left\{Y^{-1}(B)\backslash X^{-1}(B)\right\} \in \mathcal{N}$, 从而在事件域 $\mathcal{A}'$ 中.

所以根据式 (1), $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}'$ 当且仅当 $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}'$. □

Exercise #9. 4. 设 $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, 设 A_n 是一列事件使得 $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. 证明: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{X\mathbb{I}_{A_n}\} = 0$. *(这里我们不假设* $\lim_{n\to\infty} X\mathbb{I}_{A_n} = 0$ *a.s.*)

证明. 根据 $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, 则有 $\mathbb{E}\{X\} = \int XdP < \infty$. 首先分析

$$\mathbb{E}\{X\mathbb{I}_{A_n}\} = \int X(w)\mathbb{I}_{A_n}(w)dP(w),$$

如果能把积分中的 X 放缩为常数控制, 那么结论自然是成立的. 因此, 接下来要用可积的条件控制 X.

断言: 若 $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, 则 $\lim_{M\to\infty} \mathbb{E}\left[|X|\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\right] = 0$. 证明可以用控制收敛定理. 由于 $\mathbb{E}\left[|X|\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\right] \le \mathbb{E}\left(|X|\right) \le \infty$, 所以积分极限可交换. 于是

$$\lim_{M\to\infty} \int |X|\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}dP = \int |X| \lim_{M\to\infty} \mathbb{I}_{\{|X|>M\}}dP = \int |X|\mathbb{I}_{\{|X|=\infty\}}dP = 0.$$

这里用到了: 若 $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, 则 $P(|X| = \infty) = 0$. 因为,

$$\infty > \int |X|dP \ge \int n\mathbb{I}_{\{|X|=\infty\}}dP = nP(|X| = \infty) \ge 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

所以 $P(|X| = \infty) = 0$.

由于 $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\{X\mathbb{I}_{A_n}\}| &\le \int |X|\mathbb{I}_{A_n}\left[\mathbb{I}_{\{|X|\le M\}} + \mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\right]dP \\ &\le \int M\mathbb{I}_{A_n}dP + \int |X|\mathbb{I}_{A_n}\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}dP \\ &\le MP(A_n) + \int |X|\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}dP \end{aligned}$$

由于 M 的取值与 n 无关, 所以先令 n 趋于无穷, 再令 M 趋于无穷, 有 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{X\mathbb{I}_{A_n}\} = 0$.

□

Exercise #9. 5. 给定 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, 假设 X 是一个随机变量, 满足 $X \ge 0$ *a.s.* 以及 $\mathbb{E}X = 1$. 定义: $Q : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, 映射关系为 $Q(A) = \mathbb{E}\{X\mathbb{I}_A\}$. 证明: Q 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的一个概率测度.

证明. 要证明 Q 是可测空间 $(\Omega,\mathcal{A})$ 上的测度, 需要证明:

1. $Q:\mathcal{A}\to[0,1]$,
2. $Q(\Omega)=1$,
3. 对于任意的 $A_n\in\mathcal{A}$, 若 $A_i\cap A_j=\emptyset, i\neq j$, 则 $Q\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}Q(A_n)$.

首先, 由于 $X\geq 0$ a.s., 记 $N=\{X<0\}$, 于是 $P(N)=0$. 所以对于任意的 $A\in\mathcal{A}$, 有 $Q(A)=\mathbb{E}\{X\mathbb{I}_A\mathbb{I}_{N^c}\}\geq 0$. 以及, $Q(A)\leq\mathbb{E}X=1=\mathbb{E}\{X\mathbb{I}_\Omega\}=Q(\Omega)$, 这里不等号用的是定理 9.1(1) 期望的不等式. 从而 1,2 成立.

接下来证明 3. 对于任意的 $A_n\in\mathcal{A}$, 若 $A_i\cap A_j=\emptyset, i\neq j$, 则根据第二章已经证明过的集合与示性函数之间的关系,

$$\begin{aligned}
Q\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)&=\mathbb{E}\left\{X\cdot\mathbb{I}_{\cup_{i=1}^{\infty}A_i}\right\}\\
&=\mathbb{E}\left\{X\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{I}_{A_i}\right\}\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left\{X\mathbb{I}_{A_i}\right\}\quad(\text{控制收敛定理})\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}Q(A_i).
\end{aligned}$$

于是 Q 是可测空间 $(\Omega,\mathcal{A})$ 上的测度. □

Exercise #9. 6. 对于 *9.5* 中定义的 Q, 证明若 $P(A)=0$, 则 $Q(A)=0$. 给出一个例子说明 $Q(A)=0$ 一般不蕴含 $P(A)=0$.

证明. 对于 $P(A)=0$, 有 $X\mathbb{I}_A=0$ a.s.P, 于是 $\mathbb{E}\{X\mathbb{I}_A\}=0$, 即 $Q(A)=0$.

反之, 考虑 $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}([0,1])$, P 是 Lebesgue 测度, $X=2\mathbb{I}_{[0,1/2]}$, 取 $A=(1/2,1)\in\mathcal{A}$, 则 $Q(A)=\mathbb{E}\{X\mathbb{I}_A\}=0$, 但是 $P(A)=1/2$. □

Exercise #9. 7. 对于 *9.5* 中定义的 Q, 假设还满足 $P(X>0)=1$. 设 $\mathbb{E}_Q$ 表示关于测度 Q 的积分. 证明

$$\mathbb{E}_Q\{Y\}=\mathbb{E}_P\{YX\}.$$

证明. 证明这一点并不容易, 需要用 Lebesgue 积分的标准技巧.

Step 1 当 $Y=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{I}_{A_i}$ 是简单随机变量时,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q\{Y\} &= \int YdQ\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_nQ(A_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_n\int X\mathbb{I}_{A_n}dP\\ &= \int XYdP\\ &= \mathbb{E}_P\{XY\}.\end{aligned}$$

Step 2 当 $Y\geq 0$ 时, 存在简单函数列 $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ 使得 $Y_n\uparrow Y$. 根据单调收敛定理,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q\{Y\} &= \mathbb{E}_Q\{\lim_{n\to\infty}Y_n\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_Q\{Y_n\} \quad (\text{单调收敛定理})\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_P\{XY_n\} \quad (\text{Step 1})\\ &= \mathbb{E}_P\{X\lim_{n\to\infty}Y_n\} \quad (\text{单调收敛定理})\\ &= \mathbb{E}_P\{XY\}.\end{aligned}$$

Step 3 当 $Y\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},Q)$ 时, 有 $Y=Y^+-Y^-$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q\{Y\} &= \mathbb{E}_Q\{Y^+-Y^-\}\\ &= \mathbb{E}_Q\{Y^+\}-\mathbb{E}_Q\{Y^-\}\\ &= \mathbb{E}_P\{XY^+\}-\mathbb{E}_P\{XY^-\}\\ &= \mathbb{E}_P\{XY\}.\end{aligned}$$

□

Exercise #9. 8. *对于 9.5 中定义的 Q, 假设还满足 $P(X>0)=1$.*

(a) 证明 $\frac{1}{X}$ 是关于 Q 可积的.

(b) 定义映射 $R:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$, $R(A)=\mathbb{E}_Q\left\{\frac{1}{X}\mathbb{I}_A\right\}$, 证明 R 是就是 9.5 中 $(\Omega,\mathcal{A})$ 上的概率测度 P.

证明. (a)

$$\mathbb{E}_Q\left\{\frac{1}{X}\right\}=\mathbb{E}_P\left\{X\frac{1}{X}\right\}=1<\infty,$$

从而 $\frac{1}{X}$ 是关于 Q 可积的.

(b) 由于 $\frac{1}{X}\geq 0$ a.s., $\mathbb{E}_Q\{1/X\}=1$, 根据 9.5, R 是一个测度. $\forall A\in\mathcal{A}$, 有 $R(A)=\mathbb{E}_Q\left\{\frac{1}{X}\mathbb{I}_A\right\}=\mathbb{E}_P\{\mathbb{I}_A\}=P(A)$, 于是 R 是就是 9.5 中 $(\Omega,\mathcal{A})$ 上的概率测度 P.

□

Exercise #9. 9. 设 Q 的定义如 *9.8*. 证明 $Q(A) = 0$ 蕴含 $P(A) = 0$.

证明. 若 $Q(A) = 0$, 则 $\frac{1}{X}\mathbb{I}_A = 0$ a.s.Q, 从而 $P(A) = \mathbb{E}_Q\left\{\frac{1}{X}\mathbb{I}_A\right\} = 0$. 对比 9.6, 这里加强了条件: $P(X > 0) = 1$ □

Exercise #9. 10. 设 X 是 (a, b) 上的均匀分布. 证明: $\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$.

证明.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\
&= \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

□

Exercise #9. 11. 设 X 是一个可积的随机变量, 密度是 $f(x)$, 令 $\mu = \mathbb{E}X$. 证明:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

证明. 根据 Expectation Rule(定理 9.1/引理 9.1), 由于 $h(x) = (x-\mu)^2 \geq 0$, 于是

$$\begin{aligned}
\sigma^2(X) &= \mathbb{E}\{(X-\mu)^2\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx.
\end{aligned}$$

□

Exercise #9. 12. 设 X 是 (a, b) 上的均匀分布. 证明: $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

证明.

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= \int_a^b (x-\mu)^2 \frac{1}{b-a}dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2 dx \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(x-\frac{a+b}{2})^3}{3}\right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-\frac{a+b}{2})^3}{3}-\frac{(a-\frac{a+b}{2})^3}{3}\right] \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)^3}{12}\right] \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

□

Exercise #9. 13. 设 X 是一个 *Cauchy* 随机变量, 密度是 $\dfrac{1}{\pi\{1+(x-\alpha)^2\}}$. 证明*:* X 的方差无定义, 且 $\mathbb{E}X^2=\infty$.

证明. 已经在 P60 有期望不存在, 根据 Liapunov 不等式, 二阶矩/方差也无定义. □

Exercise #9. 14. 设 β 函数是 $B(r,s)=\dfrac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$, 其中 Γ 是 Γ 函数. 等价地,

$$B(r,s)=\int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}dt \quad (r>0,s>0)$$

称 X 的分布是 β 分布, 若它关于分布的测度的密度是

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{r-1}(1-x)^{s-1}}{B(r,s)} & \textit{if } 0\le x\le 1\\ 0 & \textit{if } x<0 \textit{ or } x>1\end{cases}$$

证明对于有 $\beta(r,s)$ 分布的随机变量 $X(r>0,s>0)$, 则

$$E\left\{X^k\right\}=\frac{B(r+k,s)}{B(r,s)}=\frac{\Gamma(r+k)\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(r+s+k)},\quad k\ge 0.$$

推导*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X\} &= \frac{r}{r+s}\\ \sigma^2(X) &= \frac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)}\end{aligned}$$

β 分布是一族 $[0,1]$ 上丰富的分布函数族. 它被经常用来对随机的比例建模.

证明.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X^k\} &= \int_0^1 x^k \frac{x^{r-1}(1-x)^{s-1}}{B(r,s)} dx \\
&= \frac{1}{B(r,s)} \int_0^1 x^{r+k-1}(1-x)^{s-1} dx \\
&= \frac{B(r+k,s)}{B(r,s)} \\
&= \frac{\Gamma(r+k)\Gamma(s)}{\Gamma(r+k+s)} \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+s)} \\
&= \frac{\Gamma(r+k)\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(r+s+k)}.
\end{aligned}$$

分别带入 $k=1$ 和 $k=2$ 即可得到期望和方差. □

Exercise #9. 15. 设 X 是一个参数是 (μ, σ^2) 的对数正态分布. 证明:

$$E\{X^r\} = e^{r\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2}$$

并据此推出 $E\{X\} = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ 以及 $\sigma_X^2 = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$.

注. $E\{X^r\} = \int_0^\infty x^r f(x) dx$ 其中 f 是对数正态密度, 定义 $y = \log(x) - \mu$, 有

$$E\{X^r\} = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(r\mu + ry - y^2/2\sigma^2\right)} dy.$$

证明.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X^r\} &= \int_0^\infty x^r \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&\overset{y=\log x-\mu}{=} e^{r\mu} \int_{-\infty}^\infty e^{ry} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= e^{r\mu} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 r^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-r\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= e^{r\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2}.
\end{aligned}$$

期望和方差只需带入 $r=1$ 和 $r=2$ 即可. 期望为

$$\mathbb{E}\{X\} = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2},$$

方差为

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}\{X^2\} - \mathbb{E}^2\{X\} = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

□

Exercise #9. 16. Γ 分布往往被简化为单参数分布. 一个随机变量 X 被称为有标准 Γ 分布, 如果它有参数 α, 且它在给定测度上的密度是

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & \textit{if } x \geq 0 \\ 0 & \textit{if } x < 0 \end{cases}$$

也就是说, $\beta = 1$. (回顾: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.) 证明对于有标准 Γ 分布的随机变量 X, 则

$$\mathbb{E}\left\{X^k\right\} = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \quad (k \geq 0).$$

并据此推出 X 有均值 α, 方差 α.

证明.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X^k\} &= \int_0^\infty x^k \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha+k-1}e^{-x}dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

期望和方差只需带入 $k=1$ 和 $k=2$ 即可. 期望为

$$\mathbb{E}\{X\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha,$$

方差为

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}\{X^2\} - \mathbb{E}^2\{X\} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} - \alpha^2 = \alpha.$$

□

Exercise #9. 17. 设 X 是一个非负的随机变量, 均值是 μ, 方差是 σ^2, 两个都是有限的. 证明对任意的 $b > 0$,

$$P\{X \geq \mu + b\sigma\} \leq \frac{1}{1+b^2}.$$

注. 考虑函数 $g(x) = \dfrac{\{(x-\mu)b+\sigma\}^2}{\sigma^2(1+b^2)^2}$, 以及 $\mathbb{E}\{((X-\mu)b+\sigma)^2\} = \sigma^2(b^2+1)$.

证明. 考虑**非负**函数 $g(x) = \dfrac{\{(x-\mu)b+\sigma\}^2}{\sigma^2(1+b^2)^2}$, 由于当 $X \geq \mu + b\sigma$ 时, 有 $g(X) \geq 1$, 于是

$$\{X \geq \mu + b\sigma\} \subset \{g(X) \geq 1\}.$$

于是, 令 $Y = g(X) \geq 0$ a.s., 根据 Markov 不等式,

$$P(X \geq \mu + b\sigma) \leq P(g(X) \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}\{g(X)\}}{1} = \frac{\mathbb{E}\{(X-\mu)b+\sigma\}^2}{\sigma^2(1+b^2)^2} = \frac{1}{1+b^2}.$$

□

Exercise #9. 18. 设 X 是一个非负的随机变量, 均值是 μ, 方差是 σ^2, 两个都是有限的. 证明:

$$P\{\mu - d\sigma < X < \mu + d\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{d^2}.$$

注. 只有当 $d > 1$ 时, 上述结论是有趣的.

证明. 由于 $X \in L^2$ 根据 Chebyshev 不等式,

$$\begin{aligned}P\{\mu - d\sigma < X < \mu + d\sigma\} &= 1 - P\{|X - \mu| \geq d\sigma\} \\ &\geq 1 - \frac{\sigma^2}{d^2\sigma^2} \\ &= 1 - \frac{1}{d^2}.\end{aligned}$$

□

Exercise #9. 19. 设 X 是一个 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 的正态分布. 证明:

$$P(X > x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x > 0.$$

证明. 考察

$$\mathbb{E}\{X\mathbb{I}(X \geq x)\} = \int_x^\infty t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\Big|_x^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

注意到,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X\mathbb{I}(X \geq x)\} &= \int_x^\infty t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\ &\geq \int_x^\infty x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\ &= xP(X > x).\end{aligned}$$

组合上述两个不等式即可得到结论. □

Exercise #9. 20. 设 X 是一个指数随机变量. 证明: 对 $s > 0, t > 0$, $P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$. 这被称为指数分布的无记忆性.

证明. 按教材中参数化的记号, 指数分布的密度是 $f(x) = \beta e^{-\beta x}\mathbb{I}(x \geq 0)$, 于是, 无记忆性为

$$\begin{aligned}P(X > s + t \mid X > s) &= \frac{P(X > s + t, X > s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} \\ &= \frac{e^{-\beta(s+t)}}{e^{-\beta s}} \\ &= e^{-\beta t} \\ &= P(X > t).\end{aligned}$$

□

Exercise #9. 21. 设 X 是一个随机变量, 满足 $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$. 证明若 $h(t) = P(X > t)$, 则 h 满足 *Cauchy* 等式:

$$h(s+t) = h(s)h(t) \quad (s > 0, t > 0)$$

证明 X 是指数分布的.

注. 事实上, h 是右连续的, 于是 *Cauchy* 方程可以被求解.

证明. 反过来, 无记忆性蕴含着指数分布. 首先, 求解 Cauchy 等式. 由于 $h(t) = 1 - P(X \le t)$, 于是 h 也是右连左极的, 单调非增的函数.

$$h(s)h(t) = h(s+t), \quad s > 0, t > 0.$$

首先, $\forall x \in \mathbb{R}^1$,

$$h(x) = \left\{h\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2 \ge 0.$$

因此函数 h 非负. 反复使用 Cauchy 等式, 则对任意的正整数 n, $x \in \mathbb{R}^1$, 有

$$h(nx) = \left\{h\left(\frac{x}{n}\right)\right\}^n.$$

在上式中, 取 $x = \dfrac{1}{n}$, 有

$$h(1) = \left\{h\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n.$$

若记 $a = f(1) \ge 0$, 则有

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{1/n}.$$

因此对于任意的有理数 $r = \dfrac{m}{n}$, 有

$$h\left(\frac{m}{n}\right) = \left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^m = a^{m/n}.$$

由于 h 是右连续的, 于是对于任意的实数 x, 有有理数列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \downarrow x$, 于是

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x.$$

综上, $h(x) = a^x$, 其中 $a \ge 0$.

于是 X 的分布函数是 $F(x) = 1 - a^x$, 写 $a = e^{-\lambda}$, 于是 X 是参数为 λ 的指数分布. □

Exercise #9. 22. 设 α 是一个整数, 假设 X 服从 $\Gamma(\alpha, \beta)$. 证明: $P(X \le x) = P(Y \ge \alpha)$, 其中 Y 服从参数为 $\lambda = x\beta$ 的 *Poisson* 分布.

注. 回顾 $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$, 写出 $P(X \le x)$, 接下来使用积分代换 $u = t^{\alpha-1}, dv = e^{-t/\beta}dt$.

注意: 这本书的 *Gamma* 参数化是 *P43* 中的参数化格式, 采用的是 *rate parameter* β.

证明. 由于 α 是一个整数, 于是,

$$P(Y \geq \alpha) = \sum_{k=\alpha}^{\infty} e^{-x\beta} \frac{(x\beta)^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} e^{-x\beta} \frac{(x\beta)^k}{k!}.$$

断言:

$$\sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(x\beta)^k e^{-x\beta}}{k!} = \int_{x\beta}^{\infty} \frac{z^{\alpha-1}e^{-z}}{\Gamma(\alpha)}\, dz$$

这是因为分部积分:

$$\begin{aligned}\int_{x\beta}^{\infty} \frac{z^{\alpha-1}e^{-z}}{\Gamma(\alpha)}\, dz &= -\frac{z^{\alpha-1}e^{-z}}{\Gamma(\alpha)}\bigg|_{x\beta}^{\infty} + \int_{x\beta}^{\infty} \frac{z^{\alpha-2}e^{-z}}{\Gamma(\alpha-1)}\, dz \\ &= \frac{(x\beta)^{\alpha-1}e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} + \int_{x\beta}^{\infty} \frac{z^{\alpha-2}e^{-z}}{\Gamma(\alpha-1)}\, dz.\end{aligned}$$

以及当 $\alpha = 1$ 时,

$$\int_{x\beta}^{\infty} e^{-z}\, dz = e^{-x\beta} = \frac{(x\beta)^0 e^{-x\beta}}{0!}.$$

则根据上述断言,

$$P(Y \geq \alpha) = \int_0^{x\beta} \frac{z^{\alpha-1}e^{-z}}{\Gamma(\alpha)}\, dz \overset{z=\beta t}{=\!=} \int_0^{x} \frac{(\beta t)^{\alpha-1}e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha)} \beta\, dt = P(X \leq x).$$

□

Exercise #9. 23. 一个非负随机变量的风险比可以被定义为

$$h_X(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(t \leq X < t+\varepsilon \mid X \geq t)}{\varepsilon}$$

当上述极限存在. 风险比可以被看作是某一个体在 t 时刻后一个无限小时间内没有活下来的概率. 指数分布的无记忆性给出来一个常数的风险比. 一个 Weibull 随机变量也可以用来建模生存时间. 证明:

a) 若 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则它的风险比是 $h_X(t) = \lambda$;

b) 若 X 服从 Weibull(α, β), 则它的风险比是 $h_X(t) = \alpha\beta^{\alpha}t^{\alpha-1}$.

证明. a) 若 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则它的分布函数是 $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}$. 当 $t \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned}P(t \leq X < t+\varepsilon \mid X \geq t) =& \frac{P(t \leq X < t+\varepsilon)}{P(X \geq t)} \\ =& \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+\varepsilon)}}{e^{-\lambda t}}\end{aligned}$$

于是

$$h_X(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda.$$

b) 若 X 服从 Weibull(α, β), 密度函数:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\beta x)^{\alpha}} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

累积分布函数:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-(\beta x)^{\alpha}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

则当 $t\geq 0$ 时, 它的风险比是 $h_X(t)=\alpha\beta^{\alpha}t^{\alpha-1}$. 类似上面的操作,

$$h_X(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\alpha\beta^{\alpha}t^{\alpha-1}.$$

$\square$

Exercise #9. 24. 一个正的随机变量 X 服从 *logistic* 分布, 若它的分布函数是

$$F(x)=P(X\leq x)=\frac{1}{1+e^{-(x-\mu)/\beta}};\quad (x>0)$$

其中参数是 $(\mu,\beta),\beta>0$.

a) 证明若 $\mu=0,\beta=1$, 则 X 的密度函数是

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2};$$

b) 证明若 X 服从参数为 (μ,β) 的 *logistic* 分布, 则 X 的风险比是 $h_X(t)=\dfrac{1}{\beta}F(t)$.

证明. a) 当 $\mu=0,\beta=1$ 时, $F(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$, 密度函数是

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

b) 当 X 服从参数为 (μ,β) 的 logistic 分布时, 密度函数是

$$f(x)=\frac{e^{-(x-\mu)/\beta}}{\beta\,(1+e^{-(x-\mu)/\beta})^2}.$$

于是

$$h_X(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{1}{\beta}F(t).$$

$\square$