Chapter 18: 弱收敛

Latest Update: 2025 年 1 月 2 日

> 弱收敛存在连续映射定理. 若 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, 则
>
> $$\mathbb{E}\{f(X_n)\} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}\{f(X)\}, \quad \forall f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}).$$
>
> 只需证:
>
> $$\mathbb{E}\{f(g(X_n))\} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}\{f(g(X))\}, \quad \forall f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}).$$
>
> 当 g 是连续函数时, 有 $F = f \circ g$ 是有界连续函数. 根据定义即得连续映射定理.

> **Exercise #18. 1.** 证明: 若 $X_n \xrightarrow{L^p} X (p \geq 1)$, 则 $X_n \xrightarrow{D} X$.

证明. 根据 Liapunov 不等式, 对 $\forall p \geq 1$, 有

$$\mathbb{E}\{|X|\} \leq \left[\mathbb{E}\{|X|^p\}^{\frac{1}{p}}\right].$$

由于 $X_n \xrightarrow{L^p} X$, 所以 $\mathbb{E}\{|X_n - X|^p\} \to 0$.

根据定理 18.7, 考察 $\forall f \in \mathscr{C}_{\mathrm{b,Lip}}(\mathbb{R})$, 存在常数 K 使得

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}\{f(X_n)\} - \mathbb{E}\{f(X)\}| &\leq K\mathbb{E}\{|X_n - X|\} \\ &\leq K\left[\mathbb{E}\{|X_n - X|^p\}^{\frac{1}{p}}\right] \\ &\to 0 \ (n \to \infty).\end{aligned}$$

□

> **Exercise #18. 2.** 设 $\alpha \in \mathbb{R}^d$. 用构造方法证明: 存在一个连续函数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, 使得 $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^d$, $f(\alpha) = 0$ 且对给定的 $\varepsilon > 0$, 当满足 $\|x - \alpha\| \geq \varepsilon$ 时, 有 $f(x) = 1$.

注. 首先在 $d = 1$ 时解决这个问题, 再模仿证明到 $d > 1$ 的情况.

证明. 只需取

$$f(x) = \max\left\{\frac{1}{\varepsilon}\|x - \alpha\|, 1\right\}.$$

□

Exercise #18. 3. 设 X 是一个实值随机变量, 分布函数为 F. 证明: $F(x-)=F(x)$ 当且仅当 $P(X=x)=0$.

证明. 根据引理 7.1, 有 $P(X=x)=F(x)-F(x-)$. □

Exercise #18. 4. 设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, 0\le g(\alpha)\le 1$, g 是非增的, 并假设 g 是右连续的 (即 $\lim\limits_{y\downarrow x} g(y)=g(x), \forall x$). 证明: g 处处有左极限 (即 $\lim\limits_{y\uparrow x} g(y)=g(x-)$ 存在, $\forall x$), 并且集合 $\Lambda=\{x: g(x-)\neq g(x)\}$ 是至多可列集.

注. 首先证明: 仅有有限的 x 使得 $g(x)-g(x-)>\dfrac{1}{k}$, 然后令 k 趋于无穷. 在习题 *7.16* 中已经证过.

证明. 首先,

$$\Lambda=\{x: g(x-)\neq g(x)\}=\{x: g(x-)<g(x)\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x: g(x)-g(x-)>\frac{1}{k}\right\}.$$

由于 $g\in[0,1]$

$$\sharp\left\{x: g(x)-g(x-)>\frac{1}{k}\right\}\le k.$$

仅有有限的 x 使得 $g(x)-g(x-)>\dfrac{1}{k}$, 从而 Λ 是至多可列的.

接下来证明 g 处处有左极限. 令 $t\in\mathbb{R}^1$, 考察 $M=\{g(x): x<t\}$. 则 M 非空, 且有上界 $g(t)$, 于是根据确界存在定理, 存在 $\alpha=\sup M$. 根据上确界的定义, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $x_0<t$ 使得 $\alpha-\varepsilon<g(x)\le\alpha$. 取 $\delta=\alpha-x_0$, 则当 $x\in(t-\delta,t)$ 时, $M-\varepsilon<g(x)\le M$. 从而 $\lim\limits_{y\uparrow t} g(y)=\alpha=g(t-)$. □

Exercise #18. 5. 设 F 是一个实值随机变量的分布函数. 令 $D=\{x: F(x-)=F(x)\}$. 证明: D 在 $\mathbb{R}$ 上是稠密的.

注. 可以用 *18.4* 证明 D 的补集是至多可列的.

证明. 根据 18.4, 令 $D=\{x: F(x-)=F(x)\}$, 则 $D^c=\{x: F(x-)<F(x)\}$ 是至多可列的. 反证法, 若不然, 则存在 $x_0\in D^c, \delta>0$ 使得 $B(x_0,\delta)\subset D^c$. 而这与 D^c 是至多可列的矛盾.

□

Exercise #18. 6. 设 $\{X_n\}_{n\ge 1}$ 是一列实值随机变量, 且 $X_n\sim Unif[-n,n]$. 在何种意义下, 有 X_n 收敛到某个随机变量 X?

证明. 由于依分布收敛的收敛性是最弱的. 因此先考察依分布收敛. 若存在一个随机变量 X 使得 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, 则根据依分布收敛的定义, 记 F_n 和 F 分别是 X_n 和 X 的分布函数, 则对于 F 的连续点 x, 有

$$F_n(x) \to F(x) \quad (n \to \infty).$$

注意到

$$F_n(x) = P(X_n \le x) = \int_{-n}^{x} \frac{1}{2n} dt = \frac{x+n}{2n}\mathbb{I}_{(-n,n)}(x) + \mathbb{I}_{[n,\infty)}(x).$$

则对于 $x \in \mathbb{R}^1$, 当 $n \to \infty$ 有 $F_n(x) \to \dfrac{1}{2}$. 而这与 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ 矛盾! 因此 X_n 不依分布收敛. □

Exercise #18. 7. 设 $f_n(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的密度函数. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}\mathbb{I}_{(X>0)}$. 若 f_n 是随机变量 X_n 的密度. 考察当 n 趋于无穷时, X_n 的收敛性.

证明. 根据定理 18.5(Scheffé 定理), f_n 几乎处处逐点收敛于 f, 其中 $f(x) = e^{-x}\mathbb{I}_{(X>0)}$ 是参数为 1 的指数分布的密度函数. 则 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. □

Exercise #18. 8. 设 $\{X_n\}_{n\ge1}$ 是独立同分布的 *Cauchy(0,1)* 随机变量. 令 $Y_n = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$. 证明: Y_n 依分布收敛, 并求出极限分布. Y_n 是否也依概率收敛?

证明. 在习题 17.7 中, 已经证明 Y_n 也服从 Cauchy(0,1) 分布. 显然, Y_n 的分布函数逐点收敛于 Cauchy(0,1) 的分布函数. 于是, Y_n 依分布收敛于 Cauchy(0,1) 分布.

Y_n 不依概率收敛. 反证法, 若不然, 存在 Y 使得 $Y_n \xrightarrow{p} Y$. 由于

$$\{|Y_n - Y_m| > \varepsilon\} \subset \{|Y_n - Y| + |Y_m - Y| > \varepsilon\} \subset \{|Y_n - Y| > \varepsilon/2\} \cup \{|Y_m - Y| > \varepsilon/2\}.$$

如果 $Y_n \xrightarrow{p} Y$, 则应有 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} P(|Y_n - Y_m| > \varepsilon) = 0 (\forall\varepsilon > 0)$. 但是, 若取 $m = 2n$, 则有

$$|Y_n - Y_m| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} X_i\right|$$

但是此时, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=n+1}^{2n} X_i$ 独立同 Cauchy(0,1) 分布, 从而 $|Y_n - Y_m|$ 的分布于 n 无关. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|Y_n - Y_{2n}| > \varepsilon) = P(|U - V| > 2\varepsilon) > 0$, 其中 U, V 是独立同分布的 Cauchy(0,1) 随机变量. 而这产生了矛盾. 因此, Y_n 不依概率收敛. □

Exercise #18. 9. 设 $\{X_n\}_{n\ge1}$ 是一列随机变量, 且 $\sup\limits_{n} \mathbb{E}\{X^2\} < \infty$. 设 μ_n 是 X_n 诱导的分布测度. 证明: 序列 μ_n 是紧的.

注. 可以用 *Chebyshev* 不等式.

证明. 用 Chebyshev 不等式, 对任意的 $m>0$, 有

$$P\{|X_n|>m\}\le \frac{1}{m^2}\mathbb{E}\{X_n^2\}.$$

于是,

$$\sup_n \mu_n([-m,m]^c)=\sup_n P\{|X_n|>m\}\le \frac{1}{m^2}\sup_n \mathbb{E}\{X^2\}<\infty.$$

即

$$\lim_{m\to\infty}\sup_n \mu_n([-m,m]^c)=0.$$

从而, μ_n 是紧的. □

Exercise #18. 10. 设 X_n, X, Y 是实值随机变量, 定义在同一个样本空间 $(\Omega,\mathcal{A},P)$ 上. 假设

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left\{f\left(X_n\right)g(Y)\right\}=\mathbb{E}\{f(X)g(Y)\}$$

当 f,g 有界, f 连续, g 是 Borel 可测时成立. 证明: (X_n,Y) 依分布收敛到 (X,Y). 进一步假设有 Borel 可测函数 h 满足 $X=h(Y)$, 证明: $X_n\xrightarrow{P}X$.

注. *注意, $X_n\xrightarrow{\mathcal{D}}X, Y_n\xrightarrow{\mathcal{D}}Y$ 不能推出 $(X_n,Y_n)\xrightarrow{\mathcal{D}}(X,Y)$. 以下是一个反例: 设 X,Y 独立同分布服从 $\mathcal{N}(0,1)$, 设 $(X_n,Y_n)\equiv(-Y,Y),\forall n$. 则 (X_n,Y_n) 依分布收敛到 (X,Y), 但是 $X_n+Y_n=0$. 取 $f(x,y)=x+y$, 则与依分布收敛的定义矛盾.*

此外, 依分布收敛的不同之处在于不满足一些运算法则, 只满足 Slutsky 定理. 比如,

$$X_n\xrightarrow{\mathcal{D}}X, Y_n\xrightarrow{\mathcal{D}}Y \not\Rightarrow X_n+Y_n\xrightarrow{\mathcal{D}}X+Y.$$

反例是 $X_n=Z, Y_n=-Z$, 其中 Z 是标准正态分布.

证明. 称 (X_n,Y) 依分布收敛到 (X,Y) 是指

$$\mathbb{E}\{\phi(X_n,Y)\}\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}\{\phi(X,Y)\},$$

其中 $\phi\in\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^2)$.

考察 (X_n,Y) 的特征函数,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{e^{it_1X_n}e^{it_2Y}\}&=\mathbb{E}\left[\{\cos(t_1X)+i\sin(t_1X)\}\{\cos(t_2Y)+i\sin(t_2Y)\}\right]\\&=\mathbb{E}\{\cos(t_1X)\cos(t_2Y)-\sin(t_1X)\sin(t_2Y)\}+i\mathbb{E}\{\sin(t_1X)\cos(t_2Y)+\cos(t_1X)\sin(t_2Y)\}\end{aligned}$$

显然, $\sin(t_1x),\cos(t_1x),\sin(t_2y),\cos(t_2y)$ 都是有界函数, 且连续. 根据题中的条件, 有

$$\mathbb{E}\{e^{it_1X_n}e^{it_2Y}\}\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}\{e^{it_1X}e^{it_2Y}\}.$$

根据 Leǘy 连续定理, 有 $(X_n,Y)\xrightarrow{\mathcal{D}}(X,Y)$.

根据 (X_n,Y) 依分布收敛于 (X,Y), h 是 Borel 可测的, 则根据题中的条件,

$$(X_n,h(Y))\xrightarrow{\mathcal{D}}(X,h(Y)).$$

应用 Slutsky 定理 (习题 18.15), 有

$$X_n-X\xrightarrow{\mathcal{D}}X-X=0\quad\Rightarrow\quad X_n-X\xrightarrow{\mathcal{D}}0\quad\Rightarrow\quad X_n\xrightarrow{P}X.$$

□

Exercise #18. 11. 设 μ_α 表示参数为 α 的 *Pareto* 分布 *(Zeta* 分布*)*. 设 $\alpha_n \to \alpha$, 证明: μ_{α_n} 弱收敛于 μ_α.

证明. Zeta 分布的 pmf 是

$$P(X=j)=c\frac{1}{j^{\alpha+1}}, j=1,2,3,...$$

其中 $\alpha>0, c=\dfrac{1}{\zeta(\alpha+1)}$, ζ 是 Riemann zeta 函数. 则

$$P(X_n=j)=c_n\frac{1}{j^{\alpha_n+1}}, j=1,2,3,...$$

其中 $\alpha_n>0, c_n=\dfrac{1}{\zeta(\alpha_n+1)}$.

从而

$$P(X_n=j)\xrightarrow{n\to\infty}P(X=j), \forall j=1,2,3,...$$

根据可列取值情况下的弱收敛, μ_{α_n} 弱收敛于 μ_α. □

Exercise #18. 12. 设 μ_α 表示参数为 α 的几何分布. 设 $\alpha_n \to \alpha > 0$, 证明: μ_{α_n} 弱收敛于 μ_α.

证明. 几何分布的 pmf 是

$$P(X=k)=(1-p)^k p, k=0,1,2,...$$

其中, $p\in(0,1)$.

则

$$P(X_n=k)=(1-p_n)^k p_n, k=0,1,2,...$$

其中, $p_n\in(0,1)$.

从而

$$P(X_n=k)\xrightarrow{n\to\infty}P(X=k), \forall k=0,1,2,...$$

根据可列取值情况下的弱收敛, μ_{α_n} 弱收敛于 μ_α. □

Exercise #18. 13. 设 $\mu_{(N,b,n)}$ 是一个超几何分布. 假设在 N 趋于无穷时, $p=\dfrac{b}{N}$ 保持是一个常数. 参数 n 固定. 证明当 N 趋于无穷时, $\mu_{(N,b,n)}$ 弱收敛到一个二项分布 $B(p,n)$.

证明. 超几何分布的 pmf 是

$$P(X=x)=\frac{\binom{b}{x}\binom{N-b}{n-x}}{\binom{N}{n}}, x=0,1,...,n.$$

令 $p=\dfrac{b}{N}$, 则 $b=pN$, $N-b=(1-p)N$. 注意到, 当 N 充分大时,

$$\binom{N}{n}\approx\frac{N^n}{n!}$$

于是

$$\begin{aligned}
P(X=x)&=\frac{\binom{pN}{x}\binom{(1-p)N}{n-x}}{\binom{N}{n}}\\
&=\frac{\frac{(pN)!}{x!(pN-x)!}\frac{((1-p)N)!}{(n-x)!((1-p)N-(n-x))!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}\\
&\xrightarrow{N\to\infty}\frac{\frac{(pN)^x}{x!}\frac{((1-p)N)^{n-x}}{(n-x)!}}{\frac{N^n}{n!}}\\
&=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}.
\end{aligned}$$

根据可列取值情况下的弱收敛, $\mu_{(N,b,n)}$ 弱收敛于 $\mu_{(p,n)}$. □

Exercise #18. 14 (Slusky 定理)**.** 设 X_n 依分布收敛于 X, Y_n 依概率收敛于 c. 证明:

(a) $X_nY_n\xrightarrow{D}cX$,

(b) $\dfrac{X_n}{Y_n}\xrightarrow{D}\dfrac{X}{c}, (c\neq 0)$.

证明. 断言:

$$X_n\xrightarrow{\mathcal{D}}X, Y_n\xrightarrow{P}c\quad\Rightarrow\quad(X_n,Y_n)\xrightarrow{\mathcal{D}}(X,c).$$

若上述断言成立, 根据连续映射定理, 分别取

$$g(x,y)=x+y,\quad g(x,y)=xy,\quad g(x,y)=\frac{x}{y},$$

即可得出

$$X_n+Y_n\xrightarrow{D}X+c,\quad X_nY_n\xrightarrow{D}cX,\quad \frac{X_n}{Y_n}\xrightarrow{D}\frac{X}{c}.$$

下证上述断言.

Step 1 断言 $(X_n,c)\xrightarrow{\mathcal{D}}(X,c)$. 这等价于

$$\mathbb{E}\{f(X_n,c)\}\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathbb{E}\{f(X,c)\},\quad\forall f\in\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^2).$$

考察一元函数 $g_c(x):=f(x,c)$. 则显然 $g_c\in\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^1)$, 根据 $X_n\xrightarrow{\mathcal{D}}X$, 则

$$\mathbb{E}\{g_c(X_n)\}\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}\{g_c(X)\}.$$

从而 $(X_n,c)\xrightarrow{\mathcal{D}}(X,c)$.

Step 2 断言: $|(X_n,Y_n)-(X_n,c)|\xrightarrow{p}0$. 事实上,

$$|(X_n,Y_n)-(X_n,c)|=|Y_n-c|\xrightarrow{p}0.$$

应用定理 18.8, 即得证. □

Exercise #18. 15. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}, \{Y_n\}_{n\geq 1}$ 是定义在同一个概率空间上的随机变量列, 设 $X_n \xrightarrow{D} X$ 且 $Y_n \xrightarrow{P} 0$. 证明: $X_n + Y_n$ 依分布收敛于 X.

证明. 这是上一个习题的特例. □

Exercise #18. 16. 设实值随机变量列 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 有分布函数 F_n, 且 $X_n \xrightarrow{D} X$. 设 $p > 0$, 证明: 对任意的正数 N,

$$\int_{-N}^{N} |x|^p F(dx) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{-N}^{N} |x|^p F_n(dx) < \infty.$$

注. 由于 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, 则取 $f_N(x) = |x|^p \mathbb{I}_{[-N,N]}(x) \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^1)$, 没有 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{f_N(X_n)\} = \mathbb{E}\{f_N(X)\}$. 于是,

$$\int_{-N}^{N} |x|^p F(dx) = \mathbb{E}\{f_N(X)\} \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\{f_N(X_n)\} = \limsup_{n\to\infty} \int_{-N}^{N} |x|^p F_n(dx) \leq N^p < \infty.$$

证明. 上述证明看上去很美好, 但是 $f_N(x) = |x|^p \mathbb{I}_{[-N,N]}(x)$ 不是连续函数! 怎么办? 用线性函数连起来!

取

$$g_{m,N}(x) = \begin{cases} |x|^p, & |x| \leq N - \dfrac{1}{m}, \\ (|x| - N) \cdot \dfrac{(N - \frac{1}{m})^p}{-\frac{1}{m}}, & N - \dfrac{1}{m} \leq |x| \leq N, \\ 0, & |x| > N. \end{cases}$$

则此时 $g_{m,N}(x) \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^1)$, 且满足对任意的 $m, N > 0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{g_{m,N}(X_n)\} = \mathbb{E}\{g_{m,N}(X)\}.$$

而且还有当 $m \to \infty$ 时, 有 $g_{m,N}(x) \uparrow f_N(x) = |x|^p \mathbb{I}_{[-N,N]}(x)$, 从而根据单调收敛定理,

$$\int_{-N}^{N} |x|^p dF(x) = \mathbb{E}\{f_N(X)\} = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\{g_{m,N}(X)\} \quad \forall N.$$

$$\int_{-N}^{N} |x|^p dF_n(x) = \mathbb{E}\{f_N(X_n)\} = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\{g_{m,N}(X_n)\} \quad \forall N.$$

由于 $g_{m,N}(x) \leq f_N(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{g_{m,N}(X_n)\} \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\{f_N(X_n)\}.$$

于是有

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\{g_{m,N}(X)\} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{g_{m,N}(X_n)\} \leq \limsup_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\{g_{m,N}(X_n)\} = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\{f_N(X_n)\}.$$

从而

$$\int_{-N}^{N} |x|^p dF(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{-N}^{N} |x|^p dF_n(x) \leq N^p < \infty, \quad \forall N.$$

□

Exercise #18. 17. 设实值随机变量列 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 有分布函数 F_n, 且 X 有分布函数 F. 假设对某些 $r>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F_n(x)-F(x)|^r\,dx=0$$

证明: $X_n \xrightarrow{D} X$.

注. 假设存在 F 上的连续点 y 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(y)\neq F(y)$. 则存在 $\varepsilon>0$ 和一个子列 $\{n_k\}$ 使得 $|F_{n_k}(y)-F(y)|>\varepsilon, \forall k$. 证明: 对于适当的 y_1, y_2, $|F_{n_k}(x)-F(x)|>\dfrac{\varepsilon}{2}$, 对要么 $x\in[y_1,y)$, 要么 $x\in(y,y_2]$ 成立. 而这产生了矛盾.

证明. 这里的证明沿着提示的思路. 用反证法, 若不然, 则存在分布函数的子列使得在某一连续点 y 上不收敛.

- 若 $F_{n_K}(y)-F(y)<-\varepsilon, \forall k$, 则当 $x\leq y$ 时,

  $$F_{n_k}(x)-F(x)\leq F_{n_k}(y)-F(y)+F(y)-F(x)<-\varepsilon+\{F(y)-F(x)\}.$$

  由于 F 在 y 点处连续, 于是, 存在区间 $[y_1,y)$ 使得 $F(y)-F(x)<\varepsilon/2$, 从而有

  $$F_{n_k}(x)-F(x)<-\varepsilon/2, \forall x\in[y_1,y).$$

- 若 $F_{n_K}(y)-F(y)>\varepsilon, \forall k$, 则当 $x\geq y$ 时,

  $$F_{n_k}(x)-F(x)\geq F_{n_k}(y)-F(y)+F(y)-F(x)>\varepsilon+\{F(y)-F(x)\}.$$

  由于 F 在 y 点处连续, 于是, 存在区间 $(y,y_2]$ 使得 $F(y)-F(x)<\varepsilon/2$, 从而有

  $$F_{n_k}(x)-F(x)>\varepsilon/2, \forall x\in(y,y_2].$$

上述两种情况都蕴含着

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_{n_k}(x)-F(x)|^r dx\geq|y_1-y|\frac{\varepsilon}{2}>0.$$

这与题设矛盾. 因此, $X_n\xrightarrow{D}X$. □

Exercise #18. 18 (Polya 一致收敛定理)**.** 假设 $\{F_n\}_{n\geq 1}$ 是一列 $\mathbb{R}$ 上的分布函数, 且它们收敛到 $\mathbb{R}$ 上的连续的分布函数 F. 证明: 这样的收敛关于 x 是一致收敛.

注. 首先证明存在点 $x_1,...,x_m$ 使得 $F(x_1)<\varepsilon, F(x_{j+1})-F(x_j)<\varepsilon$, 以及 $1-F(x_m)<\varepsilon$. 接下来说明: 存在 N 使得当 $n>N$ 时, $|F_n(x_j)-F(x_j)|<\varepsilon, 1\leq j\leq m$.

证明. 对每个固定的正整数 k , 考虑以下的序列

$$-\infty=x_{0,k}\leq x_{1,k}\leq\cdots\leq x_{j,k}\leq\cdots\leq x_{k,k}=\infty$$

其中 $x_{j,k}=\inf\left\{x: F(x)\geq\dfrac{j}{k}\right\}$. 于是根据 F 的连续性, $F\left(x_{j,k}\right)\leq\dfrac{j}{k}$, 因此

$$0\leq F\left(x_{j+1,k}\right)-F\left(x_{j,k}\right)\leq\frac{1}{k},\quad 0\leq j<k$$

于是对于任给的 x , 存在 j 使得 $x \in (x_{j,k}, x_{j+1,k}]$ 满足

$$F_n(x)-F(x) \leq F_n\left(x_{j+1,k}\right)-F\left(x_{j,k}\right) \leq F_n\left(x_{j+1,k}\right)-F\left(x_{j+1,k}\right)+\frac{1}{k}$$

和

$$F_n(x)-F(x) \geq F_n\left(x_{j,k}\right)-F\left(x_{j+1,k}\right) \geq F_n\left(x_{j,k}\right)-F\left(x_{j,k}\right)-\frac{1}{k}$$

于是

$$\sup_{x\in(x_{j,k},x_{j+1,k}]}\left|F_n(x)-F(x)\right| \leq \left|F_n\left(x_{j+1,k}\right)-F\left(x_{j+1,k}\right)\right|+\left|F_n\left(x_{j,k}\right)-F\left(x_{j,k}\right)\right|+\frac{1}{k}$$

因此

$$\sup_x\left|F_n(x)-F(x)\right| \leq \max_{1\leq j\leq k}\left|F_n\left(x_{j,k}\right)-F\left(x_{j,k}\right)\right|+\max_{0\leq j\leq k}\left|F_n\left(x_{j,k}\right)-F\left(x_{j,k}\right)\right|+\frac{2}{k}$$

先固定 k 对 n 取极限, 再对 k 取极限即可。 □

Exercise #18. 19. 设 f 是一致连续函数. X,Y 是两个实值随机变量. 假设当 $|x-y|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 证明:

$$|\mathbb{E}\{f(X)\}-\mathbb{E}\{f(X+Y)\}| \leq \varepsilon+2\sup_x|f(x)|P\{|Y|\geq\delta\}.$$

证明. 设 $Z=(X,Y)$ 诱导的测度是 μ, 则

$$\begin{aligned}\left|\int f(x)d\mu-\int f(x+y)d\mu\right| &\leq \left(\int_{|y|<\delta}+\int_{|y|\geq\delta}\right)|f(x)-f(x+y)|d\mu \\ &\leq \varepsilon+2\sup_x|f(x)|\mu\{|y|\geq\delta\} \\ &= \varepsilon+2\sup_x|f(x)|P\{|Y|\geq\delta\}.\end{aligned}$$

□

Exercise #18. 20. 设 $\{X_n\}_{n\geq1},X,Y$ 是实值随机变量, 定义在同一个概率空间上. 假设 $X_n+\sigma Y$ 依分布收敛于 $X+\sigma Y$, 对于任意的 $\sigma>0$. 证明: X_n 依分布收敛于 X.

注. 可以用 *18.19* 的结论.

证明. $\forall f\in\mathscr{C}_{b,Lip}(\mathbb{R}^1),\sigma>0$,

$$\begin{aligned}&|\mathbb{E}\{f(X_n)\}-\mathbb{E}\{f(X)\}| \\ =&|\mathbb{E}\{f(X_n)\}-\mathbb{E}\{f(X_n+\sigma Y)\}+\mathbb{E}\{f(X_n+\sigma Y)\}-\mathbb{E}\{f(X+\sigma Y)\}+\mathbb{E}\{f(X+\sigma Y)\}-\mathbb{E}\{f(X)\}| \\ \leq&I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}I_1&=\left|\mathbb{E}\{f(X_n)\}-\mathbb{E}\{f(X_n+\sigma Y)\}\right|, \\ I_2&=\left|\mathbb{E}\{f(X_n+\sigma Y)\}-\mathbb{E}\{f(X+\sigma Y)\}\right|, \\ I_3&=\left|\mathbb{E}\{f(X+\sigma Y)\}-\mathbb{E}\{f(X)\}\right|.\end{aligned}$$

首先, 根据题目中弱收敛的条件,

$$I_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \forall \sigma > 0.$$

对于 I_1, 由于 f 是 Lipschitz 连续的, $\forall \varepsilon > 0$,

$$I_1 \le \varepsilon + 2\sup_x |f(x)| P\{|\sigma Y| \ge \delta\}, \quad \forall n, \sigma > 0.$$

先令 $n \to \infty$, 再令 $\sigma \to 0$, 有 $I_1 \to 0$, 同理, $I_3 \to 0$.

综上,

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}\{f(X_n)\} - \mathbb{E}\{f(X)\}| = 0, \quad \forall f \in \mathscr{C}_{b,Lip}(\mathbb{R}^1).$$

这表明 X_n 依分布收敛于 X. □

Exercise #18. 21. 设 X 和 Y 是定义在同一个概率空间上的实值独立随机变量. 假设 Y 服从标准正态分布, 令 f 是有界连续函数. 证明:

$$\mathbb{E}\{f(X+\sigma Y)\} = \mathbb{E}\left\{f_\sigma(X)\right\}$$

其中,

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{1}{2}|z-x|^2/\sigma^2} dz$$

证明 $f_\sigma(x)$ 是有界的, 且是任意阶可导的.

证明. 设 $Z = (X, Y)$ 的分布函数是 P^Z, X, Y 的分布函数分别是 P^X, P^Y. 则根据独立性 (Cor 10.1),

$$P^Z = P^X \otimes P^Y.$$

于是根据 f 有界, 应用 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{f(X+\sigma Y)\} &= \iint f(x+\sigma y) dP^Z(x,y) \\
&= \iint f(x+\sigma y) dP^X(x) dP^Y(y) \\
&= \int \left(\int f(x+\sigma y) dP^Y(y) \right) dP^X(x) \\
&= \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\sigma y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy dP^X(x) \\
&= \int \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}|z-x|^2/\sigma^2} dz dP^X(x) \quad (\text{令 } z = x + \sigma y)
\end{aligned}$$

于是,

$$\mathbb{E}\{f(X+\sigma Y)\} = \mathbb{E}\{f_\sigma(X)\}.$$

接下来证明 $f_\sigma(x)$ 是有界的. 由于 f 有界, 存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \le M$, 于是

$$|f_\sigma(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| e^{-\frac{1}{2}|z-x|^2/\sigma^2} dz \le \frac{M}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|z-x|^2/\sigma^2} dz = M.$$

最后证明 $f_\sigma(x)$ 是任意阶可导的. 先考虑一阶导数. 由于

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x},$$

为了交换极限和积分, 我们需要找到一个积分内的函数的控制函数. 考察 Δx 充分小时,

$$\left|f(z)\left(e^{-(z-x-\Delta x)^2}-e^{-(z-x)^2}\right)\right| \le |f(z)|e^{-(z-x)^2}|e^{2z\Delta x+\Delta x^2}-1| \le Me^{-(z-x)^2}(2|z|+|\Delta x|)|\Delta x|.$$

可积, 从而可以交换积分和极限. $\square$

Exercise #18. 22. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}, X$ 是实值随机变量. 证明: $X_n \xrightarrow{D} X$ 当且仅当对任意的有界 $\mathcal{C}^\infty$ 函数 f, 有 $\mathbb{E}\{f(X_n)\} \to \mathbb{E}\{f(X)\}$.

证明. 只需证反方向. 取 (构造)Y 与 $X, \{X_n\}$ 独立, 且服从标准正态分布.

若 $\forall f \in \mathscr{C}_b^\infty$, $\mathbb{E}\{f(X_n)\} \to \mathbb{E}\{f(X)\}$, 特别地, 习题 18.21 中的函数 $f_\sigma(x)$ 是有界的, 且是任意阶可导的. 于是 $\forall \sigma > 0$,

$$\mathbb{E}\{f(X_n+\sigma Y)\} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}\{f(X+\sigma Y)\}.$$

根据习题 18.20, 有 $X_n \xrightarrow{D} X$. $\square$