

## Chapter 21: 中心极限定理

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

**Exercise #21. 1.** 设  $\{X_j\}_{j \geq 1}$  是独立同分布的,  $P(X_j = 1) = P(X_j = 0) = \frac{1}{2}$ . 设  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , 令  $Z_n = 2S_n - n$ . (投  $n$  次硬币时, 若记第  $j$  次投掷  $X_j = 1$  为正面向上,  $X_j = 0$  为反面向上, 则  $Z_n$  是正面超过反面向上的次数.) 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_n}{\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x)$$

其中

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

证明. 只需证  $\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$ . 事实上, 由于  $X_j$  是独立同分布的, 且  $\mathbb{E}\{X_j\} = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{E}\{X_j^2\} = \frac{1}{4}$ , 根据期望方差存在的独立同分布场合的中心极限定理, 有

$$\frac{S_n - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} = \frac{2S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1),$$

即  $\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$ . □

**Exercise #21. 2.** 设  $\{X_j\}_{j \geq 1}$  是独立同参数为 1 的双指数分布的, 密度为  $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ ,  $-\infty < x < \infty$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2} \right) = Z$$

其中  $Z$  服从  $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ . 且收敛是依分布收敛.

注. 可以用 Slutsky 定理和习题 18.14 的结论证明. 这是 Laplace 分布, 不是 Cauchy 分布.

证明. 由于  $\{X_j\}_{j \geq 1}$  是独立同参数为 1 的双指数分布的, 密度为  $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ ,  $-\infty < x < \infty$ . 期望和二阶矩:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X_j\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 0, \\ \mathbb{E}\{X_j^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2. \end{aligned}$$

于是, 方差也是 2, 为有限数. 根据方差有限独立同分布场合的中心极限定理, 有

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \times 0}{\sqrt{2n}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

其中  $Z$  服从标准正态分布.

令  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ , 由于  $\{X_i^2\}_{i=1}^n$  独立同分布, 且  $\mathbb{E}\{X_i^2\} = 2$ , 根据 Kolmogorov 强大数定律, 有

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{a.s.} 2 \Rightarrow Y_n \xrightarrow{P} 2.$$

最后, 由 Slutsky 定理, 有

$$\sqrt{n} \left( \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2} \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sqrt{2n}}}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sqrt{2}Z \cdot \frac{1}{2} = Z \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

□

**Exercise #21. 3.** 构造一系列独立随机变量  $\{X_n\}_{n \geq 1}$ , 使得  $X_j$  依概率收敛于 1, 且  $\mathbb{E}\{X_j^2\} \geq j$ . 设  $Y$  是独立于序列  $\{X_j\}_{j \geq 1}$ ,  $Y$  分布是  $\mathcal{N}(0, 1)$ . 设  $Z_j = YX_j, j \geq 1$ . 证明:

a)  $\mathbb{E}\{Z_j\} = 0$

b)  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_{Z_j}^2 = \infty$

c)  $Z_j$  依分布收敛于  $Z$ , 其中  $Z$  服从标准正态分布.

注. 为构造  $X_j$ , 设  $(\Omega_j, \mathcal{A}_j, P_j)$  是  $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], m(ds))$ , 其中  $m$  是  $[0, 1]$  上的 Lebesgue 测度,  $\mathcal{B}[0, 1]$  是  $[0, 1]$  上的 Borel 集族. 设

$$X_j(\omega) = (j+1)1_{[0, 1/j]}(\omega) + 1_{(1/j, 1]}(\omega),$$

取定理 10.4 中的无穷乘积. 证明 (c) 可以用 Slutsky 定理证明. 注意此时中心极限定理的条件不满足. 因为中心极限定理给出的是充分条件, 而不是必要条件.

证明. 按照提示中的构造, 在概率空间  $(\Omega_j, \mathcal{A}_j, P_j)$  上定义随机变量  $X_j$ . 在  $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, P_0)$  上定义随机变量  $Y$  服从标准正态分布. 定义  $\Omega = \prod_{n=0}^{\infty} \Omega_n, \mathcal{A} = \otimes_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ , 则根据定理 10.4, 存在唯一测度  $P$  使得  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  是概率空间. 将  $Y, X_n$  延拓到概率空间  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  上, 记为  $\tilde{Y}, \tilde{X}_n$ , 根据推论 10.2,  $\tilde{Y}, \tilde{X}_n$  之间相互独立, 且  $\tilde{X}_n$  与原来的  $X_n$  同分布,  $\tilde{Y}$  也服从标准正态分布.

不失一般性, 为使记号与题干中记号相同, 记上述定义出的独立随机变量为  $Y, \{X_n\}_{n \geq 1}$ . 此时,

$$\mathbb{E}\{X_j\} = (j+1) \times \frac{1}{j} + 1 \times \frac{j-1}{j} = 2, \quad \mathbb{E}\{X_j^2\} = (j+1)^2 \times \frac{1}{j} + 1^2 \times \frac{j-1}{j} = j+3 \geq j.$$

且有

$$P(|X_n - 1| > \varepsilon) = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

所以  $X_n$  依概率收敛于 1. 如此定义的  $X_n$  满足题干条件.

a)  $\mathbb{E}\{Z_j\} = \mathbb{E}\{YX_j\} \stackrel{(\text{独立性})}{=} \mathbb{E}\{Y\}\mathbb{E}\{X_j\} = 0 \times 2 = 0.$

- b)  $\text{Var}(Z_j) = \mathbb{E}\{Z_j^2\} = \mathbb{E}\{Y^2 X_j^2\} = \mathbb{E}\{Y^2\} \mathbb{E}\{X_j^2\} = 1 \times (j+3) = j+3 \rightarrow \infty, \quad (j \rightarrow \infty).$
- c) 根据 Slutsky 定理, 根据  $X_j$  依概率收敛于 1,  $Y$  依分布收敛于标准正态分布, 从而  $Z_j = YX_j$  依分布收敛于  $Z = Y \times 1 = Y$ , 其中  $Z$  服从标准正态分布.

□

**Exercise #21. 4.** 设  $\{X_j\}_{j \geq 1}$  是独立同分布的非负随机变量, 且  $\mathbb{E}\{X_j\} = 1, \sigma_{X_1}^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$ . 证明:

$$\frac{2}{\sigma} \left( \sqrt{S_n} - \sqrt{n} \right) \xrightarrow{D} Z,$$

其中  $Z$  服从标准正态分布.

注.

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{S_n} + \sqrt{n})}{\sqrt{n}} \left( \sqrt{S_n} - \sqrt{n} \right).$$

证明. 根据方差有限独立同分布场合的中心极限定理, 有

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{D} Z,$$

而由于

$$\frac{2}{\sigma} \left( \sqrt{S_n} - \sqrt{n} \right) = 2 \cdot \frac{\frac{S_n - n}{\sqrt{n}\sigma}}{1 + \sqrt{\frac{S_n}{n}}},$$

根据独立同分布场合下, 期望存在的 Kolmogorov 强大数定律, 有

$$\sqrt{\frac{S_n}{n}} \xrightarrow{a.s.} 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_n}{n}} \xrightarrow{P} 1,$$

从而根据 Slutsky 定理, 有

$$\frac{2}{\sigma} \left( \sqrt{S_n} - \sqrt{n} \right) \xrightarrow{D} 2Z = Z,$$

其中  $Z$  服从标准正态分布.

□

**Exercise #21. 5.** 设  $\{X_j\}$  是独立同分布的  $\text{Poi}(1)$  的随机变量. 设  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = Z,$$

其中  $Z$  服从标准正态分布.

证明. 设  $X$  服从  $\text{Poi}(\lambda)$ , 则  $\mathbb{E}X = \lambda, \text{Var}(X) = \lambda$ . 根据独立同分布场合的中心极限定理, 有

$$\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{D} Z,$$

当  $\lambda = 1$  时, 即得结论.

□

**Exercise #21. 6.** 设  $Y^\lambda$  是服从  $Poi(\lambda), \lambda > 0$ . 证明:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{Y^\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = Z$$

其中  $Z$  服从标准正态分布. 收敛是依分布收敛.

注. 使用习题 21.5 的结论. 比较  $Y^\lambda$  和  $S_{[n]}, S_{[n]+1}$ .

证明. 用特征函数. 参数为  $\lambda$  的 Poisson 分布的特征函数为

$$\varphi_{Y^\lambda}(t) = \mathbb{E}\{e^{itY^\lambda}\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(X=k) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

记  $Z^\lambda = \frac{Y^\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ , 则  $Z^\lambda$  的特征函数为

$$\varphi_{Z^\lambda}(t) = \mathbb{E}\left\{e^{it \cdot \frac{Y^\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}}\right\} = e^{-it\sqrt{\lambda}} \varphi_{Y^\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = e^{-g_\lambda(t)},$$

其中,

$$g_\lambda(t) = it\sqrt{\lambda} - \lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1).$$

由于当  $\lambda \rightarrow \infty$  时,  $\left|\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right| \rightarrow 0$ , 于是考虑带 Peano 余项的 Taylor 展开, 有

$$g_\lambda(t) = it\sqrt{\lambda} - \lambda\left(i\frac{t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2}{2\lambda} + O\left(\frac{t^3}{\lambda^{3/2}}\right)\right) = \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{t^3}{\lambda^{1/2}}\right).$$

于是,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_{Z^\lambda}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

且  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  在  $t=0$  处连续, 且是标准正态分布的特征函数, 根据逆极限定理,

$$Z^\lambda \xrightarrow{D} Z,$$

其中,  $Z$  服从标准正态分布. □

**Exercise #21. 7.** 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}$$

注. 使用习题 21.5 的结论.

证明. 用习题 21.5 中的记号, 记

$$Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}},$$

由 21.5,  $Y_n \xrightarrow{D} Z$ , 于是, 根据弱收敛的定义, 有

$$P(Y_n \leq 0) \rightarrow P(Z \leq 0) = \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

而

$$P(Y_n \leq 0) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = P(S_n \leq n) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

这就完成了证明.  $\square$

**Exercise #21. 8.** 设  $\{X_j\}_{j \geq 1}$  是独立同分布的随机变量, 且  $\mathbb{E}\{X_j\} = 0$ ,  $\sigma_{X_j}^2 = \sigma^2 < \infty$ . 设  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , 证明:  $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$  不是依概率收敛的.

证明. 若不然, 则根据期望方差存在的中心极限定理  $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$ , 必有

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{P} Z, \quad (n \rightarrow \infty).$$

其中  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , 则还有

$$\frac{S_{2n}}{\sigma\sqrt{2n}} \xrightarrow{P} Z, \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \frac{S_{2n}}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{P} \sqrt{2}Z.$$

于是,

$$\frac{S_{2n} - S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{P} (\sqrt{2} - 1)Z \sim \mathcal{N}(0, 3 - 2\sqrt{2}).$$

而这与

$$\frac{S_{2n} - S_n}{\sigma\sqrt{n}} \stackrel{d}{=} \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1),$$

矛盾! 从而  $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$  不是依概率收敛的.  $\square$

**Exercise #21. 9.** 设  $\{X_j\}_{j \geq 1}$  是独立同分布的随机变量, 且  $\mathbb{E}\{X_j\} = 0$ ,  $\sigma_{X_j}^2 = \sigma^2 < \infty$ . 设  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

注. 设  $Z$  服从  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , 计算  $\mathbb{E}\{|Z|\}$ .

证明. 由于  $\mathbb{E}\{X_j\} = 0$ ,  $\sigma_{X_j}^2 = \sigma^2$ , 有期望方差存在场合下的中心极限定理,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

记  $g_t(x) = |x| \wedge t$  是一个有界连续函数, 则根据弱收敛的定义,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left\{g_t\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right\} = \mathbb{E}\{g_t(Z)\}, \forall t > 0.$$

利用加一项减一项, 对于  $\forall t > 0$ ,

$$\left|\mathbb{E}\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right| \leq \underbrace{\left|\mathbb{E}\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right\} - \mathbb{E}\left\{g_t\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right\}\right|}_{I_1} + \underbrace{\left|\mathbb{E}\left\{g_t\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right\} - \mathbb{E}\{g_t(Z)\}\right|}_{I_2} + \underbrace{\left|\mathbb{E}\{g_t(Z)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right|}_{I_3},$$

针对  $I_1$ , 注意到

$$\left| \mathbb{E} \left\{ \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \right\} - \mathbb{E} \left\{ g_t \left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right\} \right| \leq \mathbb{E} \left| \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} - g_t \left( \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \right) \right| = \mathbb{E} \left\{ \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \mathbb{I} \left( \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geq t \right) \right\}.$$

以及

$$\mathbb{E}\{S_n^2\} = \text{Var}(S_n) + (\mathbb{E}\{S_n\})^2 = n\sigma^2.$$

根据 Chebyshev 不等式,

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \mathbb{I} \left( \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geq t \right) \right\} \leq t \Pr \left( \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geq t \right) \leq t \cdot \frac{1}{t^2} \mathbb{E} \left( \frac{|S_n|^2}{n} \right) \leq \frac{\sigma^2}{t}.$$

不等式两边对  $n$  取极限, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E} \left\{ \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \right\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \right| \leq \frac{\sigma^2}{t} + I_3. \quad (1)$$

对  $I_3$ , 注意到  $g_t(Z) \uparrow |Z|(t \rightarrow \infty)$ , 且

$$\mathbb{E}\{|Z|\} = 2 \int_0^\infty x (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

于是根据 Levi 单调收敛定理  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_3 = 0$ , 再在不等式(1)两边令  $t \rightarrow \infty$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E} \left\{ \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \right\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \right| = 0.$$

这表明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma.$$

□

**Exercise #21. 10.** 设  $\{X_j\}_{j \geq 1}$  是独立同  $(-1, 1)$  上的均匀分布. 设

$$Y_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2 + \sum_{j=1}^n X_j^3}.$$

证明:  $\sqrt{n}Y_n$  收敛.

注.  $\sqrt{n}Y_n$  依分布收敛于  $\mathcal{N}(0, 3)$ .

证明. 对于  $X \sim \text{Unif}(-1, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X\} &= 0, \\ \mathbb{E}\{X^2\} &= \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{E}\{X^3\} &= \int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{2} dx = 0, \end{aligned}$$

对于  $Y_n$  分别考虑分子分母两个部分: 对于分母, 根据  $\{X_i^2\}_{i \geq 1}$  独立同分布, 且  $\mathbb{E}\{X_i^2\} = \frac{1}{3}$ , 根据 Kolmogorov 强大数定律, 有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} \frac{1}{3}.$$

同理, 对于  $\{X_i^3\}_{i \geq 1}$ , 有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3 \xrightarrow{a.s.} 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3 \xrightarrow{P} 0.$$

对于分子, 应用期望, 方差存在的独立同分布场合的中心极限定理, 有

$$\sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{j=1}^n X_j = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\frac{1}{3n}}} \xrightarrow{D} Z, \quad \text{其中 } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

于是, 应用 Slutsky 定理, 有

$$\sqrt{n}Y_n \xrightarrow{D} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}Z}{\frac{1}{3} + 0} = \sqrt{3}Z \sim \mathcal{N}(0, 3).$$

从而  $\sqrt{n}Y_n$  依分布收敛于  $\mathcal{N}(0, 3)$ . □

**Exercise #21. 11.** 设  $\{X_j\}_{j \geq 1}$  i.i.d. 于  $(-j, j)$  上的均匀分布.

a) 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} = Z$$

收敛是依分布收敛, 其中  $Z$  服从正态分布  $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{9}\right)$ .

b) 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}} = Z,$$

其中,  $Z$  服从标准正态分布.

注. a) 证明  $X_j$  的特征函数是  $\varphi_{X_j}(u) = \frac{\sin(u_j)}{u_j}$ ; 计算  $\varphi_{S_n}(u)$  以及  $\varphi_{S_n/n^{3/2}}(u)$ , 接着用平方和公式证明极限是  $e^{-u^2/18}$ .

b) 不是定理 21.2 的应用. **注意** 这里  $\sup_j \mathbb{E}\{|X_j|^{2+\epsilon}\} < \infty$  不满足.

证明. 1. 根据  $X_j$  的特征函数是  $\varphi_{X_j}(u) = \frac{\sin(u_j)}{u_j}$ , 有

$$\varphi_{S_n}(u) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(u) = \prod_{j=1}^n \frac{\sin(u_j)}{u_j} = \frac{\sin(u)}{u} \frac{\sin(2u)}{2u} \cdots \frac{\sin(nu)}{nu},$$

$$\varphi_{S_n/n^{3/2}}(u) = \varphi_{S_n}(u/n^{3/2}) = \frac{\sin(u/n^{3/2})}{u/n^{3/2}} \frac{\sin(2u/n^{3/2})}{2u/n^{3/2}} \cdots \frac{\sin(nu/n^{3/2})}{nu/n^{3/2}}.$$

于是,

$$\log(\varphi_{S_n/n^{3/2}}(u)) = \sum_{j=1}^n \log\left(\frac{\sin(ju/n^{3/2})}{ju/n^{3/2}}\right).$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{ju}{n^{3/2}} \rightarrow 0$ . 于是, 考虑  $\sin(x)$  在 0 附近的 Peano 余项展开, 有

$$\sin\left(\frac{ju}{n^{3/2}}\right) = \frac{ju}{n^{3/2}} - \frac{1}{3!} \frac{j^3 u^3}{n^{9/2}} + o\left(\frac{j^3 u^3}{n^{9/2}}\right).$$

于是,

$$\frac{\sin(ju/n^{3/2})}{ju/n^{3/2}} = 1 - \frac{1}{6} \frac{j^2 u^2}{n^3} + o\left(\frac{j^2 u^2}{n^3}\right).$$

考虑  $\log(1-x)$  在 0 附近带 Peano 余项展开, 有  $\log(1-x) = -x + o(x)$ .

$$\log\left(1 - \frac{1}{6} \frac{j^2 u^2}{n^3} + o\left(\frac{j^2 u^2}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{6} \frac{j^2 u^2}{n^3} + o\left(\frac{j^2 u^2}{n^3}\right).$$

从而

$$\sum_{j=1}^n \log\left(\frac{\sin(ju/n^{3/2})}{ju/n^{3/2}}\right) = -\frac{u^2}{6n^3} \sum_{j=1}^n j^2 + o\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{u^2}{6n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + o\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{u^2}{18} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是,

$$\varphi_{S_n/n^{3/2}}(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{18} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{u^2}{18}\right).$$

2. 首先,  $\sigma_j^2 = \mathbb{E}\{X_j^2\} = \frac{j^2}{3}$ . 于是,

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{j^2}{3}} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{18}}.$$

根据第一问,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{3/2}/3} = Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

由于  $\frac{n^{3/2}/3}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{18}}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ , 从而根据 Slutsky 定理,

$$\frac{S_n}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}} = \frac{S_n}{n^{3/2}/3} \cdot \frac{n^{3/2}/3}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{18}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z.$$

□

**Exercise #21. 12.** 设  $X \in L^2$ , 假设  $X$  与  $\frac{1}{\sqrt{2}}(Y+Z)$  同分布, 其中  $Y, Z$  是独立的, 且  $X, Y, Z$  同分布. 证明:  $X$  服从  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2 < \infty$ .

注. 用迭代证明  $X$  与  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$  同分布, 其中  $X_i$  是独立同分布的,  $n = 2^m$ .

证明. 考虑  $X_1, \dots, X_n$  与  $X \in L^2$  独立同分布 ( $\forall n$ ). 则根据假设,  $X$  与  $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(X_3 + X_4)$  同分布. 从而  $X$  与  $\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(X_3 + X_4) \right\} = \frac{1}{\sqrt{4}} \left( \sum_{j=1}^4 X_j \right)$  同分布. 假设  $X$  与



$\frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=1}^{2^m} X_j$  同分布, 则通过考察  $\{X_j\}_{j=2^{m+1}}^{2^{m+1}}$ , 有

$$X \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^m}} \left( \sum_{j=1}^{2^m} X_j \right) + \frac{1}{\sqrt{2^m}} \left( \sum_{j=2^{m+1}}^{2^{m+1}} X_j \right) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2^{m+1}}} \left( \sum_{j=1}^{2^{m+1}} X_j \right).$$

从而对  $n = 2^m$ , 有  $X$  与  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j$  同分布.

分别对  $X$  和  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j$  计算期望, 有

$$\mathbb{E}\{X\} = 2^{\frac{m}{2}} \mathbb{E}\{X\}, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

这使得  $\mathbb{E}\{X\} = 0$ .

由于  $X \in L^2$  方差有限, 根据期望方差存在的独立同分布场合的中心极限定理,

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n X_n}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

于是,  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . 最后,  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j$  的子列  $\frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=1}^{2^m} X_j$  同分布, 则必有  $X \sim \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=1}^{2^m} X_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \forall m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

关于绝对可积的一些注记.

称随机变量列  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  一致可积, 若

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\{|X_n| \mathbb{I}(|X_n| \geq t)\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

1. 一致可积  $\Rightarrow \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\{|X_n|\} < \infty$ . 根据  $\mathbb{E}|X_n| \leq t + \mathbb{E}\{|X_n| \mathbb{I}(|X_n| \geq t)\}$ , 可见, 若  $t$  充分大时,  $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\{|X_n| \mathbb{I}(|X_n| \geq t)\}$  有限, 则

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\{|X_n|\} < \infty.$$

2. 反之不然. 比如  $Y_n \sim \text{Bernoulli}(1/n)$ ,  $X_n = nY_n$ , 则  $\mathbb{E}\{|X_n|\} = 1, \forall n$ . 但是,

$$\mathbb{E}\{|X_n| \mathbb{I}(|X_n| \geq t)\} = \mathbb{I}_{(-\infty, n]}(t) = \begin{cases} 1, & t \leq n, \\ 0, & t > n. \end{cases}$$

3. 若  $X_n \xrightarrow{D} X$ , 则  $\mathbb{E}|X| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n|$ . 记  $g_t(x) = |x| \wedge t$ , 则  $g_t(x)$  关于  $x$  有界连续. 根据弱收敛的定义,

$$\mathbb{E}g_t(X_n) \rightarrow \mathbb{E}g_t(X).$$

于是

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n| \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n| \wedge t = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{g_t(X_n)\} = \mathbb{E}\{g_t(X)\} = \mathbb{E}\{|X| \wedge t\}.$$

根据 Levi 单调收敛定理, 令  $t \rightarrow \infty$ , 即得  $\mathbb{E}|X| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n|$ .

4. 若  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ , 且  $X_n$  一致可积, 则  $\mathbb{E}X_n \rightarrow \mathbb{E}X$ . 根据

$$\mathbb{E}|X| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n|.$$

以及一致可积性  $\Rightarrow \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\{|X_n|\} < \infty$ , 可得  $\mathbb{E}|X| < \infty$ . 记  $h_t(x) = -t \vee (x \wedge t)$ , 则有  $|X_n - h_t(X_n)| \leq |X_n| \mathbb{I}\{|X_n| \geq t\}$ . 用加一项减一项,

$$|\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X| \leq |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}h_t(X_n)| + |\mathbb{E}h_t(X_n) - \mathbb{E}h_t(X)| + |\mathbb{E}h_t(X) - \mathbb{E}X|.$$

两边取  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ , 有

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}h_t(X_n)| + \underbrace{\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}h_t(X_n) - \mathbb{E}h_t(X)|}_{=0} + |\mathbb{E}h_t(X) - \mathbb{E}X| \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\{|X_n| \mathbb{I}(|X_n| \geq t)\} + \mathbb{E}\{|X| \mathbb{I}(|X| \geq t)\}, \forall t > 0. \end{aligned}$$

再令  $t \rightarrow \infty$ , 根据一致可积性和  $\mathbb{E}|X| < \infty$ , 即得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X| = 0.$$