Chapter 28: Radon-Nikodym 定理

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

Exercise #28. 1. 假设 Q 和 P 是有限测度, 且 $Q \ll P, P \ll Q$. 这时, 我们称 Q 和 P 是等价的, 记作 $Q \sim P$. 证明: $X = \dfrac{dQ}{dP}$ 满足 $X > 0, P$-几乎处处. 即 $P(X \leq 0) = 0$.

证明. 假设我们考虑的问题在可测空间 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上. 由于 $Q \ll P$, 且是有限测度, 根据 RN 定理存在唯一 (a.s. P) 的 $X = \dfrac{dQ}{dP} \geq 0$, 使得 $\displaystyle\int X dP = 1$ 且对于任意 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$Q(A) = \int_A X dP.$$

反证法. 若不然, 记 $B = \{X \leq 0\}$, 则 $P(B) > 0$. 根据测度的定义 $Q(B) \geq 0$, 但是此时根据集合 B 的定义,

$$Q(B) = \int_B X dP \leq 0,$$

于是 $Q(B) = 0$. 根据 $P \ll Q$, 有 $P(B) = 0$, 这与 $P(B) > 0$ 矛盾! 因此, $P(X \leq 0) = 0$. □

Exercise #28. 2. 如果 $Q \sim P$, 设 $X = \dfrac{dQ}{dP}$. 证明: $\dfrac{1}{X} = \dfrac{dP}{dQ}$.

注. 参见习题 *9.8*.

证明. 假设我们考虑的问题在可测空间 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上. 要证明 $\dfrac{1}{X} = \dfrac{dP}{dQ}$, 根据 RN 定理中的唯一性, 只需证明对于任意 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$P(A) = \int_A \frac{1}{X} dQ.$$

其中, X 满足 $\displaystyle\int X\, dP = 1, X > 0$ (a.s. P), 且对于任意 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$Q(A) = \int_A X dP.$$

根据习题 9.7, 用标准方法可以证明积分变换公式, 则

$$\int_A \frac{1}{X} dQ = \int_A \frac{1}{X} X dP = \int_A dP = P(A).$$

□

Exercise #28. 3. 设 μ 是测度使得 $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n$, 其中 P_n 是概率测度, $\alpha_n > 0$. 假设 $Q_n \ll P_n$ 对每个 n 成立. 以及 $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n Q_n, \beta_n \geq 0, \forall n$. 证明: $\nu \ll \mu$.

证明. 假设我们考虑的问题在可测空间 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上. 根据 Levi 单调收敛定理, 显然, μ, ν 是测度.

设 $N \in \mathcal{A}$, 且 $\mu(N) = 0$. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(N) = 0 \Rightarrow P_n(N) = 0, \forall n.$$

因此, 根据 $Q_n \ll P_n$, 对于任意 n, 有 $Q_n(N) = 0$, 即 $\nu(N) = 0$, 即 $\nu \ll \mu$. □

Exercise #28. 4. 设 P, Q 是两个概率, 令 $R = \dfrac{P+Q}{2}$. 证明: $P \ll R$.

证明. 考虑可测空间 $(\Omega, \mathcal{A})$. 先证: R 是一个概率测度.

1. $R : \mathcal{A} \to [0,1]$. 对于任意 $A \in \mathcal{A}$, 有 $R(A) = \dfrac{1}{2}P(A) + \dfrac{1}{2}Q(A) \in [0,1]$.
2. $R(\Omega) = \dfrac{1}{2}P(\Omega) + \dfrac{1}{2}Q(\Omega) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.
3. 对于任意互不相交的事件 $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, 有

$$R\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \frac{P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) + Q\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right)}{2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P(A_j) + Q(A_j)}{2} = \sum_{j=1}^{\infty} R(A_j).$$

接下来证明 $P \ll R$. 设 $N \in \mathcal{A}$, 且 $R(N) = 0$. 则

$$P(N) + Q(N) = 0 \Rightarrow P(N) = 0, Q(N) = 0.$$

因此, $P \ll R$. □

Exercise #28. 5. 假设 $Q \sim P$. 给出一个 P 鞅但不是 Q 鞅的例子. 再给出一个鞅过程的例子, 使它在 P 和 Q 下都是鞅.