# Chapter 13&14: 特征函数

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

**Exercise #14. 1.** 设 $X$ 的 *pdf*, $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ 是一个 *Cauchy* 密度函数. 证明:

$$\varphi_X(u) = e^{-|u|},$$

通过对以 $[-R, R]$ 为直径的半圆围线积分.

证明. $X$ 的特征函数为

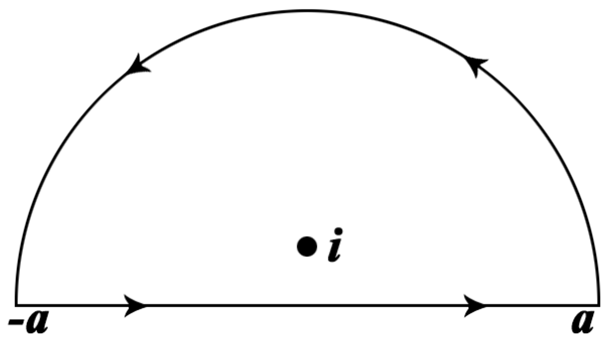
$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\{e^{itX}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx.$$

接下来, 求积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{(x-i)(x+i)} dx.$$

显然, $z = \pm i$ 是被积函数的两个一阶奇点.

考察以下路径: 沿着实直线从 $-a$ 到 $a$, 然后再依逆时针方向沿着以 0 为中心的半圆从 $a$ 到 $-a$. 取 $a$ 为大于 1, 使得虚数单位 $i$ 包围在曲线里面, 如图所示.




路径积分为:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C \frac{e^{itz}}{z^2+1}\, dz.$$

由于 $e^{itz}$ 是一个整函数, 只有奇点 $z = i$ 在路径 $C$ 内部, 根据一阶奇点留数公式, $\mathrm{Res}(f, c) = \lim_{z \to c} (z-c) f(z)$.

$$\begin{aligned} \frac{e^{itz}}{z^2+1} &= \frac{e^{itz}}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) \\ &= \frac{e^{itz}}{2i} \frac{1}{z-i} - \frac{e^{itz}}{2i(z+i)} \end{aligned}$$

于是留数是

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{e^{-t}}{2i}.$$

根据留数定理,

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \frac{e^{-t}}{2i} = \pi e^{-t}.$$

对路径积分做如下的分解,

$$\int_{\text{straight}} + \int_{\text{arc}} = \pi e^{-t}$$

因此,

$$\int_{-a}^{a} = \pi e^{-t} - \int_{\text{arc}}.$$

取极坐标参数化, 令 $z = Re^{i\theta}$, 其中 $\theta \in [0, \pi]$, 于是当 $t > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{\text{arc}} &\leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2 - 1}\,d\theta \\ &= \frac{\pi R}{R^2 - 1} \to 0, \quad \text{当} R \to \infty. \end{aligned}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itz}}{z^2 + 1}\,dz = \pi e^{-t}.$$

当 $t < 0$ 时, 取下半圆讨论, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itz}}{z^2 + 1}\,dz = \pi e^{t},$$

综上,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itz}}{z^2 + 1}\,dz = \pi e^{-|t|}.$$

从而 Cauchy 密度函数的特征函数为

$$\varphi_X(u) = e^{-|u|}.$$

□

**Exercise #14. 2.** 设 $X$ 是一个参数为 $(\alpha, \beta)$ 的 $\Gamma$ 随机变量. 用围线积分证明:

$$\varphi_X(u) = \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta - iu)^{\alpha}}.$$

**注.** 可以使用一个方形的围线.

证明.

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \mathbb{E}e^{itx} &= \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\beta - it)x} dx \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(\beta - it)^{\alpha}} \int_0^{\infty} (\beta - it)^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\beta - it)x} dx \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(\beta - it)^{\alpha}} \Gamma(\alpha) \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta - it)^{\alpha}}. \end{aligned}$$

关键在于证明

$$\int_0^\infty (\beta-it)^\alpha x^{\alpha-1}e^{-(\beta-it)x}dx=\Gamma(\alpha).$$

事实上,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (\beta-it)^\alpha x^{\alpha-1}e^{-(\beta-it)x}dx &= \lim_{N\to\infty}\int_0^N (\beta-it)^\alpha x^{\alpha-1}e^{-(\beta-it)x}dx\\ &= \lim_{N\to\infty}\int_0^{(\beta-it)N} x^{\alpha-1}e^{-x}dx\end{aligned}$$

构造一边在实轴上, 一边在 $\beta-it$ 方向上的围线, 根据 Jordan 引理, 积分在弧线上的部分当 $N\to\infty$ 时趋于 0, 从而

$$\int_0^\infty (\beta-it)^\alpha x^{\alpha-1}e^{-(\beta-it)x}dx=\Gamma(\alpha).$$

□

**Exercise #14. 3.** 设 $X$ 服从标准正态分布, 用围线积分证明:

$$\varphi_X(u)=e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

*证明.*

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^\infty e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac12(x-it)^2-\frac12t^2}dx=e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac12(x-it)^2}dx.$$

考察

$$\oint_L e^{-\frac12z^2}dz=0.$$

其中 $L=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4$,

$$\begin{aligned}&\Gamma_1:-N\to N,\\ &\Gamma_2:N\to N-it,\\ &\Gamma_3:N-it\to -N-it,\\ &\Gamma_4:-N-it\to -N.\end{aligned}$$

而对于 $\Gamma_2$ 和 $\Gamma_4$, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_2}e^{-\frac12z^2}dz\right| &\le \int_0^t\left|e^{-\frac12(N-ix)^2}\right|dx\le te^{-\frac12N^2}\to 0,\quad \text{当}N\to\infty,\\ \left|\int_{\Gamma_4}e^{-\frac12z^2}dz\right| &\le \int_0^t\left|e^{-\frac12(-N-ix)^2}\right|dx\le te^{-\frac12N^2}\to 0,\quad \text{当}N\to\infty.\end{aligned}$$

从而

$$\int_{\Gamma_1}e^{-\frac12z^2}dz+\int_{\Gamma_3}e^{-\frac12z^2}dz=0.$$

于是,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac12(x-it)^2}dx=1.$$

□

**Exercise #14. 4.** 假设 $\mathbb{E}\{|X|^2\} < \infty$ 以及 $\mathbb{E}X = 0$. 证明: $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$, 且

$$\varphi_X(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + o\left(u^2\right), \quad 当 u \to 0.$$

这里 *Landall* 符号 $o(t)$ 表示 $\lim_{t\to\infty} \frac{|g(t)|}{t} = 0$.

证明. 首先,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\{X^2\} \le \mathbb{E}\{|X|^2\} < \infty.$$

从而随机变量的方差存在. 对特征函数在 $u = 0$ 附近做带 Peano 余项的 Taylor 展开:

$$\varphi_X(u) = 1 + (u)\frac{\varphi_X'(u)}{1!} + (u)^2\frac{\varphi_X''(u)}{2!} + o(u^2).$$

由定理 13.2,

$$\varphi_X'(u) = i\mathbb{E}X, \quad \varphi_X''(u) = -\mathbb{E}X^2.$$

因此,

$$\varphi_X(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2\mathbb{E}X^2 + o(u^2).$$

□

**注.** 已有复变中的结论表明:

$$\left|e^{ix} - \sum_{m=0}^{n}\frac{(ix)^m}{m!}\right| \le \min\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!}\right)$$

因此上面的 *Taylor* 展开是合理的.

**Exercise #14. 5.** 设 $X = (X_1, ..., X_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的随机向量. 证明:

*a)* $\varphi_X(u, 0, ..., 0) = \varphi_{X_1}(u), u \in \mathbb{R}$.

*b)* $\varphi_X(u, ..., u) = \varphi_{X_1+...+X_n}(u), u \in \mathbb{R}$.

证明. a)

$$\begin{aligned}\varphi_X(u, 0, ..., 0) &= \mathbb{E}\{e^{i(uX_1+0+...+0X_n)}\}\\ &= \mathbb{E}\{e^{iuX_1}\} = \varphi_{X_1}(u).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\varphi_X(u, ..., u) &= \mathbb{E}\{e^{i(uX_1+...+uX_n)}\}\\ &= \mathbb{E}\{e^{iu(X_1+...+X_n)}\} = \varphi_{X_1+...+X_n}(u).\end{aligned}$$

□

**Exercise #14. 6.** 设 $\bar{z}$ 表示 $z$ 的共轭复数, 证明对于随机变量 $X$:

$$\overline{\varphi_X(u)} = \varphi_X(-u).$$

证明.
$$
\begin{aligned}
\varphi_X(-u) &= \mathbb{E}\{e^{i(-u)X}\} \\
&= \mathbb{E}\{e^{-iuX}\} \\
&= \overline{\mathbb{E}\{e^{iuX}\}} \\
&= \overline{\varphi_X(u)}.
\end{aligned}
$$
□

**Exercise #14. 7.** 设 $X$ 是一个随机变量, 证明:$\varphi_X(u)$ 是一个实值函数当且仅当 $X$ 有对称的分布. *(即, $P^X = P^{-X}$, 其中 $P^X$ 是 $X$ 的诱导分布测度.)*

证明. 先求出线性变换下, 特征函数的性质. 设 $Y = aX + b$, 则
$$\varphi_Y(u) = \mathbb{E}\{e^{iu(aX+b)}\} = e^{iub}\mathbb{E}\{e^{iuaX}\} = e^{ibu}\varphi_X(au).$$

若 $X$ 是对称分布, 则 $X \overset{d}{=} -X$, 再根据唯一性定理 14.1, 于是
$$\varphi_X(u) = \varphi_{-X}(u) = \varphi_X(-u).$$
另一方面, 根据习题 14.76
$$\overline{\varphi_X(u)} = \varphi_X(-u).$$
从而
$$\varphi_X(u) = \overline{\varphi_X(u)}.$$
于是 $\varphi_X(u)$ 是一个实值函数.

反之, 若 $\varphi_X(u)$ 是实值函数, 则 $\varphi_X(u) = \overline{\varphi_X(u)}$. 由习题 14.6, $\varphi_X(u) = \varphi_{-X}(u) = \varphi_X(-u) = \overline{\varphi_X(u)}$, 即 $X$ 与 $-X$ 同分布, 从而 $X$ 是对称分布. □

**Exercise #14. 8.** 证明若 $X$ 和 $Y$ 是独立同分布的, 则 $Z = X - Y$ 有一个对称分布.

证明. 根据习题 14.7, $X$ 有对称分布当且仅当特征函数是偶函数. 于是只需证明 $Z = X - Y$ 的特征函数是偶函数即可.
$$
\begin{aligned}
\varphi_Z(u) = \varphi_{X-Y}(u) &= \mathbb{E}\{e^{iu(X-Y)}\} \\
&= \mathbb{E}\{e^{iuX}e^{-iuY}\} = \mathbb{E}\{e^{iuX}\}\mathbb{E}\{e^{-iuY}\} \quad \text{(独立性)} \\
&= \varphi_X(u)\varphi_Y(-u) = \varphi_X(u)\varphi_X(-u), \quad \text{(同分布)}
\end{aligned}
$$
于是 $\varphi_Z(u) = \varphi_Z(-u)$, 从而 $Z$ 是对称分布. □

**Exercise #14. 9.** 设 $X_1, ..., X_n$ 是独立的, 每一个均值是 0, 每个有有限的三阶矩. 证明:
$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^3\right\} = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left\{X_i^3\right\}.$$

证明.

$$\begin{aligned} E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^3\right\} &= E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^3 + 3\sum_{i\neq j} X_i^2 X_j + 6\sum_{i<j<k} X_i X_j X_k\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left\{X_i^3\right\} + 3\sum_{i\neq j}^{n} \mathbb{E}\left\{X_i^2\right\}\mathbb{E}\left\{X_j\right\} + 6\sum_{i<j<k} \mathbb{E}\left\{X_i\right\}\mathbb{E}\left\{X_j\right\}\mathbb{E}\left\{X_k\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left\{X_i^3\right\}. \end{aligned}$$

□

**Exercise #14. 10.** 设 $\mu_1, ..., \mu_n$ 是概率测度. 假设 $\lambda_j \geq 0 (1 \leq j \leq n)$ 且 $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. 令 $\nu = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j$. 证明: $\nu$ 也是一个概率测度, 且

$$\hat{\nu}(u) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{\mu}_j(u)$$

证明. $\nu$ 是一个概率测度, 因为

1. 非负的集合函数: $\nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j(A) \geq 0$.
2. 规范性: $\nu(\Omega) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j(\Omega) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.
3. 可列可加性: 对于两两不交的集合 $A_1, A_2, ... \in \mathscr{F}$,

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j). \end{aligned}$$

对于特征函数,

$$\begin{aligned}\hat{\nu}(u) &= \int e^{iux} d\nu(x) \\ &= \int e^{iux} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j d\mu_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int e^{iux} d\mu_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{\mu}_j(u).\end{aligned}$$

□

**Exercise #14. 11.** 设 $X$ 服从双指数分布 *(Laplace 分布)*, 参数 $\alpha = 0, \beta = 1$:

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty.$$

证明: $\varphi_X(u) = \dfrac{1}{1+u^2}$.

证明.

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) =& \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx \\ =& \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-|x|} dx \\ =& \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{iux} e^{x} dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{iux} e^{-x} dx \\ =& \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{(iu+1)x} dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{(iu-1)x} dx \\ =& \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{(iu+1)x}}{iu+1} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{(iu-1)x}}{iu-1} \right]_{0}^{\infty} \\ =& \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{iu+1} \right] + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{iu-1} \right] \\ =& \frac{1}{1+u^2}\end{aligned}$$

□

**Exercise #14. 12** (三角分布). 设 $X$ 是随机变量, 密度函数是 $f_X(x) = (1-|x|)\mathbb{I}_{(-1,1)}(x)$. 证明: $\varphi_X(u) = \dfrac{2(1-\cos(u))}{u^2}$.

证明.

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \int_{-1}^{1} e^{iux}(1-|x|)dx \\ &= \int_{-1}^{0} e^{iux}(1+x)dx + \int_{0}^{1} e^{iux}(1-x)dx \\ &= \frac{2-e^{iu}-e^{-iu}}{u^2} \\ &= \frac{2(1-\cos(u))}{u^2}.\end{aligned}$$

□

**Exercise #14. 13.** 设 $X$ 是一个正随机变量. $X$ 的 *Mellin* 变换是指

$$T_X(\theta) = E\left\{X^\theta\right\}$$

定义在使 $\mathbb{E}\{X^\theta\}$ 存在的那些 $\theta$ 上.

*a)* 证明*:*

$$T_X(\theta) = \varphi_{\log X}\left(\frac{\theta}{i}\right)$$

这里假设所有的项都是良定的.

*b)* 证明*:* 若 $X$ 和 $Y$ 是独立的正随机变量, 则

$$T_{XY}(\theta) = T_X(\theta)T_Y(\theta).$$

*c)* 证明 $T_{bX^a}(\theta) = b^\theta T_X(a\theta)$, 对于 $b>0$, $a\theta$ 在 $T_X$ 的定义域中.

证明. a)

$$\varphi_{\log X}\left(\frac{\theta}{i}\right) = \mathbb{E}\{e^{i\frac{\theta}{i}\log X}\} = \mathbb{E}\{X^\theta\} = T_X(\theta).$$

b)

$$\begin{aligned}T_{XY}(\theta) &= \mathbb{E}\{(XY)^\theta\} \\ &= \mathbb{E}\{X^\theta Y^\theta\} \\ &= \mathbb{E}\{X^\theta\}\mathbb{E}\{Y^\theta\} \\ &= T_X(\theta)T_Y(\theta).\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}T_{bX^a}(\theta) &= \mathbb{E}\{(bX^a)^\theta\} \\ &= \mathbb{E}\{b^\theta X^{a\theta}\} \\ &= b^\theta\mathbb{E}\{X^{a\theta}\} \\ &= b^\theta T_X(a\theta).\end{aligned}$$

□

**Exercise #14. 14.** *设 $X$ 是服从对数正态分布的随机变量, 参数是 $(\mu, \sigma^2)$. 求出 Mellin 变换 $T_X(\theta)$. 用 $T_X(\theta)$, 以及 $T_X(k) = \mathbb{E}\{X^k\}$ 计算对数正态分布的 $k$ 阶矩.*

证明.

$$\begin{aligned} T_X(\theta) &= \mathbb{E}\{X^\theta\} \\ &= \int_0^\infty x^\theta \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$

令 $y = \ln x$ ，则 $x = e^y$, $dx = e^y dy$ 。当 $x = 0$ 时，$y = -\infty$ ；当 $x = \infty$ 时，$y = \infty$ 。将上述变量替换代入积分式中

$$\begin{aligned} T_X(\theta) &= \int_{-\infty}^\infty e^{\theta y} \frac{1}{e^{y\sqrt{2\pi\sigma^2}}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) e^y dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\theta y - \frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy \end{aligned}$$

先对指数部分进行整理:

$$\begin{aligned} \theta y - \frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} &= \theta y - \frac{y^2 - 2\mu y + \mu^2}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[y^2 - 2\left(\mu + \sigma^2\theta\right) y + \mu^2\right] \end{aligned}$$

配方法:

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y^2 - 2\left(\mu + \sigma^2\theta\right) y + \mu^2\right] = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(y - \left(\mu + \sigma^2\theta\right)\right)^2 - \left(\mu + \sigma^2\theta\right)^2 + \mu^2\right]$$

代入积分式中:

$$T_X(\theta) = \exp\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}\right)$$

□

**Exercise #14. 15.** *设 $X$ 服从标准正态分布. 证明标准正态分布的矩满足:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X^{2n}\} &= \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1). \\ \mathbb{E}\{X^{2n+1}\} &= 0. \end{aligned}$$

证明. $X$ 是对称分布, 从而 $X^{2n+1}$ 是对称分布, 从而 $\mathbb{E}\{X^{2n+1}\} = 0$.

对于幂次为偶的情况, 根据正态分布的特征函数,

$$\varphi_X(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

根据定理 13.2, 有

$$i^{2n}\mathbb{E}\{X^{2n}\} = \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}u^{2n}}\varphi_X(u)\bigg|_{u=0} = \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}u^{2n}} e^{-\frac{u^2}{2}}\bigg|_{u=0} = (-1)^n e^{-\frac{u^2}{2}} H_{2n}(u),$$

其中, $H_{2n}(u)$ 是概率论中的厄米特多项式. 具体地写出来

$$\begin{aligned}
\varphi_X'(u) &= -ue^{-u^2/2} \\
\varphi_X''(u) &= -e^{u^2/2} + u^2e^{-u^2/2} = \left(-1+u^2\right)e^{-u^2/2} \\
\varphi_X'''(u) &= 2ue^{-u^2/2} + \left(-1+u^2\right)(-u)e^{-u^2/2} = \left(3u-u^3\right)e^{-u^2/2} \\
\varphi_X^{(4)}(u) &= \left(3-3u^2\right)e^{-u^2/2} + \left(-3u^2+u^4\right)e^{-u^2/2} = \left(3-6u^2+u^4\right)e^{-u^2/2}
\end{aligned}$$

用归纳法可以证明:

$$\varphi_X^{(k)}(u) = P_k(u)e^{-u^2/2}, \quad P_k(u) = a_{k0} + a_{k1}u + a_{k2}u^2 + ... + a_{kk}u^k.$$

其中,

$$a_{k0} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^n(n)!}, & k=2n \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

但这样计算起来过于复杂, 得不偿失, 因此好的计算方法是用递推式:

$$\begin{aligned}
E\left(X^k\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{k+1} x^{k+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{k+1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 0 + \frac{1}{k+1} E\left(X^{k+2}\right)
\end{aligned}$$

立刻得到

$$\mathbb{E}\{X^{2n}\} = \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1).$$

□

**Exercise #14. 16.** 设 $X$ 服从标准正态分布. 记

$$M(s) = E\left\{e^{sX}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(sx - \frac{1}{2}x^2\right) dx$$

证明*:* $M(s) = \exp\left\{\dfrac{s^2}{2}\right\}$.

证明.

$$\begin{aligned}
M(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(sx - \frac{1}{2}x^2\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 2sx + s^2 - s^2)\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-s)^2 + \frac{s^2}{2}\right) dx \\
&= \exp\left\{\frac{s^2}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

□

**Exercise #14. 17.** *替换习题 4.16 中的 $s$ 为 $iu$, 可以得到正态分布的特征函数 $\varphi_X(u) = e^{-u^2/2}$. 证明可以通过复变量函数的解析延拓理论来做到这一点.*

*证明.* 带入, 显然.

定义新函数, 定义在 $z \in \mathbb{C}$ 上,

$$f(z) = \mathbb{E}(e^{zX}),$$

则当 $z \in \mathbb{R}$ 时, $f(z) = M(z)$. 且 $f(z)$ 是 $z$ 的解析函数. 于是是一个解析延拓. □

**Exercise #14. 18.** *设 $X$ 服从 $N(\mu, \sigma^2)$. 证明: $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \overset{d}{=} N(0,1)$.*

*证明.* 用

$$\varphi_X = e^{i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2},$$

则 $Y$ 的特征函数是

$$\varphi_Y(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}.$$

□

**Exercise #14. 19.** *设 $X$ 服从参数为 $(\alpha, \beta)$ 的 $\Gamma$ 分布. 可以不用围线积分的方法求出它的特征函数. 假设 $\beta = 1$, 将 $e^{ix}$ 展开为幂级数的形式. 接下来证明:*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n+\alpha-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} (iu)^n$$

*并证明这是一个二项级数, 收敛于*

$$\frac{1}{(1-iu)^{\alpha}}.$$

*证明.* 设随机变量 $X$ 服从形如 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 的伽玛分布，其中 $\beta = 1$ 。目标是通过展开 $e^{ix}$ 为幂级数，来计算该分布的特征函数。设 $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$ ，其概率密度函数（pdf ）为：

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0$$

特征函数的定义是：

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX}\right] = \int_0^{\infty} e^{iux} f_X(x) dx$$

我们从 $e^{iux}$ 的幂级数展开开始：

$$e^{iux} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iux)^n}{n!}$$

因此，特征函数变为：

$$\varphi_X(u) = \int_0^{\infty} e^{iux} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iux)^n}{n!} \right) x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

根据 Fubini 定理, 可以交换积分和求和的次序, 从而, 特征函数是

$$\varphi_X(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} (iu)^n.$$

注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} (iu)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+n-1}{n} (iu)^n,$$

根据负二项式展开, 得到

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{(1-iu)^{\alpha}}.$$

□