Chapter 23: 条件期望

Latest Update: 2025 年 1 月 2 日

对于习题 23.1 到 23.6, 假设 Y 是 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 正的或可积随机变量, $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子 σ-代数.

Exercise #23. 1. 证明: $|\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}| \le \mathbb{E}\{|Y| \mid \mathcal{G}\}$.

证明. 若 $Y \ge 0$, 则 $|\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}| = \mathbb{E}\{|Y| \mid \mathcal{G}\}$.

若 Y 可积, 根据绝对值函数 $\varphi(x) = |x|$ 是凸函数, 则由 Jensen 不等式 (Thm 23.9) 立刻得出结论. □

Exercise #23. 2. 假设 $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, 其中 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{G}$ 的子 σ-代数. 证明:

$$\mathbb{E}\{\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}|\mathcal{H}\} = \mathbb{E}\{Y|\mathcal{H}\}.$$

证明. 由条件: $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. 首先, $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$ 可测的. 要证对于任意的 $H \in \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, 有

$$\int_H \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}|\mathcal{H}\} dP = \int_H \mathbb{E}\{Y|\mathcal{H}\} dP \overset{by\,def}{=} \int_H Y dP.$$

而左边的定义是 $\forall H \in \mathcal{H}$,

$$\int_H \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}|\mathcal{H}\} dP = \int_H \mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\} dP.$$

而 $H \in \mathcal{G}$,

$$\int_H \mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\} dP = \int_H Y dP.$$

显然. □

Exercise #23. 3. 证明: $\mathbb{E}\{Y \mid Y\} = Y \ a.s.$

证明. 由定义, 显然. □

Exercise #23. 4. 证明若 $|Y| \le c \ a.s.$ 则 $\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\} \le c \ a.s.$

证明. 根据引理 23.1, 定理 23.4, 显然. □

Exercise #23. 5. *若 $Y=\alpha$ a.s., 其中 α 是常数, 证明: $\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}=\alpha$ a.s.*

证明. 根据定义, 只需验证, $\forall G\in\mathcal{G}$,

$$\int_G \mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}dP=\int_G \alpha dP.$$

得证. □

Exercise #23. 6. *若 Y 是正的, 证明 $\{\mathbb{E}\{Y\mid\mathcal{G}\}=0\}\subset\{Y=0\}$, 以及 $\{Y=+\infty\}\subset\{\mathbb{E}\{Y\mid\mathcal{G}\}=+\infty\}$ a.s.*

证明. 若不然, 根据 $Y\geq 0$

$$P(Y>0,\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}=0)\neq 0.$$

而根据概率的连续性,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(Y\geq\frac{1}{n},\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}=0\}\right)=P(Y>0,\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}=0\})\neq 0.$$

于是, 存在充分大的 N 使得当 $n>N$ 时,

$$P\left(Y\geq\frac{1}{n},\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}=0\}\right)>0.$$

根据 $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ 的定义, $\forall G\in\mathcal{G}$-meas,

$$\langle G,\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}\rangle=\langle G,Y\rangle.$$

取 $G=\mathbb{I}\{\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})=0\}$, 则

$$\langle G,\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}\rangle=0,\quad \text{(根据运算)}$$

对于 $\langle G,Y\rangle,\forall n>0$,

$$0=\langle\mathbb{I}\{\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})=0\},Y\rangle\geq\langle\mathbb{I}\{\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})=0\},Y\mathbb{I}_{\{Y\geq 1/n\}}\rangle\geq\frac{1}{n}P(Y\geq 1/n,\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})=0).$$

矛盾! 所以 $\{\mathbb{E}\{Y\mid\mathcal{G}\}=0\}\subset\{Y=0\}$ a.s.

同理, 要证

$$\{Y=\infty\}\subset\{\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}=+\infty\}a.s.$$

反证法, 若不然,

$$P(Y=\infty,\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}<\infty)>0.$$

于是存在充分大的 N 使得

$$P(Y=\infty,\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}\leq N)>0.$$

根据 $\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}$ 的定义, $\forall G\in\mathcal{G}$,

$$\int_G \mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}dP=\int_G YdP.$$

取 $G=\{\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}\leq N\}$, 则

$$LHS=\int_{\{\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}\leq N\}}\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}dP\leq NP(\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}\leq N)<\infty.$$

但是,

$$RHS=\int_{\{\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}\leq N\}}YdP\geq\int_{\{Y=\infty,\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\leq N\}\}}YdP=\infty.$$

矛盾! 所以 $\{Y=\infty\}\subset\{\mathbb{E}\{Y|\mathcal{G}\}=+\infty\}a.s..$

□

Exercise #23. 7. 设 X,Y 是独立的, 设 f 是 *Borel* 的使得 $f(X,Y)\in L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$. 令

$$g(x)=\begin{cases}\mathbb{E}\{f(x,Y)\} & \textit{if } |\mathbb{E}\{f(x,Y)\}|<\infty,\\ 0 & \textit{otherwise.}\end{cases}$$

证明: $g(X)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的 *Borel* 函数满足

$$\mathbb{E}\{f(X,Y)\mid X\}=g(X).$$

证明. 注意到,

$$g^{-1}(B)=\begin{cases}\{x\in\mathbb{R}:\mathbb{E}\{f(x,Y)\}\in B\}, & \text{若}0\notin B,\\ \{x\in\mathbb{R}:\mathbb{E}\{f(x,Y)\}=0\}\cup\{x\in\mathbb{R}:\mathbb{E}\{f(x,Y)\}=\infty\}, & \text{若}0\in B.\end{cases}$$

只需证 $\mathbb{E}\{f(x,Y)\}$ 是关于 x 的 Borel 函数即可. 事实上, 根据截口函数的可测性, $f(x,Y)$ 是可积的, 再根据 Fubini 定理,

$$\mathbb{E}\{f(x,Y)\}=\int_{\mathbb{R}}f(x,y)dP_Y(y),$$

是 Borel 可测的. 从而 $g(X)$ 是 Borel 函数.

其次, 由于 X,Y 是独立的, 对于 $\forall A\in\sigma(X)$,

$$\iint_A f(x,y)dP^{(X,Y)}=\int_A\int_{\mathbb{R}}f(x,y)dP_Y(y)dP_X(x)=\int_A\mathbb{E}\{f(x,Y)\}dP_X(x).$$

由于 $f(X,Y)\in L^1$,

$$\int_A g(x)dP_X(x)=\int_A\mathbb{E}\{f(x,Y)\}dP_X(x)=\iint_A f(x,y)dP^{(X,Y)}.$$

于是,

$$\mathbb{E}\{f(X,Y)\mid X\}=g(X).$$

□

Exercise #23. 8. 设 Y 是 $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ 上的随机变量, 假设 $\mathbb{E}\{Y^2\mid X\}=X^2$ 以及 $\mathbb{E}\{Y\mid X\}=X$. 证明 $Y=X$ *a.s.*

证明. 考察 $\mathbb{E}\{(Y-X)^2\}$, 由于 $\forall Z \in L^2(\Omega, \sigma(X), P)$,

$$\mathbb{E}\{Z(Y-X)\} = \mathbb{E}\{Z\mathbb{E}\{Y - \mathbb{E}(Y|X)\}\} = 0.$$

以及

$$\mathbb{E}\{Z(Y^2-X^2)\} = \mathbb{E}\{Z\mathbb{E}\{Y^2 - \mathbb{E}(Y^2|X)\}\} = 0.$$

于是, 在第一个式子取 $Z = X$, 在第二个式子取 $Z = 1$, 可得

$$\mathbb{E}\{(X-Y)^2\} = 0.$$

从而 $Y = X$ a.s. □

Exercise #23. 9. 设 Y 是指数分布随机变量满足 $P(Y > t) = e^{-t}, t > 0$. 计算 $\mathbb{E}\{Y \mid Y \wedge t\}$, 其中 $Y \wedge t = \min(t, Y)$.

证明.

$$\mathbb{E}\{Y|Y \wedge t = y\} = \begin{cases} y, & \text{if } y < t, \\ t+1, & \text{if } y \geq t. \end{cases}$$

这是因为

$$\mathbb{E}\{Y|Y > t\} = \frac{\mathbb{E}\{Y \cdot \mathbb{I}(Y > t)\}}{P(Y > t)} = \frac{\mathbb{E}\{Y \cdot \mathbb{I}(Y > t)\}}{e^{-t}} = t + 1.$$

于是

$$\mathbb{E}\{Y|Y \wedge t\} = Y\mathbb{I}(Y < t) + (t+1)\mathbb{I}(Y \geq t).$$

□

Exercise #23. 10 (Chebyshev 不等式)**.** 证明对于 $X \in L^2$, $a > 0, P(|X| \geq a \mid \mathcal{G}) \leq \dfrac{\mathbb{E}\{X^2 \mid \mathcal{G}\}}{a^2}$. 其中 $P(A \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}\{\mathbb{I}_A \mid \mathcal{G}\}$.

证明. 只需根据 L^2 情况下条件期望的单调性和线性性质:

$$\mathbb{E}\{X^2 \mid \mathcal{G}\} \geq a^2\mathbb{E}\{\mathbb{I}_{|X| \geq a} \mid \mathcal{G}\}.$$

□

Exercise #23. 11 (Cauchy-Schwarz 不等式)**.** 对于 $X, Y \in L^2$, 证明:

$$(\mathbb{E}\{XY|\mathcal{G}\})^2 \leq \mathbb{E}\{X^2|\mathcal{G}\}\mathbb{E}\{Y^2|\mathcal{G}\}.$$

证明. 取 $Z = X - \lambda Y$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}, Z^2 \geq 0$, 再根据 $\Delta \leq 0$ 和线性性即可. □

Exercise #23. 12. 设 $X \in L^2$. 证明

$$\mathbb{E}\{(X-\mathbb{E}\{X|\mathcal{G}\})^2\} \le \mathbb{E}\{(X-\mathbb{E}\{X\})^2\}.$$

证明. 对右边中间加一项减一项 $\mathbb{E}\{X|\mathcal{G}\}$. □

Exercise #23. 13. 设 $p \ge 1, r \ge p$. 证明: 对于关于一个概率测度的期望来说 $L^p \supset L^r$.

证明. 根据 Liapunov 不等式, 显然. □

Exercise #23. 14. 设 Z 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量, 其中 $Z \ge 0$, $\mathbb{E}Z = 1$. 定义一个新的概率测度 Q, 满足 $Q(\Lambda) = \mathbb{E}\{\mathbb{I}_\Lambda Z\}$. 设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个子 σ-代数, 设 $U = \mathbb{E}\{Z \mid \mathcal{G}\}$. 证明:

$$\mathbb{E}_Q\{X \mid \mathcal{G}\} = \frac{\mathbb{E}\{XZ \mid \mathcal{G}\}}{U},$$

其中 X 是任意的有界 $\mathcal{F}$-可测随机变量. 这里 $\mathbb{E}_Q\{X \mid \mathcal{G}\}$ 表示随机变量 X 关于概率测度 Q 的条件期望.

证明. $\forall G \in \mathcal{G}$, 一方面,

$$\int_G X dQ = \int_G XZ dP = \int_G \mathbb{E}\{XZ \mid \mathcal{G}\} dP.$$

另一方面,

$$\int_G \frac{\mathbb{E}\{XZ|\mathcal{G}\}}{\mathbb{E}\{Z|\mathcal{G}\}} dQ = \int_G \frac{\mathbb{E}\{XZ|\mathcal{G}\}}{\mathbb{E}\{Z|\mathcal{G}\}} Z dP = \int_G \mathbb{E}\{XZ \mid \mathcal{G}\} dP.$$

□

Exercise #23. 15. 证明: 赋范线性空间 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是完备的, 其中 $1 \le p < \infty$.

证明. 要证明 L^p 是完备的, 只需证明 L^p 中的柯西列收敛. 设 $\{X_n\}_{n\ge1}$ 是 L^p 中的柯西列, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $m, n > N$ 时,

$$\|X_n - X_m\|_p < \varepsilon.$$

特别地, 取 $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^k}$, 则存在子列 $\{x_{x_k}\}$ 满足

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

定义 $Y_n = \sum_{k=1}^{n} |x_{n_k} - x_{n_{k+1}}|$, 则根据 Minkowski 不等式,

$$\|Y_n\|_p \le \sum_{k=1}^{n} \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_p < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1.$$

且 $\{Y_n\}$ 是单调递增的, 从而存在极限 $Y = \lim_{n\to\infty} Y_n$. 此时

$$\|Y\|_p = \lim_{n\to\infty} \|Y_n\|_p \le 1.$$

即 $Y \in L^p$, 且 $Y < \infty$ a.s. 于是子列 $\{X_{n_m} = X_{n_1} + \sum_{k=1}^{m} (X_{n_{k+1}} - X_{n_k})\}$ 收敛到 X a.s. 最后, 对于一般的 X_n

$$\|X_n - X\|_p \leqslant \|X_n - X_{n_k}\|_p + \|X_{n_k} - X_n\| \to 0.$$

□

Exercise #23. 16. *设 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 以及 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数. 进一步假设 $\mathcal{H}$ 独立于 $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$. 证明: $\mathbb{E}\{X \mid \mathcal{G}\} = \mathbb{E}\{X \mid \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})\}$ a.s.*

证明. Recall that a $\mathcal{E}$-measurable L^2-integrable random variable Y equals $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{E})$ if, and only if,

$$\int_D X d\mathbb{P} = \int_D Y d\mathbb{P}$$

for all $D \in \mathcal{D}$ where $\mathcal{D}$ is a $\cap$-stable generator of the sub-algebra $\mathcal{E}$.(根据单调类定理)

$$\mathcal{E} := \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \quad \mathcal{D} := \{G \cap H; G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}\}$$

First of all, we note that $\mathcal{D}$ is in fact a $\cap$-stable generator of $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Moreover, we have due to the independence of $\mathcal{H}$ and $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$:

$$\begin{aligned}
\int_{G\cap H} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} &= \int 1_H \underbrace{\mathbb{E}\left(1_G X \mid \mathcal{G}\right)}_{\sigma(\sigma(X),\mathcal{G})-\text{ measurable}} d\mathbb{P} \\
&= \int 1_H d\mathbb{P} \cdot \int 1_G \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} \\
&= \int 1_H d\mathbb{P} \int_G X d\mathbb{P} \\
&= \int 1_G 1_H X d\mathbb{P} \\
&= \int 1_{G\cap H} \mathbb{E}\{X|\mathcal{E}\} d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

□

Exercise #23. 17. *设 $\{X_n\}_{n\ge1}$ 独立同分布, 且是 L^1 上的随机变量. 令 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $\mathcal{G}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, ...)$. 证明: $\mathbb{E}\{X_1 \mid \mathcal{G}_n\} = \mathbb{E}\{X_1 \mid S_n\}$, $\mathbb{E}\{X_j \mid \mathcal{G}_n\} = \mathbb{E}\{X_j \mid S_n\}, 1 \le j \le n$. 证明: $\mathbb{E}\{X_j \mid \mathcal{G}_n\} = \mathbb{E}\{X_1 \mid S_n\}, 1 \le j \le n$.*

注. *用习题 23.16 的结论.*

证明. 注意到 $\mathcal{G}_n = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, ...)$. 且 $X_k \perp\!\!\!\perp \sigma(S_n, X_j), k > n, j \leq n$, 则根据习题 23.16 的结论, $\mathbb{E}\{X_1 \mid \mathcal{G}_n\} = \mathbb{E}\{X_1 \mid S_n\}$, $\mathbb{E}\{X_j \mid \mathcal{G}_n\} = \mathbb{E}\{X_j \mid S_n\}, 1 \leq j \leq n$.

最后, 由于同分布, 从而 $\forall A \in \sigma(S_n)$,

$$\int_A X_j dP = \int_A X_1 dP, 1 \leq j \leq n.$$

从而 $\mathbb{E}\{X_j \mid S_n\} = \mathbb{E}\{X_1 \mid S_n\}, 1 \leq j \leq n$. □

Exercise #23. 18. 设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 独立同分布, 且是 L^1 上的随机变量. 证明对于每一个 $1 \leq j \leq n$, 有

$$\mathbb{E}\left\{X_j \mid \sum_{i=1}^n X_i\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

注. *用定理 23.2 的结论, 对称性来源于独立同分布条件.*

证明. 根据上一题的结论,

$$\mathbb{E}\left\{X_1 \mid \sum_{i=1}^n X_i\right\} = ... = \mathbb{E}\left\{X_n \mid \sum_{i=1}^n X_i\right\},$$

且

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{j=1}^n X_j \mid \sum_{i=1}^n X_i\right\} = \sum_{j=1}^n X_j.$$

立刻得出结论. □