Exercise 4: 可数空间上的概率

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

Exercise #4. 1 (二项概率的 Poisson 近似)**.** 设 P 是一个二项概率, 相应成功的概率为 p, 实验次数是 n, 令 $\lambda = pn$, 证明:

$$P(k \text{ 个成功}) = \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left\{\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right)\right\}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

令 $n \to \infty$, 且 p 变化使得 λ 保持不变. 证明对充分小的 p 和充分大的 n,

$$P(k \text{ 个成功}) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \text{其中}\lambda = pn.$$

注记. 一般来说, 这个近似技巧是一个好的近似需要 n 大, p 小, 而且 $\lambda = np$ 要在一个合适的大小, 比如 $\lambda \leq 20$.

证明. 由于 P 是一个二项概率, 那么

$$\begin{aligned} P(k \text{ 个成功}) &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left\{\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right)\right\}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}, \end{aligned}$$

当 $n \to \infty, \lambda$ 是常数时, 由于 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) = \prod_{i=0}^{k-1}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{i}{n}\right) = 1,$$

有

$$\lim_{n\to\infty}P(k \text{ 个成功}) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

于是对充分小的 p 和充分大的 n,

$$P(k \text{ 个成功}) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \text{其中}\lambda = pn.$$

□

Exercise #4. 2 (二项概率的 Poisson 近似 (续))**.** 在上一题的基础上, 记 $p_k = P(\{k\})$, $q_k = 1 - p_k$. 证明 q_k 是二项分布 $B(1-p, n)$ 一个单元的概率. 推导出当 n 充分大和 p 接近 1 时二项分布的 *Poisson* 近似.

证明. 这里题目可能出现了问题, 事实上, 若对于有限样本空间 $|\Omega| = n+1 > 1$ 上的 $q_k = 1 - p_k$, 则 $P(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} q_k = n + 1 - 1 = n \neq 1$, 不是这个样本空间中的概率测度.

为使 q_k 是二项分布 $B(1-p, n)$ 一个样本点的概率, 我们可以定义 $q_k = p_{n-k}$, 即 q_{n-k} 是 $P(\{n-k\})$, 即有 $n-k$ 次试验成功的概率. 于是 $q_{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{n-k} (1-p)^{n-k} p^k$, 是 $B(1-p, n)$ 一个样本点的概率.

于是, 对充分接近 1 的 p, $1-p$ 充分接近 0, 因此对 q_k 应用 Poisson 近似, 有

$$q_k \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{其中} \lambda = (1-p)n.$$

于是, 原本的二项概率测度的 Poisson 近似是

$$p_k = q_{n-k} \approx \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda}, \quad \text{其中} \lambda = (1-p)n.$$

□

Exercise #4. 3. *考虑一个超几何分布. 我们有 m 种颜色, 且对于颜色 i, 我们有 N_i 个球. 令 $N = N_1 + \cdots + N_m$, 称 X_i 是抽出的 n 个球中颜色为 i 的球的个数. 显然 $X_1 + \cdots + X_m = n$. 证明:*

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m) = \begin{cases} \dfrac{\binom{N_1}{x_1} \ldots \binom{N_m}{x_m}}{\binom{N}{n}} & \textit{if } x_1 + \ldots + x_m = n \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

证明. 证明只需要用排列组合. 事实上, 分子中, 组合数 $\binom{N_i}{x_i}$ 表示从第 i 种颜色的球中 (不记顺序地) 抽取 x_i 个球出来, 分母组合数 $\binom{N}{n}$ 表示从 N 个球中, (不计顺序地) 抽取 n 个球出来. 根据无序样本的均匀分布和乘法原理, 既有

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m) = \begin{cases} \dfrac{\binom{N_1}{x_1} \ldots \binom{N_m}{x_m}}{\binom{N}{n}}, & \text{若} x_1 + \ldots + x_m = n \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

□