Chapter 2: 概率公理

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

Exercise #2. 1. 令 Ω 是一个有限集合. 证明: Ω 的所有子集构成的集合 2^Ω 是一个有限集合, 且是 σ-代数.

证明. 由于 Ω 是有限集合, 不妨设 $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, 其中 n 是一个正整数. 对于任意的 $A \subset \Omega$, 即 $A \in 2^\Omega$, 我们有 $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$, 其中 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 是 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中的不同的整数. 记

$$\begin{aligned} T : 2^\Omega &\to \{(\theta_1, \cdots, \theta_n) : \theta_i \in \{0,1\}, i = 1, \cdots, n\}, \\ A &\mapsto \big(I(x_1 \in A), \cdots, I(x_n \in A)\big), \end{aligned}$$

其中, $I(\cdot)$ 是示性函数. 显然, T 是良定的, 且 T 构成了一个一一映射. 于是

$$|2^\Omega| = |\{(\theta_1, \cdots, \theta_n) : \theta_i \in \{0,1\}, i = 1, \cdots, n\}| = 2^n.$$

因此, 由于 2^Ω 是有限集合.

要证明 2^Ω 是 σ-代数, 我们需要证明以下三点:

1. $\varnothing \in 2^\Omega$. 这是因为 $\varnothing \subset \Omega$, 成立.
2. 若 $A \in 2^\Omega$, 则 $A^c \in 2^\Omega$. 这是因为 $A \subset \Omega$, 于是 $A^c = \Omega \backslash A \subset \Omega$, 成立.
3. 若 $A_1, A_2, \ldots \in 2^\Omega$, 则 $\displaystyle\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in 2^\Omega$. 这是因为 $\forall x \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^\infty A_i$, 存在 j 使得 $x \in A_j \subset \Omega$, 于是 $x \in \Omega$, 即 $\displaystyle\bigcup_{i=1}^\infty A_i \subset \Omega$, 成立.

□

Exercise #2. 2 (σ-代数的交还是 σ-代数)**.** 令 $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是定义在抽象空间 Ω 上的任意一族 σ-代数. 证明: $\mathcal{H} = \displaystyle\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$ 也是一个 σ-代数.

证明. 要证明 $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$ 是一个 σ-代数, 我们需要证明以下三点:

1. $\varnothing \in \displaystyle\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$.

2. 若 $A \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$, 则 $A^c \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$.

3. 若 $A_1, A_2, \cdots \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$.

我们一一验证上述命题.

1. 由于 $\mathcal{G}_\alpha$ 是一个 σ-代数, 因此 $\varnothing \in \mathcal{G}_\alpha, \forall \alpha \in A$, 即有 $\varnothing \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$.

2. 若 $A \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$, 则 $A \in \mathcal{G}_\alpha, \forall \alpha \in A$. 由于 $\mathcal{G}_\alpha$ 是一个 σ-代数, 因此 $A^c \in \mathcal{G}_\alpha, \forall \alpha \in A$, 即有 $A^c \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$.

3. 若 $A_1, A_2, \cdots \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$, 则 $A_i \in \mathcal{G}_\alpha, \forall \alpha \in A$. 由于 $\mathcal{G}_\alpha$ 是一个 σ-代数, 因此 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}_\alpha, \forall \alpha \in A$, 从而有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{G}_\alpha$.

□

Exercise #2. 3. 令 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列集合, 证明 *De Morgan* 公式:

a) $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$

b) $(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^c$.

证明. 先证 a). 一方面, 对于任意的 $x \in (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$, 有 $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, 即对于任意的 n, 有 $x \notin A_n$, 即 $x \in A_n^c$, 于是有 $x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$. 因此, $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c \subset \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$. 另一方面, 对于任意的 $x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$, 有 $x \in A_n^c, \forall n$, 即对于任意的 n, 有 $x \notin A_n$, 于是有 $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, 即有 $x \in (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$. 因此, $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$.

对于 b), 取 a) 的结果的补集即可. 即令 $B_n = A_n^c$, 带入 a) 中的公式, 并在等式两边同时取补, 即可得到 b) 的结论. □

Exercise #2. 4. 令 $\mathcal{A}$ 是一个 σ-代数, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一列事件, 证明:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}; \quad \limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}; \quad \text{以及} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

证明. 根据定义, 我们有

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

由于 σ-代数关于可列的交并运算封闭, 因此 $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$ 和 $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$ 成立.

显然, 记号 $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ 意味着 x 属于序列 $\{A_n\}$ 中无穷多个集合, 记号 $x \in \liminf_{n\to} \infty$ 意味着除去 $\{A_n\}$ 中有限个元素外, x 属于剩下的所有集合. 因此, $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$. □

Exercise #2. 5. 令 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列集合, 证明:

$$\limsup_{n\to\infty} 1_{A_n} - \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n} = 1_{\{\limsup_n A_n \setminus \liminf_n A_n\}}$$

其中, $A\backslash B = A\cap B^c$ 当 $B\subset A$.

证明. 断言:

1. $I_{\{\liminf_{n\to\infty} A_n\}} = \liminf_{n\to\infty} I_{A_n}$.
2. $I_{\{\limsup_{n\to\infty} A_n\}} = \limsup_{n\to\infty} I_{A_n}$.
3. 若 $A\supset B$, 则 $I_{A\backslash B} = I_A - I_B$.

根据上述断言, 以及 $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$, 原命题得证. 下面一一验证上述断言.

1. 一方面, 若 $I_{\{\liminf_{n\to\infty} A_n\}}(w) = 1$, 则 $w\in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, 即存在 $n_0\ge 1$, 当 $k\ge n_0$ 时, 可知 $\inf_{k\ge n_0} I_{A_k}(w) = 1$. 于是 $\liminf_{n\to\infty} I_{A_n}(w) = \lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n} I_{A_k}(w) = 1$. 另一方面, 若 $I_{\{\liminf_{n\to\infty} A_n\}}(w) = 0$, 则 $w\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c$, 即任取 $n\ge 1$, 存在 $k_0\ge n$, 使得 $w\in A_{k_0}^c$. 从而 $\inf_{k\ge n} I_{A_k}(w)\equiv 0$, 于是 $\liminf_{n\to\infty} I_{A_n}(w) = \lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n} I_{A_k}(w) = 0$. 综上,

$$I_{\{\liminf_{n\to\infty} A_n\}} = \liminf_{n\to\infty} I_{A_n}.$$

2. 一方面, 若 $I_{\{\limsup_{n\to\infty} A_n\}}(w) = 1$, 则 $w\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, 即对任意的 n, 存在 $k_0\ge n$, 使得 $w\in A_{k_0}$. 从而 $\sup_{k\ge n} I_{A_k}(w)\equiv 1$, 于是 $\limsup_{n\to\infty} I_{A_n}(w) = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n} I_{A_k}(w) = 1$. 另一方面, 若 $I_{\{\limsup_{n\to\infty} A_n\}}(w) = 0$, 则 $w\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$, 即存在 $n_0\ge 1$, 当 $k\ge n_0$ 时, 有 $w\in A_k^c$. 从而 $\sup_{k\ge n_0} I_{A_k}(w) = 0$, 于是 $\limsup_{n\to\infty} I_{A_n}(w) = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n} I_{A_k}(w) = 0$. 综上,

$$I_{\{\limsup_{n\to\infty} A_n\}} = \limsup_{n\to\infty} I_{A_n}.$$

3. 一方面, 当 $w\in A\backslash B$ 时, $I_A(w)=1, I_B(w)=0$, 满足 $I_{A\backslash B}(w) = I_A(w) - I_B(w) = 1$. 另一方面, 当 $w\notin A\backslash B$ 时, 即 $x\in B\subset A$, $I_A(w)=1, I_B(w)=1$, 满足 $I_{A\backslash B}(w) = I_A(w) - I_B(w) = 0$. □

Exercise #2. 6. 令 $\mathcal{A}$ 是 Ω 上的 σ-代数, $B\in\mathcal{A}$. 证明 $\mathcal{F} = \{A\cap B : A\in\mathcal{A}\}$ 也是一个 σ-代数. 试问: 当 $B\subset\Omega$, 但是 $B\notin\mathcal{A}$ 时, 上述命题是否正确?

证明. 由于 σ-代数需要指定定义在某个抽象空间 Ω 上. 为证明, 这里接下来证明 $\mathcal{F}$ 是 B 上的 σ-代数.

先考虑若 $B=\varnothing$, 则 $\mathcal{F}=\varnothing$, $(\varnothing,\varnothing)$ 构成了一个平凡的可测空间.

对于一般的 $B\subset\Omega$, 不失一般性, 可以考虑 $B\notin\mathcal{A}$, 我们需要证明以下三点:

1. $\varnothing, B \in \mathcal{F}$. 根据 $\mathcal{A}$ 是一个 σ-代数, $\varnothing, \Omega \in \mathcal{A}$, 从而 $\varnothing, B \in \mathcal{F}$.

2. $C \in \mathcal{F} \Rightarrow C^c = B \cap C^c \in \mathcal{F}$. 不妨设 $C = \tilde{A} \cap B$, 于是 $B \cap C^c = B \cap (B^c \cup \tilde{A}^c) = B \cap \tilde{A}^c$, 由于 $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ 是 σ-代数, 于是 $\tilde{A}^c \in \mathcal{A}$, 则 $C^c \in \mathcal{F}$.

3. $C_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$. 不妨设 $C_i = A_i \cap B$, 于是 $\cup_{i=1}^{\infty} C_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B = (\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B$, 由于 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ 是 σ-代数, 于是 $\cup_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$.

于是 $(B, \mathcal{F})$ 构成一个可测空间, 无论 B 是否在 $\mathcal{A}$ 中. □

Exercise #2. 7. 令 f 是从 Ω 打到可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 的映射. 令

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : \exists B \in \mathcal{E} \text{ 满足} A = f^{-1}(B)\}.$$

证明: $\mathcal{A}$ 是 Ω 上的 σ-代数.

证明. 根据题意, A 是可测空间中元素 B 的原像. 这里有必要事先定义原像. 以下关于原像的内容参考了 [**prob**]. 对于任何 $B \subset Y$, 称

$$f^{-1}B \triangleq \{f \in B\} = \{x : f(x) \in B\}$$

为**集合 B 在映射 f 下的原像**. 对于任何 Y 上的集合系 $\mathcal{E}$, 称

$$f^{-1}\mathcal{E} \triangleq \{f^{-1}B : B \in \mathcal{E}\}$$

为**集合系 $\mathcal{E}$ 在映射 f 下的原像**.

这里使用集合原像的若干性质:

(i) 对于集合的原像, 有 $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. 事实上, 若存在 $w \in f^{-1}(\varnothing) = \{x : f(x) \in \varnothing\}$, 即 $f(w) \in \varnothing$, 而这与空集的定义矛盾, 因此 $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

(ii) $\left(f^{-1}(B)\right)^c = f^{-1}(B^c), \forall B \in \mathcal{E}$. 事实上, $\left(f^{-1}(B)\right)^c = \{x : f(x) \in B\}^c = \{x : f(x) \in B^c\} = f^{-1}(B^c)$.

(iii) 对于任意的指标集 T, 有 $\cup_{t \in T} f^{-1}(B_t) = f^{-1}\left(\cup_{t \in T} B_t\right)$. 事实上, $\cup_{t \in T} f^{-1}(B_t) = \cup_{t \in T}\{x : f(x) \in B_t\} = \{x : f(x) \in \cup_{t \in T} B_t\} = f^{-1}\left(\cup_{t \in T} B_t\right)$.

于是,

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$. 由于 $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$, 且 $\varnothing \in \mathcal{E}$, 因此 $\varnothing \in \mathcal{A}$.

2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$. 对于 $A \in \mathcal{A}$, 不妨记 $A = f^{-1}(B)$, 于是有 $A^c = f^{-1}(B^c)$, 而根据 $\mathcal{E}$ 是 σ-代数, 有 $B^c \in \mathcal{E}$, 于是有 $A^c \in \mathcal{A}$.

3. $A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. 对于 $A_i \in \mathcal{A}$, 不妨记 $A_i = f^{-1}(B_i)$, 于是有 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} B_i)$, 而根据 $\mathcal{E}$ 是 σ-代数, 有 $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{E}$, 于是有 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

因此, $\mathcal{A}$ 是 Ω 上的 σ-代数. □

Exercise #2. 8. 令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数, 考察

$$\mathcal{A}=\{A\subset\mathbb{R}:\exists B\in\mathcal{B}\text{ 满足}A=f^{-1}(B)\},$$

其中 $\mathcal{B}$ 是像空间 $\mathbb{R}$ 上的 *Borel* σ-代数. 证明: $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$, 这里 $\mathcal{B}$ 是定义域 $\mathbb{R}$ 上的 *Borel* σ-代数.

证明. 只需证任取 $\mathcal{A}$ 中的元素 $A=f^{-1}(B)$ 满足 $f^{-1}(B)\in\mathcal{B}$. 根据连续映射的性质, 开集的原像是开集. 由于像空间中的 $\mathcal{B}$ 是由开集生成的 σ-代数, 因此包含所有的开集, 因此 $f^{-1}(B)\in\mathcal{B}$. □

对于习题 2.9 到 2.15, 我们假设一个固定的抽象空间 Ω, σ-代数 $\mathcal{A}$, 和一个定义在 $(\Omega,\mathcal{A})$ 上的概率测度 P. 我们考虑一列事件 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 以及事件 A,B 总在事件域 $\mathcal{A}$ 中.

Exercise #2. 9. 对于 $A,B\in\mathcal{A}$, 若 $A\cap B=\varnothing$, 证明 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

证明. 先证明 $P(\varnothing)=0$, 由于概率测度的可列可加性,

$$P(\varnothing)=P(\cup_{i=1}^{\infty}\varnothing)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing),$$

由于 $P(\varnothing)\in[0,1]$, 这使得 $P(\varnothing)=0$.

根据概率测度的可列可加性, 取

$$A_1=A,A_2=B,A_i=\varnothing,i\geq 3,$$

显然满足 $A_n\cap A_m=\varnothing,n\neq m$, 于是有

$$P(A\cup B)=P\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=P(A)+P(B)+0=P(A)+P(B).$$

□

Exercise #2. 10. 对于 $A,B\in\mathcal{A}$, 证明 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

证明. 对于 $A,B\in\mathcal{A}$, 有 $A\cup B=A+B\cap A^c$, 其中 $+$ 表示集合的无交并. 于是根据习题 #2.9, #2.12, 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\cap A^c)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

□

Exercise #2. 11. 对于 $A\in\mathcal{A}$, 证明: $P(A)=1-P(A^c)$.

证明. 根据概率测度的有限可加性, 由于 $A, A^c \in \mathcal{A}, A \cap A^c = \varnothing, A \cup A^c = \Omega$, 因此,

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c),$$

即有 $P(A) = 1 - P(A^c)$. □

Exercise #2. 12. 对于 $A, B \in \mathcal{A}$, 证明: $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

证明. 对于 $A, B \in \mathcal{A}$, 有 $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) + (A \cap B^c)$, 其中 $A \cap B, A \cap B^c$ 互不相交. 于是根据概率测度的有限可加性, 有

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c),$$

即有

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B).$$

□

Exercise #2. 13. 设 $A_1, \cdots, A_n$ 是给定的事件. 证明容斥原理:

$$\begin{aligned} P\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = &\sum_i P\left(A_i\right) - \sum_{i<j} P\left(A_i \cap A_j\right) \\ &+ \sum_{i<j<k} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \ldots + (-1)^{n+1} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) \end{aligned}$$

证明. 证明用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, 等式显然成立, 当 $n = 2$ 时, 根据习题 #2.10, 成立.

假设当 $n = t$ 时等式成立, 即

$$\begin{aligned} P\left(\cup_{i=1}^t A_i\right) = &\sum_i P\left(A_i\right) - \sum_{i<j} P\left(A_i \cap A_j\right) \\ &+ \sum_{i<j<k} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \ldots + (-1)^{t+1} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_t\right) \end{aligned}$$

则当 $n = t + 1$ 时,

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{t+1} A_i) = &P(\cup_{i=1}^t A_i) + P(A_{t+1}) - P(\cup_{i=1}^t A_i \cap A_{t+1}) \\ = &\sum_{i=1}^t P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le t} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{t+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_t) \\ &+ P(A_{t+1}) - P(\cup_{i=1}^t A_i \cap A_{t+1}) \\ = &\sum_{i=1}^{t+1} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le t+1} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{t+2} P(A_1 \cap \cdots \cap A_t \cap A_{t+1}) \end{aligned}$$

成立. 于是由数学归纳法, 原命题得证. □

Exercise #2. 14. 假设 $P(A)=\dfrac{3}{4}, P(B)=\dfrac{1}{3}$. 证明: $\dfrac{1}{12}\le P(A\cap B)\le\dfrac{1}{3}$.

证明. 根据概率测度的单调性, $A\cap B\subset B$, 因此 $P(A\cap B)\le P(B)=\dfrac{1}{3}$. 另一方面, 根据习题 #2.10, 有

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ge\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-1=\frac{1}{12}.$$

于是得证. □

Exercise #2. 15 (次可加性)**.** 令 $A_i\in\mathcal{A}$ 是一列事件. 证明:

$$P\left(\cup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}P\left(A_i\right)$$

对于所有的 n, 以及

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}P\left(A_i\right)$$

证明. 只需证明

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}P\left(A_i\right)$$

因为对于有限 n, 可以通过设定 $A_t=\varnothing, t\ge n+1$ 来得到第一个不等式.

对这一列事件 A_i, 我们采用以下的不交化方法:

$$\begin{aligned}
&B_1\triangleq A_1,\\
&B_2\triangleq A_2\backslash A_1\subset A_2,\\
&B_3\triangleq A_3\backslash(A_1\cup A_2)\subset A_3,\\
&\quad\cdots,\\
&B_n\triangleq A_n\backslash\left(\cup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\subset A_n,\\
&\quad\cdots.
\end{aligned}$$

于是有 $B_i\cap B_j=\varnothing, i\ne j$, 且 $\cup_{i=1}^{n}A_i=\cup_{i=1}^{n}B_i$, 于是根据概率测度的有限可加性, 有

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=P\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)\le\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

□

Exercise #2. 16 (Bonferroni 不等式)**.** 令 $A_i\in\mathcal{A}$ 是一列事件. 证明:

a) $P\left(\cup_{i=1}^{n}A_i\right)\ge\sum_{i=1}^{n}P\left(A_i\right)-\sum_{i<j}P\left(A_i\cap A_j\right)$,

b) $P\left(\cup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}P\left(A_i\right)-\sum_{i<j}P\left(A_i\cap A_j\right)+\sum_{i<j<k}P\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)$.

证明. 用归纳法完成我们的证明.

a) 当 $n=2$ 时, 根据习题 #2.10, 有 $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$. 假设当 $n=t$ 时不等式成立, 即

$$P\left(\cup_{i=1}^{t}A_i\right)\geq\sum_{i=1}^{t}P\left(A_i\right)-\sum_{1\leq i<j\leq t}P\left(A_i\cap A_j\right),$$

则当 $n=t+1$ 时,

$$\begin{aligned}P\left(\cup_{i=1}^{t+1}A_i\right)=&P\left(\cup_{i=1}^{t}A_i\right)+P(A_{t+1})-P\left(\cup_{i=1}^{t}A_i\cap A_{t+1}\right)\\ \geq&\sum_{i=1}^{t+1}P\left(A_i\right)-\sum_{1\leq i<j\leq t}P\left(A_i\cap A_j\right)-P\left(\cup_{i=1}^{t}A_i\cap A_{t+1}\right)\\ \geq&\sum_{i=1}^{t+1}P\left(A_i\right)-\sum_{1\leq i<j\leq t+1}P\left(A_i\cap A_j\right).\qquad\text{(根据次可加性)}\end{aligned}$$

b) 当 $n=2$ 时, 根据习题 #2.10, 有 $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$. 当 $n=3$ 时, 根据习题 #2.13(容斥原理), 有 $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)$. 假设当 $n\leq t$ 时不等式成立, 即

$$P\left(\cup_{i=1}^{t}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{t}P\left(A_i\right)-\sum_{1\leq i<j\leq t}P\left(A_i\cap A_j\right)+\sum_{1\leq i<j<k\leq t}P\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right),$$

则当 $n=t+1$ 时, 需要用到 a) 的不等式,

$$\begin{aligned}P\left(\cup_{i=1}^{t+1}A_i\right)=&P\left(\cup_{i=1}^{t-1}A_i\right)+P(A_t)+P(A_{t+1})-P\left(\cup_{i=1}^{t-1}A_i\cap A_t\right)-P\left(\cup_{i=1}^{t-1}A_i\cap A_{t+1}\right)-P(A_t\cap A_{t+1})\\ &+P\left(\left\{\cup_{i=1}^{t-1}A_i\right\}\cap A_t\cap A_{t+1}\right)\\ \leq&\sum_{i=1}^{t-1}P\left(A_i\right)-\sum_{1\leq i<j\leq t-1}P\left(A_i\cap A_j\right)+\sum_{1\leq i<j<k\leq t-1}P\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)+P(A_t)+P(A_{t+1})\\ &-P\left(\cup_{i=1}^{t-1}A_i\cap A_t\right)-P\left(\cup_{i=1}^{t-1}A_i\cap A_{t+1}\right)-P(A_t\cap A_{t+1})+P\left(\left\{\cup_{i=1}^{t-1}A_i\right\}\cap A_t\cap A_{t+1}\right)\\ \leq&\sum_{i=1}^{t+1}P\left(A_i\right)-\sum_{1\leq i<j\leq t-1}P\left(A_i\cap A_j\right)+\sum_{1\leq i<j<k\leq t-1}P\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)+\sum_{i=1}^{t-1}P(A_i\cap A_t\cap A_{t+1})\\ &-\sum_{i=1}^{t-1}P(A_i\cap A_t)-\sum_{1\leq i<j\leq t-1}P(A_i\cap A_j\cap A_t)\\ &-\sum_{i=1}^{t-1}P(A_i\cap A_{t+1})-\sum_{1\leq i<j\leq t-1}P(A_i\cap A_j\cap A_{t+1})\\ &-P(A_t\cap A_{t+1})\\ \leq&\sum_{i=1}^{t+1}P\left(A_i\right)-\sum_{1\leq i<j\leq t+1}P\left(A_i\cap A_j\right)+\sum_{1\leq i<j<k\leq t+1}P\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)\end{aligned}$$

□

Exercise #2. 17. *假设 Ω 是无穷集合 (无论是否可数), 令 $\mathcal{A}$ 是由要么有有限元素, 要么有有限元素的补集的集合构成的集族. 证明 $\mathcal{A}$ 是代数, 但不是 σ-代数.*

证明. 记

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \text{ 是有限集, 或} A^c \text{ 是有限集}\}.$$

要证明 $\mathcal{A}$ 是一个代数, 只需证空集, 余集, 有限并运算封闭.

1. 空集没有元素, 因此在 $\mathcal{A}$ 中.

2. 若 $E \in \mathcal{A}$, 则 E 是有限集, 或者 E^c 是有限集. 于是 E^c 是有限集, 或者 $(E^c)^c = E$ 是有限集. 因此, $\mathcal{A}$ 对于取余运算封闭.

3. 若 $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, 定义 $E = \cup_{i=1}^n E_i$. 若每一个 E_i 都是有限集合, 那么 E 也是有限集合. 若存在某个 E_j 是无限集合, 它的余集 E_j^c 是有限集合, 那么 $(\cup_{i=1}^n E_i)^c = \cap_{i=1}^n E_i^c \subset E_j^c$ 是有限集合. 因此, $\mathcal{A}$ 对于有限并运算封闭.

下面说明 $\mathcal{A}$ 不是 σ-代数.

问题出在"若 E_i 是有限集合, 那么 $\cup_{i=1}^\infty E_i$ 是有限集合"这一点. 事实上, 对于无穷集合 Ω, 无限并运算可能是无限集合. 例如, 取 $\Omega = \mathbb{N}$, 对于 $E_i = \{i\}$, 则 $\cup_{i=1}^\infty E_i = \mathbb{N}$ 是无限集合. 因此, $\mathcal{A}$ 不是 σ-代数.

□

命题 (等价性). *以下两种集合极限的定义是等价的:*

1. *若 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, 我们认为 $\{A_n\}$ 的极限存在, 并把*

$$\lim_{n\to\infty} A_n \triangleq \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

   称为它的极限.

2. *若存在集合 A 使得,*

$$\lim_{n\to\infty} I_{A_n}(w) = I_A(w), \forall w \in \Omega,$$

   则称 A_n 收敛到 A.

证明. $1 \Rightarrow 2$. 定义集合 $A \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. 往证 $\lim\limits_{n\to\infty} I_{A_n}(w) = I_A(w)$ 逐点收敛. 当 $w \in A = \bigcup\limits_{n=1}^\infty \bigcap\limits_{k=n}^\infty A_k$ 时, 存在 n_0 使得对于任意的 $k \geq n_0$, 有 $w \in A_k$, $I_{A_k}(w) = 1$, 于是有 $\lim\limits_{k\to\infty} I_{A_k}(w) = 1, w \in A$. 当 $w \in A^c = \left(\bigcap\limits_{n=1}^\infty \bigcup\limits_{k=n}^\infty A_k\right)^c = \bigcup\limits_{n=1}^\infty \bigcap\limits_{k=n}^\infty A_k^c$ 时, 存在 n_0' 使得对于任意的 $k \geq n_0'$, 有 $w \in A_k^c$, $I_{A_k}(w) = 0$, 于是有 $\lim\limits_{k\to\infty} I_{A_k}(w) = 0, w \in A^c$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} I_{A_n}(w) = I_A(w), \forall w \in \Omega.$$

$2 \Rightarrow 1$. 由于示性函数是二值函数, 因此若存在集合 A 使得,

$$\lim_{n\to\infty} I_{A_n}(w) = I_A(w), \forall w \in \Omega,$$

则有对 $w \in A$, 存在 n_0 使得对于任意的 $n \geq n_0$, 有 $I_{A_n}(w) = 1$, 即 $w \in \bigcup\limits_{n=1}^\infty \bigcap\limits_{k=n}^\infty A_k$, 即 $w \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n, A \subset \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. 同理, 对 $w \in A^c$, 存在 n_0' 使得对于任意的 $n \geq n_0'$, 有 $I_{A_n}(w) = 0$, 即

$w \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c$, 即 $w \in \left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c$, $A^c \subset \left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c$. 于是有

$$A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset A.$$

从而有

$$A = \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

□