Chapter 20: 大数定律

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

实变函数技巧: 函数收敛到点上

$$\left\{x \mid \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\right\} = \bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\{x || f_k(x) - f(x) |< 1/l\}.$$

函数收敛到无穷的点集:

$$E_{\infty} := \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\right\} = \bigcap_{M=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n\geq N}\{x : f_n(x) \geq M\}$$

$$E_{-\infty} := \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty\right\} = \bigcap_{M=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n\geq N}\{x : f_n(x) \leq -M\}$$

Exercise #20. 1 (一个弱化版本的大数定律)**.** 设 $\{X_j\}$ 是一列随机变量, 使得 $\sup_j \mathbb{E}\{X_j^2\} = c < \infty$, $\mathbb{E}\{X_jX_k\} = 0$ 当 $j \neq k$. 设 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

a) 证明: $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{c}{n\varepsilon^2}, \forall\varepsilon > 0$;

b) $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{L^2} 0, \frac{1}{n}S_n \xrightarrow{P} 0$.

注. 这里放松了常见的 *i.i.d.* 假设.

证明. a) 考察 $\mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{n}S_n\right)^2\right\}$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{n}S_n\right)^2\right\} &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left\{S_n^2\right\} = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j^2 + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} X_jX_k\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\{X_j^2\} \leq \frac{c}{n}.\end{aligned}$$

由 Markov 不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{n}S_n\right)^2\right\}}{\varepsilon^2} \leq \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

□

Exercise #20. 2. 设 $\{Y_j\}_{j\geq 1}$ 是一列独立的二项随机变量, 定义在相同的概率空间上, 服从 $Bernoulli(p)$. 令 $X_n=\sum_{j=1}^n Y_j$. 证明: X_j 服从 $Binomial(j,p)$, 且 $\frac{X_j}{j}\xrightarrow{a.s.}p$.

证明. Y_i 的特征函数为 $\varphi_{Y_i}(t)=1-p+pe^{it}$, 由独立性, X_j 的特征函数为 $\varphi_{X_j}(t)=\left(1-p+pe^{it}\right)^j$. 这是一个二项分布的特征函数, 由特征函数的唯一性定理, X_j 服从 $Binomial(j,p)$.

根据独立同分布场合下, 期望方差存在的强大数定律, $\mathbb{E}\{Y_1\}=p, \mathrm{Var}(Y_j)=p(1-p)<\infty$, 有

$$\frac{X_j}{j}=\frac{1}{j}\sum_{i=1}^j Y_i\xrightarrow{a.s.}\mathbb{E}\{Y_1\}=p.$$

□

Exercise #20. 3. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且 $X_j\in L^1$. 令 $Y_j=e^{X_j}$. 证明:

$$\left(\prod_{j=1}^n Y_j\right)^{\frac{1}{n}}\xrightarrow{a.s.}e^{\mathbb{E}\{X_1\}}.$$

证明. 由于 X_i 是独立同分布的随机变量, 且是 L^1 的, 有 $\mathbb{E}\{X_1\}=\cdots=\mathbb{E}\{X_n\}=\mu\in\mathbb{R}^1$. 根据 Kolmogorov 强大数定律, 对题目中式子取对数, 有

$$\log\left(\left(\prod_{j=1}^n Y_j\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\xrightarrow{a.s.}\mathbb{E}\{X_1\}.$$

由于对数函数是连续函数, 根据连续映射定理, 有

$$\left(\prod_{j=1}^n Y_j\right)^{\frac{1}{n}}\xrightarrow{a.s.}e^{\mathbb{E}\{X_1\}}.$$

□

Exercise #20. 4. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且 $X_j\in L^1,\mathbb{E}\{X_j\}=\mu$. 设 $\{Y_j\}$ 也是一列独立同分布的随机变量, 且 $Y_j\in L^1,\mathbb{E}\{Y_j\}=\nu\neq 0$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{j=1}^n Y_j}\sum_{j=1}^n X_j=\frac{\mu}{\nu}\qquad a.s.$$

证明. 根据 Kolmogorov 强大数定律 (独立同分布 + 期望存在) 和连续映射定理 ($f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $\mathbb{R}^1\backslash\{0\}$ 上连续), 只需证: 设随机变量 $Z_n\xrightarrow{a.s.}a, W_n\xrightarrow{a.s.}b$, 则 $Z_nW_n\xrightarrow{a.s.}ab$.

根据几乎处处收敛的定义,

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{|Z_n-a|>\varepsilon\})=0,\quad\forall\varepsilon>0,$$
$$P(\limsup_{n\to\infty}\{|W_n-b|>\varepsilon\})=0,\quad\forall\varepsilon>0.$$

即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时, 有

$$P(|Z_n - a| \le \varepsilon) = 1,$$
$$P(|W_n - b| \le \varepsilon) = 1.$$

由于 $Z_nW_n = (Z_n - a + a)(W_n - b + b)$, 于是有如下的拆分:

$$\begin{aligned}
|Z_nW_n - ab| &= |(Z_n - a)(W_n - b) + a(W_n - b) + b(Z_n - a)| \\
&\le |Z_n - a|\,|W_n - b| + |a|\,|W_n - b| + |b|\,|Z_n - a| \\
&< \varepsilon^2 + 2\,|a|\,\varepsilon + 2\,|b|\,\varepsilon. \quad a.s.P \text{ 当} n > N(\varepsilon)\text{时}.
\end{aligned}$$

于是记 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^2 + 2\,|a|\,\varepsilon + 2\,|b|\,\varepsilon$, 则 $\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时, 有

$$P(|Z_nW_n - ab| \le \tilde{\varepsilon}) = 1.$$

即 $Z_nW_n \xrightarrow{a.s.} ab$. □

Exercise #20. 5. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且 $X_j \in L^1$. 假设 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \nu)$ 依分布收敛于某个随机变量 Z, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \nu \qquad a.s.$$

注. 若 $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \nu)$, 首先证明: $\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n$ 依分布收敛于 0.

证明. 由于 $\{X_j\}$ 独立同分布且期望有限, 记 $\mu = \mathbb{E}X_j$, 则根据 Kolmogorov 强大数定律, 有

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{a.s.} \mu.$$

由于 $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \nu)$ 依分布收敛于某个随机变量 Z, 则对 $\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n$, 根据 Slutsky 定理, 有 $\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n$ 依分布收敛于 0, 从而依概率收敛于 0.

即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N$,

$$P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n\right|\right) = P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \nu)\right|\right) < \varepsilon.$$

从而 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{P} \nu$, 而 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{a.s.} \mu$, 从而 $\mu = \nu$. □

Exercise #20. 6. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且 $X_j \in L^p$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^p = \mathbb{E}\{X^p\}$$

证明. 记 $Y_j = X_j^p \in L^1$, 则根据 Kolmogorov 强大数定律, 立刻得出结论. $\square$

Exercise #20. 7. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同 $\mathcal{N}(1,3)$ 的随机变量. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2} = \frac{1}{4} \ \ a.s.$$

证明. 根据习题 20.5, 立刻得出结论. $\square$

Exercise #20. 8. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且有均值 μ, 方差 σ^2. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 = \sigma^2 \qquad a.s.$$

证明. 记 $Y_j = (X_j - \mu)^2 \in L^1$, 则根据 Kolmogorov 强大数定律, 立刻得出结论. $\square$

Exercise #20. 9. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的整数随机变量, 且 $\mathbb{E}\{|X_j|\} < \infty$. 设 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. 称 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 为整数上的随机游走. 证明: 若 $\mathbb{E}(X_j) > 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty, \ \ a.s.$$

证明. 根据 Kolmogorov 强大数定律, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}\{X_1\} > 0, \ \text{a.s.}$$

反证法, 若不然, 记 $A = \{w : \lim_{n\to\infty} S_n = \infty\} = \bigcap_{M=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq N} \{w : S_n \geq M\}$, 则 $P(A) < 1$, 则

$$A^c = \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq N} \{w : S_n < M\}.$$

$w \in A^c$ 表明: 存在 $M = M(w)$, 使得 $\forall N$, 存在 $n \geq N$, 使得 $S_n(w) < M$. 于是

$$\frac{S_n}{n}(w) < \frac{M}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

从而

$$A^c \subset \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq 0 \right\},$$

而 $\Pr\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq 0 \right\} > 0$ 与 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}\{X_1\} > 0$ a.s. 矛盾! 假设不成立, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, a.s. $\square$