

Chapter 10: 独立随机变量

Latest Update: 2025 年 1 月 2 日

Exercise #10. 1. 设 $f = (f_1, f_2) : \Omega \rightarrow E \times F$. 证明 $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ 是可测的, 当且仅当, $f_1 : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ 是可测的, 以及 $f_2 : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{F})$ 是可测的.

证明. \Rightarrow : 设 $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ 是可测的, 则 $\forall A \times B \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, 有 $f^{-1}(A \times B) \in \mathcal{A}$. 记 π_E, π_F 分别是向 E, F 的投影算子, 即 $\pi_E : E \times F \rightarrow E, \pi_F : E \times F \rightarrow F$, 则有 $f_1 = \pi_E \circ f, f_2 = \pi_F \circ f$, 则

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(A) &= f^{-1} \circ \pi_E^{-1}(A) = f^{-1}(A \times \mathcal{F}) \in \mathcal{A}, \\ f_2^{-1}(B) &= f^{-1} \circ \pi_F^{-1}(B) = f^{-1}(\mathcal{E} \times B) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

从而 f_1, f_2 是可测的.

\Leftarrow : 设 $f_1 : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ 是可测的, 以及 $f_2 : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{F})$ 是可测的, 则 $\forall A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}$, 有 $f_1^{-1}(A) \in \mathcal{A}, f_2^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. 于是对 $A \times B$, 有 $f^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, 从而 f 是可测的. \square

Exercise #10. 2. 设 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 设 \mathcal{B}^2 表示 \mathbb{R}^2 上的 Borel 集合族. \mathcal{B} 表示 \mathbb{R} 上的 Borel 集合族. 证明: $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$.

证明. 根据定义, 以及 \mathbb{R}^n 有可数拓扑基, 有

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{A \times B : A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}, \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma\{(a, b) \times (a, d), a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

显然, $(a, b) \times (a, d) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 根据定义, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

设

$$\mathcal{F} = \{A \mid A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\},$$

可见所有开区间落在 \mathcal{F} 中, 且 \mathcal{F} 是 σ 代数, 因此 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$. 于是 $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. 同样的方法可以说明: $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R} \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. 于是

$$A \times B = (A \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

这表明 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. \square

Exercise #10. 3. 设 $\Omega = [0, 1]$, \mathcal{A} 是 $[0, 1]$ 上的 Borel 集, $P(A) = \int \mathbb{I}_A(x) dx, A \in \mathcal{A}$. 设 $X(x) = x$, 证明 X 服从均匀分布.

证明. 定理 7.1 和 7.2 保证了分布函数和概率测度之间的一一对应关系. 下面求 X 的分布函数 $F(x)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X^{-1}((-\infty, x])\} \quad (\text{定义}) \\ &= P((-\infty, x] \cap [0, 1]) \quad (\text{随机变量 } X \text{ 的定义}) \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数, 从而 X 服从均匀分布 $Unif[0, 1]$. □

Exercise #10. 4. 设 $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}$. 设 $P(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbb{I}_A(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. 令 $X(x) = x$. 证明: X 服从标准正态分布.

证明. $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. X 诱导的分布函数是

$$F(x) = P\{X^{-1}((-\infty, x])\} = P((-\infty, x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

是标准正态分布的分布函数, 因此 X 服从标准正态分布. □

Exercise #10. 5. 构造一个例子证明 $\mathbb{E}\{XY\} = \mathbb{E}\{X\}\mathbb{E}\{Y\}$ 一般来说不能推出 X, Y 是独立的. (不妨假设 $X, Y, XY \in L^1$.)

证明. 考虑离散型随机变量 X 满足 $P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{3}, Y = X^2$.

表 1: X 和 Y 的联合分布列

$Y \backslash X$	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

有 $\mathbb{E}(X) = 0, \mathbb{E}Y = \frac{2}{3}, \mathbb{E}XY = 0 = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, 但是 X, Y 不独立, 比如

$$0 = P(X = -1, Y = 0) \neq P(X = -1)P(Y = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

□

Exercise #10. 6. 设 X, Y 是独立的随机变量, 它们在 \mathbb{N} 中取值, 满足

$$P(X = i) = P(Y = i) = \frac{1}{2^i} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

求出以下的概率:

a) $P(\min(X, Y) \leq i)$

b) $P(X = Y)$

c) $P(Y > X)$

d) $P(X \text{ 整除 } Y)$

e) $P(X \geq kY)$

证明. X, Y 独立同分布.

$$P(X > i) = \sum_{k=i+1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^i}.$$

a) $P(\min(X, Y) \leq i) = 1 - P(\min(X, Y) > i) = 1 - P(X > i, Y > i) = 1 - P(X > i)P(Y > i) = 1 - \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{4^i}.$

b) $P(X = Y) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = i, Y = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}.$

c) $P(Y > X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Y > i)P(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^i} = \frac{1}{3}.$

d) $P(X \text{ 整除 } Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(X = i, Y = ni) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^{in}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i(2^i - 1)}.$

e) $P(X \geq kY) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq ki, Y = i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X > ki - 1)P(Y = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ki-1}} \cdot \frac{1}{2^i} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k+1)i}} = \frac{2}{2^{k+1} - 1}.$

□

Exercise #10. 7. 设 X, Y 是独立的几何随机变量, 参数分别是 λ 和 μ . 设 $Z = \min(X, Y)$. 证明 Z 服从几何分布随机变量, 求出它的参数.

证明. 由于 $X \sim \text{Geom}(\lambda), Y \sim \text{Geom}(\mu)$, 从而 X 和 Y 的 pmf 分别是

$$p_X(x) = \lambda(1-\lambda)^{x-1}, \quad p_Y(y) = \mu(1-\mu)^{y-1}.$$

几何分布的尾概率是 ($x-1$ 次没有成功的概率):

$$P(X \geq x) = \sum_{k=x}^{\infty} p_X(k) = \lambda \sum_{k=x}^{\infty} (1-\lambda)^{k-1} = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1-\lambda)^{x-1}(1-(1-\lambda)^k)}{1-(1-\lambda)} = (1-\lambda)^{x-1}.$$

考察 $Z = \min(X, Y)$ 的分布:

$$\begin{aligned} P(Z \geq z) &= P(\min(X, Y) \geq z) \\ &= P(X \geq z, Y \geq z) \\ &= P(X \geq z)P(Y \geq z) \quad (\text{独立性}) \\ &= (1-\lambda-\mu+\lambda\mu)^{z-1}. \end{aligned}$$

于是, $P(Z = z) = P(Z \geq z) - P(Z \geq z+1) = (1-\lambda-\mu+\lambda\mu)^{z-1}(\lambda+\mu-\lambda\mu)$. 因此, 服从参数为 $\lambda+\mu-\lambda\mu$ 的几何分布.

若按照教材 P31, 4) 参数化的方法得到的参数是 $\mu\lambda$. □

Exercise #10. 8. 设 $X, Y \in L^2$. 定义 X 和 Y 的协方差是

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\{(X - \mu)(Y - \nu)\}$$

其中 $\mathbb{E}X = \mu, \mathbb{E}Y = \nu$. 证明:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\{XY\} - \mu\nu$$

并证明: 若 X 和 Y 独立, $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

证明.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}\{(X - \mu)(Y - \nu)\} \\ &= \mathbb{E}\{XY - X\nu - Y\mu + \mu\nu\} \\ &= \mathbb{E}\{XY\} - \nu\mathbb{E}X - \mu\mathbb{E}Y + \mu\nu \\ &= \mathbb{E}\{XY\} - \mu\nu. \end{aligned}$$

若 X 和 Y 独立, 则在定理 10.1 中, 取 $f = g = id$, 有 $\mathbb{E}\{XY\} = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, 从而 $\text{Cov}(X, Y) = 0$. □

Exercise #10. 9. 设 $X, Y \in L^1$. 若 X 和 Y 是独立的, 证明: $XY \in L^1$. 给出例子说明当 X 和 Y 不独立时, $XY \notin L^1$.

证明. X, Y 独立, 根据 $\mathbb{E}\{|X|\}, \mathbb{E}\{|Y|\} < \infty$, 有 $\mathbb{E}\{|XY|\} = \mathbb{E}\{|X||Y|\} = \mathbb{E}\{|X|\}\mathbb{E}\{|Y|\} < \infty$, 从而 $XY \in L^1$.

为构造反例, 考察 $\Omega = (0, 1], \mathcal{A} = \mathcal{B}((0, 1]), P = \lambda|_{(0, 1]}$, 其中 λ 是 Lebesgue 测度. 设 $X(\omega) = \omega^{-\frac{1}{2}}, Y = X$, 有

$$\mathbb{E}X = \int X dP = \int_0^1 \omega^{-\frac{1}{2}} d\omega = 2 < \infty.$$

则 $X, Y \in L^1$, 但是 $XY(w) = w^{-1}$ 在 $(0, 1]$ 上不可积. □

注. 为证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上不可积, 考察 $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, $s_n := \sum_{k=1}^n k\chi_{I_k}$, 有 $s_n \uparrow f$. 由于,

$$\int_{(0,1]} s_n d\lambda = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k} - \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}.$$

于是,

$$\int_{(0,1]} s_{2n} d\lambda - \int_{(0,1]} s_n d\lambda = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} \geq \frac{n}{2n+1} \geq \frac{1}{3}.$$

序列 $\{\int_{(0,1]} s_n d\lambda\}$ 是严格增的, 这表明

$$\sup \left\{ \int_{(0,1]} s d\lambda, 0 \leq s \leq f, s \text{ 是简单函数} \right\} = \infty$$

即 f 不可积.

Exercise #10. 10. 设 n 是大于 2 的素数; 设 X, Y 是独立的 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 上的 (离散) 均匀分布, 即 $P(X = i) = P(Y = i) = \frac{1}{n}, i = 0, 1, \dots, n-1$. 对于 $0 \leq r \leq n-1$, 定义 $Z_r = X + rY \pmod n$.

a) 证明: Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1} 是两两独立的.

b) 若 n 不再是素数, 结果是否正确?

注. 使用以下初等数论的结论. 设 a, b 是整数, 且 $a \not\equiv 0 \pmod m$, 则称方程 $ax \equiv b \pmod m$ 为 (一次) 同余方程.

1. 设 a, b 是整数, 且 $a \not\equiv 0 \pmod m$, 则同余方程有解当且仅当 $(a, m) | b$.

2. 进一步, 上述同余方程在模 m 下有 (a, m) 个不同的解.

证明. a) 当 n 是素数时, 往证 $Z_s \perp Z_t, s \neq t, s, t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. 由于 Z_s, Z_t 可能的取值均为 $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, 先计算 Z_s, Z_t 的边缘分布, 当 $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 时,

$$\begin{aligned} P(Z_s = k) &= P(X + sY = k \pmod n) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} P(Y = i) P(X = (k - is) \pmod n) \quad (X, Y \text{ 独立}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

同理, $P(Z_t = k) = \frac{1}{n}, k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

接下来计算 $P(Z_s = k, Z_t = l)$, 当 $k, l \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 时,

$$\begin{aligned} P(Z_s = k, Z_t = l) &= P(X + sY = k \pmod n, X + tY = l \pmod n) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} P(Y = i) P(X = (k - is) \pmod n, X = (l - it) \pmod n). \end{aligned}$$

考察一次同余方程 $k - is = l - it \pmod n$, 有 $(s - t)i = k - l \pmod n$, 由于 $(s - t, n) = 1$, 从而该方程有唯一解 $i_0 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$. 从而

$$P(Z_s = k, Z_t = l) = P(Y = i_0)P(X = k - i_0 s \pmod n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

于是 Z_s, Z_t 是独立的 ($\forall k, l \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$).

b) 当 n 不再是素数时, 令 $n = 4$, X, Y 是独立的 $\{0, 1, 2, 3\}$ 上的均匀分布,

$$P(Z_0 = 0, Z_1 = 2) = P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

但是

$$P(Z_0 = 0) = P(X = 0 \pmod 4) = P(X = 0) = \frac{1}{4},$$

$$P(Z_1 = 2) = P(X + Y = 2 \pmod 4) = P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) = \frac{3}{16}.$$

从而 Z_0, Z_1 不独立.

□

Exercise #10. 11. 设 X 和 Y 是独立的随机变量, 服从分布 $P(X = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = -1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$. 设 $Z = XY$, 证明: X, Y, Z 两两独立, 但不相互独立.

注. 这给出了一个两两独立但不相互独立的例子.

证明. Z 的可能取值为 $\{-1, 1\}$, 有

$$P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{2},$$

$$P(Z = -1) = P(X = 1, Y = -1) + P(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

已经知道了 X, Y 独立, 下面证明 X, Z 独立, Y, Z 独立.

$$P(X = 1, Z = 1) = P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{4},$$

$$P(X = 1, Z = -1) = P(X = 1, Y = -1) = P(X = 1)P(Y = -1) = \frac{1}{4},$$

$$P(X = -1, Z = 1) = P(X = -1, Y = -1) = P(X = -1)P(Y = -1) = \frac{1}{4},$$

$$P(X = -1, Z = -1) = P(X = -1, Y = 1) = P(X = -1)P(Y = 1) = \frac{1}{4}.$$

X, Z 独立, Y, Z 独立, 但是 X, Y, Z 不独立, 比如

$$P(X = 1, Y = 1, Z = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4} \neq P(X = 1)P(Y = 1)P(Z = 1) = \frac{1}{8}.$$

□

Exercise #10. 12. 设 A_n 是一列事件. 证明:

$$P(A_n \text{ i.o.}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

证明.

$$\begin{aligned} P(A_n \text{ i.o.}) &= P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \end{aligned}$$

因为 $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset A_n$, 从而 $P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \geq P(A_n)$, 而 $P(A_n)$ 的极限未必存在, 为得到非平凡的结论, 取上极限. □

Exercise #10. 13. 称一列随机变量 X_1, X_2, \dots 是完全收敛于 X (*completely convergent to X*), 是指

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty \text{ for each } \varepsilon > 0$$

证明: 若序列 X_n 是独立的, 那么完全收敛和以概率 1 收敛是等价的.

证明. \Leftarrow :

随机变量 X_n 几乎处处收敛于 X 是指

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1.$$

根据 Kolmogorov 零壹律, 若 X_n 几乎处处收敛于 X , 则 $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ 几乎处处是常数.

对于固定的随机变量 X , 记 $A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$, 由于

$$\{|X_n - X| > \varepsilon\} = \{X_n > X + \varepsilon\} \cup \{X_n < X - \varepsilon\},$$

由于 $\{X_n\}$ 相互独立, 于是 $\{A_n(\varepsilon)\}$ 相互独立.

由于

$$\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} = \left\{ \omega : \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \left(|X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{m} \right) \right\}$$

于是几乎处处收敛的等价表述是

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

根据 Borel-Cantelli 零壹律, $\forall \varepsilon > 0$, 当 $\{A_n(\varepsilon)\}$ 独立时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n(\varepsilon)) < \infty \iff P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon)) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n(\varepsilon)) = \infty \iff P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon)) = 1.$$

于是根据 Borel-Cantelli 零壹律, X_n 完全收敛于 X .

\Rightarrow :

若

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty \text{ for each } \varepsilon > 0$$

根据 Borel-Cantelli 零壹律, 有

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon)) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

从而 X_n 几乎处处收敛于 X . (这里证明没有用到独立性, 是一个一般的结论.) □

Exercise #10. 14. 设 μ, ν 分别是 $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F})$ 上的两个有限测度. 即满足概率公理, 出来正规化条件 $\mu(E), \nu(F)$ 未必等于 1. 令乘积测度 $\lambda = \mu \otimes \nu$ 定义在乘积可测空间 $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$, 它的定义是对于 Cartesian 积 $A \times B, A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}, \lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

a) 证明 λ 可以延拓到 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ 上的一个有限测度;

b) 设 $f : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ 是可测的. 证明 Fubini 定理: 若 f 是 λ -可测的, 则 $x \rightarrow \int f(x, y)\nu(dy), y \rightarrow \int f(x, y)\mu(dx)$ 分别相对 \mathcal{E}, \mathcal{F} 可测, 进一步地,

$$\int f d\lambda = \iint f(x, y)\mu(dx)\nu(dy) = \iint f(x, y)\nu(dy)\mu(dx)$$

证明. a) 设 $C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ 是乘积 Borel σ 代数上的元素. 记 $C(x) = \{y : (x, y) \in C\}$ 是给定 x 后的一个截面. 先证明: $C(x) \in \mathcal{F}$.

这个结论是一般的, 即可对可测函数 $f : (E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, 截面是可测的. 设 $f(x, y) = \mathbb{I}_C(x, y), C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, g_x(y) = f(x, y)$. 令

$$\mathcal{H} = \{C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} : \mathbb{I}_C(x, y) \text{ 可测}, \forall x \in E\}.$$

\mathcal{H} 是一个 σ -代数, 因为

(a) $\mathbb{I}_{\emptyset}(x, y) = 0, \mathbb{I}_{E \times F}(x, y) = 1$, 从而 $\emptyset, E \times F \in \mathcal{H}$;

(b) 若 $S \in \mathcal{H}$, 则对于任意 $x \in E, \mathbb{I}_S(x, y)$ 可测, 从而 $\mathbb{I}_{S^c}(x, y) = 1 - \mathbb{I}_S(x, y)$ 可测;

(c) 若 $\{S_n\}$ 是 \mathcal{H} 中的序列, 则对于任意 $x \in E, \mathbb{I}_{\cup S_n}(x, y) = \max \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{S_n}(x, y), 1 \right\}$ 可测.

从而 $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F}) \subset \mathcal{H}$. 另一方面, 根据定义, $\mathcal{H} \subset \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$, 从而 $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$. 这就已经证明 $C(x) \in \mathcal{F}$.

此外, 根据经典操作, 示性函数可测, 根据线性性, 简单函数截口可测. 若 f 是正的, 令 f_n 是向上趋于 f 的简单函数, 于是 $g_n(y) = f_n(x, y)$ 对于固定的 x 是 \mathcal{F} 可测的, $\forall n$. 根据可测函数的极限还是可测函数, 从而 $g(y) = f(x, y)$ 对于固定的 x 是 \mathcal{F} 可测的. 最后, 若 f 是任意可测函数, 则只需要考虑 $f = f^+ - f^-$, 从而固定 x , f 是 \mathcal{F} 可测的.

以下, 尝试定义 $\lambda(C) = \int \nu\{C(x)\} d\mu(x)$.

若 $C = A \times B$, 则截面函数

$$C(x) = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \emptyset, & x \notin A. \end{cases}$$

此时, 根据定义,

$$\lambda(C) = \mu \otimes \nu(C) = \mu(A)\nu(B) = \int \mathbb{I}_A(x)\nu(B) d\mu = \int \nu\{C(x)\} d\mu(x).$$

定义

$$\mathcal{H} = \{C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} : x \mapsto \nu(C(x)) \text{ 可测}\}$$

- 集合系 $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ 包含全集 $E \times F$, 并且关于有限交封闭: $(\Lambda_1 \times \Gamma_1) \cap (\Lambda_2 \times \Gamma_2) = (\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \times (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.
- $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, 因为当 $\forall C = A \times B \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$, A 可测, 从而 $\nu(C(x)) = \nu(B)\mathbb{I}_A(x)$ 可测, 于是 $C \in \mathcal{H}$.
- \mathcal{H} 关于单增封闭. 设 $C_i \uparrow C, C_i \in \mathcal{H}$, 于是, 集合关系也有 $C_i(x) \uparrow C(x)$, 从而根据测度连续性, $\nu(C_i(x)) \uparrow \nu(C(x))$, 从而 $\nu(C(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(C_n(x))$ 可测, 从而 $C \in \mathcal{H}$.
- \mathcal{H} 关于差封闭. 设 $C_1 \subset C_2 \in \mathcal{H}$, 于是对于任意的 x , $C_1(x) \subset C_2(x)$, 从而 $\nu((C_2 - C_1)(x)) = \nu(C_2(x) - C_1(x)) = \nu(C_2(x)) - \nu(C_1(x))$ 可测, 从而 $C_1 - C_2 \in \mathcal{H}$.

综上 4 点, 根据单调类定理, $\mathcal{H} \supset \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$. 另一方面, 根据定义, $\mathcal{H} \subset \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$. 于是 $\mathcal{H} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$.

于是对 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ 中的元素 C , 可以证明 $\lambda(C) = \int \nu\{C(x)\} d\mu(x)$ 是良定的有限测度. 只需证明分离可列可加性:

$$\lambda\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(C_k).$$

事实上, 由于 $C_n \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ 两两不交, 从而 $\forall x, \{C_n(x)\}$ 两两不交. 由于 ν 是一个测度, 具有分离可列可加性, 于是

$$\nu\left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(C_k(x)).$$

已经证明 $f_n(x) = \nu(C_k(x))$ 是非负的可测函数, 从而根据单调收敛定理即可证明 λ 的分离可加性, 且

$$\lambda(E \times F) = \mu(E)\nu(F) < \infty,$$

因此 λ 是一个有限测度.

由单调类定理的推论, λ 是唯一的延拓.

b) 已经证明, 当 $f = \mathbb{I}_C(x, y), C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ 中时,

$$\begin{aligned} \int_{E \times F} f d\lambda &= \int_{E \times F} \mathbb{I}_C(x, y) d\lambda \\ &= (\mu \otimes \nu)(C) \\ &= \int \nu\{C(x)\} d\mu(x) \\ &= \iint \mathbb{I}_{C(x)}(y) d\nu(y) d\mu(x) \end{aligned}$$

从而可测性和积分交换顺序对示性函数成立, 根据线性性, 对简单函数也成立.

对于一般的非负函数 f , 从而存在一个递增的简单函数列 $f_n \uparrow f$, 从而

$$\begin{aligned} \int f d\lambda &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda \quad (\text{单调收敛定理}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint f_n(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \quad (\text{已经证明的简单函数的 Fubini}) \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \quad (\text{单调收敛定理}) \\ &= \int \left\{ \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\nu(y) \right\} d\mu(x) \\ &= \int \left\{ \int f d\nu(y) \right\} d\mu(x). \end{aligned}$$

其中, $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x, y) d\nu(y)$ 可测. 因此可测性和积分交换次序对非负函数成立.

对于一般的函数 f , 可以分解为 $f = f^+ - f^-$, 从而可测性和积分交换顺序对一般可测函数成立. □

Exercise #10. 15. 称测度 τ 在 (G, \mathcal{G}) 上是 σ -有限的, 若存在一系列集合 $\{G_j\}_{j \geq 1} \subset \mathcal{G}$, 使得 $\cup_{j=1}^{\infty} G_j = G, \tau(G_j) < \infty, \forall j$. 证明: 若 μ, ν 是 σ -有限的, $\lambda = \mu \otimes \nu$ 存在, 那么

a) $\lambda = \mu \otimes \nu$ 是 σ -有限的;

b) (Fubini 定理): 若 $f : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ 是可测的, 且是 λ -可积的, 则 $x \mapsto \int f(x, y) \nu(dy), y \mapsto \int f(x, y) \mu(dx)$ 分别相对 \mathcal{E}, \mathcal{F} 可测, 进一步地,

$$\int f d\lambda = \iint f(x, y) \mu(dx) \nu(dy) = \iint f(x, y) \nu(dy) \mu(dx)$$

证明. 按照之前的证明流程, 只需证: 若 μ, ν 是 σ -有限的, 那么延拓后的 λ 是 σ -有限的.

由于 μ 是 σ -有限的, 从而存在一系列集合 $\{E_j\}_{j \geq 1} \subset \mathcal{E}$, 使得 $\cup_{j=1}^{\infty} E_j = E, \mu(E_j) < \infty, \forall j$. 同理根据 ν 的 σ -有限, 存在一系列集合 $\{F_k\}_{k \geq 1} \subset \mathcal{F}$, 使得 $\cup_{k=1}^{\infty} F_k = F, \nu(F_k) < \infty, \forall k$. 于是, 定义

$$G_{j,k} = E_j \times F_k, \quad \{G_{j,k}\}_{j,k \geq 1} \subset \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, \quad \cup_{j,k=1}^{\infty} G_{j,k} = E \times F.$$

根据 λ 的定义, $\lambda(G_{j,k}) = \mu(E_j)\nu(F_k) < \infty$, 从而 λ 是 σ -有限的. □

Exercise #10. 16. 重复投一枚满足 $P(\text{正面朝上}) = p$ 的硬币. 设 A_k 表示有在 $2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1$ 次投掷中, 有 k 或更多次接连不断的正面朝上的事件. 证明: 当 $p \geq 1/2$ 时, $P(A_k \text{ i.o. }) = 1$, 当 $p < 1/2$ 时, $P(A_k \text{ i.o. }) = 0$.

证明. 由于当 $i \neq j$ 时, $\{2^i, \dots, 2^{i+1} - 1\} \cap \{2^j, \dots, 2^{j+1} - 1\} = \emptyset$, 根据投硬币实验的独立性, 事件 $\{A_k\}$ 相互独立.

接下来, 我们要找出 $P(A_k)$ 的上下界.

在事件 A_k 中, 考虑的投掷是: $2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1$, 共 2^k 次投掷.

对于上界, 我们可以考虑: 有 k 次连续向上的事件中, 第一个元素可能出现的位置. 在整个序列中有 $2^k - k + 1$ 个位置, 由于这种选法包含了长度为 k 及以上的序列 (因为没有指定后面的投掷), 以及存在数重的情况, 从而 $P(A_k) \leq (2^k - k + 1)p^k$.

对于下界, 在这 2^k 次投掷中, 有 $\lfloor \frac{2^k}{k} \rfloor$ 个互不相交的长度为 k 的块. 对于这种特殊的划分, 有一个块全部正面向上的概率是 $1 - (1 - p^k)^{\lfloor \frac{2^k}{k} \rfloor}$, 从而 $P(A_k) \geq 1 - (1 - p^k)^{\lfloor \frac{2^k}{k} \rfloor}$.

- 当 $p < \frac{1}{2}$ 时, $P(A_k) \leq (2^k - k + 1)p^k < (2p)^k$, 从而 $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2p)^k = \frac{2p}{1-2p} < \infty$, 根据 Borel-Cantelli 引理, $P(A_k \text{ i.o. }) = 0$.
- 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 考察 $\ln(1 - P(A_k)) \leq \lfloor \frac{2^k}{k} \rfloor \ln(1 - p^k) \leq -\frac{2^k}{k} p^k = -\frac{(2p)^k}{k} \rightarrow -\infty (k \rightarrow \infty)$.
于是 $1 - P(A_k) \rightarrow 0$, 从而 $P(A_k) \rightarrow 1 (k \rightarrow \infty)$. 因此 $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$, 根据独立条件下的 Borel-Cantelli 引理, $P(A_k \text{ i.o. }) = 1$.
- 对 $p = \frac{1}{2}$, 事实上, 可以按照上述的方法, 证明 $\sum_{k=1}^{\infty} 1 - (1 - p^k)^{\lfloor \frac{2^k}{k} \rfloor}$ 的收敛性与 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2p)^k}{k}$ 相同, 从而 $P(A_k \text{ i.o. }) = 1$.

□

Exercise #10. 17. 设 X_0, X_1, X_2, \dots 是独立随机变量, 满足 $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}, \forall n$. 令 $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$. 证明: Z_1, Z_2, \dots 是独立的.

证明. 由于 Z_n 是二值取值的随机变量, 因此只需考虑一个事件即可. 因为若 $P(Z_i = 1, Z_j = 1) = P(Z_i = 1)P(Z_j = 1)$, 则 $P(Z_i = 1, Z_j = -1) = P(Z_i = 1) - P(Z_i = 1, Z_j = 1) = P(Z_i = 1)P(Z_j = -1)$.

用数学归纳法完成证明. 先考察 Z_1, Z_2 .

$$\begin{aligned} P(Z_1 = 1, Z_2 = -1) &= P(X_1 = 1, X_1 X_2 = -1) \\ &= P(X_1 = 1, X_2 = -1) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

而边际概率

$$P(Z_1 = 1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(Z_2 = -1) = P(X_1 = 1, X_2 = -1) + P(X_1 = -1, X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

于是 $Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2$.

考虑 Z_1, Z_2, Z_3 ,

$$\begin{aligned} P(Z_1 = 1, Z_2 = -1, Z_3 = 1) &= P(X_1 = 1, X_1 X_2 = -1, X_1 X_2 X_3 = 1) \\ &= P(X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1) \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

边际概率

$$P(Z_3 = 1) = \frac{1}{2^3} \times \sum_{k=0}^1 \binom{3}{2k} = \frac{1}{2}.$$

重复上述流程, 即可证明 Z_1, Z_2, \dots 是独立的. □

注. 以下是一个严格的写法. 往证

$$P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

由于

$$\begin{aligned} P(Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n) &= P\left(X_1 = z_1, X_2 = \frac{z_2}{z_1}, \dots, X_n = \frac{z_n}{z_{n-1}}\right) \\ &= P(X_1 = z_1)P\left(X_2 = \frac{z_2}{z_1}\right) \cdots P\left(X_n = \frac{z_n}{z_{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

从而, Z_1, Z_2, \dots, Z_n 的联合分布是均匀分布, $\forall n$. 由于

$$P(Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n) = P(Z_1 = z_1)P(Z_2 = z_2|Z_1 = z_1) \cdots P(Z_n = z_n|Z_1 = z_1, \dots, Z_{n-1} = z_{n-1}).$$

若有

$$P(Z_n = z_n) = P(Z_n = z_n|Z_1 = z_1, \dots, Z_{n-1} = z_{n-1}), \quad \forall n.$$

则独立性得证.

于是, 只需证明 $P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = \frac{1}{2}$, 即 Z_n 是均匀分布. 由于 $\{Z_n = 1\} = \{\text{偶数个 } X_n = -1\}$, 只需证明, $\#\{\text{偶数个 } X_n = -1\} = 2^{n-1}$.

当 $n = 2m$ 为偶数时, 要计算求和 $\sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k}$, 我们可以使用二项式系数的性质. 二项式系数 $\binom{2m}{2k}$ 表示从 $2m$ 个元素中选择 $2k$ 个元素的方式数量.

首先, 考虑 $(1+x)^{2m}$ 的二项式展开:

$$(1+x)^{2m} = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} x^j$$

接下来, 考虑 $(1-x)^{2m}$ 的二项式展开:

$$(1-x)^{2m} = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} (-x)^j$$

将这两个展开式相加, 我们得到:

$$(1+x)^{2m} + (1-x)^{2m} = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} x^j + \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} (-x)^j$$

注意到当 j 为奇数时, x^j 和 $(-x)^j$ 会相互抵消, 而当 j 为偶数时, 它们会相加. 因此, 我们有:

$$(1+x)^{2m} + (1-x)^{2m} = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} x^{2k}$$

为了找到求和 $\sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k}$, 我们设 $x = 1$:

$$(1+1)^{2m} + (1-1)^{2m} = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k}$$

简化左边:

$$2^{2m} + 0 = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k}$$

因此:

$$2^{2m} = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k}$$

两边同时除以 2:

$$\sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} = \frac{2^{2m}}{2} = 2^{2m-1}$$

因此, 最终答案是:

$$\boxed{2^{2m-1}} = 2^{n-1}.$$

当 $n = 2m + 1$ 为奇数时, 要计算求和 $\sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k}$, 我们可以使用二项式系数的性质和生成函数. 二项式系数 $\binom{2m+1}{2k}$ 表示从 $2m+1$ 个元素中选择 $2k$ 个元素的方式数量. 首先, 考虑 $(1+x)^{2m+1}$ 的二项式展开:

$$(1+x)^{2m+1} = \sum_{j=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} x^j$$

接下来, 考虑 $(1-x)^{2m+1}$ 的二项式展开:

$$(1-x)^{2m+1} = \sum_{j=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} (-x)^j$$

将这两个展开式相加, 我们得到:

$$(1+x)^{2m+1} + (1-x)^{2m+1} = \sum_{j=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} x^j + \sum_{j=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} (-x)^j$$

注意到当 j 为奇数时, x^j 和 $(-x)^j$ 会相互抵消, 而当 j 为偶数时, 它们会相加. 因此, 我们有:

$$(1+x)^{2m+1} + (1-x)^{2m+1} = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k} x^{2k}$$

为了找到求和 $\sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k}$, 我们设 $x = 1$:

$$(1+1)^{2m+1} + (1-1)^{2m+1} = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k}$$

简化左边:

$$2^{2m+1} + 0 = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k}$$

因此:

$$2^{2m+1} = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k}$$

两边同时除以 2:

$$\sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k} = \frac{2^{2m+1}}{2} = 2^{2m}$$

因此, 最终答案是:

$$\boxed{2^{2m}} = 2^{n-1}.$$

综上所述, 我们得到 $\#\{\text{偶数个 } X_n = -1\} = 2^{n-1}$.

Exercise #10. 18. 设 X, Y 是独立的, 假设 $P(X + Y = \alpha) = 1$, 其中 α 是常数. 证明: X, Y 是常数随机变量.

证明. 由于 $X = \alpha - Y$, a.s. P . 因此, 若 X 与 Y 独立, 则 X 与 $\alpha - X$ 独立, 因为 $f(x) = \alpha - x$ 是一个可测函数 (函数在一个零测集处的取值不会改变其可测性). 从而 X 与自身独立. 从而

$$F(x) = P((-\infty, x]) = 0 \text{ 或 } 1.$$

于是 X 服从退化分布, 即 X 是常数随机变量, 根据 X 和 Y 的对称性, Y 也是常数随机变量. □