# Exercise 3: 条件概率和独立性

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

所有习题中的概率空间都是固定的, 且 $A, B, A_n$ 等等皆是事件.

**Exercise #3. 1.** 证明当 $A \cap B = \varnothing$, 则除非 $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$, 否则 $A$ 和 $B$ 不可能独立.

*证明.* 只需证明逆否命题. 若 $A$ 和 $B$ 独立, 则 $0 = P(\varnothing) = P(A \cap B) = P(A)P(B)$, 从而 $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$. □

**Exercise #3. 2.** 设 $P(C) > 0$. 证明 $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$.

*证明.* 直接按定义展开.

$$LHS = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = RHS.$$

□

**Exercise #3. 3.** 若 $P(C) > 0$ 且 $A_1, ..., A_n$ 两两不交. 证明

$$P\left(\cup_{i=1}^n A_i \mid C\right) = \sum_{i=1}^n P\left(A_i \mid C\right)$$

*证明.* 首先, 若对 $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, 则 $A_i \cap C \cap A_j \cap C = \varnothing \cap C = \varnothing$.

由于 $P(C) > 0$, 根据条件概率的定义, 以及概率的分离可加性,

$$P\left(\cup_{i=1}^n A_i \mid C\right) = \frac{P\left(\cup_{i=1}^n A_i \cap C\right)}{P(C)} = \frac{\sum_{i=1}^n P(A_i \cap C)}{P(C)} = \sum_{i=1}^n P(A_i \mid C).$$

□

**Exercise #3. 4.** 设 $P(B) > 0$. 证明 $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$.

证明. 直接按定义展开. 显然.

$$P(A\cap B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}P(B)=P(A\mid B)P(B).$$

□

**Exercise #3. 5.** 设 $0<P(B)<1$, $A$ 是事件. 证明

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P\left(A\mid B^c\right)P\left(B^c\right).$$

证明. 由于 $B\cap B^c=\varnothing$, $B\cup B^c=\Omega$, $0<P(B)<1$, $(A\cap B)\cap(A\cap B^c)=\varnothing$, 因此

$$P(A)=P(A\cap(B\cup B^c))=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid B^c)P(B^c).$$

□

**Exercise #3. 6.** *捐献的血液要接受艾滋病筛查. 假设检验的准确率有 99%, 而且在对应年龄的人群中, 艾滋病的患病率是万分之一. 同时, 检验存在 5% 的假阳性率. 假设检验结果显示样本是阳性的, 那么该样本患有 AIDS 的概率是多少? 还是 99% 吗?*

**注记.** *99% 的准确率指的是 $P$(阳性|患有 AIDS), 目标是求 $P$(患有 AIDS | 阳性).*

证明. 设事件 $A$ 表示 "检验结果为阳性" 这一事件, 事件 $B$ 表示 "患者患有 AIDS" 这一事件. 根据题目中的信息,

$$P(A\mid B)=0.99,\quad P(A\mid B^c)=0.05,\quad P(B)=0.0001.$$

于是, 为求出样本阳性下, 该样本患有 AIDS 的概率, 即求

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\mid B)P(B)}{P(A\mid B)P(B)+P(A\mid B^c)P(B^c)}=\frac{0.99\times 0.0001}{0.99\times 0.0001+0.05\times 0.9999}\approx 0.00198.$$

也就是说, 样本患有 AIDS 的概率只有不到 0.2%. □

**Exercise #3. 7.** 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty},\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$, 且 $A_n\to A, B_n\to B$, 满足 $P(B)>0$, $P(B_n)>0,\forall n$. 证明*:*

*a)* $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n|B)=P(A|B)$,

*b)* $\lim\limits_{n\to\infty}P(A|B_n)=P(A|B)$.

*c)* $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n|B_n)=P(A|B)$.

证明. a) 由于条件概率也是概率, 根据概率测度的连续性定理, 即有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n|B)=P(A|B)$.

b) 由于 $\mathbb{I}_{A\cap B_n}(w)=\mathbb{I}_A(w)\mathbb{I}_{B_n}(w)\to\mathbb{I}_A(w)\mathbb{I}_B(w)=\mathbb{I}_{A\cap B}(w)$, 于是 $A\cap B_n\to A\cap B, n\to\infty$. 根据概率测度的连续性定理, 即有 $\lim_{n\to\infty}P(A\cap B_n)=P(A\cap B)$, 从而根据数学分析,

$$P\left(A\mid B_n\right)=\frac{P\left(A\cap B_n\right)}{P\left(B_n\right)}\to\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A\mid B), n\to\infty.$$

c) 用示性函数, 同样可以证明 $A_n\cap B_n\to A\cap B(n\to\infty)$, $\lim_{n\to\infty}P(A_n|B_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{P(A_n\cap B_n)}{P(B_n)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A|B)$.

□

**Exercise #3. 8.** *假设我们对有两种结果都投硬币进行建模, 分别用 $H$ 和 $T$ 表示正面或背面向上. 设 $P(H)=P(T)=\frac{1}{2}$. 假设现在我们投掷两枚这样的硬币, 使得样本空间 $\Omega$ 包含四个点: $\{HH,HT,TH,TT\}$. 我们假设投掷是独立的.*

*a) 求第一次是正面朝上的条件下两枚硬币都是正面朝上的概率.*

*b) 求至少一次正面朝上的条件下两枚硬币都是正面朝上的概率.*

*证明.* a) 设事件 $A$ 表示 “第一次是正面朝上”, 事件 $B$ 表示 “两枚硬币都是正面朝上”. 则 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, 从而 $P(B|A)=\frac{1}{2}$.

b) 设事件 $C$ 表示 “至少一次正面朝上”, 则 $P(C)=1-P(\text{两次都是背面朝上})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. 于是, $P(B|C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$.

□

**Exercise #3. 9.** *假设 $A,B,C$ 是独立事件, $P(A\cap B)\neq 0$. 证明 $P(C|A\cap B)=P(C)$.*

*证明.*

$$LHS=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)}=\frac{P(A)P(B)P(C)}{P(A)P(B)}=RHS.$$

□

**Exercise #3. 10.** *一个盒子里有 $r$ 个红球, $b$ 个黑球. 从盒子里随机取出一个球, 再在盒子里随机取出一个球, 求出以下事件的概率.*

*a) 两个球都是红色的.*

*b) 第一个球是红色的, 第二个球是黑色的.*

*证明.* a) 事件 $A$ 表示 “第一个球是红色的”, 事件 $B$ 表示 “第二个球是红色的”. 则 $P(A)=\frac{r}{r+b}$, $P(B\mid A)=\frac{r-1}{r+b-1}$, $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)=\frac{r(r-1)}{(r+b)(r+b-1)}$.

b) 事件 $C$ 表示 “第一个球是红色的”, 事件 $D$ 表示 “第二个球是黑色的”. 则 $P(C) = \frac{r}{r+b}$, $P(D \mid C) = \frac{b}{r+b-1}$, $P(C \cap D) = \frac{rb}{(r+b)(r+b-1)}$.

□

**Exercise #3. 11** (Polya 坛子模型)**.** *一个坛子有 $r$ 个红球, $b$ 个蓝球. 从坛子里随机取出一个球, 记录下它的颜色放回, 再额外放进 $d$ 个颜色相同的球. 无限重复这个过程. 求以下的概率*

*a) 第二个被拿出的球是蓝色的.*

*b) 给定第二个被拿出点球是蓝色的条件下, 第一个球是蓝色的.*

证明. a) 设 $B_n$ 表示第 $n$ 个被拿出的球是蓝色的事件. 则根据全概公式 $P(B_2) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1) + P(B_1^c)P(B_2 \mid B_1^c)$, 于是,

$$P(B_2) = \frac{b}{r+b}\frac{b+d}{r+b+d} + \frac{r}{r+b}\frac{b}{r+b+d} = \frac{b(r+b+d)}{(r+b)(r+b+d)} = \frac{b}{r+b}.$$

b) 为计算 $P(B_1 \mid B_2)$, 用 Bayes 公式, $P(B_1 \mid B_2) = \frac{P(B_2 \mid B_1)P(B_1)}{P(B_2 \mid B_1)P(B_1) + P(B_2 \mid B_1^c)P(B_1^c)}$, 于是,

$$P(B_1 \mid B_2) = \frac{\frac{b(b+d)}{(r+b)(r+b+d)}}{\frac{b}{r+b}} = \frac{b+d}{r+b+d}.$$

□

**Exercise #3. 12.** *考虑 Polya 坛子模型. 设 $B_n$ 表示第 $n$ 个球是蓝色的事件. 证明 $P(B_n) = P(B_1), \forall n \geq 1$.*

证明. 用数学归纳法完成证明. 已经证明 $P(B_1) = P(B_2) = \frac{b}{r+b}$. 记第 $n$ 次取球时坛子中球的总个数为 $T_n$, 显然 $T_n = r + b + (n-1)d$. 若对 $n = k$ 时成立 $P(B_k) = \frac{b}{r+b}$, 则当 $n = k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
P(B_{k+1}) &= P(B_k)P(B_{k+1} \mid B_k) + P(B_k^c)P(B_{k+1} \mid B_k^c) \\
&= \frac{b}{r+b}\frac{P(B_k)T_k + d}{T_k + d} + \frac{r}{r+b}\frac{P(B_k)T_k}{T_k + d} \\
&= \frac{\frac{b^2 T_k}{r+b} + bd + \frac{rbT_k}{r+b}}{(r+b)(T_k+d)} \\
&= \frac{b^2 T_k + rbd + b^2 d + rbT_k}{(r+b)^2(T_k+d)} \\
&= \frac{b(r+b)(T_k+d)}{(r+d)^2(T_k+d)} \\
&= \frac{b}{r+b} = P(B_1).
\end{aligned}$$

于是证明了 $P(B_n) = P(B_1), n \geq 1$. □

**Exercise #3. 13.** 考虑 *Polya* 坛子模型. 求出在接下来抽出 $n$ 个球是蓝色的条件下, 第一个球是蓝色的概率. 并求出当 $n$ 趋于无穷时的概率极限.

证明. 先计算 $P(B_1 \mid B_2 \cap \cdots \cap B_{n+1})$. 根据条件概率的定义,

$$P\left(B_1 \mid B_2 \cap \cdots \cap B_{n+1}\right) = \frac{P\left(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n+1}\right)}{P\left(B_2 \cap \cdots \cap B_{n+1}\right)}$$

由于 $P(B_i) > 0, \forall i$, 因此,

$$\begin{aligned}
P\left(B_1 \cap \cdots \cap B_{n+1}\right) &= P\left(B_1\right) \cdot P\left(B_2 \mid B_1\right) \cdot P\left(B_3 \mid B_1 \cap B_2\right) \cdots \cdots P\left(B_{n+1} \mid B_1 \cap \cdots \cap B_n\right) \\
&= \frac{b}{b+r} \cdot \frac{b+d}{b+r+d} \cdot \frac{b+2d}{b+r+2d} \cdots \cdot \frac{b+nd}{b+r+nd} \\
&= \prod_{k=0}^{n} \frac{b+kd}{b+r+kd}.
\end{aligned}$$

对分母,

$$\begin{aligned}
P\left(B_2 \cap \cdots \cap B_{n+1}\right) &= P\left(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n+1}\right) + P\left(B_1^c \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n+1}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n} \frac{b+kd}{b+r+kd} + \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b}{b+r+d} \cdots \frac{b+(n-1)d}{b+r+nd} \\
&= \prod_{k=0}^{n} \frac{b+kd}{b+r+kd} + \frac{r}{b+r} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{b+(k-1)d}{b+r+kd},
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
P\left(B_1 \mid B_2 \cap \cdots \cap B_{n+1}\right) &= \frac{\prod_{k=0}^{n} \frac{b+kd}{b+r+kd}}{\prod_{k=0}^{n} \frac{b+kd}{b+r+kd} + \frac{r}{b+r} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{b+(k-1)d}{b+r+kd}} \\
&= \frac{\frac{b}{b+r}}{\frac{b}{b+r} + \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b}{b+nd}} \\
&= \frac{b(b+nd)}{b(b+nd)+br} \\
&= \frac{b+nd}{b+nd+r}.
\end{aligned}$$

根据数学分析, 显然,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(B_1 \mid B_2 \cap \cdots \cap B_{n+1}\right) = 1.$$

□

**Exercise #3. 14.** 一个保险公司为等量的男性和女性司机提供保险. 在任意给定的年份, 男性司机发生事故索赔的概率是 $\alpha$, 且与年份独立. 相应的, 女性司机的概率是 $\beta$. 假设保险公司随机抽取一名司机.

*a)* 被抽中的司机今年索赔的概率是?

*b)* 被抽中的司机连续两年索赔的概率是?

证明. a) 设事件 $M$ 表示抽中的司机是男性, $C$ 表示司机索赔, 根据题意,

$$P(M) = P(M^c) = \frac{1}{2}, \quad P(C \mid M) = \alpha, \quad P(C \mid M^c) = \beta.$$

于是, 根据全概公式,

$$P(C) = P(C \mid M)P(M) + P(C \mid M^c)P(M^c) = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

b) 设事件 $\tilde{C}$ 表示司机连续两年索赔, 由于索赔与年份独立, 则 $P(\tilde{C} \mid M) = \alpha^2$, $P(\tilde{C} \mid M^c) = \beta^2$, 于是, 根据全概公式,

$$P(\tilde{C}) = P(\tilde{C} \mid M)P(M) + P(\tilde{C} \mid M^c)P(M^c) = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}.$$

□

**Exercise #3. 15.** 考虑上一题中保险公司的例子. 设 $A_1, A_2$ 分别是随机抽中的司机在第一年, 第二年索赔的事件. 证明 $P(A_2|A_1) \geq P(A_1)$.

证明. 已经有 $P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{\alpha+\beta}{2}, P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$, 由于 $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta, \alpha, \beta \in [0,1]$, 于是 $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, 从而

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{\alpha+\beta}{2} = P(A_1).$$

□

**Exercise #3. 16.** 考虑上一题中保险公司的例子. 求出索赔人是女性的概率.

证明. 求 $P(M^c \mid C)$, 用 Bayes 公式,

$$P(M^c \mid C) = \frac{P(C \mid M^c)P(M^c)}{P(C)} = \frac{\beta \times \frac{1}{2}}{\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

□

**Exercise #3. 17.** 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是独立的事件. 证明它们都不发生的概率小于等于 $\exp\left(-\sum_{i=1}^n P(A_i)\right)$.

证明. 事件 $A_1, \cdots, A_n$ 都不发生, 是指事件 $A_1$ 或事件 $A_2$ 或... 或事件 $A_n$ 不发生, 因此考虑

$$P\left((\cup_{i=1}^n A_i)^c\right) = P\left(\cap_{i=1}^n A_i^c\right) \overset{(\text{独立性})}{=} \prod_{i=1}^n P(A_i^c) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \log(1-P(A_i))\right) \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^n P(A_i)\right),$$

其中, 最后的不等号是因为 $\log(1-x) \leq -x, \forall x \in [0,1]$. □

**Exercise #3. 18.** 设 $A, B$ 是两事件, $P(A) > 0$. 证明 $P(A \cap B | A \cup B) \leq P(A \cap B | A)$.

证明. 由于 $P(A \cup B) \geq P(A) > 0$, 由条件概率的定义,

$$P(A \cap B | A \cup B) = \frac{P(A \cap B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$$
$$P(A \cap B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

因此, 只需证明 $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \leq \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, 即 $P(A)P(A \cup B) \leq P(A \cup B)P(A)$, 显然成立. □