Chapter 5: 可列空间中的随机变量

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

Exercise #5. 1. 令 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是一个严格增的非负函数. 证明:

$$P(|X|\geq a)\leq\frac{E\{g(|X|)\}}{g(a)}\quad \text{当} a>0.$$

证明. 根据可列空间中期望的定义, 对 $a>0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{g(|X|)\} &= \sum_{w\in\Omega} g\{|X(w)|\}P(w)\\
&= \sum_{w:|X|\geq a} g\{|X(w)|\}P(w)+\sum_{w:|X|<a} g\{|X(w)|\}P(w)\\
&\geq \sum_{w:|X|\geq a} g(a)P(w)+0\\
&= g(a)P(|X|\geq a).
\end{aligned}$$

□

Exercise #5. 2. 设 $h:\mathbb{R}\to[0,\alpha]$ 是一个非负有界函数. 证明当 $0\leq a<\alpha$,

$$P\{h(X)\geq a\}\geq\frac{E\{h(X)\}-a}{\alpha-a}.$$

证明. 根据可列空间中期望的定义, 对 $a<\alpha$,

$$\begin{aligned}
E\{h(X)\}-a &= \sum_{w\in\Omega}\{h(X(w))-a\}P(w)\\
&= \sum_{\{h(X)\geq a\}}\{h(X)-a\}P(w)+\sum_{\{h(X)<a\}}\{h(X)-a\}P(w)\\
&\leq \sum_{\{h(X)\geq a\}}\{h(X)-a\}P(w)+0\\
&\leq \sum_{\{h(X)\geq a\}}(\alpha-a)P(w)\\
&= (\alpha-a)P\{h(X)\geq a\}.
\end{aligned}$$

移项即得证 (同样的思路可以推广到连续的场合). □

Exercise #5. 3. 证明 $\sigma_X^2 = E\left\{X^2\right\} - E\{X\}^2$, 假设上述两个期望都存在.

证明. 根据可列空间中期望的定义, 运算根据 P28(i), (iii),

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \mathbb{E}\{(X-\mathbb{E}X)^2\} \\ &= \mathbb{E}\{X^2 - 2X\mathbb{E}X + \mathbb{E}X^2\} \\ &= \mathbb{E}\{X^2\} - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}X + \mathbb{E}X^2 \\ &= \mathbb{E}\{X^2\} - (\mathbb{E}X)^2.\end{aligned}$$

□

Exercise #5. 4. 证明 $E\{X\}^2 \le E\left\{X^2\right\}$, 假设上述两个期望都存在.

证明. 根据 $(X-\mathbb{E}X)^2 \ge 0$, P28 运算性质 (ii), 以及上一题的结论, 立刻得证. □

Exercise #5. 5. 证明: $\sigma_X^2 = E\{X(X-1)\} + \mu_X - \mu_X^2$, 其中 $\mu_X = \mathbb{E}X$. 假设上述期望都存在.

证明.

$$\begin{aligned}LHS &= \mathbb{E}\{X^2\} - (\mathbb{E}X)^2. \\ RHS &= \mathbb{E}\{X(X-1)\} + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 \\ &= \mathbb{E}\{X^2 - X\} + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 \\ &= \mathbb{E}\{X^2\} - \mathbb{E}X + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 \\ &= \mathbb{E}\{X^2\} - (\mathbb{E}X)^2.\end{aligned}$$

□

Exercise #5. 6. 假设 X 是一个多项分布 $B(p,n)$ 随机变量. 当 j 取什么值时, $P\{X=j\}$ 最大?

注. 计算 $\dfrac{P(X=k)}{P(X=k-1)}$.

证明.

$$\begin{aligned}\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} &= \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}} \\ &= \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!}\frac{p}{1-p} \\ &= \frac{n-k+1}{k}\frac{p}{1-p}\end{aligned}$$

令上式等于 1,

$$\begin{aligned}\frac{n-k+1}{k}&=\frac{1-p}{p}\\ \Rightarrow\frac{n+1}{k}&=\frac{1}{p}\\ \Rightarrow k&=(n+1)p.\end{aligned}$$

当 $k\leq\lfloor(n+1)p\rfloor$ 时, $\dfrac{P(X=k)}{P(X=k-1)}>1$, 当 $k>\lfloor(n+1)p\rfloor$ 时, $\dfrac{P(X=k)}{P(X=k-1)}<1$. 因此, $P(X=\lfloor(n+1)p\rfloor)$ 最大.

□

Exercise #5. 7. 假设 X 是一个多项分布 $B(p,n)$ 随机变量. 求出当 X 取值为偶数时的概率.

证明. 这里可以给出两种证明方法:

一种是直接证明. 沿用上一章的记号, 记 $p_k=P(k)$, $k=0,1,2,...,n$. 那么

$$\begin{aligned}P(X\text{ 偶数})+P(X\text{ 奇数})&=\sum_{k=0}^{n}p_k=1\\ P(X\text{ 偶数})-P(X\text{ 奇数})&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kp_k.\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kp_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k}=(1-2p)^n,$$

所以

$$P(X\text{ 偶数})=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=0}^{n}(-1)^kp_k\right)=\frac{1}{2}\left[1+(1-2p)^n\right].$$

另一种方法是用数学归纳法. 断言: 对样本数为 n, $P(X\text{ 偶数})=\dfrac{1}{2}\left[1+(1-2p)^n\right]$. 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 假设对于 $n-1$, 结论成立. 那么

$$\begin{aligned}P(X_n\text{ 偶数})=&P(X_{n-1}\text{ 偶数})(1-p)+P(X_n\text{ 奇数})p\\ =&\frac{1}{2}\left[1+(1-2p)^{n-1}\right](1-p)+\frac{1}{2}\left[1-(1-2p)^{n-1}\right]p\\ =&\frac{1}{2}\left[1+(1-2p)^n\right].\end{aligned}$$

证毕.

□

Exercise #5. 8. 假设 X_n 是服从多项分布 $B(p_n,n)$ 的随机变量, 且满足 $\lambda=np_n$ 是一个常数. 令 $A_n=\{X_n\geq1\}$, Y 服从 *Poisson*(λ). 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=j|A_n)=P(Y=j|Y\geq1)$.

证明. 先计算

$$P(X_n=j\mid X_n\geq1)=\frac{P(X_n=j,X_n\geq1)}{P(X_n\geq1)}$$

显然, 当 $j=0$ 时, $P(X_n=0 \mid X_n \geq 1)=0$. 且 $P(Y=0 \mid Y \geq 1)=0$, 等式成立! 当 $j \geq 1$ 时,

$$
\begin{aligned}
P(X_n=j \mid X_n \geq 1) &= \frac{P(X_n=j)}{P(X_n \geq 1)} \\
&= \frac{\binom{n}{j} p_n^j (1-p_n)^{n-j}}{1-(1-p_n)^n} \\
&= \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{p_n^j (1-p_n)^{n-j}}{1-(1-p_n)^n} \\
&= \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{j!\left\{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right\}} \left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^j \frac{n!}{(n-j)!} \\
&= \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{j!\left\{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right\}} \left(\frac{\lambda}{n-\lambda}\right)^j \frac{n!}{(n-j)!} \\
&= \frac{\lambda^j \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{j!\left\{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right\}} \frac{n!}{(n-\lambda)^j (n-j)!} \\
&\to \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!(1-e^{-\lambda})} \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

而当 $j \geq 1$ 时,

$$
P(Y=j \mid Y \geq 1) = \frac{P(Y=j)}{1-P(Y=0)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^j/j!}{1-e^{-\lambda}} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!(1-e^{-\lambda})}.
$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=j|A_n)=P(Y=j|Y\geq 1)$. □

Exercise #5. 9. 设 X 服从 $Poisson(\lambda)$. j 取何值时, $P(X=j)$ 最大?

证明.

$$
\frac{P(X=j)}{P(X=j-1)} = \frac{\frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}}{\frac{\lambda^{j-1}e^{-\lambda}}{(j-1)!}} = \frac{\lambda}{j}.
$$

其中, j 为整数. 当 $j \leq \lfloor\lambda\rfloor$ 时, $\dfrac{P(X=j)}{P(X=j-1)} > 1$, 当 $j > \lfloor\lambda\rfloor$ 时, $\dfrac{P(X=j)}{P(X=j-1)} < 1$.

因此, 当 $j=\lfloor\lambda\rfloor$ 时, $P(X=j)$ 最大. □

Exercise #5. 10. 设 X 服从 $Poisson(\lambda)$. 对固定的 $j>0$, λ 取何值时, $P(X=j)$ 最大?

证明. 关于 λ 求导,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}P(X=j) &= \frac{d}{d\lambda}\frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \\
&= \frac{je^{-\lambda}\lambda^{j-1}}{j!} - \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{j-1}}{j!}(j-\lambda).
\end{aligned}
$$

因此, 当 $\lambda=j$ 时, $P(X=j)$ 最大. □

Exercise #5. 11. 设 X 服从 $Poisson(\lambda)$, λ 是正整数. 证明 $\mathbb{E}\{|X-\lambda|\} = \dfrac{2\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{(\lambda-1)!}$, 以及 $\sigma_X^2 = \lambda$.

证明. 先证明 $Var(X) = \lambda$. 首先, $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = \lambda$. $\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{n!}\lambda^n = \lambda^2 + \lambda$. 因此, $\sigma_X^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda$.

接下来证明 $\mathbb{E}\{|X-\lambda|\} = \dfrac{2\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{(\lambda-1)!}$. 对固定的 $\lambda > 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{|X-\lambda|\} =& \sum_{k=0}^{\infty} |k-\lambda| \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
=& \sum_{k\le\lambda} (\lambda-k) \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \sum_{k>\lambda} (k-\lambda) \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
=& \sum_{k\le\lambda} (\lambda-k) \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} (k-\lambda) \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \sum_{k\le\lambda} (k-\lambda) \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
=& 2\sum_{k=0}^{\lambda} (\lambda-k) \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},
\end{aligned}
$$

而 $\sum_{k=0}^{\lambda} (\lambda-k) \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!} = \lambda + \sum_{k=1}^{\lambda-1} \left[\dfrac{\lambda^{k+1}}{k!} - \dfrac{\lambda^k}{(k-1)!}\right] = \dfrac{\lambda^\lambda}{(\lambda-1)!}$, 于是, $\mathbb{E}\{|X-\lambda|\} = \dfrac{2\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{(\lambda-1)!}$. □

Exercise #5. 12. 设 X 服从多项分布 $B(p,n)$. 证明当 $\lambda > 0, \varepsilon > 0$ 时,

$$P(X - np > n\varepsilon) \le \mathbb{E}\{\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon))\}.$$

证明.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\exp(\lambda(X-np-n\varepsilon))\} &= \sum_{k=0}^{n} \exp(\lambda(k-np-n\varepsilon))\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \left[\sum_{k-np-n\varepsilon>0} + \sum_{k-np-n\varepsilon\le 0}\right] \exp(\lambda(k-np-n\varepsilon))\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&\ge \sum_{k-np-n\varepsilon>0} \exp(\lambda(k-np-n\varepsilon))\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&\ge \sum_{k-np-n\varepsilon>0} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= P(X-np>n\varepsilon).
\end{aligned}
$$

□

Exercise #5. 13. 设 X_n 服从多项分布 $B(p,n)$, $p>0$ 固定. 证明对于任意固定的 $b>0$, $P(X_n\le b)$ 趋于 0.

证明.

$$P(X_n\le b)=\sum_{k=0}^{b}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

对 n 取极限,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P(X_n\le b)&=\sum_{k=0}^{b}\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{b}\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^k(n-k)!}(1-p)^n\left(\frac{np}{1-p}\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{b}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\lim_{n\to\infty}(1-p)^n n^k\\&=\sum_{k=0}^{b}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\cdot 0\\&=0.\end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-p)^n n^k=0$ 是因为可以运用 L'Hospital 法则.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1-p)^n n^k&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\exp(-n\log(1-p))}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{kn^{k-1}}{-\exp(-n\log(1-p))\log(1-p)}\end{aligned}$$

重复 k 次

$$\lim_{n\to\infty}(1-p)^n n^k=\lim_{n\to\infty}\frac{k!}{(-\log(1-p))^k}\exp(-n\log(1-p))=0.$$

其中 $0<p<1$. □

Exercise #5. 14. 设 X 服从多项分布 $B(p,n)$. 其中 $p>0$ 固定, $a>0$. 证明:

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|>a\right)\le\frac{\sqrt{p(1-p)}}{a^2n}\min\{\sqrt{p(1-p)},a\sqrt{n}\}$$

以及对任意的 $\varepsilon>0$, $P(|X-np|\le n\varepsilon)$ 趋于 1.

证明. 首先, 根据 Chebyshev 不等式,

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|>a\right)=P\left(|X-np|>an\right)\le\frac{np(1-p)}{a^2n^2}=\frac{np(1-p)}{a^2n^2}=\frac{p(1-p)}{a^2n}.$$

其次, 根据 Markov 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|>a\right) &= P\left(|X-np|>an\right) \\
&\le \frac{\mathbb{E}\left\{|X-np|\right\}}{an} \\
&\le \frac{1}{an}\sqrt{\mathbb{E}\left\{|X-np|^2\right\}} \\
&= \frac{1}{an}\sqrt{np(1-p)} \\
&= \frac{\sqrt{p(1-p)}}{a\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

结合以上两个不等式, 即得到题目中的不等式.

最后,

$$1 \ge P(|X-np|\le n\varepsilon) = 1-P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|>\varepsilon\right) \ge 1-\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon^2}\min\{\sqrt{p(1-p)},\varepsilon\sqrt{n}\} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

□

Exercise #5. 15. 令 X 服从二项分布 $B\left(\frac{1}{2},p\right)$, 其中 $n=2m$. 令

$$a(m,k)=\frac{4^m}{\binom{2m}{m}}P(X=m+k).$$

证明: $\lim_{m\to\infty}(a(m,k))^m = e^{-k^2}$.

证明.

$$\begin{aligned}
(a(m,k))^m &= \left(\frac{4^m}{\binom{2m}{m}}\binom{2m}{m+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}\right)^m \\
&= \left(\frac{\frac{(2m)!}{(m+k)!(m-k)!}}{\frac{(2m)!}{m!m!}}\right)^m \\
&= \left(\frac{m!m!}{(m+k)!(m-k)!}\right)^m \\
&= \left[\frac{m\cdot(m-1)\cdots(m-k+1)}{(m+k)\cdot(m+k-1)\cdots(m+1)}\right]^m \\
&= \left[\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{k}{m+k-i}\right)\right]^m
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\log\left(a(m,k)\right)^m &= m\sum_{i=0}^{k-1}\log\left(1-\frac{k}{m+k-i}\right) \\
&= -m\sum_{i=0}^{k-1}\frac{k}{m+k-i}+o\left(1\right) \\
&= -k\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{1+\frac{k-i}{m}}+o\left(1\right) \\
&\to -k^2(m\to\infty).
\end{aligned}$$

于是, $\lim_{m\to\infty}(a(m,k))^m = e^{-k^2}$.

□

Exercise #5. 16 (无记忆性)**.** 设 X 服从几何分布. 证明对于 $i,j>0$,

$$P(X>i+j \mid X>i) = P(X>j).$$

证明. 根据几何分布的定义, $P(X>x)=(1-p)^x$, 其中 p 是成功的概率, 则

$$\begin{aligned}P(X>i+j \mid X>i) &= \frac{P(X>i+j, X>i)}{P(X>i)}\\ &= \frac{P(X>i+j)}{P(X>i)}\\ &= \frac{(1-p)^{i+j}}{(1-p)^i}\\ &= (1-p)^j\\ &= P(X>j).\end{aligned}$$

□

Exercise #5. 17. 设 X 服从几何分布 *Geometric*(p). 证明

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{1+X}\right\} = \log\left((1-p)^{\frac{p}{p-1}}\right)$$

证明. 设 X 服从参数为 p 的几何分布, 则按照书上的参数化 (P31),

$$P(X=k) = p^k(1-p), \quad k=0,1,2,...$$

于是,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\frac{1}{1+X}\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}p^k(1-p)\\ &= (1-p)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}p^k.\end{aligned}$$

对于级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{1+k}$, 注意到 $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dx$. 于是根据 Fubini 定理, 以及当 $p<1, x\in[0,1]$ 时级数绝对收敛,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}p^k = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^k p^k dx = \int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}x^k p^k dx = \int_0^1\frac{1}{1-xp}dx = -\frac{1}{p}\log(1-px)\Big|_0^1 = \frac{1}{p}\log\left(\frac{1}{1-p}\right).$$

于是,

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{1+X}\right\} = (p-1)\frac{1}{p}\log(1-p) = \log\left((1-p)^{\frac{p-1}{p}}\right).$$

□

Exercise #5. 18. *独立重复地投掷一枚朝上概率为 p 的硬币.*

a) 前 n 次抛硬币都是正面朝上的概率是多少?

b) 在第 n 次抛掷时首次得到反面的概率是多少?

c) 首次得到反面时, 需要投掷硬币次数多期望是多少?

证明.

$$\mathbb{E}[X] = (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p^{k-1}$$

这个级数可以通过级数求导得出.

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}, \quad |p| < 1.$$

两边关于 p 求导,

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

因此,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p}.$$

a) 前 n 次抛硬币都是正面朝上的概率是 p^n.

b) 在第 n 次抛掷时首次得到反面的概率是 $p^{n-1}(1-p)$.

c) 即投掷次数服从成功概率为 $1-p$ 的几何分布, 首次得到反面时, 需要投掷硬币次数的期望是 $\dfrac{1}{1-p}$.

□

Exercise #5. 19. *证明对于一列事件 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$,*

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right)$$

其中等式的每一侧都可以取值为 ∞.

证明. 记 $S = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}, S_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$, 则 S_n 是一个递增序列, 且 $S_n \uparrow S$. 由 Levi 单调收敛定理,

$$\mathbb{E}\{S\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{S_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

□

Exercise #5. 20. 假设 X 所有可能的取值是 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. 证明

$$\mathbb{E}\{X\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).$$

证明. 根据正项级数求和可交换 (要么绝对收敛, 要么发散),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X\} &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).
\end{aligned}$$

□

Exercise #5. 21. 设 X 服从 $Poisson(\lambda)$. 证明对 $r = 2, 3, 4, ...,$

$$\mathbb{E}\{X(X-1)\dots(X-r+1)\} = \lambda^r.$$

证明.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X(X-1)\dots(X-r+1)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{k!}{(k-r)!}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-r)!} \\
&= \lambda^r \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\lambda^{k-r} e^{-\lambda}}{(k-r)!} \\
&= \lambda^r.
\end{aligned}$$

□

Exercise #5. 22. 设 X 服从几何分布 $Geometric(p)$. 证明对 $r = 2, 3, 4, ...,$

$$\mathbb{E}\{X(X-1)\dots(X-r+1)\} = \frac{r!p^r}{(1-p)^r}$$

证明. 设 X 服从参数为 p 的几何分布, 则按照书上的参数化 (P31),

$$P(X = k) = p^k(1-p), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

于是,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X(X-1)\dots(X-r+1)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)p^k(1-p) \\
&= (1-p)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)p^k \\
&= (1-p)\sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)p^k \\
&= (1-p)\sum_{k=r}^{\infty} \frac{k!}{(k-r)!}p^k \\
&= (1-p)r!\sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r}p^k
\end{aligned}
$$

由于

$$
\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}, \quad |p| < 1.
$$

两边关于 p 求 $r-1$ 阶导,

$$
\sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} p^{k-r} = \frac{r!}{(1-p)^{r+1}}.
$$

两边同乘 p^r, 于是,

$$
\mathbb{E}\{X(X-1)\dots(X-r+1)\} = \frac{r!p^r}{(1-p)^r}.
$$

□