Chapter 15: 独立随机变量的和

Latest Update: 2025 年 1 月 2 日

Exercise #15. 1. 设 $X_1, ..., X_n$ 是独立的随机变量, 假设 $\mathbb{E}\{X_j\} = \mu, \mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2 < \infty, 1 \leq j \leq n$. 令

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \quad \text{以及} \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \bar{X}\right)^2.$$

证明:

a) $\mathbb{E}\{\bar{X}\} = \mu$;

b) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$;

c) $\mathbb{E}\{S^2\} = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$;

证明. a) $\mathbb{E}\{\bar{X}\} = \mathbb{E}\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\{X_j\} = \mu$;

b) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}(X_j) = \frac{\sigma^2}{n}$;

c) $\mathbb{E}\{S^2\} = \mathbb{E}\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \bar{X}\right)^2\} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\{(X_j - \bar{X})^2\}$.

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\{(X_j - \bar{X})^2\} = \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\{X_j^2\} - n\mathbb{E}\{\bar{X}^2\} = (n-1)\sigma^2$$

于是 $\mathbb{E}\{S^2\} = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$.

□

Exercise #15. 2. 设 $X_1, ..., X_n$ 是独立的随机变量, 且有有限的方差. 设 $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$. 证明:

$$\sigma^2_{\frac{1}{n}S_n} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma^2_{X_j}$$

并推导出若 $\sigma^2_{X_j} = \sigma^2, 1 \leq j \leq n$, 则 $\sigma^2_{\frac{1}{n}S_n} = \sigma^2/n$.

证明.

$$\sigma^2_{\frac{1}{n}S_n} = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma^2_{X_j}.$$

若 $\sigma^2_{X_j} = \sigma^2, 1 \le j \le n$, 则 $\sigma^2_{\frac{1}{n}S_n} = \sigma^2/n$. □

Exercise #15. 3. 证明*: 若* $X_1, ..., X_n$ 是独立同分布的随机变量, 则

$$\varphi_{S_n}(u) = (\varphi_X(u))^n,$$

其中 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

证明.

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n}(u) &= \mathbb{E}\left\{e^{iuS_n}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{e^{iu\sum_{j=1}^{n} X_j}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\prod_{j=1}^{n} e^{iuX_j}\right\} \\
&= \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left\{e^{iuX_j}\right\} \quad (\text{独立性}) \\
&= (\varphi_X(u))^n.
\end{aligned}$$

□

问题 4-8 是在讨论和数是一个随机数的 独立随机变量的和. 我们设 $X_1, X_2, ...$ 是一个独立同分布的随机变量无穷序列, 且 N 是正的, 取值为整数的随机变量, 它于序列 $\{X_n\}$ 独立. 进一步地, 令

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \text{以及} \quad S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

并约定当 $N = 0$ 时, $S_N = 0$.

Exercise #15. 4. 对于任意一个 *Borel* 集 A*,* 证明*:*

$$P(S_N \in A \mid N = n) = P(S_n \in A).$$

证明.

$$\begin{aligned}
P(S_N \in A \mid N = n) &= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \in A \mid N = n\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \in A\right) \quad (\text{独立性}) \\
&= P(S_n \in A).
\end{aligned}$$

□

Exercise #15. 5. 假设 $\mathbb{E}\{N\}<\infty$ 以及 $\mathbb{E}\{|X_j|\}<\infty$. 证明:

$$\mathbb{E}\left\{S_N\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{S_n\right\}P(N=n)$$

注.

$$\mathbb{E}\left\{S_N\right\}=\mathbb{E}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}S_n\mathbb{I}_{\{N=n\}}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{S_n\mathbb{I}_{\{N=n\}}\right\}.$$

证明. 由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\{|S_n\mathbb{I}_{\{N=n\}}|\}\leq\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\{|S_n|\}P(N=n)\leq\sum_{n=0}^{\infty}n\mathbb{E}\{|X_j|\}P(N=n)=\mathbb{E}\{|X_j|\}\mathbb{E}\{N\}<\infty,$$

于是根据控制收敛定理, 我们有期望求和可交换. 于是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{S_N\right\}&=\mathbb{E}\left\{S_N1_{\{N\neq0\}}\right\}+\mathbb{E}\left\{S_N1_{\{N=0\}}\right\}\\&=\mathbb{E}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}S_n1_{\{N=n\}}\right\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{S_n1_{\{N=n\}}\right\}\quad(\text{控制收敛定理})\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{S_n\right\}P(N=n).\end{aligned}$$

□

Exercise #15. 6. 假设 $\mathbb{E}\{N\}<\infty$ 以及 $\mathbb{E}\{|X_j|\}<\infty$. 证明:

$$\mathbb{E}\{S_N\}=\mathbb{E}\{N\}\mathbb{E}\{X_j\}.$$

证明.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{S_N\}&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\{S_n\}P(N=n)\quad(\text{习题 }15.5)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}n\mathbb{E}\{X_j\}P(N=n)\\&=\mathbb{E}\{X_j\}\sum_{n=0}^{\infty}nP(N=n)\\&=\mathbb{E}\{X_j\}\mathbb{E}\{N\}.\end{aligned}$$

□

Exercise #15. 7. *假设 $\mathbb{E}\{N\} < \infty$ 以及 $\mathbb{E}\{X_j\} < \infty$. 证明:*

$$\varphi_{S_N}(u) = E\left\{\left(\varphi_{X_j}(u)\right)^N\right\}.$$

注.

$$\varphi_{S_N}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left\{e^{iuS_n} 1_{\{N=n\}}\right\}.$$

证明.

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_N}(u) &= \mathbb{E}\{e^{iuS_N}\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{iuS_N} \mathbb{I}_{\{N=n\}}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left\{e^{iuS_n} \mathbb{I}_{\{N=n\}}\right\} \quad \text{(控制收敛定理)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\{e^{iuS_n}\} P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{S_n}(u) P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{X_j}(u)^n P(N=n) \\
&= \mathbb{E}\left\{\left(\varphi_{X_j}(u)\right)^N\right\}.
\end{aligned}$$

其中, 期望求和可交换是由于控制收敛定理:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\{|e^{iuS_n} \mathbb{I}_{\{N=n\}}|\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\{|e^{iuS_n}|\} P(N=n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) = 1 < \infty.$$

□

Exercise #15. 8. *用 15.7 证明 15.6.*

证明. 这里的推导是形式的.

$$\begin{aligned}
i\mathbb{E}\{S_N\} &= \left.\frac{\partial}{\partial u} \varphi_{S_N}(u)\right|_{u=0} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial u} \mathbb{E}\left\{\left(\varphi_{X_j}(u)\right)^N\right\}\right|_{u=0} \\
&= \mathbb{E}\left\{N\left(\varphi_{X_j}(0)\right)^{N-1} i\varphi'_{X_j}(0)\right\} \\
&= \mathbb{E}\{N\} i\mathbb{E}\{X_j\}.
\end{aligned}$$

从而

$$\mathbb{E}\{S_N\} = \mathbb{E}\{N\}\mathbb{E}\{X_j\}.$$

□

Exercise #15. 9. 设 X, Y 是实值独立的随机变量. 假设 $X, X+Y$ 同分布. 证明: Y 几乎处处为 0.

证明. 由于 $X, X+Y$ 同分布, 那么 X 和 $X+Y$ 的特征函数相等, 即

$$\varphi_X(u) = \varphi_{X+Y}(u) = \mathbb{E}\{e^{iu(X+Y)}\} = \mathbb{E}\{e^{iuX}e^{iuY}\} = \mathbb{E}\{e^{iuX}\}\mathbb{E}\{e^{iuY}\} = \varphi_X(u)\varphi_Y(u).$$

由于 X 是实值随机变量, 于是 $\varphi_Y(u) = 1$, 这是退化分布 $\delta_0(x)$ 的特征函数. 根据唯一性定理, Y 服从取值为 0 的退化分布, 从而几乎处处为 0. □

Exercise #15. 10. 设 f, g 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}_+$ 上的函数, 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty \quad and \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx < \infty.$$

证明:

1. $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$几处存在;
2. $f * g(x) = g * f(x)$;
3. 若 f, g 中的一个是连续函数, 则 $f * g$ 也是连续函数. 需要加条件: f 有界/g 有界/f 有紧支撑/g 有紧支撑.

证明. 1.

$$\int_{\mathbb{R}} f * g(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dydx$$
$$= \int g(y)\int f(x-y)dxdy = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$
$$\Rightarrow \|f * g\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^1} < \infty \Rightarrow f * g \overset{\text{a.s.}}{<} \infty.$$

2.

$$f * g = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \quad g * f = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)dy$$

3. 设 $x_n \to x$, 则有逐点收敛性,

$$f(x_n - y)\,g(y) \to f(x-y)g(y)$$

首先, 假设 f 有界, 那么

$$|f(x_n - y)\,g(y)| \leqslant (\sup f)g(y) \in L'$$

由控制收敛定理, 有

$$f * g(x_n) \to f * g(x).$$

其次, 假设 f 有紧支撑, 那么 f 有界, 成立.

假设 g 紧支, 即存在 K 紧, 使得 $g(x) = 0, x \in K^c$, 那么定义

$$K' = \overline{\{x - y + 2 : y \in R, \alpha \in [-1, 1]\}}$$

那么 K' 也是紧的, 则对于充分大的 N,

$$\begin{aligned} & f\left(x_n-y\right) g(y)=f\left(x_n-y\right) g(y) \mathbb{I}_{(y \in k)} \\ = & f(t) \cdot g(y) \mathbb{I}_{(y \in K)} \mathbb{I}_{t \in K'} \leqslant\left|\sup _{t \in K'} f(t)\right| \cdot g(y) \in L^1 . \end{aligned}$$

由控制收敛定理, 有

$$f * g(x_n) \rightarrow f * g(x).$$

最后, 若 g 是有界的. 取简单函数 $f_m \uparrow f$ 逼近, 有

$$\|f_m-f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

根据 f 有界时的讨论,

$$\begin{aligned} & \left|\int f_m\left(x_n-y\right) g(y) d y-\int f\left(x_n-y\right) g(y) d y\right| \\ \leqslant & \int\left|f_m\left(x_n-y\right)-f\left(x_n-y\right)\right| g(y) d y \\ \leqslant & |\sup g| \cdot \int\left|f_m\left(x_n-y\right)-f\left(x_n-y\right)\right| d y \\ = & |\sup g| \cdot\|f_m-f\|_{L^1} \end{aligned}$$

同理

$$\left|\int f_m(x-y) g(y) d y-\int f(x-y) g(y) d y\right| \leqslant|\sup g|\|f_m-f\|_{L^1} .$$

对于任意的 m, 当 n 充分大时, 有

$$\left|\int f_m\left(x_n-y\right) g(y) d y-\int f_m(x-y) g(y) d y\right|<\varepsilon$$

联合以上不等式, 即得结论.

□

Exercise #15. 11. 设 X, Y 是独立同分布的. 进一步假设 $X+Y$ 和 $X-Y$ 独立. 证明:

$$\varphi_X(2u)=\{\varphi_X(u)\}^3 \varphi_X(-u).$$

证明.

$$\begin{aligned} \varphi_X(2 u) & =\mathbb{E}\{e^{i 2 u X}\} \\ & =\mathbb{E}\{e^{i u(X+Y)} e^{i u(X-Y)}\} \\ & =\mathbb{E}\{e^{i u(X+Y)}\} \mathbb{E}\{e^{i u(X-Y)}\} \quad (\text{独立性}) \\ & =\varphi_X^2(u) \varphi_X(u) \varphi_X(-u) \\ & =\{\varphi_X(u)\}^3 \varphi_X(-u) . \end{aligned}$$

□

Exercise #15. 12. 设 X, Y 满足 *15.11* 的条件. 此外, $\mathbb{E}\{X\} = 0, \mathbb{E}\{X^2\} = 1$. 证明: X 服从标准正态分布.

注. 证明存在 $a > 0$ 使得 $\varphi(u) \neq 0, \forall |u| \leq a$. 设 $\psi(u) = \dfrac{\varphi(u)}{\varphi(-u)}$, 其中 $|u| \leq a$, 证明 $\psi(u) = \{\psi(u/2^n)\}^{2^n}$; 接着证明 $\psi(u) \to 1$, 当 $n \to \infty$. 这推导出 $\varphi(t) = \{\varphi(t/2^n)\}^{4^n}$, 最后令 $n \to \infty$.

证明. 由于 $\mathbb{E}\{X\} = 0$, 于是 $\varphi_X(0) = 1$. 由于 $\mathbb{E}\{X^2\} = 1$, 于是 $\varphi_X''(0) = -1$. 由于 $\varphi_X(u)$ 是特征函数, 那么 $\varphi_X(u)$ 是连续的, 且 $\varphi_X(u)$ 在 $u = 0$ 处有连续的二阶导数. 于是 $\varphi_X(u)$ 在 $u = 0$ 处的泰勒展开是

$$\varphi_X(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

由于 $\varphi_X(u)$ 是特征函数, 那么 $\varphi_X(u)$ 是有界的, 即存在 $a > 0$ 使得 $\varphi(u) \neq 0, \forall |u| \leq a$. 设 $\psi(u) = \dfrac{\varphi(u)}{\varphi(-u)}$, 其中 $|u| \leq a$, 于是

$$\psi(u) = \frac{\varphi(u)}{\varphi(-u)} = \frac{\{\varphi(u/2)\}^3 \varphi(-u/2)}{\{\varphi(-u/2)\}^3 \varphi(u/2)} = \{\psi(u/2)\}^2.$$

于是用归纳法易证 $\psi(u) = \{\psi(u/2^n)\}^{2^n}$. 断言:

$$\lim_{n\to\infty} \{\psi(u/2^n)\}^{2^n} = 1.$$

这是因为

$$\{\psi(u/2^n)\}^{2^n} = \left\{\frac{\varphi(u/2^n)}{\varphi(-u/2^n)}\right\}^{2^n}$$

分子:

$$\left\{\left[1 + \frac{-\frac{1}{2}u^2}{4^n} + o\left(\frac{u^2}{4^n}\right)\right]^{4^n}\right\}^{2^{-n}} \xrightarrow{n\to\infty} \left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right)^{2^{-n}}.$$

同理, 分母趋于 $\left(e^{\frac{u^2}{2}}\right)^{2^{-n}}$, 最后令 $n \to \infty$, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty} \{\psi(u/2^n)\}^{2^n} = 1$.

记 $\{\psi(u/2^n)\}^{2^n} = \psi_n(u)$,

$$\varphi_X(2u) = \varphi_X^3(u)\varphi_X(-u) = \varphi_X^4(u) \cdot \frac{\varphi_X(-u)}{\varphi_X(u)} = \varphi_X^4(u) \cdot \frac{1}{\psi_n(u)} \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_X^4(u).$$

用归纳法, 易证

$$\varphi(t) = \{\varphi(t/2^n)\}^{4^n} = \left[1 + \frac{-\frac{t^2}{2}}{4^n} + o\left(\frac{t^2}{4^n}\right)\right]^{4^n} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

根据唯一性定理, X 服从标准正态分布. □

Exercise #15. 13. 设 $X_1, X_2, \ldots$ 是独立同分布的随机变量, 服从 $N(\mu, \sigma^2)$. 设 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ 以及 $Y_j = X_j - \bar{X}$. 求出 $(\bar{X}, Y_1, \ldots, Y_n)$ 的联合特征函数. 设 $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} Y_j^2$. 并推导出 $\bar{X}$ 和 S^2 是独立的.

证明. 用 Gaussian 分布的性质说明: 首先, $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, $\mathbb{E}Y_j = 0, Var(Y_j) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$, 且

$$\operatorname{Cov}\left(\bar{X}, Y_i\right) = \operatorname{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, X_i - \bar{X}\right) = \frac{1}{n}\operatorname{Cov}\left(X_i, X_i\right) - \frac{1}{n}\operatorname{Var}\left(X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

以及

$$\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \operatorname{Cov}(X_i - \bar{X}, X_j - \bar{X}) = \operatorname{Cov}(X_i, X_j) - \operatorname{Cov}(X_i, \bar{X}) - \operatorname{Cov}(X_j, \bar{X}) + \operatorname{Var}(\bar{X}) = 0 - \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} = -\frac{\sigma^2}{n}.$$

因此，$(\bar{X}, Y_1, ..., Y_n)$ 的协方差矩阵为:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{n}\sigma^2 & \cdots & -\frac{\sigma^2}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{\sigma^2}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n}\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

$(\bar{X}, Y_1, ..., Y_n)$ 的联合特征函数为:

$$\phi_{\bar{X}, Y_1, ..., Y_n}(t_0, t_1, ..., t_n) = \exp\left(it_0\mu + \frac{i^2}{2}\left(\frac{\sigma^2}{n}t_0^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n-1}{n}\sigma^2 t_j^2 - \frac{\sigma^2}{n}t_j\sum_{k\neq j} t_k\right)\right)\right).$$

我们考虑 $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j^2$。由于 $(\bar{X}, Y_1, ..., Y_n)$ 是多维正态分布，且 $\bar{X}$ 和 Y_j 的协方差为 0，因此 $\bar{X}$ 和 Y_j 是独立的。由于 S^2 是 Y_j 的函数，因此 $\bar{X}$ 和 S^2 也是独立的。

□

Exercise #15. **14.** 证明: $\left|1 - e^{ix}\right|^2 = 2(1 - \cos x) \le x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. 用这个断言证明: $|1 - \varphi_X(u)| \le E\{|uX|\}$.

证明.

$$\begin{aligned} \left|1 - e^{ix}\right|^2 &= |1 - \cos x - i\sin x|^2 \\ &= (1 - \cos x)^2 + \sin^2 x \\ &= 2(1 - \cos x) \\ &\le x^2. \end{aligned}$$

最后一个不等号由求导易得. 从而 $|1 - e^{ix}| \le |x|$, 于是

$$\begin{aligned} |1 - \varphi_X(u)| &= \left|1 - \mathbb{E}\{e^{iuX}\}\right| \\ &\le \mathbb{E}\{\left|1 - e^{iuX}\right|\} \\ &\le \mathbb{E}\{|uX|\}. \end{aligned}$$

□

Exercise #15. 15. 设 $A = \left[-\frac{1}{u}, \frac{1}{u}\right]$. 证明:

$$\int_A x^2 \mu_X(dx) \leq \frac{12}{11u^2} \left\{1 - \mathrm{Re}\, \varphi_X(u)\right\}.$$

注. $1-\cos(x) \geq 0, 1-\cos(x) \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4, x \in \mathbb{R}$. 若 $z = a + ib$, 则 $\Re z = a$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

证明.

$$\Re\varphi_X(u) = \mathbb{E}\{\cos(uX)\}$$

由于 $\cos(x) \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$, 于是

$$1 - \Re\varphi_X(u) = \mathbb{E}\{1 - \cos(uX)\} \geq \mathbb{E}\{\frac{1}{2}u^2X^2 - \frac{1}{24}u^4X^4\}.$$

注意到 $1 - \cos(ux) \geq 0$, 以及当 $x \in [-1/u, 1/u]$ 时, $|ux| \leq 1$, 于是

$$1 - \cos(ux) \geq \frac{11}{24}u^2x^2, \quad x \in A.$$

于是,

$$1 - \Re\varphi_X(u) \geq \frac{11}{24}u^2\mathbb{E}\{X^2\mathbb{I}_A\} + 0.$$

证毕. □

Exercise #15. 16. 若 φ 是一个特征函数, 证明 $|\varphi|^2$ 也是一个特征函数.

注. 设 X, Y 是独立的随机变量, 考察 $Z = X - Y$.

证明. 设 X, Y 独立同分布, 特征函数是 φ, 那么 $Z = X - Y$ 的特征函数是

$$\varphi_Z(u) = \mathbb{E}\{e^{iuZ}\} = \mathbb{E}\{e^{iu(X-Y)}\} = \mathbb{E}\{e^{iuX}\}\mathbb{E}\{e^{-iuY}\} = \varphi(u)\varphi(-u) = \varphi(u)\overline{\varphi(u)} = |\varphi|^2.$$

$|\varphi|^2$ 是一个特征函数. □

Exercise #15. 17. 设 $X_1, ..., X_\alpha$ 是独立指数随机变量, 其参数为 $\beta > 0$. 证明 $Y = \sum_{i=1}^{\alpha} X_i \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

注. $Exp(\beta) \sim \Gamma(1, \beta)$.

证明. $\Gamma(\alpha, \beta)$ 分布的特征函数是 $\frac{\beta^\alpha}{(\beta - iu)^\alpha}$. 于是, Y 的特征函数是

$$\varphi_Y(u) = \varphi_X(u)^\alpha = \left(\frac{\beta}{\beta - iu}\right)^\alpha$$

这是 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 分布的特征函数. 根据唯一性定理, $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

□