Chapter 21: 中心极限定理

Latest Update: 2025 年 1 月 2 日

Exercise #21. 1. 设 $\{X_j\}_{j\geq 1}$ 是独立同分布的, $P(X_j = 1) = P(X_j = 0) = \dfrac{1}{2}$. 设 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, 令 $Z_n = 2S_n - n$. (投 n 次硬币时, 若记第 j 次投掷 $X_j = 1$ 为正面向上, $X_j = 0$ 为反面向上, 则 Z_n 是正面超过反面向上的次数.) 证明:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_n}{\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x)$$

其中

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

证明. 只需证 $\dfrac{Z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$. 事实上, 由于 X_j 是独立同分布的, 且 $\mathbb{E}\{X_j\} = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{E}\{X_j^2\} = \dfrac{1}{4}$, 根据期望方差存在的独立同分布场合的中心极限定理, 有

$$\frac{S_n - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} = \frac{2S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1),$$

即 $\dfrac{Z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$. □

Exercise #21. 2. 设 $\{X_j\}_{j\geq 1}$ 是独立同参数为 1 的双指数分布的, 密度为 $\dfrac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}\right) = Z$$

其中 Z 服从 $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. 且收敛是依分布收敛.

注. 可以用 *Slutsky* 定理和习题 *18.14* 的结论证明. 这是 *Laplace* 分布, 不是 *Cauchy* 分布.

证明. 由于 $\{X_j\}_{j\geq 1}$ 是独立同参数为 1 的双指数分布的, 密度为 $\dfrac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$. 期望和二阶矩:

$$\mathbb{E}\{X_j\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 0,$$
$$\mathbb{E}\{X_j^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx = \Gamma(3) = 2.$$

于是, 方差也是 2, 为有限数. 根据方差有限独立同分布场合的中心极限定理, 有

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\times 0}{\sqrt{2n}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

其中 Z 服从标准正态分布.

令 $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$, 由于 $\{X_i^2\}_{i=1}^n$ 独立同分布, 且 $\mathbb{E}\{X_i^2\}=2$, 根据 Kolmogorov 强大数定律, 有

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{a.s.} 2 \quad \Rightarrow \quad Y_n \xrightarrow{P} 2.$$

最后, 由 Slutsky 定理, 有

$$\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sqrt{2n}}}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sqrt{2}Z\cdot\frac{1}{2} = Z \sim \mathcal{N}\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

□

Exercise #21. 3. *构造一列独立随机变量 $\{X_n\}_{n\geq 1}$, 使得 X_j 依概率收敛于 1, 且 $\mathbb{E}\{X_j^2\}\geq j$. 设 Y 是独立于序列 $\{X_j\}_{j\geq 1}$, Y 分布是 $\mathcal{N}(0,1)$. 设 $Z_j = YX_j, j\geq 1$. 证明:*

a) $\mathbb{E}\{Z_j\}=0$

b) $\lim\limits_{j\to\infty}\sigma_{Z_j}^2 = \infty$

c) *Z_j 依分布收敛于 Z, 其中 Z 服从标准正态分布.*

注. *为构造 X_j, 设 $(\Omega_j,\mathcal{A}_j,P_j)$ 是 $([0,1],\mathcal{B}[0,1],m(ds))$, 其中 m 是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度, $\mathcal{B}[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上的 Borel 集族. 设*

$$X_j(\omega) = (j+1)1_{[0,1/j]}(\omega) + 1_{(1/j,1]}(\omega),$$

取定理 10.4 中的无穷乘积. 证明 (c) 可以用 Slusky 定理证明. 注意此时中心极限定理的条件不满足. 因为中心极限定理给出的是充分条件, 而不是必要条件.

证明. 按照提示中的构造, 在概率空间 $(\Omega_j,\mathcal{A}_j,P_j)$ 上定义随机变量 X_j. 在 $(\Omega_0,\mathcal{A}_0,P_0)$ 上定义随机变量 Y 服从标准正态分布. 定义 $\Omega = \prod_{n=0}^\infty \Omega_n, \mathcal{A} = \otimes_{n=0}^\infty \mathcal{A}_n$, 则根据定理 10.4, 存在唯一测度 P 使得 $(\Omega,\mathcal{A},P)$ 是概率空间. 将 Y, X_n 延拓到概率空间 $(\Omega,\mathcal{A},P)$ 上, 记为 $\tilde{Y},\tilde{X}_n$, 根据推论 10.2, $\tilde{Y},\tilde{X}_n$ 之间相互独立, 且 $\tilde{X}_n$ 与原来的 X_n 同分布, $\tilde{Y}$ 也服从标准正态分布.

不失一般性, 为使记号与题干中记号相同, 记上述定义出的独立随机变量为 $Y,\{X_n\}_{n\geq 1}$. 此时,

$$\mathbb{E}\{X_j\} = (j+1)\times\frac{1}{j} + 1\times\frac{j-1}{j} = 2,\quad \mathbb{E}\{X_j^2\} = (j+1)^2\times\frac{1}{j} + 1^2\times\frac{j-1}{j} = j+3 \geq j.$$

且有

$$P(|X_n - 1| > \varepsilon) = \frac{1}{n} \to 0,\quad (n\to\infty),\quad \forall\varepsilon > 0.$$

所以 X_n 依概率收敛于 1. 如此定义的 X_n 满足题干条件.

a) $\mathbb{E}\{Z_j\} = \mathbb{E}\{YX_j\} \overset{(\text{独立性})}{=} \mathbb{E}\{Y\}\mathbb{E}\{X_j\} = 0\times 2 = 0.$

b) $\mathrm{Var}(Z_j)=\mathbb{E}\{Z_j^2\}=\mathbb{E}\{Y^2X_j^2\}=\mathbb{E}\{Y^2\}\mathbb{E}\{X_j^2\}=1\times(j+3)=j+3\to\infty,\quad(j\to\infty).$

c) 根据 Slutsky 定理, 根据 X_j 依概率收敛于 1, Y 依分布收敛于标准正态分布, 从而 $Z_j=YX_j$ 依分布收敛于 $Z=Y\times 1=Y$, 其中 Z 服从标准正态分布.

□

Exercise #21. 4. 设 $\{X_j\}_{j\geq 1}$ 是独立同分布的非负随机变量, 且 $\mathbb{E}\{X_j\}=1$, $\sigma_{X_1}^2=\sigma^2\in(0,\infty)$. 证明:

$$\frac{2}{\sigma}\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{n}\right)\xrightarrow{\mathcal{D}}Z,$$

其中 Z 服从标准正态分布.

注.

$$\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}=\frac{\left(\sqrt{S_n}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{n}\right).$$

证明. 根据方差有限独立同分布场合的中心极限定理, 有

$$\frac{S_n-n}{\sqrt{n}\sigma}\xrightarrow{\mathcal{D}}Z,$$

而由于

$$\frac{2}{\sigma}\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{n}\right)=2\cdot\frac{\frac{S_n-n}{\sqrt{n}\sigma}}{1+\sqrt{\frac{S_n}{n}}},$$

根据独立同分布场合下, 期望存在的 Kolmorogov 强大数定律, 有

$$\sqrt{\frac{S_n}{n}}\xrightarrow{a.s.}1\quad\Rightarrow\quad\sqrt{\frac{S_n}{n}}\xrightarrow{P}1,$$

从而根据 Slutsky 定理, 有

$$\frac{2}{\sigma}\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{n}\right)\xrightarrow{\mathcal{D}}2Z=Z,$$

其中 Z 服从标准正态分布. □

Exercise #21. 5. 设 $\{X_j\}$ 是独立同分布的 *Poi*(1) 的随机变量. 设 $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}=Z,$$

其中 Z 服从标准正态分布.

证明. 设 X 服从 $\mathrm{Poi}(\lambda)$, 则 $\mathbb{E}X=\lambda$, $\mathrm{Var}(X)=\lambda$. 根据独立同分布场合的中心极限定理, 有

$$\frac{S_n-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\xrightarrow{\mathcal{D}}Z,$$

当 $\lambda=1$ 时, 即得结论. □

Exercise #21. 6. 设 Y^λ 是服从 $Poi(\lambda), \lambda > 0$. 证明:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{Y^\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = Z$$

其中 Z 服从标准正态分布. 收敛是依分布收敛.

注. 使用习题 *21.5* 的结论. 比较 Y^λ 和 $S_{\lfloor n\rfloor}, S_{\lfloor n\rfloor+1}$.

证明. 用特征函数. 参数为 λ 的 Poisson 分布的特征函数为

$$\varphi_{Y^\lambda}(t) = \mathbb{E}\{e^{itY^\lambda}\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(X = k) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

记 $Z^\lambda = \dfrac{Y^\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$, 则 Z^λ 的特征函数为

$$\varphi_{Z^\lambda}(t) = \mathbb{E}\left\{e^{it\cdot\frac{Y^\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}\right\} = e^{-it\sqrt{\lambda}}\varphi_{Y^\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = e^{-g_\lambda(t)},$$

其中,

$$g_\lambda(t) = it\sqrt{\lambda} - \lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1).$$

由于当 $\lambda \to \infty$ 时, $\left|\dfrac{it}{\sqrt{\lambda}}\right| \to 0$, 于是考虑带 Peano 余项的 Taylor 展开, 有

$$g_\lambda(t) = it\sqrt{\lambda} - \lambda\left(i\frac{t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2}{2\lambda} + O\left(\frac{t^3}{\lambda^{3/2}}\right)\right) = \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{t^3}{\lambda^{1/2}}\right).$$

于是,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varphi_{Z^\lambda}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

且 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 在 $t = 0$ 处连续, 且是标准正态分布的特征函数, 根据逆极限定理,

$$Z^\lambda \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

其中, Z 服从标准正态分布. $\square$

Exercise #21. 7. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}$$

注. 使用习题 *21.5* 的结论.

证明. 用习题 21.5 中的记号, 记

$$Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}},$$

由 21.5, $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, 于是, 根据弱收敛的定义, 有

$$P(Y_n \le 0) \to P(Z \le 0) = \frac{1}{2} \quad (n \to \infty).$$

而

$$P(Y_n \le 0) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \le 0\right) = P\left(S_n \le n\right) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

这就完成了证明. □

Exercise #21. 8. 设 $\{X_j\}_{j\ge 1}$ 是独立同分布的随机变量, 且 $\mathbb{E}\{X_j\} = 0$, $\sigma_{X_j}^2 = \sigma^2 < \infty$. 设 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, 证明: $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ 不是依概率收敛的.

证明. 若不然, 则根据期望方差存在的中心极限定理 $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$, 必有

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{P} Z, \quad (n\to\infty).$$

其中 $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则还有

$$\frac{S_{2n}}{\sigma\sqrt{2n}} \xrightarrow{P} Z, \quad (n\to\infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{2n}}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{P} \sqrt{2}Z.$$

于是,

$$\frac{S_{2n} - S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{P} (\sqrt{2}-1)Z \sim \mathcal{N}(0, 3-2\sqrt{2}).$$

而这与

$$\frac{S_{2n} - S_n}{\sigma\sqrt{n}} \overset{d}{=} \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1),$$

矛盾! 从而 $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ 不是依概率收敛的. □

Exercise #21. 9. 设 $\{X_j\}_{j\ge 1}$ 是独立同分布的随机变量, 且 $\mathbb{E}\{X_j\} = 0$, $\sigma_{X_j}^2 = \sigma^2 < \infty$. 设 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

注. 设 Z 服从 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, 计算 $\mathbb{E}\{|Z|\}$.

证明. 由于 $\mathbb{E}\{X_j\} = 0$, $\sigma_{X_j}^2 = \sigma^2$, 有期望方差存在场合下的中心极限定理,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

记 $g_t(x) = |x| \wedge t$ 是一个有界连续函数, 则根据弱收敛的定义,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{g_t\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right\} = \mathbb{E}\{g_t(Z)\}, \forall t > 0.$$

利用加一项减一项, 对于 $\forall t > 0$,

$$\left|\mathbb{E}\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right| \le \underbrace{\left|\mathbb{E}\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right\} - \mathbb{E}\left\{g_t\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right\}\right|}_{I_1} + \underbrace{\left|\mathbb{E}\left\{g_t\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right\} - \mathbb{E}\left\{g_t\left(Z\right)\right\}\right|}_{I_2} + \underbrace{\left|\mathbb{E}\left\{g_t\left(Z\right)\right\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right|}_{I_3},$$

针对 I_1, 注意到

$$\left|\mathbb{E}\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right\}-\mathbb{E}\left\{g_t\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right\}\right|\leq\mathbb{E}\left|\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}-g_t\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right)\right|=\mathbb{E}\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\mathbb{I}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\geq t\right)\right\}.$$

以及

$$\mathbb{E}\{S_n^2\}=Var(S_n)+(\mathbb{E}\{S_n\})^2=n\sigma^2.$$

根据放缩:

$$\mathbb{E}\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\mathbb{I}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\geq t\right)\right\}\leq\mathbb{E}\left\{\frac{S_n^2}{nt}\mathbb{I}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\geq t\right)\right\}\leq\frac{\sigma^2}{t}.$$

不等式两边对 n 取极限, 有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathbb{E}\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right\}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right|\leq\frac{\sigma^2}{t}+I_3. \tag{1}$$

对 I_3, 注意到 $g_t(Z)\uparrow|Z|(t\to\infty)$, 且

$$\mathbb{E}\{|Z|\}=2\int_0^\infty x(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

于是根据 Levi 单调收敛定理 $\lim\limits_{t\to\infty}I_3=0$, 再在不等式(1)两边令 $t\to\infty$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathbb{E}\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right\}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right|=0.$$

这表明:

$$\lim_{n\to\infty}E\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

□

Exercise #21. 10. 设 $\{X_j\}_{j\geq1}$ 是独立同 $(-1,1)$ 上的均匀分布. 设

$$Y_n=\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2+\sum_{j=1}^n X_j^3}.$$

证明: $\sqrt{n}Y_n$ 收敛.

注. $\sqrt{n}Y_n$ 依分布收敛于 $\mathcal{N}(0,3)$.

证明. 对于 $X\sim\mathrm{Unif}(-1,1)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X\}&=0,\\ \mathbb{E}\{X^2\}&=\int_{-1}^1 x^2\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{3},\\ \mathbb{E}\{X^3\}&=\int_{-1}^1 x^3\frac{1}{2}\,dx=0,\end{aligned}$$

对于 Y_n 分别考虑分子分母两个部分: 对于分母, 根据 $\{X_i^2\}_{i\geq 1}$ 独立同分布, 且 $\mathbb{E}\{X_i^2\} = \dfrac{1}{3}$, 根据 Kolmogorov 强大数定律, 有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} \frac{1}{3}.$$

同理, 对于 $\{X_i^3\}_{i\geq 1}$, 有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3 \xrightarrow{a.s.} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3 \xrightarrow{P} 0.$$

对于分子, 应用期望, 方差存在的独立同分布场合的中心极限定理, 有

$$\sqrt{\frac{3}{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\frac{1}{3n}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z, \quad \text{其中} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

于是, 应用 Slutsky 定理, 有

$$\sqrt{n}Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}Z}{\frac{1}{3}+0} = \sqrt{3}Z \sim \mathcal{N}(0,3).$$

从而 $\sqrt{n}Y_n$ 依分布收敛于 $\mathcal{N}(0,3)$. □

Exercise #21. 11. *设 $\{X_j\}_{j\geq 1} i.n.d.$ 于 $(-j,j)$ 上的均匀分布.*

a) 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} = Z$$

收敛是依分布收敛, 其中 Z 服从正态分布 $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{9}\right)$.

b) 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}} = Z,$$

其中, Z 服从标准正态分布.

注. *a) 证明 X_j 的特征函数是 $\varphi_{X_j}(u) = \dfrac{\sin(u_j)}{u_j}$; 计算 $\varphi_{S_n}(u)$ 以及 $\varphi_{S_n/n^{3/2}}(u)$, 接着用平方和公式证明极限是 $e^{-u^2/18}$.*

b) **不是**定理 *21.2* 的应用. 注意 这里 $\sup_j \mathbb{E}\{|X_j|^{2+\varepsilon}\} < \infty$ 不满足.

证明. 1. 根据 X_j 的特征函数是 $\varphi_{X_j}(u) = \dfrac{\sin(u_j)}{u_j}$, 有

$$\varphi_{S_n}(u) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(u) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin(u_j)}{u_j} = \frac{\sin(u)}{u}\frac{\sin(2u)}{2u}\cdots\frac{\sin(nu)}{nu},$$

$$\varphi_{S_n/n^{3/2}}(u) = \varphi_{S_n}(u/n^{3/2}) = \frac{\sin(u/n^{3/2})}{u/n^{3/2}}\frac{\sin(2u/n^{3/2})}{2u/n^{3/2}}\cdots\frac{\sin(nu/n^{3/2})}{nu/n^{3/2}}.$$

于是,

$$\log(\varphi_{S_n/n^{3/2}}(u)) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(\frac{\sin(ju/n^{3/2})}{ju/n^{3/2}}\right).$$

当 $n\to\infty$ 时, $\dfrac{ju}{n^{3/2}}\to 0$. 于是, 考虑 $\sin(x)$ 在 0 附近的 Peano 余项展开, 有

$$\sin\left(\frac{ju}{n^{3/2}}\right)=\frac{ju}{n^{3/2}}-\frac{1}{3!}\frac{j^3u^3}{n^{9/2}}+o\left(\frac{j^3u^3}{n^{9/2}}\right).$$

于是,

$$\frac{\sin(ju/n^{3/2})}{ju/n^{3/2}}=1-\frac{1}{6}\frac{j^2u^2}{n^3}+o\left(\frac{j^2u^2}{n^3}\right).$$

考虑 $\log(1-x)$ 在 0 附近带 Peano 余项展开, 有 $\log(1-x)=-x+o(x)$.

$$\log\left(1-\frac{1}{6}\frac{j^2u^2}{n^3}+o\left(\frac{j^2u^2}{n^3}\right)\right)=-\frac{1}{6}\frac{j^2u^2}{n^3}+o\left(\frac{j^2u^2}{n^3}\right).$$

从而

$$\sum_{j=1}^{n}\log\left(\frac{\sin(ju/n^{3/2})}{ju/n^{3/2}}\right)=-\frac{u^2}{6n^3}\sum_{j=1}^{n}j^2+o\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{u^2}{6n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+o\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{u^2}{18}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是,

$$\varphi_{S_n/n^{3/2}}(u)=\exp\left(-\frac{u^2}{18}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\xrightarrow{n\to\infty}\exp\left(-\frac{u^2}{18}\right).$$

2. 首先, $\sigma_j^2=\mathbb{E}\{X_j^2\}=\dfrac{j^2}{3}$. 于是,

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{3}}=\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{18}}.$$

根据第一问,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{3/2}/3}=Z,\quad Z\sim\mathcal{N}(0,1).$$

由于 $\dfrac{n^{3/2}/3}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{18}}}\to 1(n\to\infty)$, 从而根据 Slutsky 定理,

$$\frac{S_n}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2}}=\frac{S_n}{n^{3/2}/3}\cdot\frac{n^{3/2}/3}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{18}}}\xrightarrow{\mathcal{D}}Z.$$

□

Exercise #21. 12. 设 $X\in L^2$, 假设 X 与 $\frac{1}{\sqrt{2}}(Y+Z)$ 同分布, 其中 Y,Z 是独立的, 且 X,Y,Z 同分布. 证明: X 服从 $\mathcal{N}(0,\sigma^2),\sigma^2<\infty$.

注. 用迭代证明 X 与 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ 同分布, 其中 X_i 是独立同分布的, $n=2^m$.

证明. 考虑 $X_1,...,X_n$ 与 $X\in L^2$ 独立同分布 ($\forall n$). 则根据假设, X 与 $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1+X_2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_3+X_4)$ 同分布. 从而 X 与 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X_1+X_2)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X_3+X_4)\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{4}X_j\right)$ 同分布. 假设 X 与

$\dfrac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{j=1}^{2^m} X_j$ 同分布, 则通过考察 $\{X_j\}_{j=2^m+1}^{2^{m+1}}$, 有

$$X \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2^m}}\left(\sum_{j=1}^{2^m} X_j\right)+\frac{1}{\sqrt{2^m}}\left(\sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}} X_j\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{2^{m+1}}}\left(\sum_{j=1}^{2^{m+1}} X_j\right).$$

从而对 $n=2^m$, 有 X 与 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j$ 同分布.

分别对 X 和 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j$ 计算期望, 有

$$\mathbb{E}\{X\}=2^{\frac{m}{2}}\mathbb{E}\{X\},\quad \forall m\in\mathbb{N},$$

这使得 $\mathbb{E}\{X\}=0$.

由于 $X\in L^2$ 方差有限, 根据期望方差存在的独立同分布场合的中心极限定理,

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}=\frac{\sum_{i=1}^n X_n}{\sqrt{n}\sigma}\xrightarrow{\mathcal{D}} Z\sim\mathcal{N}(0,1).$$

于是, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. 最后, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j$ 的子列 $\dfrac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{j=1}^{2^m} X_j$ 同分布, 则必有 $X\sim\dfrac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{j=1}^{2^m} X_j\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2),\forall m\in\mathbb{N}$. □

> 关于绝对可积的一些注记.
>
> 称随机变量列 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 一致可积, 若
>
> $$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\{|X_n|\mathbb{I}(|X_n|\geq t)\}\xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

1. 一致可积 $\Rightarrow \sup\limits_{n\geq 1}\mathbb{E}\{|X_n|\}<\infty$. 根据 $\mathbb{E}|X_n|\leq t+\mathbb{E}\{|X_n|\mathbb{I}(|X_n|\geq t)\}$, 可见, 若 t 充分大时, $\sup\limits_{n\geq 1}\mathbb{E}\{|X_n|\mathbb{I}(|X_n|\geq t)\}$ 有限, 则
$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\{|X_n|\}<\infty.$$
2. 反之不然. 比如 $Y_n\sim Bernoulli(1/n), X_n=nY_n$, 则 $\mathbb{E}\{|X_n|\}=1,\forall n$. 但是,
$$\mathbb{E}\{|X_n|\mathbb{I}(|X_n|\geq t)\}=\mathbb{I}_{(-\infty,n]}(t)=\begin{cases}1, & t\leq n,\\ 0, & t>n.\end{cases}$$
3. 若 $X_n\xrightarrow{\mathcal{D}} X$, 则 $\mathbb{E}|X|\leq\liminf\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n|$. 记 $g_t(x)=|x|\wedge t$, 则 $g_t(x)$ 关于 x 有界连续. 根据弱收敛的定义,
$$\mathbb{E}g_t(X_n)\to\mathbb{E}g_t(X).$$
于是
$$\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n|\geq\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n|\wedge t=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\{g_t(X_n)\}=\mathbb{E}\{g_t(X)\}=\mathbb{E}\{|X|\wedge t\}.$$
根据 Levi 单调收敛定理, 令 $t\to\infty$, 即得 $\mathbb{E}|X|\leq\liminf\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n|$.

4. 若 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, 且 X_n 一致可积, 则 $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$. 根据

$$\mathbb{E}|X| \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| \le \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|.$$

以及一致可积性 $\Rightarrow \sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\{|X_n|\} < \infty$, 可得 $\mathbb{E}|X| < \infty$. 记 $h_t(x) = -t \vee (x \wedge t)$, 则有 $|X_n - h_t(X_n)| \le |X_n| \mathbb{I}\{|X_n| \ge t\}$. 用加一项减一项,

$$|\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X| \le |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}h_t(X_n)| + |\mathbb{E}h_t(X_n) - \mathbb{E}h_t(X)| + |\mathbb{E}h_t(X) - X|.$$

两边取 $\limsup_{n\to\infty}$, 有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X| &\le \limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}h_t(X_n)| + \underbrace{\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}h_t(X_n) - \mathbb{E}h_t(X)|}_{=0} + |\mathbb{E}h_t(X) - X| \\ &\le \sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\{|X_n| \mathbb{I}(|X_n| \ge t)\} + \mathbb{E}\{|X| \mathbb{I}(|X| \ge t)\}, \forall t > 0.\end{aligned}$$

再令 $t \to \infty$, 根据一致可积性和 $\mathbb{E}|X| < \infty$, 即得

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X| = 0.$$