Chapter 20: 大数定律

Latest Update: 2025 年 1 月 4 日

实变函数技巧: 函数收敛到点上

$$\left\{x \mid \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\right\} = \bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\{x || f_k(x) - f(x) |< 1/l\}.$$

函数收敛到无穷的点集:

$$E_{\infty} := \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\right\} = \bigcap_{M=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n\geq N}\{x : f_n(x) \geq M\}$$

$$E_{-\infty} := \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty\right\} = \bigcap_{M=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n\geq N}\{x : f_n(x) \leq -M\}$$

Exercise #20. 1 (一个弱化版本的大数定律). 设 $\{X_j\}$ 是一列随机变量, 使得 $\sup_j \mathbb{E}\{X_j^2\} = c < \infty$, $\mathbb{E}\{X_j X_k\} = 0$ 当 $j \neq k$. 设 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

a) 证明: $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{c}{n\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0$;

b) $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{L^2} 0, \frac{1}{n}S_n \xrightarrow{P} 0$.

注. 这里放松了常见的 *i.i.d.* 假设.

证明. a) 由 Markov 不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{n}S_n\right)^2\right\}}{\varepsilon^2} \leq \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

b) 只需证 L^2 收敛, 考察 $\mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{n}S_n\right)^2\right\}$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{n}S_n\right)^2\right\} &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left\{S_n^2\right\} = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j^2 + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} X_j X_k\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\{X_j^2\} \leq \frac{c}{n}.\end{aligned}$$

□

Exercise #20. 2. 设 $\{Y_j\}_{j\geq 1}$ 是一列独立的二项随机变量，定义在相同的概率空间上，服从 *Bernoulli*(p). 令 $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$. 证明: X_j 服从 *Binomial*(j, p), 且 $\frac{X_j}{j} \xrightarrow{a.s.} p$.

证明. Y_i 的特征函数为 $\varphi_{Y_i}(t) = 1 - p + pe^{it}$, 由独立性, X_j 的特征函数为 $\varphi_{X_j}(t) = \left(1 - p + pe^{it}\right)^j$. 这是一个二项分布的特征函数, 由特征函数的唯一性定理, X_j 服从 *Binomial*(j, p).

根据独立同分布场合下, 期望方差存在的强大数定律, $\mathbb{E}\{Y_1\} = p, \mathrm{Var}(Y_j) = p(1-p) < \infty$, 有

$$\frac{X_j}{j} = \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} Y_i \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}\{Y_1\} = p.$$

□

Exercise #20. 3. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的随机变量，且 $X_j \in L^1$. 令 $Y_j = e^{X_j}$. 证明:

$$\left(\prod_{j=1}^{n} Y_j\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{a.s.} e^{\mathbb{E}\{X_1\}}.$$

证明. 由于 X_i 是独立同分布的随机变量, 且是 L^1 的, 有 $\mathbb{E}\{X_1\} = \cdots = \mathbb{E}\{X_n\} = \mu \in \mathbb{R}^1$. 根据 Kolmogorov 强大数定律, 对题目中式子取对数, 有

$$\log\left(\left(\prod_{j=1}^{n} Y_j\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}\{X_1\}.$$

由于对数函数是连续函数, 根据连续映射定理, 有

$$\left(\prod_{j=1}^{n} Y_j\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{a.s.} e^{\mathbb{E}\{X_1\}}.$$

□

Exercise #20. 4. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的随机变量，且 $X_j \in L^1, \mathbb{E}\{X_j\} = \mu$. 设 $\{Y_j\}$ 也是一列独立同分布的随机变量，且 $Y_j \in L^1, \mathbb{E}\{Y_j\} = \nu \neq 0$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} Y_j} \sum_{j=1}^{n} X_j = \frac{\mu}{\nu} \quad a.s.$$

证明. 根据 Kolmogorov 强大数定律 (独立同分布 + 期望存在) 和连续映射定理 ($f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $\mathbb{R}^1 \backslash \{0\}$ 上连续), 只需证: 设随机变量 $Z_n \xrightarrow{a.s.} a, W_n \xrightarrow{a.s.} b$, 则 $Z_n W_n \xrightarrow{a.s.} ab$.

根据几乎处处收敛的定义,

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{|Z_n - a| > \varepsilon\}) = 0, \quad \forall\varepsilon > 0,$$
$$P(\limsup_{n\to\infty}\{|W_n - b| > \varepsilon\}) = 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

即 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时, 有

$$P\left(|Z_n-a|\leq\varepsilon\right)=1,$$
$$P\left(|W_n-b|\leq\varepsilon\right)=1.$$

由于 $Z_nW_n=(Z_n-a+a)(W_n-b+b)$, 于是有如下的拆分:

$$\begin{aligned}|Z_nW_n-ab|&=|(Z_n-a)(W_n-b)+a(W_n-b)+b(Z_n-a)|\\&\leq|Z_n-a|\,|W_n-b|+|a|\,|W_n-b|+|b|\,|Z_n-a|\\&<\varepsilon^2+2\,|a|\,\varepsilon+2\,|b|\,\varepsilon.\quad a.s.P\ \text{当}n>N(\varepsilon)\text{时}.\end{aligned}$$

于是记 $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon^2+2\,|a|\,\varepsilon+2\,|b|\,\varepsilon$, 则 $\forall\tilde{\varepsilon}>0,\exists N=N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时, 有

$$P\left(|Z_nW_n-ab|\leq\tilde{\varepsilon}\right)=1.$$

即 $Z_nW_n\xrightarrow{a.s.}ab$. □

Exercise #20. 5. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且 $X_j\in L^1$. 假设 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\nu)$ 依分布收敛于某个随机变量 Z, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j=\nu\qquad a.s.$$

注. 若 $Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\nu)$, 首先证明: $\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n$ 依分布收敛于 0.

证明. 由于 $\{X_j\}$ 独立同分布且期望有限, 记 $\mu=\mathbb{E}X_j$, 则根据 Kolmogorov 强大数定律, 有

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\xrightarrow{a.s.}\mu.$$

由于 $Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\nu)$ 依分布收敛于某个随机变量 Z, 则对 $\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n$, 根据 Slutsky 定理, 有 $\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n$ 依分布收敛于 0, 从而依概率收敛于 0.

即 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon),\forall n>N$,

$$P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n\right|\right)=P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\nu)\right|\right)<\varepsilon.$$

从而 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\xrightarrow{P}\nu$, 而 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\xrightarrow{a.s.}\mu$, 从而 $\mu=\nu$. □

Exercise #20. 6. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且 $X_j\in L^p$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^p=\mathbb{E}\left\{X^p\right\}$$

证明. 记 $Y_j = X_j^p \in L^1$, 则根据 Kolmogorov 强大数定律, 立刻得出结论. $\square$

Exercise #20. 7. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同 $\mathcal{N}(1,3)$ 的随机变量. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2} = \frac{1}{4} \ a.s.$$

证明. 根据习题 20.5, 立刻得出结论. $\square$

Exercise #20. 8. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且有均值 μ, 方差 σ^2. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sigma^2 \qquad a.s.$$

证明. 记 $Y_j = (X_j-\mu)^2 \in L^1$, 则根据 Kolmogorov 强大数定律, 立刻得出结论. $\square$

Exercise #20. 9. 设 $\{X_j\}$ 是一列独立同分布的整数随机变量, 且 $\mathbb{E}\{|X_j|\} < \infty$. 设 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. 称 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 为整数上的随机游走. 证明: 若 $\mathbb{E}(X_j) > 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty, \ a.s.$$

证明. 根据 Kolmogorov 强大数定律, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}\{X_1\} > 0, \ \text{a.s.}$$

反证法, 若不然, 记 $A = \{w : \lim_{n\to\infty} S_n = \infty\} = \bigcap_{M=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n\geq N}\{w : S_n \geq M\}$, 则 $P(A) < 1$, 则

$$A^c = \bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq N}\{w : S_n < M\}.$$

$w \in A^c$ 表明: 存在 $M = M(w)$, 使得 $\forall N$, 存在 $n \geq N$, 使得 $S_n(w) < M$. 于是

$$\frac{S_n}{n}(w) < \frac{M}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

从而

$$A^c \subset \left\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq 0\right\},$$

而 $\Pr\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq 0\right\} > 0$ 与 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}\{X_1\} > 0$ a.s. 矛盾! 假设不成立, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, a.s.

$\square$