Chapter 22: L^2 和 hilbert 空间

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

Exercise #22. 1. 用 $(a-b)^2 \geq 0$, 证明 $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$.

证明.

$$2a^2+2b^2-(a+b)^2 = a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geq 0.$$

□

Exercise #22. 2. 设 $x, y \in \mathcal{H}$ 是 *Hilbert* 空间, 满足 $\langle x, y \rangle = 0$. 证明勾股定理: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

证明.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 0 + 0 + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.\end{aligned}$$

□

Exercise #22. 3. 证明 $\mathbb{R}^n$ 是 *Hilbert* 空间. 它的内积是点积, 即若 $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$, 则 $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

证明. 首先, 点积是内积.

1. 正定性: $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$, 且 $\langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = \mathbf{0}$.
2. (共轭) 对称性: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y, x \rangle$.
3. (共轭) 双线性: $\langle y+z, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} (y_i+z_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i + \sum_{i=1}^{n} z_i x_i = \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle$.

其次, $\mathbb{R}^n$ 在内积诱导的距离下是完备的. 设 $X=(x_1,...,x_n), Y=(y_1,...,y_n), X,Y\in\mathbb{R}^n$. 则 $d(X,Y)=\|X-Y\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_jy_j}$. 设 $\{X_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的柯西列, 记 $X_k=(x_1^{(k)},...,x_n^{(k)})$, 则对于任意 $\epsilon>0$, 存在 N 使得当 $m,n>N$ 时, 有 $|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|\leq\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j^{(m)}-x_j^{(n)})^2}<\epsilon, \forall i=1,...,n$. 因此, $\{x_i^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的柯西列, 根据 $\mathbb{R}^1$ 的完备性收敛于 $x_i^*\in\mathbb{R}^1, \forall i=1,...,n$. 因此, $\{X_k\}$ 收敛于 $X^*=(x_1^*,...,x_n^*)\in\mathbb{R}^n$.

□

Exercise #22. 4. 设 $\mathcal{L}$ 是 *Hilbert* 空间 $\mathcal{H}$ 的线性子空间, Π 是投影到 $\mathcal{L}$ 的算子. 证明 Πy 是 $\mathcal{L}$ 中唯一的元素满足 $\langle \Pi y, z\rangle=\langle y,z\rangle, \forall z\in\mathcal{L}$.

证明. 对 y 应用正交分解定理, $y=\Pi y+y-\Pi y$, 其中 $\Pi y\in\mathcal{L}, y-\Pi y\in\mathcal{L}^{\perp}$.

对于任意 $z\in\mathcal{L}$, 有

$$\begin{aligned}\langle y,z\rangle&=\langle \Pi y+y-\Pi y,z\rangle=\langle\Pi y,z\rangle+\langle y-\Pi y,z\rangle\\&=\langle\Pi y,z\rangle+0=\langle\Pi y,z\rangle.\end{aligned}$$

若还有另一个元素 $t\in\mathcal{L}\subset\mathcal{H}$, 使得

$$\langle t,z\rangle=\langle y,z\rangle, \forall z\in\mathcal{L},$$

由于 $t,\Pi y\in\mathcal{L}$, 则 $t-\Pi y\in\mathcal{L}$. 因此, 对 $\langle t-\Pi y,z\rangle, z\in\mathcal{L}$, 取 $z=t-\Pi y$,

$$\langle t-\Pi y,t-\Pi y\rangle=0.$$

这表明 $t=\Pi y$, 即 Πy 是唯一的. □