Chapter 18: 弱收敛

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

弱收敛存在连续映射定理. 若 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, 则

$$\mathbb{E}\{f(X_n)\} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}\{f(X)\}, \quad \forall f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}).$$

只需证:

$$\mathbb{E}\{f(g(X_n))\} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}\{f(g(X))\}, \quad \forall f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}).$$

当 g 是连续函数时, 有 $F = f \circ g$ 是有界连续函数. 根据定义即得连续映射定理.

Exercise #18. 1. *证明: 若 $X_n \xrightarrow{L^p} X(p \geq 1)$, 则 $X_n \xrightarrow{D} X$.*

证明. 根据 Liapunov 不等式, 对 $\forall p \geq 1$, 有

$$\mathbb{E}\{|X|\} \leq \left[\mathbb{E}\{|X|^p\}^{\frac{1}{p}}\right].$$

由于 $X_n \xrightarrow{L^p} X$, 所以 $\mathbb{E}\{|X_n - X|^p\} \to 0$.

根据定理 18.7, 考察 $\forall f \in \mathscr{C}_{\mathrm{b,Lip}}(\mathbb{R})$, 存在常数 K 使得

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}\{f(X_n)\} - \mathbb{E}\{f(X)\}| &\leq K\mathbb{E}\{|X_n - X|\} \\ &\leq K\left[\mathbb{E}\{|X_n - X|^p\}^{\frac{1}{p}}\right] \\ &\to 0 \ (n \to \infty).\end{aligned}$$

□

Exercise #18. 2. *设 $\alpha \in \mathbb{R}^d$. 用构造方法证明: 存在一个连续函数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, 使得 $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^d$, $f(\alpha) = 0$ 且对给定的 $\varepsilon > 0$, 当满足 $\|x - \alpha\| \geq \varepsilon$ 时, 有 $f(x) = 1$.*

注. 首先在 $d = 1$ 时解决这个问题, 再模仿证明到 $d > 1$ 的情况.

证明. 只需取

$$f(x) = \max\left\{\frac{1}{\varepsilon}\|x - \alpha\|, 1\right\}.$$

□

Exercise #18. 3. 设 X 是一个实值随机变量, 分布函数为 F. 证明: $F(x-)=F(x)$ 当且仅当 $P(X=x)=0$.

证明. 根据引理 7.1, 有 $P(X=x)=F(x)-F(x-)$. □

Exercise #18. 4. 设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, 0\le g(\alpha)\le 1$, g 是非增的, 并假设 g 是右连续的 (即 $\lim\limits_{y\downarrow x} g(y)=g(x), \forall x$). 证明: g 处处有左极限 (即 $\lim\limits_{y\uparrow x} g(y)=g(x-)$ 存在, $\forall x$), 并且集合 $\Lambda=\{x: g(x-)\neq g(x)\}$ 是至多可列集.

注. 首先证明: 仅有有限的 x 使得 $g(x)-g(x-)>\dfrac{1}{k}$, 然后令 k 趋于无穷. 在习题 *7.16* 中已经证过.

证明. 首先,

$$\Lambda=\{x:g(x-)\neq g(x)\}=\{x:g(x-)<g(x)\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x:g(x)-g(x-)>\frac{1}{k}\right\}.$$

由于 $g\in[0,1]$

$$\sharp\left\{x:g(x)-g(x-)>\frac{1}{k}\right\}\le k.$$

仅有有限的 x 使得 $g(x)-g(x-)>\dfrac{1}{k}$, 从而 Λ 是至多可列的.

接下来证明 g 处处有左极限. 令 $t\in\mathbb{R}^1$, 考察 $M=\{g(x):x<t\}$. 则 M 非空, 且有上界 $g(t)$, 于是根据确界存在定理, 存在 $\alpha=\sup M$. 根据上确界的定义, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $x_0<t$ 使得 $\alpha-\varepsilon<g(x)\le\alpha$. 取 $\delta=\alpha-x_0$, 则当 $x\in(t-\delta,t)$ 时, $M-\varepsilon<g(x)\le M$. 从而 $\lim\limits_{y\uparrow t} g(y)=\alpha=g(t-)$. □

Exercise #18. 5. 设 F 是一个实值随机变量的分布函数. 令 $D=\{x:F(x-)=F(x)\}$. 证明: D 在 $\mathbb{R}$ 上是稠密的.

注. 可以用 *18.4* 证明 D 的补集是至多可列的.

证明. 根据 18.4, 令 $D=\{x:F(x-)=F(x)\}$, 则 $D^c=\{x:F(x-)<F(x)\}$ 是至多可列的. 反证法, 若不然, 则存在 $x_0\in D^c, \delta>0$ 使得 $B(x_0,\delta)\subset D^c$. 而这与 D^c 是至多可列的矛盾.

□

Exercise #18. 6. 设 $\{X_n\}_{n\ge1}$ 是一列实值随机变量, 且 $X_n\sim Unif[-n,n]$. 在何种意义下, 有 X_n 收敛到某个随机变量 X?

证明. 由于依分布收敛的收敛性是最弱的. 因此先考察依分布收敛. 若存在一个随机变量 X 使得 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, 则根据依分布收敛的定义, 记 F_n 和 F 分别是 X_n 和 X 的分布函数, 则对于 F 的连续点 x, 有

$$F_n(x) \to F(x) \quad (n \to \infty).$$

注意到

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = \int_{-n}^{x} \frac{1}{2n} dt = \frac{x+n}{2n} \mathbb{I}_{(-n,n)}(x) + \mathbb{I}_{[n,\infty)}(x).$$

则对于 $x \in \mathbb{R}^1$, 当 $n \to \infty$ 有 $F_n(x) \to \dfrac{1}{2}$. 而这与 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ 矛盾! 因此 X_n 不依分布收敛. □

Exercise #18. 7. 设 $f_n(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的密度函数. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}\mathbb{I}_{(X>0)}$. 若 f_n 是随机变量 X_n 的密度. 考察当 n 趋于无穷时, X_n 的收敛性.

证明. 根据定理 18.5(Scheffé 定理), f_n 几乎处处逐点收敛于 f, 其中 $f(x) = e^{-x}\mathbb{I}_{(X>0)}$ 是参数为 1 的指数分布的密度函数. 则 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. □

Exercise #18. 8. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是独立同分布的 *Cauchy(0,1)* 随机变量. 令 $Y_n = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$. 证明: Y_n 依分布收敛, 并求出极限分布. Y_n 是否也依概率收敛?

证明. 在习题 17.7 中, 已经证明 Y_n 也服从 Cauchy(0,1) 分布. 显然, Y_n 的分布函数逐点收敛于 Cauchy(0,1) 的分布函数. 于是, Y_n 依分布收敛于 Cauchy(0,1) 分布.

Y_n 不依概率收敛. 反证法, 若不然, 存在 Y 使得 $Y_n \xrightarrow{p} Y$. 由于

$$\{|Y_n - Y_m| > \varepsilon\} \subset \{|Y_n - Y| + |Y_m - Y| > \varepsilon\} \subset \{|Y_n - Y| > \varepsilon/2\} \cup \{|Y_m - Y| > \varepsilon/2\}.$$

如果 $Y_n \xrightarrow{p} Y$, 则应有 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} P(|Y_n - Y_m| > \varepsilon) = 0 (\forall \varepsilon > 0)$. 但是, 若取 $m = 2n$, 则有

$$|Y_n - Y_m| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} X_i \right|$$

但是此时, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=n+1}^{2n} X_i$ 独立同 Cauchy(0,1) 分布, 从而 $|Y_n - Y_m|$ 的分布于 n 无关. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|Y_n - Y_{2n}| > \varepsilon) = P(|U - V| > 2\varepsilon) > 0$, 其中 U, V 是独立同分布的 Cauchy(0,1) 随机变量. 而这产生了矛盾. 因此, Y_n 不依概率收敛. □

Exercise #18. 9. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是一列随机变量, 且 $\sup\limits_n \mathbb{E}\{X^2\} < \infty$. 设 μ_n 是 X_n 诱导的分布测度. 证明: 序列 μ_n 是紧的.

注. 可以用 *Chebyshev* 不等式.

证明. 用 Chebyshev 不等式, 对任意的 $m > 0$, 有

$$P\{|X_n| > m\} \leq \frac{1}{m^2}\mathbb{E}\{X_n^2\}.$$

于是,

$$\sup_n \mu_n([-m, m]^c) = \sup_n P\{|X_n| > m\} \leq \frac{1}{m^2}\sup_n \mathbb{E}\{X^2\} < \infty.$$

即

$$\lim_{m\to\infty}\sup_n \mu_n([-m, m]^c) = 0.$$

从而, μ_n 是紧的. $\square$

Exercise #18. 10. 设 X_n, X, Y 是实值随机变量, 定义在同一个样本空间 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上. 假设

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\{f(X_n)g(Y)\} = \mathbb{E}\{f(X)g(Y)\}$$

当 f, g 有界, f 连续, g 是 *Borel* 可测时成立. 证明: (X_n, Y) 依分布收敛到 (X, Y). 进一步假设有 *Borel* 可测函数 h 满足 $X = h(Y)$, 证明: $X_n \xrightarrow{P} X$.

注. 注意, $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ 不能推出 $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, Y)$. 以下是一个反例: 设 X, Y 独立同分布服从 $\mathcal{N}(0,1)$, 设 $(X_n, Y_n) \equiv (-Y, Y), \forall n$. 则 (X_n, Y_n) 依分布收敛到 (X, Y), 但是 $X_n + Y_n = 0$. 取 $f(x, y) = x + y$, 则与依分布收敛的定义矛盾.

此外, 依分布收敛的不同之处在于不满足一些运算法则, 只满足 *Slutsky* 定理. 比如,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \not\Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + Y.$$

反例是 $X_n = Z, Y_n = -Z$, 其中 Z 是标准正态分布.

证明. 称 (X_n, Y) 依分布收敛到 (X, Y) 是指

$$\mathbb{E}\{\phi(X_n, Y)\} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}\{\phi(X, Y)\},$$

其中 $\phi \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^2)$.

考察 (X_n, Y) 的特征函数,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{e^{it_1X_n}e^{it_2Y}\} &= \mathbb{E}\left[\{\cos(t_1X) + i\sin(t_1X)\}\{\cos(t_2Y) + i\sin(t_2Y)\}\right] \\ &= \mathbb{E}\{\cos(t_1X)\cos(t_2Y) - \sin(t_1X)\sin(t_2Y)\} + i\mathbb{E}\{\sin(t_1X)\cos(t_2Y) + \cos(t_1X)\sin(t_2Y)\}\end{aligned}$$

显然, $\sin(t_1x), \cos(t_1x), \sin(t_2y), \cos(t_2y)$ 都是有界函数, 且连续. 根据题中的条件, 有

$$\mathbb{E}\{e^{it_1X_n}e^{it_2Y}\} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}\{e^{it_1X}e^{it_2Y}\}.$$

根据 Leŕy 连续定理, 有 $(X_n, Y) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, Y)$.

根据 (X_n, Y) 依分布收敛于 (X, Y), h 是 Borel 可测的, 则根据题中的条件,

$$(X_n, h(Y)) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, h(Y)).$$

应用 Slutsky 定理 (习题 18.15), 有

$$X_n - X \xrightarrow{\mathcal{D}} X - X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_n - X \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X.$$

$\square$

Exercise #18. 11. 设 μ_α 表示参数为 α 的 *Pareto* 分布 *(Zeta* 分布*)*. 设 $\alpha_n \to \alpha$, 证明: μ_{α_n} 弱收敛于 μ_α.

证明. $\square$

Exercise #18. 12. 设 μ_α 表示参数为 α 的几何分布. 设 $\alpha_n \to \alpha > 0$, 证明: μ_{α_n} 弱收敛于 μ_α.

Exercise #18. 13. 设 $\mu_{(N,b,n)}$ 是一个超几何分布. 假设在 N 趋于无穷时, $p = \dfrac{b}{N}$ 保持是一个常数. 参数 n 固定. 证明当 N 趋于无穷时, $\mu_{(N,b,n)}$ 弱收敛到一个二项分布 $B(p,n)$.

Exercise #18. 14 (Slusky 定理)**.** 设 X_n 依分布收敛于 X, Y_n 依概率收敛于 c. 证明:

(a) $X_nY_n \xrightarrow{D} cX$,

(b) $\dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{D} \dfrac{X}{c}, (c \neq 0)$.

证明. 断言:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, Y_n \xrightarrow{P} c \quad \Rightarrow \quad (X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, c).$$

若上述断言成立, 根据连续映射定理, 分别取

$$g(x,y) = x+y, \quad g(x,y) = xy, \quad g(x,y) = \frac{x}{y},$$

即可得出

$$X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c, \quad X_nY_n \xrightarrow{D} cX, \quad \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{D} \frac{X}{c}.$$

下证上述断言.

Step 1 断言 $(X_n, c) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, c)$. 这等价于

$$\mathbb{E}\{f(X_n, c)\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{E}\{f(X, c)\}, \quad \forall f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^2).$$

考察一元函数 $g_c(x) := f(x, c)$. 则显然 $g_c \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^1)$, 根据 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, 则

$$\mathbb{E}\{g_c(X_n)\} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}\{g_c(X)\}.$$

从而 $(X_n, c) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, c)$.

Step 2 断言: $|(X_n, Y_n) - (X_n, c)| \xrightarrow{p} 0$. 事实上,

$$|(X_n, Y_n) - (X_n, c)| = |Y_n - c| \xrightarrow{p} 0.$$

应用定理 18.8, 即得证. $\square$

Exercise #18. 15. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}, \{Y_n\}_{n\geq 1}$ 是定义在同一个概率空间上的随机变量列, 设 $X_n \xrightarrow{D} X$ 且 $Y_n \xrightarrow{P} 0$. 证明: $X_n + Y_n$ 依分布收敛于 X.

证明. 这是上一个习题的特例. $\square$

Exercise #18. 16. 设实值随机变量列 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 有分布函数 F_n, 且 $X_n \xrightarrow{D} X$. 设 $p>0$, 证明: 对任意的正数 N,

$$\int_{-N}^{N} |x|^p F(dx) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{-N}^{N} |x|^p F_n(dx) < \infty.$$

证明. 由于 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, 则取 $f_N(x) = |x|^p \mathbb{I}_{[-N,N]}(x) \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^1)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\{f_N(X_n)\} = \mathbb{E}\{f_N(X)\}$. 于是,

$$\int_{-N}^{N} |x|^p F(dx) = \mathbb{E}\{f_N(X)\} \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\{f_N(X_n)\} = \limsup_{n\to\infty} \int_{-N}^{N} |x|^p F_n(dx) \leq N^p < \infty.$$

$\square$

Exercise #18. 17. 设实值随机变量列 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 有分布函数 F_n, 且 X 有分布函数 F. 假设对某些 $r>0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - F(x)|^r \, dx = 0$$

证明: $X_n \xrightarrow{D} X$.

注. 假设存在 F 上的连续点 y 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(y) \neq F(y)$. 则存在 $\varepsilon > 0$ 和一个子列 $\{n_k\}$ 使得 $|F_{n_k}(y) - F(y)| > \varepsilon, \forall k$. 证明: 对于适当的 y_1, y_2, $|F_{n_k}(y) - F(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$, 对要么 $x \in [y_1, y)$, 要么 $x \in (y, y_2]$ 成立. 而这产生了矛盾.

证明. 这里的证明沿着提示的思路. 用反证法, 若不然, 则存在分布函数的子列使得在某一连续点 y 上不收敛.

$\square$

Exercise #18. 18. 假设 $\{F_n\}_{n\geq 1}$ 是一列 $\mathbb{R}$ 上的分布函数, 且它们收敛到 $\mathbb{R}$ 上的连续的分布函数 F. 证明: 这样的收敛关于 x 是一致收敛.

注. 首先证明存在点 $x_1, ..., x_m$ 使得 $F(x_1) < \varepsilon, F(x_{j+1}) - F(x_j) < \varepsilon$, 以及 $1 - F(x_m) < \varepsilon$. 接下来说明: 存在 N 使得当 $n > N$ 时, $|F_n(x_j) - F(x_j)| < \varepsilon, 1 \leq j \leq m$.

Exercise #18. 19. 设 f 是一致连续函数. X, Y 是两个实值随机变量. 假设当 $|x-y| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 证明:

$$|\mathbb{E}\{f(X)\} - \mathbb{E}\{f(X+Y)\}| \leq \varepsilon + 2\sup_x |f(x)| P\{|Y| \geq \delta\}.$$

Exercise #18. 20. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}, X, Y$ 是实值随机变量, 定义在同一个概率空间上. 假设 $X_n + \sigma Y$ 依分布收敛于 $X + \sigma Y$, 对于任意的 $\sigma > 0$. 证明: X_n 依分布收敛于 X.

注. 可以用 *18.19* 的结论.

Exercise #18. 21. 设 X 和 Y 是定义在同一个概率空间上的实值独立随机变量. 假设 Y 服从标准正态分布, 令 f 是有界连续函数. 证明:

$$\mathbb{E}\{f(X+\sigma Y)\} = \mathbb{E}\{f_\sigma(X)\}$$

其中,

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-\frac{1}{2}|z-x|^2/\sigma^2}dz$$

证明 $f_\sigma(x)$ 是有界的, 且是任意阶阶可导的.

Exercise #18. 22. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}, X$ 是实值随机变量. 证明: $X_n \xrightarrow{D} X$ 当且仅当对任意的有界 $\mathcal{C}^\infty$ 函数 f, 有 $\mathbb{E}\{f(X_n)\} \to \mathbb{E}\{f(X)\}$.