Chapter 6&7: 概率测度的构造

Latest Update: 2025 年 1 月 1 日

Exercise #7. 1. 设 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 是任何一列两两不交的事件, P 是一个概率测度. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)=0$.

证明. 根据概率的定义,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\leq 1.$$

根据级数收敛的必要条件, 级数的一般项 $P(A_n)$ 趋于零, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)=0$. □

Exercise #7. 2. 设 $\{A_\beta\}_{\beta\in B}$ 是一族两两不交的事件. 证明若 $P(A_\beta)>0, \forall\beta\in B$, 则 B 是至多可数的.

证明. 定义 $\mathcal{S}_n=\left\{A_\beta : P(A_\beta)>\dfrac{1}{n}\right\}$. 显然, $\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}_n=\{A_\beta : P(A_\beta)\geq 0\}=\{A_\beta\}_{\beta\in B}$. 断言: $\mathcal{S}_n$ 中只有有限多个元素. 否则, 若 $\mathcal{S}_n$ 中有无穷多个元素, 则不妨设取出可列个不交的事件, $\{A_{\beta_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 有 $P(A_{\beta_i})>\dfrac{1}{n}$, 从而

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\beta_i}\right)\geq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{\beta_i})>\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty,$$

而这与概率的定义矛盾. 因此 $\mathcal{S}_n$ 中只有有限多个元素, 从而 B 是至多可数的. □

Exercise #7. 3. 证明 Γ 密度函数的最大值出现在 $x=\dfrac{\alpha-1}{\beta}$, 其中 $\alpha\geq 1$.

证明. Γ 密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & x\geq 0;\\ 0 & x<0.\end{cases}$$

对 x 求导, 有

$$f'(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left((\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-\beta x}-\beta x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\right).$$

令 $f'(x)=0$, 得到

$$(\alpha-1)x=\beta.$$

因为 $\alpha\geq 1$, 所以 $\dfrac{\alpha-1}{\beta}\geq 0$, 从而 Γ 密度函数的最大值出现在 $x=\dfrac{\alpha-1}{\beta}$. □

Exercise #7. 4. *证明 Weibull 密度函数的最大值出现在* $x=\dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, *其中* $\alpha\geq 1$.

证明. Weibull 密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\beta x)^{\alpha}} & \text{if } x\geq 0\\ 0 & \text{if } x<0\end{cases}$$

对 x 求导, 有

$$f'(x)=\alpha\beta^{\alpha}\left((\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-(\beta x)^{\alpha}}-\beta^{\alpha}\alpha x^{\alpha-1}e^{-(\beta x)^{\alpha}}\right).$$

令 $f'(x)=0$, 得到

$$\alpha-1=\beta^{\alpha}\alpha x.$$

因为 $\alpha\geq 1$, 所以 $\dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geq 0$, 从而 Weibull 密度函数的最大值出现在 $x=\dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. □

Exercise #7. 5. *证明正态密度函数的最大值出现在* $x=\mu$.

证明. 正态密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

对 x 求导, 有

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)=-\frac{x-\mu}{\sigma^2}f(x).$$

令 $f'(x)=0$, 得到

$$x=\mu.$$

□

Exercise #7. 6. *证明对数正态密度函数的最大值出现在* $x=e^{\mu}e^{-\sigma^2}$.

证明. 对数正态密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}g_{\mu,\sigma^2}(\log x) & \text{if } x>0\\ 0 & \text{if } x\leq 0\end{cases}$$

其中 g_{μ,σ^2} 是正态密度函数. 对 x 求导, 有

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} g_{\mu,\sigma^2}(\log x) + \frac{1}{x} g'_{\mu,\sigma^2}(\log x).$$

令 $f'(x) = 0$, 得到

$$\frac{1}{x} = \frac{g'_{\mu,\sigma^2}(\log x)}{g_{\mu,\sigma^2}(\log x)} = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{\log x - \mu}{\sigma^2} \right).$$

所以最大值出现在 $x = e^{\mu} e^{-\sigma^2}$.

□

Exercise #7. 7. 证明双指数密度函数的最大值出现在 $x = \alpha$.

证明. 双指数密度函数为

$$f(x) = \frac{\beta}{2} e^{-\beta|x-\alpha|}$$

对 x 求 (次) 导, 有

$$f'(x) = \frac{\beta}{2} \operatorname{sgn}(x-\alpha) e^{-\beta|x-\alpha|}.$$

令 $f'(x) = 0$, 得到

$$\operatorname{sgn}(x-\alpha) = 0,$$

所以最大值出现在 $x = \alpha$. 也可以直接从增减性分析.

□

Exercise #7. 8. 证明 Γ 和 *Weibull* 分布都可以在 $\alpha = 1$ 的条件下退化为指数分布.

证明. 当 $\alpha = 1$ 时, Γ 密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & x \geq 0; \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

当 $\alpha = 1$ 时, Weibull 密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

因此 Γ 和 Weibull 分布都可以在 $\alpha = 1$ 的条件下退化为指数分布. □

Exercise #7. 9. 证明均匀分布, 正态分布, 双指数分布, 柯西分布的密度函数都关于他们的中点对称.

证明. 均匀分布密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x).$$

正态分布密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

双指数分布密度函数为

$$f(x) = \frac{\beta}{2} e^{-\beta|x-\alpha|}.$$

柯西分布密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\beta\pi} \frac{1}{1+(x-\alpha)^2/\beta^2}.$$

显然均匀分布, 正态分布, 双指数分布, 柯西分布的密度函数都关于他们的中点对称. □

Exercise #7. 10. 一个分布被称为单峰 *(unimodal)* 的, 若其密度函数仅有一个全局最大值. 证明正态分布, 指数分布, 双指数分布, *Cauchy* 分布, Γ 分布, *Weibull* 分布, 对数正态分布都是单峰的.

证明. 上面已经证明. □

Exercise #7. 11. 对于一个非负函数 f 满足 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, 设 $P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_A(x) f(x)\, dx$. 令 $A = \{x_0\}$ 是一个单点集, 证明 A 是 *Borel* 集, 而且是可忽略集 (从而是零测集).

证明. 先证明 $\{x_0\}$ 是一个 Borel 集, 事实上, 若考虑 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((-\infty, x])$, 则 $\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_0] \cap (-\infty, x_0 - 1/n]^c$, 因此是 Borel 集. 接下来, 记 Lebegue 测度为 λ, 根据函数 f 在零测集上的积分为 0, 有

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{x_0\}}(x) f(x)\, dx = \int_{\{x_0\}} f(x)\, d\lambda = 0.$$

从而 $\{x_0\}$ 是可忽略集. □

Exercise #7. 12. 考察 *7.11* 中的概率 P. 令 B 是一个可数基数的集合. 证明 B 是 P 可忽略集.

证明. 不妨设 $B = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, 则 $\lambda B = 0$, 根据 f 绝对可积, 函数 f 在零测集上的积分为 0, 有

$$P(B) = \int_B f(x)\, d\lambda = 0.$$

于是 B 是可忽略集, 根据上一题的讨论, 也是零测集. □

Exercise #7. 13. *考察 7.12 中的 P, B, 假设 A 是一个事件, $P(A) = \frac{1}{2}$, 证明: $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.*

证明.
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) = \frac{1}{2}.$$
因为 $0 \leq P(B - A) \leq P(B) = 0$. $\square$

Exercise #7. 14. *设 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一列可忽略集, 证明 $B = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可忽略集.*

证明. 对于 A_i, 存在 B_i 是 Borel 集, 且 $A_i \subset B_i$, 且 $\lambda B_i = 0$, 有则
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$
且
$$0 \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = 0.$$
从而 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可忽略集. $\square$

Exercise #7. 15. *设 X 是定义在可数概率空间上的随机变量. 假设 $\mathbb{E}\{|X|\} = 0$. 证明除了一个可忽略集, $X = 0$. 我们能否断言 $X(w) = 0, \forall w$?*

证明.
$$0 = \mathbb{E}\{|X|\} = \sum_{w} |X(w)| p_w = \sum_{\{w:X=0\}} |X(w)| p_w + \sum_{\{w:X\neq 0\}} |X(w)| p_w = \sum_{\{w:X\neq 0\}} |X(w)| p_w.$$
因此 $\{w : X \neq 0\}$ 是零测集, 从而 $X = 0$ 几乎处处成立.

但是这个结论不能推出 $X(w) = 0, \forall w$, 比如取 $\Omega = \{0, 1\}$, $X(0) = 0$, $X(1) = 1$, $P(0) = 1, P(1) = 0$, 则 $\mathbb{E}\{|X|\} = 0$, 但是 $X(1) = 1$.

$\square$

Exercise #7. 16. *设 F 是一个分布函数. 证明 F 至多有可数个间断点.*

证明. F 是一个分布函数, 当且仅当它满足

- F 在 $\mathbb{R}$ 上单调非降;
- F 是右连左极的;
- $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$.

事实上, 根据单调性和实数理论, 可以推出函数有左右极限. 因为 $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{F(x) : x < a\}$ 非空且有上界 $F(a)$, 所以存在上确界 $M = \sup\{F(x) : x < a\}$. $\forall \varepsilon > 0$, 根据上确界的定义, 存在 $x_0 < a$ 使得 $M - \varepsilon < F(x_0) \leq M$ 取 $\delta = a - x_0$, 则当 $x \in (a - \delta, a)$ 时, 有 $M - \varepsilon < F(x) \leq M$, 从而左极限存在, 同理右极限也存在.

根据函数是单调, 且函数是有界的, 右连续的, 因此函数 F 仅可能有跳跃间断点. 记跳跃间断点的点集为 E, 那么

$$E = \{x \in \mathbb{R} : f(x-) < f(x)\}.$$

若 $x_1, x_2 \in E$, 且 $x_1 < x_2$, 有

$$f(x_1-) < f(x_1) \leq f(x_2-) < f(x_2),$$

从而 $(f(x_1-), f(x_1)) \cap (f(x_2-), f(x_2)) = \varnothing$, 因此 E 与 $\{(f(x-), f(x)) : x \in E\}$ 等势, 由于直线上的互不相交的开区间是至多可数的, 因此 E 是至多可数的. $\square$

Exercise #7. 17. 假设分布函数由以下形式给出,

$$F(x) = \frac{1}{4}1_{[0,\infty)}(x) + \frac{1}{2}1_{[1,\infty)}(x) + \frac{1}{4}1_{[2,\infty)}(x).$$

设 P 由

$$P((-\infty, x]) = F(x)$$

给出. 求出下列事件的概率:

a) $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

c) $C = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right)$

d) $D = [0, 2)$

e) $E = (3, \infty)$

证明. a) $P(A) = F\left(\frac{1}{2}-\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$.

b) $P(B) = F\left(\frac{3}{2}-\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

c) $P(C) = F\left(\frac{5}{2}-\right) - F\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

d) $P(D) = F(2-) - F(0-) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$.

e) $P(E) = F(\infty) - F(3) = 1 - 1 = 0$.

$\square$

Exercise #7. 18. 设函数 F 有以下形式,

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}1_{[\frac{1}{i},\infty)}.$$

证明它是某一个 $\mathbb{R}$ 上概率的分布函数. 我们定义概率 P 通过 $P((-\infty,x])=F(x)$. 求出以下事件的概率:

a) $A=[1,\infty)$

b) $B=\left[\frac{1}{10},\infty\right)$

c) $C=\{0\}$

d) $D=\left[0,\frac{1}{2}\right)$

e) $E=(-\infty,0)$

f) $G=(0,\infty)$

证明. 先证明 F 是一个分布函数.

1. F 在 $\mathbb{R}$ 上单调非降. 事实上, 对于 $x<y$, 若 $x\in\left[\frac{1}{i},\infty\right)$, 则 $y\in\left[\frac{1}{i},\infty\right)$, 从而 $F(x)\le F(y)$.
2. F 是右连的. 事实上, 对于 $x\in(0,1)$, 存在 i^* 使得 $x\in\left[\frac{1}{i^*+1},\frac{1}{i^*}\right)$, 若 $x_n\downarrow x$, $\forall\varepsilon>0$, 存在 N 使得当 $n\ge N$ 时, $x_n\in\left[\frac{1}{i^*+1},\frac{1}{i}\right)$, 从而 $F(x+)=F(x)$. 当 $x\ge 1$ 时, 右连续性显然成立. 当 $x\le 0$ 时, $F(x)=0$, 且对于任意的 $x_n\downarrow 0$, $\forall\varepsilon>0$, 存在 N 使得当 $n\ge N$ 时, $F(x_n)=\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon$, 从而 $F(0+)=F(0)$.
3. $F(-\infty)=0, F(\infty)=1$. 事实上, $F(-\infty)=F(0)=0$, $F(\infty)=F(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1$.

于是, F 是一个 $\mathbb{R}^1$ 上的分布函数.

a) $P(A)=F(\infty)-F(1-)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

b) $P(B)=F(\infty)-F\left(\frac{1}{10}-\right)=1-\sum_{i=11}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1-\frac{1}{2^{10}}$.

c) $P(C)=F(0)-F(0-)=0-0=0$.

d) $P(D)=F\left(\frac{1}{2}-\right)-F(0-)=\sum_{i=3}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{4}$.

e) $P(E)=F(0)-F(-\infty)=0-0=0$.

f) $P(G)=F(\infty)-F(0)=1-0=1$.

□