Chapter 10: 独立随机变量

Latest Update: 2025 年 1 月 2 日

Exercise #10. 1. 设 $f=(f_1,f_2):\Omega\to E\times F$. 证明 $f:(\Omega,\mathcal{A})\to(E\times F,\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})$ 是可测的, 当且仅当, $f_1:(\Omega,\mathcal{A})\to(E,\mathcal{E})$ 是可测的, 以及 $f_2:(\Omega,\mathcal{A})\to(F,\mathcal{F})$ 是可测的.

证明. $\Rightarrow$: 设 $f:(\Omega,\mathcal{A})\to(E\times F,\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})$ 是可测的, 则 $\forall A\times B\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$, 有 $f^{-1}(A\times B)\in\mathcal{A}$. 记 π_E,π_F 分别是向 E,F 的投影算子, 即 $\pi_E:E\times F\to E,\pi_F:E\times F\to F$, 则有 $f_1=\pi_E\circ f,f_2=\pi_F\circ f$, 则

$$f_1^{-1}(A)=f^{-1}\circ\pi_E^{-1}(A)=f^{-1}(A\times\mathcal{F})\in\mathcal{A},$$
$$f_2^{-1}(B)=f^{-1}\circ\pi_F^{-1}(B)=f^{-1}(\mathcal{E}\times B)\in\mathcal{A},$$

从而 f_1,f_2 是可测的.

$\Leftarrow$: 设 $f_1:(\Omega,\mathcal{A})\to(E,\mathcal{E})$ 是可测的, 以及 $f_2:(\Omega,\mathcal{A})\to(F,\mathcal{F})$ 是可测的, 则 $\forall A\in\mathcal{E},B\in\mathcal{F}$, 有 $f_1^{-1}(A)\in\mathcal{A}$, $f_2^{-1}(B)\in\mathcal{A}$. 于是对 $A\times B$, 有 $f^{-1}(A\times B)=f^{-1}(A)\cap f_2^{-1}(B)\in\mathcal{A}$, 从而 f 是可测的. □

Exercise #10. 2. 设 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 设 $\mathcal{B}^2$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的 *Borel* 集合族. $\mathcal{B}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的 *Borel* 集合族. 证明: $\mathcal{B}^2=\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$.

证明. 根据定义, 以及 $\mathbb{R}^n$ 有可数拓扑基, 有

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma\{A\times B:A,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\},\quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=\sigma\{(a,b)\times(a,d),a,b,c,d\in\mathbb{R}\}.$$

显然, $(a,b)\times(a,d)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 根据定义, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

设

$$\mathcal{F}=\{A|A\times\mathbb{R}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\},$$

可见所有开区间落在 $\mathcal{F}$ 中, 且 $\mathcal{F}$ 是 σ 代数, 因此 $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{F}$. 于是 $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),A\times\mathbb{R}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. 同样的方法可以说明: $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathbb{R}\times B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. 于是

$$A\times B=(A\times\mathbb{R})\cap(\mathbb{R}\times B)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

这表明 $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. □

Exercise #10. 3. 设 $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ 是 $[0,1]$ 上的 *Borel* 集, $P(A) = \int \mathbb{I}_A(x)dx, A \in \mathcal{A}$. 设 $X(x) = x$, 证明 X 服从均匀分布.

证明. 定理 7.1 和 7.2 保证了分布函数和概率测度之间的一一对应关系. 下面求 X 的分布函数 $F(x)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X^{-1}((-\infty, x])\} \quad (\text{定义}) \\ &= P((-\infty, x] \cap [0,1]) \quad (\text{随机变量 } X \text{ 的定义}) \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数, 从而 X 服从均匀分布 $Unif[0,1]$. □

Exercise #10. 4. 设 $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}$. 设 $P(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbb{I}_A(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. 令 $X(x) = x$. 证明: X 服从标准正态分布.

证明. $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. X 诱导的分布函数是

$$F(x) = P\{X^{-1}((-\infty, x])\} = P((-\infty, x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

是标准正态分布的分布函数, 因此 X 服从标准正态分布. □

Exercise #10. 5. 构造一个例子证明 $\mathbb{E}\{XY\} = \mathbb{E}\{X\}\mathbb{E}\{Y\}$ 一般来说不能推出 X, Y 是独立的. *(不妨假设 $X, Y, XY \in L^1$.)*

证明. 考虑离散型随机变量 X 满足 $P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $Y = X^2$.

表 1: X 和 Y 的联合分布列

$Y \backslash X$	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

有 $\mathbb{E}(X)=0, \mathbb{E}Y=\frac{2}{3}, \mathbb{E}XY=0=\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, 但是 X, Y 不独立, 比如

$$0=P(X=-1, Y=0) \neq P(X=-1)P(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

□

Exercise #10. 6. 设 X, Y 是独立的随机变量, 它们在 $\mathbb{N}$ 中取值, 满足

$$P(X=i)=P(Y=i)=\frac{1}{2^i} \quad (i=1,2,\ldots).$$

求出以下的概率:

a) $P(\min(X,Y)\leq i)$

b) $P(X=Y)$

c) $P(Y>X)$

d) $P(X$ 整除$Y)$

e) $P(X\geq kY)$

证明. X, Y 独立同分布.

$$P(X>i)=\sum_{k=i+1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^i}.$$

a) $P(\min(X,Y)\leq i)=1-P(\min(X,Y)>i)=1-P(X>i,Y>i)=1-P(X>i)P(Y>i)=1-\frac{1}{2^i}\cdot\frac{1}{2^i}=1-\frac{1}{4^i}$.

b) $P(X=Y)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=i,Y=i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}=\frac{1}{3}$.

c) $P(Y>X)=\sum_{i=1}^{\infty}P(Y>i)P(X=i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{1}{2^i}=\frac{1}{3}$.

d) $P(X$ 整除$Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P(X=i,Y=ni)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{1}{2^{in}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i(2^i-1)}$.

e) $P(X\geq kY)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X\geq ki, Y=i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X>ki-1)P(Y=i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{ki-1}}\cdot\frac{1}{2^i}=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(k+1)i}}=\frac{2}{2^{k+1}-1}$.

□

Exercise #10. 7. 设 X, Y 是独立的几何随机变量, 参数分别是 λ 和 μ. 设 $Z=\min(X,Y)$. 证明 Z 服从几何分布随机变量, 求出它的参数.

证明. 由于 $X \sim Geom(\lambda), Y \sim Geom(\mu)$, 从而 X 和 Y 的 pmf 分别是

$$p_X(x) = \lambda(1-\lambda)^{x-1}, \quad p_Y(y) = \mu(1-\mu)^{y-1}.$$

几何分布的尾概率是 ($x-1$ 次没有成功的概率):

$$P(X \geq x) = \sum_{k=x}^{\infty} p_X(k) = \lambda \sum_{k=x}^{\infty} (1-\lambda)^{k-1} = \lambda \lim_{k\to\infty} \frac{(1-\lambda)^{x-1}(1-(1-\lambda)^k)}{1-(1-\lambda)} = (1-\lambda)^{x-1}.$$

考察 $Z = \min(X, Y)$ 的分布:

$$\begin{aligned} P(Z \geq z) &= P(\min(X,Y) \geq z) \\ &= P(X \geq z, Y \geq z) \\ &= P(X \geq z)P(Y \geq z) \quad \text{(独立性)} \\ &= (1-\lambda-\mu+\lambda\mu)^{z-1}. \end{aligned}$$

于是, $P(Z = z) = P(Z \geq z) - P(Z \geq z+1) = (1-\lambda-\mu+\lambda\mu)^{z-1}(\lambda+\mu-\lambda\mu)$. 因此, 服从参数为 $\lambda+\mu-\lambda\mu$ 的几何分布.

若按照教材 P31, 4) 参数化的方法得到的参数是 $\mu\lambda$. □

> **Exercise #10. 8.** 设 $X, Y \in L^2$. 定义 X 和 Y 的协方差是
>
> $$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\{(X-\mu)(Y-\nu)\}$$
>
> 其中 $\mathbb{E}X = \mu, \mathbb{E}Y = \nu$. 证明:
>
> $$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\{XY\} - \mu\nu$$
>
> 并证明: 若 X 和 Y 独立, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

证明.

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\{(X-\mu)(Y-\nu)\} \\ &= \mathbb{E}\{XY - X\nu - Y\mu + \mu\nu\} \\ &= \mathbb{E}\{XY\} - \nu\mathbb{E}X - \mu\mathbb{E}Y + \mu\nu \\ &= \mathbb{E}\{XY\} - \mu\nu. \end{aligned}$$

若 X 和 Y 独立, 则在定理 10.1 中, 取 $f = g = id$, 有 $\mathbb{E}\{XY\} = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, 从而 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. □

> **Exercise #10. 9.** 设 $X, Y \in L^1$. 若 X 和 Y 是独立的, 证明: $XY \in L^1$. 给出例子说明当 X 和 Y 不独立时, $XY \notin L^1$.

证明. X, Y 独立, 根据 $\mathbb{E}\{|X|\}, \mathbb{E}\{|Y|\} < \infty$, 有 $\mathbb{E}\{|XY|\} = \mathbb{E}\{|X||Y|\} = \mathbb{E}\{|X|\}\mathbb{E}\{|Y|\} < \infty$, 从而 $XY \in L^1$.

为构造反例, 考察 $\Omega = (0,1], \mathcal{A} = \mathcal{B}((0,1]), P = \lambda|_{(0,1]}$, 其中 λ 是 Lebesgue 测度. 设 $X(\omega) = \omega^{-\frac{1}{2}}, Y = X$, 有

$$\mathbb{E}X = \int X dP = \int_0^1 \omega^{-\frac{1}{2}} d\omega = 2 < \infty.$$

则 $X, Y \in L^1$, 但是 $XY(w) = w^{-1}$ 在 $(0,1]$ 上不可积. □

注. 为证明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上不可积, 考察 $\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right)$, $s_n:=\sum_{k=1}^{n} k\chi_{I_k}$, 有 $s_n\uparrow f$. 由于,

$$\int_{(0,1]} s_n d\lambda=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k}-\frac{k}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

于是,

$$\int_{(0,1]} s_{2n} d\lambda-\int_{(0,1]} s_n d\lambda=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k+1}\geq\frac{n}{2n+1}\geq\frac{1}{3}.$$

序列 $\{\int_{(0,1]} s_n d\lambda\}$ 是严格增的, 这表明

$$\sup\left\{\int_{(0,1]} s\, d\lambda, 0\leq s\leq f, s\text{是简单函数}\right\}=\infty$$

即 f 不可积.

Exercise #10. 10. 设 n 是大于 2 的素数; 设 X,Y 是独立的 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 上的 *(离散)* 均匀分布, 即 $P(X=i)=P(Y=i)=\frac{1}{n}, i=0,1,\cdots,n-1$. 对于 $0\leq r\leq n-1$, 定义 $Z_r=X+rY \mod n$.

a) 证明: $Z_0,Z_1,\cdots,Z_{n-1}$ 是两两独立的.

b) 若 n 不再是素数, 结果是否正确?

注. 使用以下初等数论的结论. 设 a,b 是整数, 且 $a\not\equiv 0 \mod m$, 则称方程 $ax\equiv b \mod m$ 为 *(一次)* 同余方程.

1. 设 a,b 是整数, 且 $a\not\equiv 0 \mod m$, 则同余方程有解当且仅当 $(a,m)|b$.
2. 进一步, 上述同余方程在模 m 下有 (a,m) 个不同的解.

证明. a) 当 n 是素数时, 往证 $Z_s \perp\!\!\!\perp Z_t, s\neq t, s,t\in\{0,1,2,...,n-1\}$. 由于 Z_s,Z_t 可能的取值均为 $\{0,1,2,...,n-1\}$, 先计算 Z_s,Z_t 的边际分布, 当 $k\in\{0,1,2,...,n-1\}$ 时,

$$\begin{aligned}P(Z_s=k)&=P(X+sY=k \mod n)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}P(Y=i)P(X=(k-is) \mod n) \quad (X,Y\text{独立})\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

同理, $P(Z_t=k)=\frac{1}{n}, k\in\{0,1,2,...,n-1\}$.
接下来计算 $P(Z_s=k,Z_t=l)$, 当 $k,l\in\{0,1,2,...,n-1\}$ 时,

$$\begin{aligned}P(Z_s=k,Z_t=l)&=P(X+sY=k \mod n, X+tY=l \mod n)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}P(Y=i)P(X=(k-is) \mod n, X=(l-it) \mod n).\end{aligned}$$

考察一次同余方程 $k-is=l-it \mod n$, 有 $(s-t)i=k-l \mod n$, 由于 $(s-t,n)=1$, 从而该方程有唯一解 $i_0\in\{0,1,2,...,n-1\}$. 从而

$$P(Z_s=k,Z_t=l)=P(Y=i_0)P(X=k-i_0s \mod n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}.$$

于是 Z_s,Z_t 是独立的 $(\forall k,l\in\{0,1,2,...,n-1\})$.

b) 当 n 不再是素数时, 令 $n=4$, X,Y 是独立的 $\{0,1,2,3\}$ 上的均匀分布,

$$P(Z_0=0,Z_1=2)=P(X=0,Y=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16},$$

但是

$$P(Z_0=0)=P(X=0 \mod 4)=P(X=0)=\frac{1}{4},$$
$$P(Z_1=2)=P(X+Y=2 \mod 4)=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)=\frac{3}{16}.$$

从而 Z_0,Z_1 不独立.

□

Exercise #10. 11. 设 X 和 Y 是独立的随机变量, 服从分布 $P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=-1)=P(Y=-1)=\frac{1}{2}$. 设 $Z=XY$, 证明: X,Y,Z 两两独立, 但不相互独立.

注. 这给出了一个两两独立但不相互独立的例子.

证明. Z 的可能取值为 $\{-1,1\}$, 有

$$P(Z=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{2},$$
$$P(Z=-1)=P(X=1,Y=-1)+P(X=-1,Y=1)=\frac{1}{2}.$$

已经知道了 X,Y 独立, 下面证明 X,Z 独立, Y,Z 独立.

$$P(X=1,Z=1)=P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{4},$$
$$P(X=1,Z=-1)=P(X=1,Y=-1)=P(X=1)P(Y=-1)=\frac{1}{4},$$
$$P(X=-1,Z=1)=P(X=-1,Y=-1)=P(X=-1)P(Y=-1)=\frac{1}{4},$$
$$P(X=-1,Z=-1)=P(X=-1,Y=1)=P(X=-1)P(Y=1)=\frac{1}{4}.$$

X,Z 独立, Y,Z 独立, 但是 X,Y,Z 不独立, 比如

$$P(X=1,Y=1,Z=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{4}\neq P(X=1)P(Y=1)P(Z=1)=\frac{1}{8}.$$

□

Exercise #10. 12. 设 A_n 是一列事件. 证明:

$$P\left(A_n\ i.o.\ \right) \geq \limsup_{n\to\infty} P\left(A_n\right).$$

证明.

$$\begin{aligned} P(A_n \text{ i.o. }) =& P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \\ =& P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \\ =& \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \\ \geq& \limsup_{n\to\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

因为 $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset A_n$, 从而 $P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \geq P(A_n)$, 而 $P(A_n)$ 的极限未必存在, 为得到非平凡的结论, 取上极限. □

Exercise #10. 13. 称一列随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 是完全收敛于 X *(completely convergent to X)*, 是指

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) < \infty \textit{ for each } \varepsilon > 0$$

证明: 若序列 X_n 是独立的, 那么完全收敛和以概率 *1* 收敛是等价的.

证明. $\Leftarrow$:

随机变量 X_n 几乎处处收敛于 X 是指

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1.$$

根据 Kolmogorov 零壹律, 若 X_n 几乎处处收敛于 X, 则 $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ 几乎处处是常数.

对于固定的随机变量 X, 记 $A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$, 由于

$$\{|X_n - X| > \varepsilon\} = \{X_n > X + \varepsilon\} \cup \{X_n < X - \varepsilon\},$$

由于 $\{X_n\}$ 相互独立, 于是 $\{A_n(\varepsilon)\}$ 相互独立.

由于

$$\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = \left\{\omega : \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left(|X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{m}\right)\right\}$$

于是几乎处处收敛的等价表述是

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

根据 Borel-Cantelli 零壹律, $\forall\varepsilon>0$, 当 $\{A_n(\varepsilon)\}$ 独立时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n(\varepsilon))<\infty \iff P(\limsup_{n\to\infty}A_n(\varepsilon))=0,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n(\varepsilon))=\infty \iff P(\limsup_{n\to\infty}A_n(\varepsilon))=1.$$

于是根据 Borel-Cantelli 零壹律, X_n 完全收敛于 X.

$\Rightarrow$:

若

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|X_n-X|>\varepsilon\right)<\infty \text{ for each } \varepsilon>0$$

根据 Borel-Cantelli 零壹律, 有

$$P(\limsup_{n\to\infty}A_n(\varepsilon))=0,\quad \forall\varepsilon>0.$$

从而 X_n 几乎处处收敛于 X. (这里证明没有用到独立性, 是一个一般的结论.) □

Exercise #10. 14. *设 μ,ν 分别是 $(E,\mathcal{E}),(F,\mathcal{F})$ 上的两个有限测度. 即满足概率公理, 出来正规化条件 $\mu(E),\nu(F)$ 未必等于 1. 令乘积测度 $\lambda=\mu\otimes\nu$ 定义在乘积可测空间 $(E\times F,\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})$, 它的定义是对于 Cartesian 积 $A\times B, A\in\mathcal{E}, B\in\mathcal{F}$, $\lambda(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$.*

a) 证明 λ 可以延拓到 $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$ 上的一个有限测度;

b) 设 $f:E\times F\to\mathbb{R}$ 是可测的. 证明 Fubini 定理: 若 f 是 λ-可测的, 则 $x\to\int f(x,y)\nu(dy), y\to\int f(x,y)\mu(dx)$ 分别相对 $\mathcal{E},\mathcal{F}$ 可测, 进一步地,

$$\int f d\lambda=\iint f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)=\iint f(x,y)\nu(dy)\mu(dx)$$

证明. a) 设 $C\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$ 是乘积 Borel σ 代数上的元素. 记 $C(x)=\{y:(x,y)\in C\}$ 是给定 x 后的一个截面. 先证明: $C(x)\in\mathcal{F}$.

这个结论是一般的, 即对可测函数 $f:(E\times F,\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, 截口是可测的. 设 $f(x,y)=\mathbb{I}_C(x,y), C\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}, g_x(y)=f(x,y)$. 令

$$\mathcal{H}=\{C\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}:\mathbb{I}_C(x,y) \text{ 可测}, \forall x\in E\}.$$

$\mathcal{H}$ 是一个 σ-代数, 因为

(a) $\mathbb{I}_{\varnothing}(x,y)=0, \mathbb{I}_{E\times F}(x,y)=1$, 从而 $\varnothing, E\times F\in\mathcal{H}$;

(b) 若 $S\in\mathcal{H}$, 则对于任意 $x\in E$, $\mathbb{I}_S(x,y)$ 可测, 从而 $\mathbb{I}_{S^c}(x,y)=1-\mathbb{I}_S(x,y)$ 可测;

(c) 若 $\{S_n\}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的序列, 则对于任意 $x\in E$, $\mathbb{I}_{\cup S_n}(x,y)=\max\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{I}_{S_n}(x,y),1\right\}$ 可测.

从而 $\sigma(\mathcal{E}\times\mathcal{F})\subset\mathcal{H}$. 另一方面, 根据定义, $\mathcal{H}\subset\sigma(\mathcal{E}\times\mathcal{F})$, 从而 $\mathcal{H}=\sigma(\mathcal{E}\times\mathcal{F})$. 这就已经证明 $C(x)\in\mathcal{F}$.

此外, 根据经典操作, 示性函数可测, 根据线性性, 简单函数截口可测. 若 f 是正的, 令 f_n 是向上趋于 f 的简单函数, 于是 $g_n(y) = f_n(x,y)$ 对于固定的 x 是 $\mathcal{F}$ 可测的, $\forall n$. 根据可测函数的极限还是可测函数, 从而 $g(y) = f(x,y)$ 对于固定的 x 是 $\mathcal{F}$ 可测的. 最后, 若 f 是任意可测函数, 则只需要考虑 $f = f^+ - f^-$, 从而固定 x, f 是 $\mathcal{F}$ 可测的.

以下, 尝试定义 $\boxed{\lambda(C) = \int \nu\{C(x)\}\, d\mu(x).}$

若 $C = A \times B$, 则截面函数

$$C(x) = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \emptyset, & x \notin A. \end{cases}$$

此时, 根据定义,

$$\lambda(C) = \mu \otimes \nu(C) = \mu(A)\nu(B) = \int \mathbb{I}_A(x)\nu(B)\, d\mu = \int \nu\{C(x)\}\, d\mu(x).$$

定义

$$\mathcal{H} = \{C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} : x \mapsto \nu(C(x)) \text{ 可测}\}$$

- 集合系 $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ 包含全集 $E \times F$, 并且关于有限交封闭: $(\Lambda_1 \times \Gamma_1) \cap (\Lambda_2 \times \Gamma_2) = (\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \times (\Gamma_1 \times \Gamma_2)$.
- $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, 因为当 $\forall C = A \times B \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$, A 可测, 从而 $\nu(C(x)) = \nu(B)\mathbb{I}_A(x)$ 可测, 于是 $C \in \mathcal{H}$.
- $\mathcal{H}$ 关于单增封闭. 设 $C_i \uparrow C, C_i \in \mathcal{H}$, 于是, 集合关系也有 $C_i(x) \uparrow C(x)$, 从而根据测度连续性, $\nu(C_i(x)) \uparrow \nu(C(x))$, 从而 $\nu(C(x)) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu(C_n(x))$ 可测, 从而 $C \in \mathcal{H}$.
- $\mathcal{H}$ 关于差封闭. 设 $C_1 \subset C_2 \in \mathcal{H}$, 于是对于任意的 x, $C_1(x) \subset C_2(x)$, 从而 $\nu((C_2 - C_1)(x)) = \nu(C_2(x) - C_1(x)) = \nu(C_1(x)) - \nu(C_2(x))$ 可测, 从而 $C_1 - C_2 \in \mathcal{H}$.

综上 4 点, 根据单调类定理, $\mathcal{H} \supset \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$. 另一方面, 根据定义, $\mathcal{H} \subset \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$. 于是 $\mathcal{H} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$.

于是对 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ 中的元素 C, 可以证明 $\lambda(C) = \int \nu\{C(x)\}\, d\mu(x)$ 是良定的有限测度. 只需证明分离可列可加性:

$$\lambda\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(C_k).$$

事实上, 由于 $C_n \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ 两两不交, 从而 $\forall x$, $\{C_n(x)\}$ 两两不交. 由于 ν 是一个测度, 具有分离可列可加性, 于是

$$\nu\left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(C_k(x)).$$

已经证明 $f_n(x) = \nu(C_k(x))$ 是非负的可测函数, 从而根据单调收敛定理即可证明 λ 的分离可加性, 且

$$\lambda(E \times F) = \mu(E)\nu(F) < \infty,$$

因此 λ 是一个有限测度.

由单调类定理的推论, λ 是唯一的延拓.

b) 已经证明, 当 $f=\mathbb{I}_C(x,y), C\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$ 中时,

$$\begin{aligned}\int_{E\times F} f d\lambda &= \int_{E\times F}\mathbb{I}_C(x,y)d\lambda\\ &=(\mu\otimes\nu)(C)\\ &=\int \nu\{C(x)\}\,d\mu(x)\\ &=\iint \mathbb{I}_{C(x)}(y)\,d\nu(y)\,d\mu(x)\end{aligned}$$

从而可测性和积分交换顺序对示性函数成立, 根据线性性, 对简单函数也成立.

对于一般的非负函数 f, 从而存在一个递增的简单函数列 $f_n\uparrow f$, 从而

$$\begin{aligned}\int f\,d\lambda &= \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\lambda\\ &=\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda \quad (\text{单调收敛定理})\\ &=\lim_{n\to\infty}\iint f_n(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) \quad (\text{已经证明的简单函数的 Fubini})\\ &=\int \lim_{n\to\infty}\int f_n(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) \quad (\text{单调收敛定理})\\ &=\int\left\{\int \lim_{n\to\infty} f_n d\nu(y)\right\}d\mu(x)\\ &=\int\left\{\int f d\nu(y)\right\}d\mu(x).\end{aligned}$$

其中, $x\mapsto\int f(x,y)d\nu(y)=\lim_{n\to\infty}\int f_n(x,y)d\nu(y)$ 可测. 因此可测性和积分交换次序对非负函数成立.

对于一般的函数 f, 可以分解为 $f=f^+-f^-$, 从而可测性和积分交换顺序对一般可测函数成立.

□

Exercise #10. 15. *称测度 τ 在 $(G,\mathcal{G})$ 上是 σ-有限的, 若存在一列集合 $\{G_j\}_{j\ge1}\subset\mathcal{G}$, 使得 $\cup_{j=1}^{\infty}G_j=G, \tau(G_j)<\infty, \forall j$. 证明: 若 μ,ν 是 σ-有限的, $\lambda=\mu\otimes\nu$ 存在, 那么*

a) $\lambda=\mu\otimes\nu$ 是 σ-有限的;

b) (Fubini 定理): 若 $f:E\times F\to\mathbb{R}$ 是可测的, 且是 λ-可积的, 则 $x\to\int f(x,y)\nu(dy), y\to\int f(x,y)\mu(dx)$ 分别相对 $\mathcal{E},\mathcal{F}$ 可测, 进一步地,

$$\int f d\lambda=\iint f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)=\iint f(x,y)\nu(dy)\mu(dx)$$

证明. 按照之前的证明流程, 只需证: 若 μ,ν 是 σ-有限的, 那么延拓后的 λ 是 σ-有限的.

由于 μ 是 σ-有限的, 从而存在一列集合 $\{E_j\}_{j\ge1}\subset\mathcal{E}$, 使得 $\cup_{j=1}^{\infty}E_j=E, \mu(E_j)<\infty, \forall j$. 同理根据 ν 的 σ-有限, 存在一列集合 $\{F_k\}_{k\ge1}\subset\mathcal{F}$, 使得 $\cup_{k=1}^{\infty}F_k=F, \nu(F_k)<\infty, \forall k$. 于是, 定义

$$G_{j,k}=E_j\times F_k,\quad \{G_{j,k}\}_{j,k\ge1}\subset\mathcal{E}\otimes\mathcal{F},\quad \cup_{j,k=1}^{\infty}G_{j,k}=E\times F.$$

根据 λ 的定义, $\lambda(G_{j,k})=\mu(E_j)\nu(F_k)<\infty$, 从而 λ 是 σ-有限的. $\square$

> **Exercise #10. 16.** 重复投一枚满足 P(正面朝上) $=p$ 的硬币. 设 A_k 表示有在第 $2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1$ 次投掷中, 有 k 或更多次接连不断的正面朝上的事件. 证明: 当 $p\geq 1/2$ 时, $P(A_k \ i.o.\ )=1$, 当 $p<1/2$ 时, $P(A_k \ i.o.\ )=0$.

证明. 由于当 $i\neq j$ 时, $\{2^i,...,2^{i+1}-1\}\cap\{2^j,...,2^{j+1}-1\}=\varnothing$, 根据投硬币实验的独立性, 事件 $\{A_k\}$ 相互独立.

接下来, 我们要找出 $P(A_k)$ 的上下界.

在事件 A_k 中, 考虑的投掷是: $2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1$, 共 2^k 次投掷.

对于上界, 我们可以考虑: 有 k 次连续向上的事件中, 第一个元素可能出现的位置. 在整个序列中有 2^k-k+1 个位置, 由于这种选法包含了长度为 k 及以上的序列 (因为没有指定后面的投掷), 以及存在数重的情况, 从而 $P(A_k)\leq(2^k-k+1)p^k$.

对于下界, 在这 2^k 次投掷中, 有 $\lfloor\dfrac{2^k}{k}\rfloor$ 个互不相交的长度为 k 的块. 对于这种特殊的划分, 有一个块全部正面向上的概率是 $1-(1-p^k)^{\lfloor\frac{2^k}{k}\rfloor}$, 从而 $P(A_k)\geq 1-(1-p^k)^{\lfloor\frac{2^k}{k}\rfloor}$.

- 当 $p<\dfrac{1}{2}$ 时, $P(A_k)\leq(2^k-k+1)p^k<(2p)^k$, 从而 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)\leq\sum_{k=1}^{\infty}(2p)^k=\frac{2p}{1-2p}<\infty$, 根据 Borel-Cantelli 引理, $P(A_k \text{ i.o. })=0$.
- 当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时, 考察 $\ln(1-P(A_k))\leq\lfloor\dfrac{2^k}{k}\rfloor\ln(1-p^k)\leq-\dfrac{2^k}{k}p^k=-\dfrac{(2p)^k}{k}\to-\infty(k\to\infty)$. 于是 $1-P(A_k)\to 0$, 从而 $P(A_k)\to 1(k\to\infty)$. 因此 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\infty$, 根据独立条件下的 Borel-Cantelli 引理, $P(A_k \text{ i.o. })=1$.
- 对 $p=\dfrac{1}{2}$, 事实上, 可以按照上述的方法, 证明 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}1-(1-p^k)^{\lfloor\frac{2^k}{k}\rfloor}$ 的收敛性与 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2p)^k}{k}$ 相同, 从而 $P(A_k \text{ i.o. })=1$.

$\square$

> **Exercise #10. 17.** 设 $X_0, X_1, X_2, ...$ 是独立随机变量, 满足 $P(X_n=1)=P(X_n=-1)=\dfrac{1}{2}, \forall n$. 令 $Z_n=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}X_i$. 证明: $Z_1, Z_2, ...$ 是独立的.

注. 以下是一个严格的写法. 往证

$$P(Z_n=1)=P(Z_n=-1)=\frac{1}{2}.$$

不妨设 $i_1 < ... < i_n$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n} = P(Z_{i_1} = z_{i_1}, ..., Z_{i_n} = z_{i_n}) &= P\left(\prod_{j=0}^{i_1} X_j = z_{i_1}, \prod_{j=i_1+1}^{i_2} X_j = \frac{z_{i_2}}{z_{i_1}}, ..., \prod_{j=i_{n-1}+1}^{i_n} X_j = \frac{z_{i_n}}{z_{i_{n-1}}}\right) \\ &= P\left(\prod_{j=0}^{i_1} X_j = z_{i_1}\right) P\left(\prod_{j=i_1+1}^{i_2} X_j = \frac{z_{i_2}}{z_{i_1}}\right) ...P\left(\prod_{j=i_{n-1}+1}^{i_n} X_j = \frac{z_{i_n}}{z_{i_{n-1}}}\right) \\ &= P(Z_{i_1} = z_{i_1}) P\left(\frac{Z_{i_2}}{Z_{i_1}} = \frac{z_{i_2}}{z_{i_1}}\right) \cdots P\left(\frac{Z_{i_n}}{Z_{i_{n-1}}} = \frac{z_{i_n}}{z_{i_{n-1}}}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

其中最后一个等号

$$P\left(\frac{Z_{i_{t+1}}}{Z_{i_t}} = \frac{z_{i_{t+1}}}{z_{i_t}}\right) = \frac{1}{2}$$

是根据以下的对称性.

只需证明 $P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = \frac{1}{2}$, 即 Z_n 是均匀分布. 由于 $\{Z_n = 1\} = \{偶数个 X_n = -1\}$, 只需证明, $\sharp\{偶数个 X_n = -1\} = 2^{n-1}$.

当 $n = 2m$ 为偶数时, 要计算求和 $\sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k}$, 我们可以使用二项式系数的性质. 二项式系数 $\binom{2m}{2k}$ 表示从 $2m$ 个元素中选择 $2k$ 个元素的方式数量.

首先, 考虑 $(1 + x)^{2m}$ 的二项式展开:

$$(1 + x)^{2m} = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} x^j$$

接下来, 考虑 $(1 - x)^{2m}$ 的二项式展开:

$$(1 - x)^{2m} = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} (-x)^j$$

将这两个展开式相加, 我们得到:

$$(1 + x)^{2m} + (1 - x)^{2m} = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} x^j + \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} (-x)^j$$

注意到当 j 为奇数时, x^j 和 $(-x)^j$ 会相互抵消, 而当 j 为偶数时, 它们会相加. 因此, 我们有:

$$(1 + x)^{2m} + (1 - x)^{2m} = 2 \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} x^{2k}$$

为了找到求和 $\sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k}$, 我们设 $x = 1$:

$$(1 + 1)^{2m} + (1 - 1)^{2m} = 2 \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k}$$

简化左边:

$$2^{2m} + 0 = 2 \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k}$$

因此:

$$2^{2m} = 2\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}$$

两边同时除以 2:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k} = \frac{2^{2m}}{2} = 2^{2m-1}$$

因此, 最终答案是:

$$\boxed{2^{2m-1}} = 2^{n-1}.$$

当 $n = 2m+1$ 为奇数时, 要计算求和 $\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}$, 我们可以使用二项式系数的性质和生成函数. 二项式系数 $\binom{2m+1}{2k}$ 表示从 $2m+1$ 个元素中选择 $2k$ 个元素的方式数量. 首先, 考虑 $(1+x)^{2m+1}$ 的二项式展开:

$$(1+x)^{2m+1} = \sum_{j=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{j}x^j$$

接下来, 考虑 $(1-x)^{2m+1}$ 的二项式展开:

$$(1-x)^{2m+1} = \sum_{j=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{j}(-x)^j$$

将这两个展开式相加, 我们得到:

$$(1+x)^{2m+1} + (1-x)^{2m+1} = \sum_{j=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{j}x^j + \sum_{j=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{j}(-x)^j$$

注意到当 j 为奇数时, x^j 和 $(-x)^j$ 会相互抵消, 而当 j 为偶数时, 它们会相加. 因此, 我们有:

$$(1+x)^{2m+1} + (1-x)^{2m+1} = 2\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}x^{2k}$$

为了找到求和 $\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}$, 我们设 $x=1$:

$$(1+1)^{2m+1} + (1-1)^{2m+1} = 2\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}$$

简化左边:

$$2^{2m+1} + 0 = 2\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}$$

因此:

$$2^{2m+1} = 2\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}$$

两边同时除以 2:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k} = \frac{2^{2m+1}}{2} = 2^{2m}$$

因此, 最终答案是:

$$\boxed{2^{2m}} = 2^{n-1}.$$

综上两种情况, 我们得到 $\sharp\{\text{偶数个}X_n = -1\} = 2^{n-1}$.

Exercise #10. 18. 设 X,Y 是独立的, 假设 $P(X+Y=\alpha)=1$, 其中 α 是常数. 证明: X,Y 是常数随机变量.

证明. 由于 $X=\alpha-Y$, a.s. P. 因此, 若 X 与 Y 独立, 则 X 与 $\alpha-X$ 独立, 因为 $f(x)=\alpha-x$ 是一个可测函数 (函数在一个零测集处的取值不会改变其可测性). 从而 X 与自身独立. 从而

$$F(x)=P((-\infty,x])=0 \text{ 或} 1.$$

于是 X 服从退化分布, 即 X 是常数随机变量, 根据 X 和 Y 的对称性, Y 也是常数随机变量. □