

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Національний технічний університет України  
«Київський Політехнічний Інститут»  
Навчально-науковий комплекс  
«Інститут прикладного системного аналізу»  
Кафедра системного проектування

Лабораторна робота № 4

з курсу **«Цифрова обробка сигналів»**

**«Дискретизация аналогового гармонического сигнала»**

Виконав:

студент групи ДА-21

Михалько Віталій

Перевірив:

Кірюша Б.А.

Київ 2014

Таблица 1 содержит варианты значений параметров сигналов. Вариант определяется номером зачетной книжки.

Дискретизируется гармонический сигнал  $s(t) = \cos(2\pi ft)$ . Его частота в последовательных испытаниях изменяется от  $f_{\min}$  до  $f_{\max}$  с шагом  $df$ .

Шаг изменения частоты аналогового сигнала  $df = F_s/8$ . Минимальная частота аналогового сигнала  $f_{\min} = F_s/8$ . Максимальная частота аналогового сигнала  $f_{\max} = 4F_s$ .

Необходимо:

1. Построить график аналогового сигнала, изображающий 2-3 периода сигнала. Для построения графика использовать функцию `plot`.
2. Используя функцию `stem`, построить график дискретизованного сигнала в тех же координатах.
3. Построить график аналогового сигнала, восстановленного по отсчетам дискретного сигнала с помощью ряда Котельникова.
4. Определить частоту восстановленного сигнала.

Построить график изменения частоты восстановленного сигнала при изменении частоты исходного аналогового сигнала. Объяснить его форму.

**Таблица 1. Варианты значений параметров сигналов.**

№ варианта	Частота дискретизации $F_s$ , Гц	Разрядность представления отсчетов сигнала, бит	Параметры случайного сигнала	
			A	D
17	6000	4	0.5	1

## Теория

Исходный физический сигнал является *непрерывной* функцией времени. Такие сигналы, определенные во все моменты времени, называют *аналоговыми* (analog). Последовательность чисел, представляющая сигнал при цифровой обработке, является *дискретным рядом* (discrete series) и не может полностью соответствовать аналоговому сигналу. Числа, составляющие последовательность, являются значениями сигнала в отдельные (дискретные) моменты времени и называются *отсчетами* сигнала (samples). Как правило, отсчеты берутся через равные промежутки времени  $T$ , называемые *периодом дискретизации* (или *интервалом, шагом дискретизации* — sample time). Величина, обратная периоду дискретизации,

называется *частотой дискретизации* (sampling frequency):  $f_d = 1/T$ . Соответствующая ей круговая частота определяется следующим образом:  $\omega_d = 2\pi/T$ .

Ясно, что в общем случае представление сигнала набором дискретных отсчетов приводит к потере информации, так как мы ничего не знаем о поведении сигнала в промежутках между отсчетами. Однако, как будет показано далее в разделе «Теорема Котельникова», существует класс аналоговых сигналов, для которых такой потери информации не происходит и которые могут быть *точно* восстановлены по значениям своих дискретных отсчетов.

Процесс преобразования аналогового сигнала в последовательность отсчетов называется *дискретизацией* (sampling), а результат такого преобразования — *дискретным сигналом*.

При обработке сигнала в вычислительных устройствах его отсчеты представляются в виде двоичных чисел, имеющих ограниченное число разрядов. Вследствие этого отсчеты могут принимать лишь конечное множество значений и, следовательно, при представлении сигнала неизбежно происходит его округление. Процесс преобразования отсчетов сигнала в числа называется *квантованием по уровню* (quantization), а возникающие при этом ошибки округления — *ошибками* (или *шумами*) *квантования* (quantization error, quantization noise).

Сигнал, дискретный во времени, но не квантованный по уровню, называется *дискретным* (discrete-time) сигналом. Сигнал, дискретный во времени и квантованный по уровню, называют *цифровым* (digital) сигналом. Сигналы, квантованные по уровню, но непрерывные во времени, на практике встречаются редко. Разницу между аналоговыми, дискретными и цифровыми сигналами иллюстрирует рис. 3.1.

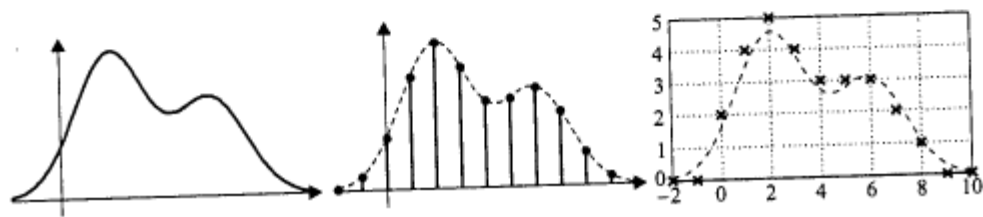


Рис. 3.1. Аналоговый (слева), дискретный (в центре) и цифровой (справа) сигналы

Поскольку далее мы будем изменять частоту для нашего сигнала, объясним почему восстановление рядом Котельникова не точным для ряда частот.

Гармонический сигнал может быть адекватно представлен дискретными отсчетами, если его частота не превышает половины частоты дискретизации (эта частота называется *частотой Найквиста* (Nyquist frequency) —  $f_N = f_d/2 = 1/(2T)$ ;

$\omega_N = \omega_d/2 = \pi/T$ ). Происхождение этого ограничения поясняет рис. 3.3. В зависимости от соотношения между частотой дискретизируемого гармонического сигнала и частотой Найквиста возможны три случая.

1. Если частота гармонического сигнала *меньше* частоты Найквиста, дискретные отсчеты позволяют правильно восстановить аналоговый сигнал (рис. 3.3, а).
2. Если частота гармонического сигнала *равна* частоте Найквиста, то дискретные отсчеты позволяют восстановить аналоговый гармонический сигнал с той же частотой, но амплитуда и фаза восстановленного сигнала (он показан пунктирной линией) могут быть искажены (рис. 3.3, б). В худшем случае все дискретные отсчеты синусоиды могут оказаться равными нулю.
3. Если частота гармонического сигнала *больше* частоты Найквиста, восстановленный по дискретным отсчетам аналоговый сигнал (как и в предыдущем случае, он показан пунктирной линией) будет также гармоническим, но с иной частотой (рис. 3.3, в). Данный эффект носит название *появления ложных частот* (aliasing), мы продолжим его рассмотрение в следующем разделе «Спектр дискретного сигнала».

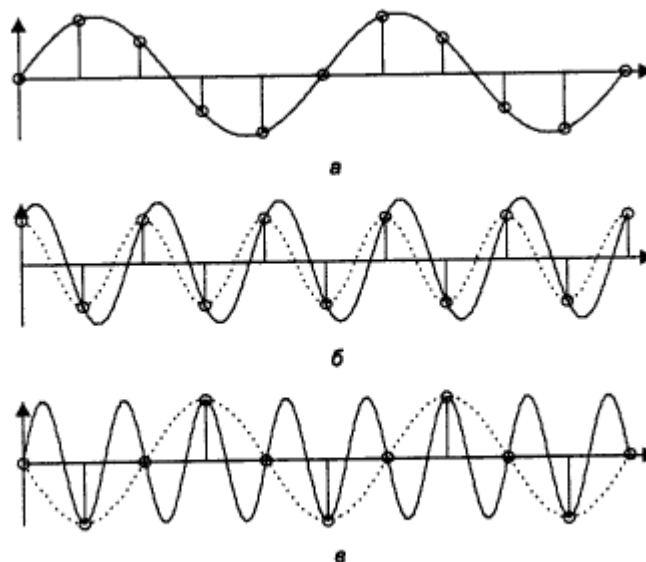


Рис. 3.3. Дискретизация гармонических сигналов с разной частотой

Дискретизированный сигнал (3.3) представляет собой сумму дельта-функций. При прохождении такого сигнала через восстанавливающий ФНЧ каждая дельта-функция породит на выходе соответствующим образом сдвинутую и масштабированную копию импульсной характеристики фильтра. Выходной сигнал (в точности соответствующий исходному аналоговому сигналу), таким образом, будет представлять собой сумму сдвинутых и умноженных на отсчеты сигнала копий импульсных характеристик идеального ФНЧ (3.11):

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT) \frac{\sin\left(\pi \frac{t-kT}{T}\right)}{\pi \frac{t-kT}{T}}. \quad (3.12)$$

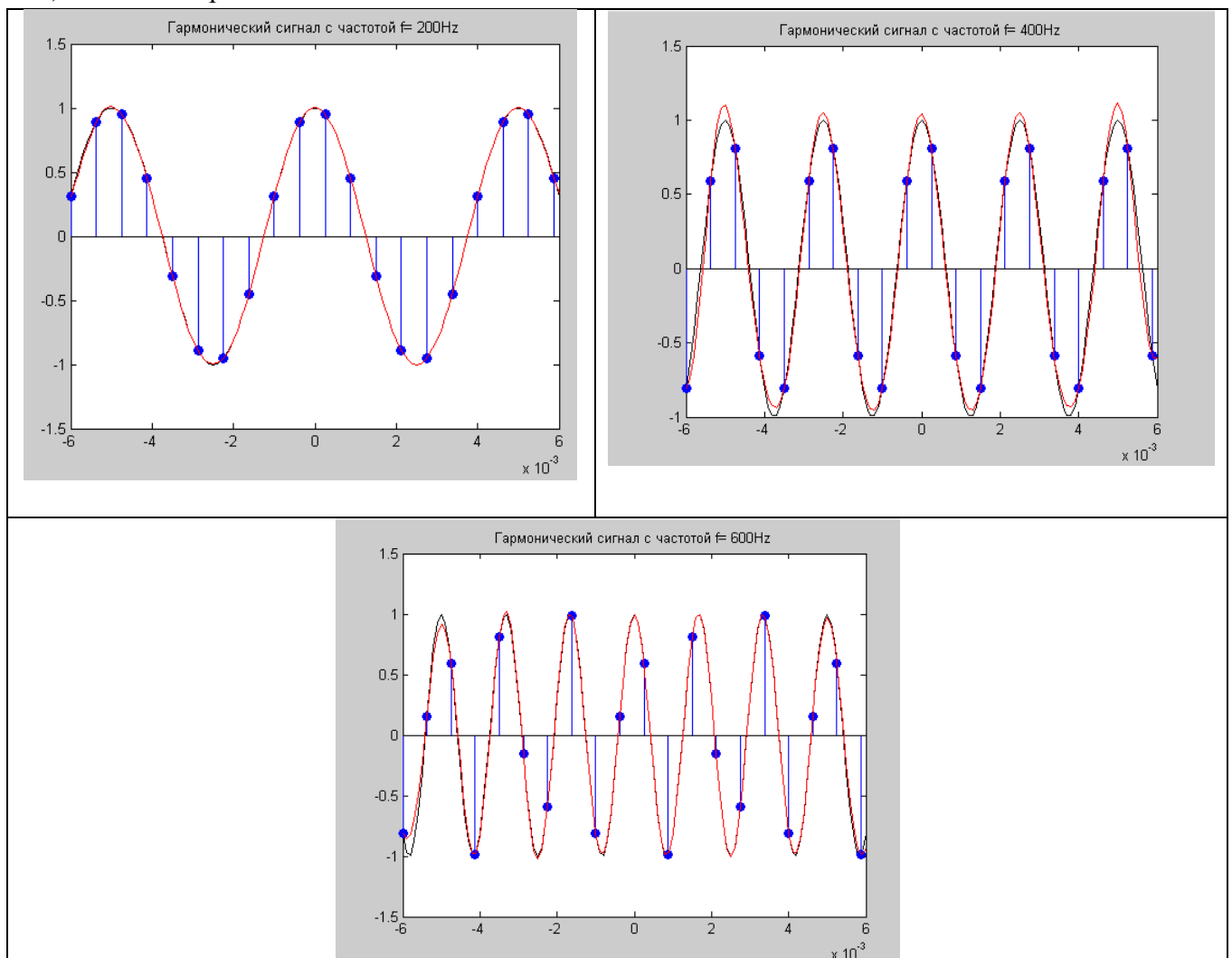
Подводя итог всему сказанному, сформулируем *теорему Котельникова*: любой сигнал  $s(t)$ , спектр которого не содержит составляющих с частотами выше некоторого значения  $\omega_n = 2\pi f_n$ , может быть без потерь информации представлен свои-

ми дискретными отсчетами  $\{s(kT)\}$ , взятыми с интервалом  $T$ , удовлетворяющим следующему неравенству:

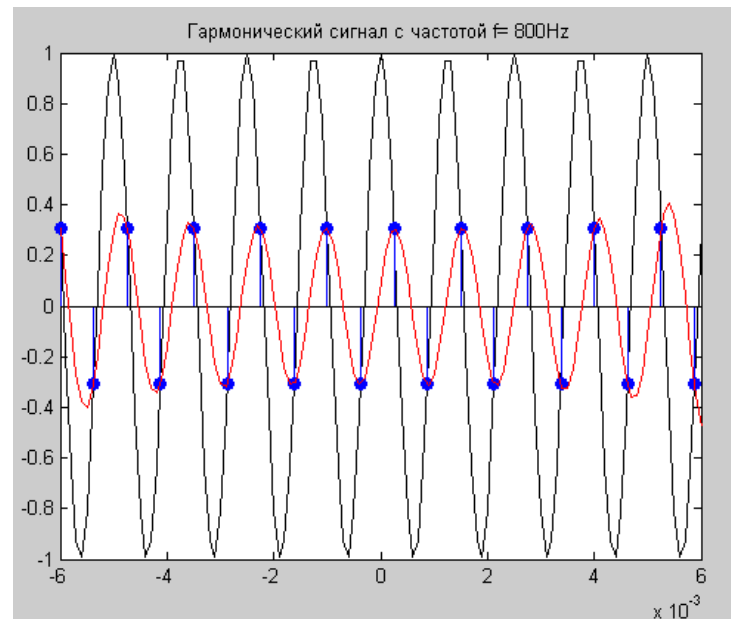
$$T \leq \frac{1}{2f_s} = \frac{\pi}{\omega_s}. \quad (3.13)$$

Восстановление исходного непрерывного сигнала  $s(t)$  по набору его дискретных отсчетов  $\{s(kT)\}$  производится по формуле (3.12).

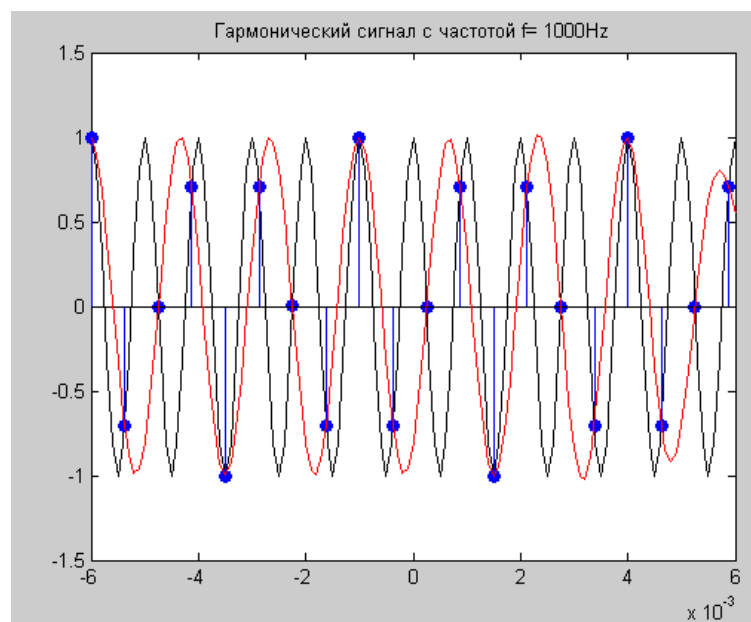
### 1) Частота гармонического сигнала меньше частоты Найквиста:



2. Если частота гармонического сигнала *равна* частоте Найквиста, то дискретные отсчеты позволяют восстановить аналоговый гармонический сигнал с той же частотой, но амплитуда и фаза восстановленного сигнала (он показан пунктирной линией) могут быть искажены (рис. 3.3, б). В худшем случае все дискретные отсчеты синусоиды могут оказаться равными нулю.



- 2) Частота гармонического сигнала больше частоты Найквиста:



```
Fs=6000;
df=Fs/8;
fmin=Fs/8;
fmax=4*Fs;
t=-0.006:0.0001:0.006;
tn=-0.006:1/Fs:0.006;
fv=fmin:fmax;
for f=fmin:df:fmax
x=cos(2*pi*f*t);
plot(t,x,'k-'),hold on;
xn=cos(2*pi*f*tn); % значения сигнала в точках временных отсчётов
stem(tn,xn,'b-','filled');
title(['Гармонический сигнал с частотой f= ' int2str(f) 'Hz']);
hold off;
k=-0.006*Fs:1:0.006*Fs;
```

```

tk=k/Fs;
sk=cos(2*pi*f*tk);
% Вычисление k-тых функций Котельникова
for i=1:20
    angle=pi*Fs*t - k(i)*pi + .0000000000001;
    K(i,:) = sin (angle) ./ angle;
end
s_rec=sk*K; % Восстановление импульса
hold on;
plot(t, s_rec, 'r-'),hold off,pause;
end;
fk=[0, 200, 400, 599, 769, 588, 400, 200, 0];
f1=[0, 200, 400, 600, 800, 1000, 1200, 1400, 1600];
hold on;
ylabel('fdiscr')
xlabel('fsign')
plot(f1, fk); hold off;

```

### Выводы

Как видно из приведенных выше графиков, правильно восстанавливаются только гармонические сигналы с частотой меньше  $F_s/2$ . Гармонический сигнал с частотой больше  $F_s/2$  не может быть правильно восстановлен вследствие наложения спектров. Гармонический сигнал с частотой  $F_s/2$  может быть восстановлен только при благоприятном соотношении фаз. В нашем случае этот сигнал не восстановился.

График изменения частоты дискретизированного сигнала имеет период, равный  $F_s$ . На частотах, кратных  $F_s$ , наблюдаются нули. Полученные результаты находятся в полном соответствии с теоремой Котельникова.

4.

