

Politechnika Warszawska

W Y D Z I A Ł E L E K T R Y C Z N Y



Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej

Praca dyplomowa magisterska

na kierunku Automatyka i Robotyka Stosowana

Redukcja modelu metodami minimalizacji rzędu macierzy Hankela

Michał Bogacz

Numer albumu 279086

promotor

dr inż. Maciej Twardy

Warszawa 2020

Streszczenie

Celem pracy było zbadanie skuteczności zaproponowanej nowej metody wyznaczania realizacji układu dynamicznego i redukcji jego rzędu na podstawie zaszumionych sygnałów wejścia-wyjścia. W przypadku braku szumów rząd macierzy Hankela odpowiednio wysokiego stopnia jest równy rzędowi realizacji minimalnej identyfikowanego układu, sytuacja natomiast komplikuje się w obecności szumów pomiarowych (czyli w praktyce zawsze), kiedy macierz Hankela jest pełnego rzędu, niezależnie od swojego stopnia. Standardowo realizację wyznacza się redukując rząd macierzy Hankela poprzez pozbycie się najmniej znaczących wartości osobliwych, a następnie przeprowadzając procedurę realizacji własnej ERA (ang. *eigenrealization algorithm*). W pracy zaproponowano nowe podejście oparte na redukcji rzędu macierzy Hankela za pomocą odpowiedniej procedury optymalizacyjnej. Podejście takie jest w pewnym sensie formą przetwarzania wstępnego macierzy Hankela przed zastosowaniem procedury ERA, w pracy zostało ono nazwane metodą hybrydową. Zaproponowaną metodę porównano z istniejącymi metodami, wykazując za pomocą odpowiednich symulacji jej lepsze działanie dla zbadanych przypadków.

Słowa kluczowe:

- identyfikacja układów dynamicznych
- minimalizacja rzędu macierzy
- wyznaczanie realizacji układu

Abstract

The purpose of the thesis was to examine the effectiveness of the proposed new method of determining the implementation of a dynamic system and reducing its order based on noisy input-output signals. In the absence of noises, the order of the Hankel matrix of a sufficiently high rank is equal to the order of implementation of the minimum identified system, while the situation becomes more complicated in the presence of measuring noise (always present in real problems), when the Hankel matrix is full order, regardless of its rank. Standard implementation is determined by reducing the Hankel matrix order by getting rid of the least significant singular values, and then conducting the ERA (Eigenrealization Algorithm) implementation procedure. The work proposes a new approach based on the reduction of the Hankel matrix order using an appropriate optimization procedure. This approach is a form of pre-processing of the Hankel matrix before using the ERA procedure, in the paper it has been called the hybrid method. The proposed method was compared with existing methods, demonstrating by means of appropriate simulations its better performance for the examined cases.

Keywords:

- identification of dynamic systems
- matrix rank minimization
- finding system realization



Politechnika Warszawska

załącznik nr 3 do zarządzenia nr 24/2016 Rektora PW

Warszawa 20.06.2020

miejsowość i data

Michał Boyacz

imię i nazwisko studenta

249086

numer albumu

Automatyka i Robotyka stosowana

kierunek studiów

OŚWIADCZENIE

Świadomy/-a odpowiedzialności karnej za składanie fałszywych zeznań oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie, pod opieką kierującego pracą dyplomową.

Jednocześnie oświadczam, że:

– niniejsza praca dyplomowa nie narusza praw autorskich w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 roku o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz.U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631 z późn. zm.) oraz dóbr osobistych chronionych prawem cywilnym, – niniejsza praca dyplomowa nie zawiera danych i informacji, które uzyskałem/-am w sposób niedozwolony, – niniejsza praca dyplomowa nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadawaniem dyplomów lub tytułów zawodowych, – wszystkie informacje umieszczone w niniejszej pracy, uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami, – znam regulacje prawne Politechniki Warszawskiej w sprawie zarządzania prawami autorskimi i prawami pokrewnymi, prawami własności przemysłowej oraz zasadami komercjalizacji.

Oświadczam, że treść pracy dyplomowej w wersji drukowanej, treść pracy dyplomowej zawartej na nośniku elektronicznym (płycie kompaktowej) oraz treść pracy dyplomowej w systemie iSOD są identyczne.

Michał Boyacz

czytelny podpis

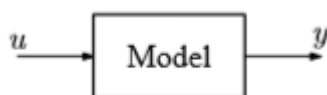
Spis treści

Streszczenie.....	3
Abstract	5
1. Wstęp	11
1.1. Cel i zakres pracy	12
1.2. Zawartość pracy	13
2. Przyjęta metodyka	14
2.1. Metryki jakości rozwiązań	14
2.2. Eliminowanie stanów mało znaczących.....	16
2.3. Generowanie układów testowych	17
3. Algorytm realizacji własnej	18
3.1. Opis metody	18
3.2. Implementacja metody.....	21
3.3. Wnioski	27
4. Heurystyka Boyda	28
4.1. Opis metody	28
4.2. Implementacja metody.....	30
4.3. Wnioski	35
5. Metoda hybrydowa.....	36
5.1. Opis metody	36
5.2. Implementacja metody.....	38
5.3. Wyniki i wnioski	43
6. Porównanie czynników bazowych w metodach.....	44
6.1. Metodyka wykonywania pomiarów	44
6.2. Stopień zredukowania rzędu macierzy	45
6.3. Wartość parametru optymalizacyjnego	49
6.4. Zaszumienie.....	52
7. Podsumowanie.....	56
8. Bibliografia.....	58
9. Spis rysunków	59
10. Spis tabel	60
11. Dodatek	61
11.1. Dodatek A.....	61

1. Wstęp

Znaczący postęp w robotyzacji i automatyzacji wielu dziedzin codziennego życia wymógł potrzebę intensywnego rozwoju oraz poprawy sposobów sterowania automatycznych układów, które wcześniej często były sterowane ręcznie. Odkurzacze, ekspresy do kawy czy nawet najprostsze zestawy oświetleniowe, często wykorzystują obecnie skomplikowane i złożone metody regulacji. Warto zwrócić równocześnie uwagę na fakt, że są to urządzenia użytku codziennego, które nie mają narzuconych surowych wymagań technologicznych charakterystycznych dla urządzeń przemysłowych czy pomiarowych.

Wspomniane procesy mogą na pierwszy rzut oka sprawiać wrażenie całkowicie niezależnych od siebie problemów, których bez odpowiedniej wiedzy specjalistycznej nie można zamodelować, a tym bardziej opracować dla nich odpowiednich algorytmów sterowania. Jednak z punktu widzenia matematycznego sterowanie silnikiem czy przepływem danych w prostej sieci komputerowej może niewiele się różnić. Wszystkie procesy można scharakteryzować jako zestaw sygnałów wejściowych (wymuszeń) oraz sygnałów wyjściowych (odpowiedzi). Model taki przedstawiono na Rys. 1.1.



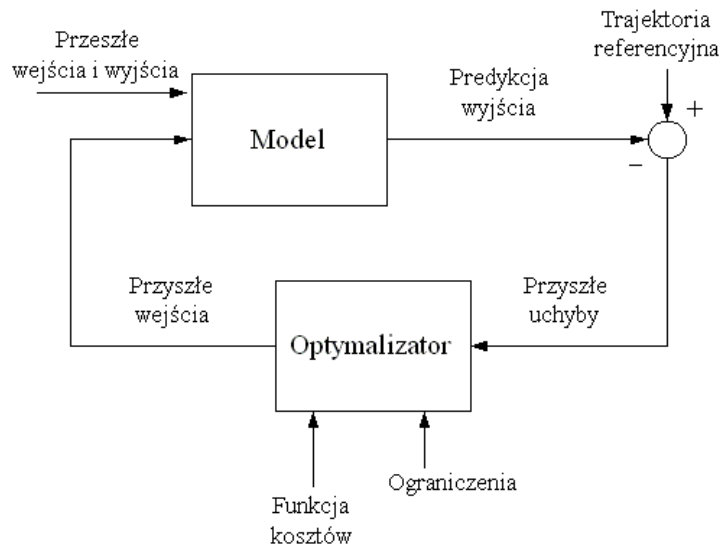
Rys. 1.1. Model ideowego obiektu, u – wektor zmiennych wejścia, y – wektor zmiennych wyjścia [1].

Celem przeprowadzonego procesu identyfikacji układu jest wyznaczenie równań matematycznych, które możliwie najlepiej, w ramach dobranych kryteriów oceny jakości, odwzorują rzeczywiste zachowanie badanego obiektu. Warto tutaj wspomnieć, że immanentną cechą każdego zidentyfikowanego układu rzeczywistego jest pewien stopień nieokreśloności, na który mogą wpływać czynniki środowiskowe badanego układu lub niedokładności pomiarowe występujące w trakcie badania. Problematyka szeroko pojętej identyfikacji układów dynamicznych koncentrują się na kilku podstawowych bazowych zagadnieniach. Określenie typu badanego układu, w rzeczywistości możemy spotkać wiele typów układów, liniowe, nieliniowe, dyskretne czy ciągłe. Dokładność odwzorowania badanego układu, czyli określenie jak dobrze obiekt, który został przedstawiony matematycznie w postaci równań różniczkowych lub macierzowych reprezentuje rzeczywiste zachowanie się układu. Optymalizacja stopnia zidentyfikowanego układu, na większość metod sterowania pozytywnie wpływa zmniejszenie stopnia układu, o ile nadal odwzorowuje on kluczowe cechy jego dynamiki.

Wymienione cechy wymagają jednak często odpowiedniej wiedzy specjalistycznej, a odpowiednie dobranie metody jest na ogół kluczowe dla uzyskania poprawnych wyników. Ogromny postęp i zapotrzebowanie na proste i łatwe w implementacji rozwiązania prowadzą do coraz częstszego stosowania modeli typu ‘czarnej skrzynki’, które nie wymagają od użytkownika żadnej znajomości działania układu. Jedyne potrzebne informacje to sygnały wejścia oraz wyjścia układu. Pomimo możliwości bardzo dokładnego odtworzenia i zidentyfikowania badanych obiektów niestety często matematyczne interpretacje wyników mogą prowadzić do bardzo skomplikowanych modeli. Maksymalne uproszczenie takich modeli, bez istotnej straty dla możliwości ich sterowania, jest jednym z ważniejszych zagadnień teorii identyfikacji modeli dynamicznych.

1.1. Cel i zakres pracy

Wśród rozwijających się nieustannie nowych metod sterowania, szczególne miejsce zajmują metody adaptacyjne typu MPC (ang. *model predictive control*). W procesie sterowania predykcyjnego ważną o ile nie najważniejszą częścią jest okresowa identyfikacja sterowanego układu zgodnie ze schematem przedstawionym na Rys. 1.1.1.

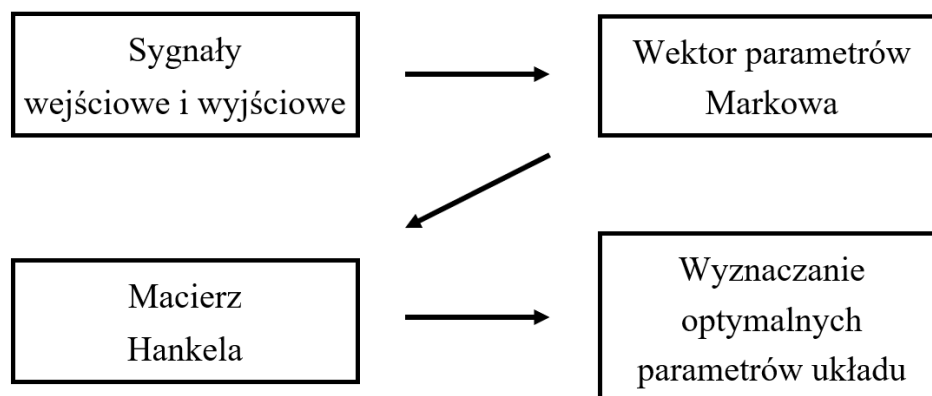


Rys. 1.1.1. Schemat budowy regulatora adaptacyjnego [2].

Wyznaczenie przebiegu sterowania dla określonego horyzontu następuje na bazie zidentyfikowanych parametrów układu, po wykorzystaniu jednego z przewidzianych kroków następuje ponowna identyfikacja i predykcja. Łatwo można dojść do poprawnego wniosku, że dzięki uproszczeniu matematycznej interpretacji układu sterowania możemy znacznie przyspieszyć proces obliczania ciągu sterowania, co w przypadku sterowania predykcyjnego jest zalecane dla osiągnięcia odpowiedniej dynamiki i pełnego wykorzystania charakterystyki tego sposobu sterowania.

Bazując na powyżej przedstawionych wymaganiach w pracy zostaną przedstawione oraz porównane metody identyfikacji obiektów dynamicznych liniowych koncentrujące się na uzyskaniu modelu o możliwie najmniejszym stopniu skomplikowania.

Realizacja pracy wymagała zapoznanie się z odpowiednimi algorytmami identyfikacji i optymalizacji, a następnie na bazie własnej wiedzy i doświadczeń zastosowanie własnych modyfikacji w celu ulepszenia działania elementu optymalizującego, w łańcuchu identyfikacji przedstawionym na Rys. 1.1.2.



Rys. 1.1.2. Uproszczony schemat przeprowadzanej identyfikacji z członem optymalizującym

1.2. Zawartość pracy

Praca została podzielona na pięć rozdziałów, gdzie pierwszy rozdział zawiera niniejsze wprowadzenie.

W rozdziale drugim zawarto podstawowe informacje potrzebne do porównywania wyników otrzymanych różnymi metodami identyfikacji. Następnie przedstawiono sposób eliminowania stanów niesterowalnych oraz nieobserwowalnych stosowany następnie we wszystkich metodach. Na końcu rozdziału przedstawiono podstawowe klasyczne metody identyfikacji wraz z podsumowaniem ich zalet i wad.

W rozdziale trzecim opisana została metoda wyznaczania realizacji w przestrzeni stanu metodą ERA. Metoda ta była bazą do rozwinięcia dalszych możliwości metod opartych o heurystykę Stephena Boyda [3]. W rozdziale tym zaprezentowano również wady i zalety powyższej metody w kontekście optymalności rzędu modelu otrzymanego modelu.

W rozdziale czwartym opisano jedno z rozwiązań problemu minimalizacji rzędu macierzy Hankela uzyskanej przy pomocy algorytmu realizacji własnej ERA (ang. *eigenrealization algorithm*). Przedstawiono również przykładowe wyniki uzyskane tą metodą.

W rozdziale piątym zaproponowano rozwiązanie łączące ze sobą dwie wyżej wspomniane metody. Ten algorytm nazywano w pracy metodą hybrydową. Rozważono dwie alternatywne metody połączonej identyfikacji. Jedna skupiona na jak najlepszym odwzorowaniu sygnału zadanego, natomiast druga na jak największym możliwym zmniejszeniu rzędu układu identyfikowanego.

W rozdziale piątym, stanowiącym badawczą część pracy, przeprowadzono analizę działania metody w wielu różnych sytuacjach symulowanych. W rozważaniach przedstawiono wpływy czynników bazowych na zachowanie metody względem najważniejszych parametrów określających prawidłowe odtworzenie działania układu identyfikowanego. W tej części porównano wyniki otrzymane przy pomocy wszystkich metod.

Ostatnia część pracy składa się z podsumowania i opisanie wniosków z całego przebiegu wykonywania pracy. Następnie zamieszczono spis rysunków oraz tabel razem z bibliografią. W dodatku na samym końcu pracy zamieszczone zostały wszystkie użyte w trakcie badań programy oraz wymagane dowody i wyprowadzenia użytych twierdzeń.

2. Przyjęta metodyka

Wszystkie skrypty użyte w trakcie badań i pisanie pracy zostały napisane w środowisku obliczeniowym MATLAB. Środowisko to jest często wykorzystywane do rozwiązywania zagadnień z obszaru nauk ścisłych i technicznych. Szeroka gama dostępnych rozwiązań, dobrze wspieranych bibliotek oraz szczegółowa dokumentacja pozwala na szybkie i proste prowadzenie projektów. Dodatkową zaletą jest łatwe przedstawianie danych liczbowych w postaci wykresów. Ważną zaletą pracy w środowisku MATLAB jest możliwość wykonywania obliczeń bezpośrednio na wektorach i macierzach.

Podobne języki spełniające częściowo wyżej wymienione założenia to Julia oraz Python. Pomimo dobrej znajomości języka Python autor nie zdecydował się na wykonywanie pracy w tym języku głównie ze względu na brak bezpośredniej obsługi działań macierzowo-wektorowych, oraz słaba znajomość bibliotek. Julia natomiast jest nieporównywalnie lepsza w aspektach natywnej obsługi obliczeń macierzowo-wektorowych, natomiast w trakcie wykonywania badań potrzebnych w pracy autor pracy nie znał wystarczająco dobrze tego środowiska programistycznego.

Badania realizowane w ramach niniejszej pracy dyplomowej wielokrotnie wymagały rozwiązywania zadań optymalizacji matematycznej. W tym celu we wszystkich przypadkach do wykonania odpowiednich obliczeń wykorzystano pakiet CVX [4]. W domyślnym trybie pracy CVX służy do automatycznego rozwiązywania problemów optymalizacji wypukłej. Wszystkie zaimplementowane funkcje zaczynają się od określenia rozwiązywanego problemu, a następnie na problem nakładane są ograniczenia wynikające bezpośrednio z zadania. Podczas rozważania problemów programowania liniowego i kwadratowego jak i problemów programowania geometrycznego, dzięki odpowiednim modułom CVX pozwala na szybkie i łatwe uzyskanie wyników, z uwagi na automatyczne sprowadzenie zadanego problemu do postaci kanonicznej.

2.1. Metryki jakości rozwiązań

Istotnym elementem pracy było porównanie różnych metod identyfikacji. Ze względu na możliwości, które daje środowisko symulacyjne MATLAB i całkowicie sztucznie wygenerowane układy podlegające badaniom, możliwe było różnicowe porównanie sygnałów odpowiedzi idealnie z sygnałami zidentyfikowanej odpowiedzi układów. Nie bez powodu, może nasunąć się w tym momencie analogia do metryk sprawdzających jakość nauczania sieci neuronowych służących do regresji. Z tej analogii oraz z założenia, że badany układ ma charakter „czarnej skrzynki”, powstał pomysł użycia poniżej przedstawionych metryk.

We wszystkich opisanych poniżej metrykach błędów przyjęto jednakowe oznaczenia zmiennych, gdzie

y_i – przewidywana wartość wyznaczona w procesie identyfikacji;

\hat{y}_i – rzeczywiste sygnały odpowiedzi układu;

n – liczba pomiarów;

MAE (en. Mean Absolute Error) [5] – podstawowa i jedna z najczęściej używanych metryk błędu w zagadnieniu regresji. Niestety nie jest to norma idealna, dlatego nie będzie jedyną używaną w trakcie oceniania jakości badanych układów. Świetnie widać to na przykładzie zestawu danych Kwartetu Anscombe’a [6], gdzie metryka MAE jest identyczna dla wszystkich wykresów pomimo ich znacznej różnicy w rozkładzie graficznym danych.

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n} \quad 2.1.1$$

MSE (en. Mean Square Error) [5] – metryka jest bardzo podobna do przedstawionej poprzednio, z tą różnicą, że w przypadku błędu średniokwadratowego można łatwo odseparować te charakterystyki, które zawierają duże odchylenia od rzeczywistych wartości. Metryka powinna przyjmować większe wartości błędu dla dużych błędów odchylenia, co łatwo pozwoli na zaobserwowanie ewentualnych niepewności mocno wpływających na stopień jakości identyfikacji. Dużą wadą tej metryki jest przedstawianie błędu w innych jednostkach niż oryginalna wielkość, jednostka MSE to zawsze kwadrat oryginalnej miary.

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \quad 2.1.2$$

RMSE (en. Root Mean Square Error) [5] – jest to rozwinięcie metryki MSE, która rozwiązuje jej największy problem w bardzo prosty sposób. Po wyliczeniu pełnej metryki MSE wynik jest pierwiastkowany, dlatego wynik metryki ma identyczną jednostkę co wielkość oryginalna, bez straty informacji o daleko wysuniętych błędnych próbkach.

$$RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}} \quad 2.1.3$$

Przedstawiona powyżej norma może być także interpretowana jako norma Frobeniusa zaadaptowana do potrzeb porównywania ze sobą dwóch wektorów, a nie macierzy, dlatego w pracy terminy błędu RMSE i normy Frobeniusa w kontekście operacji wektorowych mogą być używane zamiennie.

Przedstawione metody porównywania wykorzystano równocześnie ze względu na różne informacje, które przekazywane są przez poszczególne metryki. Krzyżowa analiza przy pomocy wszystkich wielkości może pomóc w prawidłowym określeniu parametrów odwzorowania.

2.2. Eliminowanie stanów mało znaczących

Metody identyfikacji i optymalizacji przedstawione w pracy mogą w wyniku operacji zwracać dużą macierz, której kolumny znajdujące się najbardziej po prawej i wiersze znajdujące się na dole są zerami lub są bardzo bliskie zeru. Takie przedstawienie wyniku powoduje sztuczne zawyżenie stopnia macierzy. Fakt ten wiąże się z procesem optymalizacji, korzystającym z właściwości rozkładu SVD macierzy, dowód rozkładu ważności elementów znajduje się w [7].

Problem opisany powyżej można rozwiązać przez wykonanie redukcji takich rzędów macierzy, przy założeniu, że jak najmniej zmieni się postać wynikowa takiej operacji. Taka funkcja minimalizacji może zostać przedstawiona jako norma macierzowa między macierzą docelową, a oryginalną.

Zakładając, że $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, gdzie $\text{rank}(A) = r > 0$, oraz $1 \leq k \leq r$.

$$\begin{aligned} \min_{A_k \in \mathbf{R}^{m,n}} \|A - A_k\|_F^2 \\ \text{s. t. : } \text{rank}(A_k) = k \end{aligned} \quad 2.2.1$$

Wtedy:

$$A = U\tilde{\Sigma}V^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T \quad 2.2.2$$

Zgodnie z dowodem [7]:

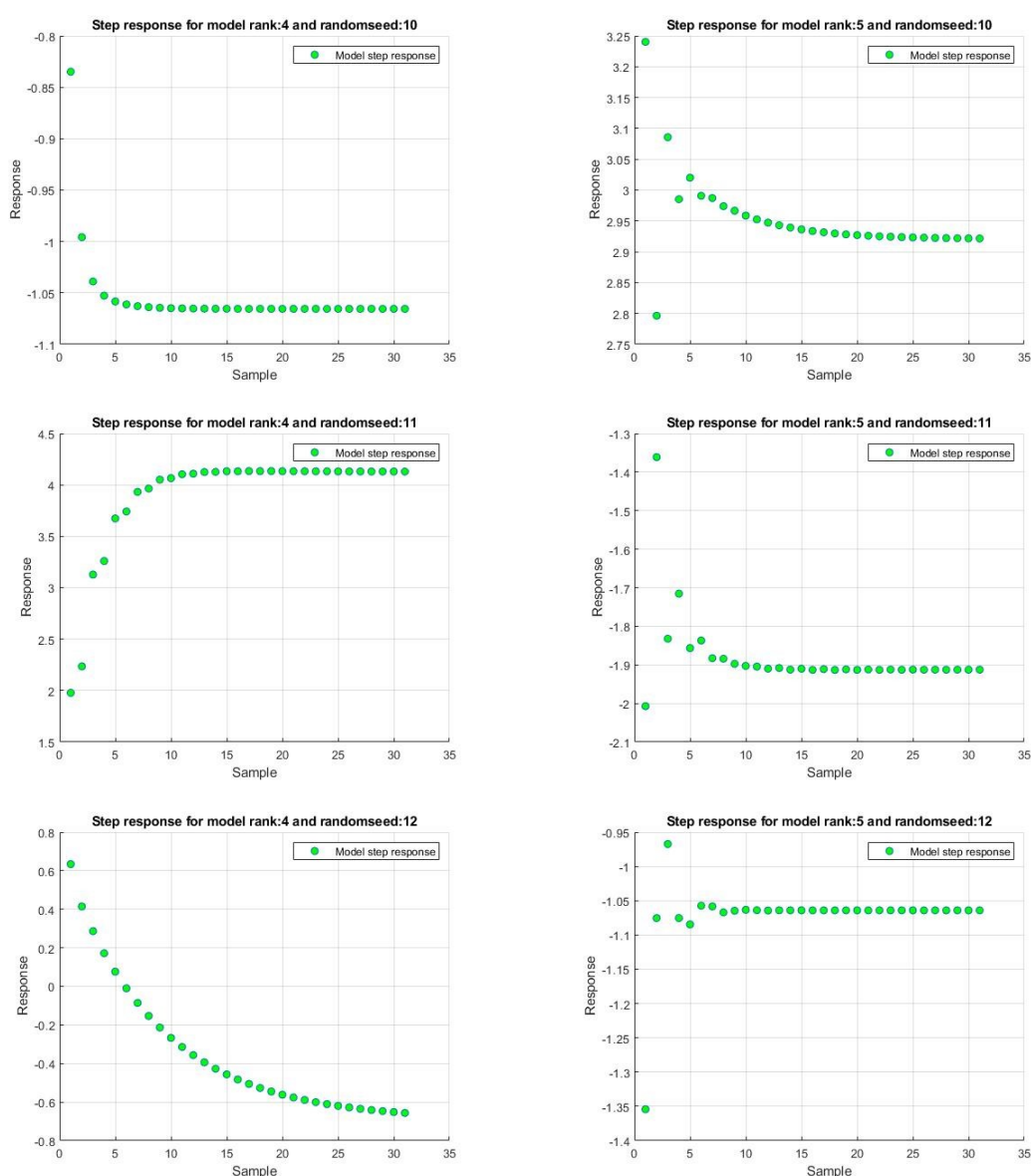
$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T \quad 2.2.3$$

Operacja ta sprowadza się do zastąpienia postaci oryginalnej macierzą odtworzoną w taki sposób, że usunięte zostają odpowiednie wszystkie wiersze znajdujące się najbardziej na dole macierzy i kolumny po prawej, aż w macierzy zostanie tylko k rzędów. Zgodnie ze wcześniej wspomnianym dowodem jest to optymalna metoda usunięcia najmniej znaczących elementów macierzy.

Operacja powyższego skrócenia wykonywana jest na macierzach reprezentujących wektorowo-macierzowe równania przestrzeni stanów. Dlatego w tym wypadku usuwanie odpowiednich rzędów macierzy wiąże się z likwidowaniem stanów najmniej sterowalnych i najmniej obserwowalnych. Taka operacja nie powinna negatywnie wpływać na jakość odwzorowania, oczywiście do pewnego stopnia. Jakość reprezentacji w funkcji zredukowanych rzędów macierzy została zbadana doświadczalnie i przedstawiona w rozdziale poświęconym prezentacji wyników porównawczych.

2.3. Generowanie układów testowych

Porównanie działania metod wykonane w kolejnych rozdziałach pracy, oparte jest o sprawdzenie jakości identyfikacji dla układów o różnych parametrach. W pracy rozważono głównie układy czwartego oraz piątego rzędu. Dokładność przeprowadzonych testów zależy od ilości oraz różnorodności dobranych układów, dlatego do symulacji układów użyto funkcji, programu MATLAB, *drss(n)* [8]. Komenda wykonuje losowanie dyskretnego modelu testowego o rozmiarze n , który można następnie wykorzystać w dowolny sposób w połączeniu z innymi komendami. Losowanie układów nie powinno być całkowicie nieprzewidywalne, w celu porównania działania układów należy w podobny sposób zbadać wiele typów układów przy różnych warunkach początkowych działania metody. Dzięki możliwości zadeklarowania stałego parametru (ang. seed) dla silnika losującego możliwe jest uzyskanie identycznych wylosowanych modeli identyfikowanych przez wartość parametru. Wartość tego parametru będzie w dalszej części pracy służyła jako identyfikator modelu, odpowiedzi skokowe użytych modeli przedstawiono na Rys. 2.3.1.



Rys. 2.3.1. Odpowiedzi skokowe modeli testowanych. Lewa strona układy 4-tego rzędu, prawa 5-tego. Podział pionowy został wykonany względem wartości parametru losowania, od 10 do 12.

3. Algorytm realizacji własnej

3.1. Opis metody

Metoda wykorzystująca algorytm realizacji własnej jest metodą służącą do identyfikacji matematycznej interpretacji układów dynamicznych [9]. Metoda w przeciwieństwie do wielu innych opiera się o analizę wektorów parametrów Markowa oraz wyliczenie przy pomocy tych parametrów macierzy Hankela. Kolejne przekształcenia prowadzą to stworzenia reprezentacji modelu matematycznego przy pomocy opisu macierzami przestrzeni stanu A , B oraz C .

Zaletami tej metody jest jedynie potrzeba rejestracji przebiegu sygnału badanego oraz znajomość stopnia układu. Część służąca optymalizacji wykorzystuje zależność opisaną w rozdziale 2.3.

Rozważaniom podlega układ dyskretny n -tego rzędu, który możemy opisać równaniami macierzowymi stanu:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned} \quad 3.1.1$$

gdzie $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ oraz $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ natomiast m i p oznaczają liczbę wejść do układu oraz liczbę wyjść z układu. Weźmy pod uwagę przekształcenie powyższego układu przez podobieństwo przy pomocy macierzy P .

$$(A, B, C) \xrightarrow{P} (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}) = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) \quad 3.1.2$$

Dla takich założeń możemy zbudować macierze R_o oraz R_c , które są macierzami sterowalności i obserwowalności dowolnego układu.

$$R_c = [B \ AB \ \dots \ A^{(n-1)}B], \quad \tilde{R}_c = PR_c \quad 3.1.3$$

$$R_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_o = R_o P^{-1} \quad 3.1.4$$

Dla układu możemy zdefiniować parametry Markowa h_1, \dots, h_k, \dots gdzie,

$$h_1 = CB, h_2 = CAB, \dots, h_k = CA^{k-1}B, \dots, \quad 3.1.5$$

czyli w przypadku ogólnym możemy zapisać,

$$h_k = CA^{(k-1)}B, \quad h_k \in \mathbf{R}^{p \times m}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 3.1.6$$

korzystając z przedstawionego wcześniej przekształcenia P ,

$$\tilde{h}_k = \tilde{C}\tilde{A}^k\tilde{B} = CP^{-1}(PAP^{-1})^kPB = CA^k B = h_k \quad 3.1.7$$

Wyznaczonych lub zbadanych parametrów Markowa można następnie użyć do wyznaczenia jednej z realizacji układu, czyli odnalezienia wartości macierzy realizacji podobnej \tilde{A} , \tilde{B} i \tilde{C} . Każdy taki układ ma nieskończenie wiele realizacji, które w przestrzeni stanów mają tę samą transmitancję.

Wyznaczenie realizacji zawsze zaczynamy od wyznaczenia matematycznego bądź badawczego wektora parametrów Markowa, dla których następnie budujemy dwie macierze H_1 oraz H_2 . Macierze będziemy nazywać odpowiednio pierwszą i drugą macierzą Hankela. Realizację tych macierzy możemy przedstawić w sposób zaprezentowany poniżej.

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{nm \times np}, \quad 3.1.8$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & \cdots & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \cdots & h_{2n} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{nm \times np}, \quad 3.1.9$$

Zakładając, że w eksperymencie uzyskano poprawnie parametry Markowa i prawidłowo zbudowano macierze Hankela, dla układu, którego stopień wynosi n . Wykonujemy rozkład pierwszej macierzy Hankela procedurą SVD.

$$H_1 = U \Sigma V^T \quad 3.1.10$$

$$\tilde{R}_O = U \Sigma^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{R}_C = \Sigma^{\frac{1}{2}} V^T, \quad 3.1.11$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T H_2 V \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ \tilde{B} &= \tilde{R}_C \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= [I_p \ 0] \tilde{R}_O \end{aligned} \quad 3.1.12$$

Powyższe wzory pozwalają na bezpośrednie obliczenie macierzowej realizacji układu. Macierze $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ oraz A, B, C są ze sobą związane przekształceniem przez podobieństwo dane macierzą P spełniającą warunki przedstawione poniżej.

$$P = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T R_O, \quad P^{-1} = R_C V \Sigma^{-\frac{1}{2}} \quad 3.1.13$$

Używając powyższej zależności możemy pokazać, że $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ oraz

$$\begin{aligned} P P^{-1} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T R_O R_C V \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ P P^{-1} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T H_1 V \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ P P^{-1} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T U \Sigma V^T V \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ P P^{-1} &= I \end{aligned} \quad 3.1.14$$

wykonując podobne przekształcenie można pokazać, że

$$P^{-1} P = I \quad 3.1.15$$

równocześnie można pokazać, że dla macierzy P macierze $\tilde{R}_C = P R_C$ oraz $\tilde{R}_O = R_O P^{-1}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_C &= R_C P \\
\tilde{R}_C &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T R_O R_C \\
\tilde{R}_C &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T H_1 \\
\tilde{R}_C &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T U \Sigma V^T \\
\tilde{R}_C &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} V^T
\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_O &= R_O P^{-1} \\
\tilde{R}_O &= R_O R_C V \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\
\tilde{R}_O &= H_1 V \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\
\tilde{R}_O &= U \Sigma V^T V \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\
\tilde{R}_O &= U \Sigma^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Algorytm wykorzystywany w praktyce używa w największym stopniu zależności przedstawione w równaniach 3.1.8, 3.1.9, 3.1.10 oraz 3.1.12. Wyznaczenie odpowiednich parametrów i przemodelowanie wektora w macierz pozwala wyznaczyć realizację dowolnego badanego układu. Podczas rozważań teoretycznych przyjęto, że stopień układu jest równy dokładnie n , dlatego w wyprowadzeniu nie istnieje problem doboru rzędu zidentyfikowanych macierzy stanu. Podczas wykonywanych badań, które mają odpowiadać rzeczywistym przypadkom skorzystano dodatkowo z zależności przedstawionych w rozdziale 2.3, aby po identyfikacji zmniejszyć rozmiar układu. Procedura ta nie jest jednak optymalna, ponieważ stopień, do którego redukujemy otrzymaną realizację, jest dobierany doświadczalnie. Taka formuła może nie sprawdzać się idealnie w rzeczywistości.

3.2. Implementacja metody

Zgodnie z teoretycznym wyprowadzeniem algorytmu, do zidentyfikowania układu należy określić parametry Markowa, dla badanego układu.

Wymuszenie o charakterze impulsowym byłoby najlepszym do wykorzystania, ponieważ przy jego użyciu możemy od razu określić wektor parametrów Markowa jako wektor odpowiedzi układu. Dla takiego przypadku stworzenie wektora wyglądałoby następująco.

$$u_{impuls} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} - \text{zmierzone sygnały idealnego układu bez zaszumienia}$$
3.2.1

Wiadomo, że dla układów dyskretnych w kolejnych chwilach czasowych k spełnione muszą być poniższe zależności.

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i$$

$$y_k = C A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} C^{k-1-i} B u_i$$
3.2.2

W rozważanym zadaniu startujemy z zerowych warunków początkowych, dlatego w tym przypadku $x_0 = 0$, a z tego wynika końcowa zależność ogólna dla przypadku wymuszenia skoku impulsowego.

$$y_k = \sum_{i=0}^{k-1} C^{k-1-i} B u_i$$
3.2.3

Wyprowadzenie w poprzednim rozdziale zawierało zależność wyrażającą wartość odpowiedniego parametru Markowa jako poniższe równanie.

$$h_k = C A^{k-1} B,$$
3.2.4

Z tego wynika, że możemy wyznaczyć parametry Markowa korzystając ze wzoru,

$$y_k = \sum_{i=0}^{k-1} h_i - u_{k-1-i}$$
3.2.5

czyli po rozwinięciu,

$$\begin{aligned} y_0 &= h_0 \\ y_1 &= h_0 u_1 + h_1 u_0 \\ y_2 &= h_0 u_2 + h_1 u_1 + h_2 u_0 \\ &\vdots \\ y_k &= h_0 u_{k-1} + h_1 u_{k-2} + \dots + h_{k-1} u_0 \end{aligned}$$
3.2.6

oraz po przekształceniu i podstawieniu wektora wymuszenia u_{impuls} ,

$$\begin{aligned} h_0 &= y_0 \\ h_1 &= y_1 \\ &\vdots \\ h_k &= y_k \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Metoda badania wektora parametrów Markowa przez wymuszenie impulsowe, byłaby zdecydowanie najszybsza i najprostsza. Niestety wymuszenie o charakterze impulsowym niesie ze sobą bardzo niewiele energii, dlatego w praktyce zbadanie dynamiki układu przy pomocy takiego wymuszenia mogłoby okazać się niemożliwe. Niska energia sygnału wymuszenia mogłaby nie przebić się przez szумы, które w każdym układzie rzeczywistym stanowią czynnik o wysokim znaczeniu. Metodą o większym skomplikowaniu struktury wektora parametrów Markowa jest zastosowanie wymuszenia o charakterze skoku jednostkowego. Sygnał o takim kształcie niesie ze sobą zdecydowanie więcej energii, co może pozwolić na odpowiednie zidentyfikowanie parametrów, pomimo istniejących szumów. Załóżmy więc nowe parametry wektora wymuszenia, zgodne z nowym sygnałem u_{step} .

$$u_{step} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.8}$$

Można ponownie skorzystać z zależności 3.2.7, ale tym razem używając sygnału wymuszenia u_{step} . Po podstawieniu i przekształceniu otrzymujemy poniższą zależność.

$$\begin{aligned} h_0 &= y_0 \\ h_1 &= y_1 - h_0 \\ h_2 &= y_2 - h_1 - h_0 \\ &\vdots \\ h_k &= y_k - \sum_{i=0}^{k-1} h_i \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Następnie zgodnie z zależnościami 3.1.8 do 3.1.12 tworzone są obie macierze Hankela i wykonywany jest proces identyfikacji. Dzięki znacznie bardziej energetycznemu sygnałowi wymuszenia istnieje szansa, że zakłócenia będą odgrywały mniejszą rolę w wyniku identyfikacji.

Implementacja badawcza metody wymagała jak najlepszego przygotowania algorytmu do późniejszego procesu używania na układzie rzeczywistym. Realizacja tego założenia odbyła się przez potraktowanie wygenerowanego układu jako „czarnej skrzynki”. Testowany losowy system był układem piątego rzędu. Wygenerowana przy pomocy wylosowanych danych odpowiedź na skok jednostkowy została wzbogacona w zaszumienie o rozkładzie naturalnym. Kod realizujący to zadanie został przedstawiony na Rys. 3.2.1.

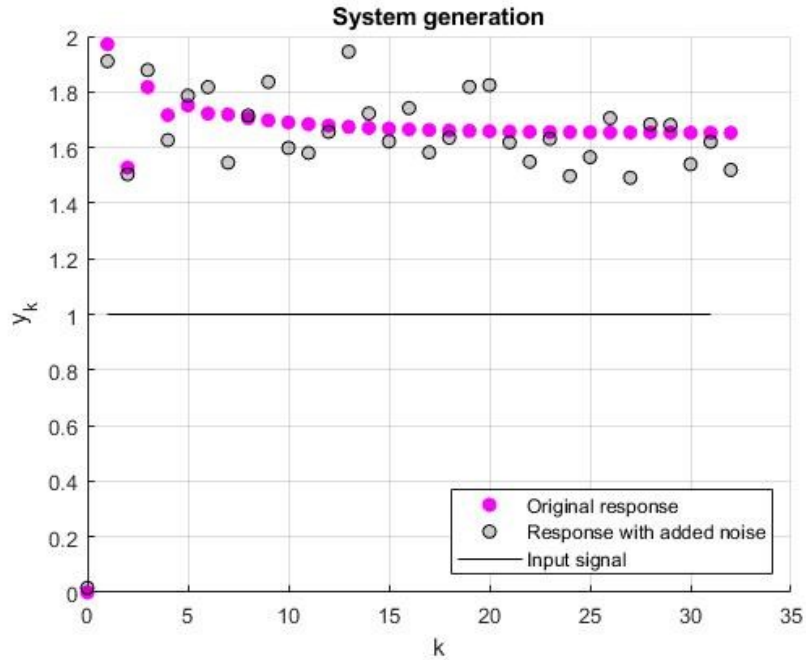
```
% generating base signal
if signal_type == 1
    [y_oryg, t] = step(sys, 2*n_size);
elseif signal_type == 2
    [y_oryg, t] = impulse(sys, 2*n_size);
end

% optional noise
rng(random_seed);
if noise_type == 1
    y_noise = y_oryg + noise_level*randn(size(y_oryg));
elseif noise_type == 2
    y_noise = y_oryg + noise_level*randi(size(y_oryg));
elseif noise_type == 3
    y_noise = y_oryg + noise_level*sin(size(y_oryg));
elseif noise_type == 4
    y_noise = y_oryg;
end
```

Rys. 3.2.1. Kod obsługujący generowanie przebiegu oraz zaszumienie wygenerowanego sygnału.

Zgodnie z powyższym, na wejściu algorytm dysponuje dwoma wektorami, wektorem wymuszenia u oraz wektorem odpowiedzi układu y , gdzie oba te wektory można przedstawić w sposób zapisany poniżej oraz przedstawiony na Rys. 3.2.2. Dla rzeczywistego układu w trakcie badania nie byłoby możliwości otrzymania również przebiegu oryginalnej odpowiedzi, ale została ona przedstawiona na wykresie w ramach referencji.

$$\begin{aligned}
 u &= \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
 y &= \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + noise_0 \\ y_1 + noise_1 \\ \vdots \\ y_k + noise_k \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.10}$$



Rys. 3.2.2. Przebiegi sygnałów odczytywanych z zidentyfikowanego układu.

Bazując na rekurencyjnej zależności przedstawionej w równaniu 3.2.9, stworzono wektor parametrów Markowa, na bazie którego wyprowadzono obie macierze Hankela. Następnie obliczano macierze reprezentacji przestrzeni stanu. Odpowiedni fragment kodu przedstawia Rys. 3.2.3.

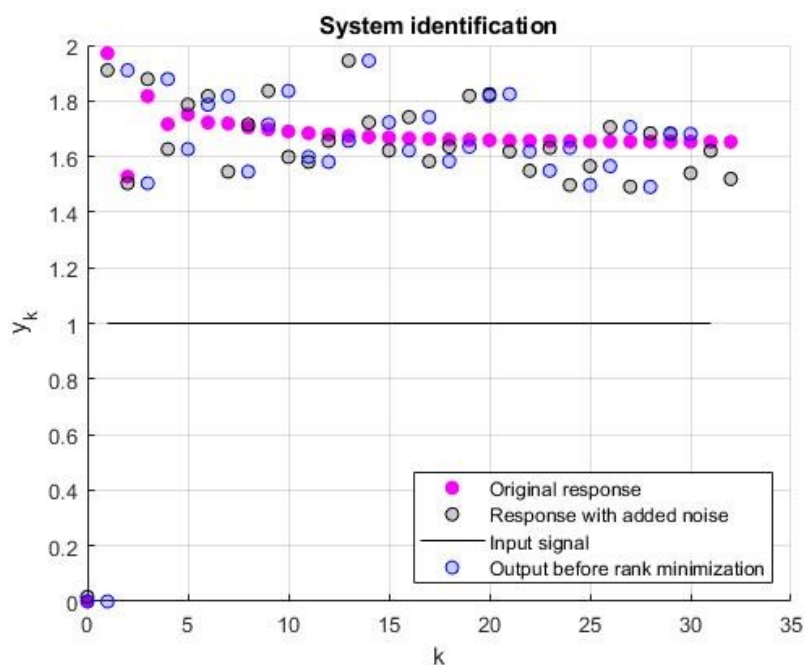
```
% applying algorithm
% creating Markov parameter vector
h = zeros(length(y_noise(2:end)), 1);
for i = 1:length(y_noise(2:end))
    h(i+1) = y_noise(i+1) - sum(h(1:i));
end

H0 = hankel(h(1:n),h(n:2*n-1));
H1 = hankel(h(2:n+1),h(n+1:2*n));
[U,S,V] = svd(H0);
H0rank = rank(H0);
U = U(:,1:H0rank);
V = V(:,1:H0rank);
sValFull = diag(S);
sVal = sValFull(1:H0rank);
S = diag(sVal);

Rc = S^(1/2)*V';
Ro = U*S^(1/2);
A = S^(-1/2)*U'*H1*V*S^(-1/2);
B = Rc(:,1:m);
C = Ro(1:p,:);
```

Rys. 3.2.3. Wyliczenie parametrów Markowa i macierzy Hankela.

Wyliczone macierze \tilde{A} , \tilde{B} oraz \tilde{C} zastosowano do odtworzenia układu badanego. W tym celu na zasymulowany układ ponownie nadano wymuszenie o charakterze skoku jednostkowego. Jakość odwzorowania uwidoczniło na Rys. 3.2.4. Niestety na pierwszy rzut oka widać, że odwzorowany układ bardzo dokładnie podąża za sygnałem zaszumionym. Wynik tego typu może być spowodowany tym, że zidentyfikowany układ ma w tym momencie rząd równy połowie liczby pobranych do wektora Markowa próbek. W tym przypadku rząd układu zidentyfikowanego przedstawionego na rysunku wynosi $\text{rank}(\tilde{A}) = 16$. Dzięki metodzie przedstawionej w rozdziale 2.3 można bezpiecznie zmniejszyć rozmiar tego układu, aż nie osiągnie on odpowiedniego odwzorowania.



Rys. 3.2.4. Przebieg modelu zidentyfikowanego, przed zredukowaniem szumów.

Dokładne wyniki skracania rozmiarów rzędu macierzy przy pomocy metody używającej rozkładu SVD przedstawiono w rozdziale 6.2. razem z pozostałymi metodami, tak aby możliwe było porównanie metod ze sobą. Tabela 3.2.1 zawiera podstawowe wyniki graficzne takiej operacji. Tabela 3.2.2 zawiera natomiast interpretację przy pomocy wspomnianych w rozdziale 2.2 metryk. Pozwalają one dokładniej zinterpretować otrzymane wykresy.

Tabela 3.2.1. Porównanie graficzne układów o zmniejszonych rzędach.

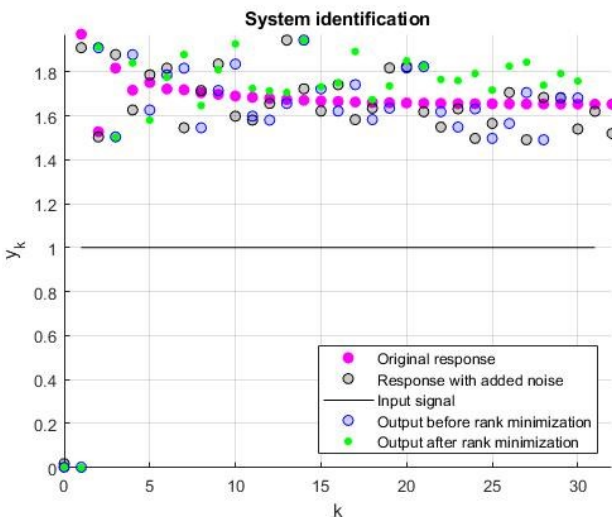
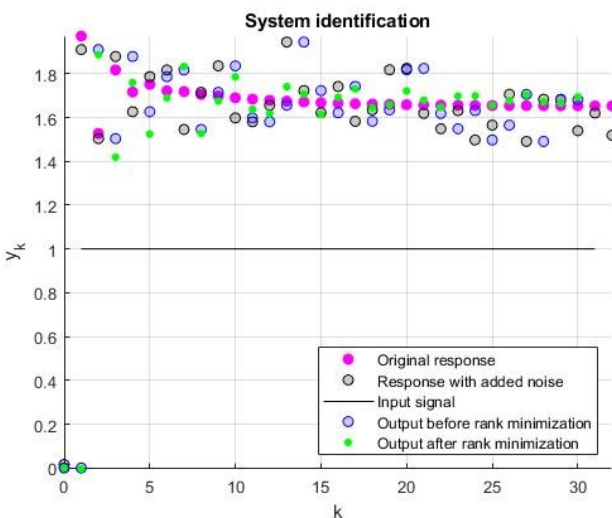
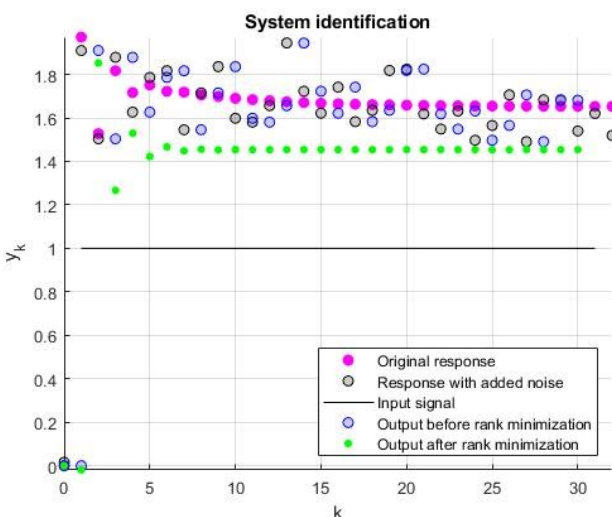
$rank(\tilde{A}) = 10$	<p style="text-align: center;">System identification</p> 
$rank(\tilde{A}) = 5$	<p style="text-align: center;">System identification</p> 
$rank(\tilde{A}) = 2$	<p style="text-align: center;">System identification</p> 

Tabela 3.2.2. Porównanie metryczne układów o zmniejszonych rzędach

	$rank(\tilde{A}) = 10$	$rank(\tilde{A}) = 5$	$rank(\tilde{A}) = 2$
MAE	0.1905	0.1337	0.2836
MSE	0.1501	0.1398	0.1837
RMSE	0.0280	0.0613	0.2627

3.3. Wnioski

Powyższy rozdział poświęcono implementacji podstawowej metody identyfikacji układów dynamicznych. Analiza przy pomocy algorytmu realizacji własnej jest znana w technikach identyfikacji od dawna. W przeciwieństwie do metod prezentowanych w kolejnych rozdziałach nie ma zaimplementowanego żadnego mechanizmu optymalizującego stopień otrzymanej realizacji. Ręczne usuwanie stanów brzegowych, które interpretujemy jako najmniej sterowalne i najmniej obserwowalne, niestety pozostawia główne składniki, na które znacząco wpływają zakłócenia pracy układu oraz szumy pomiarowe. Użycie algorytmu optymalizacji rzędu wpływa pozytywnie na jakość odtworzenia układu oryginalnego pomimo dużego zaszumienia. Wyniki te przedstawiono w kolejnych rozdziałach.

Pomimo wielu wad algorytmu ERA, które widać wyraźnie przyglądając się wykresom przedstawionym w poprzednim rozdziale, ogólna przydatność metody jest ogromna. Dzięki swojej prostocie może być użyta do praktycznie każdego typu identyfikowanego układu. Jest to również metoda nastawiona ściśle na badanie danych. Do jej wykonania nie potrzeba żadnej wiedzy specjalistycznej, co znacznie poszerza jej możliwości aplikacji.

Najczęstsze zastosowanie metody można odnaleźć w budownictwie, gdzie służy do określania parametrów drgań, które mogą oddziaływać na budynki i inne struktury. Uniwersalność, którą się charakteryzuje, pozwala także na szerokie użycie w aero-inżynierii, elektronice i przetwarzaniu sygnałów.

4. Heurystyka Boyda

4.1. Opis metody

Problem wyznaczenia realizacji minimalnej układu, który jest tematem tej pracy dyplomowej, można przedstawić na wiele sposobów. Najważniejszym aspektem rozwiązania takiego zagadnienia jest stworzenie algorytmu, który umożliwiłby zredukowanie rzędu macierzy [3] (w naszych zastosowaniach będzie to macierz Hankela), co prowadzi do zadania optymalizacji.

$$\begin{aligned} \min \text{Rank}(X) \\ \text{s. t. } X \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad 4.1.1$$

gdzie X to zmienna macierz podlegająca procesowi optymalizacji, natomiast \mathcal{C} jest zbiorem wypukłym.

Opisane powyżej zagadnienie jest bardzo trudne do zrealizowania obliczeniowo. Z tego powodu opracowano wiele różnych heurystyk pozwalających na zastąpienie tego problemu innym zagadnieniem, które jest możliwe do rozwiązania. Rozważana macierz musi być nieujemnie określona, ale niestety w wielu zastosowaniach macierz nie jest nieujemnie określona. Zgodnie z [3] możemy skorzystać z możliwości „zagnieżdżenia” optymalizowanej macierzy w innej nieujemnie macierzy, której rząd będzie dokładnie dwa razy większy od rzędu macierzy oryginalnej $X \in R^{m \times n}$.

$$\begin{aligned} \text{Rank}(Y) + \text{Rank}(Z) \leq 2r, \\ \begin{bmatrix} Y & X \\ X^T & Z \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad 4.1.2$$

gdzie zachodzi $\text{Rank}(X) \leq r$ tylko wtedy, gdy $Y = Y^T \in R^{m \times m}$ oraz $Z = Z^T \in R^{n \times n}$. Jeżeli zachodzą powyższe warunki to optymalizację rzędu dowolnej macierzy możemy przedstawić jako optymalizację już nieujemnie określonej przekątnej macierzy.

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \text{Rank} \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \\ \text{s. t. } \begin{bmatrix} Y & X \\ X^T & Z \end{bmatrix} \geq 0 \\ X \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad 4.1.3$$

Rozważaną heurystyką jest zastąpienie problemu minimalizacji rzędu macierzy przez minimalizację funkcji log-det, która jest gładką aproksymacją problemu dla dodatnio półokreślonych macierzy. Opisano dwa przypadki, taki w którym dysponujemy na początku macierzą o odpowiednich parametrach oraz taki, w którym macierz nie spełnia warunków użycia heurystyki i wymagane będzie użycie zagnieżdżenia, pokazanego w zależności 4.1.3. Załóżmy, że $X \in R^{n \times n}$ oraz $X \geq 0$, wtedy,

$$\begin{aligned} \min \log \det(X + \delta I) \\ \text{s. t. } X \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad 4.1.4$$

W powyższej zależności δ jest niewielkim współczynnikiem regularizacyjnym. W praktyce jest on bardzo mały. Warto zauważyć, że przedstawiona powyżej funkcja nie jest wypukła, jednak jesteśmy w stanie znaleźć jej lokalne minimum. Minimalizacja taka okaże się wystarczająca i może zostać wykonana dowolną metodą.

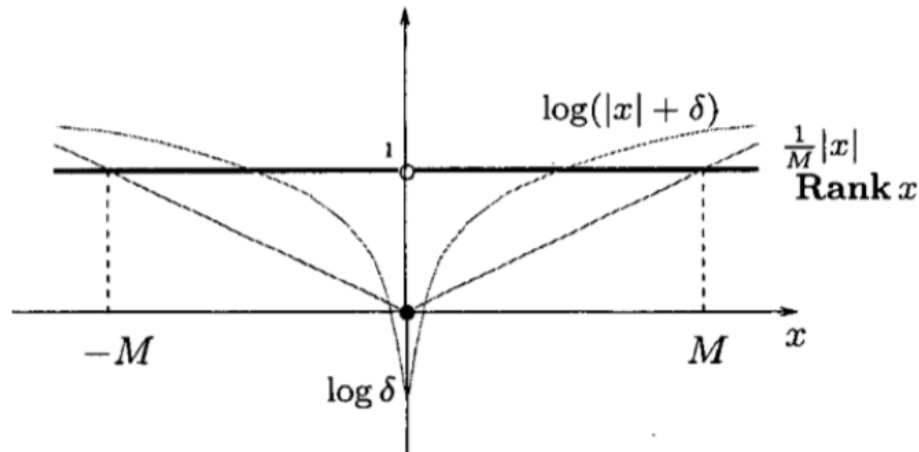
Zastosowania spotykane w większości przypadków jednak nie umożliwiają bezpośredniego skorzystania z zależności log-det. Dlatego należy użyć metody przedstawionej w 4.1.3, aby heurystyka była możliwa do wykorzystania dla każdej z optymalizowanych macierzy, niezależnie od jej określoności.

$$\begin{aligned} \min \log \det \left(\begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} + \delta I \right) \\ \text{s. t. } X \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad 4.1.5$$

Linearyzacja podanego zagadnienia prowadzi do formy iteracyjnej zagadnienia, którą można rozwiązać dowolną metodą w celu uzyskania rozwiązania minimalnego.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y_{k+1} & 0 \\ 0 & Z_{k+1} \end{bmatrix} = \\ \operatorname{argmin} \operatorname{Tr} \left[\begin{bmatrix} Y_{k+1} & 0 \\ 0 & Z_{k+1} \end{bmatrix} + \delta I \right]^{-1} \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \\ \text{s. t. } \begin{bmatrix} Y & X \\ X^T & Z \end{bmatrix} \geq 0 \\ X \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad 4.1.6$$

Wykres przedstawiony na Rys. 4.1.1 przedstawia graficznie założenia potwierdzające możliwość aproksymacji problemu $\operatorname{Rank}(X)$ przez połączenie $\operatorname{Tr}(X)$ oraz $\log \det(X + \delta I)$



Rys. 4.1.1. Graficzne przedstawienie rzędu docelowego o raz heurystyki na jednym przebiegu [3].

4.2. Implementacja metody

Ogólna interpretacja metody przedstawiona w poprzednim rozdziale, może zostać bezpośrednio zaadaptowana na potrzeby zadania rozważanego jako główne zagadnienie pracy. Celem było wyznaczenie dyskretnego układu liniowego, możliwie niskiego rzędu. Wymaganiem było jednak dodanie elementu identyfikującego, dlatego cała zaimplementowana metoda została wykorzystana do odtworzenia macierzy Hankela o zmniejszonym rzędzie i jak najbliższemu przebiegowi w stosunku do interpretacji oryginalnej.

Założono, że jesteśmy w stanie, podobnie do zagadnienia opisanego w Rozdziale 3.2 stworzyć odpowiednią macierz Hankela skorelowaną z parametrami wymuszenia i odpowiedzi badanego układu.

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-1} \end{bmatrix} \quad 4.2.1$$

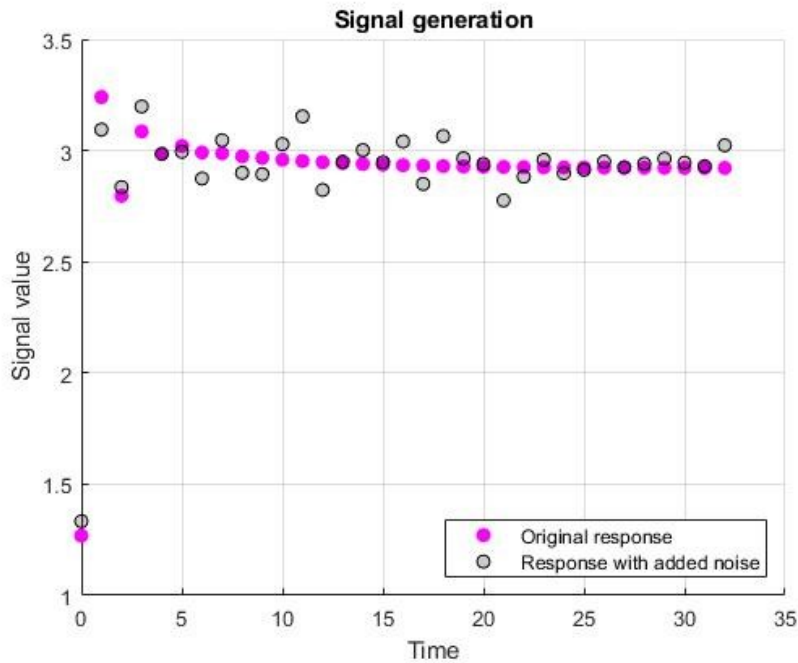
Istnieje taki liniowy układ o stopniu r , gdzie macierze stanu można zapisać jako $A \in R^{r \times r}$, $B \in R^{r \times 1}$ oraz $C \in R^{1 \times r}$ taki, że,

$$CA^{i-1}B = h_i \quad 4.2.2$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli spełniona jest zależność o minimalnym rzędzie macierzy Hankela.

$$r = \min_{h_{n+1}, \dots, h_{2n-1} \in R} \text{Rank } H_n \quad 4.2.3$$

Podobnie do zagadnienia rozważanego w poprzednim rozdziale algorytm wykonywany symulacyjnie ma na celu jak najlepsze odwzorowanie rzeczywistego zagadnienia badawczego, gdzie nie są znane parametry badanego układu oraz pomiary obarczone są odpowiednimi zakłóceniami pomiarowymi oraz zakłóceniami pracy. Pierwszym etapem było wylosowanie badanego układu i wprowadzenie do odpowiedzi symulowanej zaszumienia, kod tej operacji pokazano na Rys. 3.2.1. Na Rys. 4.2.1 przedstawiono sygnały pochodzące z badanego układu.



Rys. 4.2.1. Przebiegi zarejestrowane z badanego układu.

Kolejnym krokiem było ograniczenie stopnia minimalizacji. Ze względu na brak ograniczeń w oryginalnej funkcji minimalizacji, możliwym było, że układy macierzy Hankela będą zawsze sprowadzanie do kompletnie minimalnych realizacji. Zagadnienie wymagało jednak również odpowiedniego zbliżenia funkcji identyfikowanej do funkcji oryginalnej. W tym celu wykorzystano możliwość nałożenia ograniczenia na początku działania funkcji. Zastosowano dolną i górną granicę, która wpłynęła na wygląd zagadnienia w poniższy sposób (problem minimalizacji rzędu macierzy jest przedstawiany w sposób oryginalny, dla skrócenia zapisu, w algorytmie zastosowana jest rozwinięta forma bazująca na 4.1.6).

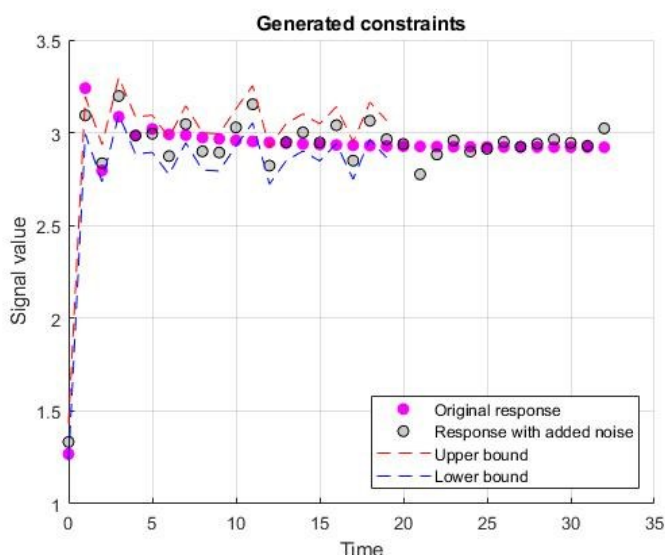
$$\begin{aligned} & \min \text{Rank}(X) \\ & s. t. \quad l_i \leq s_i \leq u_i, i = 1, \dots, n \\ & \quad h_{n+1}, \dots, h_{2n-1} \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad 4.2.4$$

gdzie $s_k = \sum_{i=1}^k h_i$. Zoptymalizowane parametry macierzy Hankela mają znajdować się wewnątrz „ręka” stworzonego z górnej i dolnej granicy. Takie działanie nie jest wymagane na całości przedziału, dlatego wykonywane jest tylko na pewnej części początkowych próbek. Wyniki pokazano w dalszej części tego rozdziału.

```
% creating boundaries for optimization function
UB = y_noise + upper_limit;
LB = y_noise - lower_limit;
```

Rys. 4.2.2. Implementacja „ręka” dolnego i górnego.

Podczas testowania jakości odtworzenia metody zauważono, że różne metody dodawania górnego i dolnego ograniczenia, nie wpływały bardzo na jakość odtworzenia. Dlatego w pracy zaimplementowano jedną formę budowania ograniczeń przez dodanie i odjęcie stałej wartości od sygnału zaszumionego. Różne wartości parametrów *lower_limit* i *upper_limit* zostały wykorzystane w trakcie testów, jednak w pozostałej części pracy korzystano ze stałej wartości 0.1. Odpowiadała ona dobrze ogólnym wartościom odpowiedzi układu i nie powoduje wprowadzania dodatkowych zakłóceń. Powyższa wartość dobrano eksperymentalnie, pierwsze wartości były dobierane jako 10% maksymalnej wartości sygnału badanego, ale po dalszych próbach stwierdzono, że dobrana ostatecznie wartość 0.1 działa najlepiej dla szerokiego wachlarza różnych testowanych układów. Odpowiedzi wraz z nałożonymi ograniczeniami pokazane są na Rys. 4.2.3. Ograniczenia stosowane są tylko przez pierwsze *n* próbek oryginalnych, w dalszej części optymalizacji układ podąża bez ograniczenia za funkcją minimalizującą.



Rys. 4.2.3. Przebiegi ograniczeń dolnych i górnych.

Kolejnym krokiem po dobraniu odpowiednich parametrów było zastosowanie wcześniej pokazanej heurystyki do stworzenia minimalnej macierzy Hankela, która zawarta jest w „rękawie” ograniczającym i ma jak najmniejszy rząd. Algorytm optymalizacyjny został ponownie zrealizowany przy pomocy pakietu CVX, co przedstawiono na Rys. 4.2.4.

```
% Heuristic
% preparing optimization data
n_size = 16;
n = n_size;
d = 1e-6;
Yk = eye(n_size);
Zk = eye(n_size);

% using heuristics to lower the matrix rank
N = 2;
for k = 1:N
    Q = inv(blkdiag(Yk,Zk) + d*eye(2*n));

    cvx_clear
    cvx_begin
        variable X(n,n) symmetric
        variable Y(n,n)
        variable Z(n,n)
        minimize ( trace(Q*[Y zeros(n,n); zeros(n,n) Z]) )
        subject to
            [Y X; X' Z] == hermitian_semidefinite( 2*n )
            LB(1:n) <= cumsum(X(:,1)) <= UB(1:n)
    cvx_end
    Yk = Y;
    Zk = Z;
end
```

Rys. 4.2.4. Kod wykonujący optymalizację przy użyciu omawianej heurystyki.

Zadanie przedstawione w tym rozdziale nie obejmuje stworzenia odpowiedniej realizacji w przestrzeni stanów. Ten proces omówiono w kolejnym rozdziale. Reprezentacja danych odtworzonych z oryginalnej macierzy Hankela odbywa się przez wyliczenie sumy kumulacyjnej z parametrów Markowa zgodnie z wyprowadzeniem przedstawionym w rozdziale 3.2. Zakładając, że cały proces wykonywany był dla wymuszenia o charakterze skoku jednostkowego, odpowiedź pochodząca z układu o zmniejszonym rzędzie może zostać przedstawiona jak poniżej.

$$\begin{aligned} y_0 &= h_0 \\ y_1 &= h_0 u_1 + h_1 u_0 \\ y_2 &= h_0 u_2 + h_1 u_1 + h_2 u_0 \\ &\vdots \\ y_k &= h_0 u_{k-1} + h_1 u_{k-2} + \dots + h_{k-1} u_0 \end{aligned} \quad 4.2.5$$

Z założenia o charakterze sygnału wymuszenia w opisywanym przypadku wynika, że

$$\begin{aligned} y_0 &= h_0 \\ y_1 &= h_0 + h_1 \\ y_2 &= h_0 + h_1 + h_2 \\ &\vdots \\ y_n &= h_0 + h_1 + \dots + h_{n-1} \end{aligned} \quad 4.2.6$$

Algorytm napisany do realizacji tego zagadnienia przedstawiono na Rys. 4.2.5.

```
h = [X(:,1); X(2:end,n)];
N = length(t);
y_final = cumsum(h(1:min(N,2*n-1)));
```

Rys. 4.2.5. Sygnał wyjściowy układu o zoptymalizowanym stopniu macierzy Hankela.

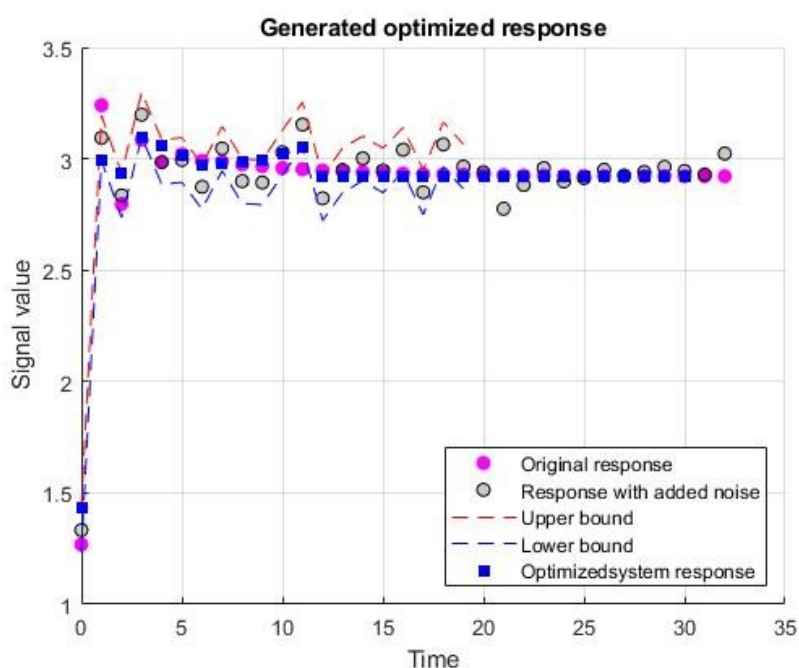
Jako wynik potraktowano dwa elementy: porównanie stopnia macierzy Hankela przed i po zrealizowaniu algorytmu oraz graficzna ocena jakości dopasowania charakterystyk. W tym zagadnieniu nie używano metryk statystycznych do porównania jakości odwzorowania, ponieważ wyniki takiego porównania byłyby niemiarodajne. Nie zastosowano tutaj żadnej metody, która zamieniałaby uzyskanych przebiegów na model w przestrzeni stanów.

Tabela 4.2.1. Wyniki optymalizacji przy pomocy użytej heurystyki.

Rząd macierzy oryginalnej	Rząd macierzy po optymalizacji
5	3

Przebieg zoptymalizowanego układu jest przedstawiony na Rys. 4.2.6. Odwzorowanie jest bardzo dobre, biorąc pod uwagę fakt zmniejszenia rzędu układu o dwa.

Problem doboru odpowiedniej wartości ograniczeń górnych i dolnych, który został wspomniany wcześniej w tym rozdziale, składał się z wielu iteracji i powtórzeń różnych ustawień parametru. Dobranie właściwej zależności sprowadza się do przeanalizowania zoptymalizowanego sygnału i wykonania kilku prób przy równoczesnych obserwacjach zachodzących zmian odtworzenia. Przebieg zbyt dokładnie podążający za zmianami zaszumienia sygnału może ostatecznie zwrócić rząd większy od oryginalnego, natomiast dobranie zbyt dużych wartości parametru może spowodować utratę ważnych parametrów systemu. Najbardziej charakterystyczne przypadki odtworzenia przedstawiono w Tabeli 4.2.2.



Rys. 4.2.6. Przebieg wynikowy zredukowanego układu.

Tabela 4.2.2. Odwzorowanie przebiegu dla różnych wartości ograniczeń „rękawa”.

Offset	Rank(H)	Wykres
0.01	7	
0.05	4	
0.1	3	

Offset	Rank(H)	Wykres
0.5	4	

4.3. Wnioski

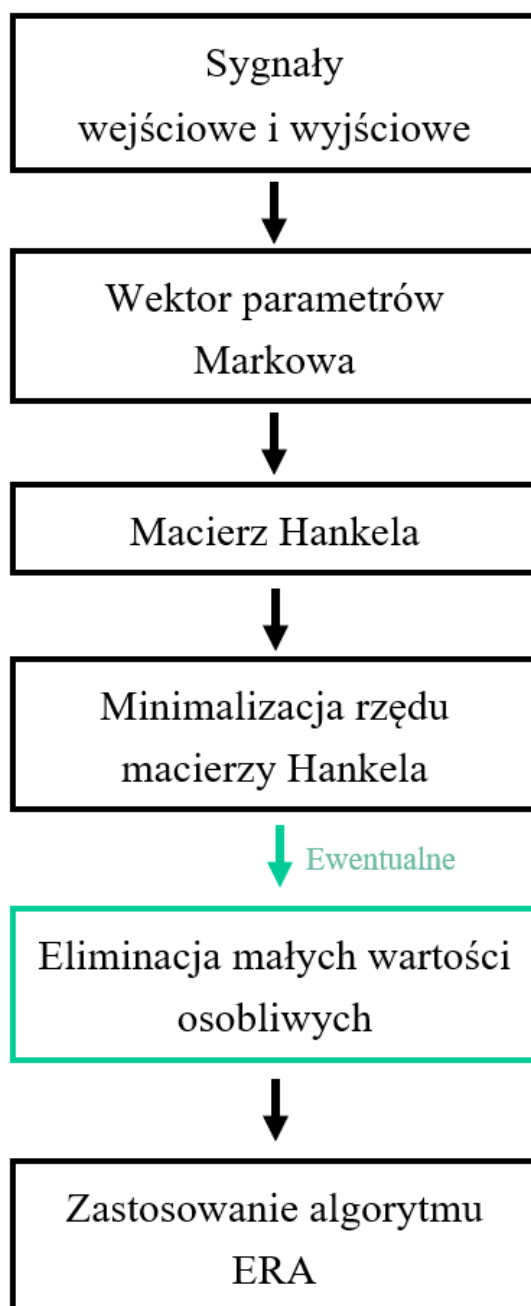
Metoda przedstawiona w powyższym rozdziale jest metodą uniwersalną o wielu możliwych zastosowaniach. Pozwala na ograniczenie rzędu dowolnego układu. Praca [3] na której oparte są rozważania przedstawione w rozdziale opisuje szerokie spektrum problemów i zastosowań rzeczywistych, w których ta heurystyka może być przydatna. Nie jest to jedyne rozwiązanie gwarantujące zawsze właściwe zmniejszenie rzędu macierzy. Wymaga wykorzystania metody eksperymentalnego doboru niektórych z parametrów algorytmu, co znacznie utrudnia automatyzację procesu identyfikacji i optymalizacji. Rozwiązaniem tego problemu mogłoby być dobranie innej metody wyszukiwania odpowiednich ograniczeń. Ograniczony zakres badań nie pozwolił na odpowiednie testy takich rozwiązań. Kolejną wadą takiego podejścia jest wpływ rozłożenie próbek zakłócenia na wynik redukcji. Jak widać na wykresach w tabeli przedstawionej powyżej, wprowadzony szum obniżył wartość rzeczywistą sygnału odpowiedzi dla $k = 2$, przez co początek całej charakterystyki, we wszystkich przypadkach został zmieniony względem oryginału. Rozwiązaniem takiego problemu może być wykonanie wielokrotnych identyfikacji i uśrednienie otrzymanych wyników. Alternatywnym rozwiązaniem mogłoby być użycie sieci neuronowej bądź odpowiedniego filtra do zmniejszenia wpływu zakłóceń.

Wyniki użycia heurystyki są zadowalające, stopień badanego układu rzeczywiście uległ zmniejszeniu przy niewielkim zniekształceniu charakterystyki odpowiedzi optymalizowanego układu. Ze względu na charakter systemów sterowania MPC, w których taka metoda znalazłaby najlepsze zastosowanie, najprawdopodobniej dzięki uproszczeniu modelu i zwiększeniu liczby aproksymacji horyzontu przez obniżenie złożoności obliczeniowej, byłoby możliwe osiągnięcie podobnych lub lepszych wyników sterowania. Przed zastosowaniem tej metody do generowania ciągów sterowania, wymagane jest połączenie tej heurystyki z dowolną metodą realizacji układu przy pomocy macierzy przestrzeni stanu.

5. Metoda hybrydowa

5.1. Opis metody

Podczas badania metod przedstawionych w poprzednich rozdziałach można zauważyć, że każda z nich ma swoje zalety i wady. Na Rys. 5.1.1 przedstawiono schemat nowo zaproponowanej metody, która łączy w sobie dwa oddzielnie działające mechanizmy.



Rys. 5.1.1. Schemat działania metody hybrydowej.

W pierwszym kroku podobnie do obu poprzednich metod wykonywana jest analiza układu przez podanie na wejście odpowiedniego wymuszenia i zarejestrowanie odpowiedzi działania układu. Następnie zgodnie z przekształceniami przedstawionymi w poprzednich rozdziałach należy zbudować odpowiadający zebranym danym wektor parametrów Markowa, zgodnie z równaniami przedstawionymi w 3.2.9. Wektor parametrów następnie przekształcany jest w macierze Hankela, co przedstawiono w równaniach 3.1.8 oraz 3.1.9.

Wyznaczoną pierwszą macierz Hankela należy następnie poddać minimalizacji wykonanej przy pomocy heurystyki przedstawionej w poprzednim rozdziale. Rozważana funkcja minimalizacji została jednak zmieniona w stosunku to tej zaproponowanej przez Stephena Boyda [3], w celu zmniejszenia wpływu wielkości „rękawa” ograniczającego na jakość odtworzenia, do funkcji minimalizacji dodano czynnik regularyzacyjny. Współczynnik ten zawiera normę macierzową różnicy macierzy Hankela układu zoptymalizowanego oraz macierzy Hankela układu oryginalnego. Takie działanie zostało wprowadzone w celu wyeliminowania potrzeby definicji „rękawa”, ale niestety wyniki badawcze pokazały, że warunek taki nie jest wystarczający do uzyskania zadowalających rezultatów.

$$\begin{aligned} \min \varepsilon_1 \text{Rank}(X) + \varepsilon_2 \|H - H_{noise}\| \\ \text{s. t. } l_i \leq s_i \leq u_i, i = 1, \dots, n \\ h_{n+1}, \dots, h_{2n-1} \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad 5.1.1$$

Powyższy wzór używa dodatkowo parametrów normalizujących.

$$\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon_2 \quad 5.1.2$$

Zależność między parametrami została zbudowana w taki sposób, aby działanie obu członów minimalizujących sumarycznie nigdy nie przekroczyło maksymalnego zadziałania pojedynczego członu. Wyniki badania z usuniętym „rękawem” ograniczającym zostaną pokazane w kolejnym rozdziale poświęconym implementacji całej metody. Wynikiem całej operacji jest „zoptymalizowana” macierz Hankela, która powinna jak najdokładniej odpowiadać sygnałowi zaszumionemu, przy równoczesnym maksymalnym obniżeniu rzędu badanego układu.

Następnym krokiem po uzyskaniu odpowiednio przekształconej reprezentacji macierzy Hankela jest wykonanie odpowiedniego algorytmu, który pozwoli na stworzenie realizacji przy pomocy macierzy przestrzeni stanu. W przypadku algorytmu prezentowanego w tym rozdziale do odtworzenia realizacji użyto metody ERA. Wynik może zostać dodatkowo zredukowany o stany słabo-sterowalne i słabo-obszernowalne przy pomocy przedstawionej wcześniej metody redukcji opartej na rozkładzie SVD.

Głównymi powodem połączenia obu algorytmów w jeden było założenie, że dzięki pierwszemu zminimalizowaniu macierzy Hankela stany mało wpływające na działanie układu zostaną zlikwidowane przez wykonanie realizacji. Działanie takie może pozytywnie wpłynąć na stopień podatności metody na zakłócenia oraz szumy działania układu. Dodatkowo dzięki takiemu zabiegowi możliwym jest dokładniejsze odwzorowanie układu, ponieważ dzięki realizacji przy pomocy heurystyki, wszystkie stany najbardziej znaczące powinny zostać przeniesione bliżej lewego górnego rogu macierzy. Tam powinna się znaleźć większość znaczącej w procesie identyfikacji informacji o układzie. Dzięki temu istnieje prawdopodobieństwo, że część stopni macierzy zostanie wyeliminowana jeszcze przed rozkładem SVD, natomiast pozostałe powinny być jak najbliższe zeru. Celem opisu implementacji i wniosków będzie pokazanie, że takie założenia są słuszne i mają duże znaczenie przy implementacji metody.

5.2. Implementacja metody

Podobnie jak we wszystkich poprzednich implementacjach, głównym założeniem, było przygotowanie algorytmu do działania na układzie rzeczywistym. Wszystkie rozważania układu odbywały się przy założeniach charakteru układu „czarnej skrzynki”. Po wylosowaniu badanego układu i obliczeniu jego odpowiedzi na wymuszenie o charakterze skoku jednostkowego, sygnał został wzbogacony o odpowiednie zaszumienie, analogicznie to procesu pokazanego na Rys. 3.2.1. Następnie identycznie jak na Rys. 4.2.2 określany był „rękaw” zabezpieczający dokładność odwzorowania. Wynik powyższych operacji jest identyczny jak ten przedstawiony na Rys. 4.2.3.

W celu zastosowania zależności opisanej w równaniu 5.1.1 wymagany było stworzenie macierzy Hankela odpowiadającej zaszumionemu sygnałowi oryginalnemu. Utworzenie tej macierzy było wymagane do późniejszego stworzenia odpowiedniego współczynnika. W tym przypadku skorzystano jednak z reprezentacji macierzowej zagadnienia budowy macierzy Hankela, zagadnienie można zapisać następująco.

$$\begin{bmatrix} y_0^T \\ y_1^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^T & 0 & \cdots & 0 \\ u_1^T & u_0^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1}^T & u_{n-2}^T & \cdots & u_0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0^T \\ h_1^T \\ \vdots \\ h_n^T \end{bmatrix} \quad 5.2.1$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{h} = F^+ y^T \quad 5.2.2$$

Taka relacja została zaimplementowana w sposób przedstawiony na Rys. 5.2.1.

```
% creating Hankel matrix with noise
% input in lower triangular matrix
u_t = tril(ones(length(y_oryg)));
H_noise = pinv(u_t).*y_noise';
H_noise = H_noise(1:16, 1:16);
```

Rys. 5.2.1. Implementacja macierzy Hankela zaszumionego sygnału.

Następnie zaimplementowana została zmodyfikowana heurystyka przedstawiona na Rys. 5.2.2. Bardzo ważnym aspektem wykonanej zmiany jest fakt, że funkcja nie zmniejsza już bezpośrednio rozmiarów macierzy Hankela, niestety, ale zmiana stopnia jest widoczna dopiero przy porównywaniu wyników jakości dopasowania w funkcji zmniejszania rzędu metodą SVD. Zależność ta zostanie dokładnie pokazana w rozdziale poświęconym podsumowaniu wyników. Nie jest to duży problem, najprawdopodobniej wynika on z numerycznego rozwiązania zagadnienia przez CVX. Porównując dwa rozwiązania, to pochodzące bezpośrednio z równań przedstawionych w poprzednim rozdziale oraz to w którym zastosowany jest współczynnik normalizujący z $\varepsilon_2 = 0$ okazuje się, że wyniki są bardzo zbliżone do siebie. Jedyną różnicą między macierzami wynikowymi jest fakt, że wszystkie zera zostały zastąpione przez wartości bardzo bliskie zeru (wartości z przedziału $10^{-10} - 10^{-16}$). Wnioskując z tego, oraz z baraku widocznych zmian w jakości odwzorowania, można wnioskować, że taka niepewność numeryczna może wynikać z solvera, który CVX dobrał do rozwiązania takiego dwuczłonowego równania. Takich wyników można się pozbyć na wiele sposobów, kilka z nich zostało opisanych w podrozdziale 3.3.

```

for k = 1:N
    Q = inv(blkdiag(Yk,Zk) + d*eye(2*n));
    cvx_clear
    cvx_begin
        variable H(n,n) symmetric
        variable Y(n,n)
        variable Z(n,n)
        minimize (epsilon_1 * trace(Q*[Y zeros(n,n); zeros(n,n) Z]) + epsilon_2 * norm(H-H_noise,'fro'))
        subject to
            [Y H; H' Z] == hermitian_semidefinite( 2*n )
            LB(1:n) <= cumsum(H(:,1)) <= UB(1:n)
    cvx_end
    Yk = Y;
    Zk = Z;
end

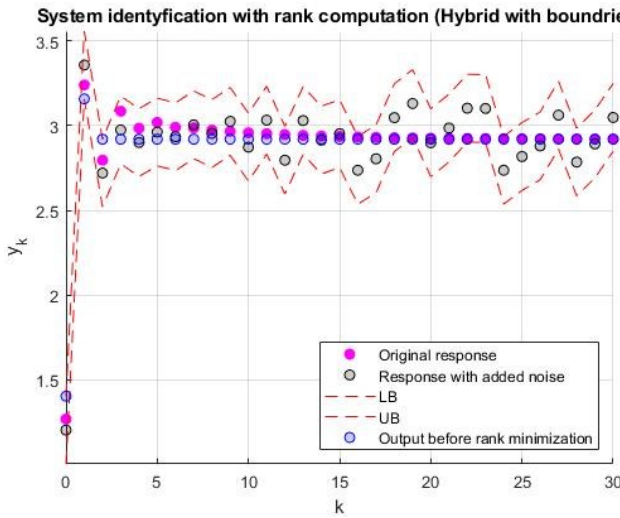
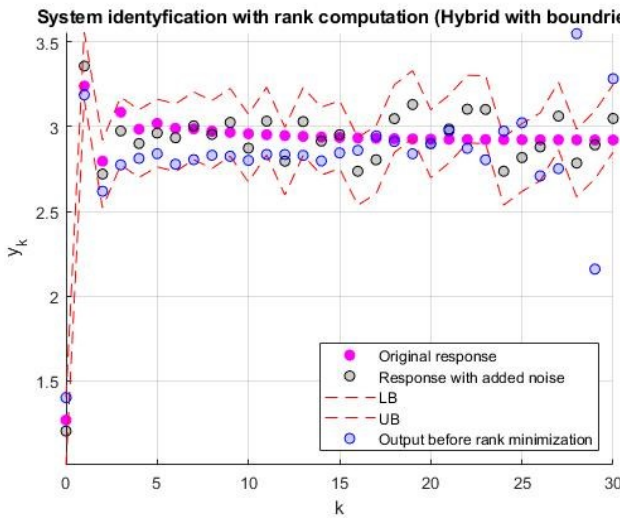
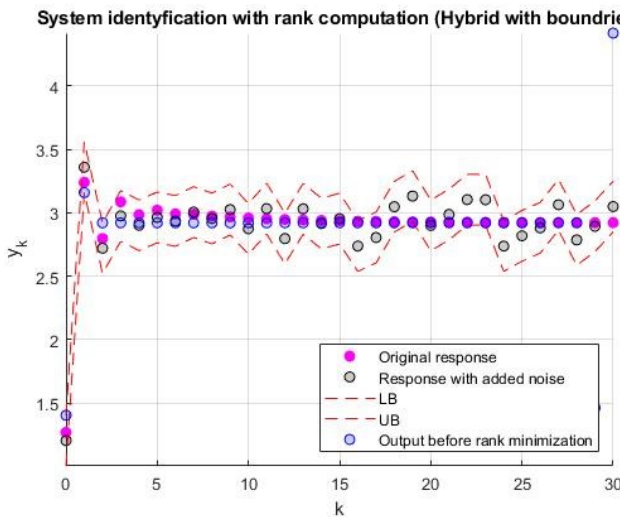
```

Rys. 5.2.2. Implementacja heurystyki z czynnikiem regularyzacyjnym.

Podobnie do poprzednich implementacji, rozwiązanie zagadnienia optymalizacji zostało wykonane przy pomocy pakietu CVX [4]. Wyniki tej optymalizacji przedstawione są w tabeli poniżej. Warto zauważyć, że przypadku, w którym parametr $\varepsilon_2 = 0$, istnieje równowaga między układem badanym przy pomocy samej heurystyki, a algorytmem hybrydowym.

Tabela 5.2.1. Jakość odwzorowania uzależniona od parametru ε .

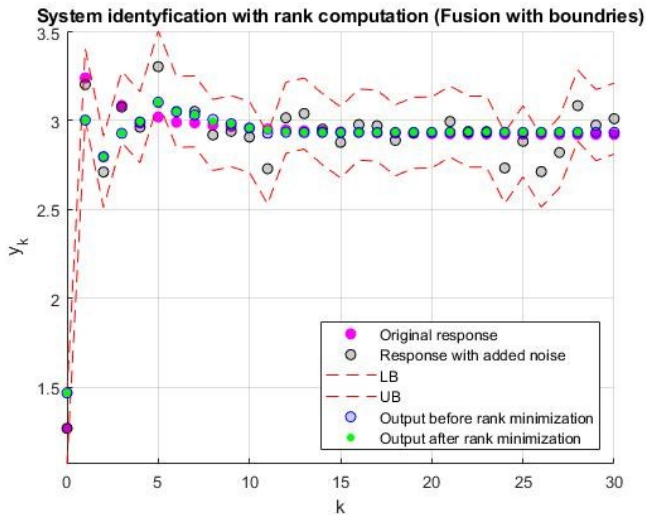
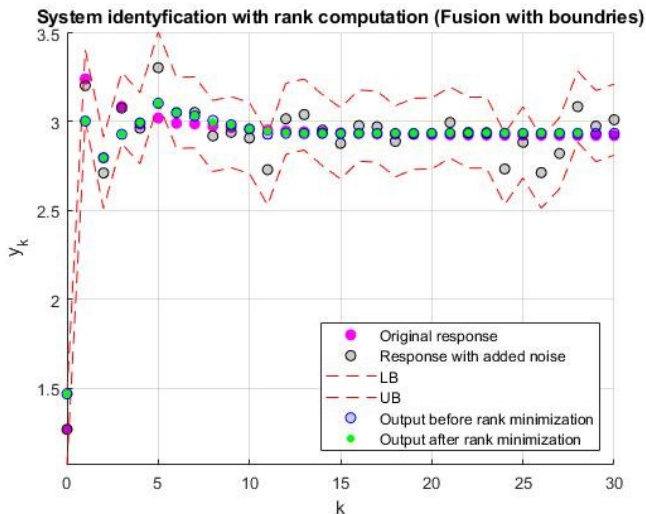
$\varepsilon_2 = 0$ $MAE = 0.0416$ $MSE = 0.0051$ $RMSE = 0.0138$	
$\varepsilon_2 = 0.4$ $MAE = 0.0411$ $MSE = 0.005$ $RMSE = 0.0138$	

$\varepsilon_2 = 0.8$ $MAE = 0.0348$ $MSE = 0.0047$ $RMSE = 0.0055$	<p>System identification with rank computation (Hybrid with boundaries)</p> 
$\varepsilon_2 = 0.9$ $MAE = Nan$ $MSE = Nan$ $RMSE = Nan$	<p>System identification with rank computation (Hybrid with boundaries)</p> 
$\varepsilon_2 = 1$ $MAE = Nan$ $MSE = Nan$ $RMSE = Nan$	<p>System identification with rank computation (Hybrid with boundaries)</p> 

Wraz ze wzrostem współczynnika epsilon można zauważyć wyraźny, prawie dwukrotny spadek normy RMSE, z czego można wnioskować, że najbardziej oddalone dotąd punkty przebiegu znacznie przybliżyły się do oczekiwanych wartości oryginalnego niezaszumionego układu. Pozostałe normy również zauważalnie się zmniejszyły. Dodatkowo można zaobserwować znaczne poprawienie odwzorowania początkowej części przebiegu, gdzie widać mocne gasnące oscylacje. Równocześnie należy zauważyć, że w ostatnich dwóch przypadkach składnik regularizacyjny bardzo źle wpłynął na ogólne działanie metody.

Po prawidłowym przeprowadzeniu redukcji rzędu macierzy Hankela można wyznaczyć realizację rozpatrywanego układu. Zgodnie ze wzorami i procedurą przedstawionymi w rozdziale 3 przeprowadzono procedurę ERA. Po zakończeniu procedury można pozbyć się pozostałych niepotrzebnych wartości osobliwych macierzy korzystając z rozkładu SVD. W tabeli poniżej przedstawione zostaną wyniki jakości odtworzenia realizacji układu w zależności od pozostawionego rzędu. Wszystkie testy zostały wykonane dla identycznych wartości jak te przedstawione w Tabela 3.2.1 oraz Tabela 3.2.2. Dzięki temu możliwe będzie bezpośrednie porównanie tych metod na powyższym przykładzie. Równocześnie parametr $\varepsilon_2 = 0.8$ został dobrany w taki sposób by reprezentować najlepsze możliwe odwzorowanie.

Tabela 5.2.2. Graficzne porównanie jakości odwzorowania dla metody hybrydowej.

$rank(\tilde{A}) = 10$	 <p>System identification with rank computation (Fusion with boundaries)</p>
$rank(\tilde{A}) = 5$	 <p>System identification with rank computation (Fusion with boundaries)</p>

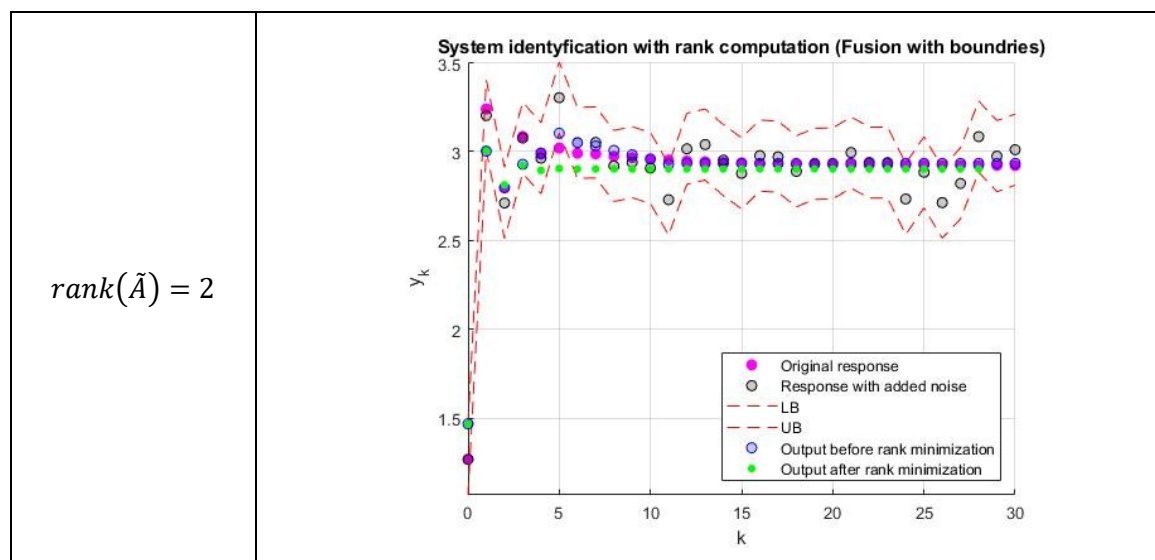


Tabela 5.2.3. Metryczne porównanie jakości odwzorowania dla metody hybrydowej.

	$rank(\tilde{A}) = 10$	$rank(\tilde{A}) = 5$	$rank(\tilde{A}) = 2$
MAE	0.0348	0.0348	0.0592
MSE	0.0047	0.0047	0.0064
RMSE	0.0038	0.0055	0.0444

5.3. Wyniki i wnioski

Zaimplementowana metoda działa poprawnie i zgodnie z założeniami wykonanymi przed rozpoczęciem badań. Zmiany zostały wprowadzone w celu poprawienia problemów występujących w metodach przedstawionych w poprzednich rozdziałach. Dzięki połączeniu działania obu metod możliwym było uzyskanie modelu znacznie mniej podatnego na zakłócenia pracy układu. Odpowiednie przygotowanie danych przed wykonaniem realizacji w przestrzeni stanów pozwoliło na znacznie lepsze odtworzenie właściwego zestawu macierzy. Równocześnie dzięki wykorzystaniu wymuszenia o charakterze skoku jednostkowego algorytm został dużo lepiej przygotowany do zastosowania w rzeczywistych aplikacjach identyfikacji.

Jedną z wad przedstawionych w tym rozwiązaniu jest niepewność numeryczna która powoduje niepełne zerowanie się mało znaczących rzędów macierzy. Solver używany w zagadnieniu heurystyki log-det zwraca zdecydowanie dokładniejsze wyniki, jednak usunięcie odpowiednich rzędów przy pomocy metody SVD bezpośrednio dowodzi jakości działania funkcji minimalizującej rozmiar macierzy.

Wracając do wyników przedstawionych w rozdziale 3 przy okazji analizy działania i jakości odwzorowania widać duże różnice, zarówno metryczne jak i graficzne na rzecz działania metody połączonej. Zdecydowanie zmniejszył się wpływ zaszumienia układu na finalny wynik, wynika to najprawdopodobniej z wcześniejszego zoptymalizowania rzędu macierzy. Elementy reprezentujące zaszumienie znajdują się najczęściej w słabo-sterowalnej części macierzy Hankela, dlatego zostały uproszczone w trakcie odtwarzania macierzy Hankela. Widać jednak równocześnie, że ucięcie zbyt wielu rzędów przy pomocy rozkładu SVD powoduje dużo większy wpływ na finalny wygląd zrealizowanego układu. W trakcie procesu optymalizacji ważne stany zostały przeniesione jak najbliżej lewego, górnego rogu, dlatego im bardziej zbliżamy się do sąsiedztwa tego elementu macierzy, tym ważniejsze elementy usuwamy. Takie działanie skutkuje znacznym pogorszeniem działania od pewnego momentu, a niezauważalnymi zmianami wcześniej.

6. Porównanie czynników bazowych w metodach

6.1. Metodyka wykonywania pomiarów

Porównanie działania metod zostało wykonane przez zastosowanie algorytmów z odpowiednimi warunkami początkowymi oraz parametrami dla wylosowanych modeli, procedura losowania została opisana w rozdziale 0. Wynikiem testu były trzy wektory opowiadające kolejno ciągom odpowiedzi: układu oryginalnego, układu zidentyfikowanego metodą ERA oraz układu zidentyfikowanego metodą hybrydową. Odpowiedź układu oryginalnego $y_{oryginalny} \in \mathbf{R}^n$ to taka wygenerowana bezpośrednio na układzie wylosowanym, przed dodaniem zaszumienia, czy wykonaniu jakichkolwiek transformacji. Dwa pozostałe wektory y_{era} oraz $y_{hybrydowy}$ mają taką samą długość co wektor oryginalny. Dzięki tej właściwości można użyć metryk przedstawionych w rozdziale 2.1 do określenia jakości odwzorowania.

$$y_{oryginalne} = \begin{bmatrix} y_{o1} \\ y_{o2} \\ \vdots \\ y_{on} \end{bmatrix}, y_{era} = \begin{bmatrix} y_{e1} \\ y_{e2} \\ \vdots \\ y_{en} \end{bmatrix} \text{ i } y_{hybrydowy} = \begin{bmatrix} y_{h1} \\ y_{h2} \\ \vdots \\ y_{hn} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \quad 6.1.1$$

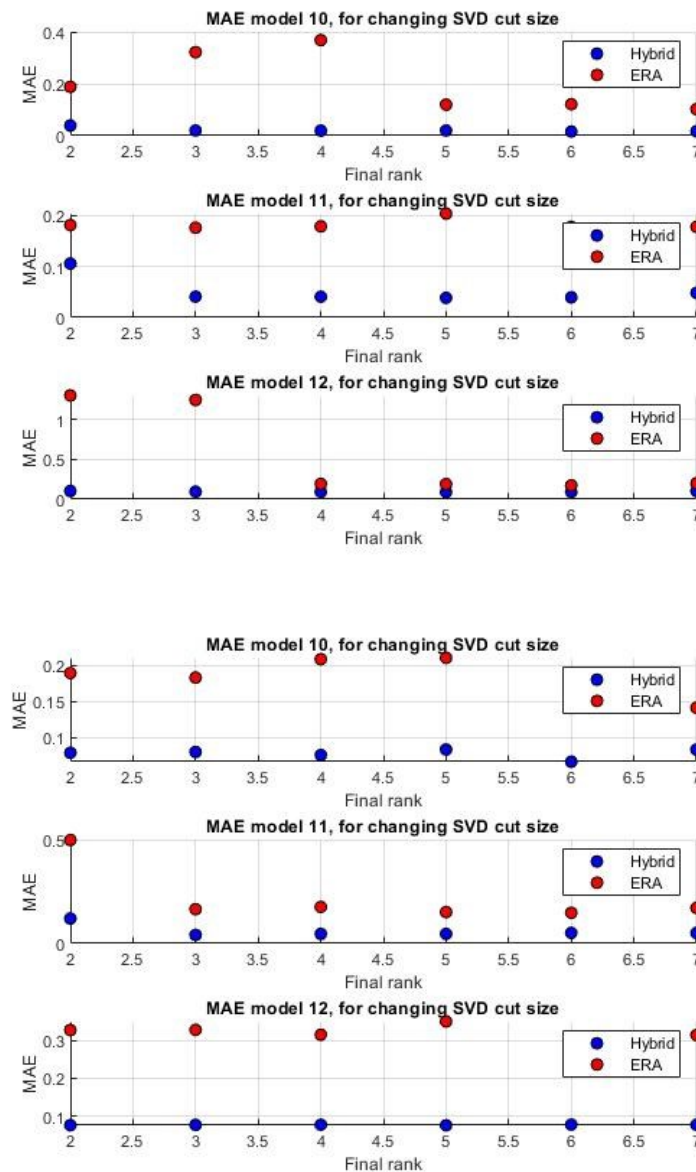
Dzięki takim wynikom można w łatwy sposób porównać ze sobą działanie metody hybrydowej oraz ERA. Wykorzystując wspomniane wcześniej metryki dla zmieniających się czynników bazowych obliczana jest wartość odległości wektorów zidentyfikowanej odpowiedzi od wektora odpowiedzi oryginalnej. W dalszej części pracy zawsze stosowane jest wymuszenie skokowe, z pominięciem przypadków, gdzie wyraźnie nie zaznaczono użycia wymuszenia o innym charakterze.

Uzyskane w ten sposób wyniki odległości zapisywane są na oddzielnych wykresach dla każdego z wylosowanych modeli. Na osi pionowej takiego zestawienia zawsze znajduje się wartość metryki odległości, im mniejsza wartość tym lepsze jest dopasowanie odpowiedzi układu zidentyfikowanego względem układu oryginalnego. Oś pozioma zawiera natomiast informacje o aktualnie badanym parametrze bazowym. Poniższy rozdział przedstawi porównanie wpływu kilku różnych czynników bazowych na jakość odwzorowania. Rozdział 6.2 zostanie poświęcony porównaniu jakości odwzorowania dla różnych stopni redukcji macierzy przez procedurę SVD. Metoda hybrydowa powinna charakteryzować się znacznie lepszym stopniem odwzorowania, ze względu na wcześniejsze przeniesienie wartości znaczących bliżej górnego lewego rogu macierzy Hankela. Dzięki takiej operacji wstępnego przygotowania zaszumienie powinno mieć równocześnie znacznie mniejszy wpływ na wynik identyfikacji. Następnie w rozdziale 6.3 przedstawiony zostanie wpływ parametru optymalizacji ε na działanie metody Hybrydowej. Algorytm ERA nie będzie zmieniał swojego wyniku w zależności od zmian parametru normalizującego, dlatego wyniku uzyskane przy pomocy tego algorytmu można traktować jako wartości referencyjne. Takie porównanie metryk pozwoli na określenie najlepszej wartości parametru. Ostatni z rozdziałów 6.4 jest poświęcony wpływowi zaszumienia na jakość odwzorowania sygnału oryginalnego. Często układy charakteryzują się podobnymi charakterami zaszumienia, ale oczywistym jest ich losowe rozłożenie w czasie, dlatego ten rozdział został poświęcony zaprezentowaniu odporności algorytmów identyfikacji na poziom oraz rozkład wprowadzonego zaszumienia.

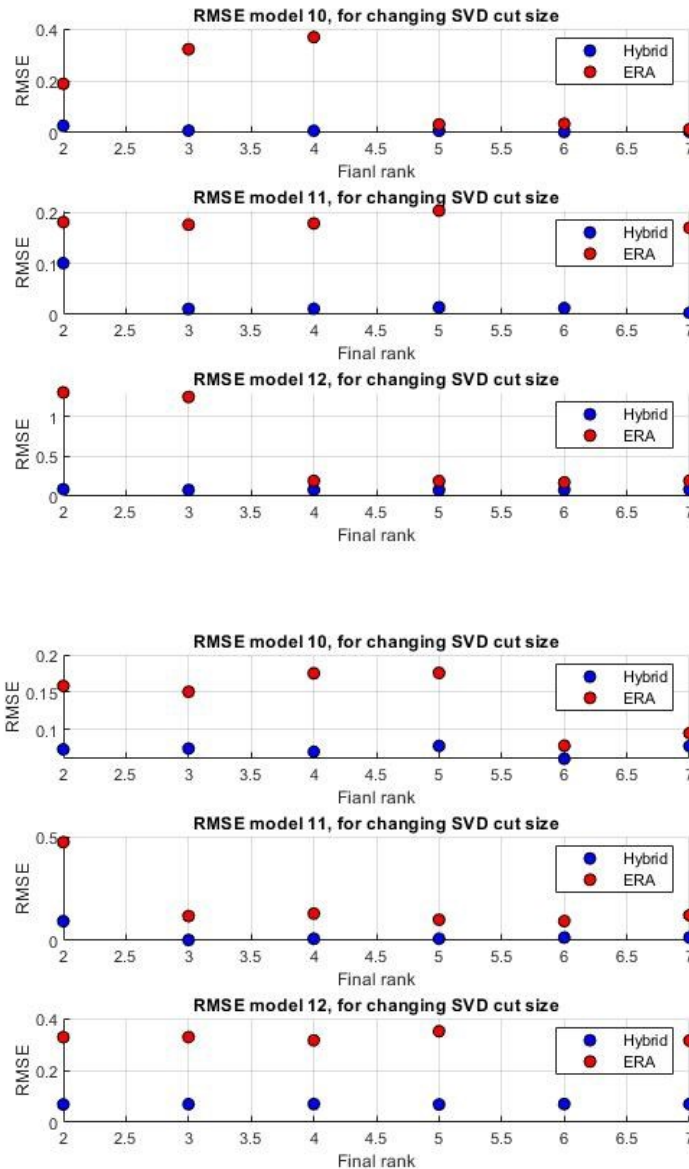
6.2. Stopień zredukowania rzędu macierzy

Jednym z parametrów wpływających bardzo mocno na jakość odwzorowania i działania macierzy jest końcowe wycięcie mało znaczących rzędów. Zoptymalizowane i zredukowane macierze przestrzeni stanu służą następnie do odtworzenia działania układu. Na symulowany system zadawane jest ponownie identyczne wymuszenie jak to w przypadku badania parametrów układu. Na bazie otrzymanych informacji tworzone są reprezentacje graficzne przedstawione w dalszej części tego rozdziału.

Pierwszym najważniejszym porównywanym parametrem jest błąd działania metody w funkcji usuniętych rzędów. Wyniki zaprezentowane na Rys. 6.2.1 oraz Rys. 6.2.2 zostały wykonane dla sześciu różnych układów. Trzy z tych układów to były układy czwartego rzędu, a pozostałe piątego rzędu. Analiza przedstawia działanie metod przy użyciu dwóch metryk MAE i RMSE. MAE ma identyfikować ogólne dopasowanie całego przebiegu, a RMSE ma na celu reprezentację dużych różnic występujących w przebiegu funkcji odtworzonej w stosunku do oryginalnej.



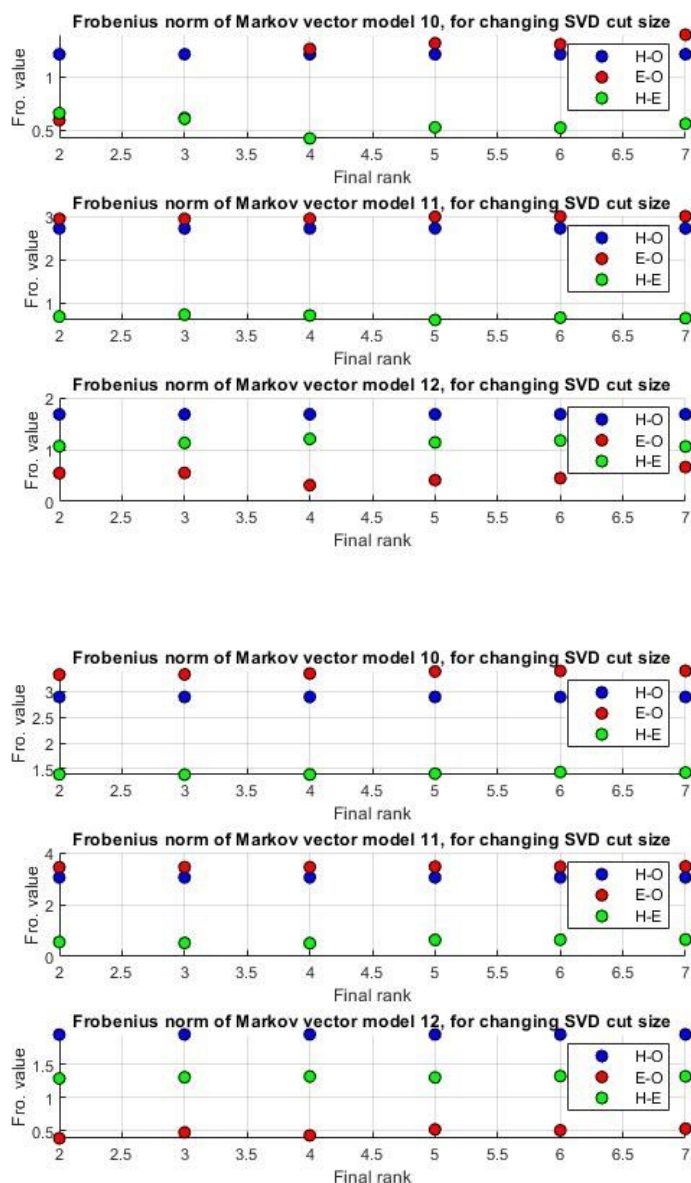
Rys. 6.2.1. Metryki RMSE dla kolejnych wycięć macierzy przy pomocy procedury SVD. Układ 4 rzędu (góra) oraz 5 rzędu (dół).



Rys. 6.2.2. Metryki RMSE dla kolejnych wycięć macierzy przy pomocy procedury SVD. Układ 4 rzędu (góra) oraz 5 rzędu (dół).

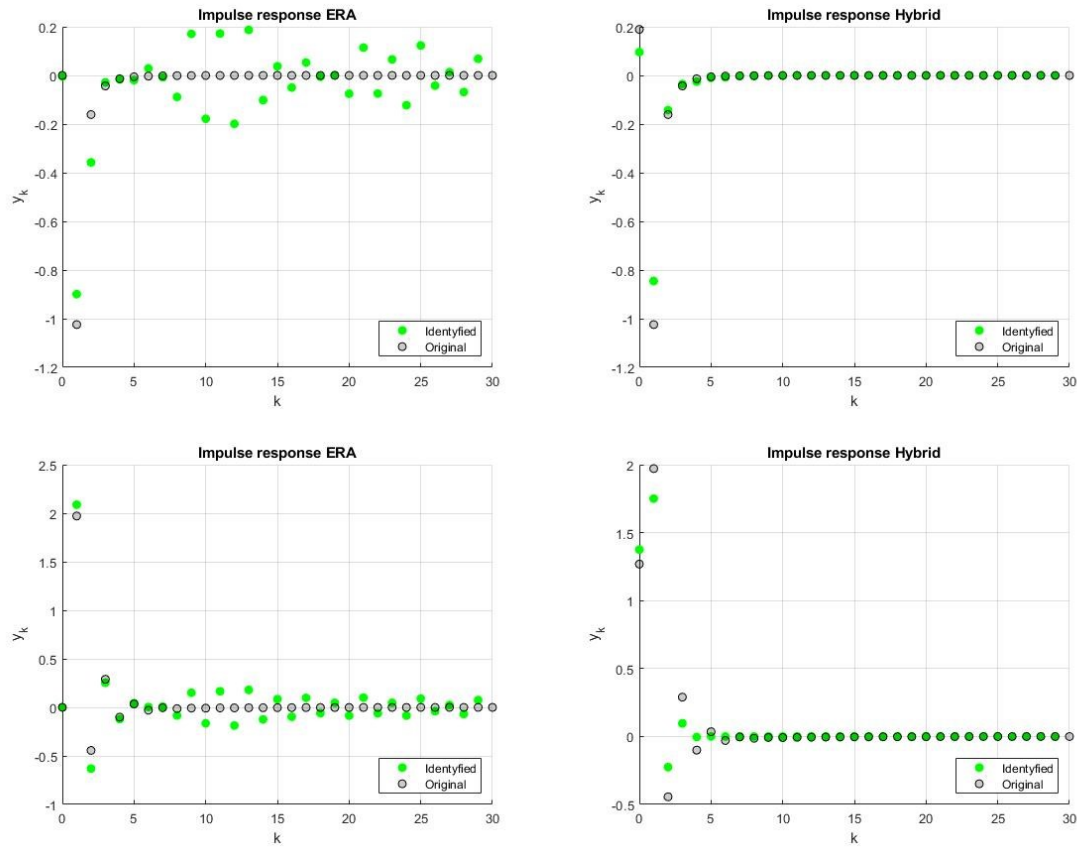
Łatwo można zaobserwować zachowanie obu funkcji i wyznaczyć podstawowe zasady zachowania obu typów identyfikacji. Zarówno w przypadku obiektu czwartego i piątego rzędu widać, że jeśli usunięte zostaną zbyt dalekie rzędy to następuje pogorszenie działania funkcji. Równocześnie widać, że działanie funkcji hybrydowej jest znacznie lepsze niż działanie metody ERA, dla wszystkich przypadków uzyskano znacząco lepsze wyniki, nawet dla dużej redukcji rzędu. Takie rezultaty wynikają najprawdopodobniej z kolejności wykonywania operacji, w metodzie hybrydowej najpierw wykonywana jest optymalizacja a dopiero później odtworzenie realizacji. Proces wstępnej optymalizacji przy użyciu heurystyki najprawdopodobniej pozwolił na wyeliminowanie stanów wynikających głównie z obecności szumów. Pozostałe wartości to te wynikające bezpośrednio z dynamiki układu, dlatego istnieje możliwość uzyskania bardzo dobrej reprezentacji nawet dla sytuacji, w której usunięto więcej stanów niż oryginalna wartość. Operacja redukcji SVD jest jednak potrzebna, bez niej niemożliwym byłoby całkowite zminimalizowanie rzędu, niestety największe zakłócenia i szумы nadal pozostają widoczne w przebiegach o zbyt

dużym rzędzie, dlatego w niektórych z przedstawionych powyżej wykresów można zauważyć, że po początkowym wzroście jakości dalej następuje jej ponowne obniżenie.



Rys. 6.2.3. Norma Frobeniusa układów 4 rzędu (góra) i 5 rzędu (dół). H-O (Hybrydowa – Oryginalny), E-O (ERA – Oryginalny) oraz H-E (Hybrydowa – ERA).

W kolejnym kroku porównano odpowiedź zidentyfikowanego sygnału na inny sygnał wymuszenia, w tym przypadku użyto sygnału o charakterze impulsowym. Zebrane wyniki przedstawiono porównawczo na Rys. 6.2.3. Wyraźnie widać, że w większości wyniki są przewidywalne i zgodne z poprzednimi badaniami, jednak w obu przypadkach dla układu 12 widać pewną zmianę w ułożeniu jakości odwzorowania. Dane użyte do narysowania obu przebiegów zostały przedstawione na Rys. 6.2.4. Niestety ciężko stwierdzić czemu uzyskano takie wyniki w tych dwóch niezwykłych przypadkach.

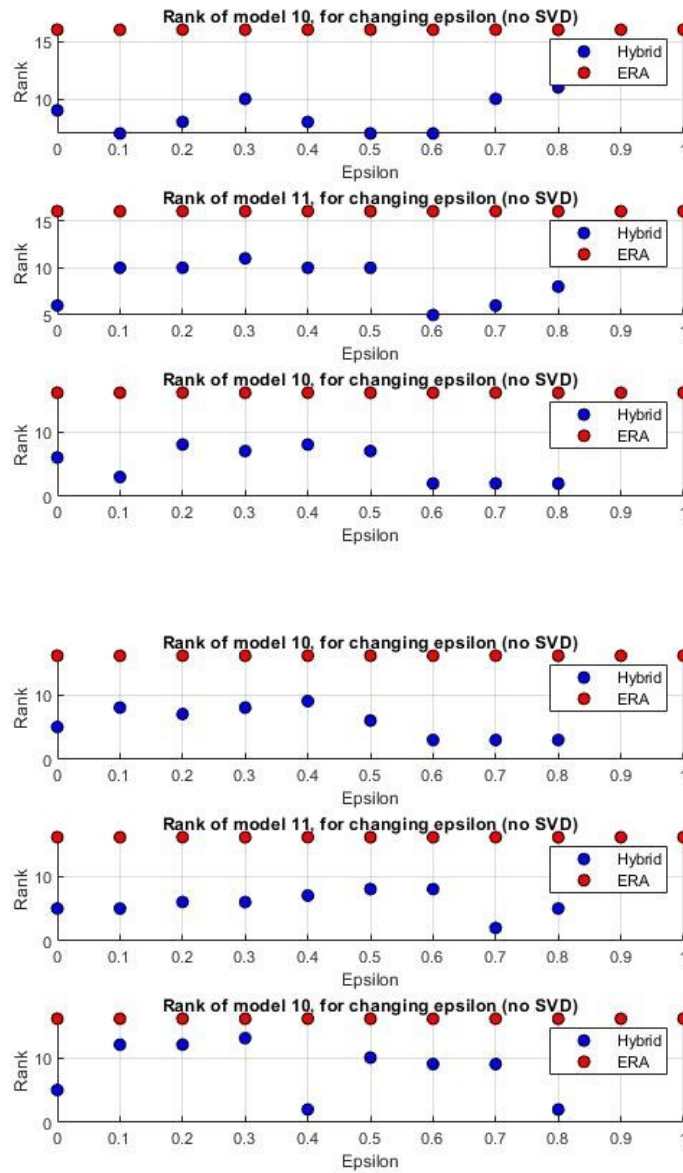


Rys. 6.2.4. Przebieg odpowiedzi impulsowej, ERA – 4 rząd (góra, lewo), Hybrydowa – 4 rząd (góra, prawo), ERA – 5 rząd (dół, lewo) oraz Hybrydowa – 5 rząd (dół, prawo).

Zmiana typu wymuszenia jest niezwykle ważnym aspektem analizy jakości. Przy rzeczywistym użyciu algorytmu zmiany sygnału wymuszenia będą ciągłe, dlatego bardzo obiecująca jest wysoka jakość odtworzenia dla sygnału impulsowego. Równocześnie można łatwo zauważyć ponownie wysoki wpływ zaszumienia na wyniki uzyskane przy pomocy metody ERA, wpływ ten jest znacznie ograniczony w przypadku metody hybrydowej.

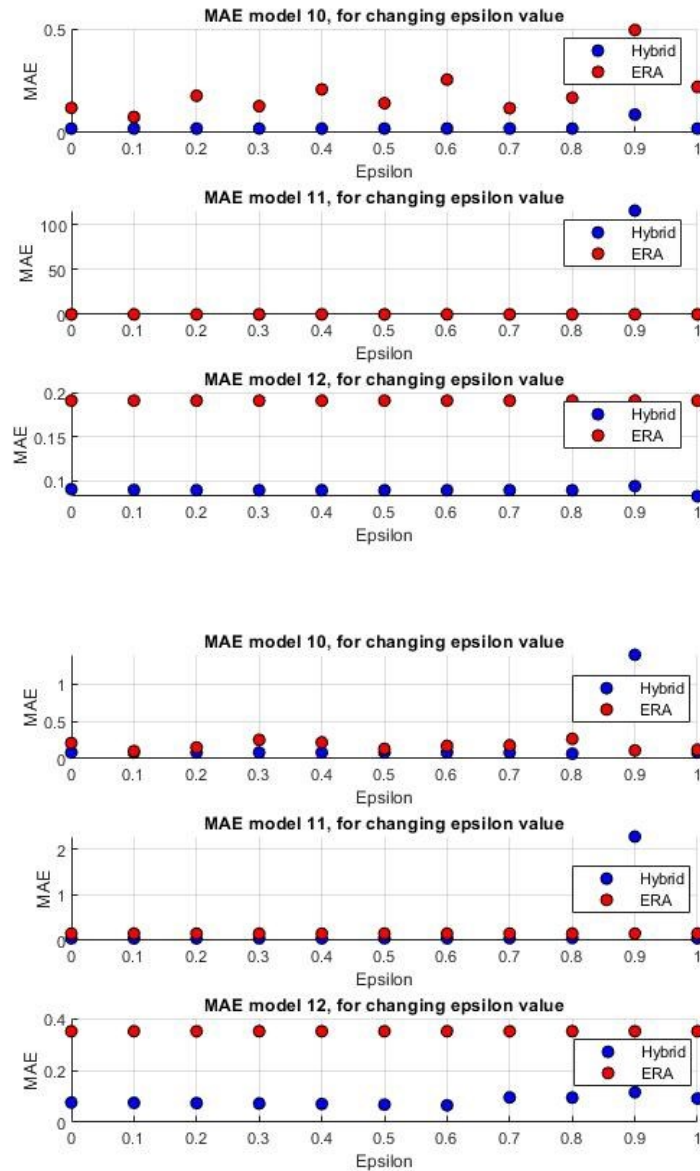
6.3. Wartość parametru optymalizacyjnego

Głównym celem wprowadzenia parametru normalizującego przedstawionego w równaniu 5.1.1 była próba uzyskanie przebiegów bardziej odpowiadających oryginalnemu przebiegowi, bez potrzeby zawężania zadeklarowanego „rękawa”. Taka operacja powinna pozwolić na zmniejszenie rzędu zidentyfikowanego układu. Realizacja nie będzie sztywno zmuszona do podążania za zaszumionym układem, ale równocześnie nie powinny się zdarzyć duże odstępstwa od założonych wartości. Zależność rzędu zidentyfikowanego systemu w funkcji ε_2 pokazano na Rys. 6.3.1.



Rys. 6.3.1. Rząd zidentyfikowanego układu, przed wykonaniem operacji wycięcia SVD. Oryginalny stopień układu to, 4 (góra) oraz 5 (dół).

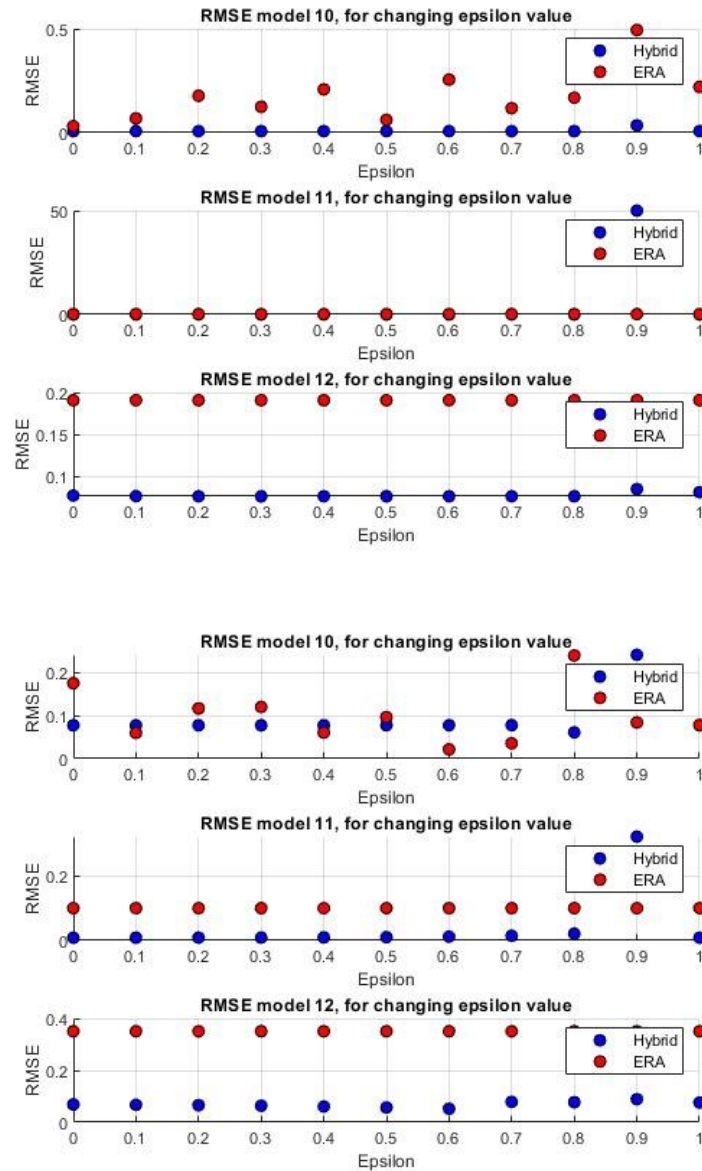
Wszystkie układy wykazują podobne zachowanie, wraz ze zwiększeniem udziału elementu normalizującego w wyniku optymalizacji można zauważyć spadek stopnia identyfikowanego układu. Działanie takie jest jednak pożądane tylko w przypadku, w którym zmniejszenie rzędu macierzy nie ma negatywnego wpływu na jakość odtworzenia. Zależności jakości odtworzenia zostały pokazane na Rys. 6.3.2 oraz Rys. 6.3.3.



Rys. 6.3.2. Przebiegi metryki MAE w funkcji ε_2 , układy 4 rzędu (góra) oraz 5 rzędu (dół).

Z przebiegów zaprezentowanych powyżej, można odczytać, że całość charakterystyki niezależnie od wartości parametru regularyzacji jest odtwarzana z podobną jakością. Najprawdopodobniej fakt ten wynika ze zmiennego rzędu macierzy. Układ utrzymuje dobrą jakość odtworzenia kosztem zwiększenia rzędu zidentyfikowanego systemu. Priorytetem powinno być dobranie odpowiedniej wartości parametru do realizacji minimalnej rzędu macierzy.

Ciekawe zachowanie układu pojawia się dla wartości ε_2 równej 0.9, dla tego przypadku we wszystkich układach zachodził problem z poprawnym odtworzeniem działania układu. Początkowym podejrzeniem było złe dobranie punktu startowego procedury optymalizacyjnej. Próbuąc rozwiązać ten problem jako punkt startowy przyjęto wynik metody ERA, podejście to jednak nie przyniosło oczekiwanej poprawy. Istnieje możliwość, że jest to błąd numeryczny, wynikający z takiego właśnie doboru parametrów. Jego wyeliminowanie wymagałoby jednak dokładnego przebadania tylko tych przypadków, w których taki problem występował, co wykraczało poza przyjęty zakres pracy dyplomowej.

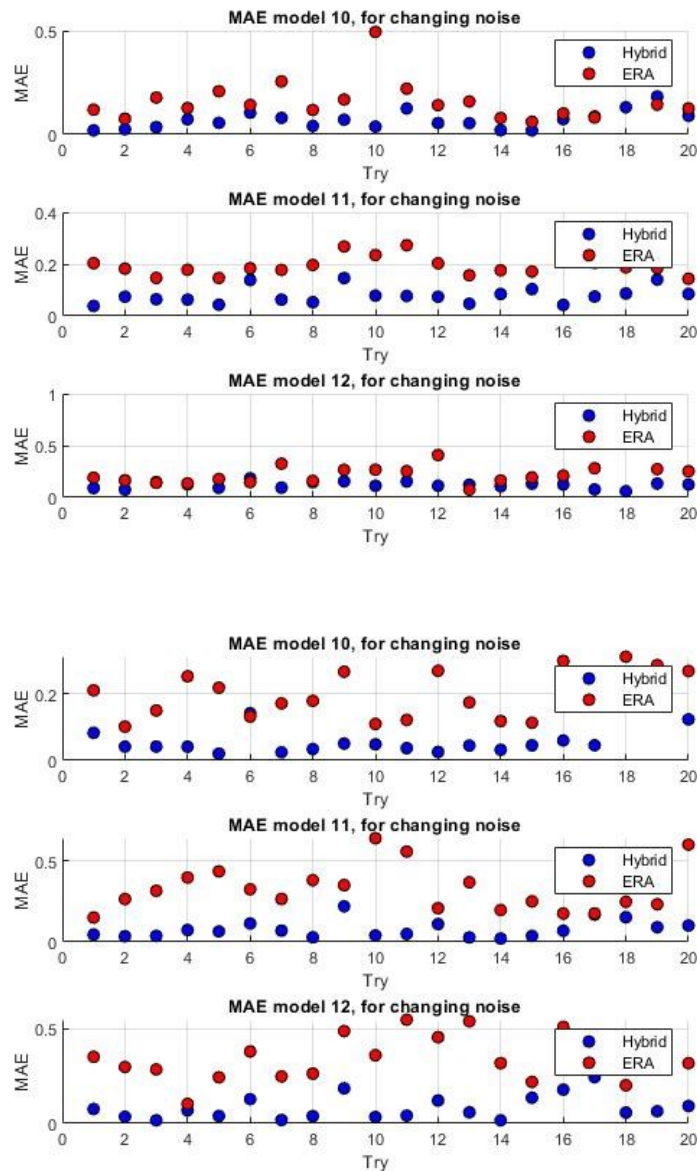


Rys. 6.3.3. Przebiegi metryki RMSE w funkcji ε_2 , układy 4 rzędu (góra) oraz 5 rzędu (dół).

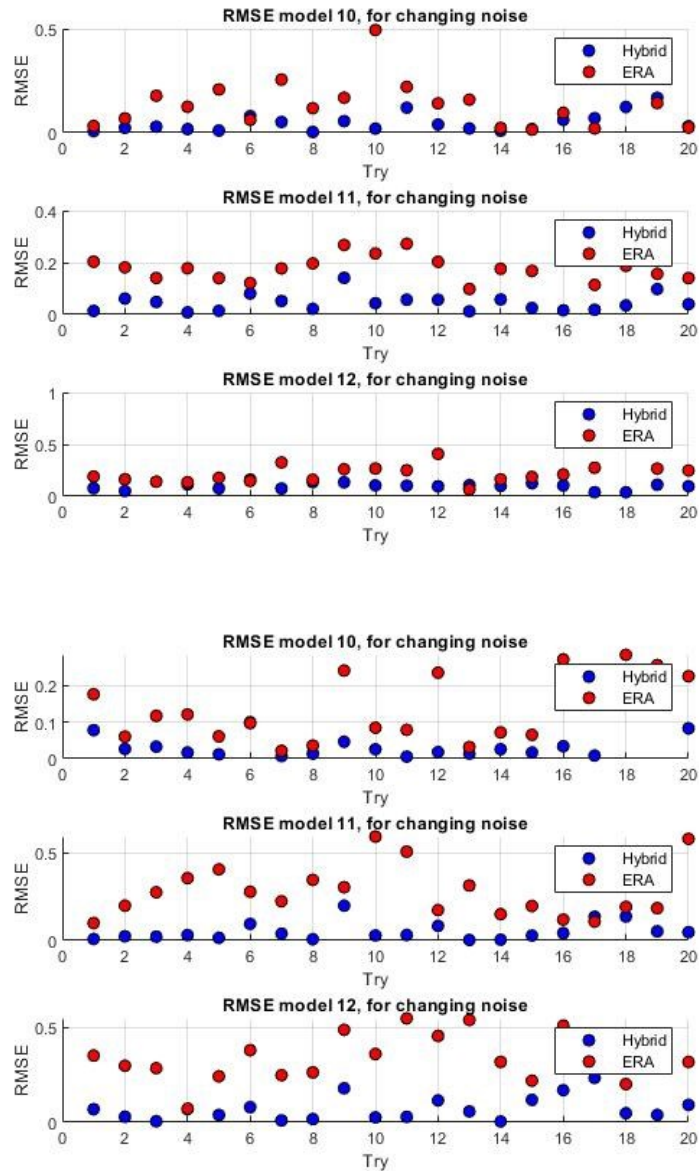
Porównanie metod przy pomocy metryki RMSE pozwala na wyciągnięcie kolejnego ciekawego wniosku. Różnica między metodą ERA, a hybrydową w tym przypadku ponownie wskazuje na duży udział daleko odsuniętych próbek w danych pochodzących z metody ERA. Taki wygląd funkcji wynika z dużego wpływu zaszumienia.

6.4. Zaszumienie

Wszystkie dane poddawane były procesowi zaszumienia przed przetestowaniem procedury identyfikacji. Wpływ tego zaszumienia był niezwykle widoczny na jakość odwzorowania w przypadku użycia tylko metody opartej o procedurę ERA. Zgodnie z wcześniejszymi wynikami metoda łączona jest znacznie bardziej odporna na zakłócenia, co powinno być równoważne mniejszej podatności na zmiany charakteru tego zakłócenia. W celu sprawdzenia jakości odwzorowania pomimo zmiennego charakteru zakłóceń wykonano doświadczenia podobne do tych wykonanych w poprzednim rozdziale. Dla stałych wartości wszystkich innych parametrów wykonano serie eksperymentów identyfikacyjnych przy zmiennych warunkach zaszumienia oraz przy zmiennych wartościach maksymalnych zaszumienia. Wyniki zmiany przebiegu zaszumienia przedstawiono na Rys. 6.4.1 oraz Rys. 6.4.2.

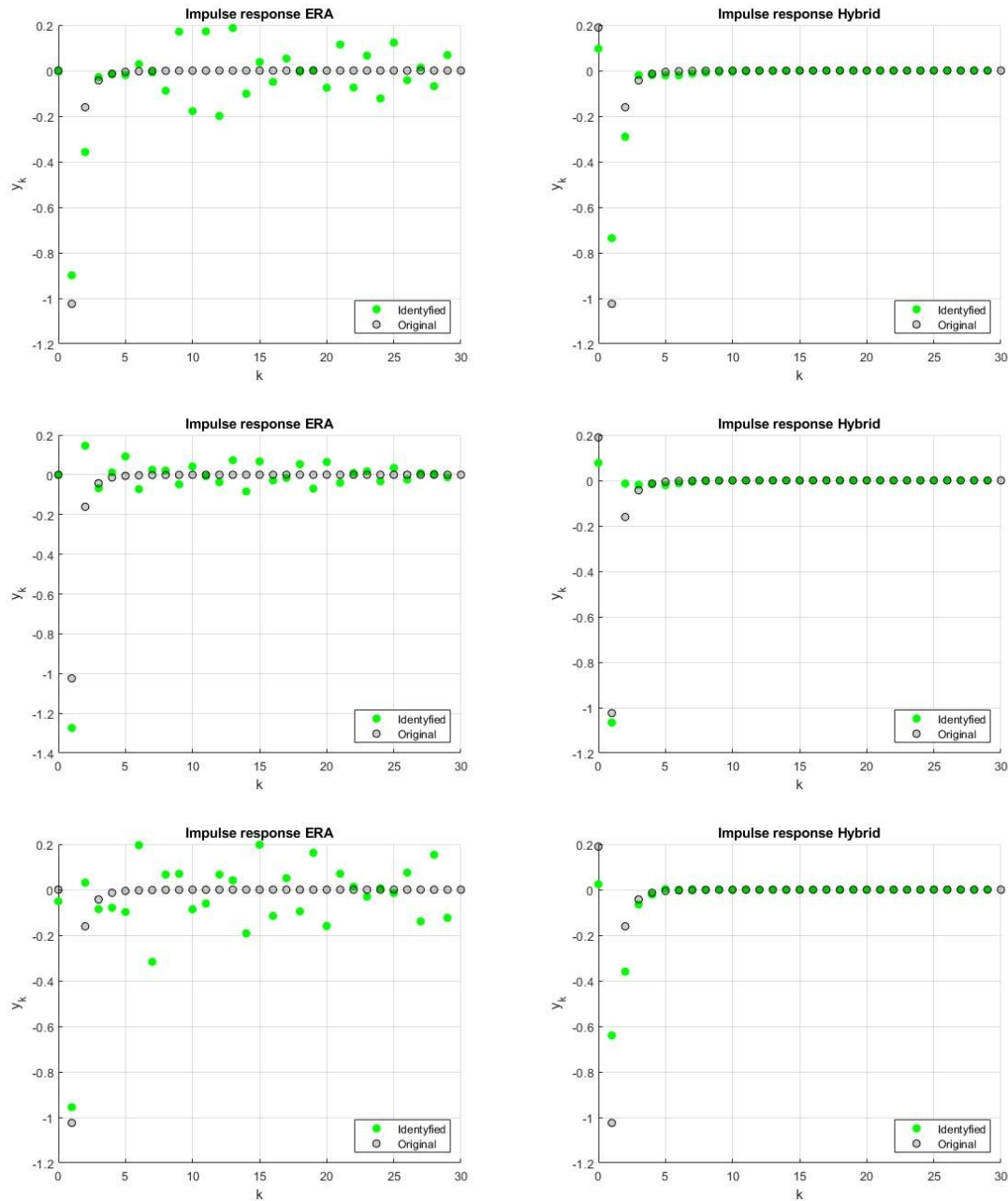


Rys. 6.4.1. Przebieg metryki MAE dla zmiennego rozkładu zaszumienia. Układ 4 rzędu (góra) oraz 5 rzędu (dół).



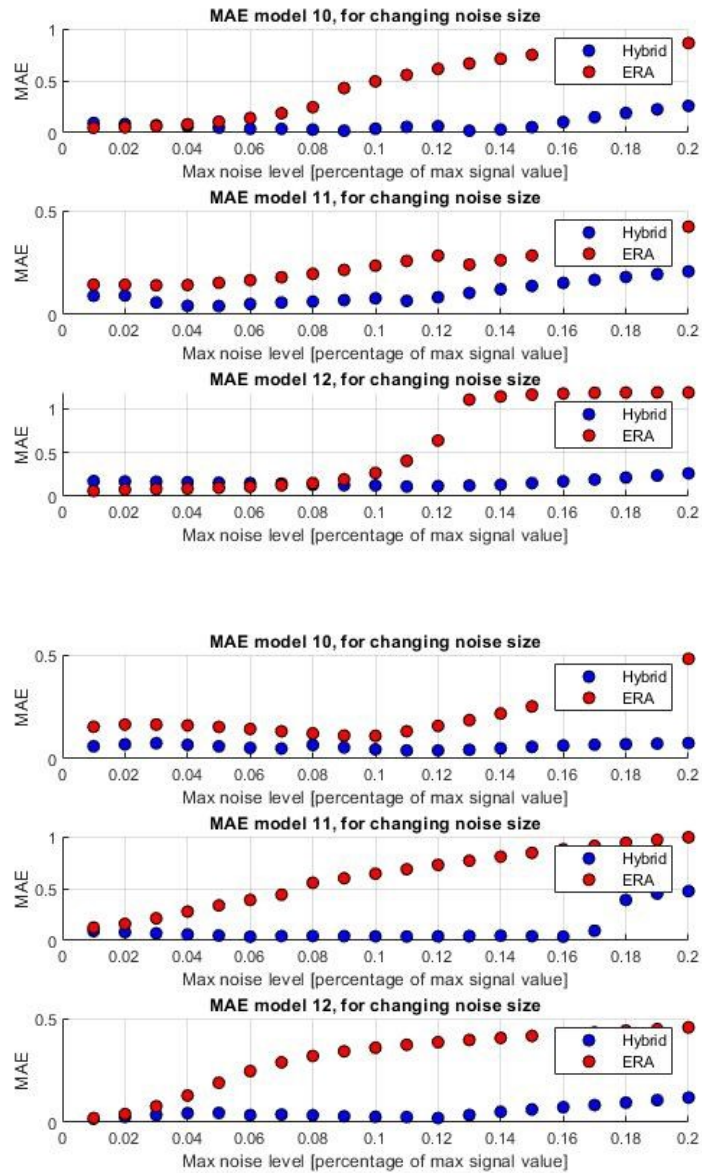
Rys. 6.4.2 Przebieg metryki RMSE dla zmiennego rozkładu zaszumienia. Układy 4 rzędu (góra) oraz 5 rzędu (dół).

Przedstawione wyniki dotyczące przebiegów zgadzają się teoretycznymi i praktycznymi spostrzeżeniami przedstawionymi w pracy. Wartości otrzymane dla metody hybrydowej znajdują się zawsze poniżej tych otrzymanych dla metody ERA, dodatkowo charakteryzują się mniejszym rozrzutem, co można interpretować jako mniejszą podatność na różne zakłócenia. Niezależnie od rozkładu zakłócenia otrzymujemy podobną wartość błędu odwzorowania, nie jest tak jednak w przypadku metody typu ERA, tutaj widać duże skoki wartości, taki wynik spowodowany jest dużą podatnością na zakłócenia. Wniosek może być taki, że metoda połączona jest dużo bardziej niezawodna i byłaby lepsza w przypadku badania rzeczywistych układów które zawsze obciążone są jakąś formą zaszumienia. W celu lepszej wizualizacji wpływu działania zaszumienia na przebiegi odtworzone zostało wykonane porównanie odpowiedzi przebiegów uzyskanych oboma metodami. Charakterystyki odpowiedzi zostały przedstawione na Rys. 6.4.3. Widać na nich wyraźnie dużą podatność metody ERA na zakłócenia oraz dużą odporność metody hybrydowej.



Rys. 6.4.3. Przebiegi odpowiedzi oryginalnej i zidentyfikowanej na wymuszenie impulsowe dla zmiennego zaszumienia danych wejściowych. Prawa strona – ERA, lewa strona – hybrydowy.

Ostatnim z rozważanych parametrów, była jakość odtworzenia przy zmiennych wartościach maksymalnych zaszumienia. W celu sprawdzenia takiej zależności wykonano badania podobne do tych przedstawionych w poprzednich rozważaniach. Dla stałego rozkładu zaszumienia wykonano kolejne procesy identyfikacji przy zmiennej wartości maksymalnego zaszumienia. Wyniki pokazano na Rys. 6.4.4. Łatwo można zaobserwować, że dla wszystkich przypadków widać znaczne pogorszenie jakości odtworzenia dla kolejnych prób w przypadku ERA, natomiast wyraźnie mniejsze pogorszenie dla algorytmu hybrydowego. Wszystkie charakterystyki metody łączonej do pewnego momentu zachowują prawie poziomy przebieg, dopiero od pewnego momentu zaczynają wykazywać się gorszym odtworzeniem.



Rys. 6.4.4. Metryki MAE jakości odtworzenia w funkcji zaszumienia maksymalnego. Góra – układy 4 rzędu, dół – układy 5 rzędu.

Wszystkie przedstawione powyżej charakterystyki oraz wnioski wskazują na to, że teza o dobrej odporności metody połączonej jest prawdziwa. Zaszumienie działania układu oraz ewentualne zakłócenia pomiarowe znacznie mniej wpływają na jej realizację niż w przypadku metody referencyjnej.

7. Podsumowanie

W pracy przedstawiono działanie trzech metod identyfikacji obiektów dynamicznych. Dwie z tych metod zawierały w sobie odpowiedni mechanizm budujący realizację układu w przestrzeni stanów. Metody zostały wykonane przy pomocy języka programistycznego MATLAB oraz pakietu CVX. Użycie tych narzędzi znacznie ułatwiło proces tworzenia programu i testowania wyników. Całość została wykonana w taki sposób, żeby możliwym było użycie zaprojektowanych algorytmów na rzeczywistych układach bez wprowadzania dużej ilości zmian w programie. Podczas trwania projektu zrealizowano poprawnie wszystkie podstawowe założenia projektowe, jednak nadal pozostało wiele zagadnień na których warto się skoncentrować w trakcie rozwijania projektu.

Rozwiązania zrealizowane prawidłowo:

- Realizacja algorytmu ERA.

Jednym z prawidłowo przetestowanych i porównanych algorytmów był algorytm ERA. Odpowiednie rozdziały opisywały proces programowania i realizacji założeń projektowych dotyczących tego algorytmu. Na bazie wykonanej implementacji i testów powstał pomysł wykonania dalszego połączenia metod do metody hybrydowej.

- Realizacja heurystyki log-det.

Po poprawnym wykorzystaniu metody ERA, wyniki wskazały na potrzebę wykorzystania lub stworzenia metody optymalizującej rząd macierzy przed stworzeniem jej realizacji w przestrzeni stanów. Ciekawym rozwiązaniem tego problemu okazała się heurystyka przedstawiona przez Stephena Boyda [3]. Metoda została poprawnie wykorzystana i przetestowana do odtworzenia działania układu. Niestety metoda ta wymagała uzupełnienia w postaci mechanizmu realizacji.

- Realizacja metody hybrydowej.

W celu ulepszenia działania wcześniej wspomnianej heurystyki, jej działanie połączono z mechanizmem ERA który służy do odtworzenia minimalnej realizacji w przestrzeni stanu. Metoda została przetestowana na dla wielu parametrów znaczących. Wnioski wynikające z tych testów zostały przedstawione w poprzednim rozdziale. Wyniki są zdecydowanie obiecujące, stworzona metoda jest wyraźnie lepsza, zarówno z punktu widzenia jakości odtworzenia, jak i optymalności rozmiaru uzyskanego rozwiązania.

Rozwiązania nie zrealizowane:

- Testy na układzie rzeczywistym.

Pomimo intensywnych prac nad projektem nie udało się wykonać prawidłowych testów na dowolnym układzie rzeczywistym. Cała metoda została wykonana z myślą o układzie liniowym który byłby potraktowany jako układ „czarnej skrzynki”. Jako układy testowe mogą być wykorzystywane silniki prądu stałego, układy grzania i chłodzenia oraz układy sterowania cyfrowego. Odpowiednie przetestowanie takiego typu układów mogłoby pozwolić na wykazanie dużej przydatności tej metody w zagadnieniach przemysłowych. Właśnie w takim zastosowaniu najlepsze okazałyby się metody pozwalające na sterowanie układami bez specjalistycznej wiedzy na temat ich działania. Znacznie ułatwiłoby to szybkie uruchamianie maszyn przez elektryków i automatyków.

Podczas wykonanych badań i implementacji okazało się, że zbudowane metody działają bardzo dobrze, jednak niejednokrotnie zaznaczono w pracy, że niektóre rozwiązania wymagają poprawy. Dalsze prace mogłyby rozpocząć się od całkowitego rozwiązania problemu niepewności numerycznej wyniku dla implementacji metody hybrydowej. Dodatkowo ciekawym zagadnieniem byłoby wykorzystanie głębokich sieci neuronowych do próby realizacji układów o optymalnym stopniu. Zastosowanie kompresji z użyciem autoenkodera lub sieci CNN mogłoby okazać się ciekawym rozwiązaniem. Układy autoenkodera skupiają się na odwzorowaniu najważniejszych cech układu poddawanego kompresji, dlatego mogłyby okazać się niezwykle efektywne w zagadnieniu przedstawianym w powyższej pracy.

Wykonane testy oraz ilość włożonej w zrealizowany projekt pracy można uznać, że początkowe założenia zostały spełnione, a sam projekt został zrealizowany pomyślnie. Tak rozbudowane i szerokie zagadnienie wymaga jednak zdecydowanie dalszych prac i poprawek, jednak wynikiem pracy jest w pełni działający mechanizm identyfikacji który można wykorzystać do dowolnych zagadnień. Praca pozwoliła równocześnie na znaczne poszerzenie posiadanej wiedzy zarówno z zakresu teorii sterowania jak i z zakresu mechanizmów optymalizacji.

8. Bibliografia

- [1] B. Beliczyński i M. Twardy, Modele i identyfikacja systemów, (preskrypt), Warszawa: Politechnika Warszawska, 2015.
- [2] „Wikipedia - MPC,” [Online]. Available: https://pl.wikipedia.org/wiki/Sterowanie_predykcyjne.
- [3] S. P. Boyd, H. Hindi i M. Fazel, „Log-det heuristic for matrix rank minimization with applications to Hankel and Euclidean distance matrices,” w *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, 2003.
- [4] S. P. Boyd i M. C. Grant, „CVX Research,” CVX Research, Inc, [Online]. Available: <http://cvxr.com/cvx/>.
- [5] G. James, D. Witten, T. Hastie i R. Tibshirani, An introduction to Statistical Learning, with Applications in R, New York: Springer, 2017.
- [6] E. R. Tufte, The Visual Display of Quantitative Information, second edition, Cheshire: Graphics Press, 2001.
- [7] G. Calafiore i L. El Ghaoui, Optimization Models, Cambridge: Cambridge University Press, 2019, pp. 133 - 136.
- [8] MathWorks, Inc., „Help Center, drss,” MathWorks, Inc., [Online]. Available: <https://uk.mathworks.com/help/control/ref/drss.html>. [Data uzyskania dostępu: 2020].
- [9] J.-N. Juang, Applied System Identification, Michigan: Prentice Hall, 1994.

9. Spis rysunków

Rys. 1.1.1. Schemat budowy regulatora adaptacyjnego [2].	12
Rys. 1.1.2. Uproszczony schemat przeprowadzanej identyfikacji z członem optymalizującym ...	12
Rys. 2.3.1. Odpowiedzi skokowe modeli testowanych. Lewa strona układu 4-tego rzędu, prawa 5-tego. Podział pionowy został wykonany względem wartości parametru losowania, od 10 do 12.	17
Rys. 3.2.1. Kod obsługujący generowanie przebiegu oraz zaszumienie wygenerowanego sygnału.	23
Rys. 3.2.2. Przebiegi sygnałów odczytywanych z zidentyfikowanego układu.	24
Rys. 3.2.3. Wyliczenie parametrów Markowa i macierzy Hankela.	24
Rys. 3.2.4. Przebieg modelu zidentyfikowanego, przed zredukowaniem szumów.	25
Rys. 4.1.1. Graficzne przedstawienie rzędu docelowego o raz heurystyki na jednym przebiegu [3].	29
Rys. 4.2.1. Przebiegi zarejestrowane z badanego układu.	30
Rys. 4.2.2. Implementacja „rękawa” dolnego i górnego.	31
Rys. 4.2.3. Przebiegi ograniczeń dolnych i górnych.	31
Rys. 4.2.4. Kod wykonujący optymalizację przy użyciu omawianej heurystyki.	32
Rys. 4.2.5. Sygnał wyjściowy układu o zoptymalizowanym stopniu macierzy Hankela.	32
Rys. 4.2.6. Przebieg wynikowy zredukowanego układu.	33
Rys. 5.1.1. Schemat działania metody hybrydowej.	36
Rys. 5.2.1. Implementacja macierzy Hankela zaszumionego sygnału.	38
Rys. 5.2.2. Implementacja heurystyki z czynnikiem regularizacyjnym.	39
Rys. 6.2.1. Metryki RMSE dla kolejnych wycięć macierzy przy pomocy procedury SVD. Układ 4 rzędu (górze) oraz 5 rzędu (dół).	45
Rys. 6.2.2. Metryki RMSE dla kolejnych wycięć macierzy przy pomocy procedury SVD. Układ 4 rzędu (górze) oraz 5 rzędu (dół).	46
Rys. 6.2.3. Norma Frobeniusa układów 4 rzędu (górze) i 5 rzędu (dół). H-O (Hybrydowa – Oryginalny), E-O (ERA – Oryginalny) oraz H-E (Hybrydowa – ERA).	47
Rys. 6.2.4. Przebieg odpowiedzi impulsowej, ERA – 4 rząd (górze, lewo), Hybrydowa – 4 rząd (górze, prawo), ERA – 5 rząd (dół, lewo) oraz Hybrydowa – 5 rząd (dół, prawo).	48
Rys. 6.3.1. Rząd zidentyfikowanego układu, przed wykonaniem operacji wycięcia SVD. Oryginalny stopień układu to, 4 (górze) oraz 5 (dół).	49
Rys. 6.3.2. Przebiegi metryki MAE w funkcji ε_2 , układy 4 rzędu (górze) oraz 5 rzędu (dół).	50
Rys. 6.3.3. Przebiegi metryki RMSE w funkcji ε_2 , układy 4 rzędu (górze) oraz 5 rzędu (dół).	51
Rys. 6.4.1. Przebieg metryki MAE dla zmiennego rozkładu zaszumienia. Układ 4 rzędu (górze) oraz 5 rzędu (dół).	52
Rys. 6.4.2. Przebieg metryki RMSE dla zmiennego rozkładu zaszumienia. Układy 4 rzędu (górze) oraz 5 rzędu (dół).	53
Rys. 6.4.3. Przebiegi odpowiedzi oryginalnej i zidentyfikowanej na wymuszenie impulsowe dla zmiennego zaszumienia danych wejściowych. Prawa strona – ERA, lewa strona – hybrydowy.	54
Rys. 6.4.4. Metryki MAE jakości odtworzenia w funkcji zaszumienia maksymalnego. Górze – układy 4 rzędu, dół – układy 5 rzędu.	55

10. Spis tabel

Tabela 3.2.1. Porównanie graficzne układów o zmniejszonych rzędach.	26
Tabela 3.2.2. Porównanie metryczne układów o zmniejszonych rzędach	27
Tabela 4.2.1. Wyniki optymalizacji przy pomocy użytej heurystyki.	33
Tabela 4.2.2. Odwzorowanie przebiegu dla różnych wartości ograniczeń „rękawa”.	34
Tabela 5.2.1. Jakość odwzorowania uzależniona od parametru ε	39
Tabela 5.2.2. Graficzne porównanie jakości odwzorowania dla metody hybrydowej.	41
Tabela 5.2.3. Metryczne porównanie jakości odwzorowania dla metody hybrydowej.....	42

11. Dodatek

11.1. Dodatek A

W rozdziale 2.3 przedstawiono metodę eliminowania mało znaczących wartości osobliwych za pomocą rozkładu SVD. Metoda bazuje na minimalizacji normy Frobeniusa między macierzą oryginalną oraz macierzą docelową, przy założeniu określonego stopnia macierzy końcowej.

Zakładając, że $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, gdzie $\text{rank}(A) = r > 0$, oraz $1 \leq k \leq r$.

$$\begin{aligned} \min_{A_k \in \mathbf{R}^{m,n}} \|A - A_k\|_F^2 \\ \text{s.t. : } \text{rank}(A_k) = k \end{aligned} \quad 11.1.1$$

Wynikiem takiej minimalizacji jest macierz A_k o określonym rzędzie k . Możemy przedstawić macierze A oraz A_k :

$$A = U\tilde{\Sigma}V^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T \quad 11.1.2$$

$$A_k = UZV^T \quad 11.1.3$$

Dla takich reprezentacji problem minimalizacji można zapisać jako:

$$\|A - A_k\|_F^2 = \|U^T(A - A_k)V\|_F^2 = \|\tilde{\Sigma} - Z\|_F^2 \quad 11.1.4$$

Dzięki takiej reprezentacji możemy zapisać problem jako przekształconą formę macierzową.

$$\begin{aligned} \min_{A_k \in \mathbf{R}^{m,n}} f_0 = \left\| \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{bmatrix} - Z \right\|_F^2 \\ \text{s.t. : } \text{rank}(Z) = k \end{aligned} \quad 11.1.5$$

Można założyć, że macierz Z jest macierzą diagonalną, nie zawierającą żadnych zer, ponieważ te zera mogłyby tylko pogorszyć jakość odwzorowania względem normy Frobeniusa. Dlatego powyższą funkcję celu można przedstawić jako:

$$f_0 = \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_r \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \sum_{i=1}^r (\sigma_i - z_i)^2 \quad 11.1.6$$

Biorąc pod uwagę ograniczenie $\text{rank}(Z) = k$ wiemy, że tylko k stopni powinno zostać zachowanych w macierzy wyjściowej. Wartości reprezentujące, położone na diagonalu, rozłożone są nierosnąco. Dlatego wiadomo, że największe wartości singularne położone są w zakresie $i = 1, \dots, k$. Dlatego podobnie do rozważania wykonywanego w analizie PCA możemy założyć, że składniki główne będą rozłożone w następujący sposób.

$$Z^* = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0) & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{bmatrix} \quad 11.1.7$$

Zgodnie z powyższym łatwo można wyprowadzić ostateczną optymalną formę reprezentacji macierzy o zredukowanym rzędzie, ale najmniejszej zmianie.

$$A = UZ^*V^T = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T \quad 11.1.8$$

Zgodnie z tym co zostało pokazane wcześniej powyższa zależność jest podstawą do analizy PCA. Interpretacja składników głównych zwróciła by identyczne wyniki jak te które otrzymujemy przy użyciu metody opartej ściśle o minimalizację normy Frobeniusa.