UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

Facultatea de Automatică si Calculatoare

Identificarea sistemelor

Proiect

Identificarea unui sistem bazat pe răspuns la o intrare sinusoidala

2024-2025

Student: Bogdan Adina-Elena

Grupa: 30133

Coordonator:

Prof.dr.ing Petru Dobra

Cuprins:

1. Identificarea unui model matematic, exploatând fenomenul de rezonanță, a unui sistem de ordinul II (fără zerou).

1.1. Achizitia si afisarea datelor:

În cadrul laboratorului, utlizând aparatura specifică s-au generat semnalele pentru care vom face identificarea. Prin generarea unui semnal de intare sinusoidal constant vom obține datele experimenatale, timpul t, semnalul de intare u(t) și semnalele de ieșire y1(t), respectiv y2(t).

Datele extrase vor fi salvate într-un fișier CSV, fiecare coloană conținand valorile: coloana 1: timpul in secunde, coloana 2: u(t) în volți și coloana 3 respectiv coloana 4: y1(t), respectiv y2(t) în volți. Apoi vom introduce în cadrul programului MATLAB setul de date, decalrând t(timpul), y1(semnalul de intrare de ordinul 2 fara zerou), y2(semnalul de intrare de ordinul II cu zerou) și le vom afișa într-un singur grafic (ușor decalate în scopul observării mai clare a acestora). Pe abscisă este reprezentat timpul în secunde, iar pe ordonată amplitudinea semnalelor.

De asemenea, putem afirma că fenomenul de rezonanță reprezintă tendința unui sistem oscilant, excitat la o anumită frecvență (numită frecvență de rezonanță wr) de a atinge o amplitudine mai mare decât la frecvențe normale. Formulat intr-o maniera accesibila, fenomenul de rezonanță are loc atunci când amplitudinea este maximă.

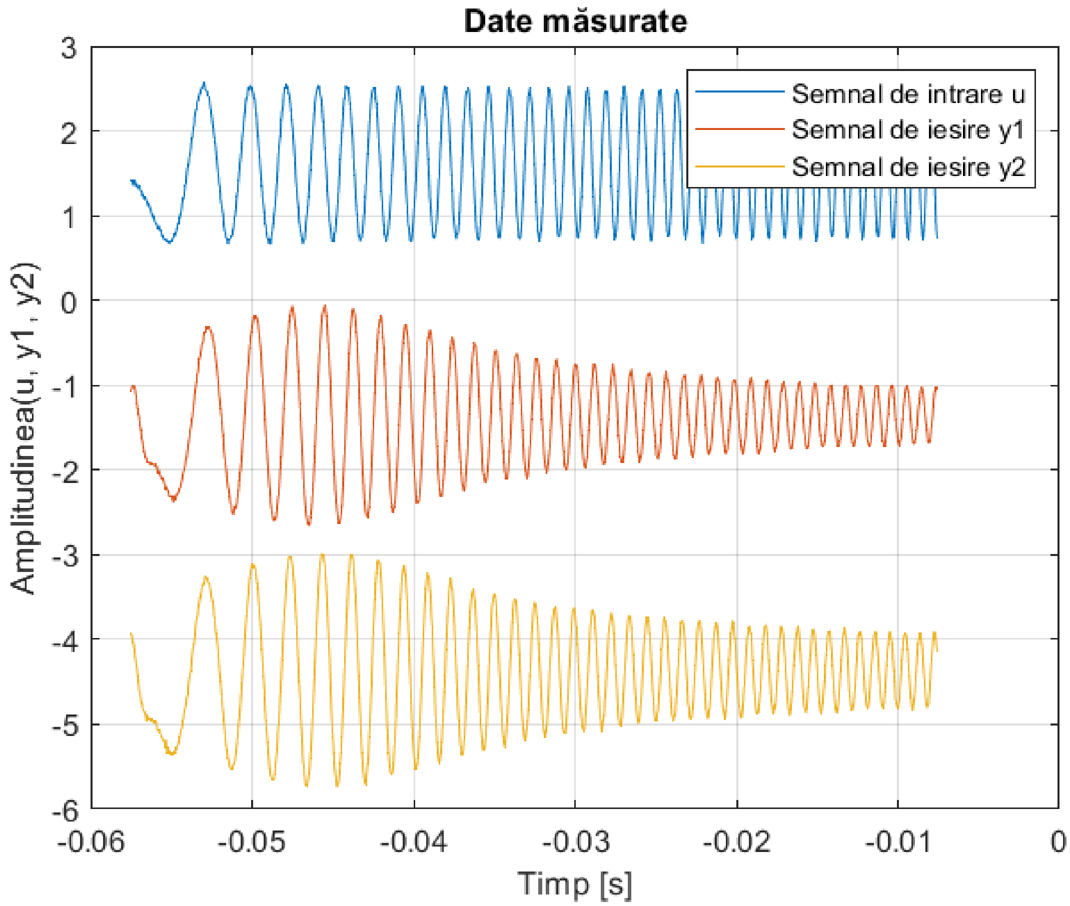


Fig1. Afișarea semnalelor de intare/iesire (u, y1, y2)

1.2. Identificarea modelului matematic

Pentru a identifica un model matematic de tip funcție de transfer, de ordin II fără zeorou:

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

trebuie să identificăm factorul de proporționalitate K, factorul de amortizare zeta ζ, si pulsația naturală de oscilatie wn [rad/s].

Am ales 4 indici de timp de pe grafic, din zona fenomenului de rezonanță: un maxim și un minim pentru intrare, respectiv un maxim și un minim pentru ieșire(Fig 2):

u_max_idx=194;
u_min_idx=214;
y1_max_idx=201;
y1_min_idx=221

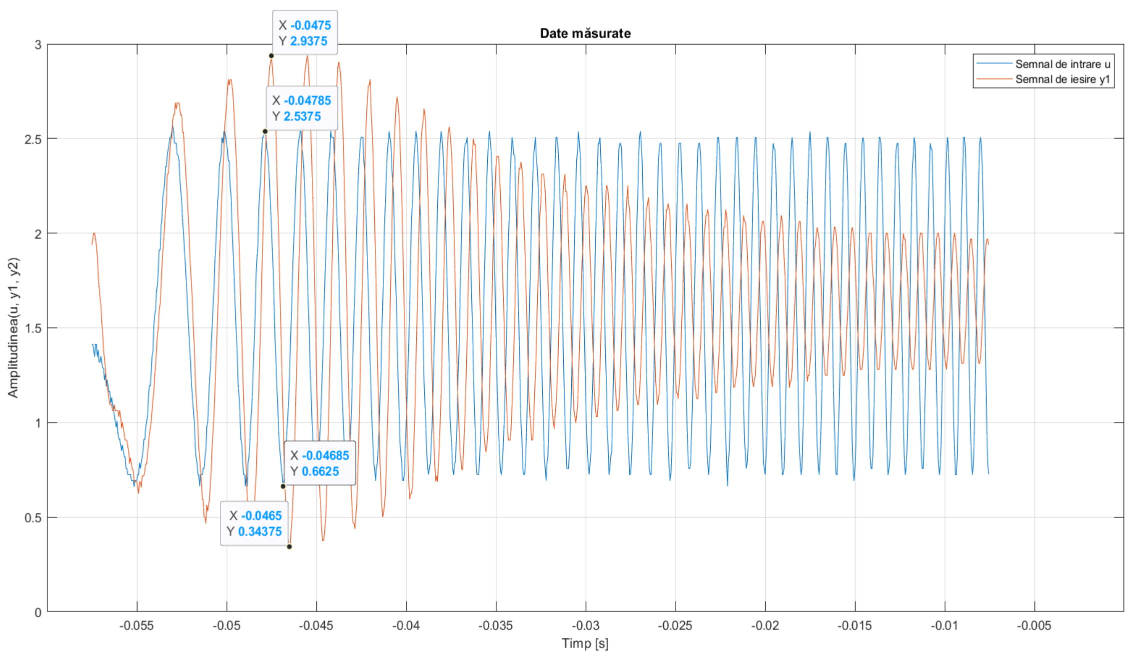


Fig 2. Indicii de pe periode de timp consecutive în zona de rezonanță

- Factoul de proporționaliate K = reprezintă raportul dintre variația ieșirii și variația intrării:

K=mean(y1)/mean(u) => **K=1.0162**

- Modulul de rezonanță Mr = îl regăsim acolo unde amplificarea este maximă și reprezintă raportul dintre amplitudinea semnalului de ieșire și amplitudinea semnalului de intrare:

A_iesire=y1(y1_max_idx)-y1(y1_min_idx)

A_intare=u(u_max_idx)-u(u_min_idx) => **Mr = 1.3833**
Mr=A_iesire/A_intare

- Factorul de amortizare zeta = poate fi calculat din formula : $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

Astfel, **zeta**= sqrt((Mr-sqrt(Mr^2-1))/(2*Mr)) => **zeta= 0.3931**

- Perioada de oscilație a semnalului de rezonanță: Trez

  Trez= 2*t(y1_min_idx)-t(y1_max_idx) => **Trez= 0.0020**

- Pulsația de rezonanță wr = reprezintă frecvența unghiulară [rad/s] la care amplitudinea răspunsului unui sistem oscilant atinge valoarea maximă:

  wr=(2*pi)/Trez => **wr= 3.1416e+03** [rad/s]

- Pulsația naturală de oscilație wn, se poate calcula din formula:

  $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$

Și rezultă: **wn**=wr/sqrt(1-2*zeta^2) => **wn= 3.7794e+03** [rad/s]

Astfel, după determinarea parametrilor și înlocuirea lor in formula funcției de transfer H obținem:

H =

```
      1.451e07
-----------------------
s^2 + 2971 s + 1.428e07
```

Pentru simularea unui răspuns la intrare sinusiodală în condiții inițiale nenule este nevoie de modelul de tip spațiul stărilor:

O reprezentare in spațiul stărilor a unui sistem de ordin II este:

```
dx/dt = A*x(t) + B*u(t)
y(t) = C*x(t) + D*u(t)
```

unde

```
A=[0 1; -wn^2  -2*zeta*wn];
B=[0;  K*wn^2];
C=[1 0];
D=0;
```

Rezultă:

```
A =
              x1          x2
 x1            0           1
 x2  -1.428e+07       -2971

B =
             u1
 x1           0
 x2  1.451e+07

C =
      x1  x2
 y1   1   0

D =
      u1
 y1   0
```

1.3. Validarea rezultatelor

Validarea modelului se face pe baza comparării semnalului de ieșire y1 cu semnalul identificat în urma modelului matematic obținut.

In fig3. Sunt suprapuse semnalul de iesire y1 si semnalul identificat din spatiul starilor:

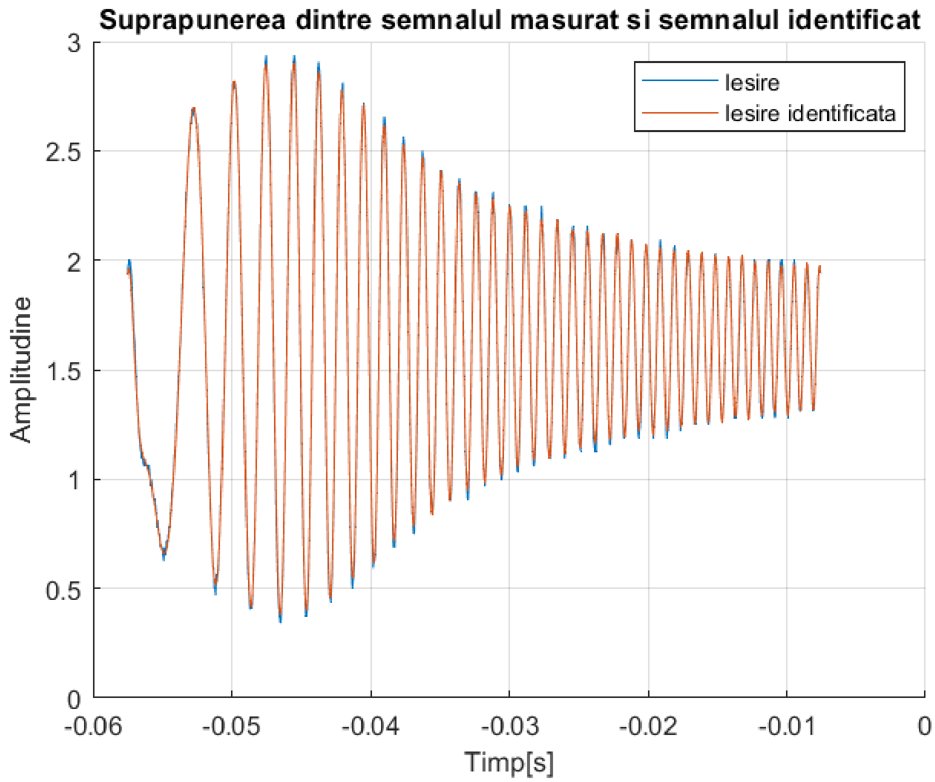


Fig3.

Se calculează valoarea medie patratică (EMP) a erorii dintre ieșirea masurată și ieșirea calculată, J:

J=norm(y1-ysim)/sqrt(length(y1)) => **J= 0.0248**

Iar, eroarea medie pătratică normalizată (EMPN) este o variantă a EMP, pentru a indica cât de mare este eroarea relativă față de variația semnalului măsurat:

Empn=norm(y1-ysim)/norm(y1-mean(y1))*100 => **Empn= 4.2673**

2. Estimarea răspunsului în frecvență al sistemului pe baza semnalului y1

Estimarea răspunsului în frecvență este un proces esențial în analiza și caracterizarea comportamentului unui sistem din punct de vedere al reacției sale la semnale periodice.

2.1. Estimarea modulului

Pentru a putea estima modulul corect este necsar să calculăm mai întai anumite frecvențe unghiulare, cum ar fi cele din zonele frecvențelor joase, frecvențelor de rezonanță, frecvențelor medii si a frecvențelor înalte.

Frecvențele unghiulare corespunzătoare diferitelor segmente de date temporale au fost calculate utilizând relația w=pi*T, unde T este perioada semnalului extrasă din diferența de timp dintre maxime și minime succesive.

De altfel, caracteristica de modul (m) pentru fiecare interval a fost determinat din raportul dintre variația semnalului de ieșire (y1) și variația semnalului de intrare (u).

Astfel pentru frecvente joase am considertat punctele:

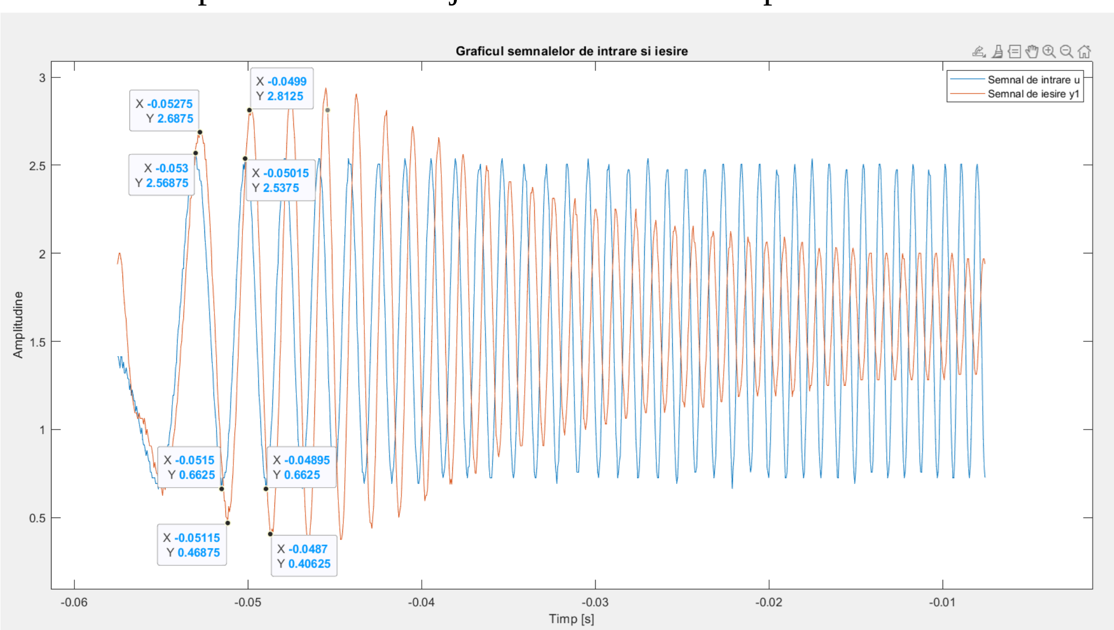


Fig4. Index minime si maxime consecutive pentru u si y in zona frecventelor joase

În urma aplicarii formulelor rezultă 3 frecvențe unghiluare și 3 caracteristici de modul:

w_i=pi/(t(u_min)-t(u_max)
m_i=(y(ymax)-y(ymin))/(u(umax)-u(umin))
ph_i=(t(u_max)-t(y_max))*w_i*180/pi

w1= 2.0944e+03 [rad/s] **m1= 1.1864**
w2= **2.3271e+03** [rad/s] **m2**= **1.2333**
w3= **2.6180e+03** [rad/s] **m3**= **1.2833**

Ce rezultă din punctele considerate la frecvențele de rezonanță am calculat deja în prima parte a proiectului, cu metoda neparamertică, avem:

wr= 3.1416e+03 [rad/s] și **mr= 1.3833**

În zona frecvențelor medii am considerat urmatoarele puncte:

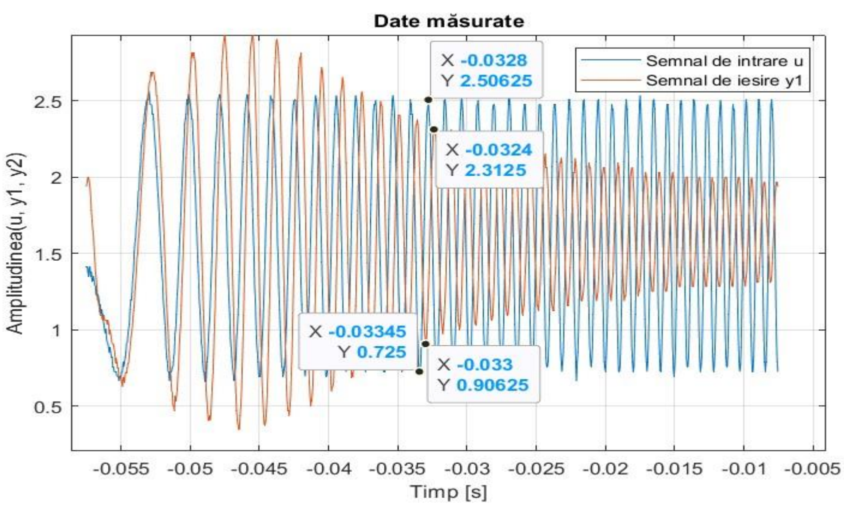


Fig5. Index mininime si maxime consecutive pentru u si y in zona frecventelor medii

În urma aplicării fomulelor rezultă următoarea frecvență unghiulară, respectiv caracteristică de modul:

w5= **4.8332e+03** [rad/s] **m5=0.7895**

Apoi, in zona frecvențelor înalte am considerat urmatoarele punctele:

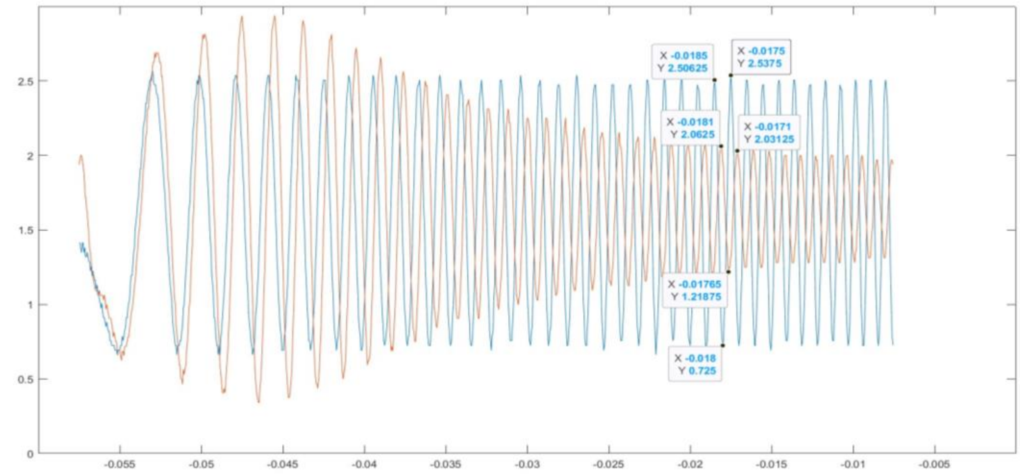


Fig6. Index minime și maxime consecutive pentru u si y in zona frecvențelor înalte

Rezultă alte 2 frecvențe unghiluare și 2 caracteristici de modul:

w6=6.2832e+03 [rad/s] **m6=0.4737**
w7= 6.2832e+03 [rad/s] **m7= 0.4483**

3.2. Calculul fazei

Faza a fost calculată pe baza diferențelor de timp dintre vârful semnalului de intrare respectiv a semnalul de ieșire, folosind relația: ph=$\Delta t \cdot \omega \cdot 180\pi$

Considerând tot aceeași indecșii, în urma a 7 diferențe de timp dintre cele doua semnale au rezultat fazele exprimate în grade:

ph1= -30.0000
ph2= -40.0000
ph3= -45.0000
ph5= -124.6145
ph6= -144.0000
ph7= -144.0000

Calculul fazei în zona frecvenței de rezonanță a fost efectuat cu ajutorul indecșilor din fig2., și are valoarea:

ph_r= -63.0000

Pentru a verifica rezultatele din urma calculelor pentru modul si fază am suprapus punctele obțiunte peste diagrama bode a sistemului de ordin II fără zerou, luate pe intervalul [10^3, 10^4]. Astfel, am suprapus peste graficul de modul punctele m1, m2, m3, mr, m4, m5, m6, m7 obținute în funcție de frecvențele unghiulare w1, w2, w3, wr, w4, w5, w6, w7 și peste graficul de fază am suprapus ph1, ph2, ph3,ph_r, ph4, ph5, ph6, ph7 tot în funcție de frecvențele unghiulare calculate.

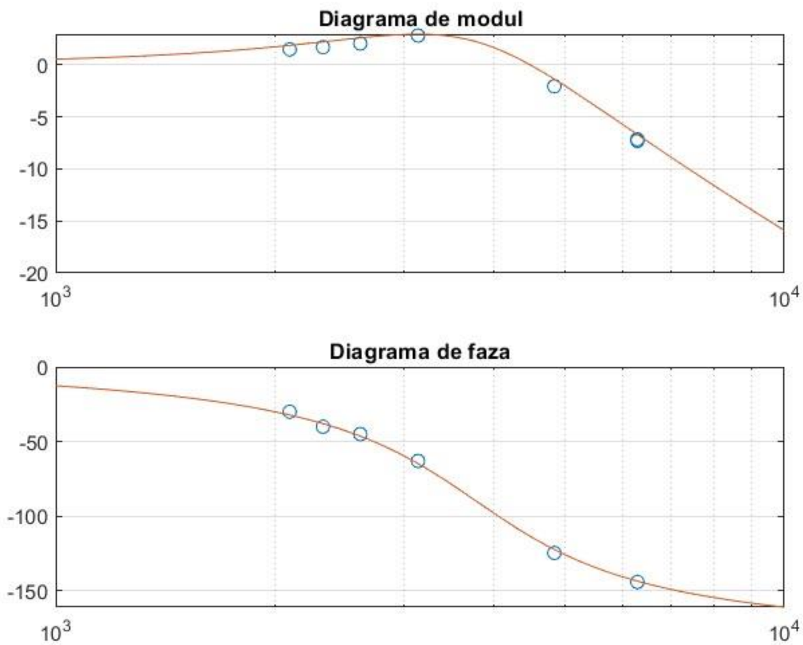


Fig7. Comparația între diagrama bode a modelului și estimarea raspunsului in frecvență a sistemului

3. Identificarea sistemului pe baza metodelor parametrice

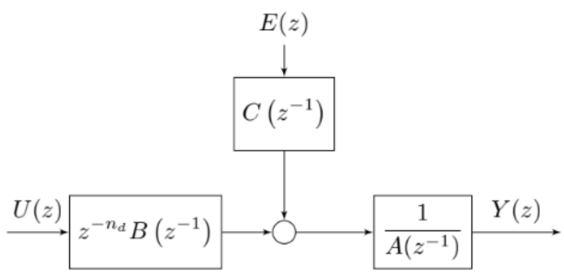
3.1. Identificarea semnalului y1 pe baza metodelor parametrice

3.1.1. Identificare folosind ARMAX și validare prin autocorelatie.

Metoda ARMAX(Auto-Regressive Moving Average method with eXogenous input) sau metoda celor mai mici patrate extinsă (MCMMPE) a fost dezvoltată din metoda ARX pentru a se putea identifica fără deviație modelele “proces+perturbație”.

Identificarea constă în estimarea coeficienților polinoamelor A,B si C. Semnalul de intrare u(t) si semnalul de ieșire y(t) sunt reprezentate prin transformata $\mathscr{Z}$. Această structură este reprezentată in MATLAB în strucutura *idpoly*. Parametrii de strucutră ai sistemului sunt: nA=deg(A), nB=deg(B), nC=deg(C) si nd care este numarul tactilor de intârziere.

Schema bloc a modelului ARMAX este:



Iar modelul discret de tip ‘proces+perturbație’ corespunzator metodei ARMAX este:

$$A(z^{-1})\,Y(z) = z^{-nd}B(z^{-1})\,U(z) + C(z^{-1})\,E(z)$$

unde:

$$A\left(z^{-1}\right) = 1 + a1z^{-1} + \ldots + a_{nA}z^{-nA}$$

$$B\left(z^{-1}\right) = b1 + b1z^{-1} + \ldots + b_{nB}z^{-nB+1}$$

$$C\left(z^{-1}\right) = 1 + a1z^{-1} + \ldots + c_{nC}z^{-nC}$$

Pentru a putea lucra cu această metodă, datele de intrare ¸si datele de ieșire trebuie grupate într-un singur obiect de tip *iddata*.

In cazul nostru:

nA=2
nB=1
nC=2
nd=1

Rezultă polinoamele:

A(z) = 1 - 1.831 z^-1 + 0.8644 z^-2
B(z) = 0.03363 z^-1
C(z) = 1 - 1.746 z^-1 + 0.7929 z^-2, cu C(z) corspunzător perturbației

Pe baza polinoamelor A si B, construim un model matematic în discret corespunzator 'procesului':

Hz_y1armax =

$$\frac{0.03363\, z^{-1}}{1 - 1.831\, z^{-1} + 0.8644\, z^{-2}}$$

Pe care l-am transformat și în contiunuu prin metoda zoh:

Hs_y1armax =

$$\frac{354.74\, (s+4.087e04)}{(s^2 + 2915s + 1.431e07)}$$

Un sistem identificat prin ARMAX trebuie validat prin autocorelație.

Sunt prezentate două metode statistice de validare a modelelor obținute, care se pot realiza cu ajutorul functiei *resid*, iar gradul de suprapunere se poate obține folosind rutina *compare*.

În MATLAB, funcția *resid* este utilizată pentru a analiza reziduurile unui model identificat, adică diferențele dintre răspunsul măsurat al unui sistem și răspunsul estimat de model. Această diagramă prezintă graficul de autocorelație în partea stânagă si intercorelație in partea dreapta.

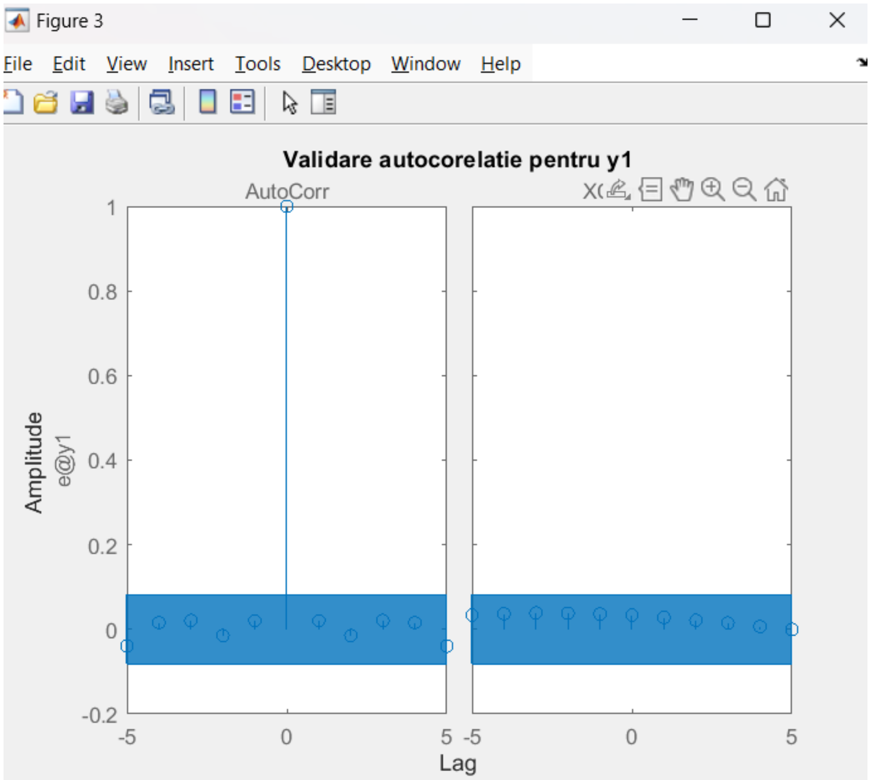


Fig 8. Validarea prin autocorelație cu frruncția resid pentru metoda ARMAX

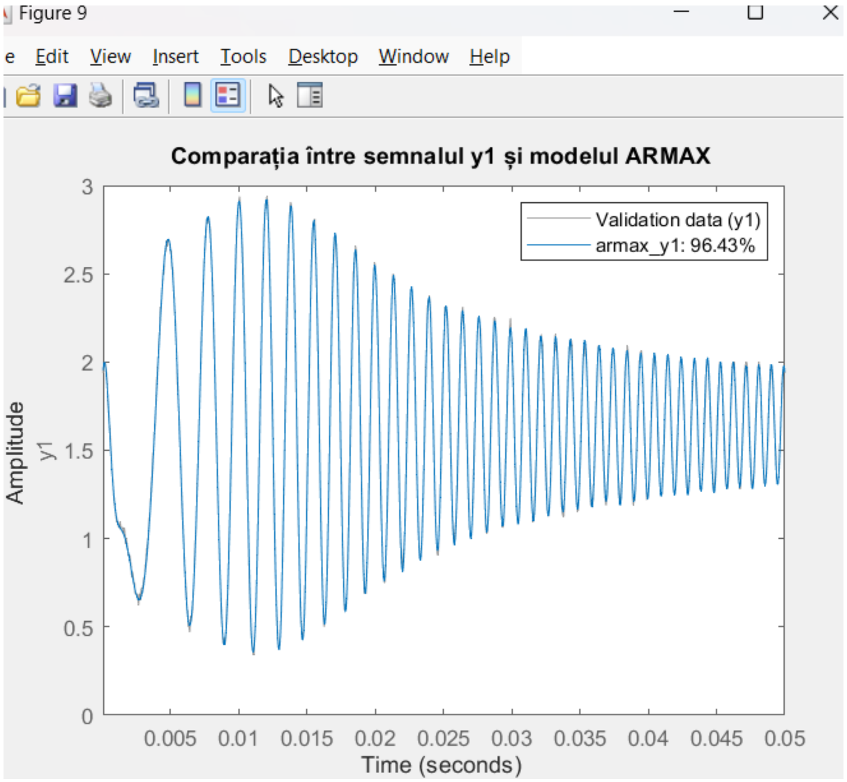


Fig9. Validare cu funcția compare pentru metoda ARMAX

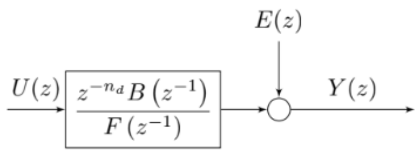
Observam ca modelul identificat este validat prin autocoorleație, iar din prespectiva gradului de urmărire, acest model urmarește datele de validare cu un grad de 96.43% (Fig9), de unde rezultă o eroare de 3.57%.

3.1.2. Identificare folosind OE și validare prin intercorelație.

Metoda erorii de ieșire (engl. Output Error – OE) introduce o nouă structură pe baza modelului general descris la început, presupunerea de bază fiind că toată perturbația se găsește nemodelată la ieșire.

Identificarea constă în estimarea coeficienților polinoamelor B și F. Parametrii de structură ai sistemului sunt: nB = deg (B), nF = deg (F), respectiv nd numărul tacțilorr de întârziere.

Schema bloc corespunzătoare modelului OE este:



De unde rezultă modelul discret corespunzător, cu perturbația nemodelată la ieșire :

$$Y(z) = \frac{z^{-nd}B\left(z^{-1}\right)}{F\left(z^{-1}\right)}U(z) + E(z)$$

unde:

$$F\left(z^{-1}\right) = 1 + f\,1z^{-1} + \ldots + f_{nF}z^{-nF}$$

$$B\left(z^{-1}\right) = b1 + b2 \cdot z^{-1} + \ldots + b_{nB}z^{-nB+1}$$

În cazul nostru:

nB=1
nF=2
nd=1

Rezultă polinoamele:

B(z) = 0.03366 z^-1
F(z) = 1 - 1.831 z^-1 + 0.8644 z^-2

Pe baza lor construim un model matematic in discret:

Hz_y1oe =

```
          0.03366 z^-1
  ----------------------------
  1 - 1.831 z^-1 + 0.8644 z^-2
```

Pe care l-am transformat și în contiunuu prin metoda zoh:

Hs_y1oe =

$$\frac{355.03\,(s+4.087e04)}{(s^2 + 2914s + 1.432e07)}$$

Un sistem identificat folosind metoda OE trebuie validat prin intercorelație.

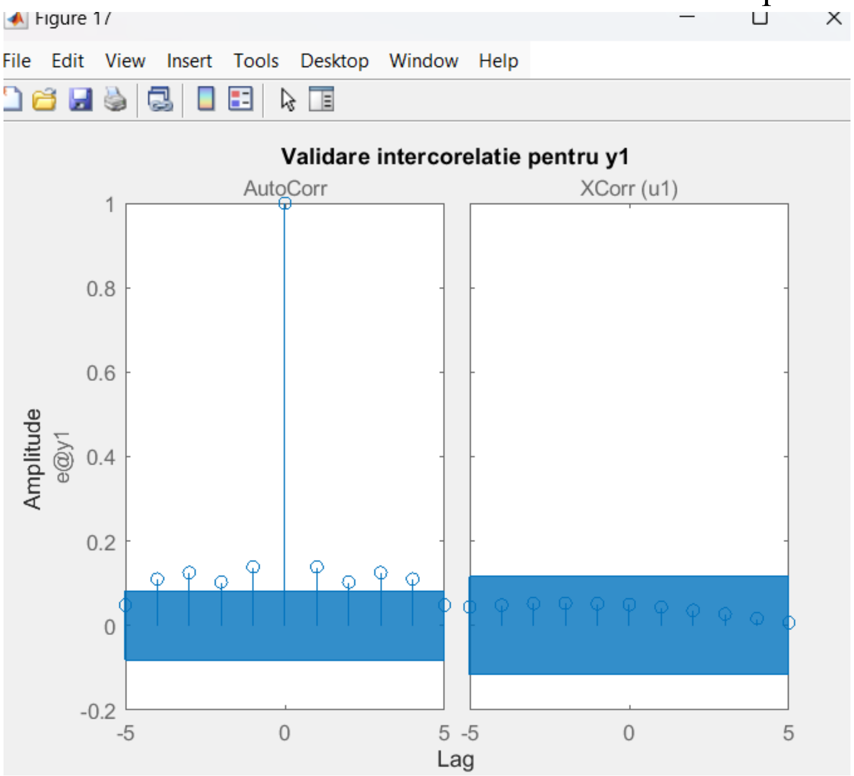


Fig10. Validarea prin intercorelație cu frunctia resid pentru metoda OE

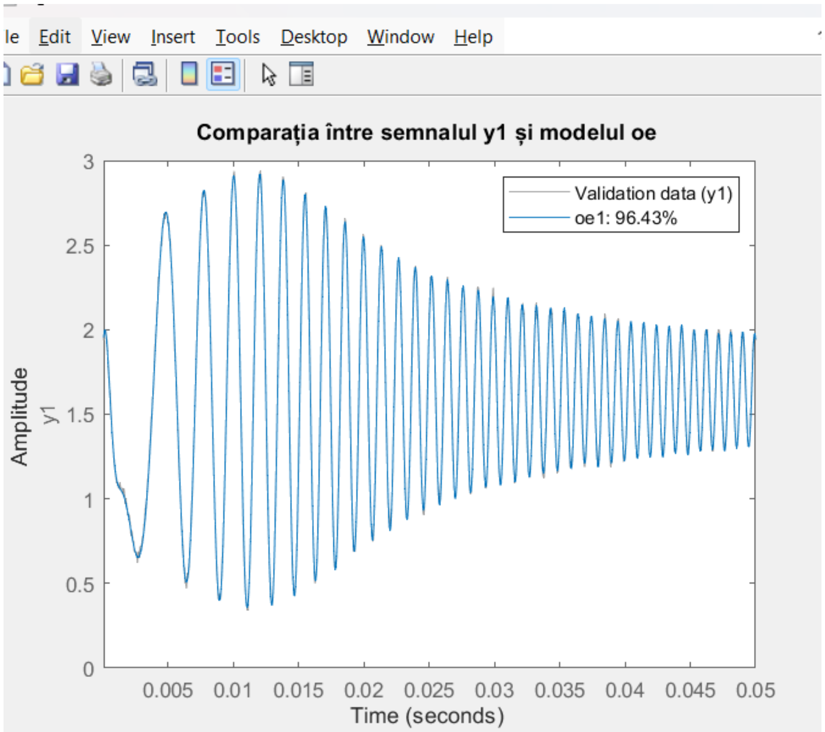


Fig11. Validare cu functia compare pentru metoda OE

Observam ca modelul identificat este validat prin intercorelație, iar din prespectiva gradului de urmărire, acest model urmarește datele de validare tot cu un grad de 96.43% (Fig11.), de unde rezulta o eroare de 3.57%.

3.2. Identificarea semnalului y2 pe baza metodelor parametrice.

3.2.1. Identificare folosind ARMAX și validare prin autocorelatie.

Modelul se identifică urmarind aceeași pași ca și la semnalul y1.

Astfel, datele de intrare și datele de ieșire trebuie grupate într-un singur obiect de tip *iddata*.

În cazul nostru:

nA=2

nB=2
nC=2
nd=1

Rezultă polinoamele:

A(z) = 1 - 1.83 z^-1 + 0.8613 z^-2
B(z) = 0.1175 z^-1 - 0.08584 z^-2
C(z) = 1 - 1.525 z^-1 + 0.619 z^-2, corespunzător perturbației

Pe baza polinoamelor A si B, construim un model matematic în discret corespunzator 'procesului':

Hz_y2armax =

```
0.1175 z^-1 - 0.08584 z^-2
---------------------------
1 - 1.83 z^-1 + 0.8613 z^-2
```

Pe care l-am transformat și în contiunuu prin metoda zoh:

Hs_y2 =

```
   2193.4 (s+6241)
------------------------
(s^2 + 2987s + 1.353e07)
```

Metoda ARMAX se valideaza prin autocorelatie

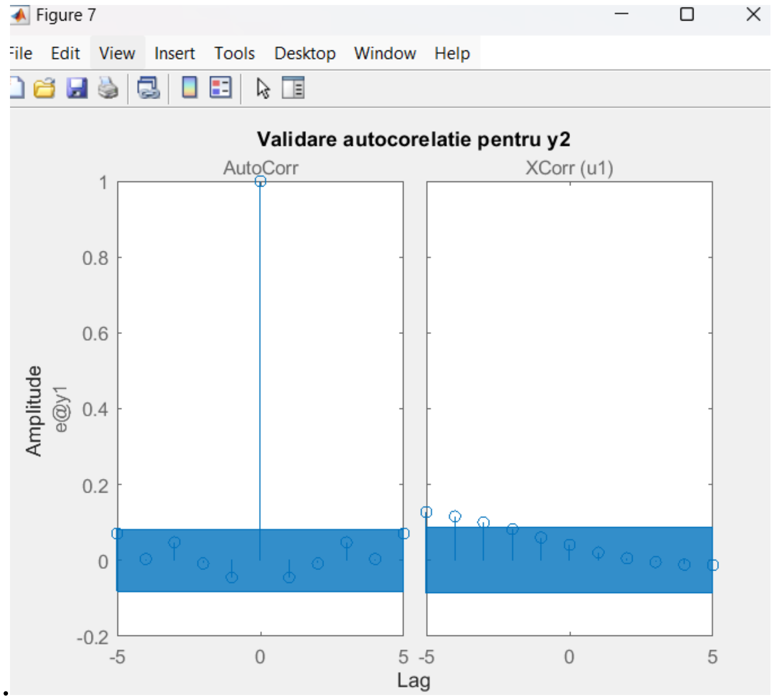


Fig12 . Validarea prin autocorelatie cu frunctia resid pentru metoda ARMAX

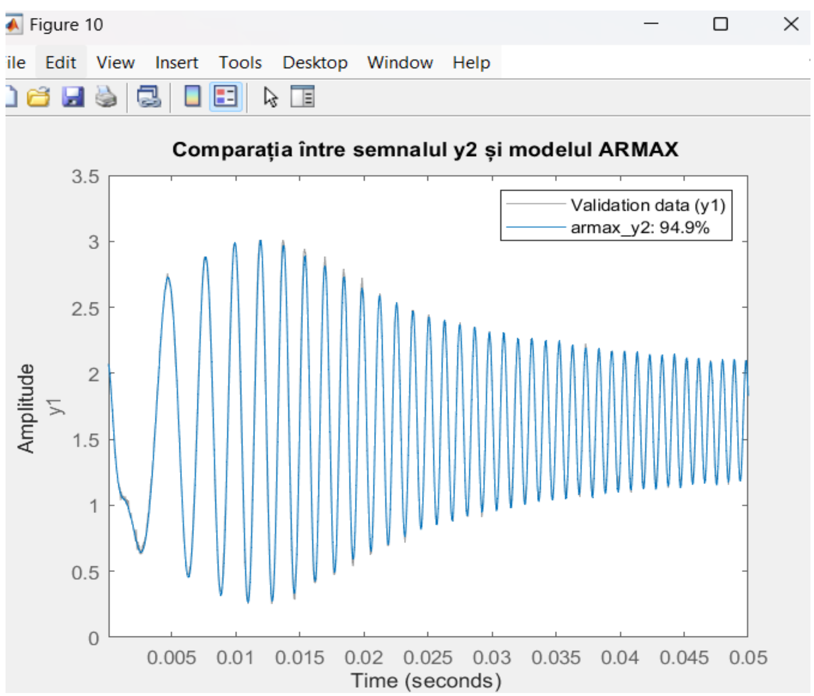
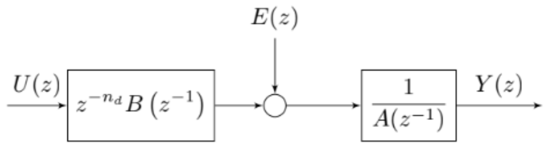


Fig13. Validare cu functia compare pentru metoda ARMAX

Observam ca modelul identificat este validat prin autocoorleație, iar din prespectiva gradului de urmărire, acest model urmareşte datele de validare cu un grad de 94.9% (Fig13.), de unde rezulta o eroare de 5.1%.

3.2.2. Identificare folosind IV și validare prin intercorelație.

Metoda IV (engl. Instrumental Variables) prezinta următoarea schemă bloc:



De unde rezultă modelul discret corespunzător:

$$A(z^{-1})\, Y(z) = z^{-nd} B(z^{-1})\, U(z) + E(z)$$

unde polinoamele A, B au aceeasi strucutra ca mai sus.

Parametrii:

nA=2

nB=2

nd=0

Rezulta polinoamele:

A(z) = 1 - 1.825 z^-1 + 0.8602 z^-2

B(z) = 0.06936 - 0.03367 z^-1

Pe baza lor construim un model matematic in discret:

Hz_y1iv =

```
  0.06936 - 0.03367 z^-1
----------------------------
1 - 1.825 z^-1 + 0.8602 z^-2
```

Pe care l-am transformat și în contiunuu prin metoda zoh:

Hs_y1iv =

$$\frac{0.069358\,(s^2 + 2.673e04s + 2.224e08)}{(s^2 + 3013s + 1.525e07)}$$

Un sistem identificat folosind metoda IV trebuie validat prin intercorelație.

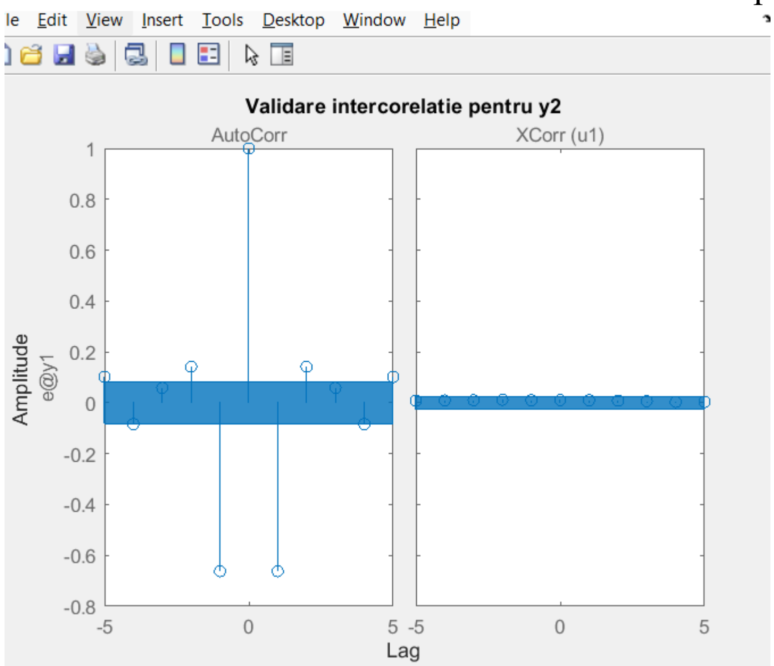


Fig14. Validarea prin intercorelație cu frunctia resid pentru metoda IV

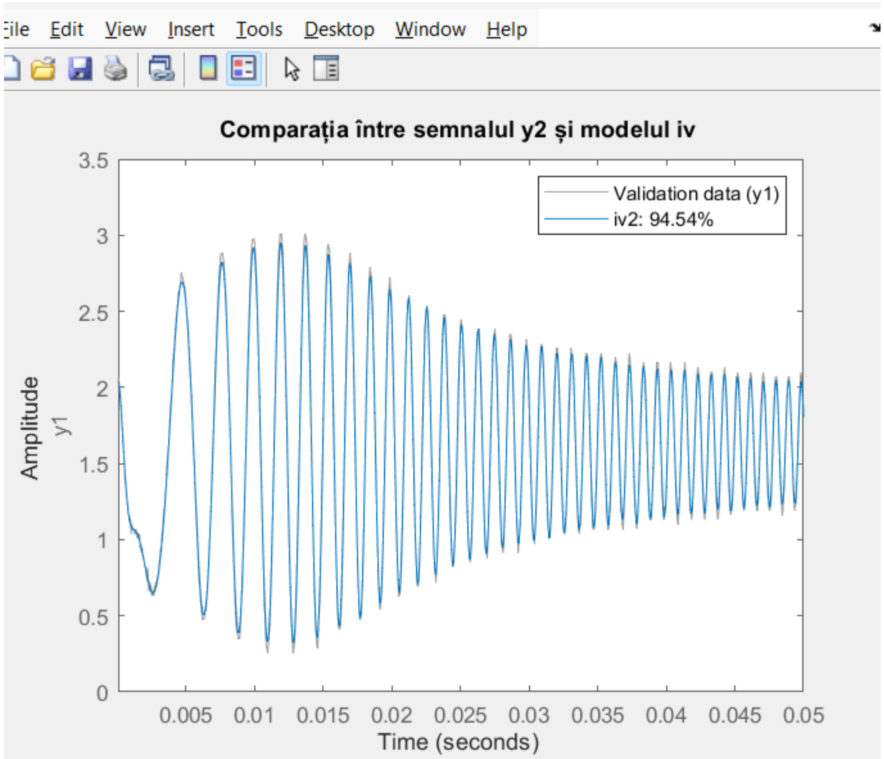


Fig15. Validare cu functia compare pentru metoda IV

Observam ca modelul identificat este validat prin intercorelație, iar din prespectiva gradului de urmărire, acest model urmarește datele de validare cu un grad de 94.54% (Fig15.), de unde rezulta o eroare de 5.46%.