

Застосування марківських випадкових полів для моделювання економічних процесів з конкурентними технологіями

Богдан Кулинич

14 травня 2014

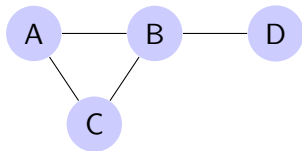
Задача

- ▶ Система економічних агентів (підприємств), що взаємодіють між собою.
- ▶ У кожен момент часу підприємство обирає технологію виробництва
- ▶ Вибір технології впливає на стан системи
- ▶ Кожна технологія несе певні витрати (або приносить доходи) для підприємства

Знайти стратегію вибору технологій, що мінімізує очікувані витрати (або максимізує очікувані доходи)

Модель системи

Формулювання



- ▶ Множина економічних агентів $V = \{A, B, C, D\}$
- ▶ Граф взаємодії агентів $G = (V, E)$

Модель системи

Формулювання

- ▶ Стани X_v

$$X_A = \{a_1, a_2, a_3\}, X_B = \{b_1, b_2\}$$

$$X_C = \{c_1, c_2\}, X_D = \{c_1, c_2, c_3\}$$

$$X = \times_{v \in V} X_v - \text{системи. } |X| = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$$

- ▶ Можливі дії агентів (*технології виробництва*) U_v

$$U_A = \{\alpha_1, \alpha_2\}, U_B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

$$U_C = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}, U_D = \{\zeta_1, \zeta_2\}$$

$$U = \times_{v \in V} U_v - \text{дії системи. } |U| = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 48$$

Модель системи

Формулювання

- ▶ Стани X_v

$$X_A = \{a_1, a_2, a_3\}, X_B = \{b_1, b_2\}$$

$$X_C = \{c_1, c_2\}, X_D = \{c_1, c_2, c_3\}$$

$$X = \times_{v \in V} X_v - \text{системи. } |X| = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$$

- ▶ Можливі дії агентів (*технології виробництва*) U_v

$$U_A = \{\alpha_1, \alpha_2\}, U_B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

$$U_C = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}, U_D = \{\zeta_1, \zeta_2\}$$

$$U = \times_{v \in V} U_v - \text{дії системи. } |U| = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 48$$

Модель системи

Формулювання

- ▶ Еволюція системи відбувається у дискретному часі $t = 0, 1, \dots$
- ▶ Зміна станів відбувається стохастично.
 (Ω, \mathcal{F}, P) . $\xi = (\xi^t \mid t = 0, 1, \dots)$. $\xi^t : \Omega \rightarrow X$
- ▶ Рішення про вибір технологій $\Delta^t : X \rightarrow U$
- ▶ Стаціонарні стратегії $\delta = \{\Delta^t \mid t = 0, 1, \dots\}$
- ▶ Кожне рішення має витрати (або дохід) $r : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$

Модель системи

Формулювання

- ▶ Еволюція системи відбувається у дискретному часі $t = 0, 1, \dots$
- ▶ Зміна станів відбувається стохастично.
 (Ω, \mathcal{F}, P) . $\xi = (\xi^t \mid t = 0, 1, \dots)$. $\xi^t : \Omega \rightarrow X$
- ▶ Рішення про вибір технологій $\Delta^t : X \rightarrow U$
- ▶ Стаціонарні стратегії $\delta = \{\Delta^t \mid t = 0, 1, \dots\}$
- ▶ Кожне рішення має витрати (або дохід) $r : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$

Модель системи

Формулювання

- ▶ Еволюція системи відбувається у дискретному часі $t = 0, 1, \dots$
- ▶ Зміна станів відбувається стохастично.
 (Ω, \mathcal{F}, P) . $\xi = (\xi^t \mid t = 0, 1, \dots)$. $\xi^t : \Omega \rightarrow X$
- ▶ Рішення про вибір технологій $\Delta^t : X \rightarrow U$
- ▶ Стаціонарні стратегії $\delta = \{\Delta^t \mid t = 0, 1, \dots\}$
- ▶ Кожне рішення має витрати (або дохід) $r : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$

Модель системи

Формулювання

- ▶ Еволюція системи відбувається у дискретному часі $t = 0, 1, \dots$
- ▶ Зміна станів відбувається стохастично.
 (Ω, \mathcal{F}, P) . $\xi = (\xi^t \mid t = 0, 1, \dots)$. $\xi^t : \Omega \rightarrow X$
- ▶ Рішення про вибір технологій $\Delta^t : X \rightarrow U$
- ▶ Стаціонарні стратегії $\delta = \{\Delta^t \mid t = 0, 1, \dots\}$
- ▶ Кожне рішення має витрати (або дохід) $r : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$

Модель системи

Основні припущення

Означення

Нехай закритий окіл вершини графа $G = (V, E)$:

$$\tilde{N}(v) = \{w \mid \{v, w\} \in E\} \cup \{v\}$$

- Локальність взаємодії агентів відносно графа G

$$\begin{aligned} P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0, \dots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) = \\ = P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi_{\tilde{N}(v)}^0 = x_{\tilde{N}(v)}^0, \Delta_v^0 = u_v^0, \dots, \\ \xi_{\tilde{N}(v)}^t = x_{\tilde{N}(v)}^t, \Delta_v^t = u_v^t) \end{aligned}$$

- Локальність рішень відносно графа G

$$\Delta_v^t = \Delta_v^t(x^0, x^1, \dots, x^t) = \Delta_v^t(x_{\tilde{N}(v)}^0, x_{\tilde{N}(v)}^1, \dots, x_{\tilde{N}(v)}^t)$$

Модель системи

Основні припущення

Означення

Нехай закритий окіл вершини графа $G = (V, E)$:

$$\tilde{N}(v) = \{w \mid \{v, w\} \in E\} \cup \{v\}$$

- *Локальність* взаємодії агентів відносно графа G

$$\begin{aligned} P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0, \dots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) = \\ = P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi_{\tilde{N}(v)}^0 = x_{\tilde{N}(v)}^0, \Delta_v^0 = u_v^0, \dots, \\ \xi_{\tilde{N}(v)}^t = x_{\tilde{N}(v)}^t, \Delta_v^t = u_v^t) \end{aligned}$$

- *Локальність* рішень відносно графа G

$$\Delta_v^t = \Delta_v^t(x^0, x^1, \dots, x^t) = \Delta_v^t(x_{\tilde{N}(v)}^0, x_{\tilde{N}(v)}^1, \dots, x_{\tilde{N}(v)}^t)$$

Модель системи

Основні припущення

Означення

Нехай закритий окіл вершини графа $G = (V, E)$:

$$\tilde{N}(v) = \{w \mid \{v, w\} \in E\} \cup \{v\}$$

- *Локальність* взаємодії агентів відносно графа G

$$\begin{aligned} P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0, \dots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) = \\ = P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi_{\tilde{N}(v)}^0 = x_{\tilde{N}(v)}^0, \Delta_v^0 = u_v^0, \dots, \\ \xi_{\tilde{N}(v)}^t = x_{\tilde{N}(v)}^t, \Delta_v^t = u_v^t) \end{aligned}$$

- *Локальність* рішень відносно графа G

$$\Delta_v^t = \Delta_v^t(x^0, x^1, \dots, x^t) = \Delta_v^t(x_{\tilde{N}(v)}^0, x_{\tilde{N}(v)}^1, \dots, x_{\tilde{N}(v)}^t)$$

Модель системи

Основні припущення

- ▶ *Марковість* (повнота стану)

$$\begin{aligned} P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0, \dots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) = \\ = P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi_{\tilde{N}(v)}^t = x_{\tilde{N}(v)}^t, \Delta_v^t = u_v^t) \\ \Delta_v^t = \Delta_v^t(x_{\tilde{N}(v)}^t) \end{aligned}$$

- ▶ *Синхронність взаємодії*

$$\begin{aligned} P(\xi_W^{t+1} = x_W \mid \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) = \\ = \prod_{w \in W} P(\xi_w^{t+1} = x_w \mid \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) \end{aligned}$$

Модель системи

Основні припущення

- ▶ *Марковість* (повнота стану)

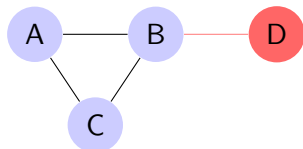
$$\begin{aligned} P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0, \dots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) = \\ = P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi_{\tilde{N}(v)}^t = x_{\tilde{N}(v)}^t, \Delta_v^t = u_v^t) \\ \Delta_v^t = \Delta_v^t(x_{\tilde{N}(v)}^t) \end{aligned}$$

- ▶ *Синхронність* взаємодії

$$\begin{aligned} P(\xi_W^{t+1} = x_W \mid \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) = \\ = \prod_{w \in W} P(\xi_w^{t+1} = x_w \mid \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) \end{aligned}$$

Модель системы

Приклад



$$\begin{aligned} P(\xi_D^{t+1} = x \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0, \dots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) \\ = P(\xi_D^{t+1} = x \mid \xi_D = d, \xi_B = b, \Delta_D^t = u) \end{aligned}$$

$$\Delta_D^t = \Delta_D^t(\xi_D^t, \xi_B^t)$$

Модель системи

Задання

Однозначно задають систему:

- ▶ R – матриця витрат, $R_{ij} = r(x_i, u_j)$. Розмірність $|X| \times |U| = 36 \times 48$
- ▶ Q^k – матриці перехідних імовірностей.

$$Q_{ij}^k = P(\xi^{t+1} = x_j \mid \xi^t = x_i, \Delta^t = u_k)$$

Розмірність кожної $Q^k - |X| \times |X| = 36 \times 36$. Кількість $Q^k - |U| = 48$

Модель системи

Марківське випадкове поле

Означення

Визначений керований процес (ξ, δ) відносно графа взаємодії $G = (V, E)$ називається *керованим марківським випадковим полем з дискретним часом*.

- ▶ За стаціонарності стратегій, таке поле також є однорідним марківським ланцюгом

Модель системи

Марківське випадкове поле

Означення

Визначений керований процес (ξ, δ) відносно графа взаємодії $G = (V, E)$ називається *керованим марківським випадковим полем з дискретним часом*.

- ▶ За стаціонарності стратегій, таке поле також є однорідним марківським ланцюгом

Знаходження оптимальної стратегії

Формулювання

- ▶ Математичне сподівання витрат для стратегії δ :

$$C_T^\delta = E \left[\frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T r(\xi^t, \Delta^t) \right]$$

- ▶ Оптимальна стратегія δ^* мінімізує $C_T^\delta(y)$ при $T \rightarrow \infty$ для всіх $y \in X$:

$$R_y^\delta = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup C_T^\delta(y)$$
$$\delta^* = R_y^{\delta^*}, \quad y \in X$$

Знаходження оптимальної стратегії

Формулювання

- ▶ Математичне сподівання витрат для стратегії δ :

$$C_T^\delta = E \left[\frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T r(\xi^t, \Delta^t) \right]$$

- ▶ Оптимальна стратегія δ^* мінімізує $C_T^\delta(y)$ при $T \rightarrow \infty$ для всіх $y \in X$:

$$R_y^\delta = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup C_T^\delta(y)$$
$$\delta^* = R_y^{\delta^*}, \quad y \in X$$

Знаходження оптимальної стратегії

Задача лінійного програмування

Для даного керованого марківського поля стратегію δ^* можна знайти, розв'язавши задачу ЛП:

$$\min \sum_{x \in X} \sum_{u \in U} r(x, u) z_{xu}$$

З обмеженнями:

$$\sum_{u \in U} z_{xu} = \sum_{y \in X} \sum_{u \in U} Q_{yx}^u z_{yu}, \quad x \in X$$

$$\sum_{x \in X} \sum_{u \in U} z_{xu} = 1$$

$$z_{xu} \geq 0, \quad x \in X, u \in U$$

Знаходження оптимальної стратегії

Інтерпретація

Стратегія δ^* задається так:

- ▶ Якщо $z_{xu} \neq 0$, то в стані x слід обирати дію u
- ▶ Якщо $z_{xu} = 0$, то в стані x *не слід* обирати дію u

Програмна реалізація та весь код курсової роботи:

`github.com/bogdan-kulynych/mrf-in-economics`