Застосування марківських випадкових полів для моделювання економічних процесів з конкурентними технологіями

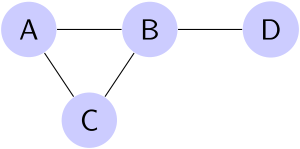
Богдан Кулинич

14 травня 2014

Задача

- Система економічних агентів (підприємств), що взаємодіють між собою.
- У кожен момент часу підприємство обирає технологію виробництва
- Вибір технології впливає на стан системи
- Кожна технологія несе певні витрати (або приносить доходи) для підприємства

Знайти стратегію вибору технологій, що мінімізує очікувані витрати (або максимізує очікувані доходи)



- Множина економічних агентів $V = \{A, B, C, D\}$
- Граф взаємодії агентів $G = (V, E)$

- Стани X_v

$$X_A = \{a_1, a_2, a_3\}, X_B = \{b_1, b_2\}$$
$$X_C = \{c_1, c_2\}, X_D = \{c_1, c_2, c_3\}$$

$X = \times_{v \in V} X_v$ – системи. $|X| = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$

- Можливі дії агентів (*технології виробництва*) U_v

$$U_A = \{\alpha_1, \alpha_2\}, U_B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$
$$U_C = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}, U_D = \{\zeta_1, \zeta_2\}$$

$U = \times_{v \in V} U_v$ – дії системи. $|U| = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 48$

- Стани X_v

$$X_A = \{a_1, a_2, a_3\}, X_B = \{b_1, b_2\}$$
$$X_C = \{c_1, c_2\}, X_D = \{c_1, c_2, c_3\}$$

$X = \times_{v \in V} X_v$ – системи. $|X| = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$

- Можливі дії агентів (*технології виробництва*) U_v

$$U_A = \{\alpha_1, \alpha_2\}, U_B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$
$$U_C = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}, U_D = \{\zeta_1, \zeta_2\}$$

$U = \times_{v \in V} U_v$ – дії системи. $|U| = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 48$

Модель системи

Формулювання

- Еволюція системи відбувається у дискретному часі $t = 0, 1, \ldots$
- Зміна станів відбувається стохастично. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $\xi = (\xi^t \mid t = 0, 1, \ldots)$. $\xi^t : \Omega \to X$
- Рішення про вибір технологій $\Delta^t : X \to U$
- Стаціонарні стратегії $\delta = \{\Delta^t \mid t = 0, 1, \ldots\}$
- Кожне рішення має витрати (або дохід) $r : X \times U \to \mathbb{R}$

Модель системи

Формулювання

- Еволюція системи відбувається у дискретному часі $t = 0, 1, \ldots$
- Зміна станів відбувається стохастично. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $\xi = (\xi^t \mid t = 0, 1, \ldots)$. $\xi^t : \Omega \to X$
- Рішення про вибір технологій $\Delta^t : X \to U$
- Стаціонарні стратегії $\delta = \{\Delta^t \mid t = 0, 1, \ldots\}$
- Кожне рішення має витрати (або дохід) $r : X \times U \to \mathbb{R}$

Модель системи

Формулювання

- Еволюція системи відбувається у дискретному часі $t = 0, 1, \ldots$
- Зміна станів відбувається стохастично. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $\xi = (\xi^t \mid t = 0, 1, \ldots)$. $\xi^t : \Omega \to X$
- Рішення про вибір технологій $\Delta^t : X \to U$
- Стаціонарні стратегії $\delta = \{\Delta^t \mid t = 0, 1, \ldots\}$
- Кожне рішення має витрати (або дохід) $r : X \times U \to \mathbb{R}$

- Еволюція системи відбувається у дискретному часі $t = 0, 1, \ldots$
- Зміна станів відбувається стохастично. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $\quad \xi = (\xi^t \mid t = 0, 1, \ldots)$. $\quad \xi^t : \Omega \to X$
- Рішення про вибір технологій $\Delta^t : X \to U$
- Стаціонарні стратегії $\delta = \{\Delta^t \mid t = 0, 1, \ldots\}$
- Кожне рішення має витрати (або дохід) $r : X \times U \to \mathbb{R}$

Модель системи

Основні припущення

Означення

Нехай закритий окіл вершини графа $G = (V, E)$:
$\tilde{N}(v) = \big\{ w \mid \{v, w\} \in E \big\} \cup \{v\}$

- *Локальність* взаємодії агентів відносно графа G

$$P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0, \ \dots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) =$$
$$= P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi_{\tilde{N}(v)}^0 = x_{\tilde{N}(v)}^0, \Delta_{\tilde{N}(v)}^0 = u_{\tilde{N}(v)}^0, \ \dots,$$
$$\xi_{\tilde{N}(v)}^t = x_{\tilde{N}(v)}^t, \Delta_{\tilde{N}(v)}^t = u_{\tilde{N}(v)}^t)$$

- *Локальність* рішень відносно графа G

$$\Delta_v^t = \Delta_v^t(x^0, x^1, \dots, x^t) = \Delta_v^t(x_{\tilde{N}(v)}^0, x_{\tilde{N}(v)}^1, \dots, x_{\tilde{N}(v)}^t)$$

Означення

Нехай закритий окіл вершини графа $G = (V, E)$:
$\tilde{N}(v) = \{w \mid \{v, w\} \in E\} \cup \{v\}$

- *Локальність* взаємодії агентів відносно графа G

$$
\begin{aligned}
&P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0,\ \ldots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) = \\
&= P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^0_{\tilde{N}(v)} = x^0_{\tilde{N}(v)}, \Delta^0_{\tilde{N}(v)} = u^0_{\tilde{N}(v)},\ \ldots, \\
&\qquad \xi^t_{\tilde{N}(v)} = x^t_{\tilde{N}(v)}, \Delta^t_{\tilde{N}(v)} = u^t_{\tilde{N}(v)})
\end{aligned}
$$

- *Локальність* рішень відносно графа G

$$
\Delta_v^t = \Delta_v^t(x^0, x^1, \ldots, x^t) = \Delta_v^t(x^0_{\tilde{N}(v)}, x^1_{\tilde{N}(v)}, \ldots, x^t_{\tilde{N}(v)})
$$

Означення

Нехай закритий окіл вершини графа $G = (V, E)$:
$\tilde{N}(v) = \{w \mid \{v, w\} \in E\} \cup \{v\}$

- *Локальність* взаємодії агентів відносно графа G

$$P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0, \ \ldots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) =$$
$$= P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi_{\tilde{N}(v)}^0 = x_{\tilde{N}(v)}^0, \Delta_{\tilde{N}(v)}^0 = u_{\tilde{N}(v)}^0, \ \ldots,$$
$$\xi_{\tilde{N}(v)}^t = x_{\tilde{N}(v)}^t, \Delta_{\tilde{N}(v)}^t = u_{\tilde{N}(v)}^t)$$

- *Локальність* рішень відносно графа G

$$\Delta_v^t = \Delta_v^t(x^0, x^1, \ldots, x^t) = \Delta_v^t(x_{\tilde{N}(v)}^0, x_{\tilde{N}(v)}^1, \ldots, x_{\tilde{N}(v)}^t)$$

- *Марковість* (повнота стану)

$$P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0, \ \ldots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) =$$
$$= P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi_{\tilde{N}(v)}^t = x_{\tilde{N}(v)}^t, \Delta_{\tilde{N}(v)}^t = u_{\tilde{N}(v)}^t)$$
$$\Delta_v^t = \Delta_v^t(x_{\tilde{N}(v)}^t)$$

- *Синхронність* взаємодії

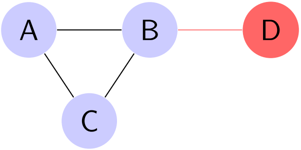
$$P(\xi_W^{t+1} = x_W \mid \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) =$$
$$= \prod_{w \in W} P(\xi_w^{t+1} = x_w \mid \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t)$$

- *Марковість* (повнота стану)

$$P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0,\ \dots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) =$$
$$= P(\xi_v^{t+1} = x_v \mid \xi^t_{\tilde{N}(v)} = x^t_{\tilde{N}(v)}, \Delta^t_{\tilde{N}(v)} = u^t_{\tilde{N}(v)})$$
$$\Delta_v^t = \Delta_v^t(x^t_{\tilde{N}(v)})$$

- *Синхронність* взаємодії

$$P(\xi_W^{t+1} = x_W \mid \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t) =$$
$$= \prod_{w \in W} P(\xi_w^{t+1} = x_w \mid \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t)$$



$$P(\xi_D^{t+1} = x \,|\xi^0 = x^0, \Delta^0 = u^0, \ldots, \xi^t = x^t, \Delta^t = u^t)$$
$$= P(\xi_D^{t+1} = x \mid \xi_B = y, \Delta_B^t = u)$$

$$\Delta_D^t = \Delta_D^t(\xi_D^t,\ \xi_B^t)$$

Однозначно задають систему:

- R – матриця витрат, $R_{ij} = r(x_i, u_j)$. Розмірність $|X| \times |U| = 36 \times 48$
- Q^k – матриці перехідних імовірностей.

$$Q^k_{ij} = P(\xi^{t+1} = x_j \mid \xi^t = x_i, \Delta^t = u_k)$$

Розмірність кожної Q^k – $|X| \times |X| = 36 \times 36$. Кількість Q^k – $|U| = 48$

Означення

Такий керований процес (ξ, δ) відносно графа взаємодії $G = (V, E)$ називається *керованим марківським випадковим полем з дискретним часом*.

- За стаціонарності стратегій, таке поле також є однорідним марківським ланцюгом

Означення

Такий керований процес (ξ, δ) відносно графа взаємодії $G = (V, E)$ називається *керованим марківським випадковим полем з дискретним часом*.

- За стаціонарності стратегій, таке поле також є однорідним марківським ланцюгом

- Математичне сподівання витрат для стратегії δ:

$$C_T^\delta = E\left[\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T} r(\xi^t, \Delta^t)\right]$$

- Оптимальна стратегія δ^* мінімізує $C_T^\delta(y)$ при $T \to \infty$ для всіх $y \in X$:

$$R_y^\delta = \lim_{T\to\infty} \sup C_T^\delta(y)$$

$$\delta^* = R_y^{\delta^*}, \; y \in X$$

- Математичне сподівання витрат для стратегії δ:

$$C_T^\delta = E\left[\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T} r(\xi^t, \Delta^t)\right]$$

- Оптимальна стратегія δ^* мінімізує $C_T^\delta(y)$ при $T \to \infty$ для всіх $y \in X$:

$$R_y^\delta = \lim_{T\to\infty} \sup C_T^\delta(y)$$

$$\delta^* = R_y^{\delta^*}, \; y \in X$$

Для даного керованого марківського поля δ^* можна знайти, розв'язавши задачу ЛП:

$$\min \sum_{x \in X} \sum_{u \in U} r(x, u)\ z_{xu}$$

З обмеженнями:

$$\sum_{u \in U} z_{xu} = \sum_{y \in X} \sum_{u \in U} Q^u_{yx} z_{yu},\ \ x \in X$$

$$\sum_{x \in X} \sum_{u \in U} z_{xu} = 1$$

$$z_{xu} \geq 0,\ \ x \in X, u \in U$$

Стратегія δ^* задається так:

- Якщо $z_{xu} \neq 0$, то в стані x слід обирати дію u
- Якщо $z_{xu} = 0$, то в стані x *не слід* обирати дію u

Fin

Програмна реалізація, та весь код курсової роботи:

`github.com/bogdan-kulynych/mrf-in-economics`