

Симетрична схема частково-гомоморфного шифрування над кільцем цілих чисел

Богдан Кулинич

17 квітня 2015

Асиметричне шифрування

Схема асиметричного шифрування \mathcal{E} :

- ▶ $\text{KeyGen}_{\mathcal{E}}(1^\lambda) \rightarrow (\mathbf{pk}, \mathbf{sk})$
- ▶ $\text{Encrypt}_{\mathcal{E}}(\mathbf{pk}, m \in \{0, 1\}) \rightarrow c \in \mathcal{C}$.
- ▶ $\text{Decrypt}_{\mathcal{E}}(\mathbf{sk}, c \in \mathcal{C}) \rightarrow m \in \{0, 1\}$

Гомоморфне шифрування

Схема асиметричного **гомоморфного** шифрування \mathcal{E} :

- ▶ $\text{KeyGen}_{\mathcal{E}}(1^\lambda) \rightarrow (\mathbf{pk}, \mathbf{sk})$
- ▶ $\text{Encrypt}_{\mathcal{E}}(\mathbf{pk}, m \in \{0, 1\}) \rightarrow c \in \mathcal{C}$.
- ▶ $\text{Decrypt}_{\mathcal{E}}(\mathbf{sk}, c \in \mathcal{C}) \rightarrow m \in \{0, 1\}$
- ▶ $\text{Add}_{\mathcal{E}}(\mathbf{pk}, c_1 \in \mathcal{C}, c_2 \in \mathcal{C})$
- ▶ $\text{Mult}_{\mathcal{E}}(\mathbf{pk}, c_1 \in \mathcal{C}, c_2 \in \mathcal{C})$

Означення. Позначимо шифрування біта m як \hat{m} :

$$\text{Decrypt}_{\mathcal{E}}(\mathbf{pk}, \hat{m}) = m$$

для відомого контексту $(\mathbf{pk}, \mathbf{sk})$ і схеми \mathcal{E} . Нехай також:

(Гомоморфне додавання) $\hat{m}_1 \oplus \hat{m}_2 = \text{Add}_{\mathcal{E}}(\mathbf{pk}, \hat{m}_1, \hat{m}_2)$

(Гомоморфне множення) $\hat{m}_1 \otimes \hat{m}_2 = \text{Mult}_{\mathcal{E}}(\mathbf{pk}, \hat{m}_1, \hat{m}_2)$

Повне гомоморфне шифрування

Гомоморфна схема шифрування \mathcal{E} *коректна* і *повна*, якщо для будь-яких $m_1, m_2 \in \{0, 1\}$ і будь-яких $\hat{m}_1, \hat{m}_2 \in \mathcal{C}$:

- ▶ $\text{Decrypt}_{\mathcal{E}}(\text{sk}, \hat{m}_1 \oplus \hat{m}_2) = m_1 + m_2 \bmod 2$
- ▶ $\text{Decrypt}_{\mathcal{E}}(\text{sk}, \hat{m}_1 \otimes \hat{m}_2) = m_1 \cdot m_2 \bmod 2$

Повне гомоморфне шифрування

Схеми гомоморфного шифрування першого покоління (2009—2010):

- ▶ Перша схема на базі ідеальних решіток [Gen09]
- ▶ На базі цілих чисел [DGHV10]

Схема DGHV над цілими числами

Оригінальні формулювання

- ▶ Шифрування (симетричне) біта m з приватним ключем $\mathbf{sk} = p$

$$c = q \cdot p + m + 2r$$

- ▶ Шифрування біта m з публічним ключем \mathbf{pk}

$$c = \left[m + 2r + 2 \sum_{i \in S} x_i \right]_{x_0}$$

- ▶ Публічний ключ \mathbf{pk} — набір шифрувань нуля

$$x_i = q_i \cdot p + r_i$$

- ▶ $x_0 = q_0 \cdot p$ — елемент без шуму
- ▶ Розшифрування c

$$m = [c \bmod p]_2$$

Схема DGHV над цілими числами

Симетричний варіант з публічним елементом без шуму x_0

- ▶ Шифрування (симетричне) біта m з приватним ключем $sk = p$

$$c = [q \cdot p + m + 2r]_{x_0}$$

- ▶ $x_0 = q_0 \cdot p$ – публічний елемент без шуму
- ▶ Розшифрування c

$$m = [c \bmod p]_2$$

- ▶ Гомоморфне додавання

$$c_1 \oplus c_2 = [c_1 + c_2]_{x_0}$$

- ▶ Гомоморфне множення

$$c_1 \otimes c_2 = [c_1 \cdot c_2]_{x_0}$$

Схема DGHV над цілими числами

Симетричний варіант з публічним елементом без шуму x_0

- ▶ Шифрування (симетричне) біта m з приватним ключем $sk = p$

$$c = [q \cdot p + m + 2r]_{x_0}$$

- ▶ $x_0 = q_0 \cdot p$ – публічний елемент без шуму
- ▶ Розшифрування c

$$m = [c \bmod p]_2$$

- ▶ Гомоморфне додавання

$$c_1 \oplus c_2 = [c_1 + c_2]_{x_0}$$

- ▶ Гомоморфне множення

$$c_1 \otimes c_2 = [c_1 \cdot c_2]_{x_0}$$

Властивості симетричного варіанту DGHV I

- Схема частково-гомоморфна:

$$\begin{aligned}\hat{m}_1 \oplus \hat{m}_2 &= [m_1 + m_2 + (q_1 + q_2)p + 2(r_1 + r_2)]_{x_0} \\ &= [m_1 + m_2 + q' \cdot p + 2r']_{x_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{m}_1 \otimes \hat{m}_2 &= [m_1 \cdot m_2 + (q_1 q_2 p + q_1 m_2 + q_2 m_1 + 2q_1 r_2 + 2q_2 r_1)p \\ &\quad + 2(m_1 r_2 + m_2 r_1 + 2r_1 r_2)]_{x_0} \\ &= [m_1 \cdot m_2 + q' \cdot p + 2r']_{x_0}\end{aligned}$$

Зі збільшенням кількості виконаних операцій, шум $2r$ зростає. Коли перевищує $p - m$, c розшифровується некоректно.

- Техніка бутстрапінгу використовується, щоб зменшити шум в c [DGHV10, Gen09]

Властивості симетричного варіанту DGHV II

- Схема підтримує змішані операції:

$$\hat{m} \oplus \hat{1} = [\hat{m} + 1]_{x_0}$$

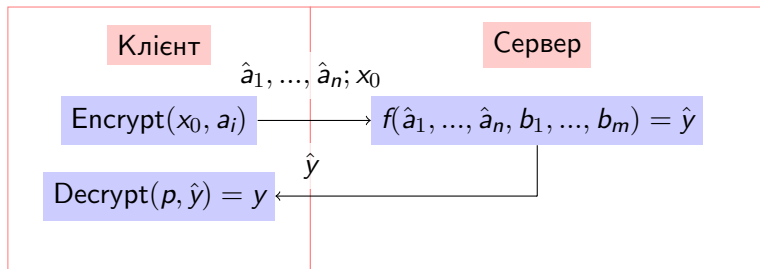
$$\hat{m} \oplus \hat{0} = [\hat{m} + 0]_{x_0} = \hat{m}$$

$$\hat{m} \otimes \hat{1} = [\hat{m} \cdot 1]_{x_0} = \hat{m}$$

$$\hat{m} \otimes \hat{0} = [\hat{m} \cdot 0]_{x_0} = 0$$

При цьому шум зростає тільки при виконанні додавання одиниці.

Висновки



- ▶ Виконання змішаних операцій дозволяє не шифрувати *всі* входи функції, що виконується гомоморфно
- ▶ Зникає необхідність передавати публічний ключ, що зменшує розмір передаваних даних
- ▶ Потрібно підбирати параметри схеми, щоб f виконувалась коректно (без перевищень шуму)



Marten van Dijk, Craig Gentry, Shai Halevi, and Vinod Vaikuntanathan.

Fully Homomorphic Encryption over the Integers.

In Henri Gilbert, editor, *EUROCRYPT*, volume 6110 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 24--43. Springer, 2010.



Craig Gentry.

A fully homomorphic encryption scheme.

PhD thesis, Stanford University, 2009.