

Лабораторная работа 6. Модель «хищник–жертва»

6.1. Математическая модель

Модель «хищник–жертва» (модель Лотки — Вольтерры) представляет собой модель межвидовой конкуренции (описание модели см. например в [1]). В математической форме модель имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy; \\ \dot{y} = cxy - dy, \end{cases} \quad (6.1)$$

где x — количество жертв; y — количество хищников; a, b, c, d — коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами: a — коэффициент рождаемости жертв; b — коэффициент убыли жертв; c — коэффициент рождения хищников; d — коэффициент убыли хищников.

6.2. Реализация модели в xcos

Зафиксируем начальные данные: $a = 2, b = 1, c = 0,3, d = 1, x(0) = 2, y(0) = 1$.

В меню *Моделирование*, *Задать переменные окружения* зададим значения коэффициентов a, b, c, d (рис. 6.1).

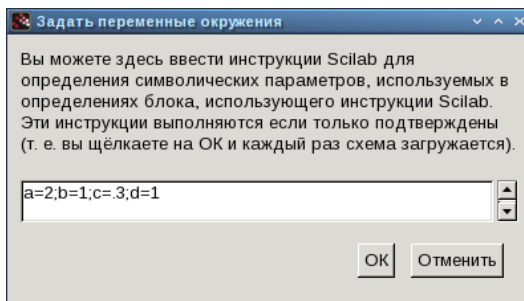


Рис. 6.1. Задать переменные окружения в xcos для модели (6.1)

Для реализации модели (6.1) в дополнение к блокам `CLOCK_c`, `CSCOPE`, `TEXT_f`, `MUX`, `INTEGRAL_m`, `GAINBLK_f`, `SUMMATION`, `PROD_f` потребуется блок `CSCOPXY` — регистрирующее устройство для построения фазового портрета.

Готовая модель «хищник–жертва» представлена на рис. 6.2.

Первое уравнение модели (6.1) задано верхним блоком интегрирования, блоком произведения и блоками задания коэффициентов a и b .

Второе уравнение модели (6.1) задано нижним блоком интегрирования и блоками задания коэффициентов c и d .

Для суммирования слагаемых правых частей уравнений (6.1) используем блоки суммирования с соответствующими знаками перед коэффициентами. Выходы блоков суммирования соединяем с входами блоков интегрирования. Выходы блоков интегрирования соединяем с мультиплексором, который в свою очередь позволяет вывести на один график сразу обе кривые: динамику численности жертв и динамику численности хищников.

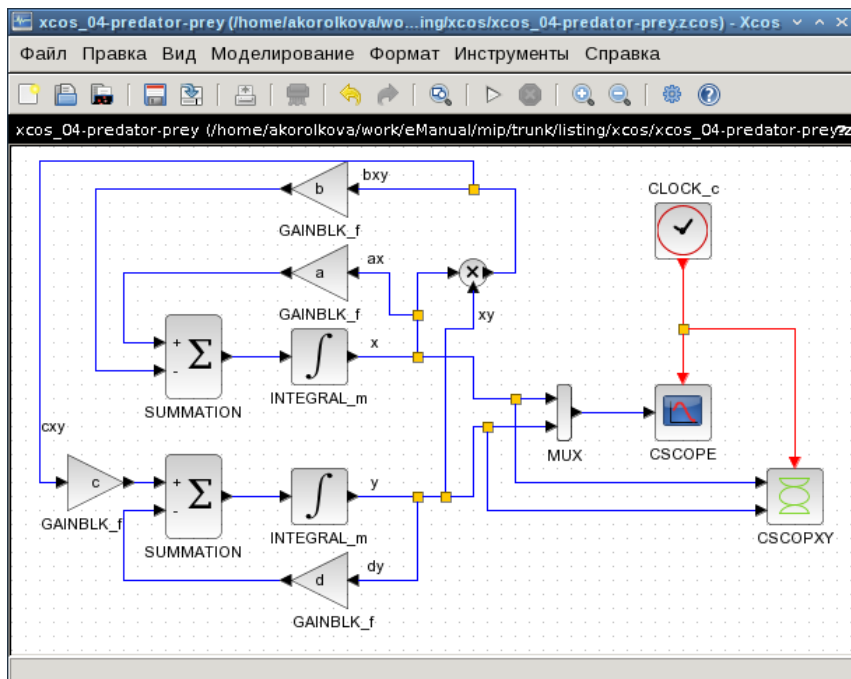


Рис. 6.2. Модель «хищник-жертва» в xcos

В параметрах блоков интегрирования необходимо задать начальные значения $x(0) = 2, y(0) = 1$ (рис. 6.3)

Set Integral block parameters	
Initial Condition	2
With re-initialization (1=yes, 0=no)	0
With saturation (1=yes, 0=no)	0
Upper limit	1
Lower limit	-1

Set Integral block parameters	
Initial Condition	1
With re-initialization (1=yes, 0=no)	0
With saturation (1=yes, 0=no)	0
Upper limit	1
Lower limit	-1

Рис. 6.3. Задать начальные значения в блоках интегрирования

В меню *Моделирование*, *Установка* необходимо задать *конечное время интегрирования*, равным времени моделирования: 30.

Результат моделирования представлен на рис. 6.4.

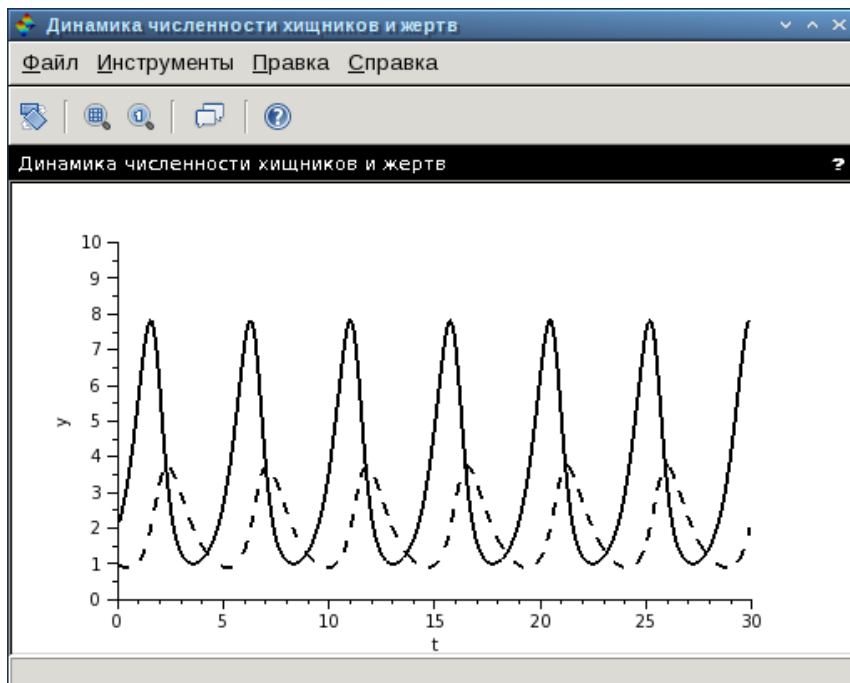


Рис. 6.4. Динамика изменения численности хищников и жертв модели 6.1 при $a = 2, b = 1, c = 0,3, d = 1, x(0) = 2, y(0) = 1$

На рис. 6.4 сплошной линией обозначен график $x(t)$ (динамика численности жертв), пунктирная линия определяет $y(t)$ — динамику численности хищников.

На рис. 6.5 приведён фазовый портрет модели 6.1.

Фазовый портрет — графическое изображение системы на фазовой плоскости (или в многомерном пространстве), по координатным осям которого отложены значения величин переменных системы. Поведение переменных во времени при таком способе представления для каждой начальной точки описывается фазовой траекторией. Совокупность таких фазовых траекторий для любых начальных условий представляет собой фазовый портрет.

6.3. Реализация модели с помощью блока Modelica в xcos

Для реализации модели (6.1) с помощью языка Modelica потребуются следующие блоки xcos: CLOCK_c, CSCOPX, CSCOPY, TEXT_f, MUX, CONST_m и MBLOCK (Modelica generic).

Как и ранее, задаём значения коэффициентов a, b, c, d (см. рис. 6.1).

Готовая модель «хищник–жертва» представлена на рис. 6.6.

Параметры блока Modelica представлены на рис. 6.7. Переменные на входе (“a”, “b”, “c”, “d”) и выходе (“x”, “y”) блока заданы как внешние (“E”).

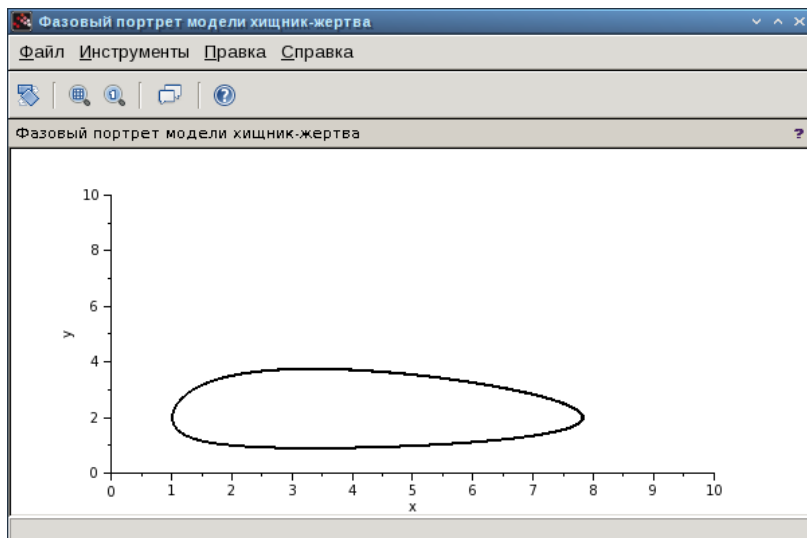


Рис. 6.5. Фазовый портрет модели 6.1 при $a = 2, b = 1, c = 0, 3, d = 1, x(0) = 2, y(0) = 1$

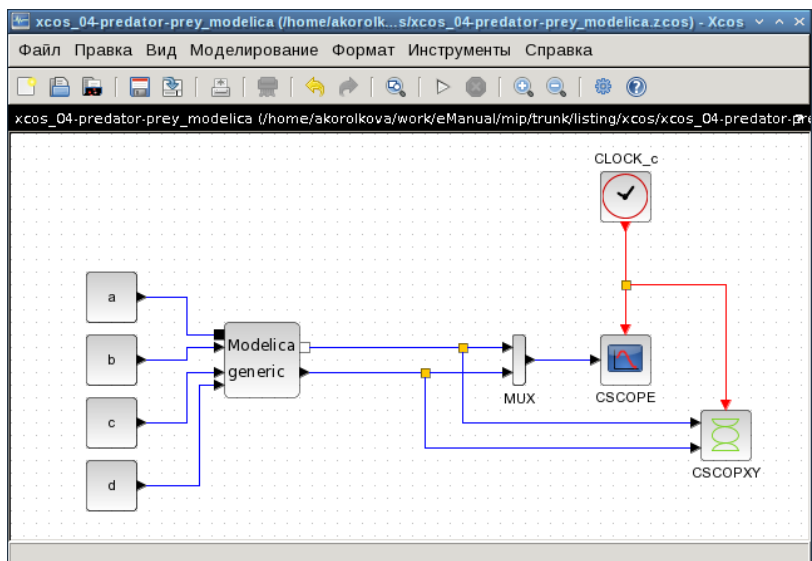


Рис. 6.6. Модель «хищник–жертва» в xcos с применением блока Modelica

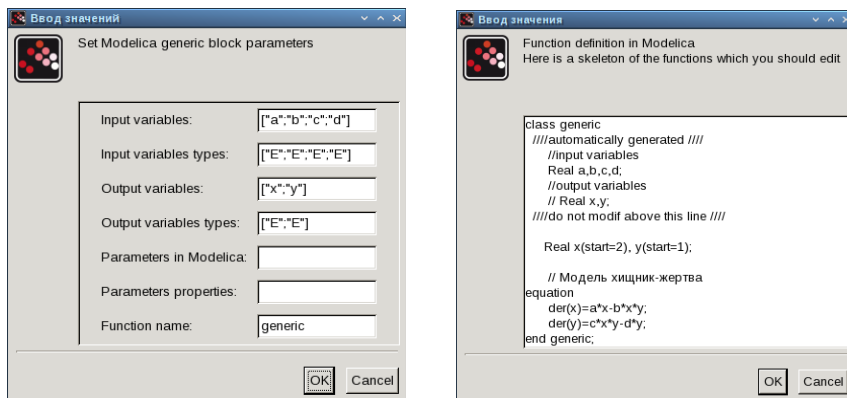


Рис. 6.7. Параметры блока Modelica для модели (6.1)

Результат моделирования совпадёт с рис. 6.4 и 6.5.

Код на языке Modelica:

```
class generic
  ///automatically generated ///
  //input variables
  Real a,b,c,d;
  //output variables
  // Real x,y;
  ///do not modify above this line ///

  Real x(start=2), y(start=1);
  // Модель хищник-жертва
  equation
    der(x)=a*x-b*x*y;
    der(y)=c*x*y-d*y;
end generic;
```

Упражнение. Реализуйте модель «хищник – жертва» в OpenModelica. Постройте графики изменения численности популяций и фазовый портрет.