Ministerul Educaţiei
Universitatea ”OVIDIUS” Constanţa
Facultatea de Matematică şi Informatică
Specializarea Informatică

Licenţă

Coordonator ştiinţific:
Cosma Luminiţa

Student:
Tănase Ramona Elena

Constanţa
2021

Cuprins

Capitolul 1

Funcţii convexe pe intervale

Studiul funcțiilor convexe ale unei variabile reale oferă o imagine excelentă a frumuseții și fascinației matematicii avansate. Cititorul va găsi aici o mare varietate de rezultate bazate pe argumente simple și intuitive care au aplicații remarcabile. În același timp, ele oferă punctul de plecare al generalizări profunde în stabilirea mai multor variabile, care vor fi discutate în capitolele următoare.

1.1 Functii convexe la prima vedere

De-a lungul acestei cărți, litera I va indica un interval nedegenerat (care este, un interval care conține o infinitate de puncte).

1.1.1 Definitie

O functie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeste convexa daca,

$$f\left(\left(1-\lambda\right)x+\lambda y\right) \leq \left(1-\lambda\right)f_{(x)}+\lambda f_{(y)} \tag{1.1}$$

pentru toate punctele x si y din I, si toate $\lambda \in [0, 1]$. Aceasta se numeste strict convexa daca inegalitate 1.1 este valabila ori de cate ori x si y sunt puncte distrincte si $\lambda \in (0, 1)$. Daca $-f$ este convexa (respective stric convexa), atunci spunem ca f este concava (respectiv strict concava). Daca f este si convexa si concava, atunci spunem ca f este functie afina.

Functiile afine sunt tocmai functiile de forma $mx + n$, pentru constante potrivite m si n. Una poate demonstra usor faptul ca urmatoarele trei functii sunt convexe (desi nu sunt strict convexe): partea pozitiva $x^+ = max\{x, 0\}$, partea negative $x^- = max\{-x, 0\}$, si valoarea absoluta $|x| = max\{-x, x\}$. Impreuna cu functiile afine ele ofera elemente de baza ale intregii clase de functii convexe pe intervale.

Lema 191 si 192 Calculele simple arata ca functia patratica x^2 este strict convexa pe $\mathbb{R}$ si ca functia radacina patrata $\sqrt{x}$ este strict concava pe $\mathbb{R}_+$. In multe cazuri de inetres convexitatea este stabilita prin intermediul celei de a doua derivate.

Corolar 148 Alte criterii de convexitate legate de teoria de baza a functiilor convexe vor fi prezentate in cele ce urmeaza. Convexitatea unei functii $f : I \to \mathbb{R}$, inseamna geometric ca, punctele de pe graficului lui $f_{[u,v]}$ sunt sub (sau pe) coarda care uneste capetele $\left(u, f_{(u)}\right)$ si $\left(v, f_{(v)}\right)$, pentru toti $u, v \in I, u < v$; Vezi Fig 1.1 . Astfel inegalitatea 1.1 este echivalenta cu

$$f(x) \le f(u) + \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) \tag{1.2}$$

pentru toti $x \in [u, v]$, si $u, v \in I, u < v$.

Aceasta remarca arata faptul ca functiile convexe sunt majorate de functiile afine pe orice subinterval compact.

Fiecare functie convexa f este marginita pe fiecare subinterval compact $[u, v]$ a intervalului pe care este definite. De fapt , $f(x) \le M = max\{f(u), f(v)\}$ pe $[u, v]$ si scriind un punct arbitrar $x \in [u, v]$ ca $x = \frac{(u+v)}{2} + t$ pentru unii t cu $|t| \le \frac{(v-u)}{2}$, deduce cu usurinta ca

$$f(x) = f\left(\frac{u+v}{2} + t\right) \ge 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - f\left(\frac{u+v}{2} - t\right) \ge 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - M$$

1.1.2 Teorema

O functie convexa $f : I \to \mathbb{R}$ este continua in orice punct interior al lui I.

Demonstraţie 1. *Presupunem ca $a \in I$ si alegem $\varepsilon > 0$ astfel incat $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$. Atunci*

$$f(a) \le \frac{1}{2}f(a - \varepsilon) + \frac{1}{2}f(a + \varepsilon)$$

si

$$f(a \pm t\varepsilon) = f((1 - t)a + t(a \pm \varepsilon)) \le (1 - t)f(a) + tf(a \pm \varepsilon)$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Prin urmare

$$t(f(a \pm \varepsilon) - f(a)) \ge f(a \pm t\varepsilon) - f(a) \ge -t(f(a \mp \varepsilon) - f(a))$$

care ne conduce la

$$|f(a \pm t\varepsilon) - f(a)| \le tmax\{|f(a - \varepsilon) - f(a)|, |f(a + \varepsilon) - f(a)|\},$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Continuitatea functiei f este acum clara. Exemple simple precum, $f(x) = 0$ daca $x \in (0, 1)$, si daca $f(0) = f(1) = 1$, arate faptul ca salturi in sus pot aparea la punctele finale ale intervalului de definire a unei functii convexe. Din fericire, aceste posibile discontinuitati sunt detasabile.

1.1.3 Propozitie

Daca $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o functie convexa, atunci limitele $f(a+) = \lim_{x \to a, x > a} f(x)$ si $f(b-) = \lim_{x \to b, x < b} f(x)$ exista in $\mathbb{R}$ si

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a+) & daca x = a \\ f(x) & daca x \in (a, b) \\ f(b-) & daca x = b \end{cases}$$

este o functie convexa continua.

Rezultatul este o consecinta a urmatoarelor:

1.1.4 Lema

Demonstraţie 2. *TODO*

1.1.5 Corolar

1.1.6 Teorema

Demonstraţie 3. *TODO*

1.1.7 Remarca

1.1.8 Teorema

Demonstraţie 4. *TODO*

1.1.9 Corolar

1.1.10 Propozitie

1.1.11 Lema

Demonstraţie 5. *TODO*

1.1.12 Teorema

1.2 Inegalitatea lui Young si consecintele sale

1.2.1 Teorema

Demonstraţie 6. *TODO*

1.2.2 Teorema

Demonstraţie 7. *TODO*

Referinţe bibliografice