



Ministerul Educației  
Universitatea "OVIDIUS" Constanța  
Facultatea de Matematică și Informatică  
Specializarea Informatică

# Lucrare de Disertație

Coordonator științific:

Prof. univ. Cosma Luminița

Student:

Tănase Ramona Elena

Constanța  
2022



Ministerul Educației  
Universitatea "OVIDIUS" Constanța  
Facultatea de Matematică și Informatică  
Specializarea Informatică

## Funcții convexe. Aplicații

Coordonator științific:

Prof. univ. Cosma Luminița

Student:

Tănase Ramona Elena

Constanța  
2022

---

---

# Cuprins

---

---

<b>Cuprins</b>	<b>i</b>
<b>Lista Figurilor</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Introducere</b>	<b>2</b>
<b>1 Noțiuni teoretice</b>	<b>3</b>
1.1 Definiții. Proprietăți . . . . .	3
1.2 Inegalitatea lui Young și consecințele sale . . . . .	10
1.3 Derivabilitatea funcțiilor convexe . . . . .	15
<b>2 Aplicații</b>	<b>21</b>
<b>Concluzii</b>	<b>40</b>
<b>Referințe bibliografice</b>	<b>41</b>

---

---

# Lista Figurilor

---

---

1.1	Funcții convexe: graficul este sub coarda . . . . .	4
1.2	Aria de unire a celor doua triunghiuri curbilinii depășește aria dreptunghiului cu laturile $u$ și $v$ . . . . .	11
1.3	$m_{PQ} \leq m_{PR} \leq m_{QR}$ . . . . .	16
2.1	Toate funcțiile trigonometrice sunt convexe (sau concave) dacă argumentele lor sunt limitate la un domeniu adecvat și, ca o consecință, există multe consecințe geometrice interesante ale inegalității lui Jensen. . . . .	21
2.2	Utilizarea eficientă a inegalității lui Jensen necesită găsirea unei funcții care este convexă pe $[0, \infty)$ și care nu este niciodată mai mare decât $f$ . . . . .	25
2.3	Dacă un poligon convex cu $n$ laturi este înscris în cercul unitar, imaginația noastră vizuală sugerează că aria este maximizată doar de un poligon regulat. Această presupunere poate fi dovedită prin metode care le-ar fi fost familiare lui Euclid, dar o demonstrație mai modernă prin convexitate este mai ușoară. . . .	29
2.4	Unghiul de vizualizare $2\psi$ al acoperirii convexe a mulțimii rădăcinilor $r_1, r_2, \dots, r_n$ a lui $P(z)$ , determină parametrul $\psi$ pe care îl găsim în rafinarea cantitativă a lui Wilf a Teoremei Gauss-Lucas. . . . .	37

---

---

# Abstract

---

---

Convexitatea este o noțiune simplă și naturală care datează încă de la Arhimede (circa 250 î.e.n.), și are legătură cu celebra sa estimare a valorii lui  $\pi$  (prin folosirea poligoanelor regulate înscrise și circumscrise).

Recunoașterea subiectului funcțiilor convexe este în general atribuită lui J. L. W. V. Jensen. Cu toate acestea, nu a fost primul care s-a ocupat de astfel de funcții. Printre predecesorii săi îi putem aminti pe Ch. Hermite, O. Hölder și O. Stolz.

Din ce în ce mai mulți matematicieni folosesc convexitatea ca pe o modalitate de a dezvălui adevărata natură a anumitor probleme complicate. Există două proprietăți de bază ale funcțiilor convexe care le fac atât de utilizate pe scară largă în matematica teoretică și aplicată. Pe de o parte una dintre proprietăți arată faptul că maximul, dacă există, este atins într-un punct de pe frontiera domeniului de definiție (pentru funcții convexe de o variabilă reală, în capetele intervalului de definiție). Pe de altă parte, orice minim local este unul global. Mai mult, o funcție strict convexă admite cel mult un punct de minim.

Convexity is a simple and natural notion that dates back to Archimedes (about 250 BC), and is related to his famous estimate of the value of  $\pi$  (by using polygons regular and circumscribed).

Recognition of the subject of convex functions is generally attributed to J. L. W. V. Jensen. However, he was not the first to hold such positions. Among the prey we can remember Ch. Hermite, O. Hölder and O. Stolz.

More and more mathematicians are using convexity as a way to reveal the true nature of certain complicated problems. There are two basic properties of the convex functions that make them so widely used in theoretical and applied mathematics. On the one hand, one of the properties shows that the maximum is reached at a point of limit. On the other hand, any local minimum is a global one. Moreover, a strict function convex admits at least a minimum.

---

---

# Introducere

---

---

Convexitatea este un subiect vechi în matematică. Prima definiție specifică a convexității a fost dat de Herman Minkowski în 1896. Funcțiile convexe au fost introduse de Jensen în 1905. Conceptul a apărut intermitent de-a lungul secolelor, dar subiectul nu a fost într-adevăr oficializat până în 1934.

De fapt, experimentăm convexitatea tot timpul și în multe feluri. Cel mai prozaic exemplu este poziția noastră verticală, care este asigurată atâta timp cât proiecția verticală a centrului nostru de greutate se află în interiorul învelișului convex al picioarelor noastre. De asemenea, convexitatea are un impact mare asupra vieții noastre de zi cu zi prin numeroase aplicații în industrie, afaceri, medicină și artă.

Îmi propun ca prezenta lucrare să fie o introducere în convexitatea funcțiilor, pornind de la definiția unei funcții convexe și proprietățile sale, Inegalitatea lui Jensen și Inegalitatea lui Young și nu în ultimul rând Inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

În primul capitol vom discuta despre convexitatea funcțiilor, operații cu funcții convexe dar și inegalități ale acestora. Vom prezenta Inegalitatea lui Jensen, forma ponderată a inegalității mediilor, urmată de Inegalitatea lui Young și consecințele sale: Inegalitatea lui Rogers-Hölder pentru  $p > 1$ , inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz și nu în ultimul rând Inegalitatea Minkowski și derivabilitatea funcțiilor convexe.

Cel de al doilea capitol prezintă aplicații ale funcțiilor convexe. Printre acestea vom regăsi: Problema asupra produsului maxim a două laturi într-un triunghi, Formula defectului lui Hölder - acest rezultat provine din faimoasa lucrare a lui Otto Ludwig Hölder în care se găsește demonstrația inegalității care a ajuns să fie cunoscută ca "Inegalitatea lui Hölder". Formula defectului

$$\sum_{k=1}^n p_k f(x_k) - f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) = \frac{1}{4} \mu \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_j p_k (x_j - x_k)^2$$

este mult mai puțin cunoscută, dar este totuși valoroasă, precum și inegalitatea ariei n-polygonului, supraaditivitatea mediei geometrice dar și Criteriul derivatei secunde și Teorema lui Rolle.

---

---

# Capitolul 1

---

---

## Noțiuni teoretice

### 1.1 Definiții. Proprietăți

Studiul funcțiilor convexe de o variabilă reală, oferă o imagine excelentă a frumuseții și fascinației matematicii avansate. Vom găsi aici o mare varietate de rezultate bazate pe argumente simple și intuitive care au aplicații remarcabile.

În continuare vom nota cu  $I$  un interval nedegenerat din  $\mathbb{R}$ .

**Definiție 1.** O funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se numește convexă dacă,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (1.1)$$

pentru orice  $x$  și  $y$  din  $I$ , și orice  $\lambda \in [0, 1]$ . Funcția  $f$  se numește strict convexă dacă inegalitatea 1.1 se pastrează strictă pentru orice  $x$  și  $y$  din  $I$ , și orice  $\lambda \in (0, 1)$ . Dacă  $-f$  este convexă (respectiv strict convexă), atunci spunem că  $f$  este concavă (respectiv strict concavă). Dacă  $f$  este și convexă și concavă, atunci spunem că  $f$  este funcție afină.

Funcțiile afine sunt tocmai funcțiile de forma  $mx + n$ ,  $m$  și  $n$  constante reale. Se poate demonstra ușor faptul că primele trei funcții sunt convexe (dar nu sunt strict convexe) iar celelalte două sunt strict convexe, respectiv strict concave:

1. partea pozitivă  $x^+ = \max\{x, 0\}$ ,
2. partea negativă  $x^- = \max\{-x, 0\}$ ,
3. modulul  $|x| = \max\{-x, x\}$ ,
4. funcția pătratică  $x^2$  este strict convexă pe  $\mathbb{R}$ ,
5. funcția rădăcină pătrată  $\sqrt{x}$  este strict concavă pe  $\mathbb{R}_+$ .

Alte criterii de convexitate legate de teoria de bază a funcțiilor convexe vor fi prezentate în cele ce urmează.

Convexitatea unei funcții  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , înseamnă geometric faptul că, punctele de pe graficului lui  $f|_{[u,v]}$  sunt sub (sau pe) coarda care unește capetele  $(u, f(u))$  și  $(v, f(v))$  pentru orice  $u, v \in I, u < v$ ; (vezi Fig 1.1).

Astfel inegalitatea 1.1 este echivalentă cu:

$$f(x) \leq f(u) + \frac{f(v) - f(u)}{v - u} (x - u) \quad (1.2)$$

pentru orice  $x \in [u, v]$ , și  $u, v \in I, u < v$ .

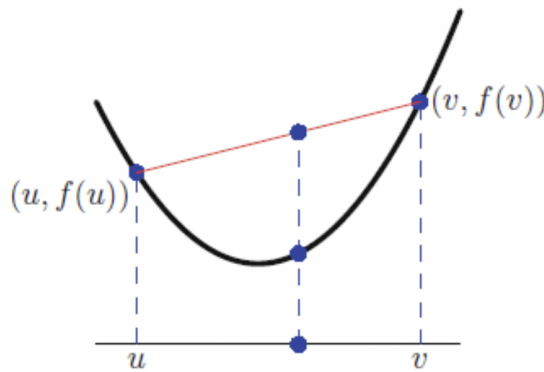


Figura 1.1: Funcții convexe: graficul este sub coarda

Această remarcă arată faptul ca funcțiile convexe sunt majorate de funcțiile afine pe orice subinterval compact.

Orice funcție convexă  $f$  este marginită pe fiecare subinterval compact  $[u, v]$  al intervalului pe care este definită. De fapt,  $f(x) \leq M = \max\{f(u), f(v)\}$  pe  $[u, v]$  și scriind acest lucru într-un punct arbitrar  $x \in [u, v]$  de forma  $x = \frac{(u+v)}{2} + t$  pentru  $t$  care verifică  $|t| \leq \frac{(v-u)}{2}$ , deducem cu ușurință că

$$f(x) = f\left(\frac{u+v}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - f\left(\frac{u+v}{2} - t\right) \geq 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - M.$$

**Teoremă 1.** O funcție convexă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă în orice punct interior al lui  $I$ .



**Demonstrație:** Presupunem că  $a \in I$  și alegem  $\varepsilon > 0$  astfel încat  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$ . Atunci

$$f(a) \leq \frac{1}{2}f(a - \varepsilon) + \frac{1}{2}f(a + \varepsilon)$$

și

$$f(a \pm t\varepsilon) = f((1-t)a + t(a \pm \varepsilon)) \leq (1-t)f(a) + tf(a \pm \varepsilon)$$

pentru orice  $t \in [0, 1]$ . Prin urmare

$$t(f(a \pm \varepsilon) - f(a)) \geq f(a \pm t\varepsilon) - f(a) \geq -t(f(a \mp \varepsilon) - f(a))$$

care ne conduce la

$$|f(a \pm t\varepsilon) - f(a)| \leq t \max\{|f(a - \varepsilon) - f(a)|, |f(a + \varepsilon) - f(a)|\},$$

pentru orice  $t \in [0, 1]$ . Continuitatea funcției  $f$  este acum clară.  $\square$

**Observație 1.** Exemple simple precum,  $f(x) = 0$  dacă  $x \in (0, 1)$ , și  $f(0) = f(1) = 1$ , arată faptul că salturi pot apărea în capetele intervalului de definiție al unei funcții convexe. Totuși, aceste posibile discontinuități pot fi înlăturate.

**Propoziție 1.** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție convexă, atunci limitele

$$f(a+) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x), \quad f(b-) = \lim_{x \rightarrow b, x < b} f(x)$$

există în  $\mathbb{R}$  și

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a+) & \text{dacă } x = a \\ f(x) & \text{dacă } x \in (a, b) \\ f(b-) & \text{dacă } x = b \end{cases}$$

este o funcție convexă continuă.

Acest rezultat este o consecință a următoarelor rezultate :

**Lemă 1.** Dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este convexă, atunci sau  $f$  este monotonă pe intervalul  $I$ , sau există un punct  $\xi \in \text{int}I$  astfel încat  $f$  este descrescătoare pe intervalul  $(-\infty, \xi) \cap I$  și crescătoare pe intervalul  $[\xi, \infty) \cap I$ .

**Demonstrație:** Luăm  $a < b$  puncte interioare arbitrare ale lui  $I$  și fie

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Cum  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ , acest infimum este atins în punctul  $\xi \in [a, b]$ , adică  $m = f(\xi)$ . Dacă  $a \leq x < y < \xi$ , atunci  $y$  este o combinație convexă a lui  $x$  și  $\xi$ , mai exact,

$$y = \frac{\xi - y}{\xi - x}x + \frac{y - x}{\xi - x}\xi.$$

Cum  $f$  este convexă,

$$f(y) \leq \frac{\xi - y}{\xi - x}f(x) + \frac{y - x}{\xi - x}f(\xi) \leq f(x).$$

Demonstrația se încheie cu un proces de lipire (la stanga lui  $a$  și la dreapta lui  $b$ ), observând că proprietatea de covexitate face imposibilă existența a trei numere  $u < v < w$  în  $I$  astfel încât  $f(u) < f(v) > f(w)$ .  $\square$

**Corolar 1.** a) Orice funcție convexă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  care nu este monotonă pe intervalul  $I$  are un minim global interior.

b) Dacă o funcție convexă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este marginită superior, atunci este constantă.

Atingere supremului la capete nu este o proprietate caracteristică a funcțiilor convexe, dar vom avea însă următorul rezultat.

**Teoremă 2.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Atunci  $f$  este (strict) convexă dacă și numai dacă pentru orice subinterval compact  $J$  al lui  $I$ , și fiecare funcție afină  $L$ , supremul lui  $f + L$  pe  $J$  este atins într-un capăt al intervalului (și doar acolo).

**Demonstrație:** Ne vom restrange la cazul funcțiilor convexe. Cazul funcțiilor strict convexe poate fi tratat în același mod.

**Necesitatea:** Dacă  $f$  este convexă, la fel este și suma  $F = f + L$ . Cum orice punct al unui subinterval  $J = [x, y]$  este o combinație convexă  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$  a lui  $x$  și  $y$ , avem

$$\begin{aligned} \sup_{z \in J} F(z) &= \sup_{\lambda \in [0,1]} F((1 - \lambda)x + \lambda y) \\ &\leq \sup_{\lambda \in [0,1]} [(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y)] + \max\{F(x), F(y)\} \end{aligned}$$

**Suficiența:** Având un subinterval  $J = [x, y]$  al lui  $I$ , există o funcție afină  $L(x) = mx + n$  care este egală cu  $f$  în cele două puncte  $x$  și  $y$ . Atunci

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} [(f - L)((1 - \lambda)x + \lambda y)] = 0,$$

care ne conduce la

$$\begin{aligned} 0 &\geq f((1 - \lambda)x + \lambda y) - L((1 - \lambda)x + \lambda y) \\ &= f((1 - \lambda)x + \lambda y) - (1 - \lambda)L(x) - \lambda L(y) \\ &= f((1 - \lambda)x + \lambda y) - (1 - \lambda)f(x) - \lambda f(y), \end{aligned}$$

pentru orice  $\lambda \in [0, 1]$ . □

**Definiție 2.** O funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se numește cvasiconvexă dacă,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

pentru orice  $x, y \in I$  și  $\lambda \in (0, 1]$ .

Avem următoarea caracterizare a convexității în cadrul clasei funcțiilor continue care se dovedește utilă și în verificarea convexității.

**Teoremă 3.** O funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este convexă dacă și numai dacă ea verifică următoarele două condiții:

- a)  $f$  este continuă în fiecare punct din interiorul lui  $I$ ; și
- b)  $f$  este convexă în punctul de mijloc, adică,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \text{ pentru orice } x, y \in I.$$

**Demonstrație:** Necesitatea rezultă din teorema 1.

**Suficiența** o vom demonstra prin reducere la absurd. Dacă  $f$  nu este convexă, atunci există un interval  $[a, b]$  astfel încât graficul funcției  $f$  restricționată la  $[a, b]$  să nu fie sub coarda care unește punctele  $(a, f(a))$  și  $(b, f(b))$ ; ca urmare, funcția

$$\varphi(x) = -f(x) + f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), x \in [a, b]$$

are  $\gamma = \inf \{\varphi(x) : x \in [a, b]\} < 0$ .

Observăm că  $-\varphi$  este convexă în punctul de mijloc, continuă și  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Fie  $c = \inf \{x \in [a, b] : \varphi(x) = \gamma\}$ , atunci  $\varphi(c) = \gamma$  și  $c \in (a, b)$ . Conform definiției lui  $c$ , pentru orice  $h > 0$ , pentru care  $c \pm h \in (a, b)$ , avem

$$\varphi(c - h) > \varphi(c) \text{ și } \varphi(c + h) \geq \varphi(c)$$

Astfel

$$-\varphi(c) > \frac{-\varphi(c - h) - \varphi(c + h)}{2},$$

ceea ce este în contradicție cu faptul că  $-\varphi$  este convexă în punctul de mijloc.  $\square$

**Corolar 2.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Atunci,  $f$  este convexă dacă și numai dacă

$$f(x + h) + f(x - h) - 2f(x) \geq 0$$

pentru orice  $x \in I$  și orice  $h > 0$  astfel încât și  $x + h$  și  $x - h$  aparțin lui  $I$ .

**Observație 2.** Observăm că și eorema 3 și corolarul 2 de mai sus, admit variante în cazul funcțiilor strict convexe, Corolarul 2 ne permite să verificăm imediat convexitatea / concavitatea strictă a unor funcții elementare, precum funcția exponențială, cea logaritmică, și restricția funcției sinus pe  $[0, \pi]$ .

Într-adevar, pentru funcția exponențială, faptul că  $a, b > 0, a \neq b$ , implică  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$  este echivalentă cu  $e^{x+h} + e^{x-h} - 2e^x > 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și orice  $h > 0$ .

Multe alte exemple pot fi deduse folosind următoarele proprietăți ale funcțiilor convexe / concave.

**Propoziție 2. Operații cu funcții convexe:**

- a) Adunând două funcții convexe (definite pe același interval) obținem o funcție convexă; dacă una dintre ele este strict convexă, atunci suma lor este de asemenea strict convexă.
- b) Înmulțind o funcție (strict) convexă cu un scalar (strict) pozitiv obținem de asemenea o funcție (strict) convexă.
- c) Presupunem că  $f$  și  $g$  sunt două funcții convexe pozitive definite pe un interval  $I$ . Atunci, produsul lor este o funcție convexă pe  $I$  dacă sunt sincrone în sensul că,

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ ; de exemplu, această condiție apare dacă  $f$  și  $g$  sunt amandouă descrescătoare sau amandouă crescătoare.

- d) Restricția unei funcții (strict) convexe pe  $I$ , la un subinterval al lui  $I$  este de asemenea o funcție (strict) convexă.
- e) Presupunem că  $f$  este o funcție bijectivă între două intervale  $I$  și  $J$ . Dacă  $f$  este strict crescătoare, atunci  $f$  este (strict) convexă dacă și numai dacă  $f^{-1}$  este (strict) concavă. Dacă  $f$  este o funcție bijectivă descrescătoare, atunci  $f$  și  $f^{-1}$  sunt ambele convexe sau ambele concave.
- f) Dacă  $f$  este o funcție strict pozitivă concavă, atunci  $\frac{1}{f}$  este o funcție convexă. Aici rolul concavității și al convexității nu poate fi schimbat unul cu celălalt.
- g) Maximul a două funcții (stricte) convexe  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

este de asemenea o funcție (strict) convexă.

- h) Compunerea  $f(ax + b)$ , a unei funcții  $f$  convexe și a unei funcții afine  $ax + b$ , este o funcție convexă.

În continuare, vom discuta extinderea inegalității convexității 1.1. În primul rând, observăm faptul că intervalele sunt închise la combinații convexe arbitrare, adică,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I \text{ pentru orice } x_1, \dots, x_n \in I \text{ și orice } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$$

cu  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ . Acest lucru poate fi demonstrat prin inducție după  $n$ .

Cazul  $n = 1$  este trivial, în timp ce  $n = 2$  rezultă din definiția unei mulțimi convexe.

Presupunând faptul că rezultatul este adevărat pentru toate combinațiile convexe cu cel mult  $n \geq 2$  puncte, să trecem la cazul combinațiilor cu  $n + 1$  puncte,  $x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k$ . Cazul non-trivial este atunci când toți coeficienții  $\lambda_k$  se află în  $(0, 1)$ . Dar în acest caz, datorită

ipotezei de inducție,  $x$  poate fi reprezentat ca o combinație convexă de două elemente ale lui  $I$ ,

$$x = (1 - \lambda_{n+1}) \left( \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1},$$

prin urmare  $x$  aparține lui  $I$ . Observația de mai sus asupra intervalelor are o echivalență remarcabilă pentru funcțiile convexe:

**Lemă 2. Cazul discret al inegalității lui Jensen**

O funcție cu valori reale  $f$  definită pe un interval  $I$  este convexă dacă și numai dacă pentru orice puncte  $x_1, \dots, x_n$  din  $I$  și orice scalari  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  din  $[0, 1]$  cu  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$  avem,

$$f \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Dacă  $f$  este strict convexă, inegalitatea de mai sus este strictă dacă punctele  $x_k$  nu sunt toate egale între ele, și scalarii  $\lambda_k$  sunt toți pozitivi.

**Demonstrație:** Prima afirmație rezultă prin inducție matematică.

În ceea ce privește cea de a doua afirmație, presupunem că funcția  $f$  este strict convexă și

$$f \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k). \quad (1.3)$$

pentru punctele  $x_1, \dots, x_n \in I$  și scalarii  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0, 1)$  care au suma egală cu 1. Dacă  $x_1, \dots, x_n$  nu sunt toți egali, mulțimea

$$S = \{k : x_k < \max \{x_1, \dots, x_n\}\}$$

va fi o submulțime proprie a mulțimii  $\{1, \dots, n\}$  și  $\lambda_S = \sum_{k \in S} \lambda_k \in (0, 1)$ . Cum  $f$  este strict convexă avem,

$$\begin{aligned} f \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) &= f \left( \lambda_S \left( \sum_{k \in S} \frac{\lambda_k}{\lambda_S} x_k \right) + (1 - \lambda_S) \left( \sum_{k \notin S} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_S} x_k \right) \right) \\ &< \lambda_S f \left( \sum_{k \in S} \frac{\lambda_k}{\lambda_S} x_k \right) + (1 - \lambda_S) f \left( \sum_{k \notin S} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_S} x_k \right) \\ &< \lambda_S \sum_{k \in S} \frac{\lambda_k}{\lambda_S} f(x_k) + (1 - \lambda_S) \sum_{k \notin S} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_S} f(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \end{aligned}$$

care contrazice ipoteza noastră 1.3. Astfel, toate punctele  $x_k$  ar trebui să coincidă. □

O consecință imediată a lemei 2 (când este aplicată funcției exponențiale) este următorul rezultat care extinde bine cunoscuta inegalitate MA-MG (adică inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică).

**Teoremă 4. Forma ponderată a inegalității mediilor**

Dacă  $x_1, \dots, x_n \in (0, \infty)$  și  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0, 1)$ ,  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ , atunci

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k > x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$$

în afară de cazul când  $x_1 = \dots = x_n$ .

Înlocuind  $x_k$  cu  $\frac{1}{x_k}$  în ultima inegalitate, obținem

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} > \frac{1}{\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{1}{x_k}}$$

în afară de cazul când  $x_1 = \dots = x_n$ .

Aceasta reprezintă forma ponderată a inegalității mediei geometrice – mediei armonice (adică inegalitatea MG-MH).

Pentru  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$  obținem inegalitatea obișnuită care afirmă că pentru orice  $x_1, \dots, x_n$  numere pozitive, nu toate egale, avem

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} > \frac{n}{\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)}.$$

## 1.2 Inegalitatea lui Young și consecințele sale

Următorul caz special al formei ponderate a inegalității MA-MG este cunoscut sub numele de inegalitatea lui Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (1.4)$$

pentru orice  $a, b \geq 0$  și pentru orice  $p, q \in (0, 1)$  cu proprietatea că  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Egalitatea are loc dacă și numai dacă  $a^p = b^q$ .

Inegalitatea lui Young poate fi de asemenea obținută ca o consecință a convexității stricte a funcției exponențiale.

Într-adevar

$$\begin{aligned} ab &= e^{\log_a b} \\ &= e^{\left(\frac{1}{p}\right) \log_a p + \left(\frac{1}{q}\right) \log_b q} \\ &< \frac{1}{p} e^{\log_a p} + \frac{1}{q} e^{\log_b q} \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \end{aligned}$$

pentru orice  $a, b > 0$  astfel încât  $a^p \neq b^q$ .

O altă soluție este oferită de studiul variației funcției diferențiabile

$$F(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab, \quad a \geq 0,$$

unde  $b \geq 0$  este un parametru. Această funcție își atinge punctul de minim global strict în  $a = b^{\frac{q}{p}}$ , care ne conduce la  $F(a) > F\left(b^{\frac{q}{p}}\right) = 0$  pentru orice  $a \geq 0, a \neq b^{\frac{q}{p}}$ .

W.H. Young a dovedit de fapt o inegalitate mult mai generală, pentru  $f(x) = x^{p-1}$ .

**Teoremă 5. Inegalitatea lui Young** Presupunem că  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  este o funcție continuă strict crescătoare astfel încât  $f(0) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Atunci

$$uv \leq \int_0^u f(x) dx + \int_0^v f^{-1}(y) dy$$

pentru orice  $u, v \geq 0$  cu egalitate dacă și numai dacă  $v = f(u)$ .

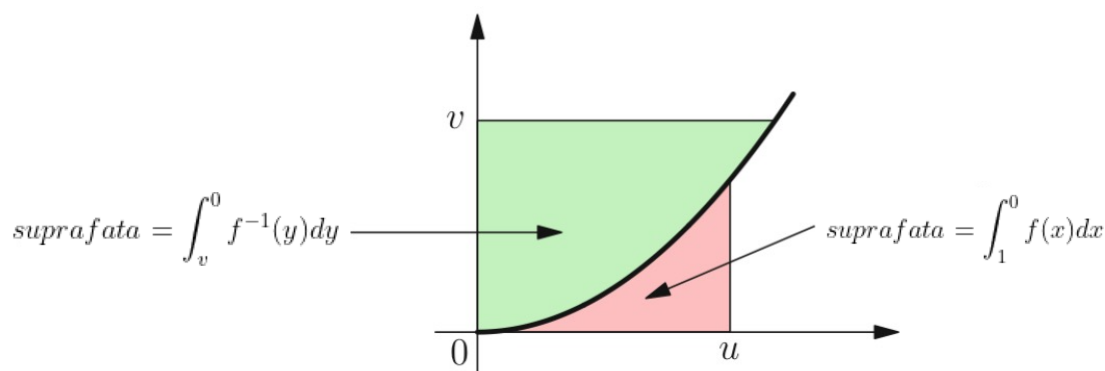


Figura 1.2: Aria de unire a celor doua triunghiuri curbilinii depășește aria dreptunghiului cu laturile  $u$  și  $v$

**Demonstrație:** Folosind definiția derivatei se poate demonstra cu ușurință că funcția

$$F(u) = \int_0^u f(x) dx + \int_0^{f(u)} f^{-1}(y) dy - uf(u), \quad u \in [0, \infty)$$

este diferențiabilă, cu  $F' \equiv 0$ . Astfel,  $F(u) = F(0) = 0$  pentru orice  $u \geq 0$ .

Dacă  $u, v \geq 0$  și  $v \geq f(u)$ , atunci

$$\begin{aligned} uv &= uf(u) + u(v - f(u)) \\ &= \int_0^u f(x) dx + \int_0^{f(u)} f^{-1}(y) dy + u(v - f(u)) \\ &= \int_0^u f(x) dx + \int_0^v f^{-1}(y) dy + \left[ u(v - f(u)) - \int_{f(u)}^v f^{-1}(y) dy \right] \\ &\leq \int_0^u f(x) dx + \int_0^v f^{-1}(y) dy. \end{aligned}$$

Celălalt caz, unde  $v \leq f(u)$  poate fi tratat similar.  $\square$

**Teoremă 6. Inegalitatea lui Rogers-Hölder pentru  $p > 1$**

Fie  $p, q \in (1, \infty)$  cu  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  și  $f \in L^p(\mu)$  și  $g \in L^q(\mu)$ . Atunci  $fg$  aparține lui  $L^1(\mu)$  și avem

$$\left| \int_{\Omega} fg d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |fg| d\mu \quad (1.5)$$

și

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (1.6)$$

Ca o consecință

$$\left| \int_{\Omega} fg d\mu \right| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (1.7)$$

**Observație 3.** Rezultatul de mai sus se extinde într-o manieră directă la perechi de forma  $p = 1, q = \infty$  și  $p = \infty, q = 1$ .

Din Inegalitatea Rogers – Hölder rezultă că pentru orice  $p, q, r \in (1, \infty)$  cu  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  și orice  $f \in L^p(\mu)$  și  $g \in L^q(\mu)$  avem  $fg \in L^r(\mu)$  și

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \quad (1.8)$$

Inegalitatea 1.8, pentru  $p = q = 2$ , este cunoscută ca **inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** pentru integrale.

**Demonstrație:** Prima inegalitate este trivială.

Dacă  $f$  sau  $g$  sunt 0  $\mu$  – aproape peste tot, atunci cea de a doua inegalitate este trivială. Altfel, folosind inegalitatea lui Young, avem

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q}$$

pentru orice  $x$  din  $\Omega$ . Astfel deducem că  $fg \in L^1(\mu)$ . De asemenea

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq 1.$$

$\square$



**Observație 4.** Condiții pentru egalitatea din teorma 6

Observația de bază este faptul că  $f \geq 0$  și  $\int_{\Omega} f d\mu = 0$  implică  $f = 0$   $\mu$ -aproape peste tot. Prin urmare avem egalitate în 1.6 dacă și numai dacă

$$f(x)g(x) = e^{i\theta} |f(x)g(x)|$$

pentru o constantă reală  $\theta$  și pentru  $\mu$ -aproape peste toți  $x$ .

Presupunem că  $p, q \in (1, \infty)$  și  $f$  și  $g$  nu sunt zero  $\mu$ -aproape peste tot. Pentru a avea egalitate în 1.6 este necesar și suficient să avem

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q}$$

$\mu$ -aproape peste tot.

Cazul egalității în Inegalitatea lui Young demonstrează că aceasta este echivalentă cu  $A|f(x)|^p = B|g(x)|^q$   $\mu$ -aproape peste tot, unde  $A$  și  $B$  sunt două constante pozitive.

Dacă  $p = 1$  și  $q = \infty$ , avem egalitate în ecuația 1.6 dacă și numai dacă există o constantă  $\lambda \geq 0$  astfel încât  $|g(x)| \leq \lambda$ ,  $\mu$ -aproape peste tot și  $|g(x)| = \lambda$ ,  $\mu$ -aproape peste tot pe mulțimea  $\{x : f(x) \neq 0\}$ .

**Teoremă 7. Inegalitatea Minkowski**

Pentru  $1 \leq p < \infty$  și  $f, g \in L^p(\mu)$  avem

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \quad (1.9)$$

**Demonstrație:** Pentru  $p = 1$ , inegalitatea 1.9 rezultă imediat prin integrarea inegalității  $|f + g| \leq |f| + |g|$ . Pentru  $p \in (1, \infty)$  avem:

$$\begin{aligned} |f + g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \\ &\leq (2 \sup\{|f|, |g|\})^p \\ &\leq 2^p (|f|^p + |g|^p) \end{aligned}$$

care ne demonstrează că  $f + g \in L^p(\mu)$ . Mai mult de atât, conform teoremei 6,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &= \int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f| d\mu + \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |g| d\mu \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \|f + g\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

unde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , deci avem că  $p - \frac{p}{q} = 1$ . □

Dacă  $p = 1$ , obținem egalitate în 1.9 dacă și numai dacă există o funcție măsurabilă pozitivă  $\varphi$  astfel încât

$$f(x)\varphi(x) = g(x)$$

$\mu$ - aproape peste tot pe mulțimea  $\{x : f(x)g(x) \neq 0\}$ .

Dacă  $p \in (1, \infty)$  și  $f$  nu este zero aproape peste tot, atunci avem egalitate în 1.9 dacă și numai dacă există  $\lambda \geq 0$  constantă astfel încât  $g = \lambda f$  aproape peste tot.

În cazul particular în care  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  este spațiul cu măsură asociat măsurii numărabile pe o mulțime finită,

$$\mu : \rho(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \mathbb{N}, \mu(A) = |A|,$$

obținem formele clasice discrete ale inegalităților de mai sus.

De exemplu, poate fi obținută versiunea discretă a inegalității lui R gers- Holder

$$\left| \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

pentru orice  $\xi_k, \eta_k \in \{1, \dots, n\}$ .

### Mai multe despre inegalitatea Cauchy – Bunyakovsky – Schwarz

A.L. Cauchy, în faimosul său curs de Analiză, folosind inegalitatea algebrică a lui Lagrange

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 + \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2$$

a obținut cazul discret al inegalității Cauchy – Bunyakovsky – Schwarz

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

pentru orice numere reale  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ . Cazul egalității este simplu de dedus.

Inegalitatea corespunzătoare pentru integrale a fost demonstrată independent de V. Y. Bunyakovsky și H.A.Schwarz.

În 1890, H. Poincaré a observat versiunea integrală a identității algebrice a lui Lagrange (care conduce la inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz în deplina sa generalitate):

Dacă  $\mu$  este o măsură de probabilitate pe un spațiu  $\Omega$  și  $f$  și  $g$  sunt două funcții aparținând spațiului  $L^2(\mu)$ , atunci

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} f^2 d\mu \right) \left( \int_{\Omega} g^2 d\mu \right) - \left( \int_{\Omega} f g d\mu \right)^2 \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 d\mu(x) d\mu(y). \end{aligned}$$

El a folosit această identitate integrală pentru a demonstra cazul unidimensional al unei inegalități care îi poartă numele. O altă demonstrație simplă a inegalității Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz este oferită de o identitate echivalentă cu legea cosinusurilor: pentru

orice pereche de vectori nenuli  $x$  și  $y$  dintr-un spațiu vectorial real cu produs scalar, avem

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

### 1.3 Derivabilitatea funcțiilor convexe

Punctul de plecare este următoarea reformulare a definiției 1. O funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este convexă dacă și numai dacă

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} \cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b), \quad (1.10)$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & b & f(b) \end{vmatrix} \geq 0, \quad (1.11)$$

pentru orice  $a < x < b$  în  $I$ .

Într-adevăr, orice punct  $x$  care aparține unui interval  $[a, b]$  poate fi scris în mod unic, ca o combinație convexă a lui  $a$  și  $b$ , mai precis,

$$x = \frac{b-x}{b-a} \cdot a + \frac{x-a}{b-a} \cdot b.$$

Scăzând  $f(a)$  din ambele părți ale inegalității 1.10 și repetând operația cu  $f(b)$  în loc de  $f(a)$ , obținem faptul că orice funcție convexă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  verifică inegalitatea celor trei coarde,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad (1.12)$$

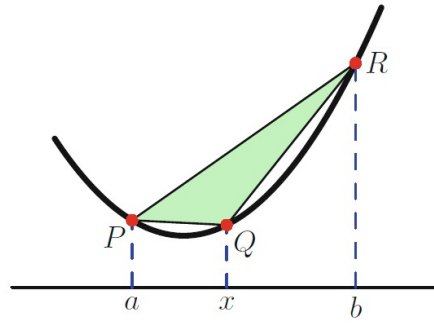
pentru orice  $a < x < b$  în  $I$ , vezi figura 1.3. În mod evident această inegalitate de fapt caracterizează convexitatea lui  $f$ . Mai mult decât atât, inegalitatea celor trei coarde cu inegalitate strictă, ne oferă o caracterizare a convexității stricte.

Foarte aproape de această observație este caracterizarea convexității, a lui Galvani.

**Observație 5.** Inegalitatea celor trei coarde poate fi întărită după cum urmează:

Dacă  $(f : I \rightarrow \mathbb{R})$  este o funcție convexă, și  $x, y, a, b$  sunt puncte ale intervalului  $I$  astfel încât  $x \leq a, y \leq b, x \neq y$  și  $a \neq b$ , atunci,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Figura 1.3:  $m_{PQ} \leq m_{PR} \leq m_{QR}$ 

**Teoremă 8.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție convexă. Atunci  $f$  are derivate finite la stânga și la dreapta în orice punct interior al lui  $I$  și pentru orice  $x < y$  în intervalul  $I$  avem

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y).$$

Mai mult, pe intervalul  $I$ ,  $f'_-$  este continuă la stânga și  $f'_+$  este continuă la dreapta. Prin urmare, dacă o funcție convexă este diferențiabilă pe intervalul  $I$ , atunci aceasta are, de asemenea, derivata continuă.

**Demonstrație:** Într-adevăr, conform inegalității celor trei coarde, avem

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

pentru orice  $x \leq y \leq a \leq z$ , din  $I$ . Acest lucru ne asigură faptul că există derivată la stânga în  $a$  și

$$f'_-(a) \geq \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Un argument similar va implica existența lui  $f'_+(a)$  și  $f'_-(a) \leq f'_+(a)$ . Pe de altă parte, pentru  $x < u \leq v < y$  din intervalul  $I$ , aceeași inegalitate a celor trei coarde ne conduce la

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y},$$

deci luând  $u \rightarrow x+$  și  $v \rightarrow y-$ , obținem faptul că  $f'_+(x) \leq f'_-(y)$ .

Pentru continuitatea derivatelor unilaterale, să observăm că din continuitatea lui  $f$  pe intervalul  $I$ , deducem că

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{z \searrow x} \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \geq \lim_{z \searrow x} f'_+(z)$$

pentru orice  $x < z < y$ . Trecând la limită, cum  $y \searrow x$ , obținem,

$$f'_+(x) \geq \lim_{z \searrow x} f'_+(z).$$

Cum  $f'_+$  este crescătoare, rămâne valabilă și inegalitatea inversă. Astfel,  $f'_+$  este continuă la dreapta pe intervalul  $I$ . Continuitatea lui  $f'_-$  la stânga poate fi demonstrată în mod similar.  $\square$

Din Teorema 8, orice funcție convexă continuă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  admite derivate unilaterale la capete, care pot fi infinite:

$$-\infty \leq f'_+(a) \leq \infty$$

și

$$-\infty \leq f'_-(b) \leq \infty.$$

Această teoremă ne conduce de asemenea la faptul că o funcție convexă continuă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  poate fi extinsă la o funcție convexă pe  $\mathbb{R}$  dacă și numai dacă  $f'_+(a)$  și  $f'_-(b)$  există și sunt finite.

### Cât de "nediferențiabilă" poate fi o funcție convexă ?

Teorema 8 implică faptul că orice funcție convexă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă cu excepția, eventual, a unei mulțimi numărabile. De fapt, considerând mulțimea de nediferențiabilitate,

$$I_{nd} = \{x : f'_-(x) < f'_+(x)\},$$

și alegând pentru orice  $x \in I_{nd}$  un număr rațional  $r_x \in (f'_-(x), f'_+(x))$  vom avea o funcție bijectivă  $\varphi : x \rightarrow r_x$  din  $I_{nd}$  cu valori în  $\mathbb{Q}$ . În consecință,  $I_{nd}$  este cel mult numărabilă. Să observăm faptul că acest raționament depinde de axioma alegerii.

Teorema 8 ne oferă un argument alternativ pentru proprietatea funcțiilor convexe de a fi local Lipschitz pe intervale deschise.

Într-adevăr, dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție convexă și  $[a, b]$  este un interval compact din interiorul lui  $I$ , atunci

$$f'_+(a) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y) \leq f'_-(b)$$

pentru orice  $x, y \in [a, b]$ , cu  $x < y$ .

Prin urmare,  $f|_{[a,b]}$  verifică condiția Lipschitz  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ , cu  $L = \max\{|f'_+(a)|, |f'_-(b)|\}$ . O consecință imediată este următorul rezultat :

**Teoremă 9.** Dacă  $(f_n)_n$  este un șir convergent punctual de funcții convexe definite pe un interval deschis  $I$ , atunci limita sa  $f$  este de asemenea convexă. Mai mult, convergența este uniformă pe orice subinterval compact și

$$f'_-(a) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n)'_-(a) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (f_n)'_+(a) \leq f'_+(a), \text{ pentru orice } a \in I.$$

**Demonstrație:** Convexitatea lui  $f$  este trivială. Din inegalitatea celor trei coarde 1.12, pentru orice  $h > 0$  cu  $a + h \in I$ ,

$$(f_n)'_+(a) \leq \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h}$$

ca urmare

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (f_n)'_+(a) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Luând  $h \rightarrow 0$ , obținem inegalitatea din partea dreaptă a teoremei 9. Inegalitatea din partea stângă poate fi demonstrată în mod similar.

Ținând cont de o observație de mai sus despre lipschitzianitatea locală a funcțiilor convexe, se poate deduce cu ușurință convergența uniformă pe subintervale compacte ale lui  $I$ . □

Este posibil, ca în egalitatea de mai sus, egalitatea să nu aibă loc. Pentru a verifica asta, luăm șirul de funcții convexe  $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$  care converge pe  $\mathbb{R}$  către funcția  $f(x) = |x|$ .

Evident,  $(f_n)'_+(0) = 0$  pentru orice  $n$ , în timp ce  $f'_+(0) = 1$ .

Următorul rezultat ne oferă o estimare superioară a inegalității lui Jensen :

**Teoremă 10.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție convexă și

$$[m_1, M_1], \dots, [m_n, M_n]$$

subintervalele compacte ale lui  $[a, b]$ . Fie  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  în  $[0, 1]$  cu  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ . Atunci funcția

$$E(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) - f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right),$$

își atinge maximul pe  $\Omega = [m_1, M_1] \times \dots \times [m_n, M_n]$  într-un vârf, adică într-un punct  $\{m_1, M_1\} \times \dots \times \{m_n, M_n\}$ .

Demonstrația utilizează următoarea rafinare al teoremei mediilor, a lui Langrange:

**Lemă 3.** Fie  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Atunci există un punct  $c \in (a, b)$  astfel încât

$$\underline{D}h(c) \leq \frac{h(b) - h(a)}{b - a} \leq \overline{D}h(c),$$

unde

$$\underline{\mathcal{D}}h(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} \text{ și } \overline{\mathcal{D}}h(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c},$$

sunt, derivata inferioară respectiv derivata superioară a lui  $h$  în  $c$ .

Conform Teoremei 8, în cazul funcțiilor convexe,  $\overline{\mathcal{D}}h(c) = h'_-(c)$  și  $\underline{\mathcal{D}}h(c) = h'_+(c)$ .

**Demonstrație:** În mod clar, putem presupune faptul că  $f$  este de asemenea continuă. Vom demonstra (prin reducere la absurd) că

$$E(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \leq \sup \{E(x_1, \dots, m_k, \dots, x_n), \dots, E(x_1, \dots, M_k, \dots, x_n)\},$$

pentru orice

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega,$$

și orice

$$k \in \{1, \dots, n\}.$$

Într-adevăr, dacă

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n) > \sup \{E(m_1, x_2, \dots, x_n), \dots, E(M_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

pentru

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega,$$

considerăm funcția

$$h : [m_1, M_1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = E(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Conform lemei 3, există  $\xi \in (m_1, x_1)$  astfel încât  $h(x_1) - h(m_1) \leq (x_1 - m_1) \overline{\mathcal{D}}h(\xi)$ . Cum  $h(x_1) > h(m_1)$ , rezultă că  $\overline{\mathcal{D}}h(\xi) > 0$ , ceea ce este echivalent cu

$$\overline{\mathcal{D}}f(\xi) > \overline{\mathcal{D}}f(\lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi + \dots + \lambda_n x_n).$$

Ca urmare,  $\overline{\mathcal{D}}f = f'_+$  este o funcție crescătoare pe  $(a, b)$ , ceea ce ne conduce la

$$\xi > \lambda_1 \xi + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n,$$

și astfel

$$\xi = \frac{\lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda_2 + \dots + \lambda_n}.$$

Folosind iar lema 3 (aplicată de data aceasta lui  $h|_{[x_1, M_1]}$ ) obținem existența unui  $\eta \in (x_1, M_1)$  astfel încât  $\eta < \frac{\lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda_2 + \dots + \lambda_n}$ . Dar asta, contrazice faptul că  $\xi < \eta$ .  $\square$

**Corolar 3.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție convexă. Atunci

$$(1 - \lambda) f(a) + \lambda f(b) - f((1 - \lambda)a + \lambda b) \geq (1 - \lambda) f(c) + \lambda f(d) - f((1 - \lambda)c + \lambda d),$$

pentru orice  $a \leq c \leq d \leq b$  și  $\lambda \in [0, 1]$ .

Fie derivatele, superioară și inferioară, simetrice de ordinul doi ale lui  $f$  în  $x$ , definite de formulele

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{D}}^2 f(x) &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \\ \underline{\mathcal{D}}^2 f(x) &= \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.\end{aligned}$$

Nu este greu să verificăm faptul că, dacă  $f$  este derivabilă de doua ori într-un punct  $x$ , atunci

$$\overline{\mathcal{D}}^2 f(x) = \underline{\mathcal{D}}^2 f(x) = f''(x). \quad (1.13)$$

**Teoremă 11.** *Presupunem că  $I$  este un interval deschis. O funcție  $f$  cu valori reale este convexă pe  $I$  dacă și numai dacă  $f$  este continuă și  $\overline{\mathcal{D}}^2 f \geq 0$ .*

*Ca o consecință, dacă o funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este funcție convexă într-o vecinătate a fiecărui punct din  $I$ , atunci este convexă pe tot intervalul  $I$ .*

**Demonstrație:** Dacă  $f$  este convexă, atunci, în mod clar  $\overline{\mathcal{D}}^2 f \geq \underline{\mathcal{D}}^2 f \geq 0$ . Continuitatea lui  $f$  rezultă din Teorema 1.

Acum, presupunem că  $\overline{\mathcal{D}}^2 f > 0$  pe  $I$ . Dacă  $f$  nu este convexă, atunci, putem găsi un punct  $x_0$ , astfel încât  $\overline{\mathcal{D}}^2 f(x_0) \leq 0$ , ceea ce ar fi o contradicție.

De fapt, în acest caz, există un subinterval  $I_0 = [a_0, b_0]$  astfel încât  $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) > \frac{f(a_0)+f(b_0)}{2}$ . Dacă ne uităm cu atenție, observăm faptul că unul dintre intervalele  $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{(3a_0+b_0)}{4}, \frac{(a_0+3b_0)}{4}\right]$ ,  $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$  pot fi alese pentru a înlocui intervalul  $I_0$  cu un interval mai mic  $I_1 = [a_1, b_1]$ ,  $b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$  și  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > \frac{f(a_1)+f(b_1)}{2}$ .

Cu ajutorul inducției, vom putea aplica principiul intervalelor incluse și obținem punctul  $x_0$ .

În cazul general, considerăm șirul de funcții

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}x^2.$$

Avem,  $\overline{\mathcal{D}}^2 f_n > 0$ , și raționamentul de mai sus ne arată că  $f_n$  este convexă.

Evident,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pentru orice  $x \in I$ , deci convexitatea lui  $f$  este o consecință a Teoremei 9 de mai sus.  $\square$

**Corolar 4. (Testul derivatei a doua)** *Presupunem că  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție derivabilă de două ori. Atunci :*

1.  *$f$  este convexă dacă și numai dacă  $f'' \geq 0$ ;*
2.  *$f$  este strict convexă dacă și numai dacă  $f'' \geq 0$  și mulțimea punctelor în care  $f''$  se anulează nu include intervalele de lungime pozitivă.*



---

---

## Capitolul 2

---

---

### Aplicații

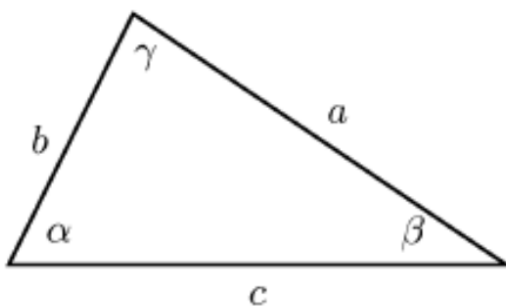
Multe dintre funcțiile uzuale ale trigonometriei și geometriei au proprietăți de convexitate ușor de stabilit și, de cele mai multe ori, aceasă convexitate are consecințe utile.

**Problema 1.** (*Asupra produsului maxim a două laturi într-un triunghi*)

*Într-un triunghi echilateral cu aria  $A$ , produsul dintre oricare două laturi este egal cu  $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)A$ . Arătați că acesta reprezintă cazul extrem, mai exact, în orice triunghi cu aria  $A$  există două laturi pentru care produsul lungimilor lor este mai mare sau egal cu  $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)A$ .*

**Demonstrație:** Pentru a rezolva această problemă avem nevoie de formule care să lege lungimile laturilor de arie. Cu notațiile din figura 1, avem trei astfel de formule:

$$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha.$$



---

*Figura 2.1:* Toate funcțiile trigonometrice sunt convexe (sau concave) dacă argumentele lor sunt limitate la un domeniu adecvat și, ca o consecință, există multe consecințe geometrice interesante ale inegalității lui Jensen.

---

Acum, dacă facem media acestor reprezentări ale ariei, vom obține că:

$$\frac{1}{3}(ab + ac + bc) = (2A) \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \right\}, \quad (2.1)$$

și aceasta este o formulă care ne conduce la a studia convexitatea funcției  $\frac{1}{\sin x}$ . Reprezentarea grafică a acesteia,  $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ , pentru  $x \in (0, \pi)$  cu siguranță este convexă, iar presupunerea noastră poate fi confirmată prin calcularea derivatei a doua,

$$\left( \frac{1}{\sin x} \right)'' = \frac{1}{\sin x} + 2 \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} > 0 \text{ pentru orice } x \in (0, \pi) \quad (2.2)$$

Prin urmare, din moment ce avem

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma)}{3} = \frac{\pi}{3},$$

rezultă din inegalitatea lui Jensen că

$$\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \right\} \geq \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

deci, folosind inegalitatea 2.1, obținem estimarea cerută

$$\max(ab, ac, bc) \geq \frac{1}{3}(ab + ac + bc) \geq \frac{4}{\sqrt{3}}A. \quad (2.3)$$

□

**Observație 6.** Această problemă este strâns legată de o inegalitate binecunoscută a lui Weitzenböck care afirmă că în orice triunghi avem

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}}A. \quad (2.4)$$

De fapt, pentru a trece de la inegalitatea 2.3 la inegalitatea lui Weitzenböck trebuie doar să ne amintim că

$$ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2,$$

care este o inegalitate bine cunoscută pe care o putem obține în două moduri - folosind inegalitatea lui Cauchy sau folosind inegalitatea MA-MG

Inegalitatea lui Weitzenböck se dovedește a avea multe demonstrații instructive - Engel (1998) a dat unsprezece! Există câteva metode matematice pe care le-am putea numi generic "improvers"; în linii mari, acestea sunt metode care pot fi utilizate într-un mod algoritmic pentru a generaliza o identitate, sau pentru a îmbunătăți un rezultat dat.

Următoarea problemă oferă un exemplu de alt fel. Aceasta sugerează cum am putea îmbunătăți aproape orice rezultat care a fost obținut folosind inegalitatea lui Jensen.

**Problema 2.** (Formula defectului a lui Hölder)

Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă de doua ori și

$$0 \leq m \leq f''(x) \leq M, \text{ pentru orice } x \in [a, b], \quad (2.5)$$

atunci pentru orice  $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$  și orice numere reale pozitive  $p_k, k = 1, 2, \dots, n$  cu  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ , există  $\mu \in [m, M]$  pentru care are loc egalitatea

$$\sum_{k=1}^n p_k f(x_k) - f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) = \frac{1}{4} \mu \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_j p_k (x_j - x_k)^2. \quad (2.6)$$

**Observație 7.** Acest rezultat provine din aceeași lucrare faimoasă din 1885 a lui Otto Ludwig Hölder (1859 - 1937) în care se găsește demonstrația inegalității care are ajuns să fie cunoscută ca "inegalitatea lui Hölder". Formula defectului 2.6 este mult mai puțin cunoscută, dar este totuși valoroasă. Aceasta oferă o măsură perfect naturală a diferenței dintre cele două părți ale inegalității lui Jensen și ne spune cum să învingem versiunea inegalității lui Jensen ori de câte ori putem verifica ipoteza suplimentară 2.5. În mod similar, dacă  $M$  este mic, să spunem  $0 \leq M \leq \epsilon$ , atunci inegalitatea 2.5 ne spune că  $f$  se comportă mai degrabă ca o funcție afină,  $f(x) = \alpha + \beta x$ . Pentru o funcție afină, partea stângă a egalității 2.6 este identic egală cu zero, dar în general, relația 2.6 afirmă ceva mai subtil. Mai precis, ne spune că partea stângă este un mic multiplu al unei expresii în care valorile  $x_j, j = 1, 2, \dots, n$  sunt răspândite pe întreg intervalul  $[a, b]$ .

**Demonstrație:** Această problemă ne duce în mod firesc la următoarea întrebare: Cum putem folosi faptul că  $0 \leq m \leq f''(x) \leq M$ ?

Odata ce ne-am pus această întrebare, s-ar putea să nu fie nevoie de mult pentru a observa că cele două funcții

$$g(x) = \frac{1}{2} M x^2 - f(x) \quad \text{și} \quad h(x) = f(x) - \frac{1}{2} m x^2$$

sunt două funcții convexe. Această observație ne îndeamnă să ne întrebăm ce spune inegalitatea lui Jensen despre aceste funcții.

Pentru  $g(x)$ , inegalitatea lui Jensen ne dă mărghinirea

$$\frac{1}{2} M \bar{x}^2 - f(\bar{x}) \leq \sum_{k=1}^n p_k \left\{ \frac{1}{2} M x_k^2 - f(x_k) \right\}$$

unde am notat  $\bar{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$  și această inegalitate este ușor de rearanjat pentru a obține

$$\left\{ \sum_{k=1}^n p_k f(x_k) \right\} - f(\bar{x}) \leq \frac{1}{2} M \left\{ \left( \sum_{k=1}^n p_k x_k^2 \right) - \bar{x}^2 \right\} = \frac{1}{2} M \sum_{k=1}^n p_k (x_k - \bar{x})^2.$$

Un calcul analog pentru  $h(x)$  ne oferă o limită inferioară

$$\left\{ \sum_{k=1}^n p_k f(x_k) \right\} - f(\bar{x}) \geq \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^n p_k (x_k - \bar{x})^2$$

și aceste limite, cea superioară și cea inferioară aproape completează demonstrația egalității 2.6. Singurul lucru care lipsește este identitatea

$$\sum_{k=1}^n p_k (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_j p_k (x_j - x_k)^2$$

care se poate verifica ușor prin calcul direct folosind definiția lui  $\bar{x}$ . □

Convexitatea și inegalitatea lui Jensen oferă soluții simple pentru multe probleme. Următoarea problemă vine din celebra secțiune cu probleme a "American Mathematical Monthly" și oferă un exemplu clasic al acestei afirmații. La început problema pare destul de ușoară, dar, curând, întâmpinăm dificultăți.

**Problema 3.** (AMM 2002, Proposed by M. Mazur)

Arătați că dacă  $a, b$  și  $c$ , sunt numere reale pozitive care verifică  $abc \geq 2^9$ , atunci

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1 + (abc)^{\frac{1}{3}}}} \leq \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} \right\} \quad (2.7)$$

**Demonstrație:** Media din partea dreaptă sugerează faptul că inegalitatea lui Jensen s-ar putea dovedi utilă, în timp ce media geometrică din partea stângă sugerează că funcția exponențială va avea un rol.

Dacă ne uităm mai atent, putem observa că

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

ne poate ajuta la folosirea inegalității lui Jensen. De fapt, odată ce am scris această funcție, se poate verifica aproape fără calcul că inegalitatea propusă 2.7 este echivalentă cu

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{1}{3} \{f(x) + f(y) + f(z)\} \quad (2.8)$$

pentru orice  $x, y, z$  astfel încât  $\exp(x+y+z) \geq 2^9$ .

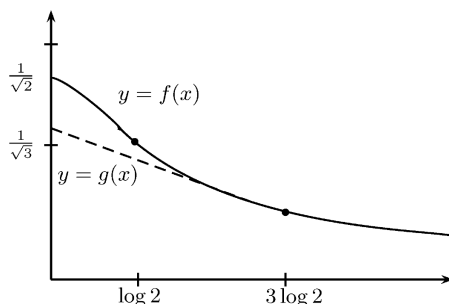


Figura 2.2: Utilizarea eficientă a inegalității lui Jensen necesită găsirea unei funcții care este convexă pe  $[0, \infty)$  și care nu este niciodată mai mare decât  $f$ .

Pentru a vedea dacă putem aplica inegalitatea lui Jensen, trebuie să evaluăm convexitatea lui  $f$ . Într-adevar, avem

$$f'(x) = -\frac{e^x}{2(1+e^x)^{\frac{3}{2}}}$$

și

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}e^x + \frac{3}{4}(1+e^x)^{-\frac{5}{2}}e^{2x}$$

Cea de a doua egalitate ne arată că  $f''(x) \geq 0$  dacă și numai dacă avem  $e^x \geq 2$ , astfel încât cu ajutorul inegalității lui Jensen constatăm că inegalitatea inițială 2.7 este adevărată cu condiția ca fiecare dintre termenii  $a$ ,  $b$  și  $c$  să fie mai mari sau egali cu 2.

Dificultatea cu care ne confruntăm aici este că ipoteza problemei ne spune doar că produsul  $abc$  este mai mare sau egal cu  $2^9$ ; nu ni se da nicio limită pentru termenii individuali, cu excepția faptului că  $a > 0, b > 0$  și  $c > 0$ . Astfel, inegalitatea lui Jensen nu poate completa demonstrația de la sine și noi trebuie să cautăm alte informații.

Există multe idei pe care le-am putea încerca, dar înainte de a merge prea departe, ar trebui să luăm în considerare graficul lui  $f(x)$ . Ceea ce găsim din graficul reprezentat în figura 3 este că  $f(x)$  arată convexă pe interval  $[0, 10]$ , în ciuda faptului că calculul care arată că  $f(x)$  este concavă pe  $[0, \log 2]$  și convexă pe  $[\log 2, \infty)$ . Astfel, graficul nostru oferă o nouă speranță; poate că o mica modificare a lui  $f$  ar putea conduce la convexitatea de care noi avem nevoie pentru a rezolva problema.

Când ne gândim la modul în care am sperat să folosim  $f$  cu inegalitatea lui Jensen, în curând ne dăm seama că ne putem ușura puțin sarcina. Să presupunem, de exemplu, că putem găsi o funcție convexă  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât să avem condițiile:

$$g(x) \leq f(x), \text{ pentru orice } x \in [0, \infty) \quad (2.9)$$

și condiția complementară

$$g(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \geq 3 \log 2. \quad (2.10)$$

Pentru o astfel de funcție, inegalitatea lui Jensen ne spune că dacă  $x, y$  și  $z$  verifică

$$\exp(x + y + z) \geq 2^9$$

avem inegalitățile

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) &= g\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \\ &\leq \frac{1}{3} \{g(x) + g(y) + g(z)\} \\ &\leq \frac{1}{3} \{f(x) + f(y) + f(z)\}. \end{aligned}$$

Primul și ultimul termen al acestei inegalități conduc la inegalitatea 2.8, deci soluția problemei ar fi completă, cu excepția unui mic detaliu — mai trebuie să arătăm că există o funcție  $g$  convexă pe  $[0, \infty)$  astfel încât  $g(x) \leq f(x)$  pentru orice  $x \in [0, 3 \log 2]$  și  $f(x) = g(x)$  pentru orice  $x \geq 3 \log 2$ .

O modalitate de a construi o funcție convexă  $g$  cu proprietățile descrise mai sus este, să luăm  $g(x) = f(x)$  pentru  $x \geq 3 \log 2$  și să definim  $g(x)$  pe  $[0, 3 \log 2]$  prin extrapolare liniară. Astfel, pentru  $x \in [0, 3 \log 2]$ , luăm

$$\begin{aligned} g(x) &= f(3 \log 2) + (x - 3 \log 2) f'(3 \log 2) \\ &= \frac{1}{3} + (3 \log 2 - x) \left(\frac{4}{27}\right) \end{aligned}$$

Trei observații simple sunt acum suficiente pentru a demonstra că  $g(x) \leq f(x)$ , pentru orice  $x \geq 0$ . Pentru început, pentru  $x \geq 3 \log 2$ , avem  $g(x) = f(x)$  din definiție.

Cea de a doua observație, pentru  $\log 2 \leq x \leq 3 \log 2$  avem  $g(x) \leq f(x)$  pentru că aici  $g(x)$  are valoarea unei drepte tangente la  $(f(x))$  și din convexitatea lui  $f$  pe  $\log 2 \leq x \leq 3 \log 2$  dreapta tangentă este sub  $f$ .

Cea de a treia observație; în regiunea critică  $0 \leq x \leq \log 2$ , avem  $g(x) \leq f(x)$  deoarece,

1.  $f$  este concavă,
2.  $g$  este liniară,
3.  $f$  este mai mare decât  $g$  la capetele intervalului  $[0, \log 2]$ .

Mai precis, avem

$$g(0) = 0.641 \dots \leq f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \dots,$$

în timp ce în cel de-al doilea punct avem

$$g(\log 2) = 0.538 \dots \leq f(\log 2) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577 \dots.$$

Astfel, funcția convexă  $g$  este într-adevar un minorant al funcției  $f$  care se află în concordanță cu  $f$  pe  $[3 \log 2, \infty)$ , așadar rezolvarea problemei este completă.  $\square$

**Problema 4.** (*O inegalitate renașcentistă*)

Matematicianul renașcentist Pietro Mengoli (1625 – 1686) a avut nevoie doar de algebra elementară pentru a demonstra inegalitatea

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x}, \text{ pentru orice } x > 1, \quad (2.11)$$

totuși, a obținut o revendicare asupra nemuririi intelectuale atunci când a folosit asta pentru a oferi una dintre cele mai timpurii dovezi ale divergenței seriilor armonice,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty \quad (2.12)$$

Redescoperiți demonstrația algebrică a inegalității lui Mengoli 2.11 și verificați faptul că rezultă și din inegalitatea lui Jensen. Mai departe, arătați, cum a făcut Mengoli, faptul că inegalitatea 2.11 implică divergența lui  $H_n$ .

**Demonstrație:** Simplificând  $\frac{1}{x}$  din ambele părți și adunând fracțiile se vede că inegalitatea lui Mengoli este echivalentă cu inegalitatea trivială  $x^2 > x^2 - 1$ .

Pentru o demonstrație folosind inegalitatea lui Jensen, observăm că  $x \mapsto \frac{1}{x}$  este strict convexă. Aplicăm inegalitatea lui Jensen pentru  $x_1 = x - 1$ ,  $x_2 = x$ ,  $x_3 = x + 1$ , și  $\lambda_i = 1/3$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$f\left(\frac{1}{3}(x-1+x+x+1)\right) = f(x) < \frac{1}{3}f(x+1) + \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x-1}$$

care înmulțită cu trei este inegalitatea lui Mengoli.

În final, pentru o versiune modernă a demonstrației lui Mengoli că  $H_n$  diverge, presupunem prin absurd că  $H_\infty < \infty$  și scriem  $H_\infty$  că

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \dots$$

Acum, prin aplicarea inegalității lui Mengoli în cadrul grupurilor formate găsim că

$$H_\infty > 1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{6} + \frac{3}{9} + \dots = 1 + H_\infty$$

care ne conduce la contradicția  $H_\infty > 1 + H_\infty$ .  $\square$

**Observație 8.** Potrivit lui Havił, Mengoli a fost cel care a propus pentru prima dată problema determinării valorii sumei

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Problema a rezistat eforturilor celor mai buni matematicieni ai Europei până în anul 1731 când L. Euler a determinat valoarea ca fiind  $\frac{\pi^2}{6}$ .

**Problema 5.** Arătați că dacă  $x, y, z > 0$  și  $x + y + z = 1$ , atunci

$$64 < \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

**Demonstrație:** Inegalitatea rezultă prin aplicarea inegalității lui Jensen funcției

$$f(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \ln(1+t) - \ln(t), \quad t > 0$$

care este strict convexă deoarece

$$f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{t^2} > 0, \text{ pentru orice } t > 0.$$

Într-adevar, pentru  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ , și  $\lambda_i = 1/3, i = 1, 2, 3$ :

$$f\left(\frac{1}{3}(x+y+z)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z) \Leftrightarrow$$

$$\ln(4) < \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow$$

$$3\ln(4) < \ln\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right)\right)$$

și aplicând exponențiala obținem inegalitatea dorită. □

**Problema 6.** (Inegalitatea ariei  $n$ -poligonului)

Figura 4 sugerează că dintre toate poligoanele convexe cu  $n$  laturi care pot fi înscrise într-un cerc, numai  $n$ -gonul regulat are aria maximă. Poate inegalitatea lui Jensen să fie folosită pentru a confirma această afirmație?

**Demonstrație:** Din figura geometrică precizată, dacă presupunem fără a restrange generalitatea că raza cercului este 1, aria  $A$  a unui poligon înscris cu  $n$  laturi poate fi scrisă ca

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \theta_k \quad \text{unde } 0 < \theta_k \text{ și } \sum_{k=1}^n \theta_k = 2\pi.$$

Cum funcția  $\sin(\cdot)$  este strict concavă pe  $[0, \pi]$ , folosind inegalitatea lui Jensen avem

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \theta_k \leq \frac{1}{2} n \sin\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \theta_k\right) = \frac{1}{2} n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = A'$$

și avem egalitate dacă și numai dacă  $\theta_k = \frac{2\pi}{n}$  pentru orice  $1 \leq k \leq n$ . Cum  $A'$  este aria unui  $n$ -poligon regulat înscris, optimalitatea presupusă este confirmată. □



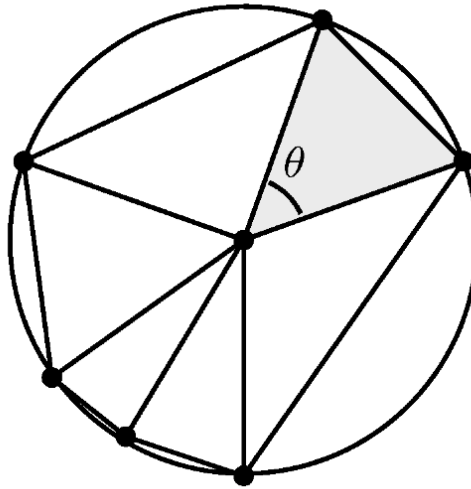


Figura 2.3: Dacă un poligon convex cu  $n$  laturi este înscris în cercul unitar, imaginația noastră vizuală sugerează că aria este maximizată doar de un poligon regulat. Această presupunere poate fi dovedită prin metode care le-ar fi fost familiare lui Euclid, dar o demonstrație mai modernă prin convexitate este mai ușoară.

**Problema 7.** (*Inegalitățile investiționale*)

Dacă  $0 < r_k < \infty$ . Dacă investiția noastră de un dolar în anul  $k$  crește la  $1 + r_k$  dolari la sfârșitul anului, numim  $r_k$  dobânda investiției în anul  $k$ . Demonstrați că valoarea

$$V = (1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_n)$$

a investiției noastre după  $n$  ani verifică inegalitățile

$$(1 + r_G)^n \leq \prod_{k=1}^n (1 + r_k) \leq (1 + r_A)^n, \quad (2.13)$$

unde

$$r_G = (r_1 r_2 \cdots r_n)^{\frac{1}{n}} \text{ și } r_A = \frac{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)}{n}.$$

De asemenea explicați de ce aceste inegalități pot fi vazute ca un rafinament al inegalității MA-MG.

**Demonstrație:** Evident, inegalitatea din dreapta rezultă imediat dacă aplicăm inegalitatea MA-MG pentru

$$a_k = 1 + r_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Pentru inegalitatea din partea stângă aplicăm inegalitatea lui Jensen aplicată funcției convexe

$$x \mapsto \ln(1 + e^x).$$

Evident, dacă notăm cu  $f$  această funcție, observăm că

$$f''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0,$$

deci  $f$  este chiar strict convexă. Dacă aplicăm inegalitatea lui Jensen acestei funcții pentru

$$x_1 = \ln r_1, \dots, x_n = \ln r_n, \quad \lambda_1 = \frac{1}{n}, \dots, \lambda_n = \frac{1}{n},$$

deducem și inegalitatea din stânga.

La final, dacă extragem rădăcina de ordinul  $n$  și scădem 1, în toți termenii, vom vedea că inegalitatea 2.13 rafinează limita MA-MG,  $r_G \leq r_A$  prin intercalarea termenului  $V^{\frac{1}{n}} - 1$  între cele două.  $\square$

**Problema 8.** (*Supraaditivitatea mediei geometrice*)

Dacă  $a_j \geq 0$  și  $b_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$ , atunci:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1 b_2 \cdots b_n)^{\frac{1}{n}} \leq \{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)\}^{\frac{1}{n}}.$$

**Demonstrație:** Pentru a construi o demonstrație cu ajutorul inegalității lui Jensen, mai întâi împărțim la  $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$  și notăm  $c_k = \frac{b_k}{a_k}, k = 1, \dots, n$  deci inegalitatea de la care am pornit devine

$$1 + (c_1 c_2 \cdots c_n)^{\frac{1}{n}} \leq \{(1 + c_1)(1 + c_2) \cdots (1 + c_n)\}^{\frac{1}{n}}.$$

Acum, dacă scriem  $c_j$  ca  $\exp(d_j)$ , vom vedea că obținem forma echivalentă

$$\ln(1 + \exp(\bar{d})) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(1 + \exp(d_j)),$$

unde

$$\bar{d} = \frac{(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)}{n}.$$

Obsevăm acum că ultima inegalitate este pur și simplu inegalitatea lui Jensen pentru funcția convexă  $x \mapsto \log(1 + e^x)$ , astfel, rezolvarea este completă.  $\square$

**Observație 9.** O caracteristică a acestei soluții care merită remarcată este aceea că progresul în rezolvarea problemei a venit rapid după ce împărțirea a redus numărul de variabile de la  $2n$  la  $n$ . Acest fenomen este de fapt destul de comun și astfel de reduceri merită aproape întotdeauna încercate.

**Problema 9.** (Technica lui Cauchy și Inegalitatea lui Jensen)

În 1906, J. L. W. V. Jensen a scris un articol care a fost inspirat de demonstrația dată de Cauchy pentru inegalitatea MA-MG și, într-un efort de a ajunge la miezul argumentului lui Cauchy, Jensen a introdus clasa de funcții care satisfac inegalitatea

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \text{ pentru orice } x, y \in [a, b]. \quad (2.14)$$

Astfel de funcții sunt acum numite funcții *J-convexe* și, după cum observăm mai jos în problema care urmează, ele sunt doar puțin mai generale decât funcțiile convexe definite de condiția

$$f(px + (1-p)y) \leq pf(x) + (1-p)f(y).$$

Să se arate că orice funcție *J-convexă* verifică inegalitatea

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

pentru orice

$$\{x_k : 1 \leq k \leq n\} \subset [a, b]. \quad (2.15)$$

**Demonstrație:** Vom aplica tehnica pe care Cauchy a folosit-o pentru a demonstra inegalitatea mediilor. Astfel, pentru început presupunem că  $n = 2^k, k = 1, 2, \dots$ , și demonstrăm 2.15 în acest caz.

Într-adevar, dacă luăm în 2.14  $x = (x_1 + x_2)/2$  și  $y = (x_3 + x_4)/2$  vom obține că

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) &\leq \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2} \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4} \\ &\text{pentru orice } x_1, \dots, x_4 \in [a, b] \end{aligned}$$

Repetând procedeul obținem 2.15 pentru orice  $n = 2^k, k \geq 1$ .

Pentru a demonstra acum în cazul în care  $n$  nu e de forma anterioară, alegem  $k$  astfel încât  $n < 2^k$  și aplicăm rezultatul pentru  $2^k$  șirului de valori  $y_j, 1 \leq j \leq 2^k$  luând  $y_j = x_j$  pentru  $1 \leq j \leq n$  și  $y_j = \frac{(x_1+x_2+\dots+x_n)}{n} = \bar{x}$  pentru  $n < j \leq 2^k$ , astfel vom avea

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{2^k} + \frac{x}{2^k} + \cdots + \frac{x}{2^k}\right) &= f\left(\frac{n\bar{x}}{2^k} + \frac{(2^k - n)\bar{x}}{2^k}\right) \\
&= f(\bar{x}) \\
&\leq \frac{f(x_1)}{2^k} + \cdots + \frac{f(x_n)}{2^k} + \frac{(2^k - n)}{2^k} f(\bar{x}) \\
&= \frac{f(x_1)}{2^k} + \cdots + \frac{f(x_n)}{2^k} + \left(1 - \frac{n}{2^k}\right) f(\bar{x})
\end{aligned}$$

care va implica

$$f(\bar{x}) = f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq f\left(\frac{x_1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_n}{n}\right),$$

adică inegalitatea 2.15. □

**Problema 10.** (Convexitatea și J-Convexitatea)

*Demonstrați că dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și J-convexă, atunci  $f$  trebuie să fie convexă, adică pentru orice  $x, y \in [a, b]$ ,  $p \in [0, 1]$*

$$f(px + (1 - p)y) \leq pf(x) + (1 - p)f(y).$$

**Observație 10.** Ca o curiozitate, ar trebui să punctăm faptul că există funcții J-convexe care nu sunt convexe. Cu toate acestea, astfel de funcții sunt discontinue și foarte rar utilizate.

**Demonstrație:** După cum am observat în soluția anterioară, avem că pentru orice  $k = 1, 2, \dots$  are loc inegalitatea

$$f\left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=1}^{2^k} x_j\right) \leq \frac{1}{2^k} \sum_{j=1}^{2^k} f(x_j),$$

deci luând  $x_j = x$  pentru  $1 \leq j \leq m$  și  $x_j = y$  pentru  $m < j \leq 2^k$  avem de asemenea

$$f\left(\left(\frac{m}{2^k}\right)x + \left(1 - \frac{m}{2^k}\right)y\right) \leq \left(\frac{m}{2^k}\right)f(x) + \left(1 - \frac{m}{2^k}\right)f(y).$$

Dacă alegem acum  $m_t$  și  $k_t$  astfel încât  $\frac{m_t}{2^{k_t}} \rightarrow p$  pentru  $t \rightarrow \infty$ , atunci continuitatea lui  $f$  și inegalitatea precedentă vor implica

$$f(px + (1 - p)y) \leq pf(x) + (1 - p)f(y).$$

□

**Problema 11.** Arătați că pentru orice  $0 \leq x, y, z \leq 1$ , una are limita

$$L(x, y, z) = \frac{x^2}{1 + y} + \frac{y^2}{1 + z} + \frac{z^2}{1 + x + y} + x^2(y^2 - 1)(z^2 - 1) \leq 2.$$

**Demonstrație:** Funcția  $L(x, y, z)$  este convexă în fiecare din cele trei variabile ale sale separat și prin argumentul detaliat mai jos, acest lucru implică faptul că  $L$  trebuie să atingă punctul maxim în unul dintre vârfurile cubului.

După opt evaluări ușoare constatăm că  $L(1, 0, 0) = 2$  și că în niciun alt colț al cubului  $[0, 1]^3$   $L$  nu are o valoare mai mare, deci soluția va fi completă. Este de asemenea ușor să arătăm că dacă o funcție definită pe cub este convexă în fiecare variabilă separat, atunci funcția trebuie să atingă maximum în unul dintre varfuri.

În primul rând se observă că o funcție convexă pe  $[0, 1]$  trebuie să își atingă maximum în unul dintre punctele finale ale intervalului, deci, pentru orice valoare fixă dintre  $y$  și  $z$ , avem inegalitatea

$$L(x, y, z) \leq \max \{L(0, y, z), L(1, y, z)\}.$$

Similar din convexitatea lui  $y \mapsto L(0, y, z)$  și  $y \mapsto L(1, y, z)$  rezultă că  $L(0, y, z)$  este marginit superior de

$$\max \{L(0, 0, z), L(0, 1, z)\}$$

și  $L(1, y, z)$  este marginit superior de

$$\max \{L(1, 0, z), L(1, 1, z)\}.$$

Luând toate aceste marginiri superioare, avem pentru orice valoare a lui  $z$  că  $L(x, y, z)$  este marginită de

$$\max \{L(0, 0, z), L(0, 1, z), L(1, 1, z)\}.$$

Convexitatea lui  $z \mapsto L(x, y, z)$  aplicată de patru ori ne dă apoi mărginirea

$$L(x, y, z) \leq \max \{L(e_1, e_2, e_3) : e_k = 0 \text{ sau } e_k = 1 \text{ pentru } k = 1, 2, 3\}$$

□

**Problema 12.** Pentru orice triunghi, teorema cosinusului care ne spune că

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Arătați că această teoremă implică formula ariei

$$a^2 = (b - c)^2 + 4A \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right),$$

apoi arătați cum implică inegalitatea lui Jensen faptul că în orice triunghi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 4\sqrt{3}A.$$

**Demonstrație:** Această inegalitate este cunoscută ca inegalitatea Hadwiger-Finsler, și furnizează una din cele mai frumoase rafinamente ale inegalității Weitzenböck.

Pentru a demonstra prima formulă, observăm că

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha \\ &= (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos \alpha) \\ &= (b - c)^2 + \frac{4A(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} \\ &= (b - c)^2 + 4A \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right), \end{aligned}$$

deci, prin simetrie și adunare, vedem că  $a^2 + b^2 + c^2$  este egal cu

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 4A \left( \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \tan \left( \frac{\beta}{2} \right) + \tan \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right).$$

Cum  $x \mapsto \tan x$  este convexă pe  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , inegalitatea lui Jensen implică

$$\frac{1}{3} \left\{ \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \tan \left( \frac{\beta}{2} \right) + \tan \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right\} \geq \tan \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{6} \right) = \tan \left( \frac{\pi}{6} \right)$$

Și cum  $\tan \left( \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$ , am încheiat demonstrația. □

**Problema 13.** (Criteriul derivatei secunde și Teorema lui Rolle)

Este cunoscut faptul că dacă  $f'' \geq 0$  pentru orice  $x \in [a, b]$ , atunci  $f$  este convexă pe  $[a, b]$ . Acest exercițiu schițează cum se poate demonstra acest lucru important prin estimarea diferenței

$$f(px_1 + qx_2) - pf(x_1) - qf(x_2)$$

prin compararea cu un polinom.

- Luăm  $0 < p < 1$ ,  $q = 1 - p$  și notăm  $\mu = px_1 + qx_2$  unde  $x_1 < x_2$ . Găsiți polinomul pătratic unic  $Q(x)$  astfel încât  $Q(x_1) = f(x_1)$ ,  $Q(x_2) = f(x_2)$  și  $Q(\mu) = f(\mu)$ .
- Folosind faptul că  $\Delta(x) = f(x) - Q(x)$  are trei zerouri distincte în  $[a, b]$  pentru a demonstra că există un  $x^*$  astfel încât  $\Delta''(x^*) = 0$ .
- În final, explicați cum  $f''(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in [a, b]$  și  $\Delta''(x^*) = 0$  implică faptul că  $f(px_1 + qx_2) - pf(x_1) - qf(x_2) \geq 0$ .

**Demonstrație:** Polinomul  $Q(x)$  poate fi scris astfel:

$$\frac{(x - x_2)(x - \mu)}{(x_1 - x_2)(x_1 - \mu)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - \mu)}{(x_2 - x_1)(x_2 - \mu)} f(x_2) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(\mu - x_1)(\mu - x_2)} f(\mu).$$

După ce aplicăm Teorema lui Rolle de doua ori observăm faptul că  $Q'(x) - f'(x)$  are un zero în  $(x_1, \mu)$  și un alt zero în  $(\mu, x_2)$ , deci o a treia aplicare a Teoremei lui Rolle ne arată că există un  $x^*$  între aceste zerouri pentru care avem  $0 = Q''(x) - f''(x^*)$ . Prin urmare o să avem  $Q''(x^*) = f''(x^*) \geq 0$ . Dar

$$Q''(x^*) = \frac{2f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - \mu)} + \frac{2f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - \mu)} + \frac{2f(\mu)}{(\mu - x_1)(\mu - x_2)}$$

Deci, luând

$$p = \frac{(x_2 - \mu)}{(x_2 - x_1)}$$

și

$$q = \frac{(\mu - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

și simplificând, se constată că ultima inegalitate se reduce la definiția convexității lui  $f$ .  $\square$

**Problema 14.** (Transformare pentru obținerea convexității)

Arătați că pentru numere pozitive  $a$ ,  $b$  și  $c$  care verifică  $a + b + c = abc$ , avem

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

**Demonstrație:** Această problemă dată la Olimpiada Națională din Korea în 1998 nu este ușoară, chiar și cu indicația oferită de titlul exercițiului. Cineva, care este norocos, poate stabili o legătură între ipoteza  $a + b + c = abc$  și binecunoscutul lucru că într-un triunghi, cu notațiile ca în figura 1 avem

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \tan(\beta) \tan(\gamma).$$

Această identitate este ușor de verificat ținând cont de faptul că avem egalitatea

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta),$$

dar este cu siguranță mai ușor să ne amintim acest lucru decât să descoperim pe loc.

Având în vedere indiciul, evident vom lua în considerare variabilele,

$$\alpha = \tan^{-1}(a), \beta = \tan^{-1}(b), \gamma = \tan^{-1}(c).$$

Condițiile  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ , și  $a + b + c = abc$  ne arată faptul că

$$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Inegalitatea din enunț devine de asemenea

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$$

și acest lucru rezultă direct din Inegalitatea lui Jensen ținând cont de concavitățile funcțiilor  $\cos$  pe  $[0, \pi]$  și de egalitatea  $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ .  $\square$

**Problema 15.** (Teorema Gauss-Lucas)

Să se arate că pentru orice polinom complex  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  rădăcinile derivatei  $P'(z)$  sunt cuprinse în acoperirea convexă  $H$  a rădăcinilor lui  $P(z)$ .

**Demonstrație:** Dacă scriem

$$P(z) = a_n (z - r_1)^{m_1} (z - r_2)^{m_2} \dots (z - r_n)^{m_k},$$

unde  $r_1, r_2, \dots, r_k$  sunt rădăcinile distincte ale lui  $P(z)$  și  $m_1, m_2, \dots, m_k$  sunt multiplicitățile corespunzătoare și împărțim  $P'(z)$  la  $P(z)$  obținem

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{m_1}{z - r_1} + \frac{m_2}{z - r_2} + \dots + \frac{m_k}{z - r_n}.$$

Acum dacă  $z_0$  este o rădăcină a lui  $P'(z)$  care este de asemenea o rădăcină a lui  $P(z)$ , atunci  $z_0$  este automat în  $H$ , deci fără a reduce generalitatea, putem presupune că  $z_0$  este o rădăcină a lui  $P'(z)$  care nu este o rădăcină a lui  $P(z)$ , caz în care găsim

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m_1}{z_0 - r_1} + \frac{m_2}{z_0 - r_2} + \dots + \frac{m_k}{z_0 - r_k} \\ &= \frac{m_1(\bar{z}_0 - \bar{r}_1)}{|z_0 - r_1|^2} + \frac{m_2(\bar{z}_0 - \bar{r}_2)}{|z_0 - r_2|^2} + \dots + \frac{m_k(\bar{z}_0 - \bar{r}_k)}{|z_0 - r_k|^2}. \end{aligned}$$

Dacă luăm

$$\omega_k = \frac{m_k}{|z_0 - r_k|^2},$$

atunci putem scrie această identitate ca

$$z_0 = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \dots + \omega_k r_k}{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k},$$

care ne arată că  $z_0$  este o combinație convexă a rădăcinilor lui  $P(z)$ . □

**Problema 16.** (Inegalitatea lui Wilf)

Arătați că dacă  $H$  este acoperirea convexă a rădăcinilor polinomului complex  $P = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ , atunci avem

$$\left| \frac{a_n}{P(z)} \right|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \cos \psi \left| \frac{P'(z)}{P(z)} \right|, \text{ pentru orice } z \notin H, \quad (2.16)$$

unde unghiul  $\psi$  este definit de figura 5. Această inegalitate ne oferă în același timp și o nouă dovadă și o rafinare cantitativă a Teoremei clasice Gauss-Lucas de la problema anterioară.



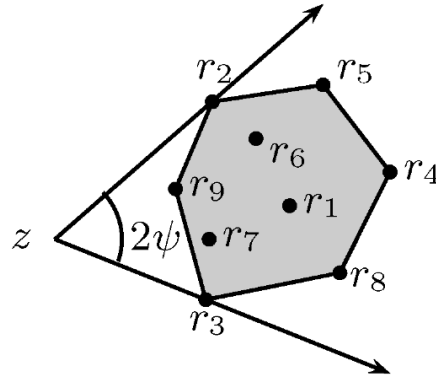


Figura 2.4: Unghiul de vizualizare  $2\psi$  al acoperirii convexe a mulțimii rădăcinilor  $r_1, r_2, \dots, r_n$  a lui  $P(z)$ , determină parametrul  $\psi$  pe care îl găsim în rafinarea cantitativă a lui Wilf a Teoremei Gauss-Lucas.

**Demonstrație:** Scriem  $r_1, r_2, \dots, r_n$  rădăcinile lui  $P$  repetate în funcție de multiplicitatea lor și pentru un  $z$  care se află în afara acoperirii convexe  $H$  scriem  $z - r_j$  în forma polară  $z - r_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ . Atunci avem

$$\frac{1}{z - r_j} = \rho_j^{-1} e^{-i\theta_j}, 1 \leq j \leq n,$$

și diferența între argumentele  $\theta_j, 1 \leq j \leq n$  este mai mică sau egală cu  $2\psi$ . Astfel, din Inegalitatea MA-MG forma complexă, avem

$$(\cos \psi) \left| \frac{1}{z - r_1} \frac{1}{z - r_2} \cdots \frac{1}{z - r_n} \right|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - r_j} \right|$$

care în termeni de  $P$  și  $P'$ , se scrie că

$$\left| \frac{a_n}{P(z)} \right|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n \cos \psi} \left| \frac{P'(z)}{P(z)} \right|, \text{ pentru orice } z \notin H,$$

ceea ce doream să demonstrăm. □

**Problema 17.** Dacă toate rădăcinile polinomului  $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$  sunt conținute în discul unitate  $U = \{z : |z| \leq 1\}$ , atunci

$$n |a_n|^{\frac{1}{n}} |P(z)|^{\frac{(n-1)}{n}} \sqrt{1 - |z|^{-2}} \leq |P'(z)|, \text{ pentru orice } z \notin U. \quad (2.17)$$

**Demonstrație:** Dacă  $2\psi$  este unghiul de vizualizare determinat de  $U$  când este privit din  $z \notin U$ , atunci avem  $1 = |z| \sin \psi$ , deci Teorema lui Pitagora ne spune că  $\cos \psi = (1 - |z|^{-2})^{\frac{1}{2}}$ . Inegalitatea 2.17 rezultă apoi direct din inegalitatea lui Wilf, 2.16. □

**Problema 18.** Arătați că dacă  $0 < r < 1$  și dacă numerele complexe  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sunt în discul  $D = \{z : |z| \leq r\}$ , atunci există  $z_0 \in D$  astfel încât

$$\prod_{j=1}^n (1 + z_j) = (1 + z_0)^n. \quad (2.18)$$

**Demonstrație:** Discul  $D_0 = \{z : |1 - z| \leq 1\}$  scris în coordonate polare este

$$\left\{ re^{i\theta} : 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\},$$

deci pentru fiecare  $j$  putem scrie  $1 + z_j$  ca  $r_j e^{i\theta_j}$  unde

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad r_j \leq 2 \cos \theta_j.$$

Rezultă imediat că

$$z_0 = -1 + (r_1 r_2 \cdots r_n)^{\frac{1}{n}} \exp \left( i \frac{(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)}{n} \right)$$

este soluția ecuației lui Nievergelt 2.18 și pentru a demonstra că  $z_0 \in D$  este suficient să arătăm că  $1 + z_0 \in D_0$ , echivalent, trebuie să arătăm că

$$(r_1 r_2 \cdots r_n)^{\frac{1}{n}} \leq 2 \cos \left( \frac{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n}{n} \right). \quad (2.19)$$

Cum  $(r_1 r_2 \cdots r_n)^{\frac{1}{n}}$  este marginită de  $((2 \cos \theta_1) (2 \cos \theta_2) \cdots (2 \cos \theta_n))^{\frac{1}{n}}$ , este deci suficient să arătăm că

$$((\cos \theta_1) (\cos \theta_2) \cdots (\cos \theta_n))^{\frac{1}{n}} \leq \cos \left( \frac{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n}{n} \right)$$

și aceasta rezultă din concavitatea lui  $f(x) = \log(\cos x)$  pe  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  împreună cu inegalitatea lui Jensen.  $\square$

**Problema 19.** (Inegalitatea sumei ciclice a lui Shapiro)

Arătați că pentru orice numere pozitive  $a_1, a_2, a_3$  și  $a_4$ , avem inegalitatea

$$2 \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_1} + \frac{a_4}{a_1 + a_2} \quad (2.20)$$

**Observație 11.** De altfel, Bushell (1994) ne oferă o mulțime de informații despre inegalități de forma

$$\frac{n}{2} \leq \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2}.$$

Se știe că această inegalitate nu este adevărată pentru  $n \geq 25$ , totuși mulțimea precisă a valorilor lui  $n$  pentru care este adevărată, nu a fost încă determinată.

**Demonstrație:** O soluție frumoasă folosind inegalitatea lui Jensen pentru  $f(x) = \frac{1}{x}$  a fost dată de Robert Israel în grupul de știri sci.math în 1999.

Dacă notăm  $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  și  $C$  reprezintă suma din partea dreaptă a inegalității 2.18, atunci Inegalitatea lui Jensen cu  $p_j = \frac{a_j}{S}$  și

$$x_1 = a_2 + a_3, x_2 = a_3 + a_4, x_3 = a_4 + a_1, x_4 = a_1 + a_2$$

conduce la

$$\frac{C}{S} \geq \left\{ \frac{D}{S} \right\}^{-1}$$

sau  $C \geq \frac{S^2}{D}$ , unde am notat

$$D = a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_1) + a_4(a_1 + a_2).$$

Acum, este simplu să verificăm că

$$S^2 - 2D = (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 > 0.$$

Acest lucru este suficient pentru a completa soluția. □

**Problema 20.** (*Lema celor trei coarde*) Arătați că dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este convexă și  $a < x < b$ , atunci avem

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \quad (2.21)$$

**Demonstrație:** Din convexitate avem

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b \Rightarrow f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

deci, după scăderea lui  $f(a)$ , va rezulta

$$f(x) - f(a) \leq \frac{x-a}{b-a} \{f(b) - f(a)\}. \quad (2.22)$$

Aceasta ne dă a doua inegalitate din 2.21 iar prima inegalitate se demonstrează în același mod. □

---

---

# Concluzii

---

---

Lucrarea de față prezintă o scurtă prezentare a funcțiilor convexe, precum și aplicații ale acestora. Recunoașterea funcțiilor convexe ca o clasă de funcții care trebuie studiată poate fi urmărită în general până la J. L. W. V. Jensen. În orice caz, el nu a fost primul care a studiat funcțiile convexe.

Forma discretă a inegalității lui Jensen a fost demonstrată, pentru prima dată, de Hölder în 1889, în ipoteza că derivata a doua este pozitivă. Mai mult, Stolz a demonstrat în 1893 că orice funcție continuă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică inegalitatea

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \forall x, y \in [a, b]$$

(funcție mid-point convexă sau J-convexă) are derivate la stânga și la dreapta în fiecare punct al intervalului  $(a, b)$ . În timp ce funcțiile obișnuite convexe sunt continue în toate punctele interioare, funcțiile J-convexe pot fi discontinue peste tot.

Am putut vedea cum Inegalitatea lui Young poate fi de asemenea obținută ca o consecință a convexității stricte a funcției exponențiale.

Cel de al doilea capitol cuprinde aplicații ale funcțiilor convexe și anume Formula defectului a lui Hölder. Aceasta este mai puțin cunoscută decât bine cunoscuta Inegalitatea a lui Hölder și oferă o măsură perfect naturală a diferenței dintre cele două părți ale Inegalității lui Jensen și ne spune cum putem să demonstrăm inegalitatea lui Jensen, ori de câte ori putem verifica ipoteza suplimentară 2.5, sau, în cazul în care aceasta se comportă ca o funcție afină, partea stângă a egalității 2.6 este egală cu 0.

De asemenea, printre probleme abordate se numără, Inegalitatea ariei n-polygonului, Inegalitățile investiționale, Supraaditivitatea mediei geometrice - cu ajutorul Inegalității lui Jensen, Inegalitatea sumei ciclice a lui Shapiro, Inegalitatea lui Wilf, Teorema Gauss-Lucas dar și alte aplicații din geometrie.

---

---

## Referințe bibliografice

---

---

- [1] Constantin P. Niculescu și Lars-Erik Persson. Convex functions and their applications: A contemporary approach. *Second Edition, Springer*, 2018.
- [2] G. Mărășanu și L. G. Ladunca. Matematică pentru olimpiade, concursuri și centre de excelență. clasa a xi-a. *Taida*, 2014.
- [3] J. Michael Steele. The cauchy-schwarz master class: An introduction to the art of mathematical inequalities. *Cambridge University Press*, 2004.
- [4] V. Pop (coord.). Matematică de excelență, clasa a 11-a, vol. 2-analiză matematică. *Paralela 45*, 2016.
- [5] Gh. Sirețchi. Calcul diferențial și integral, vol. 1, noțiuni fundamentale. *Ed. Științifică și Enciclopedică*, 1985.