Ministerul Educaţiei
Universitatea ”OVIDIUS” Constanţa
Facultatea de Matematică şi Informatică
Specializarea Informatică

Licenţă

Coordonator ştiinţific:
Cosma Luminiţa

Student:
Tănase Ramona Elena

Constanţa
2021

Cuprins

Capitolul 1

Funcţii convexe pe intervale

1.1 Definitii. Proprietati

Studiul funcțiilor convexe de o variabila reala, oferă o imagine excelentă a frumuseții și fascinației matematicii avansate. Vom găsi aici o mare varietate de rezultate bazate pe argumente simple și intuitive care au aplicații remarcabile.

In continuare vom nota cu I un interval nedegenerat din $\mathbb{R}$.

1.1.1 Definitie

O functie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeste convexa daca,

$$f\left(\left(1-\lambda\right)x+\lambda y\right) \leq \left(1-\lambda\right)f_{(x)}+\lambda f_{(y)} \tag{1.1}$$

pentru orice x si y din I, si orice $\lambda \in [0,1]$. Functia f se numeste strict convexa daca inegalitate (1.1) este valabila cu inegalitate stricta pentru orice x si y din I, si orice $\lambda \in (0,1)$. Daca $-f$ este convexa (respective stric convexa), atunci spunem ca f este concava (respectiv strict concava). Daca f este si convexa si concava, atunci spunem ca f este functie afina.

Functiile afine sunt tocmai functiile de forma $mx+n$, m si n constante reale. Se poate demonstra usor faptul ca urmatoarele trei functii sunt convexe (desi nu sunt strict convexe):

1. partea pozitiva $x^+ = max\{x, 0\}$,

2. partea negative $x^- = max\{-x, 0\}$,

3. modulul $|x| = max\{-x, x\}$,

4. functia patratica x^2 este strict convexa pe $\mathbb{R}$,

5. functia radacina patrata $\sqrt{x}$ este strict concava pe $\mathbb{R}_+$.

Alte criterii de convexitate legate de teoria de baza a functiilor convexe vor fi prezentate in cele ce urmeaza. Convexitatea unei functii $f : I \to \mathbb{R}$, inseamna geometric faptul ca, punctele de pe graficului lui $f_{[u,v]}$ sunt sub (sau pe) coarda care uneste capetele $(u, f(u))$ si $(v, f(v))$, pentru orice $u, v \in I, u < v$; Vezi Fig 1.1 . Astfel inegalitatea 1.1 este echivalenta cu

$$f(x) \le f(u) + \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) \tag{1.2}$$

pentru orice $x \in [u, v]$, si $u, v \in I, u < v$.

Fig 1.1 Frunctii convexe: graficul este sub coarda

Aceasta remarca arata faptul ca functiile convexe sunt majorate de functiile afine pe orice subinterval compact.

Fiecare functie convexa f este marginita pe fiecare subinterval compact $[u, v]$ a intervalului pe care este definite. De fapt , $f(x) \le M = max\{f(u), f(v)\}$ pe $[u, v]$ si scriind un punct arbitrar $x \in [u, v]$ ca $x = \frac{(u+v)}{2} + t$ pentru unii t cu $|t| \le \frac{(v-u)}{2}$, deduce cu usurinta ca

$$f(x) = f\left(\frac{u+v}{2} + t\right) \ge 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - f\left(\frac{u+v}{2} - t\right) \ge 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - M$$

1.1.2 Teorema

O functie convexa $f : I \to \mathbb{R}$ este continua in orice punct interior al lui I.

Demonstraţie 1. *Presupunem ca $a \in I$ si alegem $\varepsilon > 0$ astfel incat $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$. Atunci*

$$f(a) \le \frac{1}{2}f(a - \varepsilon) + \frac{1}{2}f(a + \varepsilon)$$

si

$$f(a \pm t\varepsilon) = f((1 - t)a + t(a \pm \varepsilon)) \le (1 - t)f(a) + tf(a \pm \varepsilon)$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Prin urmare

$$t(f(a \pm \varepsilon) - f(a)) \ge f(a \pm t\varepsilon) - f(a) \ge -t(f(a \mp \varepsilon) - f(a))$$

care ne conduce la

$$|f(a \pm t\varepsilon) - f(a)| \leq tmax\{|f(a-\varepsilon) - f(a)|, |f(a+\varepsilon) - f(a)|\},$$

pentru orice $t \in [0,1]$. *Continuitatea functiei* f *este acum clara. Exemple simple precum,* $f(x) = 0$ *daca* $x \in (0,1)$, *si daca* $f(0) = f(1) = 1$, *arate faptul ca salturi in sus pot aparea la punctele finale ale intervalului de definire a unei functii convexe. Din fericire, aceste posibile discontinuitati pot fi inlaturate.*

1.1.3 Propozitie

Daca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o functie convexa, atunci limitele $f(a+) = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$ si $f(b-) = \lim_{x\to b, x<b} f(x)$ exista in $\mathbb{R}$ si

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a+) & daca x = a \\ f(x) & daca x \in (a,b) \\ f(b-) & daca x = b \end{cases}$$

este o functie convexa continua.

Acest rezultat este o consecinta a urmatoarelor rezultate :

1.1.4 Lema

Daca $f : I \to \mathbb{R}$ este convexa, atunci sau f este monotona pe intervalul I, sau exista un punct $\xi \in intI$ astfel incat f este descrescatoare pe intervalul $(-\infty, \xi) \cap$ si I descrescatoare pe intervalul $[\xi, \infty) \cap I$.

Demonstraţie 2. *Luam* $a < b$ *puncte interioare arbitrare ale lui I si fie* $m = inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$. *Cum f este continua pe* $[a,b]$, *acest infimum este atins in punctul* $\xi \in [a,b]$, *adica* $m = f(\xi)$. *Daca* $a \leq x < y < \xi$, *atunci* y *este o combinatie convexa a lui* x *si* ξ, *mai exact,* $y = \frac{\xi-y}{\xi-x}x + \frac{y-x}{\xi-x}\xi$. *Cum f este convexa,*

$$f(y) \leq \frac{\xi - y}{\xi - x} f(x) + \frac{y-x}{\xi - x} f(\xi) \leq f(x)$$

Demonstratia se incheie cu un process de lipire (la stanga lui a *si la dreapta lui* b*), observand ca proprietatea de covexitate face imposibila existent a trei numere* $u < v < w$ *in I astfel incat* $f(u) < f(v) > f(w)$.

1.1.5 Corolar

a) Orice functie convexa $f : I \to \mathbb{R}$ care nu este monotona pe intervalul I are un minim global interior.

b) Daca o functie convexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este marginita superior, atunci este constanta.

Atingere supremului la capete nu este o proprietate caracteristica a functiilor convexe, dar insa avem urmatorul rezultat.

1.1.6 Teorema

Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Atunci f este (strict) convexa daca si numai daca pentru orice subinterval compact J al lui I, si fiecare functie afina L, supremul lui $f + L$ pe J este atins intr-un capat al intervalului (si doar acolo).

Demonstraţie 3. *Ne vom restrange la cazul functiilor convexe. Cazul functiilor strict convexe poate fi tratat in acelasi mod. Necesar: Daca f este convexa, la fel este si suma $F = f + L$. Cum orice punct al unui subinterval $J = [x, y]$ este o combinatie convexa $z = (1-\lambda)x + \lambda y$a lui x si y, avem*

$$\sup_{z\in J} F(z) = \sup_{\lambda\in[0,1]} F((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} [(1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)] + max\{F(x), F(y)\}$$

Suficienta: Avand un subinterval $J = [x, y]$ al lui I, exista o functie afina $L(x) = mx + n$ care este egala cu f la punctele x si y. Atunci

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} [(f - L)(1-\lambda)x + \lambda y] = 0$$

Care ne conduce la

$$0 \geq f((1-\lambda)x + \lambda y) - L((1-\lambda)x - \lambda L) = f((1-\lambda)x + \lambda y) - (1-\lambda)L(x) - \lambda L(y) = f((1-\lambda)x$$

Pentru orice $\lambda \in [0, 1]$.

1.1.7 Remarca

O functie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeste cvasiconexa daca,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq min\{f(x), f(y)\}$$

pentru orice $x, y \in I$ si $\lambda \in (0, 1]$. Urmatoarea caracterizare a convexitatii in cadrul clasei functiilor continue se dovedeste utila si in verificarea convexitatii.

1.1.8 Teorema

O functie $f : I \to \mathbb{R}$ este convexa daca si numai daca ea verifica urmatoarele doua conditii:

a) f este continua in fiecare punct din interiorul lui I; si

b) f este convexa in punctul de mijloc , adica,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

pentru orice $x, y \in I$.

Demonstraţie 4. *Necesitatea rezulta din teorema 1.1.2. Suficienta este demonstrate prin reducerea la absurd. Daca f nu este convexa, atunci exista un interval $[a,b]$ astfel incat graficul functiei f restricionata la $[a,b]$ sa nu fie sub coarda care uneste punctele $(a, f(a))$ si $(b, f(b))$; ca urmare , functia*

$$\varphi(x) = -f(x) + f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), x \in [a,b]$$

are $\gamma = inf\{\varphi(x) : x \in [a,b]\} < 0$. Observam ca $-\varphi$ este convexa in punctul de mijloc, continuu si $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Fie $c = inf\{x \in [a,b] : \varphi(x) = \gamma\}$, atunci $\varphi(c) = \gamma$ si $c \in (a,b)$. Conform definitiei lui c, pentru orice $h > 0$ pentru care $c \pm h \in (a,b)$ avem

$$\varphi(c-h) > \varphi(c)\, si \varphi(c+h) \geq \varphi(c)$$

Astfel

$$-\varphi(c) > \frac{-\varphi(c-h) - \varphi(c+h)}{2}$$

Ceea ce este in contraditie cu faptul ca $-\varphi$ esteconvexa in punctul de mijloc.

1.1.9 Corolar

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o functie continua. Atunci, f este convexa daca si numai daca

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0$$

pentru orice $x \in I$ si orice $h > 0$ astfel incat si $x+hsix-h$ apartin lui I. Observam ca si Teorema 1.1.8 si corolarul acesteia 1.1.9 de mai sus, admit variante in cazul functiilor strict convexe, Corolarul 1.1.9 ne permite sa verificam imedat convexitatea / concavitatea stricta a unor functii elementare, precum functia exponentiala, cea logaritmica, si restrictia functiei sinus pe $[0, \pi]$. Intradevar, pentru functia exponentiala , faptul ca $a, b > 0, a \neq b$, implica $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ este echivalenta cu $e^{x+h} + e^{x-h} - 2e^x > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ si orice $h > 0$. Multe alte exemple pot fi deduse folosind urmatoarele proprietati ale functiilor convexe / concave.

1.1.10 Propozitie

Operatii cu functii convexe

a) Adunand doua functii convexe (definite pe acelasi interval) obtinem o functie convexa; daca una dintre ele este strict convexa, atunci suma lor este de asemenea strict convexa.

b) Inmultind o functie (strict) convexa cu un scalar (strict) pozitiv obtinem de asemenea o functie (strict) convexa.

c) Presupunem ca f si g sunt doua functii convexe pozitive definite pe un interval I. Atunci, produsul lor este o functie convexa pe I daca sunt sincrone in sensul ca,

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$; de exemplu , aceasta conditie apare daca f si g sunt amandoua descrescatoare sau amandoua crescatoare.

d) Restrictia unei functii (strict) convexe pe I, la un subinterval al lui I este de asemenea o functie (strict) convexa.

e) Presupunem ca f este o functie bijectiva intre doua interval I si J. Daca f este strict crescatoare, atunci f este (strict) convexa daca si numai daca f^{-1} este (strict) concava. Daca f este o functie bijectiva descrescatoare, atunci f si f^{-1} sunt ambele convexe sau ambele concave.

f) Daca f este o functie strict pozitiva concava, atunci $\frac{1}{f}$ este o functie convexa. Aici rolul concavitatii si al convexitatii nu poate fi schimbat unul cu celalalt.

g) Maximul a doua functii (stricte) convexe $f, g : I \to \mathbb{R}$,

$$max\{f, g\}(x) = max\{f(x), g(x)\}$$

este de asemenea o functie (strict) convexa.

h) Compunerea $f(ax + b)$, a unei functii f convexe si a unei functii afine $ax + b$, este o functie convexa.

Detaliile sunt simple. In continuare , vom discuta extinderea inegalitatii convexitatii(1.1). In primul rand, observam faptul ca intervalele sunt inchise la combinatii convexe arbitrare, adica,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I$$

pentru orice $x_1, ..., x_n \in$ si orice $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Acest lucru poate fi demonstrat prin inductie dupa n. Cazul $n = 1$ este trivial, in timp ce $n = 2$ rezulta din definitia unei multimi convexe. Presupunand faptul ca rezultatul este adevarat pentru toate combinatiile convexe cu cel mult $n \geq 2$ puncte, sa trecem la cazul combinatiilor cu $n + 1$

puncte, $x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k$. Cazul non-trivial este atunci cand toti coeficientii λ_k se afla in $(0,1)$. Dar in acest cacz , datorita ipotezei de inductie, x poate fi reprezentat ca o combinatie convexa de doua elemente ale lui I,

$$x = (1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1}x_{n+1},$$

prin urmare x apartine lui I. Remarca de mai sus asupra intervalelor are o echivalenta remarcabila pentru functiile convexe :

1.1.11 Lema

Cazul discret al inegalitatii lui Jensen O functie cu valoari reala f definite pe un interval I este convexa daca si numai daca pentru orice puncte $x_1, ..., x_n$ din I si orice scalari $\lambda_1, ..., \lambda_n$ din $[0,1]$ cu $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ avem,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Daca f este strict convexa, inegalitatea de mai sus este stricta daca punctele x_k nu sunt toate egale intre ele , si scalarii λ_k sunt toti pozitivi.

Demonstraţie 5. *Prima afirmatie rezulta prin inductie matematica. In ceea ce priveste cea de a doua afirmatie, presupunem ca functia f este strict convexa si*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \tag{1.3}$$

pentru punctele $x_1, ..., x_n \in I$ si cativa scalari $\lambda_1, ..., \lambda_n \in (0,1)$ cu suma egala cu 1. Daca $x_1, ..., x_n$ nu sunt toti egali, multimea $S = \{k : x_k < max\{x_{1,....,x_n}\}\}$ va fi o submultime proprie a multimii $\{1, ..., n\}$ si $\lambda_S = \sum_{k\in S} \lambda_S \in (0,1)$. Cum f este strict convexa avem,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = f\left(\lambda_S\left(\sum_{k\in S} \frac{\lambda_k}{\lambda_S} x_k\right) + (1-\lambda_S)\left(\sum_{k\notin S} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_S} x_k\right)\right) <$$

$$\lambda_S f\left(\sum_{k\in S} \frac{\lambda_k}{\lambda_S} x_k\right) + (1-\lambda_S) f\left(\sum_{k\notin S} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_S} x_k\right) <$$

$$\lambda_S \sum_{k\in S} \frac{\lambda_k}{\lambda_S} f(x_k) + (1-\lambda_S) \sum_{k\notin S} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_S} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

care contrazice ipoteza noastra 1.3. Astfel, toate punctele x_k ar trebui sa coincida.

O consecinta imediata a lemei 1.1.11 (cand este aplicata functiei exponentiale) este urmatorul rezultat care extinde bine cunoscuta inegalitate AM-GM(adica inegalitatea dintre media aritmetica si cea geometrica).

1.1.12 Teorema

Forma ponderata a inegalitatii AM-GM Daca $x_1, ..., x_n \in (0, \infty)\, si \lambda_1, ..., \lambda_n \in (0, 1), \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k > x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$$

In afara de cazul cand $x_1 = \cdots = x_n$. Inlocuind x_k cu $\frac{1}{x_k}$ in ultima inegalitate, obtinem

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} > \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}} \frac{\lambda_k}{x_k}$$

in afara de cazul cand $x_1 = \cdots = x_n$. Asta reprezinta forma ponderata a inegalitatii mediei geometrice – mediei armonice (adica de inegalitatea GM-HM).

Pentru $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ recuperam inegalitatea obisnuita care afirma ca pentru orice $x_1, ..., x_n$ de numere positive, nu toate egale, avem

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} > \frac{n}{\left(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}\right)}.$$

1.2 Inegalitatea lui Young si consecintele sale

Urmatoarul caz special al formei ponderate a inegalitatii AM-GM este cunoscuta sub numele de inegalitatea lui Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

pentru orice $a, b \geq 0$, si de fiecare data cand $p, q \in (0, 1)$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; egalitatea are loc daca si numai daca $a^p = b^q$. Inegalitatea lui Young poate fi de asemenea obtinuta ca o consecinta a convexitatii stricte a functiilor exponentiale. De fapt

$$ab = e^{log_a b} = e^{\left(\frac{1}{p}\right) log_a p + \left(\frac{1}{q}\right) log_b q} \leq \frac{1}{p} e^{log_a p} + \frac{1}{q} e^{log_b q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

pentru toti $a, b > 0$ cu $a^p \neq b^q$. Inca un argument este oferit de studiul variatiei functiei diferentiale.

$$F(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab, a \geq 0$$

unde $b \geq 0$ este un paramentru. Aceatsa functie atinge punctul minim globa strict la $a = b^{\frac{q}{p}}$, care ne conduce la $F(a) > F\left(b^{\frac{q}{p}}\right) = 0$ pentru orice $a \geq 0, a \neq b^{\frac{q}{p}}$. W.H.Young a dovedid de fapt o inegalitate mult mai generala, pentru $f(x) = x^{p-1}$.

1.2.1 Teorema

Demonstraţie 6. *TODO*

1.2.2 Teorema

Demonstraţie 7. *TODO*

Referinţe bibliografice