



Ministerul Educației
Universitatea "OVIDIUS" Constanța
Facultatea de Matematică și Informatică
Specializarea Informatică

Licență

Coordonator științific:
Cosma Luminița

Student:
Tănase Ramona Elena

Constanța
2021

Cuprins

Cuprins	i
1 Definitii. Proprietati	2
1.1 Definitii. Proprietati	2
1.1.1 Definitie	2
1.1.2 Teorema	3
1.1.3 Propozitie	4
1.1.4 Lema	4
1.1.5 Corolar	5
1.1.6 Teorema	5
1.1.7 Remarca	5
1.1.8 Teorema	6
1.1.9 Corolar	6
1.1.10 Propozitie	7
1.1.11 Lema	8
1.1.12 Teorema	9
1.2 Inegalitatea lui Young si consecintele sale	9
1.2.1 Teorema	10

1.2.2	Teorema	10
1.2.3	Remarca	11
1.2.4	Teorema	12
1.2.5	Remarca	12
1.2.6	Remarca	13
2	Exercitii	14
	Referințe bibliografice	17

Capitolul 1

Definitii. Proprietati

1.1 Definitii. Proprietati

Studiul funcțiilor convexe de o variabilă reală, oferă o imagine excelentă a frumuseții și fascinației matematicii avansate. Vom găsi aici o mare varietate de rezultate bazate pe argumente simple și intuitive care au aplicații remarcabile.

În continuare vom nota cu I un interval nedegenerat din \mathbb{R} .

1.1.1 Definitie

O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește convexă dacă,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (1.1)$$

pentru orice x și y din I , și orice $\lambda \in [0, 1]$. Funcția f se numește strict convexă dacă inegalitatea (1.1) este valabilă cu inegalitate strictă pentru orice x și y din I , și orice $\lambda \in (0, 1)$. Dacă $-f$ este convexă (respectiv strict convexă), atunci spunem că f este concavă (respectiv strict concavă). Dacă f este și convexă și concavă, atunci spunem că f este funcție afină.

Funcțiile afine sunt tocmai funcțiile de forma $mx + n$, m și n constante reale. Se poate

demonstra usor faptul ca urmatoarele trei functii sunt convexe (desi nu sunt strict convexe):

1. partea pozitiva $x^+ = \max \{x, 0\}$,
2. partea negative $x^- = \max \{-x, 0\}$,
3. modulul $|x| = \max \{-x, x\}$,
4. functia patratica x^2 este strict convexa pe \mathbb{R} ,
5. functia radacina patrata \sqrt{x} este strict concava pe \mathbb{R}_+ .

Alte criterii de convexitate legate de teoria de baza a functiilor convexe vor fi prezentate in cele ce urmeaza. Convexitatea unei functii $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, inseamna geometric faptul ca, punctele de pe graficului lui $f|_{[u,v]}$ sunt sub (sau pe) coarda care uneste capetele $(u, f(u))$ si $(v, f(v))$, pentru orice $u, v \in I, u < v$; Vezi Fig 1.1 . Astfel inegalitatea 1.1 este echivalenta cu

$$f(x) \leq f(u) + \frac{f(v) - f(u)}{v - u} (x - u) \quad (1.2)$$

pentru orice $x \in [u, v]$, si $u, v \in I, u < v$.

Fig 1.1 Frunctii convexe: graficul este sub coarda

Aceasta remarca arata faptul ca functiile convexe sunt majorate de functiile afine pe orice subinterval compact.

Fiecare functie convexa f este marginita pe fiecare subinterval compact $[u, v]$ a intervalului pe care este definite. De fapt , $f(x) \leq M = \max \{f(u), f(v)\}$ pe $[u, v]$ si scriind un punct arbitrar $x \in [u, v]$ ca $x = \frac{(u+v)}{2} + t$ pentru unii t cu $|t| \leq \frac{(v-u)}{2}$, deduce cu usurinta ca

$$f(x) = f\left(\frac{u+v}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - f\left(\frac{u+v}{2} - t\right) \geq 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - M$$

1.1.2 Teorema

O functie convexa $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este continua in orice punct interior al lui I .

Demonstrație 1. Presupunem ca $a \in I$ si alegem $\varepsilon > 0$ astfel incat $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$. Atunci

$$f(a) \leq \frac{1}{2}f(a - \varepsilon) + \frac{1}{2}f(a + \varepsilon)$$

si

$$f(a \pm t\varepsilon) = f((1-t)a + t(a \pm \varepsilon)) \leq (1-t)f(a) + tf(a \pm \varepsilon)$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Prin urmare

$$t(f(a \pm \varepsilon) - f(a)) \geq f(a \pm t\varepsilon) - f(a) \geq -t(f(a \mp \varepsilon) - f(a))$$

care ne conduce la

$$|f(a \pm t\varepsilon) - f(a)| \leq t \max\{|f(a - \varepsilon) - f(a)|, |f(a + \varepsilon) - f(a)|\},$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Continuitatea funcției f este acum clară. Exemple simple precum, $f(x) = 0$ dacă $x \in (0, 1)$, și dacă $f(0) = f(1) = 1$, arată faptul că salturi în sus pot apărea la punctele finale ale intervalului de definire a unei funcții convexe. Din fericire, aceste posibile discontinuități pot fi înlăturate.

1.1.3 Propozitie

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție convexă, atunci limitele $f(a+) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ și $f(b-) = \lim_{x \rightarrow b, x < b} f(x)$ există în \mathbb{R} și

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a+) & \text{dacă } x = a \\ f(x) & \text{dacă } x \in (a, b) \\ f(b-) & \text{dacă } x = b \end{cases}$$

este o funcție convexă continuă.

Acest rezultat este o consecință a următoarelor rezultate :

1.1.4 Lema

Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă, atunci sau f este monotona pe intervalul I , sau există un punct $\xi \in \text{int} I$ astfel încât f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, \xi) \cap I$ și I descrescătoare pe intervalul $[\xi, \infty) \cap I$.

Demonstrație 2. Luăm $a < b$ puncte interioare arbitrare ale lui I și fie $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Cum f este continuă pe $[a, b]$, acest infimum este atins în punctul $\xi \in [a, b]$, adică $m = f(\xi)$. Dacă $a \leq x < y < \xi$, atunci y este o combinație convexă a lui x și ξ , mai exact, $y = \frac{\xi - y}{\xi - x}x + \frac{y - x}{\xi - x}\xi$. Cum f este convexă,

$$f(y) \leq \frac{\xi - y}{\xi - x}f(x) + \frac{y - x}{\xi - x}f(\xi) \leq f(x)$$

Demonstratia se încheie cu un proces de lipire (la stanga lui a și la dreapta lui b), observând că proprietatea de convexitate face imposibilă existența a trei numere $u < v < w$ în I astfel încât $f(u) < f(v) > f(w)$.

1.1.5 Corolar

- a) Orice functie convexa $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ care nu este monotona pe intervalul I are un minim global interior.
- b) Daca o functie convexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este marginita superior, atunci este constanta.

Atingere supremului la capete nu este o proprietate caracteristica a functiilor convexe, dar insa avem urmatorul rezultat.

1.1.6 Teorema

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este (strict) convexa daca si numai daca pentru orice subinterval compact J al lui I , si fiecare functie afina L , supremul lui $f + L$ pe J este atins intr-un capat al intervalului (si doar acolo).

Demonstrație 3. *Ne vom restrange la cazul functiilor convexe. Cazul functiilor strict convexe poate fi tratat in acelasi mod. Necesari: Daca f este convexa, la fel este si suma $F = f + L$. Cum orice punct al unui subinterval $J = [x, y]$ este o combinatie convexa $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ a lui x si y , avem*

$$\sup_{z \in J} F(z) = \sup_{\lambda \in [0,1]} F((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq \sup_{\lambda \in [0,1]} [(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y)] + \max\{F(x), F(y)\}$$

Suficienta: Avand un subinterval $J = [x, y]$ al lui I , exista o functie afina $L(x) = mx + n$ care este egala cu f la punctele x si y . Atunci

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} [(f - L)((1 - \lambda)x + \lambda y)] = 0$$

Care ne conduce la

$$0 \geq f((1 - \lambda)x + \lambda y) - L((1 - \lambda)x + \lambda y) = f((1 - \lambda)x + \lambda y) - (1 - \lambda)L(x) - \lambda L(y) =$$

$$= f((1 - \lambda)x + \lambda y) - (1 - \lambda)f(x) - \lambda f(y)$$

Pentru orice $\lambda \in [0, 1]$.

1.1.7 Remarca

O functie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numeste cvasiconexa daca,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

pentru orice $x, y \in I$ si $\lambda \in (0, 1]$. Urmatoarea caracterizare a convexitatii in cadrul clasei functiilor continue se dovedeste utila si in verificarea convexitatii.

1.1.8 Teorema

O functie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este convexa daca si numai daca ea verifica urmatoarele doua conditii:

- a) f este continua in fiecare punct din interiorul lui I ; si
- b) f este convexa in punctul de mijloc, adica,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

pentru orice $x, y \in I$.

Demonstrație 4. *Necesitatea rezulta din teorema 1.1.2. Suficienta este demonstrata prin reducerea la absurd. Daca f nu este convexa, atunci exista un interval $[a, b]$ astfel incat graficul functiei f restricionata la $[a, b]$ sa nu fie sub coarda care uneste punctele $(a, f(a))$ si $(b, f(b))$; ca urmare, functia*

$$\varphi(x) = -f(x) + f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), x \in [a, b]$$

are $\gamma = \inf \{\varphi(x) : x \in [a, b]\} < 0$. Observam ca $-\varphi$ este convexa in punctul de mijloc, continuu si $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Fie $c = \inf \{x \in [a, b] : \varphi(x) = \gamma\}$, atunci $\varphi(c) = \gamma$ si $c \in (a, b)$. Conform definitiei lui c , pentru orice $h > 0$ pentru care $c \pm h \in (a, b)$ avem

$$\varphi(c - h) > \varphi(c) \text{ si } \varphi(c + h) \geq \varphi(c)$$

Astfel

$$-\varphi(c) > \frac{-\varphi(c - h) - \varphi(c + h)}{2}$$

Ceea ce este in contradictie cu faptul ca $-\varphi$ este convexa in punctul de mijloc.

1.1.9 Corolar

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o functie continua. Atunci, f este convexa daca si numai daca

$$f(x + h) + f(x - h) - 2f(x) \geq 0$$

pentru orice $x \in I$ si orice $h > 0$ astfel incat si $x + h$ si $x - h$ apartin lui I . Observam ca si Teorema 1.1.8 si corolarul acesteia 1.1.9 de mai sus, admit variante in cazul functiilor strict convexe, Corolarul 1.1.9 ne permite sa verificam imediat convexitatea / concavitata stricta a unor functii elementare, precum functia exponentiala, cea logaritmica, si restrictia functiei sinus pe $[0, \pi]$. Intradevar, pentru functia exponentiala, faptul ca $a, b > 0, a \neq b$, implica $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ este echivalenta cu $e^{x+h} + e^{x-h} - 2e^x > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ si orice $h > 0$. Multe alte exemple pot fi deduse folosind urmatoarele proprietati ale functiilor convexe / concave.

1.1.10 Propozitie

Operatii cu functii convexe

- a) Adunand doua functii convexe (definite pe acelasi interval) obtinem o functie convexa; daca una dintre ele este strict convexa, atunci suma lor este de asemenea strict convexa.
- b) Inmultind o functie (strict) convexa cu un scalar (strict) pozitiv obtinem de asemenea o functie (strict) convexa.
- c) Presupunem ca f si g sunt doua functii convexe pozitive definite pe un interval I . Atunci, produsul lor este o functie convexa pe I daca sunt sincrone in sensul ca,

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$; de exemplu , aceasta conditie apare daca f si g sunt amandoua descrescatoare sau amandoua crescatoare.

- d) Restrictia unei functii (strict) convexe pe I , la un subinterval al lui I este de asemenea o functie (strict) convexa.
- e) Presupunem ca f este o functie bijectiva intre doua interval I si J . Daca f este strict crescatoare, atunci f este (strict) convexa daca si numai daca f^{-1} este (strict) concava. Daca f este o functie bijectiva descrescatoare, atunci f si f^{-1} sunt ambele convexe sau ambele concave.
- f) Daca f este o functie strict pozitiva concava, atunci $\frac{1}{f}$ este o functie convexa. Aici rolul concavitatii si al convexitatii nu poate fi schimbat unul cu celalalt.
- g) Maximul a doua functii (stricte) convexe $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\max \{f, g\} (x) = \max \{f(x), g(x)\}$$

este de asemenea o functie (strict) convexa.

- h) Compunerea $f(ax + b)$, a unei functii f convexe si a unei functii afine $ax + b$, este o functie convexa.

Detaliile sunt simple. In continuare , vom discuta extinderea inegalitatii convexitatii(1.1). In primul rand, observam faptul ca intervalele sunt inchise la combinatii convexe arbitrare, adica,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I$$

pentru orice $x_1, \dots, x_n \in I$ si orice $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Acest lucru poate fi demonstrat prin inductie dupa n . Cazul $n = 1$ este trivial, in timp ce $n = 2$ rezulta din definitia unei multimi convexe. Presupunand faptul ca rezultatul este adevarat pentru toate combinatiile convexe cu cel mult $n \geq 2$ puncte, sa trecem la cazul combinatiilor cu $n + 1$

puncte, $x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k$. Cazul non-trivial este atunci cand toti coeficientii λ_k se afla in $(0, 1)$. Dar in acest caz, datorita ipotezei de inductie, x poate fi reprezentat ca o combinatie convexa de doua elemente ale lui I ,

$$x = (1 - \lambda_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1},$$

prin urmare x apartine lui I . Remarca de mai sus asupra intervalelor are o echivalenta remarcabila pentru functiile convexe :

1.1.11 Lema

Cazul discret al inegalitatii lui Jensen O functie cu valori reale f definite pe un interval I este convexa daca si numai daca pentru orice puncte x_1, \dots, x_n din I si orice scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ din $[0, 1]$ cu $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ avem,

$$f \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Daca f este strict convexa, inegalitatea de mai sus este stricta daca punctele x_k nu sunt toate egale intre ele, si scalarii λ_k sunt toti pozitivi.

Demonstrație 5. Prima afirmatie rezulta prin inductie matematica. In ceea ce priveste cea de a doua afirmatie, presupunem ca functia f este strict convexa si

$$f \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k). \quad (1.3)$$

pentru punctele $x_1, \dots, x_n \in I$ si cativa scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0, 1)$ cu suma egala cu 1. Daca x_1, \dots, x_n nu sunt toti egali, multimea $S = \{k : x_k < \max \{x_1, \dots, x_n\}\}$ va fi o submultime proprie a multimii $\{1, \dots, n\}$ si $\lambda_S = \sum_{k \in S} \lambda_k \in (0, 1)$. Cum f este strict convexa avem,

$$f \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) = f \left(\lambda_S \left(\sum_{k \in S} \frac{\lambda_k}{\lambda_S} x_k \right) + (1 - \lambda_S) \left(\sum_{k \notin S} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_S} x_k \right) \right) <$$

$$\lambda_S f \left(\sum_{k \in S} \frac{\lambda_k}{\lambda_S} x_k \right) + (1 - \lambda_S) f \left(\sum_{k \notin S} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_S} x_k \right) <$$

$$\lambda_S \sum_{k \in S} \frac{\lambda_k}{\lambda_S} f(x_k) + (1 - \lambda_S) \sum_{k \notin S} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_S} f(x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k),$$

care contrazice ipoteza noastra 1.3. Astfel, toate punctele x_k ar trebui sa coincidă.

O consecinta imediata a lemei 1.1.11 (cand este aplicata functiei exponentiale) este urmatorul rezultat care extinde bine cunoscuta inegalitate AM-GM(adica inegalitatea dintre media aritmetica si cea geometrica).

1.1.12 Teorema

Forma ponderata a inegalitatii AM-GM Daca $x_1, \dots, x_n \in (0, \infty)$ si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0, 1)$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, atunci

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k > x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$$

In afara de cazul cand $x_1 = \cdots = x_n$. Inlocuind x_k cu $\frac{1}{x_k}$ in ultima inegalitate, obtinem

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} > \frac{1}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \frac{\lambda_k}{x_k}$$

in afara de cazul cand $x_1 = \cdots = x_n$. Asta reprezinta forma ponderata a inegalitatii mediei geometrice – mediei armonice (adica de inegalitatea GM-HM).

Pentru $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ recuperam inegalitatea obisnuita care afirma ca pentru orice x_1, \dots, x_n de numere positive, nu toate egale, avem

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} > \frac{n}{\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)}.$$

1.2 Inegalitatea lui Young si consecintele sale

Urmatoarul caz special al formei ponderate a inegalitatii AM-GM este cunoscuta sub numele de inegalitatea lui Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

pentru orice $a, b \geq 0$, si de fiecare data cand $p, q \in (0, 1)$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; egalitatea are loc daca si numai daca $a^p = b^q$. Inegalitatea lui Young poate fi de asemenea obtinuta ca o consecinta a convexitatii stricte a functiilor exponentiale. De fapt

$$ab = e^{\log_a b} = e^{\left(\frac{1}{p}\right)\log_a p + \left(\frac{1}{q}\right)\log_a q} \leq \frac{1}{p} e^{\log_a p} + \frac{1}{q} e^{\log_a q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

pentru toti $a, b > 0$ cu $a^p \neq b^q$. Inca un argument este oferit de studiul variatiei functiei diferentiale.

$$F(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab, a \geq 0$$

unde $b \geq 0$ este un paramentru. Aceasta functie atinge punctul minim globa strict la $a = b^{\frac{q}{p}}$, care ne conduce la $F(a) > F\left(b^{\frac{q}{p}}\right) = 0$ pentru orice $a \geq 0, a \neq b^{\frac{q}{p}}$. W.H.Young a dovedid de fapt o inegalitate mult mai generala, pentru $f(x) = x^{p-1}$.

1.2.1 Teorema

Inegalitatea lui Young Presupunem prin absurd ca $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ este o functie continua strict crescatoare astfel incat $f(0) = 0$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Atunci

$$uv \leq \int_0^u f(x) dx + \int_0^v f^{-1}(y) dy$$

pentru orice $u, v \geq 0$, si egalitatea are loc daca si numai daca $v = f(u)$.

Fig 1.2

Demonstrație 6. Folosind definitia derivatei se poate demonstra cu usurinta ca functia

$$F(u) = \int_0^u f(x) dx + \int_0^{f(u)} f^{-1}(y) dy - uf(u), u \in [0, \infty)$$

este diferentiaa, cu F' identic 0. Astfel, $F(u) = F(0) = 0$, pentru orice $u \geq 0$. Daca $u, v \geq 0$ si $v \geq f(u)$, atunci

$$\begin{aligned} uv &= uf(u) + u(v - f(u)) = \int_0^u f(x) dx + \int_0^{f(u)} f^{-1}(y) dy + u(v - f(u)) = \\ &= \int_0^u f(x) dx + \int_0^v f^{-1}(y) dy + \left[u(v - f(u)) - \int_{f(u)}^v f^{-1}(y) dy \right] \leq \\ &\leq \int_0^u f(x) dx + \int_0^v f^{-1}(y) dy. \end{aligned}$$

Cealalt caz, unde $v \leq f(u)$ poate fi tratat in acelasi mod.

1.2.2 Teorema

Inegalitatea lui Rogers-Hölder pentru $p \geq 1$

Fie $p, q \in (1, \infty)$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si $f \in L^p(\mu)$ si $g \in L^q(\mu)$. Atunci fg apartine lui $L^1(\mu)$ si avem

$$\left| \int_{\Omega} fg d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |fg| d\mu \quad (1.6)$$

si

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}^q \quad (1.7)$$

Ca o consecinta

$$\left| \int_{\Omega} fg d\mu \right| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}^q \quad (1.8)$$

Rezultatul de mai sus se extinde intr-o maniera directa la perechi $p = 1, q = \infty$ si $p = \infty$. In domeniul complementar, $p \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$ si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, semnul inegalitatii in (1.6) – (1.8) ar trebui inversat. Din Inegalitatea Rogers – Hölder rezulta ca pentru orice $p, q, r \in (1, \infty)$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si orice $f \in L^p(\mu)$ si $g \in L^q(\mu)$ avem $fg \in L^r(\mu)$ si

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \quad (1.9)$$

Cazul de inegalitate de mai sus (1.8), unde $p = q = 2$, este cunoscut ca inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

Demonstrație 7. Prima inegalitate este triviala. Daca f sau g sunt 0μ – aproape peste tot, atunci cea de a doua inegalitate este triviala. Altfel, folosind inegalitatea lui Young, avem

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q}.$$

pentru orice x din Ω , astfel incat $fg \in L^1(\mu)$. Prin urmare

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}} \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq 1.$$

1.2.3 Remarca

Conditii pentru egalitatea din Teorma 1.2.2 Observatia de baza este faptul ca $f \geq 0$ si $\int_{\Omega} f d\mu = 0$ implica $f = 0\mu$ – aproape peste tot. Prin urmare avem egalitate in (1.6) daca si numai daca

$$f(x)g(x) = e^{i\theta} |f(x)g(x)|$$

pentru o constanta reala θ si pentru μ – aproape peste toti x . Presupunem ca $p, q \in (1, \infty)$ si f si g nu sunt zero μ – aproape peste tot. Pentru a avea egalitate in (1.7) este necesar si suficient sa avem

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q}.$$

μ -aproape peste tot. Cazul egalitatii in Inegalitatea lui Young demonstreaza ca aceasta este echivalenta cu $A |f(x)|^p = B |g(x)|^q$ μ -aproape peste tot, pentru unele numere pozitive A si B . Daca $p = 1$ si $q = \infty$, avem egalitate in ecuatia (1.7) daca si numai daca avem o constanta $\lambda \geq 0$ astfel incat $|g(x)| \leq \lambda$, μ aproape peste tot, si $|g(x)| = \lambda$, μ aproape peste tot in multimea $\{x : f(x) \neq 0\}$.

1.2.4 Teorema

Inegalitatea Minkowski Pentru $1 \leq p < \infty$ si $f, g \in L^p(\mu)$ avem

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \quad (1.10)$$

Demonstrație 8. Pentru $p = 1$, inegalitatea (1.10) rezulta imediat prin integrarea inegalitatii $|f + g| \leq |f| + |g|$. Pentru $p \in (1, \infty)$ avem:

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \sup\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

care ne demonstreaza ca $f + g \in L^p(\mu)$. Mai mult de atat, conform Teoremei 1.2.2,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &= \int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f| d\mu + \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |g| d\mu \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \|f + g\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si observam ca $p - \frac{p}{q} = 1$.

1.2.5 Remarca

Daca $p = 1$, obtinem egalitate in (1.10) daca si numai daca exista o functie masurabila pozitiva φ astfel incat

$$f(x) \varphi(x) = g(x)$$

μ -aproape peste tot in multimea $\{x : f(x) g(x) \neq 0\}$. Daca $p \in (1, \infty)$ si f nu este o aproape peste tot, atunci avem egalitate in (1.10) daca si numai daca $g = \lambda f$ aproape peste tot, pentru unele $\lambda \geq 0$. In cazul particular unde (Ω, Σ, μ) este spatiul de masura asociat cu masura de numarare pe o multime finite, $\mu : \rho(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \mathbb{N}$, $\mu(A) = |A|$, recuperam

formele clasice discrete ale inegalitatilor de mai sus. De exemplu, poate fi citita versiunea discreta a inegalitatii lui Rogers- Holder

$$\left| \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

pentru orice $\xi_k, \eta_k \in \{1, \dots, n\}$. Pe de alta parte, un moment de reflectie demonstreaza faptul ca putem trece imediat de la aceste inegalitati discrete la analogiile lor integrale, corespunzatoare spatiilor de masura finite.

1.2.6 Remarca

Mai multe despre inegalitatea Cauchy – Bunyakovsky – Schwarz A.L. Cauchy , in faimosul sau curs de Analiza, a derivat cazul discret al acestei inegalitati din inegalitatea algebrica a lui Lagrange ,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 + \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2$$

Astfel

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

pentru orice numere reale $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Cazul egalitatii este simplu. Inegalitatea corespunzatoare pentru integrale a fost demonstrata independent de V.Y.Bunyakovsky si H.A.Schwarz. In 1890, H.Poincare a observat versiunea integrala a identitatii algebrice lui Lagrange (care da inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz in deplina generalitate): Daca μ este o masura de probabilitate pe un spatiu Ω si f si g sunt doua functii apartinand spatiului $L^2(\mu)$, atunci

$$\left(\int_{\Omega} f^2 d\mu \right) \left(\int_{\Omega} g^2 d\mu \right) - \left(\int_{\Omega} f g d\mu \right)^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (f(x) g(y) - f(y) g(x))^2 d\mu(x) d\mu(y).$$

El a folosit aceasta identitate integral pentru a deriva cazul unidimensional al unei inegalitati purtandu-i numele . O alta dovada simpla a inegalitatii Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz este oferita printr-o identitate echivalenta cu legea cosinusurilor : pentru fiecare pereche de vectori nenuli x si y intr-un spatiu vectorial interior real,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Capitolul 2

Exercitii

Multe dintre funcțiile familiare ale trigonometriei și geometriei au proprietăți de convexitate ușor de stabilit și, de cele mai multe ori, aceasta convexitatea are consecințe utile. Problema 1 (Pe maximul produsului a două muchii) Într-un triunghi echilateral cu aria A , produsul dintre oricare două laturi este egal cu $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)A$. Arătați că acesta reprezintă cazul extrem ceea ce înseamnă că, pentru un triunghi cu aria A trebuie să existe două laturi lungimile dintre care au un produs care este cel puțin la fel de mare ca $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)A$. Pentru a începe, avem nevoie de formule care să relaționeze lungimile marginilor cu zonele, și, în notația tradițională din figura 2.1, există trei formule egale în mod egal:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Fig. 2.1 Toate funcțiile trigonometrice sunt convexe (sau concave) dacă Argumentele lor sunt limitate la un domeniu adecvat și, în consecință, există multe consecințe geometrice interesante ale inegalității lui Jensen.

Aria A a triunghiului generic are trei reprezentări de baza : $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. Acum, dacă facem media acestor reprezentări, atunci găsim ca :

$$\frac{1}{3}(ab + ac + bc) = (2A) \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \right\}, \quad (2.1.1)$$

și aceasta este o formulă care aproape că ne imploră să întrebăm despre convexitatea $\frac{1}{\sin x}$. Reprezentarea grafică pentru $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$, pentru $x \in (0, \infty)$ cu siguranță este convexă, iar suspiciunile noastre pot fi confirmate prin calcularea derivatei a doua, $\left(\frac{1}{\sin x}\right)'' = \frac{1}{\sin x} + \frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x} > 0$ pentru orice $x \in (0, \pi)$. (2.1.2) Prin urmare, din moment ce avem $\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{3} = \frac{\pi}{3}$, rezulta din inegalitatea lui Jensen ca

$$\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \right\} \geq \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

deci , prin inegalitatea (2.1.1), obținem limita presupusa. m

$$ax(ab, ac, bc) \geq \frac{1}{3}(ab + ac + bc) \geq \frac{4}{\sqrt{3}}A \quad (2.1.3)$$

Conexiuni si rafinamente Această problemă de provocare este strâns legată de o inegalitate binecunoscută a lui Weitzenböck care afirmă că în orice triunghi avem

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}}A. \quad (2.1.4)$$

De fapt, pentru a trece de la limita (2.1.3) la inegalitatea lui Weitzenböck trebuie doar să ne amintim ca

$$ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2,$$

care este un lucru familiar pe care il putem obtine in trei moduri - Inegalitatea lui Cauchy, limita AM-GM sau inegalitatea de rearanjare - toti vor face acest lucru cu aceeasi grație. Inegalitatea lui Weitzenböck se dovedește a avea multe dovezi instructive - Engel (1998) dă unsprezece!

Există câteva metode matematice pe care le-am putea numi generic amelioratori; în linii mari, acestea sunt metode care pot fi utilizate într- un mod semi-automat pentru a generaliza o identitate, de a rafina o inegalitate sau în caz contrar, sa îmbunătățeasca un rezultat dat. Următoarea problemă de provocare oferă un exemplu de alt fel. Aceasta sugerează cum s-ar putea gândi la ascuțirea aproape a oricărui rezultat care se obține prin inegalitatea lui Jensen. Problema 2 Formula defectului lui Hölder Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este derivata de doua ori si daca vem limitele

$$0 \leq m \leq f''(x) \leq M, \text{ pentru orice } x \in [a, b], \quad (2.2.1)$$

atunci pentru orice valori reale $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$ si orice numere reale pozitive $p_k, k = 1, 2, \dots, n$ cu $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, atunci axista o vaoare reala $\mu \in [m, M]$ pentru care, una are formula

$$\sum_{k=1}^n p_k f(x_k) - f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) = \frac{1}{4} \mu \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_j p_k (x_j - x_k)^2. \quad (2.2.2)$$

Acest rezultat provine din aceeași lucrare faimoasă din 1885 a lui Otto Ludwig Hölder (1859 1937) în care se găsește dovada sa a inegalității care are a ajuns să fie cunoscută universal ca "inegalitatea lui Holder". Formula defectului (2.2.2) este mult mai puțin cunoscută, dar este totuși valoroasă. Aceasta oferă o măsură perfect naturală a diferenței dintre cele două părți ale inegalității lui Jensen și ne spune cum să învingem versiunea inegalității lui Jensen ori de câte ori putem verifica ipoteza suplimentară (2.2.1). În mod similar, dacă M este mic, să spunem $0 \leq M \leq \epsilon$, atunci limita (2.2.1) ne spune că f se comportă mai degrabă ca o funcție afină $f(x) = \alpha + \beta x$. Pentru o funcție exact afină, partea stângă a limitei (2.2.1)

este identic egal cu zero, dar în general limita (2.2.1) afirmă a relație mai subtilă. Mai precis, ne spune că partea stângă este un mic multiplu al unei măsuri de amplitudine în care valorile $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ sunt difuzate pe tot intervalul $[a, b]$.

Această problemă ne duce în mod firesc la următoarea întrebare: Cum putem folosi faptul că $0 \leq m \leq f''(x) \leq M$? Odată ce ne-am adresat întrebarea aceasta, s-ar putea să nu fie nevoie de mult pentru a observa că cele două funcții aferente

$$g(x) = \frac{1}{2}Mx^2 - f(x) \text{ și } h(x) = f(x) - \frac{1}{2}mx^2$$

sunt din nou convexe. În schimb aceasta observatie ne îndeamnă să ne întrebăm ce spune inegalitatea lui Jensen despre aceste funcții. Pentru $g(x)$, inegalitatea lui Jensen ne da limita

$$\frac{1}{2}M\bar{x}^2 - f(\bar{x}) \leq \sum_{k=1}^n p_k \left\{ \frac{1}{2}Mx_k^2 - f(x_k) \right\}$$

unde avem multimea $\bar{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$ și aceasta limita este ușor rearanjată pentru a duce la

$$\left\{ \sum_{k=1}^n p_k f(x_k) \right\} - f(\bar{x}) \leq \frac{1}{2}M \left\{ \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k^2 \right) - \bar{x}^2 \right\} = \frac{1}{2}M \sum_{k=1}^n p_k (x_k - \bar{x})^2.$$

Calculul analog pentru $h(x)$ ne oferă o limită inferioară

$$\left\{ \sum_{k=1}^n p_k f(x_k) \right\} - f(\bar{x}) \geq \frac{1}{2}m \sum_{k=1}^n p_k (x_k - \bar{x})^2$$

și aceste limite superioare și inferioare aproape completează demonstrația aserției (2.2.1). Singurul lucru care lipsește este identitatea

$$\sum_{k=1}^n p_k (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_j p_k (x_j - x_k)^2$$

care se poate verifica ușor prin expansiunea algebrică și definirea lui \bar{x} . Convexitatea și inegalitatea lui Jensen oferă soluții simple pentru multe probleme. Următoarea problemă vine din celebra secțiune cu probleme a "American Mathematical Monthly" și oferă un exemplu clasic al acestui fenomen. La început problema pare destul de ușoară, dar, curând, întâmpinăm dificultăți.

Problema 3(6)

Referințe bibliografice
