



Ministerul Educației
Universitatea "OVIDIUS" Constanța
Facultatea de Matematică și Informatică
Specializarea Informatică

Licență

Coordonator științific:
Cosma Luminița

Student:
Tănase Ramona Elena

Constanța
2021

Cuprins

Cuprins	1
1 Funcții convexe pe intervale	2
1.1 Funcții convexe la prima vedere	2
1.1.1 Definiție	2
1.1.2 Teorema	3
1.1.3 Propoziție	4
1.1.4 Lema	4
1.1.5 Corolar	4
1.1.6 Teorema	4
1.1.7 Remarca	4
1.1.8 Teorema	4
1.1.9 Corolar	4
1.1.10 Propoziție	4
1.1.11 Lema	4
1.1.12 Teorema	5
1.2 Inegalitatea lui Young și consecințele sale	5
1.2.1 Teorema	5
1.2.2 Teorema	5

Referințe bibliografice

6

Capitolul 1

Funcții convexe pe intervale

Studiul funcțiilor convexe ale unei variabile reale oferă o imagine excelentă a frumuseții și fascinației matematicii avansate. Cititorul va găsi aici o mare varietate de rezultate bazate pe argumente simple și intuitive care au aplicații remarcabile. În același timp, ele oferă punctul de plecare al generalizării profunde în stabilirea mai multor variabile, care vor fi discutate în capitolele următoare.

1.1 Funcții convexe la prima vedere

De-a lungul acestei cărți, litera I va indica un interval nedegenerat (care este, un interval care conține o infinitate de puncte).

1.1.1 Definiție

O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește convexă dacă,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (1.1)$$

pentru toate punctele x și y din I , și toate $\lambda \in [0, 1]$. Aceasta se numește strict convexă dacă inegalitatea 1.1 este valabilă ori de câte ori x și y sunt puncte distincte și $\lambda \in (0, 1)$. Dacă $-f$ este convexă (respectiv strict convexă), atunci spunem că f este concavă (respectiv strict concavă). Dacă f este și convexă și concavă, atunci spunem că f este funcție afină.

Funcțiile afine sunt tocmai funcțiile de forma $mx + n$, pentru constante potrivite m și n . Una poate demonstra ușor faptul că următoarele trei funcții sunt convexe (deși nu sunt strict convexe): partea pozitivă $x^+ = \max\{x, 0\}$, partea negativă $x^- = \max\{-x, 0\}$, și valoarea absolută $|x| = \max\{-x, x\}$. Împreună cu funcțiile afine ele oferă elemente de bază ale întregii clase de funcții convexe pe intervale.

Lema 191 și 192 Calculele simple arată că funcția pătratică x^2 este strict convexă pe \mathbb{R} și că funcția rădăcină pătrată \sqrt{x} este strict concavă pe \mathbb{R}_+ . În multe cazuri de înțeles, convexitatea este stabilită prin intermediul celei de a doua derivate.

Corolar 148 Alte criterii de convexitate legate de teoria de bază a funcțiilor convexe vor fi prezentate în cele ce urmează. Convexitatea unei funcții $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, înseamnă geometric că, punctele de pe graficului lui $f|_{[u,v]}$ sunt sub (sau pe) coarda care unește capetele $(u, f(u))$ și $(v, f(v))$, pentru tot $u, v \in I, u < v$; Vezi Fig 1.1. Astfel inegalitatea 1.1 este echivalentă cu

$$f(x) \leq f(u) + \frac{f(v) - f(u)}{v - u} (x - u) \quad (1.2)$$

pentru tot $x \in [u, v]$, și $u, v \in I, u < v$.

Această remarcă arată faptul că funcțiile convexe sunt majorate de funcțiile afine pe orice subinterval compact.

Fiecare funcție convexă f este marginată pe fiecare subinterval compact $[u, v]$ a intervalului pe care este definită. De fapt, $f(x) \leq M = \max\{f(u), f(v)\}$ pe $[u, v]$ și scriind un punct arbitrar $x \in [u, v]$ ca $x = \frac{u+v}{2} + t$ pentru unii t cu $|t| \leq \frac{v-u}{2}$, deduce cu ușurință că

$$f(x) = f\left(\frac{u+v}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - f\left(\frac{u+v}{2} - t\right) \geq 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - M$$

1.1.2 Teorema

O funcție convexă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în orice punct interior al lui I .

Demonstrație 1. Presupunem că $a \in I$ și alegem $\varepsilon > 0$ astfel încât $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$. Atunci

$$f(a) \leq \frac{1}{2}f(a - \varepsilon) + \frac{1}{2}f(a + \varepsilon)$$

și

$$f(a \pm t\varepsilon) = f((1-t)a + t(a \pm \varepsilon)) \leq (1-t)f(a) + tf(a \pm \varepsilon)$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Prin urmare

$$t(f(a \pm \varepsilon) - f(a)) \geq f(a \pm t\varepsilon) - f(a) \geq -t(f(a \mp \varepsilon) - f(a))$$

care ne conduce la

$$|f(a \pm t\varepsilon) - f(a)| \leq t \max\{|f(a - \varepsilon) - f(a)|, |f(a + \varepsilon) - f(a)|\},$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Continuitatea funcției f este acum clară. Exemple simple precum, $f(x) = 0$ dacă $x \in (0, 1)$, și dacă $f(0) = f(1) = 1$, arată faptul că salturi în sus pot apărea la punctele finale ale intervalului de definiție a unei funcții convexe. Din fericire, aceste posibile discontinuități sunt detașabile.

1.1.3 Propozitie

Daca $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o functie convexe, atunci limitele $f(a+) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ si $f(b-) = \lim_{x \rightarrow b, x < b} f(x)$ exista in \mathbb{R} si

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a+) & \text{dacă } x = a \\ f(x) & \text{dacă } x \in (a, b) \\ f(b-) & \text{dacă } x = b \end{cases}$$

este o functie convexe continua.

Rezultatul este o consecinta a urmatoarelor:

1.1.4 Lema

Demonstrație 2. *TODO*

1.1.5 Corolar

1.1.6 Teorema

Demonstrație 3. *TODO*

1.1.7 Remarca

1.1.8 Teorema

Demonstrație 4. *TODO*

1.1.9 Corolar

1.1.10 Propozitie

1.1.11 Lema

Demonstrație 5. *TODO*

1.1.12 Teorema

1.2 Inegalitatea lui Young si consecintele sale

1.2.1 Teorema

Demonstrație 6. *TODO*

1.2.2 Teorema

Demonstrație 7. *TODO*

Referințe bibliografice
