Ministerul Educaţiei
Universitatea ”OVIDIUS” Constanţa
Facultatea de Matematică şi Informatică
Specializarea Informatică

Licenţă

Coordonator ştiinţific:
Cosma Luminiţa

Student:
Tănase Ramona Elena

Constanţa
2021

Cuprins

Cuprins **i**

1 Funcţii convexe pe intervale **2**

1.1 Functii convexe la prima vedere 2

1.1.1 Definitie 2

1.1.2 Teorema 3

1.1.3 Propozitie 4

1.1.4 Lema 4

1.1.5 Corolar 4

1.1.6 Teorema 4

1.1.7 Remarca 4

1.1.8 Teorema 4

1.1.9 Corolar 4

1.1.10 Propozitie 4

1.1.11 Lema 4

1.1.12 Teorema 5

1.2 Inegalitatea lui Young si consecintele sale 5

1.2.1 Teorema 5

1.2.2 Teorema 5

2 Şiruri convergente de numere reale **6**

2.1 Teorie 6

2.2 Exerciţii 9

3 Şiruri mărginite **11**

3.1 Teorie 11

3.2 Exerciţii 12

4 Şiruri recurente şi asimtote oblice **16**

4.1 Teorie 16

4.2 Exerciţii 19

Referinţe bibliografice **22**

Capitolul 1

Funcţii convexe pe intervale

Studiul funcțiilor convexe ale unei variabile reale oferă o imagine excelentă a frumuseții și fascinației matematicii avansate. Cititorul va găsi aici o mare varietate de rezultate bazate pe argumente simple și intuitive care au aplicații remarcabile. În același timp, ele oferă punctul de plecare al generalizări profunde în stabilirea mai multor variabile, care vor fi discutate în capitolele următoare.

1.1 Functii convexe la prima vedere

De-a lungul acestei cărți, litera I va indica un interval nedegenerat (care este, un interval care conține o infinitate de puncte).

1.1.1 Definitie

O functie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeste convexa daca,

$$f\left(\left(1-\lambda\right)x+\lambda y\right) \le \left(1-\lambda\right)f_{(x)}+\lambda f_{(y)} \tag{1.1}$$

pentru toate punctele x si y din I, si toate $\lambda \in [0,1]$. Aceasta se numeste strict convexa daca inegalitate 1.1 este valabila ori de cate ori x si y sunt puncte distrincte si $\lambda \in (0,1)$. Daca $-f$ este convexa (respective stric convexa), atunci spunem ca f este concava (respectiv strict concava). Daca f este si convexa si concava, atunci spunem ca f este functie afina.

Functiile afine sunt tocmai functiile de forma $mx+n$, pentru constante potrivite m si n. Una poate demonstra usor faptul ca urmatoarele trei functii sunt convexe (desi nu sunt strict convexe): partea pozitiva $x^{+} = max\left\{x,0\right\}$, partea negative $x^{-} = max\left\{-x,0\right\}$, si valoarea absoluta $|x| = max\left\{-x,x\right\}$. Impreuna cu functiile afine ele ofera elemente de baza ale intregii clase de functii convexe pe intervale.

Lema 191 si 192 Calculele simple arata ca functia patratica x^2 este strict convexa pe $\mathbb{R}$ si ca functia radacina patrata $\sqrt{x}$ este strict concava pe $\mathbb{R}_+$. In multe cazuri de inetres convexitatea este stabilita prin intermediul celei de a doua derivate.

Corolar 148 Alte criterii de convexitate legate de teoria de baza a functiilor convexe vor fi prezentate in cele ce urmeaza. Convexitatea unei functii $f : I \to \mathbb{R}$, inseamna geometric ca, punctele de pe graficului lui $f_{[u,v]}$ sunt sub (sau pe) coarda care uneste capetele $\left(u, f_{(u)}\right)$ si $\left(v, f_{(v)}\right)$, pentru toti $u, v \in I, u < v$; Vezi Fig 1.1 . Astfel inegalitatea 1.1 este echivalenta cu

$$f(x) \leq f(u) + \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) \tag{1.2}$$

pentru toti $x \in [u, v]$, si $u, v \in I, u < v$.

Aceasta remarca arata faptul ca functiile convexe sunt majorate de functiile afine pe orice subinterval compact.

Fiecare functie convexa f este marginita pe fiecare subinterval compact $[u, v]$ a intervalului pe care este definite. De fapt , $f(x) \leq M = max\{f(u), f(v)\}$ pe $[u, v]$ si scriind un punct arbitrar $x \in [u, v]$ ca $x = \frac{(u+v)}{2} + t$ pentru unii t cu $|t| \leq \frac{(v-u)}{2}$, deduce cu usurinta ca

$$f(x) = f\left(\frac{u+v}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - f\left(\frac{u+v}{2} - t\right) \geq 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - M$$

1.1.2 Teorema

O functie convexa $f : I \to \mathbb{R}$ este continua in orice punct interior al lui I.

Demonstraţie 1. *Presupunem ca $a \in intI$ si alegem $\varepsilon > 0$ astfel incat $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$. Atunci*

$$f(a) \leq \frac{1}{2}f(a - \varepsilon) + \frac{1}{2}f(a + \varepsilon)$$

si

$$f(a \pm t\varepsilon) = f((1 - t)a + t(a \pm \varepsilon)) \leq (1 - t)f(a) + tf(a \pm \varepsilon)$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Prin urmare

$$t(f(a \pm \varepsilon) - f(a)) \geq f(a \pm t\varepsilon) - f(a) \geq -t(f(a \mp \varepsilon) - f(a))$$

care ne conduce la

$$|f(a \pm t\varepsilon) - f(a)| \leq tmax\{|f(a - \varepsilon) - f(a)|, |f(a + \varepsilon) - f(a)|\},$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Continuitatea functiei f este acum clara. Exemple simple precum, $f(x) = 0$ daca $x \in (0, 1)$, si daca $f(0) = f(1) = 1$, arate faptul ca salturi in sus pot aparea la punctele finale ale intervalului de definire a unei functii convexe. Din fericire, aceste posibile discontinuitati sunt detasabile.

1.1.3 Propozitie

Daca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o functie convexa, atunci limitele $f(a+) = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$ si $f(b-) = \lim_{x\to b, x<b} f(x)$ exista in $\mathbb{R}$ si

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a+) & daca x = a \\ f(x) & daca x \in (a,b) \\ f(b-) & daca x = b \end{cases}$$

este o functie convexa continua.

Rezultatul este o consecinta a urmatoarelor:

1.1.4 Lema

Demonstraţie 2. *TODO*

1.1.5 Corolar

1.1.6 Teorema

Demonstraţie 3. *TODO*

1.1.7 Remarca

1.1.8 Teorema

Demonstraţie 4. *TODO*

1.1.9 Corolar

1.1.10 Propozitie

1.1.11 Lema

Demonstraţie 5. *TODO*

1.1.12 Teorema

1.2 Inegalitatea lui Young si consecintele sale

1.2.1 Teorema

Demonstraţie 6. *TODO*

1.2.2 Teorema

Demonstraţie 7. *TODO*

Capitolul 2

Şiruri convergente de numere reale

2.1 Teorie

Definiţie 1. *Un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*, se numeşte convergent dacă există* $x \in \mathbb{R}$ *astfel încât:* $\forall_\varepsilon > 0, \in n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât este satisfacută inegalitatea:* $|x_n - x| \leq \varepsilon$*.*

Propoziţie 1. *Unicitatea limitei unui şir de numere reale Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*. Dacă* $\begin{cases} x_n \to x \\ x_n \to y \end{cases}$ *atunci* $x = y$*.*

Demonstraţie 8. *Să presupunem, prin absurd, că* $x \neq y$*. Cum suntem pe* $\mathbb{R}$ *înseamnă că avem una din situaţiile* $x < y$ *sau* $y < x$*. Pentru a face o alegere, fie* $x < y$ *atunci* $y–x > 0$ *şi din definiţie pentru* $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$ *rezultă că,*

- ▷ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_1$
- ▷ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_2$

Fie $n = max(n_1, n_2) \geq n_1, n_2$. Atunci $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}$ şi $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}$ de unde

$$y - x = |y - x| = |(y - x_n) + (x_n - x)| \leq |y - x_n| + |x_n - x| < \frac{y-x}{2} + \frac{y-x}{2} = y - x$$

Aşadar, $y - x < y - x$, contradicţie!

Un rezultat foarte frecvent folosit este ceea ce se numeşte ”teorema cleştelui”.

Teorema cleştelui

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trei şiruri de numere reale. Dacă:

$$\begin{cases} x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n \to x, z_n \to x \end{cases}$$

Atunci $y_n \to x$.

Demonstraţie 9. *Vom arăta pentru început următoarea inegalitate. Dacă* $a \leq x \leq b$ *atunci* $|x| \leq max(|a|, |b|)$*. Vom folosi proprietăţile de la modul. Avem:*

$$|x| = \begin{cases} x, dacax \geq 0 \\ -x, dacax < 0 \end{cases} \leq \begin{cases} b \leq max(b, -b) = |b| \leq max(|a|, |b|)dacax \geq 0 \\ -a \leq max(a, -a) = |a| \leq max(|a|, |b|)dacax < 0 \end{cases} \leq max(|a|, |b|)$$

Din $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}$ rezultă că $x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x, \forall n \in \mathbb{N}$. De aici folosind inegalitatea demonstrată deducem că:

$$|y_n - x| \leq max(|x_n - x|, |z_n - x|), \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Deoarece $x_n \to x, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon{}' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon{}'$ este satisfacută inegalitatea

$$|x_n - x| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Similar din $z_n \to x, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon{}'' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon{}''$ este satisfacută inegalitatea

$$|z_n - x| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Notăm $n_\varepsilon = max(n_\varepsilon{}', n_\varepsilon{}'')$. Fie acum $n \geq n_\varepsilon$. Deoarece $n_{\varepsilon \geq} n_\varepsilon{}'$ iar $n \geq n_\varepsilon$ rezultă că $n \geq n_\varepsilon{}'$ şi din 1.2 rezultă că

$$|x_n - x| < \varepsilon \tag{1.4}$$

Deoarece $n_\varepsilon \geq n_\varepsilon''$ iar $n \geq n_\varepsilon$ şi din 1.3 rezultă că

$$|z_n - x| < \varepsilon \tag{1.5}$$

Din 1.4 şi 1.5 rezultă că

$$max(|x_n - x|, |z_n - x|) = \begin{Bmatrix} |x_n - xdaca| \\ |z_n - xdaca| \end{Bmatrix} < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Folosind inegalitatea 1.6 din inegalitatea 1.1 deducem că $|y_n - x| < \varepsilon$.

Aşadar am demonstrat : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon \in \mathbb{N}}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $|y_n - x| < \varepsilon$.

Conform definiţiei această inegalitate înseamnă că $y_n \to y$.

Exemplu 1. *Fie* $c \in \mathbb{R}$*, Considerăm şirul* $x_n = c$*. Atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ *sau* $\lim_{n\to\infty} c = c$*, limita unei constante este acea constantă.*

Demonstraţie 10. *$\forall n \in \mathbb{N}$ avem $x_n - c = c - c = 0, |x_n - c| = 0$. De aici deducem că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = 1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon = 1$ este satisfacută inegalitatea $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$. Conform definiţiei $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.*

Propoziţie 2. *Dacă un şir de numere naturale este convergent atunci el este staţionar. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere naturale. Dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, atunci există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = x_k, \forall n \geq k$.*

Astfel spus scris desfăşurat şirul arată astfel:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_{k-1}, x_k, x_k, x_k........$$

Demonstraţie 11. *Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \exists n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_{\frac{1}{2}}$ este satisfacută inegalitatea $|x_n - x| < \frac{1}{2}$.*

Să notăm $k = n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ şi să reţinem că ştim că $\forall n \geq k$ este satisfacută inegalitatea

$$|x_n - x| < \frac{1}{2}. \tag{2.1}$$

Fie $n \geq k$. Relaţia 2.1 fiind adevărată pentru orice număr $\geq k$ ea va fi adevărată în particular pentru k adică avem

$$|x_k - x| < \frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Dar la noi $n \geq k$ deci din 2.1 avem şi

$$|x_n - x| < \frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

Avem

$$|x_n - x_k| = |(x_n - x) + (x - x_k)| \leq |x_n - x| + |x - x_k| =$$
$$= |x_n - x| + |-(x - x_k)| = |x_n - x| + |x_k - x|\,. \tag{2.4}$$

Am folosit inegalitatea tringhiului şi $|-a| = |a|$. Folosind 2.2 şi 2.3 din 2.4 deducem că

$$|x_n - x_k| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \tag{2.5}$$

Dar x_n, x_k sunt numere naturale, şi deci diferenţa lor este un număr întreg adică $x_n - x_k \in \mathbb{Z}$. Cum $|x_n - x_k| \geq 0$ iar din 2.5 $|x_n - x_k| < 1$ rezultă că $|x_n - x_k| \in [0, 1]$ deci $|x_n - x_k| \in \mathbb{Z} \cap [0, 1) = \{...., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \cap [0, 1) = \{0\}$ de unde $|x_n - x_k| = 0$ adică $x_n - x_k = 0, x_n = x_k$.

Aşasar am demonstrat: $\forall n \geq kavemx_n = x_k$, ceea ce încheie demonstraţia.

2.2 Exerciţii

1. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^4+3}}+........+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$$

Rezolvare 1. *Notăm* $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^4+3}}+........+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$. *Adică* $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^4+k}$.

în continuare procedăm astfel. De numărător nu ne atingem. Vom lucra cu numitorul, ideea fiind de a se avea acelaşi numitor peste tot.

Avem

$$1 \le k \le n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n^4+1 \le n^4+k \le n^4+n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{n^4+1} \le \sqrt{n^4+k} \le \sqrt{n^4+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}.$$

Acum înmulţind cu k obţinem

$$\frac{k}{\sqrt{n^4+1}} \ge \frac{k}{\sqrt{n^4+k}} \ge \frac{k}{\sqrt{n^4+n}} \tag{3.1}$$

în continuare în relaţia 3.1 dam lui k valorile $1, 2, ..., n$.

Pentru $k = 1$ rezultă:

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$$

Pentru $k = 2$ rezultă:

$$\frac{2}{\sqrt{n^4+1}} \ge \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} \ge \frac{2}{\sqrt{n^4+n}}$$

Adunând inegalităţile de mai sus obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+1}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+n}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

Sau

$$\frac{1+2+....+n}{\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{1+2+.....+n}{\sqrt{n^4+n}}$$

Dar ştim că $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, deci vom obţine

$$\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}} \tag{3.2}$$

Acum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}}=\frac{1}{2}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}}=\frac{1}{2} \tag{3.3}$$

Vom da la ambele factor comun forţat.

Din 3.2 şi 3.3 şi teorema cleştelui rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$$

Capitolul 3

Şiruri mărginite

3.1 Teorie

Definiţie 2. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale. şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se numeşte mărginit dacă şi numai dacă* $\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *astfel încât* $\forall n \in \mathbb{N}$ *este satisfacută inegalitatea* $x_n \in [a, b]$, *sau echivalent* $\exists M > 0$ *astefle încât* $\forall n \in \mathbb{N}$ *este satisfacută inegalitatea* $|x_n| \leq M$.

Definiţie 3. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale. Spunem că* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *dacă,* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru* $\forall n \geq n_\varepsilon$ *este satisfacută inegalitatea* $x_n > \varepsilon$. *Sau* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.

Propoziţie 3. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale. Dacă* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *atunci* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Demonstraţie 12. *Fie* $\varepsilon > 0$. *Deoarece* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *din definiţie aplicată pentru* $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ *rezultă că* $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru* $\forall n \geq n_\varepsilon$ *este satisfacută inegalitatea* $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Din această inegalitate rezultă că $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $x_n > 0$, prin urmare are sens fracţia $\frac{1}{x_n}, \forall n \geq n_\varepsilon$. Dar inegalitatea de mai sus este echivalentă cu $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea$\frac{1}{x_n} < \varepsilon$. Conform definiţiei aceasta înseamnă că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Lema Stolz-Cesaro (Cazul $\frac{1}{\infty}$)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ şi $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ astfel încât $\alpha_n \uparrow \infty$. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - a_{n-1}} \in \mathbb{R}$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} \in \mathbb{R}$$

şi în plus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - \alpha_{n-1}}.$$

Demonstraţie 13. *Fie* $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - \alpha_{n-1}}$.

Atunci $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astefl încât $\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} - \alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_\varepsilon$

Sau,

$$\alpha_n \uparrow, |x_n - x_{n-1} - \alpha(\alpha_n - \alpha_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n - \alpha_{n-1}), \forall n \geq n_\varepsilon \tag{4.1}$$

Notăm cu $k = n_\varepsilon + 1$. Pentru $n \geq k$ luând în 4.1 , $n = k+1, k+2, ..., n$ obţinem: $|x_{k+1} - x_k - \alpha(a_{k+1} - a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$.

$|x_{k+2} - x_{k+1} - \alpha(a_{k+2} - a_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1})$ .... $|x_n - x_{n-1} - \alpha(a_n - a_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n - \alpha_{n-1})$

De unde obţinem, prin adunare:

$$|x_n - x_k - \alpha(\alpha_n - \alpha_k)| =$$
$$|x_n - x_{n-1} - \alpha(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + ... + x_{k+2} - x_{k+1} - \alpha(\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}) + x_{k+1} - x_k - \alpha(\alpha_{k+1} - \alpha_k)|$$
$$\leq |x_n - x_{n-1} - \alpha(\alpha_n - \alpha_{n-1})| + ... + |x_{k+2} - x_{k+1} - \alpha(\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1})| + |x_{k+1} - x_k - \alpha(\alpha_{k+1} - \alpha_k)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_{k+1} - \alpha_k) + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}) + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n - \alpha_k)$$

$\leq \frac{\varepsilon}{2}\alpha_n$ deoarece $\alpha_k > 0$.

3.2 Exerciţii

1. Calculaţi

   Fie $\alpha > 0$ să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

Demonstraţie 14. *Fie* $x_n = 1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha, a_n = n^\alpha$. *Deoarece* $\alpha > 0, \alpha \uparrow \infty$. *Din lema Stolz-Cesaro, cazul*

$$\left[\frac{1}{\infty}\right], \lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha_{n+1} - _n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha}$$

Dăm factor comun forţat la numărător pe $n^{\alpha+1}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha+1\left[\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} - 1\right]}}{(n+1)^\alpha}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \cdot n \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \cdot \lim_{n\to\infty} n \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{\alpha+1} - 1}{n} = \alpha + 1$$

Am folosit limita fundamentală

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^\gamma - 1}{x} = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$$

întorcându-ne la problemă, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}$$

2. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + ... + e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}}$$

Rezolvare 2. *Fie* $x_n = e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + ... + e^{\sqrt{n}}, a_n = \sqrt{n} e^{\sqrt{n}}$. *Avem de calculat* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{a_n} = \left[\frac{1}{\infty}\right]$

Din lema Stolz-Cesaro

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$$

Vom calcula acum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}}$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)e^{\sqrt{n+1}}+\sqrt{n}\left(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}\right)}{e^{\sqrt{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}\right)}{e^{\sqrt{n+1}}}$$

Prima limită, înmulţind şi împărţind cu conjugata ei ne da da 0, adică:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$$

Pentru cea de a doua limită procedăm astfel:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}\right)}{e^{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\frac{e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}-1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\cdot\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}-1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$=-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Am înmulţit şi am împărţit cu conjugata ei, iar la ultima factor comun forţat.

Din acestea deducem că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}=2$$

Deci ultima limită din enunţ $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\alpha_n}=2$

Propoziţie 4. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale strict pozitive. Dacă* $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\in\mathbb{R}$ *atunci* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\in\mathbb{R}$*. în plus* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Pe scurt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Definiţie 4. *Din definiţia logaritmilor naturali avem*

$$\ln x=\alpha \Leftrightarrow x=e^{\alpha}$$

De aici deducem că $x=e^{\alpha}=e^{\ln x}$ adică

$$x=e^{\ln x},\forall x>0$$

De aici dacă $x=u^v$ obţinem $u^v=e^{\ln(u^v)}=u^{v\ln u}$. Să reţinem această egalitate

$$u^v=u^{v\ln u}$$

Ea se foloseşte tot timpul când baza şi puterea sunt variabile. La noi $\sqrt[n]{x_n}=x_n^{\frac{1}{n}}$ de unde folosind egalitatea de mai sus rezultă că

$$\sqrt[n]{x_n}=x_n^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\cdot\ln x_n}=e^{\frac{\ln x_n}{n}}$$

Fie $A=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+1}{x_n}$. Atunci $\ln$ fiind funcţie continuă

$$\ln A=\ln\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{x_n+1}{x_n}.$$

Vom arăta că în ipotezele noastre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Din lema Stolz-Cesato cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$, ipotezele sunt satisfacute, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\ln x_n}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}(\ln x_{n+1}-\ln x_n)=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}=\ln A$$

De aici deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln x_n}{n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}}=e^{\ln A}=A=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{n}.$$

Capitolul 4

Şiruri recurente şi asimtote oblice

4.1 Teorie

Teoremă 1. *Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $f : (\alpha, \infty) n \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $f_{(x)} > x, \forall x > a$. Definim şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ prin condiţia iniţială $x_1 > \alpha$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1} = f_{(x_n)}$ pentru orice $n \geq 1$*

Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \infty$$

Dacă există $b_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = x + b_0$ este asimtotă oblică la graficul funcţiei f, atunci

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x_n}{n} = b_0$$

Dacă există $b_0, b_1 \in \mathbb{R}, b_0 \neq 0$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x\left(f\left(x\right) - x - b_0\right) = b_1, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - b_0\right) = \frac{b_1}{b_0}$$

Demonstraţie 15. *Din condiţia iniţială avem $x_1 > \alpha$. Presupunem $x_n > \alpha$. Din ipoteza $f_{(x)} > x, \forall x > \alpha$ rezultă că $f_{(x_n)} > x_n$, adică $x_{n+1} > x_n$. Cum Presupunem $x_n > \alpha$ rezultă că $x_{n+1} > \alpha$. Conform inducţiei matematice rezultă că $x_n > \alpha, \forall n \geq 1$.*

Fie $n \geq 1$. Din ipoteza $f_{(x)} > x, \forall x > \alpha$ şi $x_n > \alpha$ rezultă că $f_{(x_n)} > x_n$ sau $x_{n+1} > x_n$. Aşadar şirul este strict crescător. Dacă prin absurd ar fi majorat, atunci din teorema lui Weierstrass este convergent şi fie $\lim_{n\to\infty} x_n = L \in \mathbb{R}$. Cum şirul este crescătpr avem $x_n \geq x_1, \forall n \geq 1$ de unde, trecând la limită rezultă ca $L \geq 1$. Cum $x_1 \geq \alpha$ rezultă că $L \geq \alpha$, iar din ipoteza $f_{(x)} \geq x, \forall x \geq \alpha$ rezultă, in particular, $f_{(L)} > L$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, iar f este contnuă, rezultă că $\lim_{n\to\infty} f_{(x_n)} = f_{(L)}$ sau $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = f_{(L)}$, adică $\lim_{n\to\infty} x_n = f_{(L)}$. Cum $\lim_{n\to\infty} x_n = f_{(L)}$, din unicitatea limitei unui şir de numere reale rezultă că $f_{(L)} = L$, ceea ce este fals. Aşsadar şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este majorat şi fiind crescător, după cum am demonstrat, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Deoarece $y = x + b_0$ este asimtotă oblică la graficul funcţiei f, conform definiţiei $\lim_{x\to\infty}\left(f_{(x)} - x\right) = b_0$. Cum, din 1. , $\lim_{x\to\infty} x_n = \infty$, din caracterizarea limitei unei funcţii într-un punct cu şiruri rezultă că $\lim_{x\to\infty}\left(f_{(x_n)} - x_n\right) = b_0$ sau ţinând cont de relaţia de recurenţă $\lim_{x\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = b_0$. Din lema Stolz-Cesaro, cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$, rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = b_0$.

Pentru orice $n \geq 1$ notăm $y_n = x_n - b_n n$ Avem

$$y_{n+1} - y_n = x_1 - x_n - b_0 = f_{(x_n)} - x_n - b_0, \forall n \geq 1.$$

Cum $\lim_{x\to\infty} x\left(f_{(x)} - x - b_0\right) = b_1$ iar din 1. $\lim_{x\to\infty} x_n = \infty$, din caracterizarea limitei unei funcţii într-un punct cu şiruri rezultă că $\lim_{x\to\infty} x_n(y_{n+1} - y_n) = b_1$.

Din egalitatea $f_{(x)} - x - b_0 = x\left(f_{(x)} - x - b_0\right)\cdot\frac{1}{x}, \forall x > \alpha, x \neq 0$ trecând la limită obţinem

$$f_{(x)} - x - b_0 = \lim_{x\to\infty} x\left(f_{(x)} - x - b_0\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = b_1\cdot 0 = 0.$$

Adică $y = x + b_0$ este asimtotă oblică la graficul funcţiei f . Din 2. Rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = b_0$, de unde ţinând cont că $b_0 \neq 0$ rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n} = \frac{1}{b_0}$.

Din egalitatea

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\frac{1}{n}} = x_n(y_{n+1} - y_n)\cdot\frac{n}{x_n}, \geq 1$$

Trecând la lmită obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1} - y_n}{\frac{1}{n}} = \frac{b_1}{b_0}$$

.

Iarăşi din lema Stolz-Cesaro obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}} = \frac{b_1}{b_0}.$$

Cum $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}}{\ln n} = 1$, rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\ln n} = \frac{b_1}{b_0}$, sau $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - b_0 n}{\ln n} = \frac{b_1}{b_0}$.

O primă aplicaţie a tepremei o constituie:

Teoremă 2. *Fie $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\varphi_{(x)} > 0, \forall x > 0$. Definim şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ prin condiţia iniţială $x_1 > 0$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n + \varphi\left(\frac{1}{x_n}\right)$ pentru $\forall n \geq 1$.*

Atunci : $\lim_{x\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim_{x\to\infty}\frac{x_n}{n} = \varphi(0)$ iar dacă în plus , $\varphi(0) > 0$ şi φ este derivabilă în 0,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - \varphi(0)\right) = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}.$$

Demonstraţie 16. *Fie* $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f_{(x)} = x + \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. *Evident f este continuă şi deoarece* $\varphi(x) > 0$ *rezultă că* $f_{(x)} > x, \forall x > 0$.

Deoarece φ este continuă în 0, $\lim_{x\to\infty}\left(f_{(x)} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0, t>0}\varphi(t) = \varphi(0)$. Aşadar $y = x + \varphi(0)$ este asimtotă oblică la graficul funcţiei f. Din prima teoremă 1 şi 2 rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \varphi(0)$. Deoarece φ este derivabilă în 0, $\lim_{x\to\infty} x\left(f_{(x)} - x - \varphi(0)\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\varphi\left(\frac{1}{x}\right) - \varphi(0)\right) = \lim_{t\to 0, t>0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$. Cum $\varphi(0) > 0$, din prima teoremă , 3. , rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - \varphi(0)\right) = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}$$

A doua aplicaţie a teoremei o constituie

Teoremă 3. *Fie* $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă, derivabilă în 0 cu proprietatea că* $\varphi(x) > 1, \forall x > 0, \varphi(0) = 1$. *Definim şirul de numere reale* $(x_n)_{n\geq 1}$, *prin condiţia iniţială* $x_1 > 0$ *şi relaţia de recurenţă* $x_{n+1} = x_n\varphi\left(\frac{1}{x_n}\right)$ *pentru orice* $n \geq 1$.

Atunci: $\lim_{x\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \varphi'(0)$ iar dacă în plus $\varphi'(0) > 0$ şi φ este de două ori derivabilă în 0, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - \varphi'(0)\right) = \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)}$.

Demonstraţie 17. *Fie* $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f_{(x)} = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. *Evident f este continuă şi deoarece* $\varphi(x) > 1, \forall x > 0$ *rezultă că* $f_{(x)} > x, \forall x > 0$. *Deoarece* φ *este continuă în 0 şi* $\varphi(0) = 1$ *rezultă că* $\lim_{x\to\infty}\frac{f_{(x)}}{x} = \lim_{x\to\infty}\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0, t>0}\varphi(t) = \varphi(0) = 1$. *Deoarece* φ *este derivabilă în 0,*

$$\lim_{x\to\infty}\left(f_{(x)} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\varphi\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)\lim_{t\to 0, t>0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} =$$
$$\varphi'(0)$$

Aşadar $y = x + \varphi'(0)$.

este asimtotă oblică la graficul funcţiei f. Din teorema 1, 1 si 2, rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \varphi'(0)$. Deoarece φ este de două ori derivabilă în 0,

$$\lim_{x\to\infty} x\left(f_{(x)} - x - \varphi'(0)\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(x\varphi\left(\frac{1}{x}\right) - x - \varphi'(0)\right) =$$

$$\lim_{t\to 0, t>0}\frac{\varphi(t) - \varphi(0) - \varphi'(0)\,t}{t^2} = \frac{\varphi''(0)}{2}$$

Din teorema 1, 3, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - \varphi'(0)\right) = \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)}.$$

Corolar 1. *Fie* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Definim şirul de numere reale* $(x_n)_{n\geq 1}$ *prin condişia iniţială* $x_1 > 0$ *şi relaţia de recurenţă* $x_{n+1} = x_n + e^{\frac{\alpha}{x_n}}$ *pentru orice* $n \geq 1$.

Atunci $\lim_{x\to\infty} x_n = \infty, \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - 1\right) = \alpha$.

Demonstraţie 18. *Fie* $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty), \varphi(x) = e^{\alpha x}$. *Să observăm că* $\varphi'(x) = \alpha e^{\alpha x}$. *Aplicăm de două ori funcţia* φ.

Corolar 2. *Fie* $\alpha > 1, \beta > 0$. *Definim şirul de numere reale* $(x_n)_{n\geq 1}$ *prin condiţia* $x_1 > 0$ *şi relaţia de recurenţă*

$$x_{n+1} = x_n + \ln\left(\alpha + \frac{\beta}{x_n}\right), pentru \forall n \geq 1.$$

Atunci

$$\lim_{x\to\infty} = \infty, \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \ln\alpha, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - \ln\alpha\right) = \frac{\beta}{\alpha\ln\alpha}.$$

Demonstraţie 19. *Fie* $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty), \varphi(x) = \ln(\alpha + \beta x)$. *Să observăm că* $\varphi'(x) = \frac{\beta}{\alpha+\beta x}$. *Aplicăm teorema 2 pentru funcţia* φ.

Corolar 3. *Fie* $\alpha > 1, \beta > 0$. *Definim şirul de numere reale* $(x_n)_{n\geq 1}$ *prin condiţia iniţială* $x_1 > 0$ *şi relaţia de recurenţă*

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{x_n}}, pentru \forall n \geq 1.$$

Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \infty, \lim_{x\to\infty} \frac{x_n}{n} = \sqrt{\alpha}, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - \sqrt{\alpha}\right) = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

Demonstraţie 20. *Fie* $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty), \varphi(x) = \sqrt{\alpha + \beta x}$. *Să observăm că* $\varphi'(x) = \frac{\beta}{2}(\alpha + \beta x)^{-\frac{1}{2}}$. *Aplicăm teorema 2 pentru funcţia* φ.

4.2 Exerciţii

Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k} - 1\right)}{n\ln n} = \frac{1}{2}$$

Demonstraţie 21. *Să notăm* $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\ln(n+k), n \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim x_n. \tag{5.1}$$

Fie $n \geq 2$. Avem $\ln(n+1) \leq \ln(n+k) \leq \ln(n+n), \forall 1 \leq k \leq n$, de unde

$$\sum_{k=1}^{n} k\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} k\ln(n+k) \leq \sum_{k=1}^{n} k\ln(n+n), \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2} \leq \frac{x_n}{n\ln n} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n}$$

$\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$, sau încă,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n+1}{2n} \leq \frac{x_n}{n\ln n} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n} \cdot \frac{n+1}{2n} \tag{5.2}$$

Din 5.2 şi teorema cleştelui rezultă că $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n\ln n} = \frac{1}{2}$. Astfel spus $x_{n\sim}\frac{n\ln n}{2}(3)$ Din 5.1 şi **??** rezultă că $\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim \frac{n\ln n}{2}$, adică egalitatea din enunţ.

Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right)}}{\frac{\ln^2 n}{n}} = 1$$

Demonstraţie 22. *Să notăm* $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k)}{k}, n \geq 1$. *ştim că*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim x_n. \tag{6.1}$$

Fie $n \geq 2$. Avem $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+1)}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k)}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+n)}{k}$, de unde

$\frac{\ln(n+1)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq x_n \leq \frac{\ln(n+n)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, sau încă,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n} \leq \frac{x_n}{\frac{\ln^2 n}{n}} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}. \tag{6.2}$$

Cum din lema Stolz- Cesaro, cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right], \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n} = 1$, din 6.2 şi teorema cleştelui deducem că $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\frac{\ln^2 n}{n}} = 1$. Altfel spus

$$x_n \sim \frac{\ln^2 n}{n}. \tag{6.3}$$

Din 6.1 şi 6.3 deducem că $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim \frac{\ln^2 n}{n}$, adică egalitatea din enunţ.

Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right)}{\frac{(\ln n)[\ln(\ln n)]}{n}} = 1$$

Demonstraţie 23. *Notăm* $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(n+k)}{k\ln k}, \geq 2$. *ştim că*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim x_n. \tag{7.1}$$

Fie $n \geq 2$. Avem $\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(n+1)}{k\ln k} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(n+k)}{k\ln k} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(n+1)}{k\ln k}$, de unde,

$\frac{\ln(n+1)}{n}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}\right) \leq x_n \leq \frac{\ln(n+n)}{n}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}\right)$, sau încă,

$$frac\ln(n+1)n \cdot \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)} \leq \frac{x_n}{\frac{(\ln n)[\ln(\ln n)]}{n}} \leq \frac{\ln(n+n)}{n} \cdot \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)}. \tag{7.2}$$

Din lema Stolz-Cesaro , cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$, $lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)} = 1$, din 7.2 şi teorema cleşteluui deducem că $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\frac{(\ln n)[\ln(\ln n)]}{n}} = 1$. Altfel spus

$$x_n \sim \frac{(\ln n)\left[\ln(\ln n)\right]}{n}. \tag{7.3}$$

Din 7.1 şi 7.3 deducem că $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim \frac{(\ln n)[\ln(\ln n)]}{n}$, adică egalitatea din enunţ. [1]

Referinţe bibliografice

[1] Popa Dumitru. Curs matematică didactică. *Analiză - Capitole speciale de analiză matematică pentru pregătirea profesorilor*, 2020-2021.