Ministerul Educaţiei
Universitatea ”OVIDIUS” Constanţa
Facultatea de Matematică şi Informatică
Specializarea Informatică

Lucrare de Licenţă
Ecuaţii integrale de tip Volterra şi Fredholm

Lucrare de Licenţă

Coordonator ştiinţific:
Cosma Luminiţa

Absolvent:
Tănase Ramona Elena

Constanţa
2022

Cuprins

Abstract

În această lucrare voi prezenta ecuaţiile integrale Volterra şi Fredholm. În matematică , ecuaţiile integrale Volterra sunt un tip special de ecuaţii integrale .Ele sunt împărţite în două grupuri, denumite primul şi al doilea fel.În teoria operatorilor şi în teoria Fredholm , operatorii corespunzători sunt numiţi operatori Volterra .

În matematică , teoria Fredholm este o teorie a ecuaţiilor integrale . În sensul cel mai restrâns, teoria Fredholm se preocupă de soluţia ecuaţiei integrale Fredholm . Într-un sens mai larg, structura abstractă a teoriei lui Fredholm este dată în termenii teoriei spectrale a operatorilor Fredholm şi a nucleelor Fredholm pe spaţiul Hilbert .

The aim of this paper is to present the integral equations Volterra and Fredholm.In mathematics, Volterra integral equations are a special type of integral equation. They are divided into two groups, called the first and second kind. In operator theory and Fredholm theory, the corresponding operators are called Volterra operators.

In mathematics, Fredholm theory is a theory of integral equations. In the narrowest sense, Fredholm's theory deals with the solution of the Fredholm integral equation. In a broader sense, the abstract structure of Fredholm's theory is given in terms of the spectral theory of Fredholm operators and Fredholm nuclei on the Hilbert space.

Introducere

Teoria ecuaţiilor integrale reprezintă un capitol important în matematica aplicată. Primele lucrări, având ca tematică ecuaţiile integrale, au apărut în secolul 19 ¸şi la începutul secolului 20, având ca autori matematicieni renumiţi ca Niels Abel, Augustin Cauchy , Edouard Goursat , Maxime Bocher, David Hilbert , Vito Volterra ,Ivar Fredholm , Emile Picard , Traian Lalescu.

Lucrarea este structurată în 3 capitole.

Primul capitol este unul introductiv în care sunt prezentate noţiunile şi teoremele de bază ce vor fi aplicate sau generalizate pe parcursul celorlalte capitole şi anume: Principiul contracţiei al lui Banach, Operatorii liniari şi compacţi precum şi Cazul operatorilor compacţi, Principalele rezultate şi aproximările identităţii Friedrichs.

Cel de al doilea capitol, cuprinde ecuaţiile integrale de tip Volterra şi Fredholm. În ecuaţiile Volterra, limita superioară de integrare este variabila x, în timp ce în ecuaţiile Fredholm, limita superioară de integrare este o constantă fixă . Aşa-numitele ecuaţii de primul fel implică doar funcţia necunoscută φ în interiorul integralei.

Printre cele mai importante aspecte abordate, putem aminti: Teorema de existenţă şi unicitate pentru care am prezentat trei demonstraţii diferite, Alternativa lui Fredholm, Nucleul rezolvent şi Cazul nucleelor hermitiene.

Cel de al treilea capitol prezintă aplicaţii ale ecuaţiilor Volterra şi Fredholm. Am calculat nucleele rezolvente ale ecuaţiilor Volterra şi am gasit soluţiile corespunzătoare, am arătat că alternativa lui Fredholm pentru ecuaţia corespunzătoare poate fi exprimată ca o alternativă echivalentă pentru sistemul algebric.

Capitolul 1

Preliminarii

Teorema de existenţă a lui Peano

Teoremă 1. *Fie* a , $b \in (0, \infty), t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^k$ *(pe* $\mathbb{R}^k$ *vom considera norma* $\|v\| = max_{1 \leq i \leq k} |v_i|$ *.) Fie D mulţimea*

$$D = \left\{(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k ; |t - t_{_0}| \leq a, \|v - x_0\| \leq b\right\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

şi fie $f : D \to \mathbb{R}^{k+1}$ *o funcţie continuă. Atunci, există o funcţie derivabilă, cu derivata continuă* $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^k$ *care verifică ecuaţia diferenţială*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \tag{1.1}$$

şi condiţia iniţială

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

unde $\delta = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ *cu* $M = sup\left\{\|f(t, v)\| ; (t, v) \in D\right\}$ *. M se presupune a fi un număr pozitiv, deoarece cazul* $M = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ *este trivial.*

1.1 Principiul contracţiior al lui Banach

Dacă au loc ipotezele teoremei de existenţa a lui Peano (teorema 1) plus condiţia ca f sa fie Lipschitz in raport cu x, atunci problema Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0 \tag{1.3}$$

are o soluţie unică $x \in C^1\left(I; \mathbb{R}^k\right)$, unde $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, cu δ aşa cum este definită în teorema 1. Acest rezultat poate fi obţinut şi prin aplicarea Principiului contracţiilor al lui Banach. Înainte de a enunţa acest principiu, să arătăm cum anume problema 1.3 poate fi redusă la o problemă de punct fix.

Problema 1.3 este echivalentă cu ecuaţia integrală

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{1.4}$$

Notăm $X = \left\{ v \in C\left(I, \mathbb{R}^k\right); \|v(t) - x_0\| \leq b, \in I \right\}.$

Această mulţime este un spaţiu metric real din moment ce este o submulţime închisă a spaţiului Banach $C\left(I, \mathbb{R}^k\right)$ înzestrat cu norma sup, notat $\|\cdot\|_C$, care induce metrica $d(u,v) = \|u - v\|_C$.

Definim pe X operatorul T prin

$$(T_v)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds, \forall v \in X.$$

Preferăm notaţia T_v în loc de $T(v)$.

Se vede cu uşusinţă faptul că în ipotezele de mai sus $T_v \in X$ pentru orice $v \in X$ adică $T : X \to X$. Ecuaţia 1.4 poate fi scrisă simplu ca

$$x = Tx, \tag{1.5}$$

deci problema Cauchy de mai sus se reduce la rezolvarea ecuaţiei 1.5 în X. Cu alte cuvinte, problema Cauchy 1.3 are o soluţie unică x definită pe I dacă şi numai dacă T are un punct unic fix x.

Teoremă 2. *(Principiul contracţiilor al lui Banach) Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Presupunem că $T : X \to X$ este o contracţie, adică, $\exists \alpha \in (0,1)$ astfel încât*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

pentru orice $x, y \in X$. Atunci T are un punct fix unic (adică, $\exists! x^* \in X$ astfel încât $Tx^* = x^*$).

Demonstraţie: Vom folosi metoda aproximărilor succesive.

Definim $x_n = Tx_{n-1}$ pentru $n \in \mathbb{N}$ cu $x_0 \in X$ arbitrar. Vom avea, prin inducţie

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) = \alpha^n d(Tx_0, x_0), \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Acum, vom demonstra faptul că (x_n) este şir Cauchy în (X, d) :

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$$

care din 1.6 este

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha^n \left(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{p-1}\right) d(Tx_0, x_0) \\
&= \alpha^n \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} d(Tx_0, x_0) \\
&\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} (Tx_0, x_0).
\end{aligned}$$

Deci şirul este Cauchy în (X, d) pentru că $\alpha^n \to 0$. Cum (X, d) este complet, sirul (x_n) converge la un $x^* \in X \Leftrightarrow d(x_n, x^*) \to 0$.

Dar,

$$\begin{aligned} d\left(x^*, Tx^*\right) &\leq d\left(Tx^*, x_n\right) + d\left(x_n, x^*\right) \\ &= d\left(Tx^*, x_{n-1}\right) + d\left(x_n, x^*\right) \\ &\leq \alpha d\left(x^*, x_{n-1}\right) + d\left(x_n, x^*\right), \end{aligned}$$

care converge la 0 pentru $n \to \infty$, deci $d\left(x^*, Tx^*\right) \leq 0$ şi astfel x^* este un punct fix al lui T.

În continuare vrem să arătăm că x^* este unic. Presupunem că y^* este de asemenea un punct fix al lui T, atunci $d\left(x^*, y^*\right) = d\left(Tx^*, Ty^*\right) \leq \alpha d\left(x^*, y^*\right)$ deci $(1-\alpha)\, d\left(x^*, y^*\right) \leq 0$ ceea ce implică $x^* = y^*$. □

Observaţie 1. *Presupunerea $\alpha < 1$ în teorema 2 este esenţială aşa cum ne arată următorul contra-exemplu.*

Dacă $X = \mathbb{R}$ şi $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dat de

$$Tx = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x,$$

atunci T nu are un punct fix deoarece $\frac{\pi}{2} - \arctan x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Pe de altă parte, din teorema lui Lagrange, avem, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$,

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &\leq |x - y - \arctan x + \arctan y| \\ &= \left| x - y - \frac{x-y}{1+z^2} \right|, \\ &\text{pentru un } z \text{ între } x \text{ şi } y \\ &= |x-y| \cdot \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) \\ &< |x-y|, \end{aligned}$$

deci, chiar dacă inegalitatea este strictă, $\alpha = 1$ şi prin urmare T nu este o contracţie. Astfel, faptul că acest T nu are un punct fix este un contraexemplu.

Observaţie 2. *Din demonstraţia de mai sus observăm faptul că*

$$d\left(x_n, x^*\right) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d\left(Tx_0, x_0\right)$$

care ne oferă o aproximare a lui x^*.

Observaţie 3. *Presupunem că $T^k = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{k}, k \geq 2$, este o contracţie, atunci există un punct unic pentru T.*

Demonstraţie: Un punct fix al lui T este în mod evident un punct fix al lui T^k. Invers, dacă x^* este un punct fix al lui T^k atunci $Tx^* = T^{k+1}x^* = T^k\left(Tx^*\right)$, deci ambele x^*şi Tx^* sunt puncte fixe ale lui T^k, ca urmare $Tx^* = x^*$. □

1.2 Operatori liniari şi compacţi

Dacă X, Y sunt spaţii normate şi $A : X \to Y$ este un operator liniar, atunci A se numeşte complet continuu sau compact dacă A duce mulţimi mărginite din X în submulţimi relativ compacte în Y.

Un operator complet continuu este evident continuu. Vom nota

$$K(X,Y) = \{A \in L(X,Y); A \text{ compact }\}.$$

Evident $K(X,Y)$ este un subspaţiu liniar al lui $L(X,Y)$. Mai mult, avem

Teoremă 3. *Dacă X este un spaţiu normat şi Y este un spaţiu Banach, atunci $K(X,Y)$ este un subspaţiu liniar închis al lui $L(X,Y)$, adică $K(X,Y)$ este spaţiu Banach în raport cu norma operatorială.*

Demonstraţie: Vom nota similar, cu $\|\cdot\|$ cele trei norme ale spaţiilor X, Y şi $L(X,Y)$. Fie (A_n) un şir în $L(X,Y)$, care converge la $A \in L(X,Y)$, adică, $\|A_n - A\| \to 0$.

Astfel, pentru $\varepsilon > 0$ există $m \in \mathbb{N}$ suficient de mare astfel încât

$$\|A_m - A\| < \frac{\varepsilon}{3r}. \tag{1.7}$$

Fie (x_n) un şir din $B(0,r) \subset X$, unde $r > 0$ este arbitrat fixat. Deoarece A_m este compact, există un subşir al lui (x_n), notat $(x_{n_k})_{k\geq 1}$, astfel încât $(Ax_{n_k})_{k\geq 1}$ este convergent, deci Cauchy. Astfel, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left\|A_m x_{n_k} - A_m x_{n_j}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall k, j > N \tag{1.8}$$

Folosind 1.7 şi 1.8 deducem că

$$\begin{aligned}
\left\|Ax_{n_k} - Ax_{n_j}\right\| &\leq \|Ax_{n_k} - A_m x_{n_k}\| + \left\|A_m x_{n_k} - A_m x_{n_j}\right\| + \left\|A_m x_{n_k} - Ax_{n_j}\right\| \\
&\leq \|A - A_m\| \cdot \left\|A_m x_{n_k} - A_m x_{n_j}\right\| + \|A_m - A\| \cdot \left\|x_{n_j}\right\| \\
&< r \cdot \frac{\varepsilon}{3r} + \frac{\varepsilon}{3} + r \cdot \frac{\varepsilon}{3r} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

cu alte cuvinte, (Ax_{n_k}) este şir Cauchy, prin urmare converge, deci $A \in K(X,Y)$. □

1.3 Teorema lui Fredholm

Let $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ un spatiu Hilbert. Notăm cu $K(H) := K(H,H)$ spaţiul operatorilor liniari şi compacţi din H în H. Acesta este un subspaţiu închis al lui $L(H) := L(H,H)$, în raport cu norma operatorială (din torema 3), prin urmare $K(H)$ este un spaţiu Banach în raport cu această normă.

Teoremă 4. *Dacă* $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ *este un spaţiu Hilbert şi* $A \in K(H)$, *atunci spaţiul nul al lui* $I{-}A$, *notat* $\mathcal{N} = N(I - A)$, *este un subspaţiu finit dimensional al lui* H, *unde* I *operatorul identitate al lui* H.

Demonstraţie: Evident, $\mathcal{N}$ este un subspaţiu liniar închis al lui $(H, \|\cdot\|)$. Fie Q o submulţime mărginită a lui $\mathcal{N}$. Cum A este compact şi $Q = AQ$ deducem faptul că Q este relativ compact în $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$. Ca urmare, cum orice mulţime închisă şi mărginită din $\mathcal{N}$ este compactă, deducem că $\mathcal{N}$ este un subspaţiu finit dimensional al lui H. □

Teoremă 5. *(Schauder) Dacă* $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ *este un spaţiu Hilbert şi* $A \in K(H)$ *atunci* $A^* \in K(H)$.

(Am notat cu $A^* : H \to H$ operatorul adjunct al lui A.)

Demonstraţie: Fie $r > 0$ arbitrar fixat. Deoarece $A^* \in L(H)$, mulţimea$A^*B(0, r)$ este mărginită:

$$\|x\| < r \Rightarrow \|A^*x\| \le r\,\|A^*\|\,.$$

Cum A este compact, rezultă că pentru orice şir $(x_n)_{n\ge1}$, din $B(0, r)$, şirul $((A \circ A^*)\,x_n)_{n\ge1}$ are un subşir convergent, $((A \circ A^*)\,x_k)_{k\ge1}$. Avem de asemenea

$$\begin{aligned}\left\|A^*x_{n_k} - A^*x_{n_j}\right\|^2 &= \left(A^*\left(x_{n_k} - x_{n_j}\right), A^*\left(x_{n_k} - x_{n_j}\right)\right)\\ &= \left(x_{n_k} - x_{n_j}\right), A\left(A^*\left(x_{n_k} - x_{n_j}\right)\right)\\ &\le 2r\,\|(A \circ A^*)\,x_{n_k} - (A \circ A^*)\|\,,\end{aligned}$$

deci $(A^*x_{n_k})_{k\ge1}$ este convergent. □

Observaţie 4. *Fie* $A \in L(H)$. *Atunci* A *este compact dacă şi numai dacă* A^* *este compact. Acest lucru rezultă din Teorema lui Schauder de mai sus şi* $(A^*)^* = A$.

Observaţie 5. *Dacă* $A, B \in L(H)$ *şi cel puţin unul este compact, atunci* $A \circ B$ *este compact de asemenea.*

Continuăm cu un rezultat important, datorat lui Fredholm, care ne oferă o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o ecuaţie operatorială ce e dată de un operator liniar şi compact să admită soluţie.

Teoremă 6. *(Fredholm) Fie* $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ *un spaţiu Hilbert şi fie* $A \in K(H)$. *Ecuaţia* $x - A^*x = f$ *are soluţie dacă şi numai dacă* $f \in \mathcal{N}^{\perp}$ *unde* $\mathcal{N} = N(I - A)$.

Corolar 1. *Dacă* $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ *este un spaţiu Hilbert şi* $A \in K(H)$, *atunci ecuaţia* $x - Ax = f$ *are soluţie dacă şi numai dacă* $f \in (N(I - A^*))^{\perp}$.

Este consecinţă imediată a teoremei lui Fredholm aplicată pentru A^*.

Lemă 1. *Fie* $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ *un spaţiu Hilbert şi fie* $A \in K(H)$. *Atunci există o constantă* $C > 0$ *astfel încât*

$$C\,\|x\| \le \|(I - A)\,x\|\,, \forall x \in \mathcal{N}^{\perp} \tag{1.9}$$

unde $\mathcal{N} = N(I - A)$.

Demonstraţie: Presupunem, prin absurd că 1.9 nu este adevărată, adică pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in \mathcal{N}^{\perp}$ astfel încât $\|x_n\| = 1$ şi

$$\|(I - A)\, x_n\| < \frac{1}{n}.$$

Prin urmare,

$$x_n - Ax_n \to 0. \tag{1.10}$$

Cum A este compact există un subşir al lui $(x_n)_{n\geq 1}$ notat $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ astfel încât $\big(A(x_{n_k})\big)_{k\geq 1}$ este convergent. Din 1.10 deducem că $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ este de asemenea convergent şi limita lui $x \in \mathcal{N}^{\perp}$. Folosind din nou 1.10, observăm faptul că $x – Ax = 0$, adică $x \in \mathcal{N}$. Din moment ce $\mathcal{N} \cap \mathcal{N}^{\perp} = \{0\}$ avem $x = 0$, ceea ce contrazice $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$. □

Demonstraţie: Teorema lui Fredholm

Necesitatea: Presupunem că ecuaţia $x - A^{*}x = f$ are o soluţie $x \in H$. Atunci, pentru orice $y \in \mathcal{N}$, vom avea

$$\begin{aligned}(f, y) &= (x, y) - (A^{*}x, y)\\ &= (x, y) - (x, Ay)\\ &= \Bigg(x, \underbrace{(I - A)\, y}_{=0}\Bigg)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Prin urmare, $f \in \mathcal{N}^{\perp}$.

Suficienţa: Presupunem $f \in \mathcal{N}^{\perp}$. Cum $\mathcal{N}^{\perp}$ este un subspaţiu închis al lui $(H, (\cdot,\cdot)\,, \|\cdot\|)\,, \mathcal{N}^{\perp}$ este un spaţiu Hilbert cu acelaşi produs scalar şi normă. Conform lemei 1, $\|\cdot\|$ este echivalentă cu norma definită de produsul scalar

$$\langle x, y\rangle = (Tx, Ty)\,, \forall x, y \in \mathcal{N}^{\perp},$$

unde $T = I - A$. Din moment ce funcţionala $x \mapsto (x, f)$ este liniară şi continuă pe $\mathcal{N}^{\perp}$, rezultă din Teorema de Reprezentare a lui Riesz faptul că există $x_f \in \mathcal{N}^{\perp}$ astfel încât

$$(x, f) = \underbrace{\langle x, x_f\rangle}_{=\left(Tx, Tx_f\right)}\,, \forall x \in \mathcal{N}^{\perp} \tag{1.11}$$

De fapt, 1.11 are loc pentru orice $x \in H$ deoarece $x = x' + x''$, cu $x' \in \mathcal{N}, x'' \in \mathcal{N}^{\perp}$. Notând $\tilde{x} = Tx_f$, putem scrie

$$\underbrace{(Tx, \tilde{x})}_{=(x, \tilde{x} - A^{*}\tilde{x})} = (x, f)\,, \forall x \in H,$$

deci

$$\tilde{x} - A^{*}\tilde{x} = f.$$

□

Următorul rezultat oferă câteva informaţii care completează teorema 6.

Teoremă 7. *Fie* $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ *un spaţiu Hilbert şi fie* $A \in K(H)$. *Atunci,*

$$R(I-A) = H \Leftrightarrow \mathcal{N} = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{N}^* = \{0\} \Leftrightarrow R(I-A^*) = H,$$

unde $\mathcal{N} = N(I-A), \mathcal{N}^* = N(I-A^*)$ *şi* $R(I-A), R(I-A^*)$ *reprezintă imaginile operatorilor* $(I-A), (I-A^*)$.

Demonstraţie: Ţinând cont de teorema 6 şi corolarul 1, este suficient să demonstrăm că

$$R(I-A) = H \Leftrightarrow R(I-A^*) = H \tag{1.12}$$

Presupunem că $R(I-A) = H$.

Să demonstrăm că $\mathcal{N} = \{0\}$. Presupunem prin absurd că $\mathcal{N} \neq \{0\}$, adică există un $x_0 \in \mathcal{N}, x_0 \neq 0$. Deoarece $R(I-A) = H$ putem construi un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ în $D(A)$ astfel încât

$$Tx_n = x_{n-1}, \forall n \geq 1$$

unde $T := I - A$. Vom avea

$$T^n x_n = x_0 \neq 0$$

şi

$$T^{n+1} x_n = 0,$$

unde $T^k := T \circ T \circ \cdots \circ T$. Deci, notând $H_n = N(T^n)$, vom avea că H_n este un subspaţiu liniar propriu al lui H_{n+1}, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Conform teoremei 4, orice H_n este un spaţiu finit dimensional, deci închis, deoarece

$$T^n = (I-A)^n = I - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} A^k}_{\text{operator compact.}}$$

Există astfel un şir $(u_n)_{n\geq 1}$ astfel încât

$$u_n \in H_{n+1}, \|u_n\| = 1, \|u_n - u\| \geq \frac{1}{2}, \forall u \in H_n.$$

Cum $1 \leq m < n$

$$T^n (Tu_n + Au_m) = T^{n+1} u_n + AT^n u_m = 0,$$

avem $Tu_n + Au_m \in H_n$ şi

$$\|Au_n - Au_m\| = \|u_n - (Tu_n + Au_m)\| \geq \frac{1}{2}.$$

Astfel, şirul $(Au_n)_{n\geq 1}$ nu poate avea subşiruri Cauchy. Acest lucru contrazice faptul că A este compact împreună cu $\|u_n\| = 1$ pentru orice $n \geq 1$. Prin urmare $\mathcal{N} = \{0\}$, care (conform teoremei 6) implică faptul că $R(I-A^*) = H$. Astfel am demonstrat implicaţia

$$R(I-A) = H \Rightarrow R(I-A^*) = H$$

Implicaţia inversă rezultă din înlocuirea lui A cu A^*. $\square$

Observaţie 6. *Din corolarul 1 şi teorema 7 deducem faptul că dacă ecuaţia* $x - Ax = f$ *are o soluţie* u_f *pentru orice* $f \in H$ *atunci* u_f *este unică. Deci, putem formula* ***alternativă a lui Fredholm*** *pentru ecuaţia* $a - Ax = f$ *cu* $A \in K(H)$ *şi anume că are loc una din următoarele afirmaţii:*

- ▷ *pentru orice* $f \in H$*, ecuaţia* $x - Ax = f$ *are o soluţie unică (echivalent,* $N(I - A) = \{0\}$ *);*
- ▷ $N(I - A) \neq \{0\}$*, caz în care ecuaţia* $x - Ax = f$ *are soluţie dacă şi numai dacă* $f \perp N(I - A^*)$.

1.4 Teorema Hilbert - Schmidt

Teoremă 8. *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu normat şi fie* $A \in K(X)$*. Atunci A are o mulţime numărabilă de valori proprii şi singurul punct de acumulare posibil al mulţimii de valori proprii este* $\lambda = 0$*. Mai mult, pentru orice valoare proprie* $\lambda \neq 0$, $\dim N(\lambda I - A) < \infty$.

Demonstraţie: Demonstraţia este trivială dacă X este finit dimensional, să presupunem deci că X este infinit dimensional. Pentru a demonstra prima afirmaţie a teoremei, este suficient să arătăm că pentru orice $r > 0$ mulţimea $\{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \geq r\}$ conţine un număr finit de valori proprii.

Presupunem că prin absurd că nu este aşa, adică există $r_0 > 0$ şi un număr infinit de valori proprii $\lambda_1, \lambda_2, ...$ astfel încât $|\lambda_n| \geq r_0, \forall n \geq 1$. Atunci există un şir $u_n \in X - \{0\}$ astfel încât $Au_n = \lambda_n u_n, \forall n \geq 1$ şi putem presupune că $\|u_n\| = 1, \forall n \geq 1$. Deoarece λ_n sunt distincte două câte două, $B_n = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ sunt sisteme liniar independente. Notăm $X_n = \ SpanB_n, n = 1, 2, ...$

Există astfel $y_n \in X_n - X_{n-1}$ astfel încât $\|y_n\| = 1, \forall n \geq 2$ şi

$$\|y_n - v\| \geq \frac{1}{2}, \forall v \in X_{n-1}, n \geq 2 \Rightarrow \|y_n - y_m\| \geq \frac{1}{2}, \forall n \neq m.$$

Astfel,(y_n) nu are subşiruri Cauchy.

Pe de altă parte, presupunând că $1 \leq m < n$, vom avea

$$Ay_n - Ay_m = \underbrace{\lambda_n y_n}_{\in X_n - X_{n-1}} - \underbrace{\lambda_n y_m}_{\in X_m} + \underbrace{(Ay_n - \lambda_n y_n)}_{\in X_{n-1}} - \underbrace{(Ay_m - \lambda_m y_m)}_{\in X_m \subset X_{n-1}}$$
$$\lambda_n y_n - v_{mn}$$

cu $v_{mn} \in X_{n-1}$, deoarece

$$\begin{aligned} Ay_n - \lambda_n y_n &= A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n u_i\right) - \lambda_n \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n u_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n \lambda_i u_i\right) - \lambda_n \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n \left(\lambda_i - \lambda_n\right) u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^n \left(\lambda_i - \lambda_n\right) u_i \end{aligned}$$

care aparţine lui X_{n-1}. Deci, vom avea

$$\begin{aligned} \|Ay_n - Ay_m\| &= \|\lambda_n y_n - v_{nm}\| \\ &= |\lambda_n| \cdot \left\|y_n - \lambda_n^{-1} v_{nm}\right\| \\ &\geq r_0 \left\|y_n - \lambda_n^{-1} v_{nm}\right\| \\ &\geq \frac{r_0}{2}, \end{aligned}$$

deci (Ay_n) nu are subşiruri Cauchy. Dar A este compact şi $\|y_n\| = 1, \forall n \geq 1$ deci (Ay_n) trebuie să aibă un subşir convergent. Această contradicţie arată că $\{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \geq r\}$ conţine un număr finit de valorii proprii ale lui A pentru orice $r > 0$, aşa cum am afirmat. $\square$

Propoziţie 1. *Fie $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$ un spaţiu Hilbert şi fie A un operator simetric pe H. Atunci,*

1. *orice valoare proprie a lui A este reală, chiar dacă $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*
2. *oricare doi vectori proprii ai lui A care corespund unor valori proprii distincte, sunt ortogonali.*

Demonstraţie: Pentru a demonstra 1., presupunem că λ este o valoare proprie a lui A. Fie $u \in H - \{0\}$ un vector propriu corespunzător, adică $Au = \lambda u$. Atunci

$$(Au, u) = (\lambda u, u) = \lambda \|u\|^2$$

$$(u, Au) = (u, \lambda u) = \bar{\lambda} \|u\|^2 .$$

Cum A este simetric şi $\|u\| \neq 0$, deducem că $\lambda = \bar{\lambda}$.

Pentru a demonstra 2., luăm în considerare două valorii proprii ale lui A, $(u_1, \lambda_1), (u_2, \lambda_2)$, unde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (din 1.) şi $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Avem
$$\lambda_1 (u_1, u_2) = (Au_1, u_2) = (u_2, Au_1) = \lambda_2 (u_1, u_2.)$$
Prin urmare
$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} (u_1, u_2) = 0,$$
deci $(u_1, u_2) = 0$. □

Propoziţie 2. *Fie $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ un spaţiu Hilbert, $H \neq \{0\}$ şi fie $A \in L(H)$ un operator simetric. Atunci,*
$$\|A\| = \sup \{|(Ax, x)| ; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Demonstraţie: Dacă $A = 0$, este trivial. Presupunem $A \neq 0$ şi notăm
$$a = \sup \{|(Ax, x)| ; \in H, \|x\| = 1\}.$$
Cum
$$|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2, \forall x \in H,$$
deducem că
$$a \leq \|A\|. \tag{1.13}$$
Acum pentru un $b > 0$ dat şi $x \in H$ astfel încât $\|x\| = 1$ şi $\|Ax\| > 0$, avem
$$\|Ax\|^2 = \frac{1}{4}\left[\left(A\left(bx + \frac{1}{4}Ax\right), bx + \frac{1}{b}Ax\right) - \left(A\left(bx - \frac{1}{b}Ax\right), bx - \frac{1}{b}Ax\right)\right]. \tag{1.14}$$
Avem de asemenea
$$|(Av, v)| \leq a\|v\|^2, \forall v \in H. \tag{1.15}$$
Combinând 1.14 şi 1.15 obţinem
$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &\leq \frac{a}{4}\left(\left\|bx + \frac{1}{b}Ax\right\|^2 + \left\|bx - \frac{1}{b}Ax\right\|^2\right)\\ &\leq \frac{a}{2}\left(b^2\|x\|^2 + \frac{1}{b^2}\|Ax\|^2\right),\end{aligned}$$
deci pentru $\|x\| = 1$ şi $b = \|Ax\| > 0$ avem
$$\|Ax\|^2 \leq a\|Ax\|.$$
Prin urmare
$$\|Ax\| \leq a, \forall x \in H, \|x\| = 1 \Rightarrow \|A\| \leq a.$$
□

Teoremă 9. ***Hilbert - Schmidt***

Fie $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ un spaţiu Hilbert infinit dimensional, separabil şi fie $A : H \to H$ un operator liniar compact, simetric, cu $N(A) = \{0\}$. Atunci există un şir de valori proprii ale lui A, $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, ...)$ astfel încât $(|\lambda_n|)$ este un şir descrescător de numere pozitive convergente la 0 şi un sistem ortonormal complet (bază) în H de vectori proprii corespunzători $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ (adică $Au_n = \lambda_n u_n$ pentru $n = 1, 2, \cdots$).

Demonstraţie: În primul rând observăm faptul că $\|A\| > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$. Să demonstrăm că ori $\|A\|$ ori $-\|A\|$ este o valoare proprie a lui A.

Din propoziţia 2. există $(v_n)_{n\geq 1}$ cu $\|v_n\| = 1, \forall n \leq 1$, astfel încât $|(Av_n, v_n)| \to \|A\|$. De fapt, putem să extragem din (v_n) un subşir, notat tot (v_n), astfel încât (Av_n, v_n) converge ori la $\|A\|$ ori la $-\|A\|$

$$(Av_n, v_n) \to \lambda_1 := \|A\| . \tag{1.16}$$

Cum A este compact putem să luăm acum alt subşir, notată de asemenea (v_n), astfel încât

$$Av_n \to u_1 \tag{1.17}$$

şi acesta este subşirul pe care îl păstrăm. Acum, trecând la limită în

$$0 \leq \|Av_n - \lambda_1 v_n\|^2 = \|Av_n\|^2 - 2\lambda_1 (Av_n, v_n) + \lambda_1^2 \tag{1.18}$$

vom obţine din 1.16 şi 1.17

$$0 \leq \|u_1\|^2 - \lambda_1^2 \Rightarrow |\lambda_1| \leq \|u_1\| .$$

Deci, în particular, $u_1 \neq 0$. Este adevărat şi invers, deoarece avem

$$\|Av_n\| \leq \|A\| \cdot \|v_n\| = \|A\| ,$$

deci din 1.17

$$\|u_1\| \leq \|A\| = |\lambda_1| .$$

Prin urmare,

$$\|u_1\| = |\lambda_1| = \|A\| . \tag{1.19}$$

Din 1.18, deducem

$$\|Av_n - \lambda_1 v_n\| \to 0. \tag{1.20}$$

Deci, având în vedere 1.17, $(\lambda_1 v_n)$ converge la u_1 şi astfel din 1.20 şi continuitatea lui A obţinem

$$Au_1 = \lambda_1 u_1,$$

adică, (u_1, λ_1) este o pereche proprie a lui A. O normalizăm fără să ne schimbăm notaţia, $u_1 := |\lambda_1|^{-1} u_1$, deoarece dorim un sistem ortonormal de vectori proprii.

Merită subliniat că orice altă valoare proprie λ satisface $|\lambda| \leq |\lambda_1|$. Într-adevăr, dacă presupunem prin absurd existenţa unei perechi proprii (u, λ), cu $|\lambda| > |\lambda_1|$ şi $\|u\| = 1$, atunci $|(Au, u)| = |\lambda|$ care contrazice $|\lambda_1| = \|A\|$ acesta fiind supremul de la propoziţia 2.

Folosind inducţia deducem existenţa perechilor proprii (u_n, λ_n) pentru $n = 2, 3, ...$

Notăm cu Y complementul ortogonal al lui $Span\{u_1\}$, adică

$$Y = \{u \in H; (u, u_1) = 0\}.$$

Cum H este infinit dimensional, la fel este şi Y. Mai mult, Y este un spaţiu Hilbert şi este invariant la A în sensul că $AY \subset Y$ deoarece, pentru $y \in Y$,

$$(Ay, u_1) = (y, Au_1),$$

din moment ce A este simetric şi

$$\begin{aligned} &= (y, \lambda_1 u_1) \\ &= \lambda_1 (y, u_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Restricţia $A \mid Y$ nu este 0 din moment ce $N(A) = Y$. De fapt, toate proprietăţile sunt moştenite de la pasul anterior; avem o valoare proprie

$$\lambda_2 = \pm \sup \{|Av, v|; v \in Y, \|v\| = 1\}$$

şi funcţia proprie corespunzătoare

$$u_2 \in Y, \|u_2\| = 1, Au_2 = \lambda_2 u_2.$$

Mai mult, $|\lambda_2| \leq \lambda_1$. Mai departe, luăm

$$Z = \{u \in Y; (u, u_2) = 0\} = (Span\{u_1, u_2\})^{\perp}$$

care este un subspaţiu infinit dimensional (Hilbert) al lui H şi obţinem o nouă pereche proprie (u_3, λ_3), cu $\|u_3\| = 1, |\lambda_3| \leq |\lambda_2|$. Putem continua şi obţinem de fiecare dată un subspaţiu infinit dimensional. Vom construi astfel un şir de valori proprii (λ_n) astfel încât

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \cdots \tag{1.21}$$

şi şirul corespunzător de vectori proprii (u_n),

$$Au_n = \lambda_n u_n, \|u_n\| = 1, n \geq 1$$

care formează prin construcţie un sistem ortonormal.

Mai departe, vom demonstra că

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, u_n) u_n, \forall u \in H. \tag{1.22}$$

Definim spaţiul

$$V_m := \{u \in H; (u, u_j) = 0, j = 1, \cdots, m\} = \ Span \{u_1, ..., u_m\}^{\perp},$$

care este un spaţiu Hilbert infinit dimensional, invariant la A. Din pasul anterior din demonstraţia noastră, există o pereche proprie (u_{m+1}, λ_{m+1}) a lui A astfel încât

$$|\lambda_{m+1}| = \|A \mid V_m\| = \ sup \{|(Av, v)|; v \in V_{m+1}, \|v\| = 1\}.$$

În particular,

$$\|Av\| \geq |\lambda_{m+1}| \cdot \|v\|, \forall v \in V_{m+1}. \tag{1.23}$$

Acum, alegem

$$w_m = u - \sum_{n=1}^{m} (u, u_n) u_n$$

şi observăm că $w_m \in V_m$ deoarece $(v_m, u_j) = (u, u_j) - (u, u_j) = 0, \forall j = 1, ..., m$. Calculăm

$$\|w_m\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |(u, u_n)|^2 \leq \|u\|^2. \tag{1.24}$$

Combinând 1.23 şi 1.24 avem

$$Aw_m = Au - \sum_{n=1}^{m} (u, u_n) Au_n$$

$$Au - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n (u, u_n) u_n,$$

de unde

$$\begin{aligned} \|Aw_m\| \leq \|A \mid V_m\| \cdot \|w_m\| \, |\lambda_{m+1}| \cdot \|w_m\| \\ \leq |\lambda_{m+1}| \cdot \|u\|. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Pe de altă parte, $\lambda_n \to 0$. Într-adevăr, din moment ce $(|\lambda_n|)$ este descrescător, există

$$\lim_{n \to \infty} |\lambda_n| = \alpha \geq 0.$$

Să presupunem, prin absurd, că $\alpha > 0$. În mod evident, $|\lambda_n| \geq \alpha$ pentru orice $n \geq 1$ şi deci

$$\left\|\lambda_n^{-1} u_n\right\| = \frac{\|u_n\|}{|\lambda_n|} = \frac{1}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\alpha}, \forall n \geq 1.$$

Cum A este compact $u_n = A(\lambda_n^{-1} u_n)$ are un subşir convergent. Dar acest lucru este imposibil deoarece,

$$\|u_n - u_m\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u_m\|^2 = 2, \forall n \neq m.$$

Deci, $\alpha = 0$, adică $\lambda_n \to 0$, aşa cum am afirmat.

În consecinţă, avem din 1.25 că $\|Aw_m\| \to 0$ pentru $m \to \infty$, adică 1.22 e adevărată.

În final, să demonstrăm că $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ este o bază în H.

Ştim că pentru orice $u \in H$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n) u_n$ converge, deci putem să scriem

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n) u_n$$

deci trebuie să verificăm că $u = v$.

Luăm în considerare şirul de sume parţiale $s_m = \sum_{n=1}^{m} (u, u_n) u_n$ care converge la v pentru $m \to \infty$, deci $As_m \to Av$. Pe de altă parte, din 1.22 avem că

$$As_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n (u, u_n) u_n \to Au \text{ pentru } m \to \infty.$$

Prin urmare,

$$Av = Au \Rightarrow A(v-u) = 0 \Rightarrow v = u,$$

deoarece $\ker A = \{0\}$.

Astfel sistemul $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ este complet, adică este o bază în H. □

Observaţie 7. *Dacă presupunem în plus că A este pozitiv, atunci acesta are valori proprii* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_n \geq \cdots$ *cu* $\lambda_n > 0, \forall n \geq 1$. *Acest lucru rezultă din*

$$(Au_n, u_n) = \lambda_n \|u_n\|^2 = \lambda_n, n \geq 1.$$

De asemenea, ţinem cont că

$$\lambda_1 = \|A\| = \ sup \{(Av, v); v \in H, \|v\| = 1\}$$

şi

$$\lambda_{n+1} = \|A \mid V_n\| = \ sup \{(Av, v); v \in V_n, \|v\| = 1\}, \forall n \geq 1$$

unde

$$V_n = (\ Span \{u_1, u_2, ..., u_n\})^{\perp}, n \geq 1.$$

1.5 Alte rezultate

În această secţiune vom da, fără demonstraţii două teoreme şi câteva definiţii pe care le vom utiliza în următorul capitol.

Primul dintre acestea este un rezultat de densitate in spatiul $L^p(\Omega)$:

Teoremă 10. *Fie* $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ *o mulţime nevidă. Avem* $\overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{L^p(\Omega)} = L^p(\Omega)$ *pentru orice* $1 \leq p < \infty$.

Criteriul Arzelà-Ascoli

Fie (X, d) şi (X_1, d_1) spaţiile metrice şi fie $\varnothing \neq A \subset X$. Notăm cu $C(A; X_1)$, mulţimea tuturor funcţiilor continue din $A \subset (X, d)$ la (X_1, d_1).

Definiţie 1. *O familie de funcţii $\mathcal{F} \subset C(A; X_1)$ se numeşte echicontinuă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $x \in A$ există $\delta > 0$ astfel încât $y \in A$ şi $d(x, y) < \delta$ implică $d_1(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, adică $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ este independentă faţă de f.*

Definiţie 2. *Dacă, în plus, $\delta = \delta(\varepsilon)$ (adică δ este independentă faţă de x şi f), atunci $\mathcal{F}$ este uniform echicontinuă, adică $\forall\varepsilon > 0, \forall x, y \in A, d(x, y) < \delta$ implică $d_1(f(x), f(y)) < \varepsilon$, pentru orice $f \in \mathcal{F}$.*

Teoremă 11. *Fie $\varnothing \neq A \subset (X, d)$ compact. Presupunem că $\mathcal{F} \subset C\left(A, \mathbb{R}^k\right)$ este echicontinuă şi mărginită în $C\left(A; \mathbb{R}^k\right)$, (adică $\exists M > 0$ astfel încât $\|f(x)\| \leq M, \forall x \in A, \forall f \in \mathcal{F}$) .Atunci $\mathcal{F}$este relativ compactă în $C\left(A; \mathbb{R}^k\right)$ echipată cu sup-normă.*

Definiţie 3. ***Operatorul adjunct-Hilbert*** *Fie $T : \mathcal{D}(T) \to H$ un operator liniar dens definit într-un spaţiu Hilbert complex H. Atunci, operatorul ajunct-Hilbert $T^* : \mathcal{D}(T^*) \to H$ al lui T va fi definit, după cum urmează. Domeniul $\mathcal{D}(T^*)$ al lui T^* constă în orice $y \in /H$ astfel încât să existe un $y^* \in H$ care să satisfacă condiţia*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$$

pentru orice $x \in \mathcal{D}(T)$. Pentru fiecare astfel de $y \in \mathcal{D}(T^*)$ operatorul adjunct-Hilbert T^* este atunci definit în termenii acelui y^* de

$$y^* = T^* y.$$

Cu alte cuvinte , un element $y \in H$ este în $\mathcal{D}(T^*)$ dacă (şi numai dacă) pentru acel y produsul interior$\langle Tx, y\rangle$, considerat ca o funcţie a lui x, poate fi reprezentat sub forma $\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ pentru orice v. De asemenea pentru acel y, formula de mai susdetermină corespondentul unic y^* din moment ce $\mathcal{D}(T)$ prin presupunerea noastră , este densă în H.

Definiţie 4. ***Operatorul liniar simetric*** *Fie $T : \mathcal{D}(T) \to H$ un operator liniar care este dens definit într-un spaţiu Hilbert H complex . Atunci T se numeşte un operator liniar simetric dacă pentru orice $x, y \in \mathcal{D}(T)$,*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Definiţie 5. ***Operatorul liniar autoadjunct*** *Fie $T : \mathcal{D}(T) \to H$ un operator liniar care este dens definit într-un spaţiu hilbert complex. Atunci T se numeşte operator liniar autoadjunct dacă*

$$T = T^*$$

Orice operator liniar autoadjunct este simetric.

Pentru un operator $T : H \to H$ pe un spaţiu Hilbert H complex, conceptele de simetric şi autoadjunct sunt identice.

Capitolul 2

Ecuaţii Integrale

Acest capitol este o introducere în teoriei ecuaţiilor liniare de tip Volterra şi Fredholm. Sunt abordate şi unele aspecte legate de anumite extensii neliniare.

2.1 Ecuaţii Volterra

Vom începe cu ecuaţii scalare şi liniare de tip Volterra. Există doua tipuri de astfel de ecuaţii care sunt cele mai relevante pentru aplicaţii şi anume

$$f(t) = \int_a^t k(t,s)\,x(s)\,ds, a \leq t \leq b \tag{2.1}$$

şi

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)\,x(s)\,ds, a \leq t \leq b, \tag{2.2}$$

unde

$$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C[a,b] := C([a,b];\mathbb{R}), k \in C(\Delta) := C(\Delta;\mathbb{R})$$

(numit nucleu), cu $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2; a \leq s \leq t \leq b\}$; $x = x(t)$ reprezintă funcţia necunoscută care aparţine spaţiul $C[a,b]$.

Ecuaţia 2.1 este cunoscută ca ecuaţie Volterra de prima speţă, în timp ce ecuaţia 2.2 este cunoscută ca cuaţie Volterra de speţa a doua. În cele ce urmează vom examina ecuaţia Volterra de speţa a doua. Vom arăta mai târziu faptul că ecuaţia Volterra de speţa întâi se reduce de fapt la cea de speţa a doua în condiţii adecvate.

Teoremă 12. ***Existetenţa şi Unicitatea***

În ipotezele de mai sus există o soluţie unică $x \in C \in [a,b]$ a ecuaţiei 2.2.

Vom prezenta în cele ce urmează trei demonstraţii diferite.

Demonstraţie: Notăm $K = sup_{(t,s)\in\Delta} |k(t,s)|$ care este finit deoarece Δ este o submulţime compactă al lui $\mathbb{R}^2$. Presupunem într-o primă etapă că

$$K(b-a) < 1. \tag{2.3}$$

Considerăm $X = C[a,b]$ cu norm sup $\|g\| = sup_{a\le t\le b} |g(t)|$ şi metrica corespunzatoare, $d(g_1,g_2) = \|g_1 - g_2\|$.

Definim $T : X \to X$ prin

$$(Tg)(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)\, g(s)\, ds, t \in [a,b], g \in X. \tag{2.4}$$

Este clar din ecuaţia 2.4 că T duce X în X. De asemenea

$$\begin{aligned}|(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| &= \left|\int_a^t k(t,s)[g_1(s) - g_2(s)]\, ds\right| \\ &\le \int_a^t |k(t,s)| \cdot |g_1(s) - g_2(s)|\, ds \\ &\le K(b-a)\|g_1 - g_2\|\end{aligned}$$

pentru orice $g_1, g_2 \in X$ şi orice $t \in [a,b]$. Prin urmare

$$d(Tg_1, Tg_2) \le K(b-a)\, d(g_1,g_2),$$

adică T este o contracţie (conform 2.3).

Conform Principiului contracţiilor al lui Banach (din Capitolul 2), T are un punct fix unic $x \in X$ care este în mod clar unica soluţie a ecuaţiei 2.2).

Dacă condiţia 2.3 nu este îndeplinită, atunci considerăm o subdiviziunea a intervalului $[a,b]$, de exemplu

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b,$$

unde $t_j = a + jh$ pentru $j = 1, 2, \ldots, N, h = \frac{(b-a)}{N}$, cu N suficient de mare astfel încât $Kh < 1$. În particular, $K(t_1 - t_0) = Kh < 1$, deci de mai sus rezultă ca 2.2 are o soluţie unică $x_1 = x_1(t)$ pe intervalul $[t_0, t_1] = [a, t_1]$, adică,

$$x_1(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)\, x_1(s)\, ds, t \in [a, t_1].$$

Fie ecuaţia

$$x_1(t) = \underbrace{f(t) + \int_a^t k(t,s)\, x_1(s)\, ds}_{=:f_1(t\in C[t_1,t_2])} + \int_{t_1}^{t_2} k(t,s)\, x(s)\, ds, t \in [t_1, t_2],$$

$$f(t) + \int_a^t k(t,s)\, x_1(s)\, ds =: f_1(t) \in C[t_1, t_2].$$

Cum $K(t_2 - t_1) = Kh < 1$, rezultă din argumentul de mai sus că această ecuaţie are o soluţie unică $x_2 \in C[t_1, t_2]$ şi evident, $x_2(t_1) = x_1(t_1)$.

În mod similar, există o funcţie unică $x_3 \in C[t_2, t_3]$ care satisfice următoarea ecuaţie, pentru orice $t \in [t_2, t_3]$

$$x_3(t) = f(t) + \int_a^{t_1} k(t,s)\, x_1(s)\, ds + \int_{t_1}^{t_2} k(t,s)\, x_2(s)\, ds + \int_{t_2}^{t} k(t,s)\, x_3(s)\, ds$$

şi $x_3(t_2) = x_2(t_2)$.

Continuând această procedură obţinem o soluţie $x \in C[t_0, t_N] = C[a,b]$ a ecuaţiei 2.2 definită de $x(t) = x_j(t)$ pentru $t \in [t_{j-1}, t_j], j = 1, 2, \cdots, N$. Soluţia x este evident unică. $\square$

Demonstraţie: Din nou, luăm în considerare operatorul T definit de ecuaţia 2.4 unde X este acelaşi ca mai sus. Se vede uşor că

$$|(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| \leq K\|g_1 - g_2\|(t-a), \forall t \in [a,b], g_1, g_2 \in X.$$

În consecinţă, pentru $T^2 = T \circ T$ obţinem

$$\begin{aligned}
\left|\left(T^2 g_1\right)(t) - \left(T^2 g_2\right)(t)\right| &\leq \int_a^t |k(t,s)| \cdot |(Tg_1)(s) - (Tg_2)(s)|\, ds \\
&\leq K^2 \|g_1 - g_2\| \int_a^t (s-a)\, ds \\
&= \frac{K^2 (t-a)^2}{2!} \|g_1 - g_2\|
\end{aligned}$$

$\square$

Se poate demonstra prin inducţie faptul că:

$$\begin{aligned}
\left|\left(T^k g_1\right)(t) - \left(T^k g_2\right)(t)\right| &\leq \frac{K^k (t-a)^k}{k!} \|g_1 - g_2\| \\
&\leq \frac{K^k (b-a)^k}{k!} \|g_1 - g_2\|
\end{aligned}$$

pentru orice $t \in [a,b], g_1, g_2 \in X, k = 1, 2, \cdots$ Luăm supremum-ul şi obţinem

$$d\left(T^k g_1, T^k g_2\right) \leq \frac{K^k (b-a)^k}{k!} \|g_1 - g_2\|, \forall g_1, g_2 \in X, k = 1, 2, ... \tag{2.5}$$

Cum $K^k (b-a)^{\frac{k}{k!}} \to \infty$, pentru $k \to \infty, T^k$ este o contracţie dacă k suficient de mare (conform 2.5). Conform observaţiei 3, T are un punct fix unic $x \in X$, care este soluţia unică a ecuaţiei 2.2.

Demonstraţie: Fie T acelaşi operator ca mai înainte, dar luăm în considerare o altă normă pe $X = C[a,b]$, norma Bielecki, definită de

$$\|g\|_B = \sup_{a \le t \le b} e^{-Lt} |g(t)|$$

cu L o constantă pozitivă astfel încât $\frac{K}{L} < 1$. Aceasta este într-adevar o normă pe X care este echivalentă cu norma sup uzuală. Notăm cu d_B metrica generată de $\|\cdot\|_B$.

Vom avea pentru orice $t \in [a,b]$ şi $g_1, g_2 \in X$

$$\begin{aligned} |(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| &\le \int_a^t |k(t,s)| e^{Ls} e^{-Ls} |g_1(s) - g_2(s)| \, ds \\ &\le K \|g_1 - g_2\|_B \int_a^t e^{Ls} ds \\ &= \frac{K \|g_1 - g_2\|_B}{L} \left(e^{Lt} - e^{La}\right), \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} e^{-Lt} |(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| &\le \frac{K}{L} \|g_1 - g_2\|_B \left(1 - e^{-L(t-a)}\right) \\ &\le \frac{K}{L} \|g_1 - g_2\|_B \, . \end{aligned}$$

Acum luăm supremum-ul pentru $t \in [a,b]$

$$d_B(Tg_1, Tg_2) \le \frac{K}{L} d_B(g_1, g_2), \forall g_1, g_2 \in X.$$

Cum $\frac{K}{L} < 1, T$ este o contracţie în raport cu d_B, prin urmare, concluzia teoremei rezultă din nou din Principiul contracţiilor al lui Banach. □

Nucleul resolvent

Să presupunem că sunt îndeplinite condiţiile de mai sus pentru f si k. Pentru $n \in \mathbb{N}, t \in [a,b]$ vom avea

$$\begin{aligned} &x_n(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s) x_{n-1}(s) \, ds, \\ &x_0(t) = f(t) \, . \end{aligned}$$

În mod clar, $x_n \in X = C[a,b]$ pentru orice n. De fapt, şirul de mai sus $(x_n)_{n \ge 0}$ poate fi exprimat ca

$$x_n = Tx_{n-1}, n \in \mathbb{N}; x_0 = f,$$

unde $T : X \to X$ este operatorul definit de 2.4. Deci, (x_n) este de fapt şirul de aproximări succesive (asociate operatorului T) care a fost folosit în demonstrarea Principiului contracţiilor al lui Banach (Capitolul 1.2). Aici luăm în considerare o anumită funcţie de început, $x_0 = f$. Din demonstraţia Principiului contracţiilor al lui Banach ştim că (x_n) converge în $(C[a,b], \|\cdot\|_B)$ către punctul său fix unic x, adică (x_n) converge uniform în $[a,b]$ la soluţia unică x a ecuatiei 2.2. Pe de alta parte, avem pentru orice $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= f(t) + \int_a^t k(t,s) f(s)\, ds, \\
x_2(t) &= f(t) + \int_a^t k(t,s) \left[f(s) + \int_a^s k(s,\tau) f(\tau)\, d\tau \right] ds \\
&= f(t) + \int_a^t k(t,s) f(s)\, ds + \int_a^t \int_a^s k(t,s) k(s,\tau) f(\tau)\, d\tau ds.
\end{aligned}$$

Putem schimba integrarea pentru a afla vedea că ultima integrală este egală cu

$$\int_a^t \left[\int_\tau^t k(t,\tau) k(s,\tau)\, ds \right] f(\tau)\, d\tau,$$

deci prin simpla reetichetare a lui τ şi s vom avea

$$\int_a^t \underbrace{\left[\int_s^t k(t,\tau) k(\tau,s)\, d\tau \right]}_{=:k_2(t,s)} f(s)\, d$$

şi vom avea un nucleu nou, k_2. În general, dacă îl vom lua $n = 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
k_n(t,s) &:= \int_s^t k(t,\tau) k_{n-1}(\tau,s)\, d\tau, \\
k_1(t,s) &:= k(t,s),
\end{aligned}$$

avem, pentru $n = 1, 2, \ldots$..

$$x_n(t) = f(t) + \int_a^t \left[\sum_{j=1}^n k_j(t,s) \right] f(s)\, ds. \tag{2.6}$$

Deoarece k este continuu pe mulţimea compactă Δ, avem pentru orice $(t,s) \in \Delta$,

$$\begin{aligned}
|k_1(t,s)| &\leq K < \infty \\
|k_2(t,s)| &\leq K^2 (t-s), \\
|k_3(t,s)| &\leq K^3 \int_s^t |\tau - s| \, d\tau \\
&= K^3 \frac{(t-s)^2}{2!}, \\
&\vdots \\
|k_n(t,s)| &\leq K^n \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\leq K^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Din M-testul lui Weierstrass, seria $\sum_{n=1}^{\infty} k_n(t,s)$ converge uniform pe Δ deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (b-a)^{n-1}}{(n-1)!} < \infty.$$

Ca urmare

$$R(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t,s),$$

este in $C(\Delta)$. Luând $n \to \infty$ în 2.6 deducem faptul că

$$x(t) = f(t) + \int_a^t R(t,s) f(s) \, ds, t \in [a,b]. \tag{2.7}$$

Vom lua $R(t,s)$ nucleul rezolvent. Acesta depinde de k dar este independent de f, astfel încât odată ce găsim $R(t,s)$ avem soluţia 2.2 pentru orice f (conform 2.7).

Obervăm faptul că

$$\sum_{n=2}^{N+1} k_n(t,s) = \int_s^t k(t,\tau) \sum_{n=2}^{N+1} k_{n-1}(\tau,s) \, d\tau,$$

ceea ce implică

$$-k(t,s) + \sum_{n=1}^{N+1} k_n(t,s) = \int_s^t k(t,\tau) \sum_{n=1}^{N} k_n(\tau,s) \, d\tau.$$

Dacă luăm $n \to \infty$ vom constata că R satisface

$$R(t,s) = k(t,s) + \int_s^t k(t,\tau) R(\tau,s) \, d\tau, \forall (t,s) \in \Delta,$$

care este o ecuaţie Volterra similară cu 2.2.

Acum să examinăm ecuaţia 2.1. Presupunem că

$$f \in C^1[a,b]\, şi k,\ \frac{\partial k}{\partial t} \in C(\Delta), k(t,t) \neq 0, \text{ pentru orice } t \in [a,b]. \tag{H}$$

Presupunem de asemenea că $f(a) = 0$ care este o condiţie necesară pentru ca ecuaţia 2.1 să admită soluţie. Dacă ecuaţia 2.1 are o soluţie $x \in C[a,b]$, atunci derivând ecuaţia 2.1 deducem

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}\int_a^t k(t,s)\,x(s)\,ds \\ &= k(t,t)\,x(t) + \int_a^t k_t(t,s)\,x(s)\,ds, t \in [a,b], \end{aligned} \tag{2.8}$$

care este echivalentă cu următoarea ecuaţie integrală de tip Volterra de speţa a doua

$$x(t) = \frac{f'(t)}{k(t,t)} + \int_a^t \left[\frac{-k_t(t,s)}{k(t,t)}\right] x(s)\,ds. \tag{2.9}$$

Deci x este de asemenea o soluţie a ecuaţiei 2.9. Pe de altă parte, ştim din teorema anterioară faptul că ecuaţia 2.9 are o soluţie unică $x \in C[a,b]$. Acest x este de asemenea o soluţie a ecuaţiei 2.1. Aceasta rezultă din integrarea lui 2.8 pe $[a,t]$ şi folosind condiţia $f(a) = 0$. Astfel am demonstrat următorul rezultat

Teoremă 13. *În ipotezele H de mai sus şi, în plus, $f(a) = 0$, ecuaţia 2.1 are o soluţie unică $x \in C[a,b]$.*

Continuăm cu ecuaţia Volterra neliniară

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s,x(s))\,ds, t \in [a,b], \tag{2.10}$$

şi demonstrăm următorul rezultat general.

Teoremă 14. *Presupunem că $f \in C[a,b]$, $k \in C(D)$, unde*

$$D := \Delta \times \mathbb{R} = \left\{(t,s,v) \in \mathbb{R}^3; a \leq s \leq t \leq b, v \in \mathbb{R}\right\}.$$

Dacă există $K > 0$ astfel încât

$$|k(t,s,v) - k(t,s,w)| \leq K\,|v-w|\,\forall a \leq s \leq t \leq b; v,w \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

atunci există o unică funcţie $x \in C[a,b]$ care satisfice ecuaţia 2.10 pe $[a,b]$.

Demonstraţie: Fie $X = C[a,b]$ cu norma Bielecki şi definim $T : X \to X$ prin

$$(Tg)(t) = f(t) + \int_0^t k(t,s,g(s))\,ds, \forall t\,[a,b], g \in X.$$

Concluzia rezultă din Principiului contracţiilor al lui Banach în mod similar ca în demonstaraţia 3 a teoremei 12. □

Teorema 14 oferă o soluţie globală în sensul că intervalul de existenţă este întregul interval $[a,b]$. În mod evident, aceasta este o generalizare a teoremei 12.

Într-adevar, pentru a obţine teorema 12 este suficient să presupunem că nucleul k este liniar în raport cu a treia variabilă, adică $k := k(t,s)\,v, a \le s \le t \le b, v \in \mathbb{R}$, cu $k \in C(\Delta)$ astfel încât condiţia Lipschitz 2.1 este satisfacută automat.

Acum să examinăm un caz în care solutia rezultată este doar una locală, adică domeniul său poate să nu fie întregul interval $[a,b]$.

Teoremă 15. *Presupunem că* $f \in C[a,b], k = k(t,s,v) \in C(D)$*, unde* $D := \Delta \times [x_0 - c, x_0 + c] = \{(t,s,v) \in \mathbb{R}^3; a \le s \le t \le b, |v - x_0| \le c\}$*, cu* $x_0 \in \mathbb{R}$ *şi* $c \in (0,\infty)$*. Dacă în plus, există* $K > 0$ *astfel încât*

$$|k(t,s,v) - k(t,s,w)| \le K|v - w|\,\forall (t,s,v), (t,s,w) \in D \tag{2.12}$$

şi există un $d \in [0,c)$ *astfel încât*

$$|f(t) - x_0| \le d, \forall t \in [a,b], \tag{2.13}$$

atunci există o unică funcţie $x \in C[a, a+\delta]$ *care satisface ecuaţia 2.10 în* $[a, a+\delta]$*, unde*

$$\delta = min\left\{b - a, \frac{(c-d)}{M}\right\}, M = sup\{|k(t,s,v)|; (t,s,v) \in D\}.$$

(Se presupune că M este pozitiv deoarece cazul M = 0 este trivial)

Demonstraţie: Se consideră spaţiul $C[a, a+\delta]$ cu norma sup uzuală şi metrica d generată de aceasta. Notăm

$$Y = \{g \in C[a, a+\delta]; |g(t) - x_0| \le c, \forall t \in [a, a+\delta]\}.$$

În mod clar (Y,d) este un spaţiu metric complet (deoarece moment ce Y este o submulţime închisă a spaţiului $(C[a, a+\delta], d)$). Ca de obicei, definim un operator T prin

$$(Tg)(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s,g(s))\,ds, t \in [a, a+\delta], g \in Y.$$

Să arătăm că T are imaginea în Y. Într-adevaă, pentru orice $g \in Y$ si $t \in [a, a+\delta]$ vom avea (vezi 2.13).

$$\begin{aligned}|(Tg)(t) - x_0| &\le |f(t) - x_0| + \int_a^t |k(t,s,g(s))|\,ds \\ &\le d + M(t-a) \\ &\le d + M\delta \le c,\end{aligned}$$

ceea ce dovedeşte afirmaţia. Prin argumente similar cu cele utilizate în demonstraţia 2 a teoremei 12 deducem că T^k este o contracţie pe (Y,d) pentru k suficient de mare. Deci T are un punct fix unic $x \in Y$ care este soluţia unică a ecuaţiei 2.10 în $[a, a+\delta]$. □

Un alt rezultat de existenţă şi unicitate se obtine dacă nucleul k este definit pe un domeniu diferit,

$$\tilde{D} = \left\{(t,s,v) \in \mathbb{R}^3; a \le s \le t \le b, |v - f(s)| \le c\right\}, c \in (0,\infty),$$

care este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^3$.

Teoremă 16. *Presupunem că* $f \in C[a,b]$ *şi* $k = k(t,s,v) \in C\left(\tilde{D}\right)$, $M = sup_{\tilde{D}}|k| > 0$. *Dacă, în plus, există* $K > 0$ *astfel încât*

$$|k(t,s,v) - k(t,s,w)| \leq K|v-w|, \forall (t,s,v) \in \tilde{D}, \tag{2.14}$$

atunci există o unică funcţie $x \in C[a, a+\delta]$ *care satisfice ecuaţia 2.10 în* $[a, a+\delta]$, *unde* $\delta = min\left\{b-a, \frac{c}{M}\right\}$.

Demonstraţie: Demonstraţia este similară cu cea a teoremei 15 de mai sus. Aici domeniul operatorului T este

$$\tilde{Y} = \{g \in C[a, a+\delta]; |g(t) - f(t)| \leq c, \forall t \in [a, a+\delta]\},$$

care este bila închisă în $(C[a, a+\delta], d)$ centrată în f (restricţionată la $[a, a+\delta]$) de rază c.

În mod evident T este bine definit pe $\tilde{Y}$ şi ia valori în $\tilde{Y}$. De asemenea, se verifică cu usurinţă că T^k este o contracţie pentru orice $k \in \mathbb{N}$ suficient de mare. Aceasta completează demonstraţia (vezi observaţia 3). □

2.2 Ecuaţii de tip Fredholm

În cele ce urmează $\mathbb{K}$ este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Considerăm în $\mathbb{K}$ ecuaţia integrală

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s)\, x(s)\, ds, t \in [a,b], \tag{2.16}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C([a,b]; \mathbb{K})$ şi $k \in C([a,b] \times [a,b]; \mathbb{K})$.

Ecuaţia (2.16 este cunoscută ca ecuaţia Fredholm (uneori este numită de speţa a doua). Ea implică un interval fix de integrare şi este fundamental diferită de ecuaţia 2.2. O prima observaţie care confirmă această afirmaţie este că, în timp ce ecuaţia Volterra corespunzătoare (de speţa a doua) are întotdeauna o soluţie (unică, continuă) pe $[a,b]$, ecuaţia 2.16 poate să nu aibă soluţie în unele cazuri.

De exemplu, presupunând că există o soluţie $x \in C[0,1] := C([0,1]; \mathbb{R})$ a ecuaţiei

$$x(t) = t + \int_0^1 k(t,s)\, x(s)\, ds, t \in [0,1], \tag{2.17}$$

unde

$$k(t,s) = \begin{cases} \pi^2(s)(1-t), & s \leq t \\ \pi^2 t(1-s), & t \leq s \end{cases}$$

prin derivarea de două ori a ecuaţiei 2.17 rezultă că x ar trebui să satisfacă problema

$$\begin{cases} x''(t) + \pi^2 x(t) = 0, & t \in [0,1] \\ x(0) = 0, x(1) = 1. \end{cases}$$

Pe de altă parte, se vede uşor că această problemă nu are nicio soluţie. Prin urmare, ecuaţia 2.17 nu are soluţie.

Merită totuşi subliniat faptul că în baza ipotezelor de mai sus, ecuaţia 2.16 are o soluţie unică în $C[a,b]$ ori de câte ori norma sup a lui $|k|$ este suficient de mică, mai precis, dacă $(b-a)\, sup_{[a,b]\times[a,b]} |k| < 1$. Acest rezultat se verifică cu usurinţă folosind Principiul Contracţiilor al lui Banach. De fapt, problema existenţei poate fi discutată în spaţiul $L^2(a,b;\mathbb{K})$ care este un cadru mai larg de lucru. Mai exact, să presupunem $f \in L^2(a,b;\mathbb{K}), k \in L^2(Q;\mathbb{K})$, unde $Q = (a,b) \times (a,b)$.

Soluţia x a ecuaţiei 2.16 va fi căutată în $L_2(a,b;\mathbb{K})$ care este un spaţiu Hilbert în raport cu produsul scalar uzual şi norma indusă de acesta:

$$\langle g_1, g_2 \rangle_{L^2} = \int_a^b g_1(t) \cdot \overline{g_{2(t)}} dt, \quad \|g\|_{L^2}^2 = \langle g, g \rangle.$$

Desigur, dacă găsim o soluţie $x \in L^2(a,b;\mathbb{K})$ a ecuaţiei 2.16 cu $f \in C([a,b];\mathbb{K}), k \in C([a,b]\times[a,b];\mathbb{K})$, atunci evident $x \in C([a,b];\mathbb{K})$.

Avem următorul rezultat.

Teoremă 17. *Dacă*

$$f \in L^2(a,b;\mathbb{K}), -\infty < a < b < +\infty, k \in L^2(Q;\mathbb{K})$$

şi $\int\int_Q |k(t,s)|^2 dtds < 1$, *unde* $Q = (a,b) \times (a,b)$, *atunci există o unică funcţie* $x \in L^2(a,b;\mathbb{K})$ *care satisfice ecuaţia*

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s)\, x(s)\, ds,$$

aproape peste tot în (a,b).

Demonstraţie: Fie T operatorul definit de

$$(Tg)(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s)\, g(s)\, ds, \forall g \in L^2(a,b;\mathbb{K}), \quad t \in (a,b).$$

Se vede cu usurinţă că T ia valori în $L^2(a,b;\mathbb{K})$.

Mai mult, $\|k\|_{L^2(Q,\mathbb{K})} < 1$, deci T este o contracţie în raport cu metrica uzuală din $\|\cdot\|_{L^2}$. Prin urmare, există un unic punct fix $x \in L^2(a,b;\mathbb{K})$ care este soluţia unică în L^2 a ecuaţiei

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s)\, x(s)\, ds.$$

□

Observaţie 8. *Folosind o procedură similară cu cea utilizată pentru ecuaţia Volterra 2.2, putem deduce că soluţia dată de teorema 17 poate fi reprezentată prin formula*

$$x(t) = f(t) + \int_a^b R(t,s) f(s)\, ds, pentru t \in (a,b),$$

unde nucleul rezolvent R este dat de

$$R(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i(t,s), \tag{2.18}$$

cu

$$k_1(t,s) := k(t,s), k_m(t,s) = \int_a^b k(t,\tau) k_{m-1}(\tau,s)\, d\tau, \forall m \geq 2.$$

Seria din 2.18 converge în $L^2(Q,\mathbb{K})$ şi aproape peste tot pe Q.

Observaţie 9. *Teorema 17 poate fi extinsă la ecuaţia neliniară de tip Fredholm*

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s,x(s))\, ds, t \in [a,b]. \tag{2.19}$$

Într-adevăr, dacă $f \in L^2(a,b;\mathbb{K}), k : Q \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ este măsurabil Lebesque, $k(\cdot,\cdot,0) \in L^2(Q;\mathbb{K})$ şi

$$|k(t,s,v) - k(t,s,w)| \leq \alpha(t,s)|v-w|, \text{ pentru orice } v,w \in \mathbb{K} \text{ şi } (t,s) \in Q,$$

pentru un $\alpha \in L^2(Q)$ cu $\|\alpha\|_{L^2(Q)} < 1$, atunci există un unic $x \in L^2(a,b;\mathbb{K})$ care satisface ecuaţia2.19 aproape peste tot în (a,b).

Ca şi în celelalte cazuri considerate, concluzia rezultă din Principiul contracţiilor al lui Banach. Să observăm doar că pentru orice $g \in L^2(a,b;\mathbb{K})$, funcţia $(t,s) \mapsto k(t,s,g(s))$ aparţine lui $L^2(Q,\mathbb{K})$ deoarece

$$|k(t,s,g(s))| \leq |k(t,s,0)| + \alpha(t,s)|g(s)|, pentru (t,s) \in Q.$$

Observaţie 10. *În cazul ecuaţiilor Fredholm, conceptul de soluţie locală nu are sens deoarece termenul integral implică valorile $x(t)$ pentru t $\in (a,b)$. Acest lucru arată încă o dată faptul că ecuaţiile Fredholm sunt fundamental diferite de ecuaţiile Volterra.*

Pe de altă parte, ne putem întreba dacă ecuaţia 2.16 mai are soluţii atunci când condiţia $\|k\|_{L^2(Q;\mathbb{K})} < 1$ nu mai este îndeplintă. Un răspuns complet este dat de alternativa lui Fredholm (Vezi observaţia 6). În cazul nostru particular, $H = L^2(a,b;\mathbb{K})$ şi $A : H \to H$ dat de

$$(Ag)(t) = \int_a^b k(t,s) g(s)\, ds, \forall g \in H, pentru t \in (a,b).. \tag{2.20}$$

În mod clar, $A \in L(H)$.

Lemă 2. *Dacă* $k \in L^2(Q;\mathbb{K})$*, atunci operatorul* $A : H \to H$ *definit de 2.20 este compact.*

Demonstraţie: Să presupunem mai întâi că nucleul $k \in C([a,b] \times [a,b];\mathbb{K})$. Pentru a arăta că A este compact vom folosi criteiul Arzelà-Ascoli (Vezi Capitolul 1) şi observăm că criteriul este valabil cu $\mathbb{K}$ în loc de $\mathbb{R}^k$.

Fie $B(0,r), r \in (0,\infty)$, o bilă în H. Atunci mulţimea $F = \{Ag; g \in B(0,r)\}$ este o submulţime mărginită a lui $C([a,b];\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} |(Ag)(t)| &\leq \int_a^b |k(t,s)| \cdot |g(s)|\, ds \\ &\leq \left(\int_a^b |k(t,s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2} \\ &\leq r(b-a)^{\frac{1}{2}} \sup_Q |k| < \infty, \end{aligned}$$

pentru orice $g \in B(0,r)$ şi orice $t \in [a,b]$.

Mulţimea $\mathcal{F}$ este de asemenea echicontinuă deoarece k este uniform continuu pe $[a,b] \times [a,b]$, deci (din Criteriul Arzela-Ascoli) $\mathcal{F}$ este relativ compact în $C([a,b];\mathbb{K})$, deci şi în $H = L^2(a,b;\mathbb{K})$. Prin urmare, A este într-adevăr un operator compact.

Acum, presupunem că $k \in L^2(Q,\mathbb{K})$. Atunci, din teorema 11, există un şir (k_n) în $C([a,b] \times [a,b];\mathbb{K})$ astfel încât $\|k_n - k\|_{L^2(Q;\mathbb{K})} \to 0$ pentru ca $n \to \infty$. Să asociem cu fiecare k_n operatorul $A_n \in L(H)$ definit de

$$(A_n g)(t) = \int_a^b k_n(t,s)\, g(s)\, ds, \forall g \in H, t \in [a,b],$$

care este compact, conform argumentului de mai sus.

Un calcul simplu arată că $\|A_n - A\|_{L(H)} \leq \|k_n - k\|_{L^2(Q,\mathbb{K})}$ pentru orice n, doarece $\|A_n - A\|_{L(H)} \to 0$ pentru $n \to \infty$. Din teorema 3 rezultă că A este compact. □

Se consideră (în $\mathbb{K}$) ecuaţia

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\, x(s)\, ds, t \in [a,b], \tag{2.21}$$

unde $\lambda \in \mathbb{K}, f \in L^2(a,b;\mathbb{K}), k \in L^2(Q,\mathbb{K}), Q = (a,b) \times (a,b)$. Conform teoremei 8, ecuaţia 2.21 are o soluţie unică în $L^2(a,b;\mathbb{K})$ cu condiţia ca $|\lambda|$ sa fie suficient de mic. Mai precis, asta se întamplă dacă

$$|\lambda| \cdot \|k\|_{L^2(Q;\mathbb{K})} < 1. \tag{2.22}$$

Vom arăta în cele ce urmează că există soluţii pentru ecuaţia 2.21 chiar dacă λ nu satisfice condiţia 2.22.

Folosind notaţia de mai sus putem scrie ecuaţia 2.21 ca o ecuaţie abstractă în $H = L^2(a, b; \mathbb{K})$, şi anume

$$x = f + \lambda Ax. \tag{2.23}$$

Reţinem faptul că A^*, adjunctul lui A, este dat de

$$(A^* h)(t) = \int_a^b \overline{k(s,t)} \cdot h(s)\, ds \forall h \in H.$$

şi de asemenea, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

Conform lemei 4 şi teoremei 8, operatorul A are o mulţime numărabilă de valori proprii, 0 fiind singurul punct de acumulare posibil; în plus, pentru orice valoare proprie $\nu \neq 0$ a lui A, $\dim N(I - \lambda A) > \infty$, unde $\lambda = \frac{1}{\nu}$. Desigur, afirmaţii similare sunt valabile pentru A^*, în special $\dim N\left(I - \overline{\lambda} A^*\right) < \infty$. De fapt, putem demonstra că, dacă $\nu \neq 0$ este o valoare proprie a lui A, atunci

$$\dim N(I - \lambda A) = \dim N\left(I - \overline{\lambda} A^*\right), \text{ unde } \lambda = \frac{1}{\nu}. \tag{2.24}$$

În primul rând, reţinem faptul că $\overline{\nu}$ este o valoare proprie a lui A^* (conform teoremei 7), deci $\dim N\left(I - \overline{\lambda} A^*\right) \geq 1$.

Fie $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m\}$ şi $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n\}$ bazele ortonomale în $N(I - \lambda A)$ şi respectiv $N\left(I - \overline{\lambda} A^*\right)$. Presupunem prin absurd că $m < n$. Fie B operatorul asociat cu nucleul

$$K(t,s) = k(t,s) - \sum_{j=1}^{m} \overline{\phi_j(s)} \cdot \psi_j(t)$$

şi fie $\phi, \psi \in H$ soluţiile ecuaţiilor

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \lambda (B\phi)(t) \\ &= \lambda \int_a^b k(t,s)\, \phi(s)\, ds - \lambda \sum_{j=1}^{m} \psi_j(t) \int_a^b \overline{\phi_j(s)} \cdot \phi(s)\, ds, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \overline{\lambda} (B^* \psi)(t) \\ &= \overline{\lambda} \int_a^b \overline{k(s,t)} \psi(s)\, ds - \overline{\lambda} \sum_{j=1}^{m} \phi_j(t) \int_a^b \overline{\psi_j(s)} \cdot \psi(s)\, ds. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Înmulţind ecuaţia 2.25 cu $\overline{\psi_k}(t)$ şi apoi integrând pe $[a, b]$ ecuaţia rezultată ne conduce la

$$(\phi, \psi_k)_{L^2} = \int_a^b \underbrace{\left[\lambda \int_a^b k(t,s) \cdot \overline{\psi_k(t)} dt\right]}_{\psi_k(s)} \phi(s)\, ds - \lambda (\phi, \phi_k)_{L^2} = (\phi, \psi_k)_{L^2} - \lambda (\phi, \phi_k)_{L^2}$$

prin urmare

$$(\phi, \phi_k)_{L^2} = 0, k = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.27}$$

Din 2.25 şi 2.27 deducem faptul că $\phi \in N(I - \lambda A)$. Astfel $\phi = \sum_{i=1}^{m} c_i \phi_i$, cu $c_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \cdots, m$. Acest lucru, combinat cu 2.27 ne conduce la $\phi = 0$, prin urmare ecuaţia 2.25) are doar soluţia nulă.

Pe de altă parte, ecuaţia 2.26 este satisfacută de ψ_k pentru orice $k \in \{m+1, \cdots, n\}$.

Într-adevar, deoarece $(\psi_k, \psi_j)_{L^2} = 0$ pentru $j \in \{1, \cdots, m\}$, $k \in \{m+1, \cdots, n\}$, ecuaţia 2.26 cu $\psi = \psi_k, k = m+1, \cdots, n$ poate fi scrisă ca $\psi_k = \overline{\lambda} A^* \psi_k, k = m+1, \cdots, n$. Acest lucru înseamnă că $N\left(I - \overline{\lambda} B^*\right) = N\left(I - (\lambda B)^*\right) \neq \{0\}$, în timp ce $N(I - \lambda B) = \{0\}$, ceea ce contrazice teorema 7. Prin urmare, $m \geq n$.

Inegalitatea inversă rezultă din faptul că $\left(\overline{\lambda} A^*\right)^* = \lambda A$, deci demonstraţia lui 2.24 este completă.

Observăm că în cazul ecuaţiei 2.21 alternativa lui Fredholm (vezi observaţia 6) are următoarea formă:

Teoremă 18. ***(Alternativa lui Fredholm)*** *Presupunem că* $\lambda \in \mathbb{K}, f \in H = L^2(a, b; \mathbb{K}), k \in L^2(Q; \mathbb{K})$, *unde* $Q = (a, b) \times (a, b)$ *şi fie* $A : H \to H$ *operatorul definit de*

$$(Ag)(t) = \int_a^b k(t, s)\, g(s)\, ds, \forall g \in H, t \in (a, b).$$

Atunci are loc una din următoarele afirmaţii:

- $N(I - \lambda A) = \{0\}$ *(dacă şi numai dacă* $N\left(I - \overline{\lambda} A^*\right) = \{0\}$*) şi în acest caz ecuaţia*

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)\, x(s)\, ds, t \in [a, b] \tag{F}$$

  are o soluţie unică pentru orice $f \in H$,

- $\dim N(I - \lambda A) = \dim N\left(I - \overline{\lambda} A^*\right) = m$, *cu* $1 \leq m \leq \infty$ *şi în acest caz ecuaţia F are soluţie dacă şi numai dacă*

$$(f, \psi)_{L^2} = \int_a^b f(t) \cdot \overline{\psi(t)} dt = 0, \forall \psi \in \ker\left(I - \overline{\lambda} A^*\right),$$

  (echivalent, $(f, \psi)_{L^2} = 0, k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, *unde* ψ_k *formează o bază ortonomală în* $N\left(I - \overline{\lambda} A^*\right)$*).*

Observaţie 11. *Deoarece mulţimea* $S = \{\lambda \in \mathbb{K}; N(I - \lambda A) = \{0\}\}$ *este numarabilă, rezultă din teorema 18 că există "multe"* λ *–uri care nu îndeplinesc condiţia 2.22, dar pentru care ecuaţia F are o (unică) soluţie pentru orice* $f \in H = L^2(a, b; \mathbb{K})$. *Chiar şi pentru* $\lambda \in S$ *ecuaţia F poate fi rezolvată dacă şi numai dacă* $f \perp N\left(I - \overline{\lambda} A^*\right)$.

Cazul nucleelor hermitiene: formula lui Schmidt

Pe lângă condiţiile

$$f \in H = L^2(a,b;\mathbb{K}), k \in L^2(Q;\mathbb{K}), Q = (a,b) \times (a,b),$$

pe care le-am utilizat anterior, să presupunem că nucleul k este hermitian, adică,

$$k(t,s) = \overline{k(s,t)}, \forall (t,s) \in Q.$$

În mod evident, $A = A^*$. Conform propoziţiei 8.5, fiecare valoare proprie a lui A este reală.

În continuare, încercăm să folosim teorema Hilbert-Schmidt pentru a investiga ecuaţia Fredholm în forma sa abstractă 2.23, adică,

$$x = f + \lambda A x. \tag{A}$$

De fapt, în cele ce urmează, în ecuaţia A, operatorul A poate să fie orice operator linear, simetric, compact, definit pe un spaţiu Hilbert separabil, $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$, cu valori în el însuşi şi $f \in H$.

Ca un prim pas, să presupunem că $N(A) = \{0\}$, adică zero nu este valoare proprie a lui A. Astfel, Teormea Hilbert – Schimidt (teorema 9) se poate aplica lui A (vezi lema 4). Notăm cu $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ valorile proprii ale lui A date de această teoremă şi cu $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ vectorii proprii corespunzători, adică $Au_n = \lambda_n u_n, n = 1, 2 \cdots$.

Conform demonstraţiei teoremei Hilbert-ScHmidt, fiecare valoare proprie este luată în considerare de k-ori, unde k înseamnă multiplicitatea sa (dimensiunea spaţiului propriu corespunzător). Sistemul $\{u_n\}_{n\geq 1}$ este o bază ortonomată în H.

Pentru $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ distingem două cazuri

(i) $N(I - \lambda A) = \{0\}$, adică $\frac{1}{\lambda}$ nu este o valoare proprie a lui A;

(ii) $N(I - \lambda A) \neq \{0\}$, adică $\frac{1}{\lambda}$ este o valoare proprie a lui A.

Să discutăm mai întâi cazul (i).

Din observaţia 6, ecuaţia 2.23 are o soluţie unică x pentru orice $f \in H$. Din formula 1.22 din demonstraţia teoremei 9 (Teorema Hilbert – Schmidt) avem

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, u_n) u_n. \tag{2.28}$$

Pe de altă parte, folosind ecuaţia 2.23 şi faptul că A este simetric, obţinem

$$(x, u_n) = (f, u_n) + \lambda\lambda_n (x, u_n), n = 1, 2, \cdots,$$

de unde

$$(x, u_n) = \frac{1}{1 - \lambda\lambda_n} (f, u_n), n = 1, 2, \cdots \tag{2.29}$$

Acum, din 2.23), 2.28 şi 2.29 putem deduce următoarea formulă pentru soluţia x a ecuaţiei 2.23 (cunoscută ca formula lui Schmidt)

$$x = f + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{1 - \lambda\lambda_n} (f, u_n) u_n. \tag{2.30}$$

Acum, să discutăm cazul (ii), adică $\frac{1}{\lambda}$ este o valoare proprie a operatorului A; evident, $\frac{1}{\lambda} = \lambda_k$ pentru un $k \in \mathbb{N}$, deci formula 2.30 nu are sens în acest caz.

Notăm $H_0 := N(I - \lambda A) = N(\lambda_k I - A,) \, H_1 := H_0^{\perp}$, ca urmare $H = H_0 \oplus H_1$. Din teorema 8.4, H_0 este de dimensiune finită. Notăm cu $m := \dim H_0 \in \mathbb{N}$. Fie $B_0 = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ o bază a lui H_0. Cum H este un spaţiu separabil, la fel este şi H_1.

Ţinând cont de faptul că A este simetric, se vede cu usurinţă că A duce H_1 în H_1. În mod clar, restricţia $A_1 = A|_{H_1}$ este simetrică şi $A_1 \in K(H_1)$, adică A_1 este compact în H_1 care este un subspaţiu Hilbert al lui H cu acelaşi $(\cdot, \cdot)$ şi $\|\cdot\|$. Evident, $N(A_1) = \{0\}$ deci Teorema Hilbert-Schmidt se poate aplica lui H_1 şi A_1 şi arată existenţa unui şir de valori proprii (reale) ale lui A_1 (deci ale lui A), care nu includ λ_k şi a unei baze ortonormale corespunzatoare în H_1, cu

$$A_1 u_n = A u_n = \lambda_n u_n, n \in \mathbb{N}, n \neq k.$$

Conform analizei anterioare corespunzătoare cazului (i), ecuaţia 2.23 are o soluţie (unică) $x = x_1$ în H_1 (adică, $x_1 - \lambda A_1 x_1 = f$) dacă şi numai dacă $f \in H_1$ şi

$$x_1 = f + \lambda \sum_{\lambda_n \neq \lambda_k} \frac{\lambda_n}{1 - \lambda\lambda_n} (f, u_n) u_n.$$

Dacă luăm în considerare 2.23 în H, atunci $f \in H_1$ şi pentru orice $y \in H_0$,

$$x = f + \lambda \sum_{\lambda_n \neq \lambda_k} \frac{\lambda_n}{1 - \lambda\lambda_n} (f, u_n) u_n + y$$

este o soluţie a ecuaţiei 2.23. În consecinţă, formula

$$x = f + \lambda \sum_{\lambda_n \neq \lambda_k} \frac{\lambda_n}{1 - \lambda\lambda_n} (f, u_n) u_n + \sum_{i=1}^{m} c_i v_i, \tag{2.31}$$

cu $c_1, ..., c_m \in \mathbb{K}$ ne oferă toate soluţiile ecuaţiei 2.23.

Acum ne îndreptăm atenţia asupra cazului în care $N(A) \neq \{0\}$.

Notând $Y_0 = N(A)$ şi $Y_1 = Y_0^{\perp}$, putem scrie $H = Y_0 \oplus Y_1$. Putem presupune că Y_0 este un subspaţiu propriu al lui H, în caz contrar avem $A = 0$ care este un caz trivial. Este uşor de observat că A duce Y_1 în Y_1. Evident, Y_1 este un subspaţiu Hilbert al lui H faţă de aceeleaşi $(\cdot, \cdot)$ şi $\|\cdot\|$, iar restricţia $\tilde{A} = A|_{Y_1}$ este simetrică, compactă şi $N\left(\tilde{A}\right) = \{0\}$. Dacă Y_1 este infinit dimensional, atunci putem aplica teorema Hilbert – Schmidt lui Y_1 şi $\tilde{A}$. Pentru a rezolva ecuaţia 2.23 folosim descompunerea $x = x_0 + x_1, f = f_0 + f_1$, unde $x_0, f_0 \in Y_0$ şi $x_1, f_1 \in Y_1$. Astfel 2.23 devine

$$x_0 - f_0 = -x_1 + f_1 + \lambda A x_1,$$

prin urmare ambele părţi sunt egale cu 0, deci $x_0 = f_0$ şi

$$x_1 = f_1 + \lambda \tilde{A} x_1. \tag{2.32}$$

În mod clar, pentru fiecare $f \in H, f = f_0 + f_1, x$ este soluţie unică e ecuaţiei 2.23 dacă şi numai dacă $x = f_0 + x_1$, unde $x_1 \in Y_1$ satisfice ecuaţia 2.32.

Merită subliniat faptul că ecuaţia 2.32 , cu $\tilde{A} : Y_1 \to Y_1, N\left(\tilde{A}\right) = \{0\}$, se află în situaţia pe care am avut-o mai înainte, deci se poate discuta în mod similar despre rezolvarea ecuaţiei 2.32 folosind vectorii proprii ai lui $\tilde{A}$ (adică vectorii proprii ai lui A corespunzători la valori proprii nenule).

Dacă Y_1 este finit dimensional, atunci ecuţia 2.32 se reduce la un sistem algebraic linear care poate fi rezolvat folosind calcule algebrice elementare.

Exemplu 1. *Fie $H = L^2(-\pi, \pi)$ cu produsul scalar şi norma uzuale. Luăm în cosiderare baza ortonormală obişnuită în H, adică*

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, u_{2k-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt),$$

$$u_{2k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt), k = 1, 2, \cdots$$

Pentru un $m \in \mathbb{N}$ dat, definim

$$k(t,s) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} u_n(t) u_n(s), (t,s) \in Q = (-\pi, \pi) \times -(-\pi, \pi).$$

În mod clar, $k \in C\left(\bar{Q}\right) \subset L^2(Q)$.

Dacă A este operatorul definit de 2.20, unde $a = -\pi, b = \pi$, cu acest nucleu (care este simetric, deci hermitian), atunci $Ag = 0$ pentru orice g care este o combinaţie liniară de $u_0, u_1, \cdots, u_{m-1}$. Prin urmare

$$Span\{u_0, u_1, \cdots, u_{m-1}\} \subset N(A).$$

Pe de altă parte, dacă $Af = 0$, unde f este un element din H, adică $f = \sum_{k=0}^{\infty} (f, u_k)_{L^2} u_k$ (care este dezvoltarea în serie Fourier a lui f) atunci

$$\begin{aligned} 0 &= (Af, f)_{L^2} \\ &= \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} (f, u_n)_{L^2} u_n, \sum_{k=0}^{\infty} (f, u_k)_{L^2} u_k \right)_{L^2} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} (f, u_n)_{L^2}^2, \end{aligned}$$

prin urmare $(f, u_n)_{L^2} = 0$ *pentru orice* $n \geq m$ *şi deci* $f = \sum_{k=0}^{m-1} (f, u_k)_{L^2} u_k$*, adică* $f \in \ Span\{u_0, u_2, \cdots, u_{m-1}\}$*, Prin urmare,*

$$N(A) = \ Span\{u_0, u_2, \cdots, u_{m-1}.\}$$

Pe de altă parte, dacă alegem, de exemplu,

$$k(t, s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} u_n(t) u_n(s), (t, s) \in Q,$$

atunci operatorul corespunzător A satisface condiţia $N(A) = \{0\}$.

Comentarii

▷ Dacă în ecuatţia

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) x(s) \ ds, t \in [a, b],$$

(care este 2.21 de mai sus) presupunem $f \in C[a, b]$ şi $k \in C([a, b] \times [a, b])$, atunci $x \in C[a, b]$. În plus, dacă f si k sunt mai regulate, atunci şi x este.

▷ Teoria de mai sus funcţioneaza şi dacă $[a, b]$ este înlocuit cu un domeniu mărginit $D \subset \mathbb{R}^N$ sau cu frontiera unui astfel de domeniu. Este bine cunoscut faptul că principalele probleme la limită de tip eliptic (Dirichlet, Neumann, Robin) pot fi reduse, prin utilizarea potenţialilor, la ecuaţii Fredholm în domeniile corespuzătoare. Astfel, teoria de mai sus poate fi folosită pentru a rezolva astfel de probleme.

Capitolul 3

Aplicaţii

Problema 1. *Calculaţi nucleul rezolvent al ecuaţiei Volterra şi apoi găsiţi soluţia corespunzătoare:*

$$x(t) = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2-s^2} x(s)\ ds, t \geq 0.$$

Demonstraţie: Reamintim că pentru un nucleu dat

$$k = k(t,s) \in C(\Delta), \Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}; a \leq s \leq t \leq b\},$$

nucleul resolvent $R(t,s)$ este definit de

$$R(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t,s), (t,s) \in \Delta,$$

unde

$$\begin{aligned} k_1(t,s) &= k(t,s), \\ k_n(t,s) &= \int_s^t k(t,\tau) k_{n-1}(\tau,s) d\tau, (t,s) \in \Delta, n = 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

Reţinem faptul că intervalul $[a,b]$ ar putea fi inlocuit cu $[a,\infty)$ dacă ecuaţia Volerra corespunzătoare este considerată $[a,\infty)$.

Evident, $k_1(t,s) = e^{t^2-s^2},\ 0 < s < t$, de unde

$$k_2(t,s) = \int_s^t e^{t^2-\tau^2} e^{\tau^2-s^2}\, d\tau = (t-s)e^{t^2-s^2},\ 0 < s < t,$$

$$k_3(t,s) = \int_s^t e^{t^2-\tau^2} e^{\tau^2-s^2} (\tau - s)\, d\tau = \frac{(t-s)^2}{2!} e^{t^2-s^2},\ 0 < s < t.$$

Prin inducţie obţinem că

$$k_n(t,s) = \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{t^2-s^2},\ 0 < s < t,\ n = 2, 3, \cdots .$$

Astfel găsim

$$R\,(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t,s) = e^{t^2-s^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{t^2-s^2+t-s},$$

de unde

$$x\,(t) = e^{t^2} + \int_0^t R(t,s) e^{s^2}\, ds = e^{t(t+1)}, t \geq 0.$$

Alternativ, notând $y\,(t) = e^{-t^2} x\,(t)$, ecuaţia dată poate fi scrisă astfel

$$y\,(t) = 1 + \int_0^t y\,(s)\, ds, t \geq 0$$

care prin derivare devine echivalentă cu problema Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială

$$\begin{cases} y'\,(t) = y\,(t)\,, t \geq 0, \\ \quad y\,(0) = 1, \end{cases}$$

deci obţinem din nou soluţia x.

□

Problema 2. *Rezolvaţi următoarele ecuaţii integrale transformându-le în probleme Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale:*

(a) $x(t) = t - \frac{t^3}{6} + \int_0^t (t - s + 1)\, x\,(s)\ ds, t \geq 0;$

(b) $x\,(t) = t^3 + 1 - \int_0^t (t-s)\, x\,(s)\ ds, t \geq 0;$

(c) $x\,(t) = 3t - \int_0^t e^{t-s} x\,(s)\ ds, t \geq 0.$

Demonstraţie: (a) Dacă x este o soluţie a ecuaţiei integralei date, prin derivare avem că $x(0)=0$ şi

$$x'(t)=a-\frac{t^2}{2}+x(t)+\int_0^t x(s)\,ds, t\geq 0.$$

Prin urmare $x'(0)=1$ şi derivând încă o dată

$$x''=x'(t)+x(t)-t.$$

Astfel am obţinut problema Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul doi liniară

$$\begin{cases} x''-x'(t)-x(t)=-t, t\geq 0 \\ x(0)=0, x'(0)=1. \end{cases}$$

Evident, dacă x este o soluţie a aceastei probleme, atunci x satisfice ecuaţia integrală dată.

Prin calcule găsim

$$x(t)=c_1e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\right)}+c_2e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}t\right)}+t-1,$$

cu

$$c_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}, c_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

(b) Procedând ca la punctul (a), derivând de două ori ecuaţia integrală, obţinem că Problema Cauchy echivalentă cu aceasta este

$$\begin{cases} x''(t)+x(t)=6t,\ t\geq 0 \\ x(0)=1, x'(0)=0. \end{cases}$$

Prin calcule simple găsim că soluţia acesteia, care coincide cu soluţia ecuaţiei integrale, este

$$x(t)=\cos t-6\sin t+6t,\ t\geq 0.$$

(c) Dacă x este o soluţie, atunci $x(0)=0$. Prin derivarea ecuaţiei integrale date, găsim

$$x'(t)=3-x(t)-\underbrace{\int_0^t e^{t-s}x(s)\ ds}_{3t-x(t)}, t\geq 0,$$

deci x verifică problema Cauchy

$$\begin{cases} x'(t)=3-3t, t\geq 0 \\ x(0)=0 \end{cases}$$

care este echivalentă cu ecuaţia integrală dată şi are soluţia

$$x(t)=\frac{3}{2}t(2-t),\ t\geq 0.$$

□

Problema 3. *Rezolvaţi următoarele ecuaţii Volterra de speţa întâi:*

(a) $\int_0^t (1 - t^2 + s^2) \cdot x(s)\ ds = \frac{t^2}{2}, t \geq 0;$

(b) $\int_0^t \cos(t - s) \cdot x(s)\ ds = 2t(t + 1), t \geq 0.$

Demonstraţie: (a) Din ecuaţia integraă dată obşinem prin derivare

$$x(t) - 2t \int_0^t x(s)\ ds = t, t \geq 0$$

Evident $y(t) = \int_0^t x(s)\ ds$ satisfice problema Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - 2ty(t) = t, t \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

care are soluţia

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{t^2} - 1\right),\ t \geq 0\ \Rightarrow x(t) = y'(t) = te^{t^2},\ t \geq 0.$$

(b) Din ecuaţia integrală dată obţinem prin derivare

$$x(t) - \int_0^t \sin(t - s) \cdot x(s)\ ds = 2(2t + 1), t \geq 0$$

şi deci $x(0) = 2$. O altă derivare conduce la

$$x'(t) - \underbrace{\int_0^t \cos(t - s) \cdot x(s)\ ds}_{2t(t+1)} = 4, t \geq 0.$$

Deci am obţinut problema Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2(t^2 + t + 2), t \geq 0 \\ x(0) = 2, \end{cases}$$

care este echivalentă cu ecuaţia integrală dată şi are soluţia

$$x(t) = \frac{2}{3}t^3 + t^2 + 4t + 2,\ t \geq 0.$$

□

Problema 4. *Fie* $h \in C[0, b]$, *unde* $b \in (0, \infty)$. *Definim* $k(t, s) = h(t - s), 0 \leq s \leq t \leq b$. *Să se arate că nucleul rezolvent* $R(t, s)$ *asociat nucleului* $k(t, s)$ *depinde doar de* $t - s$.

Demonstraţie: $R(t,s)$ este o funcţie continuă pe mulţimea $\Delta_0 = \{(t,s);\ 0 \le s \le t \le b\}$, fiind definită ca

$$R(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t,s), (t,s) \in \Delta_0,$$

unde

$$\begin{aligned} k_1(t,s) &= k(t,s) = h(t-s) \\ k_n(t,s) &= \int_s^t k(t,\tau) k_{n-1}(\tau,s)\ d\tau \\ &= \int_s^t h(t-\tau) k_{n-1}(\tau,s)\ d\tau, (t,s) \in \Delta_0, n = 2,3,\cdots \end{aligned}$$

Deoarece k_1 depinde numai de $t-s$, putem observa cu uşurinţă (prin schimbarea de variabliă) că la fel se intâmplă şi pentru k_2. Prin inducţie rezultă că toate k_n – urile depind numai de $t-s$ şi rezultă că la fel se întâmplă şi cu R. $\square$

Problema 5. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *şi funcţiile ne-negative,* $f, x \in C[a,b], k \in C(\Delta,)$ *unde* $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}; a \le s \le t \le b\}$. *Dacă*

$$x(t) \le f(t) + \int_a^k k(t,s) x(s)\ ds, t \in [a,b]$$

atunci

$$x(t) \le f(t) + \int_a^k R(t,s) f(s)\ ds, t \in [a,b],$$

unde $R(t,s)$ *este nucleul rezolvent asociat cu* $k(t,s.)$

Demonstraţie: Putem arăta cu usurinţă prin inducţie faptul că $R(t,s) \ge 0, 0 \le s \le t \le b$. Apoi, deducem că

$$\phi(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s) x(s)\ ds - x(t) \ge 0, t \in [a,b].$$

Prin urmare,

$$x(t) = f(t) - \phi(t) + \int_a^t k(t,s) x(s)\ ds, t \in [a,b],$$

care implică,

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t) - \phi(t) + \int_a^t R(t,s)[f(s) - \phi(s)]\ ds \\ &= f(t) + \int_a^t R(t,s) f(s)\ ds - \underbrace{\left[\phi(t) + \int_a^t R(t,s)\phi(s)\ ds\right], t \in [a,b]}_{\ge 0}. \end{aligned}$$

De unde rezultă concluzia. $\square$

Problema 6. *Fie a,b* $\in (0,\infty)$. *Definim*

$$D = \{(t,s)\,; 0 \leq t \leq a, 0 \leq s \leq b\}\,,\ Q = \{(t,s,\xi,\eta)\,; 0 \leq \xi \leq t \leq a, 0 \leq \eta \leq s \leq b\}\,.$$

Se consideră ecuaţia integrală

$$x\,(t,s) = f\,(t,s) + \int_0^t \int_0^s k\,(t,s,\xi,\eta)\ d\xi d\eta, (t,s) \in D. \tag{E}$$

Presupunem că nucleul $k \in C\,(Q) := C\,(Q,\mathbb{R})$.

Să se arate că pentru orice $f \in C\,(D) := C\,(D,\mathbb{R})$ *există o unică funcţie* $x = x\,(t,s) \in C\,(D)$ *care satisfice ecuaţia E pentru orice* $(t,s) \in D$.

Demonstraţie: Folosim următoarea normă asemănătoare normei Bielecki în $X = C\,(D)$:

$$\|g\|_B = \sup_{(t,s)\in Q} e^{-M(t+s)}\,|g\,(t,s)|\,, g \in X,$$

unde M este o constantă pozitivă suficient de mare. Definim operatorul P pe X dat de

$$(Pg)\,(t,s) = f\,(t,s) + \int_0^t \int_0^s k\,(t,s,\xi,\eta)\,g\,(\xi,\eta)\ d\eta\, d\xi, (t,s) \in D, g \in X.$$

În mod clar, P duce X în X şi pentru $g_1, g_2 \in X$ şi $(t,s) \in D$ avem

$$\begin{aligned}
|(Pg_1)\,(t,s) - (Pg_2)\,(t,s)| &\leq C \int_0^t \int_0^s |g_1\,(\xi,\eta) - g_2\,(\xi,\eta)|\ d\eta\, d\xi \\
&= C \int_0^t \int_0^s e^{+M(\eta+\xi)} e^{-M(\eta+\xi)}\,|g_1\,(\xi,\eta) - g_2\,(\xi,\eta)|\ d\eta\, d\xi \\
&\leq C\,\|g_1 - g_2\|_B \int_0^t \int_0^s e^{M(\eta+\xi)}\ d\eta\, d\xi \\
&= \frac{C}{M^2}\,\|g_1 - g_2\|_B \left(e^{Mt} - 1\right)\left(e^{Ms} - 1\right),
\end{aligned}$$

unde $C = \sup\limits_{(t,s,\xi,\eta)\in Q} |k\,(t,s,\xi,\eta)| < \infty$. Rezultă că

$$\begin{aligned}
e^{-M(t+s)}\,|(Pg_1)\,(t,s) - (Pg_2)\,(t,s)| &\leq \frac{C}{M^2}\,\|g_1 - g_2\|_B \left(1 - e^{-Mt}\right)\left(1 - e^{-Ms}\right) \\
&\leq \frac{C}{M^2}\,\|g_1 - g_2\|_B\,,
\end{aligned}$$

pentru orice $(t,s) \in D, g_1, g_2 \in X$. Prin urmare

$$\|Pg_1 - Pg_2\|_B \leq \frac{C}{M^2}\,\|g_1 - g_2\|_B\,, g_1, g_2 \in X,$$

deci P este o contracţie pe $(X, \|\cdot\|_B)$ pentru $M^2 > C$. Prin urmare, conform principiului contracţiilor al lui Banach, P are un punct fix unic $x = x\,(t,s) \in X$ care este soluţia unică a ecuaţiei E. □

Problema 7. *Se consideră problema*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) + \int_0^t k(t,s)\, x(s)\ ds, t \in (0,T), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

unde $x_0 \in \mathbb{R}, T \in (0,\infty), f \in L^1(0,T), k \in C(\Delta)$ *si* $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq s \leq t \leq T\}$.

Arătaţi că există o funcţie unică $x \in W^{1,1}(0,T)$ *care satisfice ecuaţia integro-diferenţială de mai sus pentru orice* $t \in (0,T)$ *şi condiţia iniţială* $x(0) = x_0$.

Demonstraţie: Problema dată este echivalentă cu următoarea ecuaţie integrală în $X = C[0,T]$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s)\ ds + \int_0^t \left(\int_0^s k(s,\tau)\, x(\tau)\ d\tau \right) ds, t \in [0,T]. \tag{*}$$

Definim $P : X \to X$ prin

$$(Pg)(t) = x_0 + \int_0^t f(s)\ ds + \int_0^t \left(\int_0^s k(s,\tau)\, g(\tau)\ d\tau \right) ds, t \in [0,T], g \in X.$$

Se poate arăta printr-o abordare cu punct fix faptul că P are un unic punct fix $x \in X$ care este soluţia unică a ecuaţiei * şi deci a problemei date. □

Problema 8. *Rezolvaţi următoarele ecuaţii integrale, unde* λ *este un parametru real:*

(a) $x(t) = \cos t + \lambda \int_0^{\pi} \sin(t-s) \cdot x(s)\ ds$;

(b) $x(t) = t + \lambda \int_0^{2\pi} |\pi - s| \sin t \cdot x(s)\ ds$;

(c) $x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 (1 - 3ts) \cdot x(s)\ ds, f \in L^2(0,1)$.

Demonstraţie: (a) Ecuaţia poate fi scrisă ca

$$x(t) = \cos t + \lambda c_1 \sin t + \lambda c_2 \cos t, \tag{*}$$

cu

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos s \cdot x(s)\ ds,\quad c_2 = -\int_0^{\pi} \sin s \cdot x(s)\ ds. \tag{**}$$

Dacă înlocuim * în **, obţinem următorul sistem algebraic în c_1, c_2:

$$\begin{cases} c_1 - \frac{\lambda\pi}{2} c_2 = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\lambda\pi}{2} c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Observăm faptul că, determinantul acestui sistem este $1 + (\lambda\pi)^2/4$, deci pozitiv pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, ca urmare există o unică soluţie (c_1, c_2) care ne dă soluţia ecuaţiei integrale date

$$x(t) = \frac{2(2\cos t + \lambda\pi \sin t)}{4 + \lambda^2\pi^2}.$$

(b) Avem $x(t) = t + \lambda c \sin t$, unde $c = \int_0^{2\pi} |\pi - s| \cdot x(s)\ ds$. Înlocuind $x(t)$ dat de prima relaţie în cea de a doua, rezultă

$$c = \int_0^{2\pi} |\pi - s| \cdot (s + \lambda c \sin s)\ ds \Leftrightarrow c(1 - 2\lambda\pi) = \pi^3.$$

Prin urmare dacă $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ ecuaţia integrală dată nu are soluţie. Altfel, ecuaţia are soluţia

$$x(t) = t + \frac{\lambda\pi^3}{1 - 2\lambda\pi} \sin t.$$

(c) Avem

$$x(t) = f(t) + \lambda c_1 - 3\lambda c_2 t, \tag{*}$$

unde

$$c_1 = \int_0^t x(s)\ ds,\ c_2 = \int_0^t s x(s)\ ds.$$

Astfel obţinem sistemul

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 [f(s) + \lambda c_1 - 3\lambda c_2 s]\ ds, \\ c_2 = \int_0^1 s[f(s) + \lambda c_1 - 3\lambda c_2 s]\ ds, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} (1-\lambda) c_1 + \frac{3}{2}\lambda c_2 = \int_0^1 f(s)\ ds, \\ -\frac{1}{2} c_1 + (1+\lambda) c_2 = \int_0^1 s f(s)\, ds. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem algebric este $\Delta = \frac{4-\lambda^2}{4}$.

Deci, pentru fiecare $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$, c_1, c_2 pot fi determinate în mod unic şi soluţia ecuaţiei integrale poate fi exprimată explicit folosind formula *.

Dacă $\lambda = -2$ sistemul algebric de mai sus are soluţii dacă şi numai dacă

$$\int_0^1 f(s)\ ds = 3\int_0^1 sf(s)\ ds \tag{**}$$

şi în acest caz, există o infinitate de soluţii ale ecuaţiei integrale date, şi anume ,

$$x(t) = f(t) + 2c_1(3t-1) - 2t\int_0^1 f(s)\ ds, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Un exemplu de funcţie care satisfice condiţia ** de mai sus este $f(t) = t - 1$.

Dacă condiţia ** nu este îndeplinită, atunci ecuaţia integrală dată nu are soluţie.

Dacă $\lambda = +2$ condiţia de compatibilitate pentru sistemul algebric de mai sus este

$$\int_0^1 f(s)\ ds = \int_0^1 sf(s)\ ds.$$

Dacă această condiţie este îndeplinită (de exemplu, pentru $f(3t) = t - 1$), avem din nou o infinitate de soluţii pentru ecuaţia integrală dată, de forma

$$x(t) = f(t) + 2c_1(1-t) - 2t\int_0^1 f(s)\ ds, c_1 \in \mathbb{R}.$$

În caz contrar, ecuaţia integrală dată nu are soluţie. □

Problema 9. *Se consideră în $\mathbb{K}$ următoarea ecuaţie Fredholm cu nucleu degenerat (separabil):*

$$x(t) = f(t) + \lambda\int_a^b \underbrace{\left[\sum_{i=1}^n a_i(t)\, b_i(s)\right]}_{k(t,s)} x(s)\ ds, \tag{F}$$

unde $\lambda \in \mathbb{K}, f, a_i, b_i \in L^2(a,b;\mathbb{K}), i = 1,2,\cdots,n$. Presupunem, fără a restrânge generalitatea că sistemele $\{a_1,\cdots,a_n\}, \{b_1,\cdots,b_n\}$ sunt linear independente. Obţinem

$$c_i = \int_a^b b_i(s)\, x(s)\ ds, i = 1,\cdots,n, \tag{1}$$

şi din F deducem că

$$x(t) = f(t) + \lambda\sum_{i=1}^n c_i a_i(t). \tag{2}$$

Introducând 2 în 1 obţinem sistemul algebric

$$c_i = f_i + \lambda\sum_{k=1}^n k_{ij}c_j,\ i = 1,\cdots,n, \tag{3}$$

unde

$$f_i = \int_a^b b_i(s)\, f(s)\, ds,\ k_{ij} = \int_a^b b_i(s)\, a_j(s)\, ds, i, i = 1,\cdots,n.$$

Arătaţi că alternativa lui Fredholm pentru ecuaţia F poate fi exprimată ca o alternativă echivalentă pentru sistemul algebric 3.

Demonstraţie: Notăm

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, K = (k_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Deci 3 poate fi scrisă ca:

$$(I - \lambda K) c = g. \tag{3 '}$$

Există o corespondenţă bijectivă între mulţimea soluţiilor ecuaţiei F şi mulţimea soluţiilor sistemului 3 '.

Următoarea alternativă pentru ecuaţia 3 ' este bine cunoscută:

1. dacă $\det (I - \lambda K) \neq 0$, atunci există o soluţie unică a sistemului 3 ' dată de ,

   $$c = (I - \lambda K)^{-1} g$$

   care dă soluţia lui F prin intermedul relaţiei 2;

2. în caz contrar, $det (I - \lambda K) = 0$ şi ecuaţia 3 ' are soluţii dacă şi numai dacă g este perpendiculară pe $N \left(I - \overline{\lambda} K^*\right) = N \left(I - \overline{\lambda K}^T\right)$, astfel ecuaţia F are o infinitate de soluţii,

   $$x (t) = x_p (t) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i (t),$$

   unde x_p este o soluţie particulară a lui F, $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ şi $x_1, \cdots, x_m$ sunt soluţii liniar independente ale ecuaţiei integrale omogene (care pot fi calculate explicit).

□

Problema 10. *Fie* $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$ *un spaţiu Hilbert şi* $\{e_1, \cdots, e_m\} \subset H$ *un sistem ortonormat, unde* m *este un număr natural dat.*

Definim $A : H \to H$ *prin*

$$Ax = \sum_{k=1}^{m} k (x, e_k) e_k, x \in H.$$

Rezolvaţi ecuaţia abstractă de tip Fredholm

$$x = f + \lambda Ax,$$

unde $f \in H$ *şi* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Demonstraţie: Dacă $\lambda = 0$ atunci există o unică soluţie a ecuaţiei, $x = f$.

Presupunem $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Notăm $H_m = Span (\{e_1, \cdots, e_m\})$. Operatorul A este simetric (deci are toate valorile proprii numere reale), $R(A) = H_m$ şi $N(A) = H_m^{\perp}$. Observăm că valorle proprii ale lui A sunt $\mu_k = k, k = 1, ..., m$, cu $e_1, ..., e_m$ ca vectori proprii corespunzători.

Distingem două cazuri:

1. **1.** Cazul 1. $\dim H = m$, deci $H = H_m$. Ecuaţia Fredholm dată se reduce la un sistem algebric
$$(I - \lambda A)\, x = f. \tag{1}$$
Dacă $\lambda \in \mathbb{K} - \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{m}\right\}$, atunci 1 are soluţie unică
$$x - \sum_{k=1}^{m} \frac{(f, e_k)}{1 - \lambda k} e_k.$$
Dacă $\lambda = \frac{1}{j}$ pentru un $j \in \{1, \cdots, m\}$, atunci sistemul 1 are soluţie dacă şi numai dacă $(f, e_j) = 0$. În această situaţie, există o infinitate de soluţii x cu coordonatele $x_k = \frac{j(f,e_k)}{j-k}, k \neq j$ şi $x_j \in \mathbb{K}$ este arbitrar.

2. **2.** Cazul 2. $\dim H > m$. Desigur, $H = H_m \oplus H_m^{\perp}$, cu $H_m^{\perp} \neq \{0\}$. Căutăm x de forma $x = x_1 + x_2, x_1 \in H_m, x_2 \in H_m^{\perp}$. Folosind o descompunere similară pentru f, adică $f = f_1 + f_2, f_1 \in H_m, f_2 \in H_m^{\perp}$, deducem din 1 că $x_2 = f_2$ şi $(I - \lambda A)\, x_1 = f_1$. Folosind aceeaşi discuţie ca mai înainte, găsim x_1, atunci când există, deci concluzionăm că $x = x_1 + f_2$.

$\square$

Problema 11. *Se consideră funcţiile*
$$u_n(t) = \sqrt{2} \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t\right), t \in [0, 1], n = 0, 1, 2, \cdots$$
Este bine cunoscut faptul că sistemul $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ este o bază ortonormată în $H = L^2(0,1)$ înzestrat cu produsul scalar uzual şi norma indusă de acesta. Definim nucleul $k(t,s)$ prin
$$k(t,s) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} u_n(t)\, u_n(s), t, s \in [0,1],$$
unde $m \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ şi operatorul integral $A : H \to H$,
$$(Ag)(t) = \int_0^1 k(t,s)\, g(s)\, ds, g \in H.$$
Discutaţi existenţa soluţiilor ecuaţiei Fredholm
$$x = f + \lambda A x, f \in H, \lambda \in \mathbb{R},$$
în două cazuri: $m = 0$ şi $m \geq 1$.

Demonstraţie: Din M-testul lui Weierstrass, avem

$$k \in C\left(\overline{Q}\right) \subset L^2\left(Q\right), Q = (0,1) \times (0,1).$$

Evident, A este auto-adjunct şi compact.

Cazul $m = 0$

În acest caz, $N(A) = \{0\}$. Într-adevăr, $Ag = 0$ implică

$$0 = (Ag, g)_{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1^2)} (g, u_n)_{L^2}^2,$$

prin urmare,

$$(g, u_n)_{L^2} = 0, \forall n \in \{0, 1, 2, \cdots\} \Rightarrow g = 0,$$

deoarece sistemul $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ este o bază în $H = L^2(0,1)$.

Pentru a determina perechile proprii ale lui A luăm in considerare ecuaţia

$$Ag = \mu g$$

care poate fi scrisă ca

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g, u_n)_{L^2}}{(n+1)^2} u_n = \mu \sum_{n=0}^{\infty} (g, u_n)_{L^2} u_n,$$

unde am folosit dezvoltarea în serie Fourier a lui g.

Deoarece $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ este o bază în H , avem

$$\left(\mu - \frac{1}{(n+1)^2}\right)(g, u_n)_{L^2} = 0, n = 0, 1, 2, \cdots (*)$$

Dacă $\mu \neq \frac{1}{(n+1)^2}$ pentru orice $n \in \{0, 1, 2, \cdots,\}$ avem

$$(g, u_n)_{L^2} = 0, \forall n \in \{0, 1, 2, \cdots\} \Rightarrow g = 0,$$

prin urmare, astfel de μ -uri nu sunt valori proprii ale lui A.

Pentru $\mu = \mu_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ avem din *

$$(g, u_k)_{L^2} = 0, \forall k \in \mathbb{N}, k \neq n,$$

deci funcţiile proprii corespunzatoare lui $\mu = \mu_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ sunt multipli diferiţi de zero ai lui u_n.

Conform formulei lui Schmidt pe care o avem pentru $\lambda \in \mathbb{R} - \{1, 2^2, 3^2 \cdots\}$ şi pentru $t \in (0,1)$,

$$x(t) = f(t) + 2\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^1 f(s)\ cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi s\right)\ ds}{(k+1)^2 - \lambda} \times \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi t\right) +$$

$$+\alpha \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t\right), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Cazul $m \geq 1$

În acest caz $Y_0 := N(A) = Span(\{u_0, u_1, \cdots, u_{m-1}\})$ şi $H = Y_0 \oplus Y_1$, unde $Y_1 = N(A)^{\perp} = Span(\{u_m, u_{m+1}, \cdots\})$. Notăm cu A_1 restricţia lui A la Y_1 care este un spaţiu Hilbert în raport cu produsul scalar şi norma lui $H = L^2(0,1)$. Evident, A_1 îl duce Y_1 în Y_1, e compact, autoadjunct, cu $N(A_1) = \{0\}$ şi cu valori proprii $\mu_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ şi funcţii proprii $u_n, n \geq m+1$. De fapt, Y_1 şi A_1 joacă rolurile lui H şi A pe care le-am văzut inainte.

Ecuaţia

$$x = f + \lambda A x$$

poate fi scrisă ca

$$x_0 + x_1 = f_0 + f_1 + \lambda A x_1,$$

unde $x_0, f_0 \in Y_0$ şi $x_1, f_1 \in Y_1$, deci $x_0 = f_0$ şi

$$x_1 = f_1 + \lambda A_1 x_1, \tag{**}$$

Pe baza argumentelor de mai sus, avem

1. Dacă $\lambda \neq (n+1)^2$ pentru orice $n \geq m$ atunci

$$\begin{aligned} x(t) &= f_0(t) + x_1(t) \\ &= f(t) + 2\lambda \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\int_0^1 f_{1(s)}\, cos\left(\frac{k+1}{2}\right)\pi s\, ds}{(k+1)^2 - \lambda} \times cos\left(\frac{k+1}{2}\pi t\right), \end{aligned}$$

şi

2. Dacă $\lambda = (n+1)^2$, pentru un $n \geq m$, atunci ecuaţia Fredholm ** are soluţii dacă şi numai dacă $f_1 \perp u_n \Leftrightarrow f \perp u_n$ iar în acest caz

$$\begin{aligned} x(t) = {} & f(t) + (2n+1)^2 \\ & \times \sum_{k \geq m, k \neq n} \frac{\int_0^1 f_1(s)\ cos\left(\frac{k+1}{2}\right)\pi s\, ds}{(k+1)^2 - \lambda} \\ & \times\ cos\left(\frac{k+1}{2}\ \pi t\right) + \alpha \cos\left(\frac{n+1}{2}\pi t\right), \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\square$

Concluzii

În cadrul acestei lucrări au fost prezentate ecuaţiile integrale Volterra si fredholm.

Primul capitol a cuprins definiţii şi teoreme pe care, le-am folosit în cadrul lucrării. Printre acestea regăsim, Teorema de existenţă a lui Peano, Principiul contracţiilor Banach , care este o abstractizare a metodei aproximaţiilor succesive, metodă utilizată în mod empiric încă din antichitate pentru rezolvarea ecuaţiilor numerice. Teorema lui Fredholm, care ne spune că, dacă avem un spaţiu Hilbert $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ şi $A \in K(H)$, ecuaţia $x - A^*x = f$ are soluţie dacă şi numai dacă $f \in \mathcal{N}^\perp$ unde $\mathcal{N} = N(I - A)$. De asemenea am abordat teorema Hilbert-Schmidt şi Criteriul Arzelà-Ascoli.

Cel de al doilea capitol, cuprinde o prezentare a ecuaţiilor integrale Volterra , de primul şi de al doilea tip, şi anume:

$$f(t) = \int_a^t k(t,s)\,x(s)\,ds, a \leq t \leq b$$

şi

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)\,x(s)\,ds, a \leq t \leq b,$$

unde

$$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C[a,b] := C([a,b];\mathbb{R}), k \in C(\Delta) := C(\Delta;\mathbb{R})$$

(numit nucleu), cu $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2; a \leq s \leq t \leq b\}$; $x = x(t)$ reprezintă funcţia necunoscută care aparţine spaţiul $C[a,b]$ si ecuaţiile integrale Fredholm

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds, t \in [a,b],$$

unde $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C([a,b];\mathbb{K})$ şi $k \in C([a,b] \times [a,b];\mathbb{K})$.

Cel de al patrulea capitol, a cuprins ecuaţii Volterra şi Fredholm, dar şi probleme Cauchy.

Referinţe bibliografice

[1] Gheorghe Morosanu. Functional analysis for the applied sciences. *Universitext*.

[2] E. Kreyszig. Introductory functional analysis with applications. *John Wiley, Hoboken*, 1978.

[3] P. Pavel G. Micula. Ecuatii diferentiale si integrale prin probleme si exercitii,. *Editura Dacia*, 1989.

[4] G. Morosanu. Functional analysis for the applied sciences. *Springer International Publishing*, 2019.

[5] C. Mortici S. Sburlan, L. Barbu. Ecuaţii diferenţiale, integrale şi sisteme dinamice. *Editura Exponto, Constanţa*, 1999.

[6] G. E. Șilov. Analiză matematică. *Ed. Științifică și Enciclopedică, București*, 1989.