



Ministerul Educației  
Universitatea "OVIDIUS" Constanța  
Facultatea de Matematică și Informatică  
Specializarea Informatică

## Licență

Coordonator științific:  
Cosma Luminița

Student:  
Tănase Ramona Elena

Constanța  
2021

---

---

# Cuprins

---

---

<b>Cuprins</b>	<b>1</b>
<b>1 Ecuatii Integrale</b>	<b>2</b>
1.1 Ecuatii Volterra . . . . .	2
1.1.1 Teorema . . . . .	2
1.1.2 Demonstratie . . . . .	3
1.1.3 Demonstratie . . . . .	4
1.1.4 Demonstratie . . . . .	4
1.1.5 Teorema . . . . .	7
1.1.6 Teorema . . . . .	7
1.1.7 Demonstratie . . . . .	8
1.1.8 Teorema . . . . .	8
1.1.9 Teorema . . . . .	9
1.1.10 Comentarii . . . . .	10
1.2 Ecuatii Fredholm . . . . .	10
1.2.1 Teorema . . . . .	11
<b>Referințe bibliografice</b>	<b>12</b>

---

---

# Capitolul 1

---

---

## Ecuatii Integrale

Acest capitol este o introducere la teoria ecuatiilor liniare Volterra si Fresholm. Sunt abordate si unele aspect legate de anumite extensii neliniare.

### 1.1 Ecuatii Volterra

Incepem cu ecuatii scalare si liniare Volterra. Exista doua tipuri de astfel de ecuatii care sunt cele mai relevante pentru aplicatii, si anume

$$f(t) = \int_a^t k(t, s) x(s) ds, a \leq t \leq b \quad (1.1.1)$$

si

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s) x(s) ds, a \leq t \leq b \quad (1.1.2)$$

unde  $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C[a, b] := C([a, b]; \mathbb{R}), k \in C(\Delta) := C(\Delta; \mathbb{R})$  (numit nucleu), cu  $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; a \leq s \leq t \leq b\}$ ; si  $x = x(t)$  denota functia necunoscuta care se cauta in spatiul  $C[a, b]$ . Ecuatia (1.1.1) este cunoscuta ca prima ecuatie Volterra, in timp ce ecuatia (1.1.2) este cunoscuta ca cea de-a doua ecuatie Volterra. In cele ce urmeaza vom examina ecuatia (1.1.2). Vom arata mai tarziu ca ecuatia (1.1.1) se reduce la (1.1.2) in conditii adecvate.

#### 1.1.1 Teorema

Existenta si Unicitatea

In conditiile de mai sus exista o solutie unica  $x \in C \in [a, b]$  la ecuatia (1.1.2). Vom prezenta mai jos trei demonstratii diferite.

## 1.1.2 Demonstratie

Notam  $K = \sup_{(t,s) \in \Delta} |k(t,s)|$  care este finite deoarece  $\Delta$  este un subset compact al lui  $\mathbb{R}^2$ . Presupunem intr-o prima etapa ca  $K(b-a) < 1$ . (1.1.3) Se considera  $X = C[a, b]$  echipat cu sup-norma obisnuita  $\|g\| = \sup_{a \leq t \leq b} |g(t)|$ , si metrica corespunzatoare,  $d(g_1, g_2) = \|g_1 - g_2\|$ . Definim  $T : X \rightarrow X$  prin

$$(Tg)(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)g(s)ds, t \in [a, b], g \in X. (1.1.4)$$

Este clar din (1.1.4) ca  $T$  mapeaza  $X$ . Avem

$$\begin{aligned} |(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| &= \left| \int_a^t k(t,s)[g_1(s) - g_2(s)]ds \right| \leq \\ &\leq \int_a^t |k(t,s)| \cdot |g_1(s) - g_2(s)|ds \leq K(b-a)\|g_1 - g_2\| \end{aligned}$$

pentru orice  $g_1, g_2 \in X$ , si orice  $t \in [a, b]$ . Prin urmare

$$d(Tg_1, Tg_2) \leq K(b-a)d(g_1, g_2),$$

adica  $T$  este o contractie (conform (1.1.3)).

Conform Principiului Contractiei Banach (cap 2),  $T$  are un punct fix unic  $x \in X$  care este clar Solutia unica a cuatiei (1.1.2). Daca conditia (1.1.3) nu este indeplinita, atunci consideram o subdiviziunea a intervalului  $[a, b]$ , de exemplu  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$ , unde  $t_j = a + jh$  pentru  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $h = \frac{(b-a)}{N}$ , cu  $N$  suficient de mare incat  $Kh < 1$ . In special,  $K(t_1 - t_0) = Kh < 1$ , deci de mai sus rezulta ca (1.1.2) are o solutie unica  $x_1 = x_1(t)$  pe intervalul  $[t_0, t_1] = [a, t_1]$ , adica,

$$x_1(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)x_1(s)ds, t \in [a, t_1].$$

Fie ecuatia

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f(t) + \int_a^t k(t,s)x_1(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} k(t,s)x_2(s)ds + \int_{t_2}^t k(t,s)x_3(s)ds, t \in [t_1, t_2], \\ f(t) + \int_a^t k(t,s)x_1(s)ds &=: f_1(t) \in C[t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Deoarece  $K(t_2 - t_1) = Kh < 1$ , rezulta din argumentul de mai sus ca aceasta ecuatie are o solutie unica  $x_2 \in C[t_1, t_2]$  si, evident,  $x_2(t_1) = x_1(t_1)$ . In mod similar, exista o functie unica  $x_3 \in C[t_2, t_3]$  care satisface urmatoarea ecuatie, pentru orice  $t \in [t_2, t_3]$ ,

$$x_3(t) = f(t) + \int_a^{t_1} k(t,s)x_1(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} k(t,s)x_2(s)ds + \int_{t_2}^t k(t,s)x_3(s)ds,$$

si  $x_3(t_2) = x_2(t_2)$ . Continuand aceasta procedura obtinem o solutie  $x \in C[t_0, t_N] = C[a, b]$  a ecuatiei (1.1.2) definite de  $x(t) = x_j(t)$  pentru  $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Solutia  $x$  este evident unica.

### 1.1.3 Demonstratie

Din nou, luam in considerare operatorul  $T$  este definit de ecuatia (1.1.4), unde  $X$  este acelasi ca mai sus. Se vede usor ca

$$|(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| \leq K \|g_1 - g_2\| (t - a), \forall t \in [a, b], g_1, g_2 \in X.$$

In consecinta, pentru  $T^2 = T \circ T$  obtinem

$$\begin{aligned} |(T^2g_1)(t) - (T^2g_2)(t)| &\leq \int_a^t |k(t, s)| \cdot |(Tg_1)(s) - (Tg_2)(s)| ds \leq \\ &\leq K^2 \|g_1 - g_2\| \int_a^t (s - a) ds = \frac{K^2 (t - a)^2}{2!} \|g_1 - g_2\|. \end{aligned}$$

Se poate demonstra prin inductie faptul ca:

$$|(T^k g_1)(t) - (T^k g_2)(t)| \leq \frac{K^k (t - a)^k}{k!} \|g_1 - g_2\| \leq \frac{K^k (b - a)^k}{k!} \|g_1 - g_2\|.$$

pentru orice  $t \in [a, b], g_1, g_2 \in X, k = 1, 2, \dots$ . Acum luam supremul pentru a gasi

$$d(T^k g_1, T^k g_2) \leq \frac{K^k (b - a)^k}{k!} \|g_1 - g_2\|, \forall g_1, g_2 \in X, k = 1, 2, \dots (1.1.5)$$

Cum  $K^k (b - a)^{\frac{k}{k!}} \rightarrow \infty$ , deoarece  $k \rightarrow \infty, T^k$  este o contractie pentru  $k$  suficient de mare (conform 1.1.5). Conform remarcii 2,  $T$  are un punct fix unic  $x \in X$ , care este solutia unica a lui (1.1.2).

### 1.1.4 Demonstratie

Fie  $T$  acelasi operator ca mai ianinte, dar luam in considerer o alta norma pe  $X = C[a, b]$ , norma /bielecki, care este definite de  $\|g\|_B = \sup e^{-Lt} |g(t)|$ . cu  $L$  o constanta pozitiva astfel incat  $\frac{K}{L} < 1$ . Aceasta este intr-adevar o norma pe  $X$ , care este echivalenta cu norma obisnuita. Notam cu  $d_B$ , metrica generata de  $\|\cdot\|_B$ . Avem pentru orice  $t \in [a, b]$  si  $g_1, g_2 \in X$

$$\begin{aligned} |(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| &\leq \int_a^t |k(t, s)| e^{Ls} e^{-Ls} |g_1(s) - g_2(s)| ds \leq \\ &\leq K \|g_1 - g_2\|_B \int_a^t e^{Ls} ds = \frac{K \|g_1 - g_2\|_B}{L} (e^{Lt} - e^{La}), \end{aligned}$$

astfel incat

$$e^{-Lt} |(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| \leq \frac{K}{L} \|g_1 - g_2\|_B (1 - e^{-L(t-a)}) \leq \frac{K}{L} \|g_1 - g_2\|_B.$$

Acum luam supremul pentru  $t \in [a, b]$  pentru a gasi  $d_B(Tg_1, Tg_2) \leq \frac{K}{L} d_B(g_1, g_2)$ ,  $\forall g_1, g_2 \in X$ . Cum  $\frac{K}{L} < 1$ ,  $T$  este o contractie in raport cu  $d_B$ , prin urmare concluzia teoremei urmeaza din nou Principiul contradictiei Banach. Sa presupunem ca sunt indeplinite conditiile de mai sus pentru  $f$  si  $k$ . Pentru  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in [a, b]$ , vom avea

$$x_n(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s) x_{n-1}(s) ds, x_0(t) = f(t).$$

In mod clar,  $x_n \in X = C[a, b]$  pentru orice  $n$ . De fapt, secventa de mai sus  $(x_n)_{n \geq 0}$  poate fi exprimata ca

$$x_n = Tx_{n-1}, n \in \mathbb{N}; x_0 = f,$$

unde  $T : X \rightarrow X$  este operatorul definit de (1.1.4). Deci,  $(x_n)$  este secventa de aproximari successive (asociate operatorului  $T$ ) care a fost folosita in demonstrarea Principiului Contradictiei Banach (Capitolul 2). Aici luam in considerare o anumita functie de pornire,  $x_0 = f$ . Din demonstratia Principiului Contradictiei Banach stim ca  $(x_n)$  converge in  $(C[a, b], \|\cdot\|_B)$  catre punctul sau fix unic  $T$ , adica  $(x_n)$  converge uniform in  $[a, b]$  la Solutia unica  $x$  a ecuatiei (1.1.2). Pe de alta parte, avem pentru orice  $t \in [a, b]$

$$x_1(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s) f(s) ds,$$

$$x_2(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s) \left[ f(s) + \int_a^s k(s, \tau) f(\tau) d\tau \right] ds$$

$$= f(t) + \int_a^t k(t, s) f(s) ds + \int_a^t \int_a^s k(t, s) k(s, \tau) f(\tau) d\tau ds.$$

Putem schimba integrarea pentru a afla ca ultima integral este egala cu

$$\int_a^t \left[ \int_\tau^t k(t, \tau) k(s, \tau) ds \right] f(\tau) d\tau,$$

Deci prin simpla reetichetare  $\tau$  si  $s$  avem

$$\int_a^t \left[ \int_s^t k(t, \tau) k(\tau, s) d\tau \right] f(s) ds$$

si au un nucleu nou,  $k_2$ . In general, daca notam pentru  $n=2, 3, \dots$

$$k_n(t, s) := \int_s^t k(t, \tau) k_{n-1}(\tau, s) d\tau,$$

$$k_1(t, s) := k(t, s),$$

avem, pentru  $n = 1, 2, \dots$

$$x_n(t) = f(t) + \int_a^t \left[ \sum_{j=1}^n k_j(t, s) \right] f(s) ds. \quad (1.1.6)$$

Deoarece  $k$  este continuu pe multimea compacta  $\Delta$ , avem pentru orice  $(t, s) \in \Delta$ ,

$$|k_1(t, s)| \leq K < \infty, |k_2(t, s)| \leq K^2(t-s), |k_3(t, s)| \leq K^3 \int_s^t |\tau-s| d\tau = K^3 \frac{(t-s)^2}{2!},$$

$$\vdots |k_n(t, s)| \leq K^n \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \leq K^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Prin M-testul Weierstrass, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, s)$ , converge clar uniform pe  $\Delta$  deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (b-a)^{n-1}}{(n-1)!} < \infty.$$

Inseamna  $R(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, s)$ , care este în  $X(\Delta)$ . Având  $n \rightarrow \infty$  în (1.1.6) deduce faptul ca

$$x(t) = f(t) + \int_a^t R(t, s) f(s) ds, t \in [a, b]. \quad (1.1.7)$$

Numim  $R(t, s)$  nucleul rezolutiv. Acesta depinde de  $k$  dar este independent fata de  $f$ , astfel incat odata ce gasim  $R(t, s)$ , avem Solutia (1.1.2) pentru orice  $f$  (conform 1.1.7). Observam faptul ca

$$\sum_{n=2}^{N+1} k_n(t, s) = \int_s^t k(t, \tau) \sum_{n=2}^{N+1} k_{n-1}(\tau, s) d\tau,$$

ceea ce implica

$$-k(t, s) + \sum_{n=1}^{N+1} k_n(t, s) = \int_s^t k(t, \tau) \sum_{n=1}^N k_n(\tau, s) d\tau.$$

Luand  $n \rightarrow \infty$  vom constata ca  $R$  satisface

$$R(t, s) = k(t, s) + \int_s^t k(t, \tau) R(\tau, s) d\tau, \forall (t, s) \in \Delta,$$

care este o ecuatie Volterra similara cu (1.1.2). Acum sa examinam ecuatia (1.1.1). Presupunem ca

$$f \in C^1[a, b], \text{ si } k, \frac{\partial k}{\partial t} \in C(\Delta), k(t, t) \neq 0 \text{ pentru orice } t \in [a, b]. (H)$$

Presupunem de asemenea ca  $f(a) = 0$  care este o conditie necesara pentru (1.1.1) pentru a avea o solutie. Daca (1.1.1) are o solutie  $x \in C[a, b]$ , atunci diferentierea (1.1.1) ne da

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \int_a^t k(t, s) x(s) ds \quad (1.1.8) \\ &= k(t, t) x(t) + \int_a^t k_t(t, s) x(s) ds, t \in [a, b], \end{aligned}$$

care este echivalenta cu urmatara ecuatie integrala de grasul al doilea,

$$x(t) = \frac{f'(t)}{k(t, t)} + \int_a^t \left[ \frac{-k_t(t, s)}{k(t, t)} \right] x(s) ds. \quad (1.1.9)$$

Deci  $x$  este, de asemenea, o solutie a ecuatiei (1.1.9). Pe de alta parte, stim din teorema anterioara faptul ca (1.1.9) are o solutie unica  $x \in C[a, b]$ . Acest  $x$ , este de asemenea, o solutie a ecuatiei (1.1.1). Aceasta urmeaza prin integrarea lui (1.1.8) peste  $[a, t]$  si folosind conditia  $f(a) = 0$ . Astfel am demonstrat urmatorul rezultat.

## 1.1.5 Teorema

In conditiile (H) de mai sus, plus  $f(a) = 0$ , ecuatia (1.1.1) are o solutie unica  $x \in C[a, b]$ . Continuum cu ecuatia neliniara Volterra

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s, x(s)) ds, t \in [a, b], \quad (1.1.10)$$

si demonstram urmatorul rezultat general.

## 1.1.6 Teorema

Presupunem ca  $f \in C[a, b]$ ,  $k \in C(D)$ , unde

$$D := \Delta \times \mathbb{R} = \{(t, s, v) \in \mathbb{R}^3; a \leq s \leq t \leq b, v \in \mathbb{R}\},$$

si exista un  $K > 0$  astfel incat

$$|k(t, s, v) - k(t, s, w)| \leq K |v - w| \quad \forall a \leq s \leq t \leq b; v, w \in \mathbb{R}. \quad (1.1.11)$$

Atunci exista o functie unica  $x \in C[a, b]$  care satisface ecuatia (1.1.10) in  $[a, b]$ .



### 1.1.7 Demonstratie

Fie  $X = C[a, b]$  echipat cu norma Bielecki si definim  $T : X \rightarrow X$  prin

$$(Tg)(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, g(s)) ds, \forall t \in [a, b], g \in X.$$

Concluzia este urmata de Principiului Contradictiei Banach in mod similar, ca in Demonstratia 3, a teoremei 1. Teorema 1.3 ofera o solutie globala in sensul ca intervalul de existenta este intregul interval  $[a, b]$ . In mod evident, aceasta este o generalizare a Teoremei 1.1. Intr-adevar, pentru a obtine Teorema 1.1 este suficient sa presupunem ca  $k$  este linear in a treia variabila, adica  $k := k(t, s, v)$ ,  $a \leq s \leq t \leq b$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , cu  $k \in C(\Delta)$  astfel incat conditia Lipschitz (1.1.11) este satisfacuta automat. Acum sa examinam un caz in care Solutia rezultata este doar una locala, adica domeniul sau poate sa nu fie intregul interval  $[a, b]$ .

### 1.1.8 Teorema

Sa presupunem ca  $f \in C[a, b]$ ,  $k = k(t, s, v) \in C(D)$ , unde  $D := \Delta \times [x_0 - c, x_0 + c] = \{(t, s, v) \in \mathbb{R}^3; a \leq s \leq t \leq b, |v - x_0| \leq c\}$ , cu  $x_0 \in \mathbb{R}$  si  $c \in (0, \infty)$ . Daca in plus, exista  $K > 0$  astfel incat

$$|k(t, s, v) - k(t, s, w)| \leq K |v - w| \forall (t, s, v), (t, s, w) \in D, \quad (1.1.12)$$

iar pentru unii  $d \in [0, c]$

$$|f(t) - x_0| \leq d, \forall t \in [a, b], \quad (1.1.13)$$

atunci exista o functie unica  $x \in C[a, a + \delta]$  care satisface ecuatia (1.1.10) in  $[a, a + \delta]$ , unde

$$\delta = \min \left\{ b - a, \frac{(c - d)}{M} \right\}, M = \sup \{|k(t, s, v)|; (t, s, v) \in D\}.$$

(Se presupune ca  $M$  este pozitiv deoarece cazul  $M = 0$  este trivial)

**Demonstrație 1.** Se considera spatiul  $C[a, a + \delta]$  cu sup-norma obisnuita si metrica  $d$  generate de aceasta. Indica

$$Y = \{g \in C[a, a + \delta]; |g(t) - x_0| \leq c, \forall t \in [a, a + \delta]\}.$$

In mod clar  $(Y, d)$  este un spatiu metric complet (deoarece  $Y$  este o submultime inchisa a  $(C[a, a + \delta], d)$ ). Ca de obicei, definim un operator  $T$  prin

$$(Tg)(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s, g(s)) ds, t \in [a, a + \delta], g \in Y.$$

Sa aratam ca  $Y$  o sa fie inclus in  $T$ . Intr-adevar, pentru toate  $g \in Y$  si  $t \in [a, a + \delta]$  vom avea (vezi (1.1.13)).

$$|(Tg)(t) - x_0| \leq |f(t) - x_0| + \int_a^t |k(t, s, g(s))| ds \leq d + M(t - a) \leq d + M\delta \leq c,$$

ceea ce dovedeste afirmatia. Prin argumente similar cu cele utilizate in Demonstratia 2 a Teoremei 11.1 deducem ca  $T^k$  este o contractie pe  $(Y, d)$  pentru  $k$  suficient de mare. Deci  $T$  are un punct fix unic  $x \in Y$  care este Solutia unica a ecuatiei (1.1.10) in  $[a, a + \delta]$ . Un alt rezultat de existent si unicitate se obtine daca  $k$  este definit pe un domeniu diferit,  $\tilde{D} = \{(t, s, v) \in \mathbb{R}^3; a \leq s \leq t \leq b, |v - f(s)| \leq c\}$ ,  $c \in (0, \infty)$ , care este o submultime compacta a lui  $\mathbb{R}^3$ . Urmatorul rezultat face acest lucru precis.

## 1.1.9 Teorema

Presupunem ca  $f \in C[a, b]$  si  $k = k(t, s, v) \in C(\tilde{D})$ , cu  $M = \sup_{\tilde{D}} |k| > 0$ . Daca, in plus, exista un  $K > 0$  astfel incat

$$|k(t, s, v) - k(t, s, w)| \leq K |v - w|, \forall (t, s, v) \in \tilde{D}, \quad (1.1.14)$$

atunci exista o functie unica  $x \in C[a, a + \delta]$  care satisface ecuatie (1.1.10) in  $[a, a + \delta]$ , unde  $\delta = \min \{b - a, \frac{c}{M}\}$ .

**Demonstrație 2.** Dovada este similara cu cea din Teorema 1.4 de mai sus. Aici domeniul operatorului  $T$  este ales convenabil

$$\tilde{Y} = \{g \in C[a, a + \delta]; |g(t) - f(t)| \leq c, \forall t \in [a, a + \delta]\},$$

care este bila inchisa in  $(C[a, a + \delta], d)$  centrata la  $f$  (restransa la  $[a, a + \delta]$  de raza  $c$ ). In mod evident,  $T$  este bine definit pe  $\tilde{Y}$  si  $\tilde{Y}$  inclus in el. De asemenea, se vede cu usurinta ca  $T^k$  este o contractie pentru un  $k \in \mathbb{N}$  suficient de mare. Aceasta completeaza demonstratia (vezi remarca 1).

### 1.1.10 Comentarii

1. Daca in Teorema 1.4 presupunem  $d = 0$  (adica,  $f \equiv x_0$ ) si  $k$  este independent de  $t$ , adica  $k(t, s, v) = h(s, v)$ , atunci obtinem din nou o existenta binecunoscut si rezultat de unicitate pentru problema Cauchy

$$x'(t) = h(t, x(t)), x(a) = x_0.$$

Vezi partea introductiva a Sect 2.5 . Acelasi rezultat poate sa fie derivate din Teorema 1.5.

2. Daca toate conditiile Teoremei 1.4 sunt indeplinite, cu exceptia conditiei Lipschitz (1.1.12) , atunci existenta locala ramane valabila, dar fara unicitate. Intr-adevar,  $k = k(t, s, v)$  poate fi aproximat uniform pe  $D$  printr-o succesiune de functii netede (deci Lipschitzian, chiar si in toate variabilele), sa spunem  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Pentru a obtine o astfel de secventa putem folosi, de exemplu, molificarea lui Friedrichs cu  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ . (Vezi Cap 5) De fapt, printr-un rezultat classic,  $k = k(t, s, v)$  poate fi chiar aproximat prin olinoame in  $t, s, v$ . conform Teoremei 1.4, pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  exista o functie unica  $x_n$  care satisface ecuatia

$$x_n(t) = f(t) + \int_a^t k_n(t, s, x_n(s)) ds, \forall t \in [a, a + \delta], (1.1.15)$$

unde  $\delta = \min \left\{ b - a, \frac{(c-d)}{\hat{M}} \right\}$ , cu  $\hat{M}$  fiind cea mai mica limita superioara a  $\{ \sup_D |k_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$ , de exemplu,  $\hat{M} = \sup_{(t,s,v) \in D, n \in \mathbb{N}} |k_n(t, s, v)|$ , ( care este finit deoarece  $k_n \rightarrow k$  uniform in  $D$ ). Desigur,  $\hat{\delta}$  este mai mic decat  $\delta$  dat de Teorema 1.4. Se vede usor ca  $(x_n)$  indeplineste conditiile Criteriul Arzelà-Ascoli (Vezi Capitolul 2), deci exista o subsecventa  $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  care converge uniform pe  $[a, a + \delta]$  la o functie  $x \in C[a, a + \delta]$ . Luand  $j \rightarrow \infty$  in (1.1.15) cu  $n := n_j$ , deduce ca  $x$  satisface Ecuatia (1.1.10) in  $[a, a + \delta]$ . Remarci similar sunt valabile pentru Teorma 1.5.

3. Problemele calitative, precum continuitatea solutiilor locale, existent pe semiaxa  $[a, \infty]$  , comportamentul solutiilor la sfarsitul intervalelor de existent, sunt evitate aici.
4. Toate observatiile de mai sus se aplica ecuatiilor Volterra liniare si neliniare din  $\mathbb{R}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , cu usoare modificari evidente.

## 1.2 Ecuatii Fredholm

In cele ce urmeaza  $\mathbb{K}$  este fie  $\mathbb{R}$ , fie  $\mathbb{C}$ . Consideram in  $\mathbb{K}$  ecuatia integrala  $x(t) = f(t) + \int_a^b k(t, s) x(s) ds, t \in [a, b]$ , (1.2.16) unde  $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C([a, b]; \mathbb{K})$  si  $k \in C([a, b] \times [a, b]; \mathbb{K})$ . Aici preferam  $\mathbb{K}$  in loc de  $\mathbb{R}$ , deoarece unele aspect specific sunt mai bine descrise in acest cadru. Ecuatia (1.2.16) ste cunoscuta ca ecuatia Fredholm (uneori este numita a doua ecuatie a lui Fredholm). Ea implica un interval fix de integrare si este fundamental diferita de Ecuatia (1.1.2). O prima remarca care confirma aceasta afirmaie este

ca, în timp ce ecuația Volterra corespunzătoare (a doua ecuație) are întotdeauna o soluție (unică, continuă) în  $[a, b]$ , Ecuația (1.2.16) poate să nu aibă soluție în unele cazuri. De exemplu, presupunând că există o soluție  $x \in C[0, 1] := C([0, 1]; \mathbb{R})$  a ecuației (9 pg 41)

$$x(t) = t + \int_0^1 k(t, s)x(s)ds, t \in [0, 1], (1.2.17)$$

unde

$$\begin{cases} \pi^2(s)(1-t), & s \leq t \\ \pi^2 t(1-s), & t \leq s \end{cases}$$

rezultă prin derivarea ecuației (1.2.17) de două ori faptul că  $x$  ar trebui să satisfacă problema

$$\begin{cases} x''(t) + \pi^2 x(t) = 0, & t \in [0, 1] \\ x(0) = 0, x(1) = 1. \end{cases}$$

Pe de altă parte, se vede ușor că de fapt această problemă nu are nicio soluție. Prin urmare Ecuația (1.2.17) nu are soluție. Merita totuși subliniat, faptul că, în baza ipotezelor de mai sus, Ecuația (1.2.16) are o soluție unică în  $C[a, b]$  ori de câte ori sup-norma lui  $|k|$  este suficient de mică, mai precis, dacă  $(b-a) \sup_{[a,b] \times [a,b]} |k| < 1$ . Acest rezultat urmează cu ușurință Principiul Contractiei Banach. De fapt, problema existenței poate fi discutată în spațiul  $L^2(a, b; \mathbb{K})$ , care este un cadru mai larg. Mai exact, să presupunem  $f \in L^2(a, b; \mathbb{K})$ ,  $k \in L^2(Q; \mathbb{K})$ , unde  $Q = (a, b) \times (a, b)$ .

Soluția  $x$  a Ecuației (1.2.16) va fi căutată în  $L_2(a, b; \mathbb{K})$  care este un spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar obișnuit și norma,

$$\langle g_1, g_2 \rangle_{L^2} = \int_a^b g_1(t) \cdot \overline{g_2(t)} dt, \|g\|_{L^2}^2 = \langle g, g \rangle.$$

Desigur, dacă găsim o soluție  $x \in L^2(a, b; \mathbb{K})$  a ecuației (1.2.16) cu  $f \in C([a, b]; \mathbb{K})$ ,  $k \in C([a, b] \times [a, b]; \mathbb{K})$ , atunci evident  $x \in C([a, b]; \mathbb{K})$ . Avem următorul rezultat.

## 1.2.1 Teorema

Dacă  $f \in L^2(a, b; \mathbb{K})$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ ,  $k \in L^2(Q; \mathbb{K})$  și  $\int_Q |k(t, s)|^2 dt ds < 1$ , unde  $Q = (a, b) \times (a, b)$  atunci există o funcție unică  $x \in L^2(a, b; \mathbb{K})$  care satisface ecuația

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t, s)x(s)ds,$$

aproape peste tot în  $(a, b)$ .

---

---

## **Referințe bibliografice**

---

---