



Ministerul Educației  
Universitatea "OVIDIUS" Constanța  
Facultatea de Matematică și Informatică  
Specializarea Informatică

## Lucrare de Licență

Coordonator științific:  
Cosma Luminița

Student:  
Tănase Ramona Elena

Constanța  
2022



Ministerul Educației  
Universitatea "OVIDIUS" Constanța  
Facultatea de Matematică și Informatică  
Specializarea Informatică

# Ecuatii integrale de tip Volterra și Fredholm

Coordonator științific:  
Cosma Luminița

Student:  
Tănase Ramona Elena

Constanța  
2022

---

---

# Cuprins

---

---

<b>Cuprins</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Introducere</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminarii</b>	<b>4</b>
1.1 Principiul contracțiilor al lui Banach . . . . .	4
1.2 Operatori liniari și compacți . . . . .	7
1.3 Teorema lui Fredholm . . . . .	7
1.4 Teorema Hilbert - Schmidt . . . . .	11
1.5 Alte rezultate . . . . .	17
<b>2 Ecuații Integrale</b>	<b>19</b>
2.1 Ecuații Volterra . . . . .	19
2.2 Ecuații de tip Fredholm . . . . .	27
<b>3 Aplicații</b>	<b>37</b>
<b>Concluzii</b>	<b>50</b>
<b>Referințe bibliografice</b>	<b>51</b>

---

---

# Abstract

---

---

Această lucrare este dedicată studiului a două dintre cele mai importante clase de ecuații integrale, mai exact, ecuațiile Volterra de prima și de a doua speță și ecuațiile integrale de tip Fredholm de speța a doua.

Ecuațiile integrale sunt strâns legate de multe arii ale matematicii. Primele dintre acestea ar fi ecuațiile diferențiale și teoria operatorilor. Multe probleme din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare sau cu derivate parțiale pot fi scrise echivalent sub forma unor ecuații integrale. În particular, rezultate de existență și unicitate pentru acestea pot fi astfel obținute din rezultatele corespunzătoare pentru ecuații integrale.

Principiul Contrațiilor (al lui Banach), Teorema Hilbert-Schmidt și Alternativa lui Fredholm sunt instrumentele teoretice fundamentale pe care le-am utilizat pentru a obține rezultate importante privind existența (sau nonexistența) și unicitatea soluțiilor ecuațiilor integrale de tip Volterra și Fredholm. În plus, în a doua parte a lucrării am dat câteva aplicații ale rezultatelor teoretice prezentate în prima parte.

This work is dedicated to the study of two important classes of integral equations, namely Volterra and second kind Fredholm integral equations.

Integral equations have applications in many areas of mathematics. Foremost among these are differential equations and operator theory. Many problems in the fields of ordinary and partial differential equations can be rewritten as integral equations. In particular, existence and uniqueness results can then be derived from the corresponding results from integral equations.

The Banach Contraction Principle, Hilbert-Schmidt Theorem and Fredholm Alternative are the fundamental tools that we used in order to obtain important results regarding the existence (or nonexistence) and uniqueness of the solutions of Volterra and Fredholm integral equations. In addition, in the second part of this work we give some applications of the theoretical results presented in the first part.

---

---

# Introducere

---

---

Teoria ecuațiilor integrale reprezintă un capitol important în matematica aplicată. Primele lucrări având ca tematică ecuațiile integrale au apărut în secolul al XIX-lea și la începutul secolului al XX-lea având ca autori matematicieni renumiți precum Niels Abel, Augustin Cauchy, Edouard Goursat, Maxime Bocher, David Hilbert, Vito Volterra, Ivar Fredholm, Emile Picard, Traian Lalescu.

Multe probleme din fizica matematică pot fi enunțate sub forma unor ecuații integrale. Este aproape imposibil să faci o listă cu toate aplicațiile acestora. Este suficient să spunem că nu există aproape nicio zonă a matematicii aplicate și a fizicii matematice în care ecuațiile integrale să nu apară. Este de asemenea bine cunoscut faptul că, teoria ecuațiilor diferențiale este strâns legată de cea a ecuațiilor integrale. Putem aminti aici celebrul rezultat de existență și unicitate locală a lui Picard pentru problema Cauchy asociată unui sistem de ecuații diferențiale ordinare a cărui demonstrație se obține scriind această problemă Cauchy ca o ecuație integrală. Astfel de exemple se regăsesc și în studiul ecuațiilor cu derivate parțiale. O altă arie a matematicii care se întrepătrunde cu studiul ecuațiilor integrale este și teoria operatorilor.

Această lucrare este dedicată studiului a două cele mai importante clase de ecuații integrale, mai exact, ecuațiile Volterra de prima și de a doua speță și ecuațiile integrale de tip Fredholm de speța a doua. Lucrarea este structurată în 3 capitole.

Primul capitol este unul introductiv în care sunt prezentate noțiunile și teoremele de bază ce vor fi aplicate pe parcursul celorlalte capitole și dintre care amintim principiul contracțiilor al lui Banach, operatorii liniari și compacți precum și teorema Hilbert Schmidt.

Al doilea capitol cuprinde rezultate teoretice privind existența și unicitatea soluțiilor ecuațiilor integrale de tip Volterra și Fredholm. Investigarea celor două tipuri de ecuații este diferită, necesitând abordări diferite. În cazul ecuațiilor de tip Volterra, limita superioară de integrare este variabilă, în timp ce în ecuațiile Fredholm, domeniul pe care se integrează este fix. Pentru ecuațiile de tip Volterra, am utilizat tehnica de punct fix (principiul contracțiilor al lui Banach), în timp ce pentru ecuațiile de tip Fredholm, instrumentele utilizate au fost Alternativa lui Fredholm și Teorema Hilbert-Schmidt. Printre cele mai importante aspecte

abordate, putem aminti: teorema de existență și unicitate a soluției pentru ecuațiile Volterra la care am prezentat trei demonstrații diferite, nucleul rezolvent și cazul nucleelor hermitiene. Precizăm că am studiat și cazul în care aceste ecuații integrale sunt neliniare.

Cel de al treilea capitol prezintă aplicații pentru ecuații Volterra și Fredholm. Am calculat nucleele rezolvente ale ecuațiilor Volterra, am găsit soluțiile unor ecuații particulare prin reducerea lor la ecuații diferențiale ordinare, am arătat că alternativa lui Fredholm pentru o ecuație de tip Fredholm cu nucleu degenerat poate fi exprimată ca o alternativă echivalentă pentru un sistem algebric. Am rezolvat de asemenea și două cazuri particulare de ecuații Fredholm abstracte.

---

---

# Capitolul 1

---

---

## Preliminarii

### Teorema de existență a lui Peano

**Teoremă 1.** Fie  $a, b \in (0, \infty)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  (pe  $\mathbb{R}^k$  vom considera norma  $\|v\| = \max_{1 \leq i \leq k} |v_i|$ .) Fie  $D$  mulțimea

$$D = \{(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k; |t - t_0| \leq a, \|v - x_0\| \leq b\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

și fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  o funcție continuă. Atunci, există o funcție derivabilă, cu derivata continuă  $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k$  care verifică ecuația diferențială

$$x'(t) = f(t, x(t)), \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \quad (1.1)$$

și condiția inițială

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

unde  $\delta = \min(a, \frac{b}{M})$  cu  $M = \sup\{\|f(t, v)\|; (t, v) \in D\}$ .  $M$  se presupune a fi un număr pozitiv, deoarece cazul  $M = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$  este trivial.

## 1.1 Principiul contracțiilor al lui Banach

Dacă au loc ipotezele teoremei de existență a lui Peano (teorema 1) plus condiția ca  $f$  să fie Lipschitz în raport cu  $x$ , atunci problema Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0 \quad (1.3)$$

are o soluție unică  $x \in C^1(I; \mathbb{R}^k)$ , unde  $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ , cu  $\delta$  așa cum este definită în teorema 1. Acest rezultat poate fi obținut și prin aplicarea Principiului contracțiilor al lui Banach. Înainte de a enunța acest principiu, să arătăm cum anume problema 1.3 poate fi redusă la o problemă de punct fix.

Problema 1.3 este echivalentă cu ecuația integrală

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (1.4)$$

Notăm  $X = \{v \in C(I, \mathbb{R}^k) ; \|v(t) - x_0\| \leq b, t \in I\}$ .

Această mulțime este un spațiu metric real din moment ce este o submulțime închisă a spațiului Banach  $C(I, \mathbb{R}^k)$  înzestrat cu norma sup, notat  $\|\cdot\|_C$ , care induce metrica  $d(u, v) = \|u - v\|_C$ .

Definim pe  $X$  operatorul  $T$  prin

$$(T_v)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds, \forall v \in X.$$

Preferăm notația  $T_v$  în loc de  $T(v)$ .

Se vede cu ușurință faptul că în ipotezele de mai sus  $T_v \in X$  pentru orice  $v \in X$  adică  $T : X \rightarrow X$ . Ecuația 1.4 poate fi scrisă simplu ca

$$x = Tx, \quad (1.5)$$

deci problema Cauchy de mai sus se reduce la rezolvarea ecuației 1.5 în  $X$ . Cu alte cuvinte, problema Cauchy 1.3 are o soluție unică  $x$  definită pe  $I$  dacă și numai dacă  $T$  are un punct unic fix  $x$ .

**Teoremă 2.** (Principiul contracțiilor al lui Banach) Fie  $(X, d)$  un spațiu metric complet. Presupunem că  $T : X \rightarrow X$  este o contracție, adică,  $\exists \alpha \in (0, 1)$  astfel încât

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

pentru orice  $x, y \in X$ . Atunci  $T$  are un punct fix unic (adică,  $\exists! x^* \in X$  astfel încât  $Tx^* = x^*$ ).

**Demonstrație:** Vom folosi metoda aproximărilor succesive.

Definim  $x_n = Tx_{n-1}$  pentru  $n \in \mathbb{N}$  cu  $x_0 \in X$  arbitrar. Vom avea, prin inducție

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) = \alpha^n d(Tx_0, x_0), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Acum, vom demonstra faptul că  $(x_n)$  este șir Cauchy în  $(X, d)$ :

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$$

care din 1.6 este

$$\begin{aligned} &\leq \alpha^n (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{p-1}) d(Tx_0, x_0) \\ &= \alpha^n \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} d(Tx_0, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(Tx_0, x_0). \end{aligned}$$

Deci șirul este Cauchy în  $(X, d)$  pentru că  $\alpha^n \rightarrow 0$ . Cum  $(X, d)$  este complet, șirul  $(x_n)$  converge la un  $x^* \in X \Leftrightarrow d(x_n, x^*) \rightarrow 0$ .



Dar,

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq d(Tx^*, x_n) + d(x_n, x^*) \\ &= d(Tx^*, x_{n-1}) + d(x_n, x^*) \\ &\leq \alpha d(x^*, x_{n-1}) + d(x_n, x^*), \end{aligned}$$

care converge la 0 pentru  $n \rightarrow \infty$ , deci  $d(x^*, Tx^*) \leq 0$  și astfel  $x^*$  este un punct fix al lui  $T$ .

În continuare vrem să arătăm că  $x^*$  este unic. Presupunem că  $y^*$  este de asemenea un punct fix al lui  $T$ , atunci  $d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq \alpha d(x^*, y^*)$  deci  $(1 - \alpha) d(x^*, y^*) \leq 0$  ceea ce implică  $x^* = y^*$ .  $\square$

**Observație 1.** Presupunerea  $\alpha < 1$  în teorema 2 este esențială așa cum ne arată următorul contra-exemplu.

Dacă  $X = \mathbb{R}$  și  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este dat de

$$Tx = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x,$$

atunci  $T$  nu are un punct fix deoarece  $\frac{\pi}{2} - \arctan x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Pe de altă parte, din teorema lui Lagrange, avem, pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ ,

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &\leq |x - y - \arctan x + \arctan y| \\ &= \left| x - y - \frac{x - y}{1 + z^2} \right|, \end{aligned}$$

pentru un  $z$  între  $x$  și  $y$

$$\begin{aligned} &= |x - y| \cdot \left( 1 - \frac{1}{1 + z^2} \right) \\ &< |x - y|, \end{aligned}$$

deci, chiar dacă inegalitatea este strictă,  $\alpha = 1$  și prin urmare  $T$  nu este o contracție. Astfel, faptul că acest  $T$  nu are un punct fix este un contraexemplu.

**Observație 2.** Din demonstrația de mai sus observăm faptul că

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(Tx_0, x_0)$$

care ne oferă o aproximare a lui  $x^*$ .

**Observație 3.** Presupunem că  $T^k = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_k, k \geq 2$ , este o contracție, atunci există un punct unic pentru  $T$ .

**Demonstrație:** Un punct fix al lui  $T$  este în mod evident un punct fix al lui  $T^k$ . Invers, dacă  $x^*$  este un punct fix al lui  $T^k$  atunci  $Tx^* = T^{k+1}x^* = T^k(Tx^*)$ , deci ambele  $x^*$  și  $Tx^*$  sunt puncte fixe ale lui  $T^k$ , ca urmare  $Tx^* = x^*$ .  $\square$

## 1.2 Operatori liniari și compacți

Dacă  $X, Y$  sunt spații normate și  $A : X \rightarrow Y$  este un operator liniar, atunci  $A$  se numește complet continuu sau compact dacă  $A$  duce mulțimi mărginite din  $X$  în submulțimi relativ compacte în  $Y$ .

Un operator complet continuu este evident continuu. Vom nota

$$K(X, Y) = \{A \in L(X, Y); A \text{ compact}\}.$$

Evident  $K(X, Y)$  este un subspațiu liniar al lui  $L(X, Y)$ . Mai mult, avem

**Teoremă 3.** *Dacă  $X$  este un spațiu normat și  $Y$  este un spațiu Banach, atunci  $K(X, Y)$  este un subspațiu liniar închis al lui  $L(X, Y)$ , adică  $K(X, Y)$  este spațiu Banach în raport cu norma operatorială.*

**Demonstrație:** Vom nota similar, cu  $\|\cdot\|$  cele trei norme ale spațiilor  $X, Y$  și  $L(X, Y)$ . Fie  $(A_n)$  un șir în  $L(X, Y)$ , care converge la  $A \in L(X, Y)$ , adică,  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ .

Astfel, pentru  $\varepsilon > 0$  există  $m \in \mathbb{N}$  suficient de mare astfel încât

$$\|A_m - A\| < \frac{\varepsilon}{3r}. \quad (1.7)$$

Fie  $(x_n)$  un șir din  $B(0, r) \subset X$ , unde  $r > 0$  este arbitrat fixat. Deoarece  $A_m$  este compact, există un subșir al lui  $(x_n)$ , notat  $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ , astfel încât  $(Ax_{n_k})_{k \geq 1}$  este convergent, deci Cauchy. Astfel, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $N \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$\|A_m x_{n_k} - A_m x_{n_j}\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall k, j > N \quad (1.8)$$

Folosind 1.7 și 1.8 deducem că

$$\begin{aligned} \|Ax_{n_k} - Ax_{n_j}\| &\leq \|Ax_{n_k} - A_m x_{n_k}\| + \|A_m x_{n_k} - A_m x_{n_j}\| + \|A_m x_{n_k} - Ax_{n_j}\| \\ &\leq \|A - A_m\| \cdot \|x_{n_k}\| + \|A_m x_{n_k} - A_m x_{n_j}\| + \|A_m - A\| \cdot \|x_{n_j}\| \\ &< r \cdot \frac{\varepsilon}{3r} + \frac{\varepsilon}{3} + r \cdot \frac{\varepsilon}{3r} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

cu alte cuvinte,  $(Ax_{n_k})$  este șir Cauchy, prin urmare converge, deci  $A \in K(X, Y)$ . □

## 1.3 Teorema lui Fredholm

Let  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  un spațiu Hilbert. Notăm cu  $K(H) := K(H, H)$  spațiul operatorilor liniari și compacți din  $H$  în  $H$ . Acesta este un subspațiu închis al lui  $L(H) := L(H, H)$ , în raport cu norma operatorială (din teorema 3), prin urmare  $K(H)$  este un spațiu Banach în raport cu această normă.

**Teoremă 4.** Dacă  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  este un spațiu Hilbert și  $A \in K(H)$ , atunci spațiul nul al lui  $I - A$ , notat  $\mathcal{N} = N(I - A)$ , este un subspațiu finit dimensional al lui  $H$ , unde  $I$  operatorul identitate al lui  $H$ .

**Demonstrație:** Evident,  $\mathcal{N}$  este un subspațiu liniar închis al lui  $(H, \|\cdot\|)$ . Fie  $Q$  o submulțime mărginită a lui  $\mathcal{N}$ . Cum  $A$  este compact și  $Q = AQ$  deducem faptul că  $Q$  este relativ compact în  $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ . Ca urmare, cum orice mulțime închisă și mărginită din  $\mathcal{N}$  este compactă, deducem că  $\mathcal{N}$  este un subspațiu finit dimensional al lui  $H$ .  $\square$

**Teoremă 5.** (Schauder) Dacă  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  este un spațiu Hilbert și  $A \in K(H)$  atunci  $A^* \in K(H)$ .

(Am notat cu  $A^* : H \rightarrow H$  operatorul adjunct al lui  $A$ .)

**Demonstrație:** Fie  $r > 0$  arbitrar fixat. Deoarece  $A^* \in L(H)$ , mulțimea  $A^*B(0, r)$  este mărginită:

$$\|x\| < r \Rightarrow \|A^*x\| \leq r \|A^*\|.$$

Cum  $A$  este compact, rezultă că pentru orice șir  $(x_n)_{n \geq 1}$ , din  $B(0, r)$ , șirul  $((A \circ A^*)x_n)_{n \geq 1}$  are un subșir convergent,  $((A \circ A^*)x_k)_{k \geq 1}$ . Avem de asemenea

$$\begin{aligned} \|A^*x_{n_k} - A^*x_{n_j}\|^2 &= (A^*(x_{n_k} - x_{n_j}), A^*(x_{n_k} - x_{n_j})) \\ &= (x_{n_k} - x_{n_j}, A(A^*(x_{n_k} - x_{n_j}))) \\ &\leq 2r \|(A \circ A^*)x_{n_k} - (A \circ A^*)x_{n_j}\|, \end{aligned}$$

deci  $(A^*x_{n_k})_{k \geq 1}$  este convergent.  $\square$

**Observație 4.** Fie  $A \in L(H)$ . Atunci  $A$  este compact dacă și numai dacă  $A^*$  este compact. Acest lucru rezultă din Teorema lui Schauder de mai sus și  $(A^*)^* = A$ .

**Observație 5.** Dacă  $A, B \in L(H)$  și cel puțin unul este compact, atunci  $A \circ B$  este compact de asemenea.

Continuăm cu un rezultat important, datorat lui Fredholm, care ne oferă o condiție necesară și suficientă pentru ca o ecuație operatorială ce e dată de un operator liniar și compact să admită soluție.

**Teoremă 6.** (Fredholm) Fie  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  un spațiu Hilbert și fie  $A \in K(H)$ . Ecuația  $x - A^*x = f$  are soluție dacă și numai dacă  $f \in \mathcal{N}^\perp$  unde  $\mathcal{N} = N(I - A)$ .

**Corolar 1.** Dacă  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  este un spațiu Hilbert și  $A \in K(H)$ , atunci ecuația  $x - Ax = f$  are soluție dacă și numai dacă  $f \in (N(I - A^*))^\perp$ .

Este consecință imediată a teoremei lui Fredholm aplicată pentru  $A^*$ .

**Lemă 1.** Fie  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  un spațiu Hilbert și fie  $A \in K(H)$ . Atunci există o constantă  $C > 0$  astfel încât

$$C \|x\| \leq \|(I - A)x\|, \forall x \in \mathcal{N}^\perp \quad (1.9)$$

unde  $\mathcal{N} = N(I - A)$ .

**Demonstrație:** Presupunem, prin absurd că 1.9 nu este adevărată, adică pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , există  $x_n \in \mathcal{N}^\perp$  astfel încât  $\|x_n\| = 1$  și

$$\|(I - A)x_n\| < \frac{1}{n}.$$

Prin urmare,

$$x_n - Ax_n \rightarrow 0. \quad (1.10)$$

Cum  $A$  este compact există un subșir al lui  $(x_n)_{n \geq 1}$  notat  $(x_{n_k})_{k \geq 1}$  astfel încât  $(Ax_{n_k})_{k \geq 1}$  este convergent. Din 1.10 deducem că  $(x_{n_k})_{k \geq 1}$  este de asemenea convergent și limita lui  $x \in \mathcal{N}^\perp$ . Folosind din nou 1.10, observăm faptul că  $x - Ax = 0$ , adică  $x \in \mathcal{N}$ . Din moment ce  $\mathcal{N} \cap \mathcal{N}^\perp = \{0\}$  avem  $x = 0$ , ceea ce contrazice  $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$ .  $\square$

### Demonstrație: Teorema lui Fredholm

**Necesitatea:** Presupunem că ecuația  $x - A^*x = f$  are o soluție  $x \in H$ . Atunci, pentru orice  $y \in \mathcal{N}$ , vom avea

$$\begin{aligned} (f, y) &= (x, y) - (A^*x, y) \\ &= (x, y) - (x, Ay) \\ &= \left( x, \underbrace{(I - A)y}_{=0} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Prin urmare,  $f \in \mathcal{N}^\perp$ .

**Suficiența:** Presupunem  $f \in \mathcal{N}^\perp$ . Cum  $\mathcal{N}^\perp$  este un subspațiu închis al lui  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$ ,  $\mathcal{N}^\perp$  este un spațiu Hilbert cu același produs scalar și normă. Conform lemei 1,  $\|\cdot\|$  este echivalentă cu norma definită de produsul scalar

$$\langle x, y \rangle = (Tx, Ty), \forall x, y \in \mathcal{N}^\perp,$$

unde  $T = I - A$ . Din moment ce funcționala  $x \mapsto (x, f)$  este liniară și continuă pe  $\mathcal{N}^\perp$ , rezultă din Teorema de Reprezentare a lui Riesz faptul că există  $x_f \in \mathcal{N}^\perp$  astfel încât

$$(x, f) = \underbrace{\langle x, x_f \rangle}_{=(Tx, Tx_f)}, \forall x \in \mathcal{N}^\perp \quad (1.11)$$

De fapt, 1.11 are loc pentru orice  $x \in H$  deoarece  $x = x' + x''$ , cu  $x' \in \mathcal{N}$ ,  $x'' \in \mathcal{N}^\perp$ . Notând  $\tilde{x} = Tx_f$ , putem scrie

$$\underbrace{(Tx, \tilde{x})}_{=(x, \tilde{x} - A^*\tilde{x})} = (x, f), \forall x \in H,$$

deci

$$\tilde{x} - A^*\tilde{x} = f.$$

$\square$

Următorul rezultat oferă câteva informații care completează teorema 6.

**Teoremă 7.** Fie  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  un spațiu Hilbert și fie  $A \in K(H)$ . Atunci,

$$R(I - A) = H \Leftrightarrow \mathcal{N} = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{N}^* = \{0\} \Leftrightarrow R(I - A^*) = H,$$

unde  $\mathcal{N} = N(I - A)$ ,  $\mathcal{N}^* = N(I - A^*)$  și  $R(I - A)$ ,  $R(I - A^*)$  reprezintă imaginile operatorilor  $(I - A)$ ,  $(I - A^*)$ .

**Demonstrație:** Ținând cont de teorema 6 și corolarul 1, este suficient să demonstrăm că

$$R(I - A) = H \Leftrightarrow R(I - A^*) = H \quad (1.12)$$

Presupunem că  $R(I - A) = H$ .

Să demonstrăm că  $\mathcal{N} = \{0\}$ . Presupunem prin absurd că  $\mathcal{N} \neq \{0\}$ , adică există un  $x_0 \in \mathcal{N}$ ,  $x_0 \neq 0$ . Deoarece  $R(I - A) = H$  putem construi un șir  $(x_n)_{n \geq 1}$  în  $D(A)$  astfel încât

$$Tx_n = x_{n-1}, \forall n \geq 1$$

unde  $T := I - A$ . Vom avea

$$T^n x_n = x_0 \neq 0$$

și

$$T^{n+1} x_n = 0,$$

unde  $T^k := T \circ T \circ \dots \circ T$ . Deci, notând  $H_n = N(T^n)$ , vom avea că  $H_n$  este un subspațiu liniar propriu al lui  $H_{n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Conform teoremei 4, orice  $H_n$  este un spațiu finit dimensional, deci închis, deoarece

$$T^n = (I - A)^n = I - \underbrace{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} A^k}_{\text{operator compact.}}$$

Există astfel un șir  $(u_n)_{n \geq 1}$  astfel încât

$$u_n \in H_{n+1}, \|u_n\| = 1, \|u_n - u\| \geq \frac{1}{2}, \forall u \in H_n.$$

Cum  $1 \leq m < n$

$$T^n(Tu_n + Au_m) = T^{n+1}u_n + AT^n u_m = 0,$$

avem  $Tu_n + Au_m \in H_n$  și

$$\|Au_n - Au_m\| = \|u_n - (Tu_n + Au_m)\| \geq \frac{1}{2}.$$

Astfel, șirul  $(Au_n)_{n \geq 1}$  nu poate avea subșiruri Cauchy. Acest lucru contrazice faptul că  $A$  este compact împreună cu  $\|u_n\| = 1$  pentru orice  $n \geq 1$ . Prin urmare  $\mathcal{N} = \{0\}$ , care (conform teoremei 6) implică faptul că  $R(I - A^*) = H$ . Astfel am demonstrat implicația

$$R(I - A) = H \Rightarrow R(I - A^*) = H$$

Implicația inversă rezultă din înlocuirea lui  $A$  cu  $A^*$ . □

**Observație 6.** Din corolarul 1 și teorema 7 deducem faptul că dacă ecuația  $x - Ax = f$  are o soluție  $u_f$  pentru orice  $f \in H$  atunci  $u_f$  este unică. Deci, putem formula **alternativă a lui Fredholm** pentru ecuația  $x - Ax = f$  cu  $A \in K(H)$  și anume că are loc una din următoarele afirmații:

- ▷ pentru orice  $f \in H$ , ecuația  $x - Ax = f$  are o soluție unică (echivalent,  $N(I - A) = \{0\}$ );
- ▷  $N(I - A) \neq \{0\}$ , caz în care ecuația  $x - Ax = f$  are soluție dacă și numai dacă  $f \perp N(I - A^*)$ .

## 1.4 Teorema Hilbert - Schmidt

**Teoremă 8.** Fie  $(X, \|\cdot\|)$  un spațiu normat și fie  $A \in K(X)$ . Atunci  $A$  are o mulțime numărabilă de valori proprii și singurul punct de acumulare posibil al mulțimii de valori proprii este  $\lambda = 0$ . Mai mult, pentru orice valoare proprie  $\lambda \neq 0$ ,  $\dim N(\lambda I - A) < \infty$ .

**Demonstrație:** Demonstrația este trivială dacă  $X$  este finit dimensional, să presupunem deci că  $X$  este infinit dimensional. Pentru a demonstra prima afirmație a teoremei, este suficient să arătăm că pentru orice  $r > 0$  mulțimea  $\{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \geq r\}$  conține un număr finit de valori proprii.

Presupunem că prin absurd că nu este așa, adică există  $r_0 > 0$  și un număr infinit de valori proprii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  astfel încât  $|\lambda_n| \geq r_0, \forall n \geq 1$ . Atunci există un șir  $u_n \in X - \{0\}$  astfel încât  $Au_n = \lambda_n u_n, \forall n \geq 1$  și putem presupune că  $\|u_n\| = 1, \forall n \geq 1$ . Deoarece  $\lambda_n$  sunt distincte două câte două,  $B_n = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  sunt sisteme liniar independente. Notăm  $X_n = \text{Span} B_n, n = 1, 2, \dots$

Există astfel  $y_n \in X_n - X_{n-1}$  astfel încât  $\|y_n\| = 1, \forall n \geq 2$  și

$$\|y_n - v\| \geq \frac{1}{2}, \forall v \in X_{n-1}, n \geq 2 \Rightarrow \|y_n - y_m\| \geq \frac{1}{2}, \forall n \neq m.$$

Astfel,  $(y_n)$  nu are subșiruri Cauchy.

Pe de altă parte, presupunând că  $1 \leq m < n$ , vom avea

$$Ay_n - Ay_m = \underbrace{\lambda_n y_n}_{\in X_n - X_{n-1}} - \underbrace{\lambda_n y_m}_{\in X_m} + \underbrace{(Ay_n - \lambda_n y_n)}_{\in X_{n-1}} - \underbrace{(Ay_m - \lambda_m y_m)}_{\in X_m \subset X_{n-1}}$$

$$\lambda_n y_n - v_{mn}$$

cu  $v_{mn} \in X_{n-1}$ , deoarece

$$\begin{aligned} Ay_n - \lambda_n y_n &= A \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^n u_i \right) - \lambda_n \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^n u_i \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^n \lambda_i u_i \right) - \lambda_n \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^n u_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^n (\lambda_i - \lambda_n) u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^n (\lambda_i - \lambda_n) u_i \end{aligned}$$

care aparține lui  $X_{n-1}$ . Deci, vom avea

$$\begin{aligned} \|Ay_n - Ay_m\| &= \|\lambda_n y_n - v_{nm}\| \\ &= |\lambda_n| \cdot \|y_n - \lambda_n^{-1} v_{nm}\| \\ &\geq r_0 \|y_n - \lambda_n^{-1} v_{nm}\| \\ &\geq \frac{r_0}{2}, \end{aligned}$$

deci  $(Ay_n)$  nu are subșiruri Cauchy. Dar  $A$  este compact și  $\|y_n\| = 1, \forall n \geq 1$  deci  $(Ay_n)$  trebuie să aibă un subșir convergent. Această contradicție arată că  $\{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \geq r\}$  conține un număr finit de valori proprii ale lui  $A$  pentru orice  $r > 0$ , așa cum am afirmat.  $\square$

**Propoziție 1.** Fie  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  un spațiu Hilbert și fie  $A$  un operator simetric pe  $H$ . Atunci,

1. orice valoare proprie a lui  $A$  este reală, chiar dacă  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
2. oricare doi vectori proprii ai lui  $A$  care corespund unor valori proprii distincte, sunt ortogonali.

**Demonstrație:** Pentru a demonstra 1., presupunem că  $\lambda$  este o valoare proprie a lui  $A$ . Fie  $u \in H - \{0\}$  un vector propriu corespunzător, adică  $Au = \lambda u$ . Atunci

$$(Au, u) = (\lambda u, u) = \lambda \|u\|^2$$

$$(u, Au) = (u, \lambda u) = \bar{\lambda} \|u\|^2.$$

Cum  $A$  este simetric și  $\|u\| \neq 0$ , deducem că  $\lambda = \bar{\lambda}$ .

Pentru a demonstra 2., luăm în considerare două valori proprii ale lui  $A$ ,  $(u_1, \lambda_1), (u_2, \lambda_2)$ , unde  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  (din 1.) și  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Avem

$$\lambda_1(u_1, u_2) = (Au_1, u_2) = (u_2, Au_1) = \lambda_2(u_1, u_2)$$

Prin urmare

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(u_1, u_2) = 0,$$

deci  $(u_1, u_2) = 0$ . □

**Propoziție 2.** Fie  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  un spațiu Hilbert,  $H \neq \{0\}$  și fie  $A \in L(H)$  un operator simetric. Atunci,

$$\|A\| = \sup \{ |(Ax, x)| ; x \in H, \|x\| = 1 \}.$$

**Demonstrație:** Dacă  $A = 0$ , este trivial. Presupunem  $A \neq 0$  și notăm

$$a = \sup \{ |(Ax, x)| ; x \in H, \|x\| = 1 \}.$$

Cum

$$|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2, \forall x \in H,$$

deducem că

$$a \leq \|A\|. \quad (1.13)$$

Acum pentru un  $b > 0$  dat și  $x \in H$  astfel încât  $\|x\| = 1$  și  $\|Ax\| > 0$ , avem

$$\|Ax\|^2 = \frac{1}{4} \left[ \left( A \left( bx + \frac{1}{4}Ax \right), bx + \frac{1}{b}Ax \right) - \left( A \left( bx - \frac{1}{b}Ax \right), bx - \frac{1}{b}Ax \right) \right]. \quad (1.14)$$

Avem de asemenea

$$|(Av, v)| \leq a \|v\|^2, \forall v \in H. \quad (1.15)$$

Combinând 1.14 și 1.15 obținem

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &\leq \frac{a}{4} \left( \left\| bx + \frac{1}{b}Ax \right\|^2 + \left\| bx - \frac{1}{b}Ax \right\|^2 \right) \\ &\leq \frac{a}{2} \left( b^2 \|x\|^2 + \frac{1}{b^2} \|Ax\|^2 \right), \end{aligned}$$

deci pentru  $\|x\| = 1$  și  $b = \|Ax\| > 0$  avem

$$\|Ax\|^2 \leq a \|Ax\|.$$

Prin urmare

$$\|Ax\| \leq a, \forall x \in H, \|x\| = 1 \Rightarrow \|A\| \leq a.$$

□

### Teoremă 9. Hilbert - Schmidt

Fie  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  un spațiu Hilbert infinit dimensional, separabil și fie  $A : H \rightarrow H$  un operator liniar compact, simetric, cu  $N(A) = \{0\}$ . Atunci există un șir de valori proprii ale lui  $A$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots)$  astfel încât  $(|\lambda_n|)$  este un șir descrescător de numere pozitive convergente la 0 și un sistem ortonormal complet (bază) în  $H$  de vectori proprii corespunzători  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  (adică  $Au_n = \lambda_n u_n$  pentru  $n = 1, 2, \dots$ ).



**Demonstrație:** În primul rând observăm faptul că  $\|A\| > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$ . Să demonstrăm că ori  $\|A\|$  ori  $-\|A\|$  este o valoare proprie a lui  $A$ .

Din propoziția 2. există  $(v_n)_{n \geq 1}$  cu  $\|v_n\| = 1, \forall n \leq 1$ , astfel încât  $|(Av_n, v_n)| \rightarrow \|A\|$ . De fapt, putem să extragem din  $(v_n)$  un subșir, notat tot  $(v_n)$ , astfel încât  $(Av_n, v_n)$  converge ori la  $\|A\|$  ori la  $-\|A\|$

$$(Av_n, v_n) \rightarrow \lambda_1 := \|A\|. \quad (1.16)$$

Cum  $A$  este compact putem să luăm acum alt subșir, notată de asemenea  $(v_n)$ , astfel încât

$$Av_n \rightarrow u_1 \quad (1.17)$$

și acesta este subșirul pe care îl păstrăm. Acum, trecând la limită în

$$0 \leq \|Av_n - \lambda_1 v_n\|^2 = \|Av_n\|^2 - 2\lambda_1 (Av_n, v_n) + \lambda_1^2 \quad (1.18)$$

vom obține din 1.16 și 1.17

$$0 \leq \|u_1\|^2 - \lambda_1^2 \Rightarrow |\lambda_1| \leq \|u_1\|.$$

Deci, în particular,  $u_1 \neq 0$ . Este adevărat și invers, deoarece avem

$$\|Av_n\| \leq \|A\| \cdot \|v_n\| = \|A\|,$$

deci din 1.17

$$\|u_1\| \leq \|A\| = |\lambda_1|.$$

Prin urmare,

$$\|u_1\| = |\lambda_1| = \|A\|. \quad (1.19)$$

Din 1.18, deducem

$$\|Av_n - \lambda_1 v_n\| \rightarrow 0. \quad (1.20)$$

Deci, având în vedere 1.17,  $(\lambda_1 v_n)$  converge la  $u_1$  și astfel din 1.20 și continuitatea lui  $A$  obținem

$$Au_1 = \lambda_1 u_1,$$

adică,  $(u_1, \lambda_1)$  este o pereche proprie a lui  $A$ . O normalizăm fără să ne schimbăm notația,  $u_1 := |\lambda_1|^{-1} u_1$ , deoarece dorim un sistem ortonormal de vectori proprii.

Merită subliniat că orice altă valoare proprie  $\lambda$  satisface  $|\lambda| \leq |\lambda_1|$ . Într-adevăr, dacă presupunem prin absurd existența unei perechi proprii  $(u, \lambda)$ , cu  $|\lambda| > |\lambda_1|$  și  $\|u\| = 1$ , atunci  $|(Au, u)| = |\lambda|$  care contrazice  $|\lambda_1| = \|A\|$  acesta fiind supremul de la propoziția 2.

Folosind inducția deducem existența perechilor proprii  $(u_n, \lambda_n)$  pentru  $n = 2, 3, \dots$

Notăm cu  $Y$  complementul ortogonal al lui  $\text{Span}\{u_1\}$ , adică

$$Y = \{u \in H; (u, u_1) = 0\}.$$

Cum  $H$  este infinit dimensional, la fel este și  $Y$ . Mai mult,  $Y$  este un spațiu Hilbert și este invariant la  $A$  în sensul că  $AY \subset Y$  deoarece, pentru  $y \in Y$ ,

$$(Ay, u_1) = (y, Au_1),$$

din moment ce  $A$  este simetric și

$$\begin{aligned} &= (y, \lambda_1 u_1) \\ &= \lambda_1 (y, u_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Restricția  $A|_Y$  nu este 0 din moment ce  $N(A) = Y$ . De fapt, toate proprietățile sunt moștenite de la pasul anterior; avem o valoare proprie

$$\lambda_2 = \pm \sup \{|Av, v|; v \in Y, \|v\| = 1\}$$

și funcția proprie corespunzătoare

$$u_2 \in Y, \|u_2\| = 1, Au_2 = \lambda_2 u_2.$$

Mai mult,  $|\lambda_2| \leq \lambda_1$ . Mai departe, luăm

$$Z = \{u \in Y; (u, u_2) = 0\} = (\text{Span}\{u_1, u_2\})^\perp$$

care este un subspațiu infinit dimensional (Hilbert) al lui  $H$  și obținem o nouă pereche proprie  $(u_3, \lambda_3)$ , cu  $\|u_3\| = 1, |\lambda_3| \leq |\lambda_2|$ . Putem continua și obținem de fiecare dată un subspațiu infinit dimensional. Vom construi astfel un șir de valori proprii  $(\lambda_n)$  astfel încât

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots \quad (1.21)$$

și șirul corespunzător de vectori proprii  $(u_n)$ ,

$$Au_n = \lambda_n u_n, \|u_n\| = 1, n \geq 1$$

care formează prin construcție un sistem ortonormal.

Mai departe, vom demonstra că

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, u_n) u_n, \forall u \in H. \quad (1.22)$$

Definim spațiul

$$V_m := \{u \in H; (u, u_j) = 0, j = 1, \dots, m\} = \text{Span} \{u_1, \dots, u_m\}^{\perp},$$

care este un spațiu Hilbert infinit dimensional, invariant la A. Din pasul anterior din demonstrația noastră, există o pereche proprie  $(u_{m+1}, \lambda_{m+1})$  a lui A astfel încât

$$|\lambda_{m+1}| = \|A|V_m\| = \sup \{|(Av, v)|; v \in V_{m+1}, \|v\| = 1\}.$$

În particular,

$$\|Av\| \geq |\lambda_{m+1}| \cdot \|v\|, \forall v \in V_{m+1}. \quad (1.23)$$

Acum, alegem

$$w_m = u - \sum_{n=1}^m (u, u_n) u_n$$

și observăm că  $w_m \in V_m$  deoarece  $(w_m, u_j) = (u, u_j) - (u, u_j) = 0, \forall j = 1, \dots, m$ . Calculăm

$$\|w_m\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{n=1}^m |(u, u_n)|^2 \leq \|u\|^2. \quad (1.24)$$

Combinând 1.23 și 1.24 avem

$$\begin{aligned} Aw_m &= Au - \sum_{n=1}^m (u, u_n) Au_n \\ &= Au - \sum_{n=1}^m \lambda_n (u, u_n) u_n, \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} \|Aw_m\| &\leq \|A|V_m\| \cdot \|w_m\| |\lambda_{m+1}| \cdot \|w_m\| \\ &\leq |\lambda_{m+1}| \cdot \|u\|. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Pe de altă parte,  $\lambda_n \rightarrow 0$ . Într-adevăr, din moment ce  $(|\lambda_n|)$  este descrescător, există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \alpha \geq 0.$$

Să presupunem, prin absurd, că  $\alpha > 0$ . În mod evident,  $|\lambda_n| \geq \alpha$  pentru orice  $n \geq 1$  și deci

$$\|\lambda_n^{-1} u_n\| = \frac{\|u_n\|}{|\lambda_n|} = \frac{1}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\alpha}, \forall n \geq 1.$$

Cum A este compact  $u_n = A(\lambda_n^{-1} u_n)$  are un subșir convergent. Dar acest lucru este imposibil deoarece,

$$\|u_n - u_m\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u_m\|^2 = 2, \forall n \neq m.$$

Deci,  $\alpha = 0$ , adică  $\lambda_n \rightarrow 0$ , așa cum am afirmat.

În consecință, avem din 1.25 că  $\|Aw_m\| \rightarrow 0$  pentru  $m \rightarrow \infty$ , adică 1.22 e adevărată.

În final, să demonstrăm că  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  este o bază în  $H$ .

Știm că pentru orice  $u \in H$  seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n) u_n$  converge, deci putem să scriem

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n) u_n$$

deci trebuie să verificăm că  $u = v$ .

Luăm în considerare șirul de sume parțiale  $s_m = \sum_{n=1}^m (u, u_n) u_n$  care converge la  $v$  pentru  $m \rightarrow \infty$ , deci  $As_m \rightarrow Av$ . Pe de altă parte, din 1.22 avem că

$$As_m = \sum_{n=1}^m \lambda_n (u, u_n) u_n \rightarrow Au \text{ pentru } m \rightarrow \infty.$$

Prin urmare,

$$Av = Au \Rightarrow A(v - u) = 0 \Rightarrow v = u,$$

deoarece  $\ker A = \{0\}$ .

Astfel sistemul  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  este complet, adică este o bază în  $H$ . □

**Observație 7.** Dacă presupunem în plus că  $A$  este pozitiv, atunci acesta are valori proprii  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots$  cu  $\lambda_n > 0, \forall n \geq 1$ . Acest lucru rezultă din

$$(Au_n, u_n) = \lambda_n \|u_n\|^2 = \lambda_n, n \geq 1.$$

De asemenea, ținem cont că

$$\lambda_1 = \|A\| = \sup \{(Av, v) ; v \in H, \|v\| = 1\}$$

și

$$\lambda_{n+1} = \|A|_{V_n}\| = \sup \{(Av, v) ; v \in V_n, \|v\| = 1\}, \forall n \geq 1$$

unde

$$V_n = (\text{Span} \{u_1, u_2, \dots, u_n\})^{\perp}, n \geq 1.$$

## 1.5 Alte rezultate

În această secțiune vom da, fără demonstrații două teoreme și câteva definiții pe care le vom utiliza în următorul capitol.

Primul dintre acestea este un rezultat de densitate în spațiul  $L^p(\Omega)$  :

**Teoremă 10.** Fie  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  o mulțime nevidă. Avem  $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{L^p(\Omega)} = L^p(\Omega)$  pentru orice  $1 \leq p < \infty$ .

### Criteriul Arzelà-Ascoli

Fie  $(X, d)$  și  $(X_1, d_1)$  spațiile metrice și fie  $\emptyset \neq A \subset X$ . Notăm cu  $C(A; X_1)$ , mulțimea tuturor funcțiilor continue din  $A \subset (X, d)$  la  $(X_1, d_1)$ .

**Definiție 1.** O familie de funcții  $\mathcal{F} \subset C(A; X_1)$  se numește echicontinuă dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  și orice  $x \in A$  există  $\delta > 0$  astfel încât  $y \in A$  și  $d(x, y) < \delta$  implică  $d_1(f(x), f(y)) < \varepsilon$  pentru orice  $f \in \mathcal{F}$ , adică  $\delta = \delta(\varepsilon, x)$  este independentă față de  $f$ .

**Definiție 2.** Dacă, în plus,  $\delta = \delta(\varepsilon)$  (adică  $\delta$  este independentă față de  $x$  și  $f$ ), atunci  $\mathcal{F}$  este uniform echicontinuă, adică  $\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in A, d(x, y) < \delta$  implică  $d_1(f(x), f(y)) < \varepsilon$ , pentru orice  $f \in \mathcal{F}$ .

**Teoremă 11.** Fie  $\emptyset \neq A \subset (X, d)$  compact. Presupunem că  $\mathcal{F} \subset C(A; \mathbb{R}^k)$  este echicontinuă și mărginită în  $C(A; \mathbb{R}^k)$ , (adică  $\exists M > 0$  astfel încât  $\|f(x)\| \leq M, \forall x \in A, \forall f \in \mathcal{F}$ ). Atunci  $\mathcal{F}$  este relativ compactă în  $C(A; \mathbb{R}^k)$  echipată cu sup-normă.

**Definiție 3. Operatorul adjunct-Hilbert** Fie  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow H$  un operator liniar dens definit într-un spațiu Hilbert complex  $H$ . Atunci, operatorul adjunct-Hilbert  $T^* : \mathcal{D}(T^*) \rightarrow H$  al lui  $T$  va fi definit, după cum urmează. Domeniul  $\mathcal{D}(T^*)$  al lui  $T^*$  constă în orice  $y \in H$  astfel încât să existe un  $y^* \in H$  care să satisfacă condiția

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$$

pentru orice  $x \in \mathcal{D}(T)$ . Pentru fiecare astfel de  $y \in \mathcal{D}(T^*)$  operatorul adjunct-Hilbert  $T^*$  este atunci definit în termenii acelui  $y^*$  de

$$y^* = T^*y.$$

Cu alte cuvinte, un element  $y \in H$  este în  $\mathcal{D}(T^*)$  dacă (și numai dacă) pentru acel  $y$  produsul interior  $\langle Tx, y \rangle$ , considerat ca o funcție a lui  $x$ , poate fi reprezentat sub forma  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$  pentru orice  $x$ . De asemenea pentru acel  $y$ , formula de mai sus determină corespondentul unic  $y^*$  din moment ce  $\mathcal{D}(T)$  prin presupunerea noastră, este densă în  $H$ .

**Definiție 4. Operatorul liniar simetric** Fie  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow H$  un operator liniar care este dens definit într-un spațiu Hilbert  $H$  complex. Atunci  $T$  se numește un operator liniar simetric dacă pentru orice  $x, y \in \mathcal{D}(T)$ ,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

**Definiție 5. Operatorul liniar autoadjunct** Fie  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow H$  un operator liniar care este dens definit într-un spațiu hilbert complex. Atunci  $T$  se numește operator liniar autoadjunct dacă

$$T = T^*$$

Orice operator liniar autoadjunct este simetric.

Pentru un operator  $T : H \rightarrow H$  pe un spațiu Hilbert  $H$  complex, conceptele de simetric și autoadjunct sunt identice.

---

---

# Capitolul 2

---

---

## Ecuatii Integrale

Acest capitol este o introducere în teoriei ecuațiilor liniare de tip Volterra și Fredholm. Sunt abordate și unele aspecte legate de anumite extensii neliniare.

### 2.1 Ecuatii Volterra

Vom începe cu ecuații scalare și liniare de tip Volterra. Există două tipuri de astfel de ecuații care sunt cele mai relevante pentru aplicații și anume

$$f(t) = \int_a^t k(t, s) x(s) ds, a \leq t \leq b \quad (2.1)$$

și

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s) x(s) ds, a \leq t \leq b, \quad (2.2)$$

unde

$$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C[a, b] := C([a, b]; \mathbb{R}), k \in C(\Delta) := C(\Delta; \mathbb{R})$$

(numit nucleu), cu  $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; a \leq s \leq t \leq b\}$ ;  $x = x(t)$  reprezintă funcția necunoscută care aparține spațiului  $C[a, b]$ .

Ecuatia 2.1 este cunoscută ca ecuație Volterra de prima speță, în timp ce ecuația 2.2 este cunoscută ca ecuație Volterra de speța a doua. În cele ce urmează vom examina ecuația Volterra de speța a doua. Vom arăta mai târziu faptul că ecuația Volterra de speța întâi se reduce de fapt la cea de speța a doua în condiții adecvate.

**Teoremă 12. Existența și Unicitatea**

*În ipotezele de mai sus există o soluție unică  $x \in C[a, b]$  a ecuației 2.2.*

Vom prezenta în cele ce urmează trei demonstrații diferite.

**Demonstrație:** Notăm  $K = \sup_{(t,s) \in \Delta} |k(t,s)|$  care este finit deoarece  $\Delta$  este o submulțime compactă al lui  $\mathbb{R}^2$ . Presupunem într-o primă etapă că

$$K(b-a) < 1. \quad (2.3)$$

Considerăm  $X = C[a, b]$  cu norm  $\sup \|g\| = \sup_{a \leq t \leq b} |g(t)|$  și metrica corespunzătoare,  $d(g_1, g_2) = \|g_1 - g_2\|$ .

Definim  $T : X \rightarrow X$  prin

$$(Tg)(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s) g(s) ds, t \in [a, b], g \in X. \quad (2.4)$$

Este clar din ecuația 2.4 că  $T$  duce  $X$  în  $X$ . De asemenea

$$\begin{aligned} |(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| &= \left| \int_a^t k(t,s) [g_1(s) - g_2(s)] ds \right| \\ &\leq \int_a^t |k(t,s)| \cdot |g_1(s) - g_2(s)| ds \\ &\leq K(b-a) \|g_1 - g_2\| \end{aligned}$$

pentru orice  $g_1, g_2 \in X$  și orice  $t \in [a, b]$ . Prin urmare

$$d(Tg_1, Tg_2) \leq K(b-a) d(g_1, g_2),$$

adică  $T$  este o contracție (conform 2.3).

Conform Principiului contracțiilor al lui Banach (din Capitolul 2),  $T$  are un punct fix unic  $x \in X$  care este în mod clar unica soluție a ecuației 2.2).

Dacă condiția 2.3 nu este îndeplinită, atunci considerăm o subdiviziunea a intervalului  $[a, b]$ , de exemplu

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b,$$

unde  $t_j = a + jh$  pentru  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $h = \frac{(b-a)}{N}$ , cu  $N$  suficient de mare astfel încât  $Kh < 1$ . În particular,  $K(t_1 - t_0) = Kh < 1$ , deci de mai sus rezultă ca 2.2 are o soluție unică  $x_1 = x_1(t)$  pe intervalul  $[t_0, t_1] = [a, t_1]$ , adică,

$$x_1(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s) x_1(s) ds, t \in [a, t_1].$$

Fie ecuația

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f(t) + \underbrace{\int_a^t k(t,s) x_1(s) ds}_{=: f_1(t \in C[t_1, t_2])} + \int_{t_1}^{t_2} k(t,s) x(s) ds, t \in [t_1, t_2], \\ f(t) + \int_a^t k(t,s) x_1(s) ds &=: f_1(t) \in C[t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Cum  $K(t_2 - t_1) = Kh < 1$ , rezultă din argumentul de mai sus că această ecuație are o soluție unică  $x_2 \in C[t_1, t_2]$  și evident,  $x_2(t_1) = x_1(t_1)$ .

În mod similar, există o funcție unică  $x_3 \in C[t_2, t_3]$  care satisface următoarea ecuație, pentru orice  $t \in [t_2, t_3]$

$$x_3(t) = f(t) + \int_a^{t_1} k(t, s) x_1(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} k(t, s) x_2(s) ds + \int_{t_2}^t k(t, s) x_3(s) ds$$

și  $x_3(t_2) = x_2(t_2)$ .

Continuând această procedură obținem o soluție  $x \in C[t_0, t_N] = C[a, b]$  a ecuației 2.2 definită de  $x(t) = x_j(t)$  pentru  $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Soluția  $x$  este evident unică.  $\square$

**Demonstrație:** Din nou, luăm în considerare operatorul  $T$  definit de ecuația 2.4 unde  $X$  este același ca mai sus. Se vede ușor că

$$|(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| \leq K \|g_1 - g_2\| (t - a), \forall t \in [a, b], g_1, g_2 \in X.$$

În consecință, pentru  $T^2 = T \circ T$  obținem

$$\begin{aligned} |(T^2g_1)(t) - (T^2g_2)(t)| &\leq \int_a^t |k(t, s)| \cdot |(Tg_1)(s) - (Tg_2)(s)| ds \\ &\leq K^2 \|g_1 - g_2\| \int_a^t (s - a) ds \\ &= \frac{K^2 (t - a)^2}{2!} \|g_1 - g_2\| \end{aligned}$$

$\square$

Se poate demonstra prin inducție faptul că:

$$\begin{aligned} |(T^k g_1)(t) - (T^k g_2)(t)| &\leq \frac{K^k (t - a)^k}{k!} \|g_1 - g_2\| \\ &\leq \frac{K^k (b - a)^k}{k!} \|g_1 - g_2\| \end{aligned}$$

pentru orice  $t \in [a, b]$ ,  $g_1, g_2 \in X$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Luăm supremum-ul și obținem

$$d(T^k g_1, T^k g_2) \leq \frac{K^k (b - a)^k}{k!} \|g_1 - g_2\|, \forall g_1, g_2 \in X, k = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Cum  $K^k (b - a)^{\frac{k}{k!}} \rightarrow \infty$ , pentru  $k \rightarrow \infty$ ,  $T^k$  este o contracție dacă  $k$  suficient de mare (conform 2.5). Conform observației 3,  $T$  are un punct fix unic  $x \in X$ , care este soluția unică



a ecuației 2.2.

**Demonstrație:** Fie  $T$  același operator ca mai înainte, dar luăm în considerare o altă normă pe  $X = C[a, b]$ , norma Bielecki, definită de

$$\|g\|_B = \sup_{a \leq t \leq b} e^{-Lt} |g(t)|$$

cu  $L$  o constantă pozitivă astfel încât  $\frac{K}{L} < 1$ . Aceasta este într-adevar o normă pe  $X$  care este echivalentă cu norma sup uzuală. Notăm cu  $d_B$  metrica generată de  $\|\cdot\|_B$ .

Vom avea pentru orice  $t \in [a, b]$  și  $g_1, g_2 \in X$

$$\begin{aligned} |(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| &\leq \int_a^t |k(t, s)| e^{Ls} e^{-Ls} |g_1(s) - g_2(s)| ds \\ &\leq K \|g_1 - g_2\|_B \int_a^t e^{Ls} ds \\ &= \frac{K \|g_1 - g_2\|_B}{L} (e^{Lt} - e^{La}), \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} e^{-Lt} |(Tg_1)(t) - (Tg_2)(t)| &\leq \frac{K}{L} \|g_1 - g_2\|_B (1 - e^{-L(t-a)}) \\ &\leq \frac{K}{L} \|g_1 - g_2\|_B. \end{aligned}$$

Acum luăm supremum-ul pentru  $t \in [a, b]$

$$d_B(Tg_1, Tg_2) \leq \frac{K}{L} d_B(g_1, g_2), \forall g_1, g_2 \in X.$$

Cum  $\frac{K}{L} < 1$ ,  $T$  este o contracție în raport cu  $d_B$ , prin urmare, concluzia teoremei rezultă din nou din Principiul contracțiilor al lui Banach.  $\square$

### Nucleul resolvent

Să presupunem că sunt îndeplinite condițiile de mai sus pentru  $f$  și  $k$ . Pentru  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in [a, b]$  vom avea

$$\begin{aligned} x_n(t) &= f(t) + \int_a^t k(t, s) x_{n-1}(s) ds, \\ x_0(t) &= f(t). \end{aligned}$$

În mod clar,  $x_n \in X = C[a, b]$  pentru orice  $n$ . De fapt, șirul de mai sus  $(x_n)_{n \geq 0}$  poate fi exprimat ca

$$x_n = Tx_{n-1}, n \in \mathbb{N}; x_0 = f,$$

unde  $T : X \rightarrow X$  este operatorul definit de 2.4. Deci,  $(x_n)$  este de fapt șirul de aproximări succesive (asociate operatorului  $T$ ) care a fost folosit în demonstrarea Principiului contractiilor al lui Banach (Capitolul 1.2). Aici luăm în considerare o anumită funcție de început,  $x_0 = f$ . Din demonstrația Principiului contractiilor al lui Banach știm că  $(x_n)$  converge în  $(C[a, b], \|\cdot\|_B)$  către punctul său fix unic  $x$ , adică  $(x_n)$  converge uniform în  $[a, b]$  la soluția unică  $x$  a ecuației 2.2. Pe de altă parte, avem pentru orice  $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f(t) + \int_a^t k(t, s) f(s) ds, \\ x_2(t) &= f(t) + \int_a^t k(t, s) \left[ f(s) + \int_a^s k(s, \tau) f(\tau) d\tau \right] ds \\ &= f(t) + \int_a^t k(t, s) f(s) ds + \int_a^t \int_a^s k(t, s) k(s, \tau) f(\tau) d\tau ds. \end{aligned}$$

Putem schimba integrarea pentru a afla vedea că ultima integrală este egală cu

$$\int_a^t \left[ \int_\tau^t k(t, \tau) k(s, \tau) ds \right] f(\tau) d\tau,$$

deci prin simpla reetichetare a lui  $\tau$  și  $s$  vom avea

$$\int_a^t \underbrace{\left[ \int_s^t k(t, \tau) k(\tau, s) d\tau \right]}_{=: k_2(t, s)} f(s) ds$$

și vom avea un nucleu nou,  $k_2$ . În general, dacă îl vom lua  $n = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} k_n(t, s) &:= \int_s^t k(t, \tau) k_{n-1}(\tau, s) d\tau, \\ k_1(t, s) &:= k(t, s), \end{aligned}$$

avem, pentru  $n = 1, 2, \dots$

$$x_n(t) = f(t) + \int_a^t \left[ \sum_{j=1}^n k_j(t, s) \right] f(s) ds. \quad (2.6)$$

Deoarece  $k$  este continuu pe mulțimea compactă  $\Delta$ , avem pentru orice  $(t, s) \in \Delta$ ,

$$\begin{aligned} |k_1(t, s)| &\leq K < \infty \\ |k_2(t, s)| &\leq K^2(t-s), \\ |k_3(t, s)| &\leq K^3 \int_s^t |\tau-s| d\tau \\ &= K^3 \frac{(t-s)^2}{2!}, \\ &\vdots \\ |k_n(t, s)| &\leq K^n \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq K^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Din M-testul lui Weierstrass, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, s)$  converge uniform pe  $\Delta$  deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n (b-a)^{n-1}}{(n-1)!} < \infty.$$

Ca urmare

$$R(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, s),$$

este în  $C(\Delta)$ . Luând  $n \rightarrow \infty$  în 2.6 deducem faptul că

$$x(t) = f(t) + \int_a^t R(t, s) f(s) ds, t \in [a, b]. \quad (2.7)$$

Vom lua  $R(t, s)$  nucleul rezolvent. Acesta depinde de  $k$  dar este independent de  $f$ , astfel încât odată ce găsim  $R(t, s)$  avem soluția 2.2 pentru orice  $f$  (conform 2.7).

Observăm faptul că

$$\sum_{n=2}^{N+1} k_n(t, s) = \int_s^t k(t, \tau) \sum_{n=2}^{N+1} k_{n-1}(\tau, s) d\tau,$$

ceea ce implică

$$-k(t, s) + \sum_{n=1}^{N+1} k_n(t, s) = \int_s^t k(t, \tau) \sum_{n=1}^N k_n(\tau, s) d\tau.$$

Dacă luăm  $n \rightarrow \infty$  vom constata că  $R$  satisface

$$R(t, s) = k(t, s) + \int_s^t k(t, \tau) R(\tau, s) d\tau, \forall (t, s) \in \Delta,$$

care este o ecuație Volterra similară cu 2.2.

Acum să examinăm ecuația 2.1. Presupunem că

$$f \in C^1[a, b] \text{ și } k, \frac{\partial k}{\partial t} \in C(\Delta), k(t, t) \neq 0, \text{ pentru orice } t \in [a, b]. \quad (H)$$

Presupunem de asemenea că  $f(a) = 0$  care este o condiție necesară pentru ca ecuația 2.1 să admită soluție. Dacă ecuația 2.1 are o soluție  $x \in C[a, b]$ , atunci derivând ecuația 2.1 deducem

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \int_a^t k(t, s) x(s) ds \\ &= k(t, t) x(t) + \int_a^t k_t(t, s) x(s) ds, t \in [a, b], \end{aligned} \quad (2.8)$$

care este echivalentă cu următoarea ecuație integrală de tip Volterra de speța a doua

$$x(t) = \frac{f'(t)}{k(t, t)} + \int_a^t \left[ \frac{-k_t(t, s)}{k(t, t)} \right] x(s) ds. \quad (2.9)$$

Deci  $x$  este de asemenea o soluție a ecuației 2.9. Pe de altă parte, știm din teorema anterioară faptul că ecuația 2.9 are o soluție unică  $x \in C[a, b]$ . Acest  $x$  este de asemenea o soluție a ecuației 2.1. Aceasta rezultă din integrarea lui 2.8 pe  $[a, t]$  și folosind condiția  $f(a) = 0$ . Astfel am demonstrat următorul rezultat

**Teoremă 13.** În ipotezele  $H$  de mai sus și, în plus,  $f(a) = 0$ , ecuația 2.1 are o soluție unică  $x \in C[a, b]$ .

Continuăm cu ecuația Volterra neliniară

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s, x(s)) ds, t \in [a, b], \quad (2.10)$$

și demonstrăm următorul rezultat general.

**Teoremă 14.** Presupunem că  $f \in C[a, b]$ ,  $k \in C(D)$ , unde

$$D := \Delta \times \mathbb{R} = \{(t, s, v) \in \mathbb{R}^3; a \leq s \leq t \leq b, v \in \mathbb{R}\}.$$

Dacă există  $K > 0$  astfel încât

$$|k(t, s, v) - k(t, s, w)| \leq K |v - w| \forall a \leq s \leq t \leq b; v, w \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

atunci există o unică funcție  $x \in C[a, b]$  care satisface ecuația 2.10 pe  $[a, b]$ .

**Demonstrație:** Fie  $X = C[a, b]$  cu norma Bielecki și definim  $T : X \rightarrow X$  prin

$$(Tg)(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s, g(s)) ds, \forall t \in [a, b], g \in X.$$

Concluzia rezultă din Principiului contracțiilor al lui Banach în mod similar ca în demonstrația 3 a teoremei 12.  $\square$

Teorema 14 oferă o soluție globală în sensul că intervalul de existență este întregul interval  $[a, b]$ . În mod evident, aceasta este o generalizare a teoremei 12.

Într-adevar, pentru a obține teorema 12 este suficient să presupunem că nucleul  $k$  este liniar în raport cu a treia variabilă, adică  $k := k(t, s, v)$ ,  $a \leq s \leq t \leq b$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , cu  $k \in C(\Delta)$  astfel încât condiția Lipschitz 2.1 este satisfăcută automat.

Acum să examinăm un caz în care soluția rezultată este doar una locală, adică domeniul său poate să nu fie întregul interval  $[a, b]$ .

**Teoremă 15.** *Presupunem că  $f \in C[a, b]$ ,  $k = k(t, s, v) \in C(D)$ , unde  $D := \Delta \times [x_0 - c, x_0 + c] = \{(t, s, v) \in \mathbb{R}^3; a \leq s \leq t \leq b, |v - x_0| \leq c\}$ , cu  $x_0 \in \mathbb{R}$  și  $c \in (0, \infty)$ . Dacă în plus, există  $K > 0$  astfel încât*

$$|k(t, s, v) - k(t, s, w)| \leq K |v - w| \quad \forall (t, s, v), (t, s, w) \in D \quad (2.12)$$

și există un  $d \in [0, c)$  astfel încât

$$|f(t) - x_0| \leq d, \quad \forall t \in [a, b], \quad (2.13)$$

atunci există o unică funcție  $x \in C[a, a + \delta]$  care satisface ecuația 2.10 în  $[a, a + \delta]$ , unde

$$\delta = \min \left\{ b - a, \frac{(c - d)}{M} \right\}, \quad M = \sup \{ |k(t, s, v)|; (t, s, v) \in D \}.$$

(Se presupune că  $M$  este pozitiv deoarece cazul  $M = 0$  este trivial)

**Demonstrație:** Se consideră spațiul  $C[a, a + \delta]$  cu norma sup uzuală și metrica  $d$  generată de aceasta. Notăm

$$Y = \{g \in C[a, a + \delta]; |g(t) - x_0| \leq c, \forall t \in [a, a + \delta]\}.$$

În mod clar  $(Y, d)$  este un spațiu metric complet (deoarece moment ce  $Y$  este o submulțime închisă a spațiului  $(C[a, a + \delta], d)$ ). Ca de obicei, definim un operator  $T$  prin

$$(Tg)(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s, g(s)) ds, \quad t \in [a, a + \delta], \quad g \in Y.$$

Să arătăm că  $T$  are imaginea în  $Y$ . Într-adevăr, pentru orice  $g \in Y$  și  $t \in [a, a + \delta]$  vom avea (vezi 2.13).

$$\begin{aligned} |(Tg)(t) - x_0| &\leq |f(t) - x_0| + \int_a^t |k(t, s, g(s))| ds \\ &\leq d + M(t - a) \\ &\leq d + M\delta \leq c, \end{aligned}$$

ceea ce dovedește afirmația. Prin argumente similar cu cele utilizate în demonstrația 2 a teoremei 12 deducem că  $T^k$  este o contracție pe  $(Y, d)$  pentru  $k$  suficient de mare. Deci  $T$  are un punct fix unic  $x \in Y$  care este soluția unică a ecuației 2.10 în  $[a, a + \delta]$ .  $\square$

Un alt rezultat de existență și unicitate se obține dacă nucleul  $k$  este definit pe un domeniu diferit,

$$\tilde{D} = \{(t, s, v) \in \mathbb{R}^3; a \leq s \leq t \leq b, |v - f(s)| \leq c\}, \quad c \in (0, \infty),$$

care este o submulțime compactă a lui  $\mathbb{R}^3$ .

**Teoremă 16.** Presupunem că  $f \in C[a, b]$  și  $k = k(t, s, v) \in C(\tilde{D})$ ,  $M = \sup_{\tilde{D}} |k| > 0$ . Dacă, în plus, există  $K > 0$  astfel încât

$$|k(t, s, v) - k(t, s, w)| \leq K |v - w|, \forall (t, s, v) \in \tilde{D}, \quad (2.14)$$

atunci există o unică funcție  $x \in C[a, a + \delta]$  care satisface ecuația 2.10 în  $[a, a + \delta]$ , unde  $\delta = \min \{b - a, \frac{c}{M}\}$ .

**Demonstrație:** Demonstrația este similară cu cea a teoremei 15 de mai sus. Aici domeniul operatorului  $T$  este

$$\tilde{Y} = \{g \in C[a, a + \delta] ; |g(t) - f(t)| \leq c, \forall t \in [a, a + \delta]\},$$

care este bila închisă în  $(C[a, a + \delta], d)$  centrată în  $f$  (restricționată la  $[a, a + \delta]$ ) de rază  $c$ .

În mod evident  $T$  este bine definit pe  $\tilde{Y}$  și ia valori în  $\tilde{Y}$ . De asemenea, se verifică cu ușurință că  $T^k$  este o contracție pentru orice  $k \in \mathbb{N}$  suficient de mare. Aceasta completează demonstrația (vezi observația 3).  $\square$

## 2.2 Ecuatii de tip Fredholm

În cele ce urmează  $\mathbb{K}$  este  $\mathbb{R}$  sau  $\mathbb{C}$ . Considerăm în  $\mathbb{K}$  ecuația integrală

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t, s) x(s) ds, t \in [a, b], \quad (2.16)$$

unde  $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C([a, b]; \mathbb{K})$  și  $k \in C([a, b] \times [a, b]; \mathbb{K})$ .

Ecuația (2.16) este cunoscută ca ecuația Fredholm (uneori este numită de speța a doua). Ea implică un interval fix de integrare și este fundamental diferită de ecuația 2.2. O prima observație care confirmă această afirmație este că, în timp ce ecuația Volterra corespunzătoare (de speța a doua) are întotdeauna o soluție (unică, continuă) pe  $[a, b]$ , ecuația 2.16 poate să nu aibă soluție în unele cazuri.

De exemplu, presupunând că există o soluție  $x \in C[0, 1] := C([0, 1]; \mathbb{R})$  a ecuației

$$x(t) = t + \int_0^1 k(t, s) x(s) ds, t \in [0, 1], \quad (2.17)$$

unde

$$k(t, s) = \begin{cases} \pi^2(s)(1-t), & s \leq t \\ \pi^2 t(1-s), & t \leq s \end{cases}$$

prin derivarea de două ori a ecuației 2.17 rezultă că  $x$  ar trebui să satisfacă problema

$$\begin{cases} x''(t) + \pi^2 x(t) = 0, & t \in [0, 1] \\ x(0) = 0, x(1) = 1. \end{cases}$$

Pe de altă parte, se vede ușor că această problemă nu are nicio soluție. Prin urmare, ecuația 2.17 nu are soluție.

Merită totuși subliniat faptul că în baza ipotezelor de mai sus, ecuația 2.16 are o soluție unică în  $C[a, b]$  ori de câte ori norma sup a lui  $|k|$  este suficient de mică, mai precis, dacă  $(b-a) \sup_{[a,b] \times [a,b]} |k| < 1$ . Acest rezultat se verifică cu ușurință folosind Principiul Contracțiilor al lui Banach. De fapt, problema existenței poate fi discutată în spațiul  $L^2(a, b; \mathbb{K})$  care este un cadru mai larg de lucru. Mai exact, să presupunem  $f \in L^2(a, b; \mathbb{K})$ ,  $k \in L^2(Q; \mathbb{K})$ , unde  $Q = (a, b) \times (a, b)$ .

Soluția  $x$  a ecuației 2.16 va fi căutată în  $L^2(a, b; \mathbb{K})$  care este un spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar uzual și norma indusă de acesta:

$$\langle g_1, g_2 \rangle_{L^2} = \int_a^b g_1(t) \cdot \overline{g_2(t)} dt, \quad \|g\|_{L^2}^2 = \langle g, g \rangle.$$

Desigur, dacă găsim o soluție  $x \in L^2(a, b; \mathbb{K})$  a ecuației 2.16 cu  $f \in C([a, b]; \mathbb{K})$ ,  $k \in C([a, b] \times [a, b]; \mathbb{K})$ , atunci evident  $x \in C([a, b]; \mathbb{K})$ .

Avem următorul rezultat.

**Teoremă 17.** *Dacă*

$$f \in L^2(a, b; \mathbb{K}), -\infty < a < b < +\infty, k \in L^2(Q; \mathbb{K})$$

*și  $\int_Q |k(t, s)|^2 dt ds < 1$ , unde  $Q = (a, b) \times (a, b)$ , atunci există o unică funcție  $x \in L^2(a, b; \mathbb{K})$  care satisface ecuația*

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t, s) x(s) ds,$$

*aproape peste tot în  $(a, b)$ .*

**Demonstrație:** Fie  $T$  operatorul definit de

$$(Tg)(t) = f(t) + \int_a^b k(t, s) g(s) ds, \forall g \in L^2(a, b; \mathbb{K}), t \in (a, b).$$

Se vede cu ușurință că  $T$  ia valori în  $L^2(a, b; \mathbb{K})$ .

Mai mult,  $\|k\|_{L^2(Q; \mathbb{K})} < 1$ , deci  $T$  este o contracție în raport cu metrica uzuală din  $\|\cdot\|_{L^2}$ . Prin urmare, există un unic punct fix  $x \in L^2(a, b; \mathbb{K})$  care este soluția unică în  $L^2$  a ecuației

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t, s) x(s) ds.$$

□

**Observație 8.** Folosind o procedură similară cu cea utilizată pentru ecuația Volterra 2.2, putem deduce că soluția dată de teorema 17 poate fi reprezentată prin formula

$$x(t) = f(t) + \int_a^b R(t, s) f(s) ds, \text{ pentru } t \in (a, b),$$

unde nucleul rezolvent  $R$  este dat de

$$R(t, s) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i(t, s), \quad (2.18)$$

cu

$$k_1(t, s) := k(t, s), k_m(t, s) = \int_a^b k(t, \tau) k_{m-1}(\tau, s) d\tau, \forall m \geq 2.$$

Seria din 2.18 converge în  $L^2(Q, \mathbb{K})$  și aproape peste tot pe  $Q$ .

**Observație 9.** Teorema 17 poate fi extinsă la ecuația neliniară de tip Fredholm

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t, s, x(s)) ds, t \in [a, b]. \quad (2.19)$$

Într-adevăr, dacă  $f \in L^2(a, b; \mathbb{K})$ ,  $k : Q \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  este măsurabil Lebesgue,  $k(\cdot, \cdot, 0) \in L^2(Q; \mathbb{K})$  și

$$|k(t, s, v) - k(t, s, w)| \leq \alpha(t, s) |v - w|, \text{ pentru orice } v, w \in \mathbb{K} \text{ și } (t, s) \in Q,$$

pentru un  $\alpha \in L^2(Q)$  cu  $\|\alpha\|_{L^2(Q)} < 1$ , atunci există un unic  $x \in L^2(a, b; \mathbb{K})$  care satisface ecuația 2.19 aproape peste tot în  $(a, b)$ .

Ca și în celelalte cazuri considerate, concluzia rezultă din Principiul contracțiilor al lui Banach. Să observăm doar că pentru orice  $g \in L^2(a, b; \mathbb{K})$ , funcția  $(t, s) \mapsto k(t, s, g(s))$  aparține lui  $L^2(Q, \mathbb{K})$  deoarece

$$|k(t, s, g(s))| \leq |k(t, s, 0)| + \alpha(t, s) |g(s)|, \text{ pentru } (t, s) \in Q.$$

**Observație 10.** În cazul ecuațiilor Fredholm, conceptul de soluție locală nu are sens deoarece termenul integral implică valorile  $x(t)$  pentru  $t \in (a, b)$ . Acest lucru arată încă o dată faptul că ecuațiile Fredholm sunt fundamental diferite de ecuațiile Volterra.

Pe de altă parte, ne putem întreba dacă ecuația 2.16 mai are soluții atunci când condiția  $\|k\|_{L^2(Q; \mathbb{K})} < 1$  nu mai este îndeplinită. Un răspuns complet este dat de alternativa lui Fredholm (Vezi observația 6). În cazul nostru particular,  $H = L^2(a, b; \mathbb{K})$  și  $A : H \rightarrow H$  dat de

$$(Ag)(t) = \int_a^b k(t, s) g(s) ds, \forall g \in H, \text{ pentru } t \in (a, b) .. \quad (2.20)$$



În mod clar,  $A \in L(H)$ .

**Lemă 2.** Dacă  $k \in L^2(Q; \mathbb{K})$ , atunci operatorul  $A : H \rightarrow H$  definit de 2.20 este compact.

**Demonstrație:** Să presupunem mai întâi că nucleul  $k \in C([a, b] \times [a, b]; \mathbb{K})$ . Pentru a arăta că  $A$  este compact vom folosi criteriul Arzelà-Ascoli (Vezi Capitolul 1) și observăm că criteriul este valabil cu  $\mathbb{K}$  în loc de  $\mathbb{R}^k$ .

Fie  $B(0, r)$ ,  $r \in (0, \infty)$ , o bilă în  $H$ . Atunci mulțimea  $F = \{Ag; g \in B(0, r)\}$  este o submulțime mărginită a lui  $C([a, b]; \mathbb{K})$ :

$$\begin{aligned} |(Ag)(t)| &\leq \int_a^b |k(t, s)| \cdot |g(s)| ds \\ &\leq \left( \int_a^b |k(t, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2} \\ &\leq r(b-a)^{\frac{1}{2}} \sup_Q |k| < \infty, \end{aligned}$$

pentru orice  $g \in B(0, r)$  și orice  $t \in [a, b]$ .

Mulțimea  $\mathcal{F}$  este de asemenea echicontinuă deoarece  $k$  este uniform continuu pe  $[a, b] \times [a, b]$ , deci (din Criteriul Arzelà-Ascoli)  $\mathcal{F}$  este relativ compact în  $C([a, b]; \mathbb{K})$ , deci și în  $H = L^2(a, b; \mathbb{K})$ . Prin urmare,  $A$  este într-adevăr un operator compact.

Acum, presupunem că  $k \in L^2(Q, \mathbb{K})$ . Atunci, din teorema 11, există un șir  $(k_n)$  în  $C([a, b] \times [a, b]; \mathbb{K})$  astfel încât  $\|k_n - k\|_{L^2(Q; \mathbb{K})} \rightarrow 0$  pentru ca  $n \rightarrow \infty$ . Să asociem cu fiecare  $k_n$  operatorul  $A_n \in L(H)$  definit de

$$(A_n g)(t) = \int_a^b k_n(t, s) g(s) ds, \forall g \in H, t \in [a, b],$$

care este compact, conform argumentului de mai sus.

Un calcul simplu arată că  $\|A_n - A\|_{L(H)} \leq \|k_n - k\|_{L^2(Q; \mathbb{K})}$  pentru orice  $n$ , deoarece  $\|A_n - A\|_{L(H)} \rightarrow 0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ . Din teorema 3 rezultă că  $A$  este compact.  $\square$

Se consideră (în  $\mathbb{K}$ ) ecuația

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) x(s) ds, t \in [a, b], \quad (2.21)$$

unde  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f \in L^2(a, b; \mathbb{K})$ ,  $k \in L^2(Q, \mathbb{K})$ ,  $Q = (a, b) \times (a, b)$ . Conform teoremei 8, ecuația 2.21 are o soluție unică în  $L^2(a, b; \mathbb{K})$  cu condiția ca  $|\lambda|$  să fie suficient de mic. Mai precis, asta se întâmplă dacă

$$|\lambda| \cdot \|k\|_{L^2(Q; \mathbb{K})} < 1. \quad (2.22)$$

Vom arăta în cele ce urmează că există soluții pentru ecuația 2.21 chiar dacă  $\lambda$  nu satisface condiția 2.22.

Folosind notația de mai sus putem scrie ecuația 2.21 ca o ecuație abstractă în  $H = L^2(a, b; \mathbb{K})$ , și anume

$$x = f + \lambda Ax. \quad (2.23)$$

Reținem faptul că  $A^*$ , adjunctul lui  $A$ , este dat de

$$(A^*h)(t) = \int_a^b \overline{k(s, t)} \cdot h(s) ds \forall h \in H.$$

și de asemenea,  $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ .

Conform lemei 4 și teoremei 8, operatorul  $A$  are o mulțime numărabilă de valori proprii, 0 fiind singurul punct de acumulare posibil; în plus, pentru orice valoare proprie  $\nu \neq 0$  a lui  $A$ ,  $\dim N(I - \lambda A) > \infty$ , unde  $\lambda = \frac{1}{\nu}$ . Desigur, afirmații similare sunt valabile pentru  $A^*$ , în special  $\dim N(I - \bar{\lambda} A^*) < \infty$ . De fapt, putem demonstra că, dacă  $\nu \neq 0$  este o valoare proprie a lui  $A$ , atunci

$$\dim N(I - \lambda A) = \dim N(I - \bar{\lambda} A^*), \text{ unde } \lambda = \frac{1}{\nu}. \quad (2.24)$$

În primul rând, reținem faptul că  $\bar{\nu}$  este o valoare proprie a lui  $A^*$  (conform teoremei 7), deci  $\dim N(I - \bar{\lambda} A^*) \geq 1$ .

Fie  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$  și  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  bazele ortonormale în  $N(I - \lambda A)$  și respectiv  $N(I - \bar{\lambda} A^*)$ . Presupunem prin absurd că  $m < n$ . Fie  $B$  operatorul asociat cu nucleul

$$K(t, s) = k(t, s) - \sum_{j=1}^m \overline{\phi_j(s)} \cdot \psi_j(t)$$

și fie  $\phi, \psi \in H$  soluțiile ecuațiilor

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \lambda (B\phi)(t) \\ &= \lambda \int_a^b k(t, s) \phi(s) ds - \lambda \sum_{j=1}^m \psi_j(t) \int_a^b \overline{\phi_j(s)} \cdot \phi(s) ds, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \bar{\lambda} (B^*\psi)(t) \\ &= \bar{\lambda} \int_a^b \overline{k(s, t)} \psi(s) ds - \bar{\lambda} \sum_{j=1}^m \phi_j(t) \int_a^b \overline{\psi_j(s)} \cdot \psi(s) ds. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Înmulțind ecuația 2.25 cu  $\overline{\psi_k(t)}$  și apoi integrând pe  $[a, b]$  ecuația rezultată ne conduce la

$$(\phi, \psi_k)_{L^2} = \int_a^b \underbrace{\left[ \lambda \int_a^b k(t, s) \cdot \overline{\psi_k(t)} dt \right]}_{\psi_k(s)} \phi(s) ds - \lambda (\phi, \phi_k)_{L^2} = (\phi, \psi_k)_{L^2} - \lambda (\phi, \phi_k)_{L^2}$$

prin urmare

$$(\phi, \phi_k)_{L^2} = 0, k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.27)$$

Din 2.25 și 2.27 deducem faptul că  $\phi \in N(I - \lambda A)$ . Astfel  $\phi = \sum_{i=1}^m c_i \phi_i$ , cu  $c_i \in \mathbb{K}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Acest lucru, combinat cu 2.27 ne conduce la  $\phi = 0$ , prin urmare ecuația 2.25 are doar soluția nulă.

Pe de altă parte, ecuația 2.26 este satisfăcută de  $\psi_k$  pentru orice  $k \in \{m+1, \dots, n\}$ .

Într-adevar, deoarece  $(\psi_k, \psi_j)_{L^2} = 0$  pentru  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k \in \{m+1, \dots, n\}$ , ecuația 2.26 cu  $\psi = \psi_k$ ,  $k = m+1, \dots, n$  poate fi scrisă ca  $\psi_k = \bar{\lambda} A^* \psi_k$ ,  $k = m+1, \dots, n$ . Acest lucru înseamnă că  $N(I - \bar{\lambda} B^*) = N(I - (\lambda B)^*) \neq \{0\}$ , în timp ce  $N(I - \lambda B) = \{0\}$ , ceea ce contrazice teorema 7. Prin urmare,  $m \geq n$ .

Inegalitatea inversă rezultă din faptul că  $(\bar{\lambda} A^*)^* = \lambda A$ , deci demonstrația lui 2.24 este completă.

Observăm că în cazul ecuației 2.21 alternativa lui Fredholm (vezi observația 6) are următoarea formă:

**Teoremă 18. (Alternativa lui Fredholm)** Presupunem că  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f \in H = L^2(a, b; \mathbb{K})$ ,  $k \in L^2(Q; \mathbb{K})$ , unde  $Q = (a, b) \times (a, b)$  și fie  $A : H \rightarrow H$  operatorul definit de

$$(Ag)(t) = \int_a^b k(t, s) g(s) ds, \forall g \in H, t \in (a, b).$$

Atunci are loc una din următoarele afirmații:

▷  $N(I - \lambda A) = \{0\}$  (dacă și numai dacă  $N(I - \bar{\lambda} A^*) = \{0\}$ ) și în acest caz ecuația

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) x(s) ds, t \in [a, b] \quad (F)$$

are o soluție unică pentru orice  $f \in H$ ,

▷  $\dim N(I - \lambda A) = \dim N(I - \bar{\lambda} A^*) = m$ , cu  $1 \leq m \leq \infty$  și în acest caz ecuația  $F$  are soluție dacă și numai dacă

$$(f, \psi)_{L^2} = \int_a^b f(t) \cdot \overline{\psi(t)} dt = 0, \forall \psi \in \ker(I - \bar{\lambda} A^*),$$

(echivalent,  $(f, \psi)_{L^2} = 0$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ , unde  $\psi_k$  formează o bază ortonormală în  $N(I - \bar{\lambda} A^*)$ ).

**Observație 11.** Deoarece mulțimea  $S = \{\lambda \in \mathbb{K}; N(I - \lambda A) = \{0\}\}$  este numărabilă, rezultă din teorema 18 că există "multe"  $\lambda$ -uri care nu îndeplinesc condiția 2.22, dar pentru care ecuația  $F$  are o (unică) soluție pentru orice  $f \in H = L^2(a, b; \mathbb{K})$ . Chiar și pentru  $\lambda \in S$  ecuația  $F$  poate fi rezolvată dacă și numai dacă  $f \perp N(I - \bar{\lambda} A^*)$ .

### Cazul nucleelor hermitiene: formula lui Schmidt

Pe lângă condițiile

$$f \in H = L^2(a, b; \mathbb{K}), k \in L^2(Q; \mathbb{K}), Q = (a, b) \times (a, b),$$

pe care le-am utilizat anterior, să presupunem că nucleul  $k$  este hermitian, adică,

$$k(t, s) = \overline{k(s, t)}, \forall (t, s) \in Q.$$

În mod evident,  $A = A^*$ . Conform propoziției 8.5, fiecare valoare proprie a lui  $A$  este reală.

În continuare, încercăm să folosim teorema Hilbert-Schmidt pentru a investiga ecuația Fredholm în forma sa abstractă 2.23, adică,

$$x = f + \lambda Ax. \quad (A)$$

De fapt, în cele ce urmează, în ecuația A, operatorul  $A$  poate să fie orice operator linear, simetric, compact, definit pe un spațiu Hilbert separabil,  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$ , cu valori în el însuși și  $f \in H$ .

Ca un prim pas, să presupunem că  $N(A) = \{0\}$ , adică zero nu este valoare proprie a lui  $A$ . Astfel, Teorema Hilbert – Schmidt (teorema 9) se poate aplica lui  $A$  (vezi lema 4). Notăm cu  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  valorile proprii ale lui  $A$  date de această teoremă și cu  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  vectorii proprii corespunzători, adică  $Au_n = \lambda_n u_n, n = 1, 2, \dots$ .

Conform demonstrației teoremei Hilbert-Schmidt, fiecare valoare proprie este luată în considerare de  $k$ -ori, unde  $k$  înseamnă multiplicitatea sa (dimensiunea spațiului propriu corespunzător). Sistemul  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  este o bază ortonormată în  $H$ .

Pentru  $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$  distingem două cazuri

- (i)  $N(I - \lambda A) = \{0\}$ , adică  $\frac{1}{\lambda}$  nu este o valoare proprie a lui  $A$ ;
- (ii)  $N(I - \lambda A) \neq \{0\}$ , adică  $\frac{1}{\lambda}$  este o valoare proprie a lui  $A$ .

Să discutăm mai întâi cazul (i).

Din observația 6, ecuația 2.23 are o soluție unică  $x$  pentru orice  $f \in H$ . Din formula 1.22 din demonstrația teoremei 9 (Teorema Hilbert – Schmidt) avem

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, u_n) u_n. \quad (2.28)$$

Pe de altă parte, folosind ecuația 2.23 și faptul că  $A$  este simetric, obținem

$$(x, u_n) = (f, u_n) + \lambda \lambda_n (x, u_n), n = 1, 2, \dots,$$

de unde

$$(x, u_n) = \frac{1}{1 - \lambda \lambda_n} (f, u_n), n = 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Acum, din 2.23), 2.28 și 2.29 putem deduce următoarea formulă pentru soluția  $x$  a ecuației 2.23 (cunoscută ca formula lui Schmidt)

$$x = f + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{1 - \lambda \lambda_n} (f, u_n) u_n. \quad (2.30)$$

Acum, să discutăm cazul (ii), adică  $\frac{1}{\lambda}$  este o valoare proprie a operatorului  $A$ ; evident,  $\frac{1}{\lambda} = \lambda_k$  pentru un  $k \in \mathbb{N}$ , deci formula 2.30 nu are sens în acest caz.

Notăm  $H_0 := N(I - \lambda A) = N(\lambda_k I - A)$ ,  $H_1 := H_0^\perp$ , ca urmare  $H = H_0 \oplus H_1$ . Din teorema 8.4,  $H_0$  este de dimensiune finită. Notăm cu  $m := \dim H_0 \in \mathbb{N}$ . Fie  $B_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  o bază a lui  $H_0$ . Cum  $H$  este un spațiu separabil, la fel este și  $H_1$ .

Ținând cont de faptul că  $A$  este simetric, se vede cu ușurință că  $A$  duce  $H_1$  în  $H_1$ . În mod clar, restricția  $A_1 = A|_{H_1}$  este simetrică și  $A_1 \in K(H_1)$ , adică  $A_1$  este compact în  $H_1$  care este un subspațiu Hilbert al lui  $H$  cu același  $(\cdot, \cdot)$  și  $\|\cdot\|$ . Evident,  $N(A_1) = \{0\}$  deci Teorema Hilbert-Schmidt se poate aplica lui  $H_1$  și  $A_1$  și arată existența unui șir de valori proprii (reale) ale lui  $A_1$  (deci ale lui  $A$ ), care nu includ  $\lambda_k$  și a unei baze ortonormale corespunzătoare în  $H_1$ , cu

$$A_1 u_n = A u_n = \lambda_n u_n, n \in \mathbb{N}, n \neq k.$$

Conform analizei anterioare corespunzătoare cazului (i), ecuația 2.23 are o soluție (unică)  $x = x_1$  în  $H_1$  (adică,  $x_1 - \lambda A_1 x_1 = f$ ) dacă și numai dacă  $f \in H_1$  și

$$x_1 = f + \lambda \sum_{\lambda_n \neq \lambda_k} \frac{\lambda_n}{1 - \lambda \lambda_n} (f, u_n) u_n.$$

Dacă luăm în considerare 2.23 în  $H$ , atunci  $f \in H_1$  și pentru orice  $y \in H_0$ ,

$$x = f + \lambda \sum_{\lambda_n \neq \lambda_k} \frac{\lambda_n}{1 - \lambda \lambda_n} (f, u_n) u_n + y$$

este o soluție a ecuației 2.23. În consecință, formula

$$x = f + \lambda \sum_{\lambda_n \neq \lambda_k} \frac{\lambda_n}{1 - \lambda \lambda_n} (f, u_n) u_n + \sum_{i=1}^m c_i v_i, \quad (2.31)$$

cu  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}$  ne oferă toate soluțiile ecuației 2.23.

Acum ne îndreptăm atenția asupra cazului în care  $N(A) \neq \{0\}$ .

Notând  $Y_0 = N(A)$  și  $Y_1 = Y_0^\perp$ , putem scrie  $H = Y_0 \oplus Y_1$ . Putem presupune că  $Y_0$  este un subspațiu propriu al lui  $H$ , în caz contrar avem  $A = 0$  care este un caz trivial. Este ușor de observat că  $A$  duce  $Y_1$  în  $Y_1$ . Evident,  $Y_1$  este un subspațiu Hilbert al lui  $H$  față de aceleași  $(\cdot, \cdot)$  și  $\|\cdot\|$ , iar restricția  $\tilde{A} = A|_{Y_1}$  este simetrică, compactă și  $N(\tilde{A}) = \{0\}$ . Dacă  $Y_1$  este infinit dimensional, atunci putem aplica teorema Hilbert – Schmidt lui  $Y_1$  și  $\tilde{A}$ . Pentru a

rezolva ecuația 2.23 folosim descompunerea  $x = x_0 + x_1$ ,  $f = f_0 + f_1$ , unde  $x_0, f_0 \in Y_0$  și  $x_1, f_1 \in Y_1$ . Astfel 2.23 devine

$$x_0 - f_0 = -x_1 + f_1 + \lambda A x_1,$$

prin urmare ambele părți sunt egale cu 0, deci  $x_0 = f_0$  și

$$x_1 = f_1 + \lambda \tilde{A} x_1. \quad (2.32)$$

În mod clar, pentru fiecare  $f \in H$ ,  $f = f_0 + f_1$ ,  $x$  este soluție unică a ecuației 2.23 dacă și numai dacă  $x = f_0 + x_1$ , unde  $x_1 \in Y_1$  satisface ecuația 2.32.

Merită subliniat faptul că ecuația 2.32, cu  $\tilde{A} : Y_1 \rightarrow Y_1$ ,  $N(\tilde{A}) = \{0\}$ , se află în situația pe care am avut-o mai înainte, deci se poate discuta în mod similar despre rezolvarea ecuației 2.32 folosind vectorii proprii ai lui  $\tilde{A}$  (adică vectorii proprii ai lui  $A$  corespunzători la valori proprii nenule).

Dacă  $Y_1$  este finit dimensional, atunci ecuația 2.32 se reduce la un sistem algebraic linear care poate fi rezolvat folosind calcule algebrice elementare.

**Exemplu 1.** Fie  $H = L^2(-\pi, \pi)$  cu produsul scalar și norma uzuale. Luăm în considerare baza ortonormală obișnuită în  $H$ , adică

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, u_{2k-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt),$$

$$u_{2k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt), k = 1, 2, \dots$$

Pentru un  $m \in \mathbb{N}$  dat, definim

$$k(t, s) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} u_n(t) u_n(s), (t, s) \in Q = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi).$$

În mod clar,  $k \in C(\bar{Q}) \subset L^2(Q)$ .

Dacă  $A$  este operatorul definit de 2.20, unde  $a = -\pi, b = \pi$ , cu acest nucleu (care este simetric, deci hermitian), atunci  $Ag = 0$  pentru orice  $g$  care este o combinație liniară de  $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$ . Prin urmare

$$\text{Span}\{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\} \subset N(A).$$

Pe de altă parte, dacă  $Af = 0$ , unde  $f$  este un element din  $H$ , adică  $f = \sum_{k=0}^{\infty} (f, u_k)_{L^2} u_k$  (care este dezvoltarea în serie Fourier a lui  $f$ ) atunci

$$\begin{aligned} 0 &= (Af, f)_{L^2} \\ &= \left( \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} (f, u_n)_{L^2} u_n, \sum_{k=0}^{\infty} (f, u_k)_{L^2} u_k \right)_{L^2} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} (f, u_n)_{L^2}^2, \end{aligned}$$

prin urmare  $(f, u_n)_{L^2} = 0$  pentru orice  $n \geq m$  și deci  $f = \sum_{k=0}^{m-1} (f, u_k)_{L^2} u_k$ , adică  $f \in \text{Span} \{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\}$ , Prin urmare,

$$N(A) = \text{Span} \{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\}$$

Pe de altă parte, dacă alegem, de exemplu,

$$k(t, s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} u_n(t) u_n(s), (t, s) \in Q,$$

atunci operatorul corespunzător  $A$  satisface condiția  $N(A) = \{0\}$ .

### Comentarii

▷ Dacă în ecuația

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) x(s) ds, t \in [a, b],$$

(care este 2.21 de mai sus) presupunem  $f \in C[a, b]$  și  $k \in C([a, b] \times [a, b])$ , atunci  $x \in C[a, b]$ . În plus, dacă  $f$  și  $k$  sunt mai regulate, atunci și  $x$  este.

▷ Teoria de mai sus funcționează și dacă  $[a, b]$  este înlocuit cu un domeniu mărginit  $D \subset \mathbb{R}^N$  sau cu frontiera unui astfel de domeniu. Este bine cunoscut faptul că principalele probleme la limită de tip eliptic (Dirichlet, Neumann, Robin) pot fi reduse, prin utilizarea potențialilor, la ecuații Fredholm în domeniile corespunzătoare. Astfel, teoria de mai sus poate fi folosită pentru a rezolva astfel de probleme.

---

---

# Capitolul 3

---

---

## Aplicații

**Problema 1.** *Calculați nucleul rezolvent al ecuației Volterra și apoi găsiți soluția corespunzătoare:*

$$x(t) = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2-s^2} x(s) ds, t \geq 0.$$

**Demonstrație:** Reamintim că pentru un nucleu dat

$$k = k(t, s) \in C(\Delta), \Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}; a \leq s \leq t \leq b\},$$

nucleul rezolvent  $R(t, s)$  este definit de

$$R(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, s), (t, s) \in \Delta,$$

unde

$$\begin{aligned} k_1(t, s) &= k(t, s), \\ k_n(t, s) &= \int_s^t k(t, \tau) k_{n-1}(\tau, s) d\tau, (t, s) \in \Delta, n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Reținem faptul că intervalul  $[a, b]$  ar putea fi înlocuit cu  $[a, \infty)$  dacă ecuația Volterra corespunzătoare este considerată  $[a, \infty)$ .



Evident,  $k_1(t, s) = e^{t^2-s^2}$ ,  $0 < s < t$ , de unde

$$k_2(t, s) = \int_s^t e^{t^2-\tau^2} e^{\tau^2-s^2} d\tau = (t-s)e^{t^2-s^2}, \quad 0 < s < t,$$

$$k_3(t, s) = \int_s^t e^{t^2-\tau^2} e^{\tau^2-s^2} (\tau-s) d\tau = \frac{(t-s)^2}{2!} e^{t^2-s^2}, \quad 0 < s < t.$$

Prin inducție obținem că

$$k_n(t, s) = \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{t^2-s^2}, \quad 0 < s < t, \quad n = 2, 3, \dots$$

Astfel găsim

$$R(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, s) = e^{t^2-s^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{t^2-s^2+t-s},$$

de unde

$$x(t) = e^{t^2} + \int_0^t R(t, s) e^{s^2} ds = e^{t(t+1)}, \quad t \geq 0.$$

Alternativ, notând  $y(t) = e^{-t^2} x(t)$ , ecuația dată poate fi scrisă astfel

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s) ds, \quad t \geq 0$$

care prin derivare devine echivalentă cu problema Cauchy pentru o ecuație diferențială

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), & t \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

deci obținem din nou soluția  $x$ .

□

**Problema 2.** Rezolvați următoarele ecuații integrale transformându-le în probleme Cauchy pentru ecuații diferențiale:

(a)  $x(t) = t - \frac{t^3}{6} + \int_0^t (t-s+1) x(s) ds, \quad t \geq 0;$

(b)  $x(t) = t^3 + 1 - \int_0^t (t-s) x(s) ds, \quad t \geq 0;$

(c)  $x(t) = 3t - \int_0^t e^{t-s} x(s) ds, \quad t \geq 0.$

**Demonstrație:** (a) Dacă  $x$  este o soluție a ecuației integralei date, prin derivare avem că  $x(0) = 0$  și

$$x'(t) = a - \frac{t^2}{2} + x(t) + \int_0^t x(s) ds, t \geq 0.$$

Prin urmare  $x'(0) = 1$  și derivând încă o dată

$$x'' = x'(t) + x(t) - t.$$

Astfel am obținut problema Cauchy pentru o ecuație diferențială de ordinul doi liniară

$$\begin{cases} x'' - x'(t) - x(t) = -t, t \geq 0 \\ x(0) = 0, x'(0) = 1. \end{cases}$$

Evident, dacă  $x$  este o soluție a acestei probleme, atunci  $x$  satisface ecuația integrală dată.

Prin calcule găsim

$$x(t) = c_1 e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\right)} + c_2 e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}t\right)} + t - 1,$$

cu

$$c_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, c_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

(b) Procedând ca la punctul (a), derivând de două ori ecuația integrală, obținem că Problema Cauchy echivalentă cu aceasta este

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 6t, t \geq 0 \\ x(0) = 1, x'(0) = 0. \end{cases}$$

Prin calcule simple găsim că soluția acesteia, care coincide cu soluția ecuației integrale, este

$$x(t) = \cos t - 6 \sin t + 6t, t \geq 0.$$

(c) Dacă  $x$  este o soluție, atunci  $x(0) = 0$ . Prin derivarea ecuației integrale date, găsim

$$x'(t) = 3 - x(t) - \underbrace{\int_0^t e^{t-s} x(s) ds}_{3t - x(t)}, t \geq 0,$$

deci  $x$  verifică problema Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 3 - 3t, t \geq 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

care este echivalentă cu ecuația integrală dată și are soluția

$$x(t) = \frac{3}{2}t(2 - t), t \geq 0.$$

□

**Problema 3.** Rezolvați următoarele ecuații Volterra de speța întâi:

$$(a) \int_0^t (1 - t^2 + s^2) \cdot x(s) \, ds = \frac{t^2}{2}, t \geq 0;$$

$$(b) \int_0^t \cos(t-s) \cdot x(s) \, ds = 2t(t+1), t \geq 0.$$

**Demonstrație:** (a) Din ecuația integrală dată obținem prin derivare

$$x(t) - 2t \int_0^t x(s) \, ds = t, t \geq 0$$

Evident  $y(t) = \int_0^t x(s) \, ds$  satisface problema Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - 2ty(t) = t, t \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

care are soluția

$$y(t) = \frac{1}{2} (e^{t^2} - 1), t \geq 0 \Rightarrow x(t) = y'(t) = te^{t^2}, t \geq 0.$$

(b) Din ecuația integrală dată obținem prin derivare

$$x(t) - \int_0^t \sin(t-s) \cdot x(s) \, ds = 2(2t+1), t \geq 0$$

și deci  $x(0) = 2$ . O altă derivare conduce la

$$x'(t) - \underbrace{\int_0^t \cos(t-s) \cdot x(s) \, ds}_{2t(t+1)} = 4, t \geq 0.$$

Deci am obținut problema Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2(t^2 + t + 2), t \geq 0 \\ x(0) = 2, \end{cases}$$

care este echivalentă cu ecuația integrală dată și are soluția

$$x(t) = \frac{2}{3}t^3 + t^2 + 4t + 2, t \geq 0.$$

□

**Problema 4.** Fie  $h \in C[0, b]$ , unde  $b \in (0, \infty)$ . Definim  $k(t, s) = h(t-s)$ ,  $0 \leq s \leq t \leq b$ . Să se arate că nucleul rezolvent  $R(t, s)$  asociat nucleului  $k(t, s)$  depinde doar de  $t-s$ .

**Demonstrație:**  $R(t, s)$  este o funcție continuă pe mulțimea  $\Delta_0 = \{(t, s); 0 \leq s \leq t \leq b\}$ , fiind definită ca

$$R(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, s), (t, s) \in \Delta_0,$$

unde

$$\begin{aligned} k_1(t, s) &= k(t, s) = h(t - s) \\ k_n(t, s) &= \int_s^t k(t, \tau) k_{n-1}(\tau, s) d\tau \\ &= \int_s^t h(t - \tau) k_{n-1}(\tau, s) d\tau, (t, s) \in \Delta_0, n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Deoarece  $k_1$  depinde numai de  $t - s$ , putem observa cu ușurință (prin schimbarea de variabilă) că la fel se întâmplă și pentru  $k_2$ . Prin inducție rezultă că toate  $k_n$  – urile depind numai de  $t - s$  și rezultă că la fel se întâmplă și cu  $R$ .  $\square$

**Problema 5.** Fie  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$  și funcțiile ne-negative,  $f, x \in C[a, b], k \in C(\Delta, )$  unde  $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}; a \leq s \leq t \leq b\}$ . Dacă

$$x(t) \leq f(t) + \int_a^t k(t, s) x(s) ds, t \in [a, b]$$

atunci

$$x(t) \leq f(t) + \int_a^t R(t, s) f(s) ds, t \in [a, b],$$

unde  $R(t, s)$  este nucleul rezolvent asociat cu  $k(t, s)$

**Demonstrație:** Putem arăta cu ușurință prin inducție faptul că  $R(t, s) \geq 0, 0 \leq s \leq t \leq b$ . Apoi, deducem că

$$\phi(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s) x(s) ds - x(t) \geq 0, t \in [a, b].$$

Prin urmare,

$$x(t) = f(t) - \phi(t) + \int_a^t k(t, s) x(s) ds, t \in [a, b],$$

care implică,

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t) - \phi(t) + \int_a^t R(t, s) [f(s) - \phi(s)] ds \\ &= f(t) + \underbrace{\int_a^t R(t, s) f(s) ds - \left[ \phi(t) + \int_a^t R(t, s) \phi(s) ds \right]}_{\geq 0}, t \in [a, b]. \end{aligned}$$

De unde rezultă concluzia.  $\square$

**Problema 6.** Fie  $a, b \in (0, \infty)$ . Definim

$$D = \{(t, s) ; 0 \leq t \leq a, 0 \leq s \leq b\}, \quad Q = \{(t, s, \xi, \eta) ; 0 \leq \xi \leq t \leq a, 0 \leq \eta \leq s \leq b\}.$$

Se consideră ecuația integrală

$$x(t, s) = f(t, s) + \int_0^t \int_0^s k(t, s, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (t, s) \in D. \quad (E)$$

Presupunem că nucleul  $k \in C(Q) := C(Q, \mathbb{R})$ .

Să se arate că pentru orice  $f \in C(D) := C(D, \mathbb{R})$  există o unică funcție  $x = x(t, s) \in C(D)$  care satisface ecuația E pentru orice  $(t, s) \in D$ .

**Demonstrație:** Folosim următoarea normă asemănătoare normei Bielecki în  $X = C(D)$  :

$$\|g\|_B = \sup_{(t,s) \in Q} e^{-M(t+s)} |g(t, s)|, \quad g \in X,$$

unde  $M$  este o constantă pozitivă suficient de mare. Definim operatorul  $P$  pe  $X$  dat de

$$(Pg)(t, s) = f(t, s) + \int_0^t \int_0^s k(t, s, \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\eta d\xi, \quad (t, s) \in D, g \in X.$$

În mod clar,  $P$  duce  $X$  în  $X$  și pentru  $g_1, g_2 \in X$  și  $(t, s) \in D$  avem

$$\begin{aligned} |(Pg_1)(t, s) - (Pg_2)(t, s)| &\leq C \int_0^t \int_0^s |g_1(\xi, \eta) - g_2(\xi, \eta)| d\eta d\xi \\ &= C \int_0^t \int_0^s e^{+M(\eta+\xi)} e^{-M(\eta+\xi)} |g_1(\xi, \eta) - g_2(\xi, \eta)| d\eta d\xi \\ &\leq C \|g_1 - g_2\|_B \int_0^t \int_0^s e^{M(\eta+\xi)} d\eta d\xi \\ &= \frac{C}{M^2} \|g_1 - g_2\|_B (e^{Mt} - 1) (e^{Ms} - 1), \end{aligned}$$

unde  $C = \sup_{(t,s,\xi,\eta) \in Q} |k(t, s, \xi, \eta)| < \infty$ . Rezultă că

$$\begin{aligned} e^{-M(t+s)} |(Pg_1)(t, s) - (Pg_2)(t, s)| &\leq \frac{C}{M^2} \|g_1 - g_2\|_B (1 - e^{-Mt}) (1 - e^{-Ms}) \\ &\leq \frac{C}{M^2} \|g_1 - g_2\|_B, \end{aligned}$$

pentru orice  $(t, s) \in D, g_1, g_2 \in X$ . Prin urmare

$$\|Pg_1 - Pg_2\|_B \leq \frac{C}{M^2} \|g_1 - g_2\|_B, \quad g_1, g_2 \in X,$$

deci  $P$  este o contracție pe  $(X, \|\cdot\|_B)$  pentru  $M^2 > C$ . Prin urmare, conform principiului contracțiilor al lui Banach,  $P$  are un punct fix unic  $x = x(t, s) \in X$  care este soluția unică a ecuației E.  $\square$

**Problema 7.** Se consideră problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s) x(s) ds, t \in (0, T), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

unde  $x_0 \in \mathbb{R}, T \in (0, \infty), f \in L^1(0, T), k \in C(\Delta)$  și  $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq s \leq t \leq T\}$ .

Arătați că există o funcție unică  $x \in W^{1,1}(0, T)$  care satisface ecuația integro-diferențială de mai sus pentru orice  $t \in (0, T)$  și condiția inițială  $x(0) = x_0$ .

**Demonstrație:** Problema dată este echivalentă cu următoarea ecuație integrală în  $X = C[0, T]$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t \left( \int_0^s k(s, \tau) x(\tau) d\tau \right) ds, t \in [0, T]. \quad (*)$$

Definim  $P : X \rightarrow X$  prin

$$(Pg)(t) = x_0 + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t \left( \int_0^s k(s, \tau) g(\tau) d\tau \right) ds, t \in [0, T], g \in X.$$

Se poate arăta printr-o abordare cu punct fix faptul că  $P$  are un unic punct fix  $x \in X$  care este soluția unică a ecuației \* și deci a problemei date.  $\square$

**Problema 8.** Rezolvați următoarele ecuații integrale, unde  $\lambda$  este un parametru real:

$$(a) \quad x(t) = \cos t + \lambda \int_0^\pi \sin(t-s) \cdot x(s) ds;$$

$$(b) \quad x(t) = t + \lambda \int_0^{2\pi} |\pi - s| \sin t \cdot x(s) ds;$$

$$(c) \quad x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 (1-3ts) \cdot x(s) ds, f \in L^2(0, 1).$$

**Demonstrație:** (a) Ecuația poate fi scrisă ca

$$x(t) = \cos t + \lambda c_1 \sin t + \lambda c_2 \cos t, \quad (*)$$

cu

$$c_1 = \int_0^\pi \cos s \cdot x(s) ds, \quad c_2 = - \int_0^\pi \sin s \cdot x(s) ds. \quad (**)$$

Dacă înlocuim \* în \*\*, obținem următorul sistem algebraic în  $c_1, c_2$ :

$$\begin{cases} c_1 - \frac{\lambda\pi}{2}c_2 = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\lambda\pi}{2}c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Observăm faptul că, determinantul acestui sistem este  $1 + (\lambda\pi)^2/4$ , deci pozitiv pentru orice  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ca urmare există o unică soluție  $(c_1, c_2)$  care ne dă soluția ecuației integrale date

$$x(t) = \frac{2(2\cos t + \lambda\pi \sin t)}{4 + \lambda^2\pi^2}.$$

(b) Avem  $x(t) = t + \lambda c \sin t$ , unde  $c = \int_0^{2\pi} |\pi - s| \cdot x(s) ds$ . Înlocuind  $x(t)$  dat de prima relație în cea de a doua, rezultă

$$c = \int_0^{2\pi} |\pi - s| \cdot (s + \lambda c \sin s) ds \Leftrightarrow c(1 - 2\lambda\pi) = \pi^3.$$

Prin urmare dacă  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$  ecuația integrală dată nu are soluție. Altfel, ecuația are soluția

$$x(t) = t + \frac{\lambda\pi^3}{1 - 2\lambda\pi} \sin t.$$

(c) Avem

$$x(t) = f(t) + \lambda c_1 - 3\lambda c_2 t, \quad (*)$$

unde

$$c_1 = \int_0^t x(s) ds, \quad c_2 = \int_0^t s x(s) ds.$$

Astfel obținem sistemul

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 [f(s) + \lambda c_1 - 3\lambda c_2 s] ds, \\ c_2 = \int_0^1 s [f(s) + \lambda c_1 - 3\lambda c_2 s] ds, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} (1 - \lambda) c_1 + \frac{3}{2}\lambda c_2 = \int_0^1 f(s) ds, \\ -\frac{1}{2}c_1 + (1 + \lambda) c_2 = \int_0^1 s f(s) ds. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem algebraic este  $\Delta = \frac{4 - \lambda^2}{4}$ .

Deci, pentru fiecare  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$ ,  $c_1, c_2$  pot fi determinate în mod unic și soluția ecuației integrale poate fi exprimată explicit folosind formula \*.

Dacă  $\lambda = -2$  sistemul algebric de mai sus are soluții dacă și numai dacă

$$\int_0^1 f(s) ds = 3 \int_0^1 s f(s) ds \quad (**)$$

și în acest caz, există o infinitate de soluții ale ecuației integrale date, și anume ,

$$x(t) = f(t) + 2c_1(3t - 1) - 2t \int_0^1 f(s) ds, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Un exemplu de funcție care satisface condiția \*\* de mai sus este  $f(t) = t - 1$ .

Dacă condiția \*\* nu este îndeplinită, atunci ecuația integrală dată nu are soluție.

Dacă  $\lambda = +2$  condiția de compatibilitate pentru sistemul algebric de mai sus este

$$\int_0^1 f(s) ds = \int_0^1 s f(s) ds.$$

Dacă această condiție este îndeplinită (de exemplu, pentru  $f(3t) = t - 1$ ), avem din nou o infinitate de soluții pentru ecuația integrală dată, de forma

$$x(t) = f(t) + 2c_1(1 - t) - 2t \int_0^1 f(s) ds, c_1 \in \mathbb{R}.$$

În caz contrar, ecuația integrală dată nu are soluție. □

**Problema 9.** Se consideră în  $\mathbb{K}$  următoarea ecuație Fredholm cu nucleu degenerat (separabil):

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^n a_i(t) b_i(s) \right]}_{k(t,s)} x(s) ds, \quad (\text{F})$$

unde  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f, a_i, b_i \in L^2(a, b; \mathbb{K})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Presupunem, fără a restrânge generalitatea că sistemele  $\{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $\{b_1, \dots, b_n\}$  sunt linear independente. Obținem

$$c_i = \int_a^b b_i(s) x(s) ds, i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

și din F deducem că

$$x(t) = f(t) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i a_i(t). \quad (2)$$

Introducând 2 în 1 obținem sistemul algebric

$$c_i = f_i + \lambda \sum_{k=1}^n k_{ik} c_k, i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

unde

$$f_i = \int_a^b b_i(s) f(s) ds, k_{ij} = \int_a^b b_i(s) a_j(s) ds, i, j = 1, \dots, n.$$

Arătați că alternativa lui Fredholm pentru ecuația F poate fi exprimată ca o alternativă echivalentă pentru sistemul algebric 3.



**Demonstrație:** Notăm

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, K = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Deci 3 poate fi scrisă ca:

$$(I - \lambda K) c = g. \quad (3')$$

Există o corespondență bijectivă între mulțimea soluțiilor ecuației F și mulțimea soluțiilor sistemului 3'.

Următoarea alternativă pentru ecuația 3' este bine cunoscută:

1. dacă  $\det(I - \lambda K) \neq 0$ , atunci există o soluție unică a sistemului 3' dată de ,

$$c = (I - \lambda K)^{-1} g$$

care dă soluția lui F prin intermediul relației 2;

2. în caz contrar,  $\det(I - \lambda K) = 0$  și ecuația 3' are soluții dacă și numai dacă  $g$  este perpendiculară pe  $N(I - \lambda K^*) = N(I - \lambda \overline{K}^T)$ , astfel ecuația F are o infinitate de soluții,

$$x(t) = x_p(t) + \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i(t),$$

unde  $x_p$  este o soluție particulară a lui F,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$  și  $x_1, \dots, x_m$  sunt soluții liniar independente ale ecuației integrale omogene (care pot fi calculate explicit).

□

**Problema 10.** Fie  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  un spațiu Hilbert și  $\{e_1, \dots, e_m\} \subset H$  un sistem ortonormal, unde  $m$  este un număr natural dat.

Definim  $A : H \rightarrow H$  prin

$$Ax = \sum_{k=1}^m k(x, e_k) e_k, x \in H.$$

Rezolvați ecuația abstractă de tip Fredholm

$$x = f + \lambda Ax,$$

unde  $f \in H$  și  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**Demonstrație:** Dacă  $\lambda = 0$  atunci există o unică soluție a ecuației,  $x = f$ .

Presupunem  $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ . Notăm  $H_m = \text{Span}(\{e_1, \dots, e_m\})$ . Operatorul  $A$  este simetric (deci are toate valorile proprii numere reale),  $R(A) = H_m$  și  $N(A) = H_m^\perp$ . Observăm că valorile proprii ale lui  $A$  sunt  $\mu_k = k, k = 1, \dots, m$ , cu  $e_1, \dots, e_m$  ca vectori proprii corespunzători.

Distingem două cazuri:

1. Cazul 1.  $\dim H = m$ , deci  $H = H_m$ . Ecuația Fredholm dată se reduce la un sistem algebric

$$(I - \lambda A)x = f. \quad (1)$$

Dacă  $\lambda \in \mathbb{K} - \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}\}$ , atunci 1 are soluție unică

$$x = \sum_{k=1}^m \frac{(f, e_k)}{1 - \lambda k} e_k.$$

Dacă  $\lambda = \frac{1}{j}$  pentru un  $j \in \{1, \dots, m\}$ , atunci sistemul 1 are soluție dacă și numai dacă  $(f, e_j) = 0$ . În această situație, există o infinitate de soluții  $x$  cu coordonatele  $x_k = \frac{j(f, e_k)}{j-k}$ ,  $k \neq j$  și  $x_j \in \mathbb{K}$  este arbitrar.

2. Cazul 2.  $\dim H > m$ . Desigur,  $H = H_m \oplus H_m^\perp$ , cu  $H_m^\perp \neq \{0\}$ . Căutăm  $x$  de forma  $x = x_1 + x_2$ ,  $x_1 \in H_m$ ,  $x_2 \in H_m^\perp$ . Folosind o descompunere similară pentru  $f$ , adică  $f = f_1 + f_2$ ,  $f_1 \in H_m$ ,  $f_2 \in H_m^\perp$ , deducem din 1 că  $x_2 = f_2$  și  $(I - \lambda A)x_1 = f_1$ . Folosind aceeași discuție ca mai înainte, găsim  $x_1$ , atunci când există, deci concluzionăm că  $x = x_1 + f_2$ .

□

**Problema 11.** Se consideră funcțiile

$$u_n(t) = \sqrt{2} \cos \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi t \right), t \in [0, 1], n = 0, 1, 2, \dots$$

Este bine cunoscut faptul că sistemul  $\{u_n\}_{n=0}^\infty$  este o bază ortonormată în  $H = L^2(0, 1)$  înzestrat cu produsul scalar uzual și norma indusă de acesta. Definim nucleul  $k(t, s)$  prin

$$k(t, s) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} u_n(t) u_n(s), t, s \in [0, 1],$$

unde  $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$  și operatorul integral  $A : H \rightarrow H$ ,

$$(Ag)(t) = \int_0^1 k(t, s) g(s) ds, g \in H.$$

Discutați existența soluțiilor ecuației Fredholm

$$x = f + \lambda Ax, f \in H, \lambda \in \mathbb{R},$$

în două cazuri:  $m = 0$  și  $m \geq 1$ .

**Demonstrație:** Din M-testul lui Weierstrass, avem

$$k \in C(\overline{Q}) \subset L^2(Q), Q = (0, 1) \times (0, 1).$$

Evident,  $A$  este auto-adjunct și compact.

**Cazul**  $m = 0$

În acest caz,  $N(A) = \{0\}$ . Într-adevăr,  $Ag = 0$  implică

$$0 = (Ag, g)_{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} (g, u_n)_{L^2}^2,$$

prin urmare,

$$(g, u_n)_{L^2} = 0, \forall n \in \{0, 1, 2, \dots\} \Rightarrow g = 0,$$

deoarece sistemul  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  este o bază în  $H = L^2(0, 1)$ .

Pentru a determina perechile proprii ale lui  $A$  luăm în considerare ecuația

$$Ag = \mu g$$

care poate fi scrisă ca

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g, u_n)_{L^2}}{(n+1)^2} u_n = \mu \sum_{n=0}^{\infty} (g, u_n)_{L^2} u_n,$$

unde am folosit dezvoltarea în serie Fourier a lui  $g$ .

Deoarece  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  este o bază în  $H$ , avem

$$\left( \mu - \frac{1}{(n+1)^2} \right) (g, u_n)_{L^2} = 0, n = 0, 1, 2, \dots (*)$$

Dacă  $\mu \neq \frac{1}{(n+1)^2}$  pentru orice  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  avem

$$(g, u_n)_{L^2} = 0, \forall n \in \{0, 1, 2, \dots\} \Rightarrow g = 0,$$

prin urmare, astfel de  $\mu$ -uri nu sunt valori proprii ale lui  $A$ .

Pentru  $\mu = \mu_n = \frac{1}{(n+1)^2}$  avem din \*

$$(g, u_k)_{L^2} = 0, \forall k \in \mathbb{N}, k \neq n,$$

deci funcțiile proprii corespunzătoare lui  $\mu = \mu_n = \frac{1}{(n+1)^2}$  sunt multipli diferiți de zero ai lui  $u_n$ .

Conform formulei lui Schmidt pe care o avem pentru  $\lambda \in \mathbb{R} - \{1, 2^2, 3^2, \dots\}$  și pentru  $t \in (0, 1)$ ,

$$x(t) = f(t) + 2\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^1 f(s) \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi s\right) ds}{(k+1)^2 - \lambda} \times \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi t\right) + \\ + \alpha \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t\right), \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Cazul**  $m \geq 1$

În acest caz  $Y_0 := N(A) = \text{Span}(\{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\})$  și  $H = Y_0 \oplus Y_1$ , unde  $Y_1 = N(A)^\perp = \text{Span}(\{u_m, u_{m+1}, \dots\})$ . Notăm cu  $A_1$  restricția lui  $A$  la  $Y_1$  care este un spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar și norma lui  $H = L^2(0, 1)$ . Evident,  $A_1$  îl duce  $Y_1$  în  $Y_1$ , e compact, autoadjunct, cu  $N(A_1) = \{0\}$  și cu valori proprii  $\mu_n = \frac{1}{(n+1)^2}$  și funcții proprii  $u_n, n \geq m+1$ . De fapt,  $Y_1$  și  $A_1$  joacă rolurile lui  $H$  și  $A$  pe care le-am văzut înainte.

Ecuția

$$x = f + \lambda Ax$$

poate fi scrisă ca

$$x_0 + x_1 = f_0 + f_1 + \lambda Ax_1,$$

unde  $x_0, f_0 \in Y_0$  și  $x_1, f_1 \in Y_1$ , deci  $x_0 = f_0$  și

$$x_1 = f_1 + \lambda A_1 x_1, \quad (**)$$

Pe baza argumentelor de mai sus, avem

1. Dacă  $\lambda \neq (n+1)^2$  pentru orice  $n \geq m$  atunci

$$\begin{aligned} x(t) &= f_0(t) + x_1(t) \\ &= f(t) + 2\lambda \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\int_0^1 f_1(s) \cos\left(\frac{k+1}{2}\pi s\right) ds}{(k+1)^2 - \lambda} \times \cos\left(\frac{k+1}{2}\pi t\right), \end{aligned}$$

și

2. Dacă  $\lambda = (n+1)^2$ , pentru un  $n \geq m$ , atunci ecuația Fredholm \*\* are soluții dacă și numai dacă  $f_1 \perp u_n \Leftrightarrow f \perp u_n$  iar în acest caz

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t) + (2n+1)^2 \\ &\times \sum_{k \geq m, k \neq n} \frac{\int_0^1 f_1(s) \cos\left(\frac{k+1}{2}\pi s\right) ds}{(k+1)^2 - \lambda} \\ &\times \cos\left(\frac{k+1}{2}\pi t\right) + \alpha \cos\left(\frac{n+1}{2}\pi t\right), \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

---

---

# Concluzii

---

---

În cadrul acestei lucrări au fost prezentate rezultate privind ecuațiile integrale de tip Volterra și Fredholm.

Primul capitol a cuprins definiții și teoreme pe care le-am folosit în cadrul lucrării. Printre acestea regăsim, Teorema de existență a lui Peano, Principiul contracțiilor al lui Banach care este de fapt o abstractizare a metodei aproximațiilor succesive, metodă utilizată în mod empiric încă din antichitate pentru rezolvarea ecuațiilor numerice, Teorema lui Fredholm, care ne spune că, dacă avem un spațiu Hilbert  $(H, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  și  $A \in K(H)$ , ecuația  $x - A^*x = f$  are soluție dacă și numai dacă  $f \in \mathcal{N}^\perp$ , unde  $\mathcal{N} = N(I - A)$ . De asemenea, am abordat teorema Hilbert-Schmidt și Criteriul Arzelà-Ascoli.

Cel de al doilea capitol cuprinde o prezentare a ecuațiilor integrale Volterra, de prima și de a doua tip, mai exact:

$$f(t) = \int_a^t k(t, s) x(s) ds, a \leq t \leq b$$

și

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s) x(s) ds, a \leq t \leq b,$$

unde

$$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C[a, b] := C([a, b]; \mathbb{R}), k \in C(\Delta) := C(\Delta; \mathbb{R})$$

(numit nucleu), cu  $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; a \leq s \leq t \leq b\}$ ;  $x = x(t)$  reprezintă funcția necunoscută care aparține spațiului  $C[a, b]$  și ecuațiile integrale Fredholm

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t, s) x(s) ds, t \in [a, b],$$

unde  $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C([a, b]; \mathbb{K})$  și  $k \in C([a, b] \times [a, b]; \mathbb{K})$ .

Cel de al treilea capitol a cuprins o serie de aplicații pentru ecuațiile Volterra și Fredholm studiate în capitolul anterior.

---

---

## Referințe bibliografice

---

---

- [1] Gheorghe Moroșanu. Functional analysis for the applied sciences. *Universitext*.
- [2] E. Kreyszig. Introductory functional analysis with applications. *John Wiley, Hoboken*, 1978.
- [3] P. Pavel G. Micula. Ecuații diferențiale și integrale prin probleme și exerciții. *Editura Dacia*, 1989.
- [4] G. Moroșanu. Functional analysis for the applied sciences. *Springer International Publishing*, 2019.
- [5] C. Mortici S. Sburlan, L. Barbu. Ecuații diferențiale, integrale și sisteme dinamice. *Editura Exponto, Constanța*, 1999.
- [6] G. E. Șilov. Analiză matematică. *Ed. Științifică și Enciclopedică, București*, 1989.