Șiruri

Tănase Ramona Elena

Universitatea Ovidius Constanta
Facultatea de Matematică și Informatică
Specializarea:Matematică - Informatică

Iulie, 2021

Cuprins

1. Șiruri
2. Șiruri convergente de numere reale
3. Șiruri mărginite
4. Șiruri recurente și asimtote oblice
5. Bibliografie

Definition

Fie X o mulime. O funcie $f : \mathbb{N} \to X$ se numete ir de elemente din mulimea X, sau sub o alt formulare: se numete ir de elemente din mulimea X o funcie $f : \mathbb{N} \to X$. n mod uzual, se noteaz $f_1 = x_1 \in X, f_2 = x_2 \in X, ..., f_n = x_n \in X, ...$

Șiruri convergente de numere reale

Teorie

Definition

Un ir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, se numete convergent dac exist $x \in \mathbb{R}$ astfel nct:
$\forall_\varepsilon > 0, \in n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel nct este satisfacut inegalitatea: $|x_n - x| \leq \varepsilon$.

Șiruri convergente de numere reale

Propoziie
Unicitatea limitei unui ir de numere reale
Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.
Dac

$$\begin{cases} x_n \to x \\ x_n \to y \end{cases}$$

atunci $x = y$.

Demonstraie
S presupunem, prin absurd, c $x \neq y$. Cum suntem pe $\mathbb{R}$ nseamn c avem una din situaiile $x < y$ sau $y < x$. Pentru a face o alegere, fie $x < y$ atunci $yx > 0$ i din definiie pentru $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$ rezult c, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel nct $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_1$ i $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel nct $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_2$
Fie $n = max(n_1, n_2) \geq n_1, n_2$. Atunci: $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}$ i $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}$ de unde

$$y-x = |y-x| = |(y-x_n) + (x_n - x)| \leq |y-x_n| + |x_n - x| < \frac{y-x}{2} + \frac{y-x}{2}$$

Aadar, $y - x < y - x$, contradicie!

Exerciii
Calculai

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^4+3}}+\ldots\ldots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$$

Rezolvare
Notm $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^4+3}}+\ldots\ldots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$.
Adic $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^4+k}$.
n continuare procedm astfel. De numrtor nu ne atingem. Vom lucra cu numitorul, ideea fiind de a se avea acelai numitor peste tot.
Avem $1\leq k\leq n$ de unde $n^4+1\leq n^4+k\leq n^4+n$ de unde $\sqrt{n^4+1}\leq\sqrt{n^4+k}\leq\sqrt{n^4+1}$ de unde $\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}\geq\frac{1}{\sqrt{n^4+k}}\geq\frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$.

Acum nmulind cu k obinem

$$\frac{k}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4+n}} \tag{1.1}$$

n continuare n relaia 1.1 dam lui k valorile $1, 2, ..., n$.
Pentru $k = 1$ rezult $\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$
Pentru $k = 2$ rezult $\frac{2}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4+n}}$
Adunnd inegalitile de mai sus obinem

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+1}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+n}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

Șiruri convergente de numere reale

Sau $\frac{1+2+....+n}{\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{1+2+.....+n}{\sqrt{n^4+n}}$
Dar tim c $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, deci vom obine $\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}}$. (2)
Acum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{2} i \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}} = \frac{1}{2}.(3)$$

Vom da la ambele factor comun forat. Din (2) i (3) i teorema cletelui rezult c

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$$

Șiruri mărginite

Teorie

Definiie

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un ir de numere reale.

irul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numete mrginit dac i numai dac $\exists a, b \in \mathbb{R}$, a¡ b astfel nct $\forall n \in \mathbb{N}$ este satisfacut inegalitatea $x_n \in [a, b]$, sau echivalent $\exists M > 0$ astefle nct $\forall n \in \mathbb{N}$ este satisfacut inegalitatea $|x_n| \leq M$.

Definiie

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un ir de numere reale. Spunem c $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ dac, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel nct pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacut inegalitatea $x_n > \varepsilon$.

Sau $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel nct $x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.

Șiruri mărginite

Exerciii

Calculai

Fie $\alpha > 0$ s se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

Demonstraie

Fie $x_n = 1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha, a_n = n^\alpha$. Deoarece $\alpha > 0, \alpha \uparrow \infty$.
Din lema Stolz-Cesaro, cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha_{n+1} - _n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}$$

Șiruri mărginite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^{\alpha}}$$

Dm factor comun forat la numrtor pe $n^{\alpha+1}$.
Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha+1\left[\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}-1\right]}}{(n+1)^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} \cdot n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} \cdot \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right] =$$

Șiruri mărginite

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{\alpha+1} - 1}{n} = \alpha + 1 =$$

Am folosit limita fundamental

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^{\gamma} - 1}{x} = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$$

ntorcndu-ne la problem, obinem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha} + 2^{\alpha} + ... + n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}$$

Șiruri recurente și asimtote oblice

Teorie

Teorem

Fie $a \in \mathbb{R}$ i $f : (\alpha, \infty)\, n \to \mathbb{R}$ o funcie continu cu proprietatea c $f_{(x)} > x, \forall x > a$. Definim irul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ prin condiia iniial $x_1 > \alpha$ i relaia de recuren $x_{n+1} = f_{(x_n)} pentruoricen \geq 1.$

Atunci

$$\lim_{x \to \infty} x_n = \infty$$

Dac exist $b_0 \in \mathbb{R}$ astfel nct $y = x + b_0$ este asimtot oblic la graficul funciei f, atunci $\lim_{x \to \infty} \frac{x_n}{n} = b_0$

Șiruri recurente și asimtote oblice

Dac exist $b_0, b_1 \in \mathbb{R}, b_0 \neq 0$ astfel nct
$\lim_{n\to\infty} x\left(f\left(x\right) - x - b_0\right) = b_1, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - b_0\right) = \frac{b_1}{b_0}$

Șiruri recurente și asimtote oblice

Exerciii
Calculai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right)}{n\ln n} = \frac{1}{2}$$

Demonstraie
S notm $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\ln\left(n+k\right), n \geq 1.$

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim x_n. \tag{2.1}$$

Fie $n \geq 2$.
Avem $\ln(n+1) \leq \ln(n+k) \leq \ln(n+n), \forall 1 \leq k \leq n$, de unde

$$\sum_{k=1}^{n} k \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} k \ln(n+k) \leq \sum_{k=1}^{n} k \ln(n+n), \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2} \leq \frac{x_n}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2},$$

sau nc

Șiruri recurente și asimtote oblice

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\cdot\frac{n+1}{2n}\le\frac{x_n}{n\ln n}\le\frac{\ln(n+n)}{\ln n}\cdot\frac{n+1}{2n} \tag{2.2}$$

Din relaia 2.2 i teorema cletelui rezult c $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n\ln n}=\frac{1}{2}$. Astfel spus

$$x_{n\sim}\frac{n\ln n}{2} \tag{2.3}$$

Din relaiile 2.1 i 2.3 rezult c $\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right)\sim\frac{n\ln n}{2}$, adic egalitatea din enun.

Bibliografie

(1) Popa,Dumitru, Curs Matematic didactic Analiz Capitole speciale de analiz matematic pentru pregtirea profesorilor , 2020-2021

Multumiri

Vă mulțumesc pentru atenție !