



Ministerul Educației
Universitatea "OVIDIUS" Constanța
Facultatea de Matematică și Informatică
Specializarea Informatică

Șiruri

Coordonator științific:

Student:
Tănase Ramona Elena

Constanța
2021

Cuprins

Cuprins	1
1 Șiruri	2
2 Șiruri convergente de numere reale	3
2.1 Exerciții	6
3 Șiruri mărginite	8
3.1 Exerciții	9
4 Șiruri recurente și asimtote oblice	13
4.1 Exerciții	16
Referințe bibliografice	19

Capitolul 1

Şiruri

Definiţie

Fie X o mulţime. O funcţie $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ se numeşte şir de elemente din mulţimea X , sau sub o altă formulare: se numeşte şir de elemente din mulţimea X o funcţie $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. În mod uzual, se notează $f_1 = x_1 \in X, f_2 = x_2 \in X, \dots, f_n = x_n \in X, \dots$

Capitolul 2

Șiruri convergente de numere reale

Definiție

Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, se numește convergent dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât este satisfăcută inegalitatea: $|x_n - x| \leq \varepsilon$.

Propoziție

Unicitatea limitei unui șir de numere reale Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Dacă $\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ x_n \rightarrow y \end{cases}$ atunci $x = y$.

Demonstrație

Să presupunem, prin absurd, că $x \neq y$. Cum suntem pe \mathbb{R} înseamnă că avem una din situațiile $x < y$ sau $y < x$. Pentru a face o alegere, fie $x < y$ atunci $y - x > 0$ și din definiție pentru $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$ rezultă că,

- ▷ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_1$
- ▷ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_2$

Fie $n = \max(n_1, n_2) \geq n_1, n_2$. Atunci $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}$ și $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}$ de unde

$$y - x = |y - x| = |(y - x_n) + (x_n - x)| \leq |y - x_n| + |x_n - x| < \frac{y-x}{2} + \frac{y-x}{2} = y - x$$

Așadar, $y - x < y - x$, contradicție!

Un rezultat foarte frecvent folosit este ceea ce se numește ”teorema cleștelui”.

Teorema cleștelui

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trei șiruri de numere reale. Dacă:

$$\begin{cases} x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n \rightarrow x, z_n \rightarrow x \end{cases}$$

Atunci $y_n \rightarrow x$.

Demonstrație

Vom arăta pentru început următoarea inegalitate. Dacă $a \leq x \leq b$ atunci $|x| \leq \max(|a|, |b|)$. Vom folosi proprietățile de la modul. Avem:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{dacă } x < 0 \end{cases} \leq \begin{cases} b \leq \max(b, -b) = |b| \leq \max(|a|, |b|) \text{dacă } x \geq 0 \\ -a \leq \max(a, -a) = |a| \leq \max(|a|, |b|) \text{dacă } x < 0 \end{cases} \leq \max(|a|, |b|)$$

Din $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}$ rezultă că $x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x, \forall n \in \mathbb{N}$. De aici folosind inegalitatea demonstrată deducem că:

$$|y_n - x| \leq \max(|x_n - x|, |z_n - x|), \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

Deoarece $x_n \rightarrow x, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon'$ este satisfăcută inegalitatea

$$|x_n - x| < \varepsilon. \quad (1.2)$$

Similar din $z_n \rightarrow x, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon'' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon''$ este satisfăcută inegalitatea

$$|z_n - x| < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Notăm $n_\varepsilon = \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$. Fie acum $n \geq n_\varepsilon$. Deoarece $n_\varepsilon \geq n_\varepsilon'$ iar $n \geq n_\varepsilon$ rezultă că $n \geq n_\varepsilon'$ și din (1.2) rezultă că

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad (1.4)$$

Deoarece $n_\varepsilon \geq n_\varepsilon''$ iar $n \geq n_\varepsilon$ și din (1.3) rezultă că

$$|z_n - x| < \varepsilon \quad (1.5)$$

Din (1.4) și (1.5) rezultă că

$$\max(|x_n - x|, |z_n - x|) = \begin{cases} |x_n - x| \\ |z_n - x| \end{cases} < \varepsilon. \quad (1.6)$$

Folosind inegalitatea (1.6) din inegalitatea (1.1) deducem că $|y_n - x| < \varepsilon$.

Așadar am demonstrat : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfăcută inegalitatea $|y_n - x| < \varepsilon$.

Conform definiției această inegalitate înseamnă că $y_n \rightarrow y$.

Exemplu

Fie $c \in \mathbb{R}$, Considerăm șirul $x_n = c$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$, limita unei constante este acea constantă.

Demonstrație

$\forall n \in \mathbb{N}$ avem $x_n - c = c - c = 0, |x_n - c| = 0$. De aici deducem că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = 1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon = 1$ este satisfăcută inegalitatea $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$. Conform definiției $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Propoziție

Dacă un șir de numere naturale este convergent atunci el este staționar. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere naturale. Dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, atunci există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = x_k, \forall n \geq k$.

Astfel spus scris desfășurat șirul arată astfel:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{k-1}, x_k, x_k, x_k, \dots$$

Demonstrație

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \exists n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_{\frac{1}{2}}$ este satisfăcută inegalitatea $|x_n - x| < \frac{1}{2}$.

Să notăm $k = n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ și să reținem că știm că $\forall n \geq k$ este satisfăcută inegalitatea

$$|x_n - x| < \frac{1}{2}. (1)$$

Fie $n \geq k$. Relația (1) fiind adevărată pentru orice număr $\geq k$ ea va fi adevărată în particular pentru k adică avem

$$|x_k - x| < \frac{1}{2}. (2)$$

Dar la noi $n \geq k$ deci din (1) avem și

$$|x_n - x| < \frac{1}{2}. (3)$$

Avem

$$\begin{aligned} |x_n - x_k| &= |(x_n - x) + (x - x_k)| \leq |x_n - x| + |x - x_k| = \\ &= |x_n - x| + |-(x - x_k)| = |x_n - x| + |x_k - x|. (4) \end{aligned}$$

Am folosit inegalitatea tringhiului și $|-a| = |a|$. Folosind (2) și (3) din (4) deducem că

$$|x_n - x_k| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. (5)$$

Dar x_n, x_k sunt numere naturale, și deci diferența lor este un număr întreg adică $x_n - x_k \in \mathbb{Z}$. Cum $|x_n - x_k| \geq 0$ iar din (5) $|x_n - x_k| < 1$ rezultă că $|x_n - x_k| \in [0, 1]$ deci $|x_n - x_k| \in \mathbb{Z} \cap [0, 1) = \{0\}$ de unde $|x_n - x_k| = 0$ adică $x_n - x_k = 0, x_n = x_k$.

Așadar am demonstrat: $\forall n \geq k$ avem $x_n = x_k$, ceea ce încheie demonstrația.

2.1 Exerciții

1. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^4+3}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \right)$$

Rezolvare

Notăm $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^4+3}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$. Adică $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^4+k}$.

În continuare procedăm astfel. De numărător nu ne atingem. Vom lucra cu numitorul, ideea fiind de a se avea același numitor peste tot.

Avem

$$\begin{aligned} 1 \leq k \leq n &\Rightarrow \\ \Rightarrow n^4 + 1 \leq n^4 + k \leq n^4 + n &\Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{n^4 + 1} \leq \sqrt{n^4 + k} \leq \sqrt{n^4 + n} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4 + k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4 + n}}. \end{aligned}$$

Acum înmulțind cu k obținem $\frac{k}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4+n}}$. (1)

În continuare în relația (1) dam lui k valorile $1, 2, \dots, n$.

Pentru $k = 1$ rezultă:

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$$

Pentru $k = 2$ rezultă:

$$\frac{2}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4+n}}$$

Adunând inegalitățile de mai sus obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+1}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} &\geq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \geq \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+n}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \end{aligned}$$

Sau

$$\frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{n^4+n}}$$

Dar știm că $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, deci vom obține

$$\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}} \quad (2)$$

Acum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{2} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Vom da la ambele factor comun forțat.

Din (2) și (3) și teorema cleștelui rezultă că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$$

Capitolul 3

Șiruri mărginite

Definiție

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește mărginit dacă și numai dacă $\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ este satisfăcută inegalitatea $x_n \in [a, b]$, sau echivalent $\exists M > 0$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ este satisfăcută inegalitatea $|x_n| \leq M$.

Definiție

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Spunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ dacă, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfăcută inegalitatea $x_n > \varepsilon$. Sau $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.

Propoziție

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Demonstrație

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ din definiție aplicată pentru $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ rezultă că $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfăcută inegalitatea $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Din această inegalitate rezultă că $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfăcută inegalitatea $x_n > 0$, prin urmare are sens fracția $\frac{1}{x_n}, \forall n \geq n_\varepsilon$. Dar inegalitatea de mai sus este echivalentă cu $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfăcută inegalitatea $\frac{1}{x_n} < \varepsilon$. Conform definiției aceasta înseamnă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Lema Stolz-Cesaro (Cazul $\frac{1}{\infty}$)

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ și $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ astfel încât $\alpha_n \uparrow \infty$. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} \in \mathbb{R}$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\alpha_n} \in \mathbb{R}$$

și în plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - \alpha_{n-1}}.$$

Demonstrație Fie $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - \alpha_{n-1}}$. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} - \alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_\varepsilon$ Sau, $\alpha_n \uparrow, |x_n - x_{n-1} - \alpha(\alpha_n - \alpha_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n - \alpha_{n-1}), \forall n \geq n_\varepsilon$. (1)

Notăm cu $k = n_\varepsilon + 1$. Pentru $n \geq k$ luând în (1), $n = k + 1, k + 2, \dots, n$ obținem: $|x_{k+1} - x_k - \alpha(\alpha_{k+1} - \alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$.

$$|x_{k+2} - x_{k+1} - \alpha(\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}) \dots \dots \dots |x_n - x_{n-1} - \alpha(\alpha_n - \alpha_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

De unde obținem, prin adunare:

$$\begin{aligned} & |x_n - x_k - \alpha(\alpha_n - \alpha_k)| = \\ & |x_n - x_{n-1} - \alpha(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \dots + x_{k+2} - x_{k+1} - \alpha(\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}) + x_{k+1} - x_k - \alpha(\alpha_{k+1} - \alpha_k)| \\ & \leq |x_n - x_{n-1} - \alpha(\alpha_n - \alpha_{n-1})| + \dots + |x_{k+2} - x_{k+1} - \alpha(\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1})| + |x_{k+1} - x_k - \alpha(\alpha_{k+1} - \alpha_k)| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_{k+1} - \alpha_k) + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}) + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n - \alpha_k) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2}\alpha_n \text{ deoarece } \alpha_k > 0. \end{aligned}$$

3.1 Exerciții

1. Calculați

Fie $\alpha > 0$ să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

Demonstrație

Fie $x_n = 1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha$, $a_n = n^\alpha$. Deoarece $\alpha > 0$, $\alpha \uparrow \infty$. Din lema Stolz-Cesaro, cazul

$$\left[\frac{1}{\infty} \right], \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{a_{n+1} - a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha}$$

Dăm factor comun forțat la numărător pe $n^{\alpha+1}$. Avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha+1} \left[\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} - 1 \right]}{(n+1)^\alpha} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \cdot n \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\alpha+1} - 1}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^{\alpha+1} - 1}{n} = \alpha + 1 \end{aligned}$$

Am folosit limita fundamentală

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^\gamma - 1}{x} = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$$

Întorcându-ne la problemă, obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

2. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + \dots + e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$$

Rezolvare

Fie $x_n = e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + \dots + e^{\sqrt{n}}$, $a_n = \sqrt{n}e^{\sqrt{n}}$. Avem de calculat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{a_n} = \left[\frac{1}{\infty} \right]$

Din lema Stolz-Cesaro

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$$

Vom calcula acum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}}$$

Avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})e^{\sqrt{n+1}} + \sqrt{n}(e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}})}{e^{\sqrt{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}})}{e^{\sqrt{n+1}}} \end{aligned}$$

Prima limită, înmulțind și împărțind cu conjugata ei ne da da 0, adică:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

Pentru cea de a doua limită procedăm astfel:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}})}{e^{\sqrt{n+1}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(1 - \frac{e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (1 - e^{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}) \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}} - 1}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}} \cdot \sqrt{n} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}} - 1}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \\ &= -1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Am înmulțit și am împărțit cu conjugata ei, iar la ultima factor comun forțat.

Din acestea deducem că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n}e^{\sqrt{n}}} = 2$$

Deci ultima limită din enunț $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{a_n} = 2$

Propoziție

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale strict pozitive. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \in \mathbb{R}$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \in \mathbb{R}$. În plus $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Pe scurt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Demonstrație

Din definiția logaritmulor naturali avem

$$\ln x = \alpha \Leftrightarrow x = e^\alpha$$

De aici deducem că $x = e^\alpha = e^{\ln x}$ adică

$$x = e^{\ln x}, \forall x > 0$$

De aici dacă $x = u^v$ obținem $u^v = e^{\ln(u^v)} = u^{v \ln u}$. Să reținem această egalitate

$$u^v = u^{v \ln u}$$

Ea se folosește tot timpul când baza și puterea sunt variabile. La noi $\sqrt[n]{x_n} = x_n^{\frac{1}{n}}$ de unde folosind egalitatea de mai sus rezultă că

$$\sqrt[n]{x_n} = x_n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \cdot \ln x_n} = e^{\frac{\ln x_n}{n}}$$

Fie $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Atunci \ln fiind funcție continuă

$$\ln A = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Vom arăta că în ipotezele noastre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Din lema Stolz-Cesato cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$, ipotezele sunt satisfacute, rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \ln x_n}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln x_{n+1} - \ln x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln A$$

De aici deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x_n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{n}} = e^{\ln A} = A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Capitolul 4

Șiruri recurente și asimtote oblice

Teoremă

Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f : (\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(x) > x, \forall x > a$. Definim șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ prin condiția inițială $x_1 > \alpha$ și relația de recurență $x_{n+1} = f(x_n)$ pentru orice $n \geq 1$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

Dacă există $b_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = x + b_0$ este asimtotă oblică la graficul funcției f , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = b_0$$

Dacă există $b_0, b_1 \in \mathbb{R}, b_0 \neq 0$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - x_n - b_0) = b_1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{n} \left(\frac{x_n}{n} - b_0 \right) =$

Demonstrație

Din condiția inițială avem $x_1 > \alpha$. Presupunem $x_n > \alpha$. Din ipoteza $f(x) > x, \forall x > \alpha$ rezultă că $f(x_n) > x_n$, adică $x_{n+1} > x_n$. Cum Presupunem $x_n > \alpha$ rezultă că $x_{n+1} > \alpha$. Conform inducției matematice rezultă că $x_n > \alpha, \forall n \geq 1$.

Fie $n \geq 1$. Din ipoteza $f(x) > x, \forall x > \alpha$ și $x_n > \alpha$ rezultă că $f(x_n) > x_n$ sau $x_{n+1} > x_n$. Așadar șirul este strict crescător. Dacă prin absurd ar fi majorat, atunci din teorema lui Weierstrass este convergent și fie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \in \mathbb{R}$. Cum șirul este crescător avem $x_n \geq x_1, \forall n \geq 1$ de unde, trecând la limită rezultă ca $L \geq 1$. Cum $x_1 \geq \alpha$ rezultă că $L \geq \alpha$, iar din ipoteza $f(x) \geq x, \forall x \geq \alpha$ rezultă, în particular, $f(L) > L$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, iar f este continuă, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(L)$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = f(L)$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = f(L)$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = f(L)$, din unicitatea limitei unui șir de numere reale rezultă că $f(L) = L$, ceea ce este fals. Așadar șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este majorat și fiind crescător, după cum am demonstrat, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Deoarece $y = x + b_0$ este asimtotă oblică la graficul funcției f , conform definiției $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = b_0$. Cum, din 1. ,

$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \infty$, din caracterizarea limitei unei funcții într-un punct cu șiruri rezultă că $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x_n) - x_n) = b_0$ sau ținând cont de relația de recurență $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = b_0$. Din lema Stolz-Cesaro, cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = b_0$.

Pentru orice $n \geq 1$ notăm $y_n = x_n - b_0 n$ Avem

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - x_n - b_0 = f(x_n) - x_n - b_0, \forall n \geq 1.$$

Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} x (f(x) - x - b_0) = b_1$ iar din 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \infty$, din caracterizarea limitei unei funcții într-un punct cu șiruri rezultă că $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n (y_{n+1} - y_n) = b_1$.

Din egalitatea $f(x) - x - b_0 = x (f(x) - x - b_0) \cdot \frac{1}{x}, \forall x > \alpha, x \neq 0$ trecând la limită obținem

$$f(x) - x - b_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} x (f(x) - x - b_0) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = b_1 \cdot 0 = 0.$$

Adică $y = x + b_0$ este asimptotă oblică la graficul funcției f . Din 2. Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = b_0$, de unde ținând cont că $b_0 \neq 0$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n} = \frac{1}{b_0}$.

Din egalitatea

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\frac{1}{n}} = x_n (y_{n+1} - y_n) \cdot \frac{n}{x_n}, \geq 1$$

Trecând la limită obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{\frac{1}{n}} = \frac{b_1}{b_0}$$

Iarăși din lema Stolz-Cesaro obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}} = \frac{b_1}{b_0}. \text{ Cum } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}}{\ln n} = 1, \text{ rezultă că } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\ln n} = \frac{b_1}{b_0}, \text{ sau } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - b_0 n}{\ln n} = \frac{b_1}{b_0}.$$

Nou

O primă aplicație a teoremei o constituie:

Teorema 2

Fie $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\varphi(x) > 0, \forall x > 0$. Definim șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ prin condiția inițială $x_1 > 0$ și relația de recurență $x_{n+1} = x_n + \varphi\left(\frac{1}{x_n}\right)$ pentru $\forall n \geq 1$.

Atunci : $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \varphi(0)$ iar dacă în plus , $\varphi(0) > 0$ și φ este derivabilă în 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left(\frac{x_n}{n} - \varphi(0) \right) = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}.$$

Demonstrație

Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. Evident f este continuă și deoarece $\varphi(x) > 0$ rezultă că $f(x) > x, \forall x > 0$. Deoarece φ este continuă în 0, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \varphi(t) = \varphi(0)$. Așadar $y = x + \varphi(0)$ este asimtotă oblică la graficul funcției f . Din prima teoremă 1 și 2 rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \varphi(0)$. Deoarece φ este derivabilă în 0, $\lim_{x \rightarrow \infty} x (f(x) - x - \varphi(0)) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\varphi\left(\frac{1}{x}\right) - \varphi(0) \right) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$. Cum $\varphi(0) > 0$, din prima teoremă , 3. , rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left(\frac{x_n}{n} - \varphi(0) \right) = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}$$

A doua aplicație a teoremei o constituie

Teorema 3

Fie $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, derivabilă în 0 cu proprietatea că $\varphi(x) > 1, \forall x > 0, \varphi(0) = 1$. Definim șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, prin condiția inițială $x_1 > 0$ și relația de recurență $x_{n+1} = x_n \varphi\left(\frac{1}{x_n}\right)$ pentru orice $n \geq 1$. Atunci : $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \varphi'(0)$ iar dacă în plus $\varphi'(0) > 0$ și φ este de două ori derivabilă în 0, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left(\frac{x_n}{n} - \varphi'(0) \right) = \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)}$.

Demonstrație

Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. Evident f este continuă și deoarece $\varphi(x) > 1, \forall x > 0$ rezultă că $f(x) > x, \forall x > 0$. Deoarece φ este continuă în 0 și $\varphi(0) = 1$ rezultă că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \varphi(t) = \varphi(0) = 1$. Deoarece φ este derivabilă în 0,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\varphi\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0). \text{ Așadar } y = x + \varphi'(0)$$

este asimtotă oblică la graficul funcției f . Din teorema 1, 1 și 2, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \varphi'(0)$. Deoarece φ este de două ori derivabilă în 0,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x (f(x) - x - \varphi'(0)) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(x \varphi\left(\frac{1}{x}\right) - x - \varphi'(0) \right) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0) - \varphi'(0)t}{t^2} = \frac{\varphi''(0)}{2}$$

Din teorema 1, 3, rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left(\frac{x_n}{n} - \varphi'(0) \right) = \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)}.$$

Corolar

Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definim șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ prin condiția inițială $x_1 > 0$ și relația de recurență $x_{n+1} = x_n + e^{\frac{\alpha}{x_n}}$ pentru orice $n \geq 1$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left(\frac{x_n}{n} - 1 \right) = \alpha$.

Demonstrație

Fie $\varphi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $\varphi(x) = e^{\alpha x}$. Să observăm că $\varphi'(x) = \alpha e^{\alpha x}$. Aplicăm de două ori funcția φ .

Corolar

Fie $\alpha > 1, \beta > 0$. Definim șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ prin condiția $x_1 > 0$ și relația de recurență

$$x_{n+1} = x_n + \ln \left(\alpha + \frac{\beta}{x_n} \right), \text{ pentru } \forall n \geq 1.$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \ln \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left(\frac{x_n}{n} - \ln \alpha \right) = \frac{\beta}{\alpha \ln \alpha}.$$

Demonstrație

Fie $\varphi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $\varphi(x) = \ln(\alpha + \beta x)$. Să observăm că $\varphi'(x) = \frac{\beta}{\alpha + \beta x}$. Aplicăm teorema 2 pentru funcția φ .

Corolar

Fie $\alpha > 1, \beta > 0$. Definim șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ prin condiția inițială $x_1 > 0$ și relația de recurență

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{x_n}}, \text{ pentru } \forall n \geq 1.$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \sqrt{\alpha}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left(\frac{x_n}{n} - \sqrt{\alpha} \right) = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

Demonstrație

Fie $\varphi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $\varphi(x) = \sqrt{\alpha + \beta x}$. Să observăm că $\varphi'(x) = \frac{\beta}{2} (\alpha + \beta x)^{-\frac{1}{2}}$. Aplicăm teorema 2 pentru funcția φ .

4.1 Exerciții

Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k (\sqrt[n]{n+k} - 1)}{n \ln n} = \frac{1}{2}$$

Demonstrație

Să notăm $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \ln(n+k)$, $n \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^n k \left(\sqrt[n]{n+k} - 1 \right) \sim x_n. (1)$$

Fie $n \geq 2$. Avem $\ln(n+1) \leq \ln(n+k) \leq \ln(n+n)$, $\forall 1 \leq k \leq n$, de unde

$$\sum_{k=1}^n k \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n k \ln(n+k) \leq \sum_{k=1}^n k \ln(n+n), \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n k}{n^2} \leq \frac{x_n}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n k}{n^2}, \text{ sau încă, } \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n+1}{2n} \leq \frac{x_n}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n} \cdot \frac{n+1}{2n} (2)$$

Din (2) și teorema cleștelui rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n \ln n} = \frac{1}{2}$. Astfel spus $x_n \sim \frac{n \ln n}{2}$ (3) Din (1) și (3) rezultă că $\sum_{k=1}^n k \left(\sqrt[n]{n+k} - 1 \right) \sim \frac{n \ln n}{2}$, adică egalitatea din enunț.

Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \left(\sqrt[n]{n+k} - 1 \right)}}{\frac{\ln^2 n}{n}} = 1$$

Demonstrație

Să notăm $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k)}{k}$, $n \geq 1$. Știm că

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\sqrt[n]{n+k} - 1 \right) \sim x_n. (1)$$

Fie $n \geq 2$. Avem $\sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+1)}{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k)}{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+n)}{k}$, de unde $\frac{\ln(n+1)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq x_n \leq \frac{\ln(n+n)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, sau încă,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} \leq \frac{x_n}{\frac{\ln^2 n}{n}} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n}. (2)$$

Cum din lema Stolz- Cesaro, cazul $\left[\frac{1}{\infty} \right]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} = 1$, din (2) și teorema cleștelui deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\frac{\ln^2 n}{n}} = 1$. Altfel spus

$$x_n \sim \frac{\ln^2 n}{n}. (3)$$

Din (1) și (3) deducem că $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (\sqrt[n]{n+k} - 1) \sim \frac{\ln^2 n}{n}$, adică egalitatea din enunț.

Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} (\sqrt[n]{n+k} - 1)}{\frac{(\ln n) [\ln(\ln n)]}{n}} = 1$$

Demonstrație

Notăm $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \frac{\ln(n+k)}{k \ln k}$, ≥ 2 . Știm că

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} (\sqrt[n]{n+k} - 1) \sim x_n. (1)$$

Fie $n \geq 2$. Avem $\sum_{k=2}^n \frac{\ln(n+1)}{k \ln k} \leq \sum_{k=2}^n \frac{\ln(n+k)}{k \ln k} \leq \sum_{k=2}^n \frac{\ln(n+1)}{k \ln k}$, de unde, $\frac{\ln(n+1)}{n} (\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}) \leq x_n \leq \frac{\ln(n+n)}{n} (\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k})$, sau încă,

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \cdot \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}}{\ln(\ln n)} \leq \frac{x_n}{\frac{(\ln n) [\ln(\ln n)]}{n}} \leq \frac{\ln(n+n)}{n} \cdot \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}}{\ln(\ln n)}. (2)$$

Din lema Stolz-Cesaro, cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \ln k}}{\ln(\ln n)} = 1$, din (2) și teorema cleștelui deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\frac{(\ln n) [\ln(\ln n)]}{n}} = 1$. Altfel spus

$$x_n \sim \frac{(\ln n) [\ln(\ln n)]}{n}. (3)$$

Din (1) și (3) deducem că $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} (\sqrt[n]{n+k} - 1) \sim \frac{(\ln n) [\ln(\ln n)]}{n}$, adică egalitatea din enunț. [1]

Referințe bibliografice

- [1] Popa Dumitru. Curs matematică didactică. *Analiză - Capitole speciale de analiză matematică pentru pregătirea profesorilor*, 2020-2021.