Ministerul Educaţiei
Universitatea ”OVIDIUS” Constanţa
Facultatea de Matematică şi Informatică
Specializarea Informatică

Şiruri

Coordonator ştiinţific:

Student:
Tănase Ramona Elena

Constanţa
2021

Cuprins

Capitolul 1

Şiruri

Definiţie

Fie X o mulţime. O funcţie $f : \mathbb{N} \to X$ se numeşte şir de elemente din mulţimea X, sau sub o altă formulare: se numeşte şir de elemente din mulţimea X o funcţie $f : \mathbb{N} \to X.$ în mod uzual, se notează $f_1 = x_1 \in X, f_2 = x_2 \in X, ..., f_n = x_n \in X, ...$

Capitolul 2

Şiruri convergente de numere reale

Definiţie

Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, se numeşte convergent dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\forall_\varepsilon > 0, \in n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât este satisfacută inegalitatea: $|x_n - x| \leq \varepsilon$.

Propoziţie

Unicitatea limitei unui şir de numere reale Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Dacă $\begin{cases} x_n \to x \\ x_n \to y \end{cases}$ atunci $x = y$.

Demonstraţie

Să presupunem, prin absurd, că $x \neq y$. Cum suntem pe $\mathbb{R}$ înseamnă că avem una din situaţiile $x < y$ sau $y < x$. Pentru a face o alegere, fie $x < y$ atunci $y – x > 0$ şi din definiţie pentru $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$ rezultă că,

▷ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_1$
▷ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_2$

Fie $n = max(n_1, n_2) \geq n_1, n_2$. Atunci $|x_n - x| < \frac{y-x}{2} şi$ $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}$ de unde

$$y - x = |y - x| = |(y - x_n) + (x_n - x)| \leq |y - x_n| + |x_n - x| < \frac{y - x}{2} + \frac{y - x}{2} = y - x$$

Aşadar, $y - x < y - x$, contradicţie!

Un rezultat foarte frecvent folosit este ceea ce se numeşte ”teorema cleştelui”.

Teorema cleştelui

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trei şiruri de numere reale. Dacă:

$$\begin{cases} x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n \to x, z_n \to x \end{cases}$$

Atunci $y_n \to x$.

Demonstraţie

Vom arăta pentru început următoarea inegalitate. Dacă $a \leq x \leq b$ atunci $|x| \leq max(|a|, |b|)$. Vom folosi proprietăţile de la modul. Avem:

$$|x| = \begin{cases} x, dacax \geq 0 \\ -x, dacax < 0 \end{cases} \leq \begin{cases} b \leq max(b, -b) = |b| \leq max(|a|, |b|)dacax \geq 0 \\ -a \leq max(a, -a) = |a| \leq max(|a|, |b|)dacax < 0 \end{cases} \leq max(|a|, |b|)$$

Din $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ rezultă că $x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x, \forall n \in \mathbb{N}$. De aici folosind inegalitatea demonstrată deducem că:

$$|y_n - x| \leq max(|x_n - x|, |z_n - x|), \forall n \in \mathbb{N}(1)$$

Deoarece $x_n \to x, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon{}' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon{}'$ este satisfacută inegalitatea

$$|x_n - x| < \varepsilon.(2)$$

Similar din $z_n \to x, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon{}'' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon{}''$ este satisfacută inegalitatea

$$|z_n - x| < \varepsilon.(3)$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Notăm $n_\varepsilon = max(n_\varepsilon{}', n_\varepsilon{}'')$. Fie acum $n \geq n_\varepsilon$. Deoarece $n_{\varepsilon \geq} n_\varepsilon{}'$ iar $n \geq n_\varepsilon$ rezultă că $n \geq n_\varepsilon{}'$ şi din (2) rezultă că

$$|x_n - x| < \varepsilon(4)$$

Deoarece $n_\varepsilon \geq n''_\varepsilon$ iar $n \geq n_\varepsilon$ şi din (3) rezultă că

$$|z_n - x| < \varepsilon(5)$$

Din (4) şi (5) rezultă că

$$max(|x_n - x|, |z_n - x|) = \begin{Bmatrix} |x_n - xdaca| \\ |z_n - xdaca| \end{Bmatrix} < \varepsilon.(6)$$

Folosind inegalitatea (6) din inegalitatea (1) deducem că $|y_n - x| < \varepsilon$.

Aşadar am demonstrat : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon \in \mathbb{N}}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $|y_n - x| < \varepsilon$.

Conform definiţiei această inegalitate înseamnă că $y_n \to y$.

Exemplu

Fie $c \in \mathbb{R}$, Considerăm şirul $x_n = c$. Atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ sau $\lim_{n\to\infty} c = c$, limita unei constante este acea constantă.

Demonstraţie

$\forall n \in \mathbb{N}$ avem $x_n - c = c - c = 0, |x_n - c| = 0$. De aici deducem că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = 1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon = 1$ este satisfacută inegalitatea $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$. Conform definiţiei $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

Propoziţie

Dacă un şir de numere naturale este convergent atunci el este staţionar. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere naturale. Dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, atunci există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = x_k, \forall n \geq k$.

Astfel spus scris desfăşurat şirul arată astfel:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_{k-1}, x_k, x_k, x_k........$$

Demonstraţie

Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \exists n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_{\frac{1}{2}}$ este satisfacută inegalitatea $|x_n - x| < \frac{1}{2}$.

Să notăm $k = n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ şi să reţinem că ştim că $\forall n \geq k$ este satisfacută inegalitatea

$$|x_n - x| < \frac{1}{2}.(1)$$

Fie $n \geq k$. Relaţia (1) fiind adevărată pentru orice număr $\geq k$ ea va fi adevărată în particular pentru k adică avem

$$|x_k - x| < \frac{1}{2}.(2)$$

Dar la noi $n \geq k$ deci din (1) avem şi

$$|x_n - x| < \frac{1}{2}.(3)$$

Avem

$$|x_n - x_k| = |(x_n - x) + (x - x_k)| \leq |x_n - x| + |x - x_k| =$$

$$= |x_n - x| + |-(x - x_k)| = |x_n - x| + |x_k - x| .(4)$$

Am folosit inegalitatea tringhiului şi $|-a| = |a|$. Folosind (2) şi (3) din (4) deducem că

$$|x_n - x_k| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.(5)$$

Dar x_n, x_k sunt numere naturale, şi deci diferenţa lor este un număr întreg adică $x_n - x_k \in \mathbb{Z}$. Cum $|x_n - x_k| \geq 0$ iar din (5) $|x_n - x_k| < 1$ rezultă că $|x_n - x_k| \in [0, 1]$ deci $|x_n - x_k| \in \mathbb{Z} \cap [0, 1) = \{...., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \cap [0, 1) = \{0\}$ de unde $|x_n - x_k| = 0$ adică $x_n - x_k = 0, x_n = x_k$.

Aşasar am demonstrat: $\forall n \geq k avem x_n = x_k$, ceea ce încheie demonstraţia.

2.1 Exerciţii

1. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^4+3}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$$

Rezolvare

Notăm $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^4+3}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$. Adică $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^4+k}$.

în continuare procedăm astfel. De numărător nu ne atingem. Vom lucra cu numitorul, ideea fiind de a se avea acelaşi numitor peste tot.

Avem

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^4 + 1 \leq n^4 + k \leq n^4 + n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n^4+1} \leq \sqrt{n^4+k} \leq \sqrt{n^4+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}.$$

Acum înmulţind cu k obţinem $\frac{k}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4+n}}$. (1)

în continuare în relaţia (1) dam lui k valorile $1, 2, ..., n$.

Pentru $k = 1$ rezultă:

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$$

Pentru $k = 2$ rezultă:

$$\frac{2}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4+n}}$$

Adunând inegalităţile de mai sus obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+1}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+n}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

Sau

$$\frac{1+2+....+n}{\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{1+2+.....+n}{\sqrt{n^4+n}}$$

Dar ştim că $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, deci vom obţine

$$\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}}(2)$$

Acum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}}=\frac{1}{2}şi \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}}=\frac{1}{2}(3)$$

Vom da la ambele factor comun forţat.

Din (2) şi (3) şi teorema cleştelui rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$$

Capitolul 3

Şiruri mărginite

Definiţie

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte mărginit dacă şi numai dacă $\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ este satisfacută inegalitatea $x_n \in [a, b]$, sau echivalent $\exists M > 0$ astefle încât $\forall n \in \mathbb{N}$ este satisfacută inegalitatea $|x_n| \leq M$.

Definiţie

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Spunem că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ dacă, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $x_n > \varepsilon$. Sau $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.

Propoziţie

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Demonstraţie

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ din definiţie aplicată pentru $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ rezultă că $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Din această inegalitate rezultă că $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $x_n > 0$, prin urmare are sens fracţia $\frac{1}{x_n}, \forall n \geq n_\varepsilon$. Dar inegalitatea de mai sus este echivalentă cu $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea$\frac{1}{x_n} < \varepsilon$. Conform definiţiei aceasta înseamnă că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Lema Stolz-Cesaro (Cazul $\frac{1}{\infty}$)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ şi $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ astfel încât $\alpha_n \uparrow \infty$. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - a_{n-1}} \in \mathbb{R}$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} \in \mathbb{R}$$

şi în plus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}.$$

Demonstraţie

Fie $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}$. Atunci $\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astefl încât $\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}-\alpha\right|<\frac{\varepsilon}{2}\forall n\geq n_\varepsilon$ Sau , $\alpha_n\uparrow,|x_n-x_{n-1}-\alpha\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)|<\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right),\forall n\geq n_\varepsilon$. (1)

Notăm cu $k=n_\varepsilon+1$. Pentru $n\geq k$luând în (1), $n=k+1,k+2,....,n$ obţinem: $|x_{k+1}-x_k-\alpha\left(a_{k+1}-a_k\right)|<\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right)$.

$|x_{k+2}-x_{k+1}-\alpha\left(a_{k+2}-a_{k+1}\right)|<\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}\right)$ .... $|x_n-x_{n-1}-\alpha\left(a_n-a_{n-1}\right)|<\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)$

De unde obţinem, prin adunare:

$$|x_n-x_k-\alpha\left(\alpha_n-\alpha_k\right)|=$$
$$|x_n-x_{n-1}-\alpha\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)+.....+x_{k+2}-x_{k+1}-\alpha\left(\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}\right)+x_{k+1}-x_k-\alpha\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right)|$$
$$\leq|x_n-x_{n-1}-\alpha\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)|+.......+|x_{k+2}-x_{k+1}-\alpha\left(\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}\right)|+|x_{k+1}-x_k-\alpha\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right)|$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)=\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_n-\alpha_k\right)$$

$\leq\frac{\varepsilon}{2}\alpha_n$ deoarece $\alpha_k>0$.

3.1 Exerciţii

1. Calculaţi

Fie $\alpha>0$ să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+....+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

Demonstraţie

Fie $x_n = 1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha, a_n = n^\alpha$. Deoarece $\alpha > 0, \alpha \uparrow \infty$. Din lema Stolz-Cesaro, cazul

$$\left[\frac{1}{\infty}\right], \lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha_{n+1} - _n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha}$$

Dăm factor comun forţat la numărător pe $n^{\alpha+1}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha+1\left[\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} - 1\right]}}{(n+1)^\alpha}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \cdot n \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \cdot \lim_{n\to\infty} n \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{\alpha+1} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{\alpha+1} - 1}{n} = \alpha + 1$$

Am folosit limita fundamentală

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^\gamma - 1}{x} = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$$

întorcându-ne la problemă, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}$$

2. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + ... + e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$$

Rezolvare

Fie $x_n = e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + ... + e^{\sqrt{n}}, a_n = \sqrt{n}e^{\sqrt{n}}$. Avem de calculat $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{a_n} = \left[\frac{1}{\infty}\right]$

Din lema Stolz-Cesaro

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$$

Vom calcula acum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}}$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)e^{\sqrt{n+1}}+\sqrt{n}\left(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}\right)}{e^{\sqrt{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}\right)}{e^{\sqrt{n+1}}}$$

Prima limită, înmulţind şi împărţind cu conjugata ei ne da da 0, adică:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$$

Pentru cea de a doua limită procedăm astfel:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}\right)}{e^{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\frac{e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}-1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\cdot\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}-1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$=-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Am înmulţit şi am împărţit cu conjugata ei, iar la ultima factor comun forţat.

Din acestea deducem că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}=2$$

Deci ultima limită din enunţ $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\alpha_n}=2$

Propoziţie

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale strict pozitive. Dacă $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\in\mathbb{R}$ atunci $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\in\mathbb{R}$. în plus $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Pe scurt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Demonstraţie

Din definiţia logaritmilor naturali avem

$$\ln x=\alpha\Leftrightarrow x=e^{\alpha}$$

De aici deducem că $x=e^{\alpha}=e^{\ln x}$ adică

$$x=e^{\ln x},\forall x>0$$

De aici dacă $x=u^v$ obţinem $u^v=e^{\ln(u^v)}=u^{v\ln u}$. Să reţinem această egalitate

$$u^v=u^{v\ln u}$$

Ea se foloseşte tot timpul când baza şi puterea sunt variabile. La noi $\sqrt[n]{x_n}=x_n^{\frac{1}{n}}$ de unde folosind egalitatea de mai sus rezultă că

$$\sqrt[n]{x_n}=x_n^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\cdot\ln x_n}=e^{\frac{\ln x_n}{n}}$$

Fie $A=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+1}{x_n}$. Atunci $\ln$ fiind funcţie continuă

$$\ln A=\ln\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{x_n+1}{x_n}.$$

Vom arăta că în ipotezele noastre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Din lema Stolz-Cesato cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$, ipotezele sunt satisfacute, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\ln x_n}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}(\ln x_{n+1}-\ln x_n)=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}=\ln A$$

De aici deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln x_n}{n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}}=e^{\ln A}=A=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{n}.$$

Capitolul 4

Şiruri recurente şi asimtote oblice

Teoremă

Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $f : (\alpha, \infty) n \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $f_{(x)} > x, \forall x > a$. Definim şirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ prin condiţia iniţială $x_1 > \alpha$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1} = f_{(x_n)}$ pentru orice $n \geq 1$ Atunci

$$\lim_{x \to \infty} x_n = \infty$$

Dacă există $b_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = x + b_0$ este asimtotă oblică la graficul funcţiei f, atunci

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x_n}{n} = b_0$$

Dacă există $b_0, b_1 \in \mathbb{R}, b_0 \neq 0$ astfel încât $\lim_{n \to \infty} x \left(f\left(x\right) - x - b_0\right) = b_1, \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\ln n} \left(\frac{x_n}{n} - b_0\right) = \frac{b_1}{b_0}$

Demonstraţie

Din condiţia iniţială avem $x_1 > \alpha$. Presupunem $x_n > \alpha$. Din ipoteza $f_{(x)} > x, \forall x > \alpha$ rezultă că $f_{(x_n)} > x_n$, adică $x_{n+1} > x_n$. Cum Presupunem $x_n > \alpha$ rezultă că $x_{n+1} > \alpha$. Conform inducţiei matematice rezultă că $x_n > \alpha, \forall n \geq 1$.

Fie $n \geq 1$. Din ipoteza $f_{(x)} > x, \forall x > \alpha$ şi $x_n > \alpha$ rezultă că $f_{(x_n)} > x_n$ sau $x_{n+1} > x_n$. Aşadar şirul este strict crescător. Dacă prin absurd ar fi majorat, atunci din teorema lui Weierstrass este convergent şi fie $\lim_{n \to \infty} x_n = L \in \mathbb{R}$. Cum şirul este crescătpr avem $x_n \geq x_1, \forall n \geq 1$ de unde, trecând la limită rezultă ca $L \geq 1$. Cum $x_1 \geq \alpha$ rezultă că $L \geq \alpha$, iar din ipoteza $f_{(x)} \geq x, \forall x \geq \alpha$ rezultă, in particular, $f_{(L)} > L$. Deoarece $\lim_{n \to \infty} x_n = L$, iar f este contnuă, rezultă că $\lim_{n \to \infty} f_{(x_n)} = f_{(L)}$ sau $\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = f_{(L)}$, adică $\lim_{n \to \infty} x_n = f_{(L)}$. Cum $\lim_{n \to \infty} x_n = f_{(L)}$, din unicitatea limitei unui şir de numere reale rezultă că $f_{(L)} = L$, ceea ce este fals. Aşsadar şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este majorat şi fiind crescător, după cum am demonstrat, $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$. Deoarece $y = x + b_0$ este asimtotă oblică la graficul funcţiei f, conform definiţiei $\lim_{x \to \infty} \left(f_{(x)} - x\right) = b_0$. Cum, din 1. , $\lim_{x \to \infty} x_n = \infty$, din caracterizarea limitei unei funcţii într-un punct cu şiruri rezultă că

$\lim_{x\to\infty}\left(f_{(x_n)}-x_n\right)=b_0$ sau ţinând cont de relaţia de recurenţă $\lim_{x\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=b_0$. Din lema Stolz-Cesaro, cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$, rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=b_0$.

Pentru orice $n\geq 1$ notăm $y_n=x_n-b_n n$ Avem

$$y_{n+1}-y_n=x_1-x_n-b_0=f_{(x_n)}-x_n-b_0,\forall n\geq 1.$$

Cum $\lim_{x\to\infty}x\left(f_{(x)}-x-b_0\right)=b_1$ iar din 1. $\lim_{x\to\infty}x_n=\infty$, din caracterizarea limitei unei funcţii într-un punct cu şiruri rezultă că $\lim_{x\to\infty}x_n(y_{n+1}-y_n)=b_1$.

Din egalitatea $f_{(x)}-x-b_0=x\left(f_{(x)}-x-b_0\right)\cdot\frac{1}{x},\forall x>\alpha,x\neq 0$ trecând la limită obţinem

$$f_{(x)}-x-b_0=\lim_{x\to\infty}x\left(f_{(x)}-x-b_0\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=b_1\cdot 0=0.$$

Adică $y=x+b_0$ este asimtotă oblică la graficul funcţiei f . Din 2. Rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=b_0$, de unde ţinând cont că $b_0\neq 0$ rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}=\frac{1}{b_0}$.

Din egalitatea

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\frac{1}{n}}=x_n(y_{n+1}-y_n)\cdot\frac{n}{x_n},\geq 1$$

Trecând la lmită obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{\frac{1}{n}}=\frac{b_1}{b_0}$$

.

Iarăşi din lema Stolz-Cesaro obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}}=\frac{b_1}{b_0}.Cum\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}}{\ln n}=1,rezultăcă\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\ln n}=\frac{b_1}{b_0},sau\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-b}{\ln n}$$

Nou

O primă aplicaţie a tepremei o constituie:

Teorema 2

Fie $\varphi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\varphi_{(x)}>0,\forall x>0$. Definim şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ prin condiţia iniţială $x_1>0$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1}=x_n+\varphi\left(\frac{1}{x_n}\right)$ pentru $\forall n\geq 1$.

Atunci : $\lim_{x\to\infty}x_n=\infty$ şi $\lim_{x\to\infty}\frac{x_n}{n}=\varphi(0)$ iar dacă în plus , $\varphi(0)>0$ şi φ este derivabilă în 0,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n}-\varphi(0)\right)=\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}.$$

Demonstraţie

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f_{(x)}=x+\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. Evident f este continuă şi deoarece $\varphi(x)>0$ rezultă că $f_{(x)}>x,\forall x>0$. Deoarece φ este continuă în 0, $\lim_{x\to\infty}\left(f_{(x)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0,t>0}\varphi(t)=\varphi(0)$. Aşadar $y=x+\varphi(0)$ este asimtotă oblică la graficul funcţiei f. Din prima teoremă 1 şi 2 rezultă că $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\varphi(0)$. Deoarece φ este derivabilă în 0, $\lim_{x\to\infty}x\left(f_{(x)}-x-\varphi(0)\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\varphi(0)\right)=\lim_{t\to 0,t>0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\varphi'(0)$. Cum $\varphi(0)>0$, din prima teoremă , 3. , rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n}-\varphi(0)\right)=\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}$$

A doua aplicaţie a teoremei o constituie

Teorema 3

Fie $\varphi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă, derivabilă în 0 cu proprietatea că $\varphi(x)>1,\forall x>0,\varphi(0)=1$. Definim şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, prin condiţia iniţială $x_1>0$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1}=x_n\varphi\left(\frac{1}{x_n}\right)$ pentru orice n$\geq 1.Atunci:\lim_{x\to\infty}x_n=\infty$ş$i\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\varphi'(0)$ iar dacă în plus $\varphi'(0)>0$ş$i\varphi$ este de două ori derivabilă în 0, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n}-\varphi'(0)\right)=\frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)}$.

Demonstraţie

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f_{(x)}=x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. Evident f este continuă şi deoarece $\varphi(x)>1,\forall x>0$ rezultă că $f_{(x)}>x,\forall x>0$. Deoarece φ este continuă în 0 şi $\varphi(0)=1$ rezultă că $\lim_{x\to\infty}\frac{f_{(x)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0,t>0}\varphi(t)=\varphi(0)=1$. Deoarece φ este derivabilă în 0,

$$\lim_{x\to\infty}\left(f_{(x)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\lim_{t\to 0,t>0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=$$
$$\varphi'(0).Aşadary=x+\varphi'(0)$$

este asimtotă oblică la graficul funcţiei f. Din teorema 1, 1 si 2, rezultă că $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\varphi'(0)$. Deoarece φ este de două ori derivabilă în 0,

$$\lim_{x\to\infty}x\left(f_{(x)}-x-\varphi'(0)\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-x-\varphi'(0)\right)=$$

$$\lim_{t\to 0,t>0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)-\varphi'(0)\,t}{t^2}=\frac{\varphi''(0)}{2}$$

Din teorema 1, 3, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n}-\varphi'(0)\right)=\frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)}.$$

Corolar

Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definim şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ prin condişia iniţială $x_1 > 0$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n + e^{\frac{\alpha}{x_n}}$ pentru orice n$\geq 1. Atunci \lim_{x\to\infty} x_n = \infty, \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - 1\right) = \alpha.$

Demonstraţie

Fie $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty), \varphi(x) = e^{\alpha x}$. Să observăm că $\varphi'(x) = \alpha e^{\alpha x}$. Aplicăm de două ori funcţia φ.

Corolar

Fie $\alpha > 1, \beta > 0$. Definim şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ prin condiţia $x_1 > 0$ şi relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = x_n + \ln\left(\alpha + \frac{\beta}{x_n}\right), pentru \forall n \geq 1.$$

Atunci

$$\lim_{x\to\infty} = \infty, \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \ln\alpha, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - \ln\alpha\right) = \frac{\beta}{\alpha\ln\alpha}.$$

Demonstraţie

Fie $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty), \varphi(x) = \ln(\alpha + \beta x)$. Să observăm că $\varphi'(x) = \frac{\beta}{\alpha+\beta x}$. Aplicăm teorema 2 pentru funcţia φ.

Corolar

Fie $\alpha > 1, \beta > 0$. Definim şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ prin condiţia iniţială $x_1 > 0$ şi relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{x_n}}, pentru \forall n \geq 1.$$

Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \infty, \lim_{x\to\infty} \frac{x_n}{n} = \sqrt{\alpha}, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - \sqrt{\alpha}\right) = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

Demonstraţie

Fie $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty), \varphi(x) = \sqrt{\alpha + \beta x}$. Să observăm că $\varphi'(x) = \frac{\beta}{2}(\alpha + \beta x)^{-\frac{1}{2}}$. Aplicăm teorema 2 pentru funcţia φ.

4.1 Exerciţii

Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k} - 1\right)}{n\ln n} = \frac{1}{2}$$

Demonstraţie

Să notăm $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\ln(n+k), n \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim x_n.(1)$$

Fie $n \geq 2$. Avem $\ln(n+1) \leq \ln(n+k) \leq \ln(n+n), \forall 1 \leq k \leq n$, de unde

$$\sum_{k=1}^{n} k\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} k\ln(n+k) \leq \sum_{k=1}^{n} k\ln(n+n), \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2} \leq \frac{x_n}{n\ln n} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n}$$

$\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$, sau încă, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\cdot\frac{n+1}{2n} \leq \frac{x_n}{n\ln n} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n}\cdot\frac{n+1}{2n}(2)$

Din (2) şi teorema cleştelui rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n\ln n} = \frac{1}{2}$. Astfel spus $x_n \sim \frac{n\ln n}{2}(3)$ Din (1) şi (3) rezultă că $\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim \frac{n\ln n}{2}$, adică egalitatea din enunţ.

Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right)}}{\frac{\ln^2 n}{n}} = 1$$

Demonstraţie

Să notăm $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{k}, n \geq 1$. ştim că

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim x_n.(1)$$

Fie $n \geq 2$. Avem $\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+1)}{k} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{k} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+n)}{k}$, de unde $\frac{\ln(n+1)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq x_n \leq \frac{\ln(n+n)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, sau încă,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n} \leq \frac{x_n}{\frac{\ln^2 n}{n}} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}.(2)$$

Cum din lema Stolz- Cesaro, cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right], \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n} = 1$, din (2) şi teorema cleştelui deducem că $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\frac{\ln^2 n}{n}} = 1$. Altfel spus

$$x_n \sim \frac{\ln^2 n}{n}.(3)$$

Din (1) şi (3) deducem că $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim \frac{\ln^2 n}{n}$, adică egalitatea din enunţ.

Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right)}{\frac{(\ln n)[\ln(\ln n)]}{n}} = 1$$

Demonstraţie

Notăm $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(n+k)}{k\ln k}, \geq 2$. ştim că

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim x_n.(1)$$

Fie $n \geq 2$. Avem $\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(n+1)}{k\ln k} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(n+k)}{k\ln k} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(n+1)}{k\ln k}$, de unde, $\frac{\ln(n+1)}{n}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}\right) \leq x_n \leq \frac{\ln(n+n)}{n}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}\right)$, sau încă,

$$frac\ln(n+1)n \cdot \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)} \leq \frac{x_n}{\frac{(\ln n)[\ln(\ln n)]}{n}} \leq \frac{\ln(n+n)}{n} \cdot \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)}.(2)$$

Din lema Stolz-Cesaro , cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$, $lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)} = 1$, din (2) şi teorema cleşteluui deducem că $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\frac{(\ln n)[\ln(\ln n)]}{n}} = 1$. Altfel spus

$$x_n \sim \frac{(\ln n)\left[\ln(\ln n)\right]}{n}.(3)$$

Din (1) şi (3) deducem că $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim \frac{(\ln n)[\ln(\ln n)]}{n}$, adică egalitatea din enunţ. [1]

Referinţe bibliografice

[1] Popa Dumitru. Curs matematică didactică. *Analiză - Capitole speciale de analiză matematică pentru pregătirea profesorilor*, 2020-2021.