Șiruri

Tănase Ramona Elena

Universitatea Ovidius Constanta
Facultatea de Matematică și Informatică
Specializarea:Matematică - Informatică

Iulie, 2021

Cuprins

Şiruri

Definiție

Fie X o mulțime. O funcție $f : \mathbb{N} \to X$ se numește șir de elemente din mulțimea X, sau sub o altă formulare: se numește șir de elemente din mulțimea X o funcție $f : \mathbb{N} \to X$. în mod uzual, se notează $f_1 = x_1 \in X, f_2 = x_2 \in X, ..., f_n = x_n \in X, ...$

Șiruri convergente de numere reale

Teorie

Definition

Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, se numește convergent dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\forall_\varepsilon > 0, \in n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât este satisfacută inegalitatea: $|x_n - x| \leq \varepsilon$.

Șiruri convergente de numere reale

Propoziție

Unicitatea limitei unui șir de numere reale Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. *Dacă*

$$\begin{cases} x_n \to x \\ x_n \to y \end{cases}$$

atunci $x = y$.

Șiruri convergente de numere reale

Demonstrație

Să presupunem, prin absurd, că $x \neq y$ *. Cum suntem pe* $\mathbb{R}$ *înseamnă că avem una din situațiile* $x < y$ *sau* $y < x$*. Pentru a face o alegere, fie* $x < y$ *atunci* $yx > 0$ *și din definiție pentru* $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$ *rezultă că,* $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_1$ *și* $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_2$ *Fie* $n = max(n_1, n_2) \geq n_1, n_2$*. Atunci:* $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}$ *și* $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}$ *de unde*

$$y-x = |y-x| = |(y-x_n)+(x_n-x)| \leq |y-x_n|+|x_n-x| < \frac{y-x}{2}+\frac{y-x}{2}$$

Așadar, $y - x < y - x$ *, contradicție!*

Șiruri convergente de numere reale

Exerciții

Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^4+3}}+\dots\dots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$$

Rezolvare
Notăm $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^4+3}}+\dots\dots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$.
Adică $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^4+k}$.
în continuare procedăm astfel. De numărător nu ne atingem. Vom lucra cu numitorul, ideea fiind de a se avea același numitor peste tot.
Avem $1 \le k \le n$ *de unde* $n^4+1 \le n^4+k \le n^4+n$ *de unde*
$\sqrt{n^4+1} \le \sqrt{n^4+k} \le \sqrt{n^4+1}$ *de unde*
$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$.

Acum înmulțind cu k obținem

$$\frac{k}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4+n}} \tag{1.1}$$

în continuare în relația 1.1 dam lui k valorile $1, 2, ..., n$.
Pentru $k = 1$ rezultă $\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$
Pentru $k = 2$ rezultă $\frac{2}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4+n}}$
Adunând inegalitățile de mai sus obținem

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+1}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+n}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

Șiruri convergente de numere reale

Sau $\frac{1+2+....+n}{\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{1+2+....+n}{\sqrt{n^4+n}}$ Dar știm că $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, deci vom obține

$$\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}} \tag{1.2}$$

Acum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{2}$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}} = \frac{1}{2} \tag{1.3}$$

Vom da la ambele factor comun forțat. Din 1.2 și 1.3 și teorema cleștelui rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$$

Șiruri mărginite

Teorie

Definiție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un șir de numere reale. șirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se numește mărginit dacă și numai dacă* $\exists a, b \in \mathbb{R}$, *a¡ b astfel încât* $\forall n \in \mathbb{N}$ *este satisfacută inegalitatea* $x_n \in [a, b]$, *sau echivalent* $\exists M > 0$ *astefle încât* $\forall n \in \mathbb{N}$ *este satisfacută inegalitatea* $|x_n| \leq M$.

Definiție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un șir de numere reale. Spunem că* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *dacă*, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru* $\forall n \geq n_\varepsilon$ *este satisfacută inegalitatea* $x_n > \varepsilon$.

Sau $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.

Exerciții

Calculați

Fie $\alpha > 0$ să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

Demonstrație

Fie $x_n = 1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha, a_n = n^\alpha$. Deoarece $\alpha > 0, \alpha \uparrow \infty$.
Din lema Stolz-Cesaro, cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha_{n+1-n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}$$

Șiruri mărginite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^{\alpha}}$$

Dăm factor comun forțat la numărător pe $n^{\alpha+1}$.
Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha+1\left[\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} - 1\right]}}{(n+1)^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} \cdot n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} \cdot \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}-1}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{\alpha+1}-1}{n} = \alpha+1 =$$

Am folosit limita fundamentală

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^{\gamma}-1}{x} = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$$

întorcându-ne la problemă, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha}+2^{\alpha}+....+n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}$$

Șiruri recurente și asimtote oblice

Teorie

Teoremă

Fie $a \in \mathbb{R}$ *și* $f : (\alpha, \infty)\, n \to \mathbb{R}$ *o funcție continuă cu proprietatea că* $f_{(x)} > x, \forall x > a$. *Definim șirul de numere reale* $(x_n)_{n \geq 1}$ *prin condiția inițială* $x_1 > \alpha$ *și relația de recurență* $x_{n+1} = f_{(x_n)} pentru orice n \geq 1$. *Atunci*

$$\lim_{x \to \infty} x_n = \infty$$

Dacă există $b_0 \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $y = x + b_0$ *este asimtotă oblică la graficul funcției* f, *atunci* $\lim_{x \to \infty} \frac{x_n}{n} = b_0$

Șiruri recurente și asimtote oblice

Dacă există $b_0, b_1 \in \mathbb{R}, b_0 \neq 0$ astfel încât
$\lim_{n\to\infty} x\left(f\left(x\right) - x - b_0\right) = b_1, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n}{n} - b_0\right) = \frac{b_1}{b_0}$

Șiruri recurente și asimtote oblice

Exerciții

Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right)}{n\ln n} = \frac{1}{2}$$

Demonstrație

Să notăm $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\ln(n+k)\,, n \geq 1.$

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k}-1\right) \sim x_n. \tag{2.1}$$

Fie $n \geq 2$.
Avem $\ln(n+1) \leq \ln(n+k) \leq \ln(n+n), \forall 1 \leq k \leq n$, de unde

$$\sum_{k=1}^{n} k \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} k \ln(n+k) \leq \sum_{k=1}^{n} k \ln(n+n), \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2} \leq \frac{x_n}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n}$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2},$$

sau încă

Șiruri recurente și asimtote oblice

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n+1}{2n} \leq \frac{x_n}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n} \cdot \frac{n+1}{2n} \tag{2.2}$$

Din relația 2.2 și teorema cleștelui rezultă că $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n \ln n} = \frac{1}{2}$. Astfel spus

$$x_{n\sim} \frac{n \ln n}{2} \tag{2.3}$$

Din relațiile 2.1 și 2.3 rezultă că $\sum_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n]{n+k} - 1\right) \sim \frac{n \ln n}{2}$, adică egalitatea din enunț.

Bibliografie

(1) Popa,Dumitru, Curs Matematică didactică Analiză Capitole speciale de analiză matematică pentru pregătirea profesorilor , 2020-2021

Multumiri

Vă mulțumesc pentru atenție !