Ministerul Educaţiei
Universitatea ”OVIDIUS” Constanţa
Facultatea de Matematică şi Informatică
Specializarea Informatică

Şiruri

Coordonator ştiinţific:

Student:
Tănase Ramona Elena

Constanţa
2021

Cuprins

Capitolul 1

Şiruri

Definiţie

Fie X o mulțime. O funcție $f : \mathbb{N} \to X$ se numește șir de elemente din mulțimea X, sau sub o altă formulare: se numește șir de elemente din mulțimea X o funcție $f : \mathbb{N} \to X$. În mod uzual, se notează $f_1 = x_1 \in X, f_2 = x_2 \in X, ..., f_n = x_n \in X, ...$

1.1 Şiruri convergente de numere reale

Definiţie

Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, se numește convergent dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\forall_\varepsilon > 0, \in n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât este satisfacută inegalitatea: $|x_n - x| \leq \varepsilon$.

Propoziţie

Unicitatea limitei unui șir de numere reale Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Dacă

$$\begin{cases} x_n \to x \\ x_n \to y \end{cases}$$

atunci $x = y$.

Demonstraţie

Să presupunem, prin absurd, că $x \neq y$. Cum suntem pe $\mathbb{R}$ înseamnă că avem una din situațiile $x < y$ sau $y < x$. Pentru a face o alegere, fie $x < y$ atunci $y–x > 0$ și din definiție pentru $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$ rezultă că,

▷ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_1$
▷ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_2$

Fie $n = max(n_1, n_2) \geq n_1, n_2$. Atunci:

$$|x_n - x| < \frac{y-x}{2} și\, |x_n - y| < \frac{y-x}{2}$$

de unde

$$y - x = |y - x| = |(y - x_n) + (x_n - x)| \leq |y - x_n| + |x_n - x| < \frac{y-x}{2} + \frac{y-x}{2} = y - x$$

Așadar, $y - x < y - x$, contradicție!

Un rezultat foarte frecvent folosit este ceea ce se numește ”teorema cleștelui”. Teorema cleștelui. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trei șiruri de numere reale. Dacă:

$$\begin{cases} x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n \to x, z_n \to x \end{cases}$$

Atunci $y_n \to x.$

Demonstraţie

Vom arăta pentru început următoarea inegalitate. Dacă $a \leq x \leq b$ atunci $|x| \leq max(|a|, |b|)$. Vom folosi proprietățile de la modul. Avem:

$$|x| = \begin{cases} x, dacax \geq 0 \\ -x, dacax < 0 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} b \leq max(b, -b) = |b| \leq max(|a|, |b|) dacax \geq 0 \\ -a \leq max(a, -a) = |a| \leq max(|a|, |b|) dacax < 0 \end{cases}$$

$$\leq max(|a|, |b|).$$

Din $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ rezultă că $x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x, \forall n \in \mathbb{N}$. De aici folosind inegalitatea demonstrată deducem că:

▷ $|y_n - x| \leq max(|x_n - x|, |z_n - x|), \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

Deoarece $x_n \to x, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon{}' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon{}'$ este satisfacută inegalitatea $|x_n - x| < \varepsilon$. (2)

Similar din $z_n \to x, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon{}'' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon{}''$ este satisfacută inegalitatea $|z_n - x| < \varepsilon$.(3)

Fie acum $\varepsilon > 0$. Notăm $n_\varepsilon = max(n_\varepsilon{}', n_\varepsilon{}'')$. Fie acum $n \geq n_\varepsilon$. Deoarece $n_{\varepsilon \geq} n_\varepsilon{}'$ iar $n \geq n_\varepsilon$ rezultă că $n \geq n_\varepsilon{}'$ și din (2) rezultă că $|x_n - x| < \varepsilon$. (4)

Deoarece $n_\varepsilon \geq n''_\varepsilon$ iar $n \geq n_\varepsilon$ și din (3) rezultă că $|z_n - x| < \varepsilon$. (5)

Din (4) și (5) rezultă că

$$max(|x_n - x|, |z_n - x|) = \begin{Bmatrix} |x_n - xdaca| \\ |z_n - xdaca| \end{Bmatrix} < \varepsilon. (6)$$

Folosind inegalitatea (6) din inegalitatea (1) deducem că $|y_n - x| < \varepsilon$.

Așadar am demonstrat : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon \in \mathbb{N}}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $|y_n - x| < \varepsilon$.

Conform definiției această inegalitate înseamnă că $y_n \to y$.

Exemplu

Fie $c \in \mathbb{R}$, Considerăm șirul $x_n = c$. Atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ sau $\lim_{n\to\infty} c = c$, limita unei constante este acea constantă.

Demonstrație

$\forall n \in \mathbb{N}$ avem $x_n - c = c - c = 0, |x_n - c| = 0$. De aici deducem că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = 1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon = 1$ este satisfacută inegalitatea $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$. Conform definiției $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

Propoziție

Dacă un șir de numere naturale este convergent atunci el este staționar. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere naturale. Dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, atunci există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = x_k, \forall n \geq k$.

Astfel spus scris desfășurat șirul arată astfel:

▷ $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_{k-1}, x_k, x_k, x_k........$

Demonstrație

Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \exists n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_{\frac{1}{2}}$ este satisfacută inegalitatea $|x_n - x| < \frac{1}{2}$.

Să notăm $k = n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ și să reținem că știm că $\forall n \geq k$ este satisfacută inegalitatea $|x_n - x| < \frac{1}{2}$. (1)

Fie $n \geq k$. Relația (1) fiind adevărată pentru orice număr $\geq k$ ea va fi adevărată în particular pentru k adică avem $|x_k - x| < \frac{1}{2}$. (2)

Dar la noi $n \geq k$ deci din (1) avem și $|x_n - x| < \frac{1}{2}$.(3)

Avem $|x_n - x_k| = |(x_n - x) + (x - x_k)| \leq |x_n - x| + |x - x_k| = |x_n - x| + |-(x - x_k)| = |x_n - x| + |x_k - x|$. (4)

Am folosit inegalitatea tringhiului și $|-a| = |a|$. Folosind (2) și (3) din (4) deducem că $|x_n - x_k| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. (5)

Dar x_n, x_k sunt numere naturale, și deci diferența lor este un număr întreg adică $x_n - x_k \in \mathbb{Z}$. Cum $|x_n - x_k| \geq 0$ iar din (5) $|x_n - x_k| < 1$ rezultă că $|x_n - x_k| \in [0, 1]$ deci $|x_n - x_k| \in \mathbb{Z} \cap [0, 1) = \{...., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \cap [0, 1) = \{0\}$ de unde $|x_n - x_k| = 0$ adică $x_n - x_k = 0, x_n = x_k$. Așasar am demonstrat: $\forall n \geq kavemx_n = x_k$, ceea ce încheie demonstrația.

1.2 Exerciții

1. Calculați $= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^4+3}}+........+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$

Rezolvare

Notăm $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^4+3}}+........+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$. Adică $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^4+k}$.

În continuare procedăm astfel. De numărător nu ne atingem. Vom lucra cu numitorul, ideea fiind de a se avea același numitor peste tot.

Avem $1 \le k \le n$ de unde $n^4+1 \le n^4+k \le n^4+n$ de unde $\sqrt{n^4+1} \le \sqrt{n^4+k} \le \sqrt{n^4+1}$ de unde $\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$. Acum înmulțind cu k obținem $\frac{k}{\sqrt{n^4+1}} \ge \frac{k}{\sqrt{n^4+k}} \ge \frac{k}{\sqrt{n^4+n}}$. (1) În continuare în relația (1) dam lui k valorile $1, 2, ..., n$. Pentru $k = 1$ rezultă:

▷ $\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$

Pentru $k = 2$ rezultă:

▷ $\frac{2}{\sqrt{n^4+1}} \ge \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} \ge \frac{2}{\sqrt{n^4+n}}$

Adunând inegalitățile de mai sus obținem

$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+1}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+n}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$

Sau

$\frac{1+2+....+n}{\sqrt{n^4+1}} \ge x_n \ge \frac{1+2+.....+n}{\sqrt{n^4+n}}$

Dar știm că $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, deci vom obține $\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} \ge x_n \ge \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}}$. (2)

Acum $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{2}$și $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}} = \frac{1}{2}$. (3)

Vom da la ambele factor comun forțat. Din (2) și (3) și teorema cleștelui rezultă că

▷ $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$

1.3 Șiruri mărginite

Definiție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește mărginit dacă și numai dacă $\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ este satisfacută inegalitatea $x_n \in [a, b]$, sau echivalent $\exists M > 0$ astefle încât $\forall n \in \mathbb{N}$ este satisfacută inegalitatea $|x_n| \le M$.

Definiție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Spunem că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ dacă, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $x_n > \varepsilon$. Sau $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.

Propoziție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ atunci$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Demonstrație

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ din definiție aplicată pentru $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ rezultă că $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Din această inegalitate rezultă că $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $x_n > 0$, prin urmare are sens fracția $\frac{1}{x_n}, \forall n \geq n_\varepsilon$. Dar inegalitatea de mai sus este echivalentă cu $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea$\frac{1}{x_n} < \varepsilon$. Conform definiției aceasta înseamnă că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Lema Stolz-Cesaro (Cazul $\frac{1}{\infty}$)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ și $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ astfel încât $\alpha_n \uparrow \infty$. Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - a_{n-1}} \in \mathbb{R}$ atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} \in \mathbb{R}$ și în plus $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - \alpha_{n-1}}$.

Demonstrație Fie $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - \alpha_{n-1}}$. Atunci $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astefl încât $\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} - \alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_\varepsilon$ Sau , $\alpha_n \uparrow, |x_n - x_{n-1} - \alpha(\alpha_n - \alpha_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n - \alpha_{n-1}), \forall n \geq n_\varepsilon$. (1)

Notăm cu $k = n_\varepsilon + 1$. Pentru $n \geq k$luând în (1), $n = k+1, k+2, ..., n$ obținem: $|x_{k+1} - x_k - \alpha(a_{k+1} - a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$.

$|x_{k+2} - x_{k+1} - \alpha(a_{k+2} - a_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1})$ .... $|x_n - x_{n-1} - \alpha(a_n - a_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n - \alpha_{n-1})$ De unde obținem, prin adunare:

Referinţe bibliografice