

# Șiruri

**Tănase Ramona Elena**

Universitatea Ovidius Constanta  
Facultatea de Matematică și Informatică  
Specializarea: Matematică - Informatică

**Iulie, 2021**

# Cuprins

1. Şiruri
2. Şiruri convergente de numere reale
3. Şiruri mărginite
4. Şiruri recurente şi asimtote oblice
5. Bibliografie

## Definiție

*Fie  $X$  o mulțime. O funcție  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  se numește ir de elemente din mulțimea  $X$ , sau sub o altă formulare: se numește ir de elemente din mulțimea  $X$  o funcție  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ . în mod uzual, se notează  $f_1 = x_1 \in X, f_2 = x_2 \in X, \dots, f_n = x_n \in X, \dots$*

# Șiruri convergente de numere reale

## Teorie

### Definition

Un ir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , se numete convergent dacă există  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât:  
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât este satisfăcută inegalitatea:  $|x_n - x| \leq \varepsilon$ .

# Șiruri convergente de numere reale

## Propoziție

*Unicitatea limitei unui șir de numere reale Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  . Dacă*

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ x_n \rightarrow y \end{cases}$$

*atunci  $x = y$ .*

# Șiruri convergente de numere reale

## Demonstrație

Să presupunem, prin absurd, că  $x \neq y$ . Cum suntem pe  $\mathbb{R}$  înseamnă că avem una din situațiile  $x < y$  sau  $y < x$ . Pentru a face o alegere, fie  $x < y$  atunci  $y - x > 0$  și din definiție pentru  $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$  rezultă că,  $\exists n_1 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_1$  și  $\exists n_2 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_2$ . Fie  $n = \max(n_1, n_2) \geq n_1, n_2$ . Atunci:  
 $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}$  și  $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}$  de unde

$$y - x = |y - x| = |(y - x_n) + (x_n - x)| \leq |y - x_n| + |x_n - x| < \frac{y-x}{2} + \frac{y-x}{2}$$

Aadar,  $y - x < y - x$ , contradicție!

# Șiruri convergente de numere reale

## Exerciții

Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^4+3}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \right)$$

Rezolvare

Notăm  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^4+3}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ .

Adică  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^4+k}$ .

În continuare procedăm astfel. De numărător nu ne atingem. Vom lucra cu numitorul, ideea fiind de a se avea același numitor peste tot.

Avem  $1 \leq k \leq n$  de unde  $n^4+1 \leq n^4+k \leq n^4+n$  de unde

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}.$$

## Șiruri convergente de numere reale

Acum înmulțind cu  $k$  obținem

$$\frac{k}{\sqrt{n^4 + 1}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4 + k}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4 + n}} \quad (1.1)$$

în continuare în relația 1.1 dam lui  $k$  valorile  $1, 2, \dots, n$ .

Pentru  $k = 1$  rezultă  $\frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4 + n}}$

Pentru  $k = 2$  rezultă  $\frac{2}{\sqrt{n^4 + 1}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4 + 2}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4 + n}}$

Adunând inegalitățile de mai sus obținem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4 + 1}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}} \geq \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4 + 2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \geq \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{n^4 + n}} + \frac{2}{\sqrt{n^4 + n}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \end{aligned}$$



## Șiruri convergente de numere reale

$$\text{Sau } \frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{n^4+n}}$$

Dar tim că  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , deci vom obține

$$\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} \geq x_n \geq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}}. \quad (2)$$

Acum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{2} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}} = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Vom da la ambele factor comun forțat. Din (2) și (3) și teorema cletelui rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$$

# Șiruri mărginite

## Teorie

### Definiție

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un ir de numere reale.

irul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se numete mărginit dacă i numai dacă  $\exists a, b \in \mathbb{R}$ , a j b astfel încât  $\forall n \in \mathbb{N}$  este satisfacută inegalitatea  $x_n \in [a, b]$ , sau echivalent  $\exists M > 0$  astfel încât  $\forall n \in \mathbb{N}$  este satisfacută inegalitatea  $|x_n| \leq M$ .

### Definiție

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un ir de numere reale. Spunem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  dacă,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât pentru  $\forall n \geq n_\varepsilon$  este satisfacută inegalitatea  $x_n > \varepsilon$ .

Sau  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ .

# Șiruri mărginite

Exerciții

Calculați

Fie  $\alpha > 0$  să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

Demonstrație

Fie  $x_n = 1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha$ ,  $a_n = n^\alpha$ . Deoarece  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \uparrow \infty$ .

Din lema Stolz-Cesaro, cazul  $\left[\frac{1}{\infty}\right]$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{a_{n+1} - a_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

## Șiruri mărginite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha}$$

Dăm factor comun forțat la numărător pe  $n^{\alpha+1}$ .

Avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha+1} \left[ \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} - 1 \right]}{(n+1)^\alpha} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \cdot n \left[ \left( \frac{n+1}{n} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( \frac{n+1}{n} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] = \end{aligned}$$

## Șiruri mărginite

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1}{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^{\alpha+1} - 1}{n} = \alpha + 1 = \end{aligned}$$

Am folosit limita fundamentală

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^\gamma - 1}{x} = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$$

Întorcându-ne la problemă, obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

# Șiruri recurente și asimtote oblice

Teorie

Teoremă

Fie  $a \in \mathbb{R}$  și  $f : (\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă cu proprietatea că  $f(x) > x, \forall x > a$ . Definim irul de numere reale  $(x_n)_{n \geq 1}$  prin condiția inițială  $x_1 > \alpha$  și relația de recurență  $x_{n+1} = f(x_n)$  pentru orice  $n \geq 1$ .

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

Dacă există  $b_0 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $y = x + b_0$  este asimtotă oblică la graficul funcției  $f$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = b_0$

# Șiruri recurente și asimtote oblice

Dacă există  $b_0, b_1 \in \mathbb{R}, b_0 \neq 0$  astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(f(x) - x - b_0) = b_1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left( \frac{x_n}{n} - b_0 \right) = \frac{b_1}{b_0}$$

# Șiruri recurente și asimtote oblice

Exerciții

Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k \left( \sqrt[n]{n+k} - 1 \right)}{n \ln n} = \frac{1}{2}$$

Demonstrație

Să notăm  $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \ln(n+k)$ ,  $n \geq 1$ .

$$\sum_{k=1}^n k \left( \sqrt[n]{n+k} - 1 \right) \sim x_n. \quad (2.1)$$



## Șiruri recurente și asimtote oblice

Fie  $n \geq 2$ .

Avem  $\ln(n+1) \leq \ln(n+k) \leq \ln(n+n), \forall 1 \leq k \leq n$ , de unde

$$\sum_{k=1}^n k \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n k \ln(n+k) \leq \sum_{k=1}^n k \ln(n+n), \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$
$$\frac{\sum_{k=1}^n k}{n^2} \leq \frac{x_n}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n}$$
$$\frac{\sum_{k=1}^n k}{n^2},$$

sau încă

## Șiruri recurente și asimptote oblice

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n+1}{2n} \leq \frac{x_n}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n+n)}{\ln n} \cdot \frac{n+1}{2n} \quad (2.2)$$

Din relația 2.2 i teorema cletelui rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n \ln n} = \frac{1}{2}$ . Astfel spus

$$x_n \sim \frac{n \ln n}{2} \quad (2.3)$$

Din relațiile 2.1 i 2.3 rezultă că  $\sum_{k=1}^n k (\sqrt[n]{n+k} - 1) \sim \frac{n \ln n}{2}$ , adică egalitatea din enunț.

- (1) Popa,Dumitru, Curs Matematică didactică Analiză Capitole speciale de analiză matematică pentru pregătirea profesorilor , 2020-2021

Vă mulțumesc pentru atenție !