Ministerul Educaţiei
Universitatea ”OVIDIUS” Constanţa
Facultatea de Matematică şi Informatică
Specializarea Informatică

Şiruri

Coordonator ştiinţific:

Student:
Tănase Ramona Elena

Constanţa
2021

Cuprins

Capitolul 1

Şiruri

Definiţie

Fie X o mulțime. O funcție $f : \mathbb{N} \to X$ se numește șir de elemente din mulțimea X, sau sub o altă formulare: se numește șir de elemente din mulțimea X o funcție $f : \mathbb{N} \to X$. În mod uzual, se notează $f_1 = x_1 \in X, f_2 = x_2 \in X, ..., f_n = x_n \in X, ...$

Capitolul 2

Şiruri convergente de numere reale

Definiţie

Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, se numește convergent dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\forall_\varepsilon > 0, \in n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât este satisfacută inegalitatea: $|x_n - x| \leq \varepsilon$.

Propoziţie

Unicitatea limitei unui șir de numere reale Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Dacă $\begin{cases} x_n \to x \\ x_n \to y \end{cases}$ atunci $x = y$.

Demonstraţie

Să presupunem, prin absurd, că $x \neq y$. Cum suntem pe $\mathbb{R}$ înseamnă că avem una din situațiile $x < y$ sau $y < x$. Pentru a face o alegere, fie $x < y$ atunci $y – x > 0$ și din definiție pentru $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$ rezultă că,

- ▷ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_1$
- ▷ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}, \forall n \geq n_2$

Fie $n = max(n_1, n_2) \geq n_1, n_2$. Atunci $|x_n - x| < \frac{y-x}{2} și$ $|x_n - y| < \frac{y-x}{2}$ de unde

$$y - x = |y - x| = |(y - x_n) + (x_n - x)| \leq |y - x_n| + |x_n - x| < \frac{y-x}{2} + \frac{y-x}{2} = y - x$$

Așadar, $y - x < y - x$, contradicție!

Un rezultat foarte frecvent folosit este ceea ce se numește ”teorema cleștelui”.

Teorema cleștelui

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trei șiruri de numere reale. Dacă:

$$\begin{cases} x_n \le y_n \le z_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n \to x, z_n \to x \end{cases}$$

Atunci $y_n \to x$.

Demonstraţie

Vom arăta pentru început următoarea inegalitate. Dacă $a \le x \le b$ atunci $|x| \le max(|a|, |b|)$. Vom folosi proprietățile de la modul. Avem:

$$|x| = \begin{cases} x, dacax \ge 0 \\ -x, dacax < 0 \end{cases} \le \begin{cases} b \le max(b, -b) = |b| \le max(|a|, |b|)dacax \ge 0 \\ -a \le max(a, -a) = |a| \le max(|a|, |b|)dacax < 0 \end{cases} \le max(|a|, |b|)$$

Din $x_n \le y_n \le z_n, \forall n \in \mathbb{N}$ rezultă că $x_n - x \le y_n - x \le z_n - x, \forall n \in \mathbb{N}$. De aici folosind inegalitatea demonstrată deducem că:

$$|y_n - x| \le max(|x_n - x|, |z_n - x|), \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Deoarece $x_n \to x, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \ge n_\varepsilon'$ este satisfacută inegalitatea

$$|x_n - x| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Similar din $z_n \to x, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon'' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \ge n_\varepsilon''$ este satisfacută inegalitatea

$$|z_n - x| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Notăm $n_\varepsilon = max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$. Fie acum $n \ge n_\varepsilon$. Deoarece $n_{\varepsilon \ge} n_\varepsilon'$ iar $n \ge n_\varepsilon$ rezultă că $n \ge n_\varepsilon'$ și din (1.2) rezultă că

$$|x_n - x| < \varepsilon \tag{1.4}$$

Deoarece $n_\varepsilon \ge n_\varepsilon''$ iar $n \ge n_\varepsilon$ și din (1.3) rezultă că

$$|z_n - x| < \varepsilon \tag{1.5}$$

Din (1.4) și (1.5) rezultă că

$$max(|x_n - x|, |z_n - x|) = \begin{Bmatrix} |x_n - xdaca| \\ |z_n - xdaca| \end{Bmatrix} < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Folosind inegalitatea (1.6) din inegalitatea (1.1) deducem că $|y_n - x| < \varepsilon$.

Așadar am demonstrat : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon \in \mathbb{N}}$ astfel încât pentru $\forall n \ge n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $|y_n - x| < \varepsilon$.

Conform definiției această inegalitate înseamnă că $y_n \to y$.

Exemplu

Fie $c \in \mathbb{R}$, Considerăm șirul $x_n = c$. Atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ sau $\lim_{n\to\infty} c = c$, limita unei constante este acea constantă.

Demonstrație

$\forall n \in \mathbb{N}$ avem $x_n - c = c - c = 0, |x_n - c| = 0$. De aici deducem că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = 1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon = 1$ este satisfacută inegalitatea $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$. Conform definiției $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

Propoziție

Dacă un șir de numere naturale este convergent atunci el este staționar. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere naturale. Dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, atunci există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = x_k, \forall n \geq k$.

Astfel spus scris desfășurat șirul arată astfel:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_{k-1}, x_k, x_k, x_k........$$

Demonstrație

Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \exists n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_{\frac{1}{2}}$ este satisfacută inegalitatea $|x_n - x| < \frac{1}{2}$.

Să notăm $k = n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ și să reținem că știm că $\forall n \geq k$ este satisfacută inegalitatea

$$|x_n - x| < \frac{1}{2}.(1)$$

Fie $n \geq k$. Relația (1) fiind adevărată pentru orice număr $\geq k$ ea va fi adevărată în particular pentru k adică avem

$$|x_k - x| < \frac{1}{2}.(2)$$

Dar la noi $n \geq k$ deci din (1) avem și

$$|x_n - x| < \frac{1}{2}.(3)$$

Avem

$$|x_n - x_k| = |(x_n - x) + (x - x_k)| \leq |x_n - x| + |x - x_k| =$$

$$= |x_n - x| + |-(x - x_k)| = |x_n - x| + |x_k - x| .(4)$$

Am folosit inegalitatea tringhiului și $|-a| = |a|$. Folosind (2) și (3) din (4) deducem că

$$|x_n - x_k| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.(5)$$

Dar x_n, x_k sunt numere naturale, și deci diferența lor este un număr întreg adică $x_n - x_k \in \mathbb{Z}$. Cum $|x_n - x_k| \geq 0$ iar din (5) $|x_n - x_k| < 1$ rezultă că $|x_n - x_k| \in [0, 1]$ deci $|x_n - x_k| \in \mathbb{Z} \cap [0, 1) = \{...., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \cap [0, 1) = \{0\}$ de unde $|x_n - x_k| = 0$ adică $x_n - x_k = 0, x_n = x_k$.

Așasar am demonstrat: $\forall n \geq k avem x_n = x_k$, ceea ce încheie demonstrația.

2.1 Exerciții

1. Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^4+3}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$$

Rezolvare

Notăm $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^4+3}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$. Adică $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^4+k}$.

În continuare procedăm astfel. De numărător nu ne atingem. Vom lucra cu numitorul, ideea fiind de a se avea același numitor peste tot.

Avem

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n^4 + 1 \leq n^4 + k \leq n^4 + n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{n^4+1} \leq \sqrt{n^4+k} \leq \sqrt{n^4+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}.$$

Acum înmulțind cu k obținem $\frac{k}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{k}{\sqrt{n^4+n}}$. (1)

În continuare în relația (1) dam lui k valorile $1, 2, ..., n$.

Pentru $k = 1$ rezultă:

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$$

Pentru $k = 2$ rezultă:

$$\frac{2}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} \geq \frac{2}{\sqrt{n^4+n}}$$

Adunând inegalitățile de mai sus obținem

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+1}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}\geq\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\geq$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+n}}+......+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

Sau

$$\frac{1+2+....+n}{\sqrt{n^4+1}}\geq x_n\geq\frac{1+2+.....+n}{\sqrt{n^4+n}}$$

Dar știm că $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, deci vom obține

$$\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}}\geq x_n\geq\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}}(2)$$

Acum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}}=\frac{1}{2}și\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}}=\frac{1}{2}(3)$$

Vom da la ambele factor comun forțat.

Din (2) și (3) și teorema cleștelui rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$$

Capitolul 3

Șiruri mărginite

Definiție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește mărginit dacă și numai dacă $\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ este satisfacută inegalitatea $x_n \in [a, b]$, sau echivalent $\exists M > 0$ astefle încât $\forall n \in \mathbb{N}$ este satisfacută inegalitatea $|x_n| \leq M$.

Definiție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Spunem că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ dacă, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $x_n > \varepsilon$. Sau $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.

Propoziție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Demonstrație

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ din definiție aplicată pentru $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ rezultă că $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Din această inegalitate rezultă că $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea $x_n > 0$, prin urmare are sens fracția $\frac{1}{x_n}, \forall n \geq n_\varepsilon$. Dar inegalitatea de mai sus este echivalentă cu $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ este satisfacută inegalitatea$\frac{1}{x_n} < \varepsilon$. Conform definiției aceasta înseamnă că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Lema Stolz-Cesaro (Cazul $\frac{1}{\infty}$)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ și $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ astfel încât $\alpha_n \uparrow \infty$. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\alpha_n - a_{n-1}} \in \mathbb{R}$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} \in \mathbb{R}$$

și în plus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}.$$

Demonstrație Fie $\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}$. Atunci $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astefl încât $\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}-\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2}\forall n \geq n_\varepsilon$ Sau , $\alpha_n\uparrow, \left|x_n - x_{n-1} - \alpha\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right), \forall n \geq n_\varepsilon$. (1)

Notăm cu $k = n_\varepsilon + 1$. Pentru $n \geq k$luând în (1), $n = k+1, k+2, ..., n$ obținem: $\left|x_{k+1}-x_k-\alpha\left(a_{k+1}-a_k\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right)$.

$\left|x_{k+2}-x_{k+1}-\alpha\left(a_{k+2}-a_{k+1}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}\right)$ .... $\left|x_n-x_{n-1}-\alpha\left(a_n-a_{n-1}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)$

De unde obținem, prin adunare:

$$\left|x_n-x_k-\alpha\left(\alpha_n-\alpha_k\right)\right| =$$

$$\left|x_n-x_{n-1}-\alpha\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)+.....+x_{k+2}-x_{k+1}-\alpha\left(\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}\right)+x_{k+1}-x_k-\alpha\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right)\right|$$

$$\leq\left|x_n-x_{n-1}-\alpha\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)\right|+.......+\left|x_{k+2}-x_{k+1}-\alpha\left(\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}\right)\right|+\left|x_{k+1}-x_k-\alpha\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right)\right|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_n-\alpha_{n-1}\right)=\frac{\varepsilon}{2}\left(\alpha_n-\alpha_k\right)$$

$\leq\frac{\varepsilon}{2}\alpha_n$ deoarece $\alpha_k > 0$.

3.1 Exerciții

1. Calculați

   Fie $\alpha > 0$ să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+....+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

Demonstrație

Fie $x_n = 1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha, a_n = n^\alpha$. Deoarece $\alpha > 0, \alpha \uparrow \infty$. Din lema Stolz-Cesaro, cazul

$$\left[\frac{1}{\infty}\right], \lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha_{n+1} - _n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha}$$

Dăm factor comun forțat la numărător pe $n^{\alpha+1}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha+1\left[\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} - 1\right]}}{(n+1)^\alpha}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \cdot n \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \cdot \lim_{n\to\infty} n \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{\alpha+1} - 1}{n} = \alpha + 1$$

Am folosit limita fundamentală

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^\gamma - 1}{x} = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$$

Întorcându-ne la problemă, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

2. Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + ... + e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}}$$

Rezolvare

Fie $x_n = e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + ... + e^{\sqrt{n}}, a_n = \sqrt{n} e^{\sqrt{n}}$. Avem de calculat $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{a_n} = \left[\frac{1}{\infty}\right]$

Din lema Stolz-Cesaro

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$$

Vom calcula acum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}}$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)e^{\sqrt{n+1}}+\sqrt{n}\left(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}\right)}{e^{\sqrt{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}\right)}{e^{\sqrt{n+1}}}$$

Prima limită, înmulțind și împărțind cu conjugata ei ne da da 0, adică:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$$

Pentru cea de a doua limită procedăm astfel:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}\right)}{e^{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\frac{e^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}-1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\cdot\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}-1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$=-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Am înmulțit și am împărțit cu conjugata ei, iar la ultima factor comun forțat.

Din acestea deducem că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}=2$$

Deci ultima limită din enunț $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\alpha_n}=2$

Propoziție

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale strict pozitive. Dacă $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\in\mathbb{R}$ atunci $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\in\mathbb{R}$. În plus $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Pe scurt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Demonstrație

Din definiția logaritmilor naturali avem

$$\ln x=\alpha\Leftrightarrow x=e^{\alpha}$$

De aici deducem că $x=e^{\alpha}=e^{\ln x}$ adică

$$x=e^{\ln x},\forall x>0$$

De aici dacă $x=u^v$ obținem $u^v=e^{\ln(u^v)}=u^{v\ln u}$. Să reținem această egalitate

$$u^v=u^{v\ln u}$$

Ea se folosește tot timpul când baza și puterea sunt variabile. La noi $\sqrt[n]{x_n}=x_n^{\frac{1}{n}}$ de unde folosind egalitatea de mai sus rezultă că

$$\sqrt[n]{x_n}=x_n^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\cdot\ln x_n}=e^{\frac{\ln x_n}{n}}$$

Fie $A=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+1}{x_n}$. Atunci $\ln$ fiind funcție continuă

$$\ln A=\ln\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{x_n+1}{x_n}.$$

Vom arăta că în ipotezele noastre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Din lema Stolz-Cesato cazul $\left[\frac{1}{\infty}\right]$, ipotezele sunt satisfacute, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\ln x_n}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}(\ln x_{n+1}-\ln x_n)=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}=\ln A$$

De aici deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln x_n}{n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}}=e^{\ln A}=A=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{n}.$$

Referinţe bibliografice