Laborator 2

Metoda Gauss, cu pivotare totală la fiecare etapă, pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{1}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este matricea sistemului (1) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (1).
Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (1).

Prezentarea Metodei:
Considerăm matricea extinsă $(A\,|\,b) = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n+1}}$, unde $a_{i,n+1} = b_i$, $1 \le i \le n$.

Metoda Gauss constă în prelucrarea matricei extinse $(A\,|\,b)$ astfel încât in $n-1$ paşi matricea A devine superior triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & ... & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} & a_{1,n+1}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & ... & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2,n}^{(n)} & a_{2,n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} & a_{n-1,n+1}^{(n)} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right) = A^{(n)}, \quad \text{unde} \;\; A^{(1)} = (A\,|\,b). \tag{2}$$

Presupunând că $a_{kk}^{(k)} \neq 0, 1 \le k \le n-1$, unde elementul $a_{kk}^{(k)}$ se numeşte pivot, pentru a obţine matricea (2) aplicăm următoarele formule

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & 1 \le i \le k,\; i \le j \le n+1 \\ 0 & 1 \le j \le k,\; j+1 \le i \le n \\ a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)} & k+1 \le i \le n,\; k+1 \le j \le n+1. \end{cases} \tag{3}$$

Componentele soluţiei sistemului (1) se obţin direct, prin substituţie inversă:

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)} / a_{nn}^{(n)}, \quad \text{dacă} \;\; a_{nn}^{(n)} \neq 0, \tag{4}$$

pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$

$$x_i = \left(a_{i,n+1}^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} \cdot x_j \right) / a_{ii}^{(n)}. \tag{5}$$

★**La fiecare pas k se caută acel elemet $a_{i_k,j_k}^{(k)}$, $k \le i_k \le n$, $k \le j_k \le n$, care are proprietatea**

$$\left| a_{i_k j_k}^{(k)} \right| = \max_{\substack{k\le i\le n\\ k\le j\le n}} \left| a_{ij}^{(k)} \right|.$$

Observaţii:

1) Dacă $a_{i_k,j_k}^{(k)} = 0$, $\forall k \le i_k, j_k \le n$, atunci sistemul (1) nu are soluţie uninică.

2) Dacă $a_{i_k,j_k}^{(k)} \neq 0$ şi $i_k \neq k$ sau $j_k \neq k$ atunci se permută liniile k şi i_k, eventual apoi se permută coloanele k şi j_k în matricea $A^{(k)}$, după care se aplică formulele (3) şi, în final (4).

3) Dacă s-au realizat permutări de coloane, atunci acestea vor influenţa obţinerea soluţiei sistemului (1). Astfel după aplicarea formulelor (4), se permută componentele soluţiei, corespunzător permutărilor de coloane, de la ultima realizată până la prima.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte ε, n, a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$
2. $npc \leftarrow 0$
3. pentru $k = 1, 2, ..., n-1$ execută
    3.1. $piv \leftarrow |a_{kk}|$
    3.2. $lin \leftarrow k$
    3.3. $col \leftarrow k$
    3.4. pentru $j = k, k+1, ..., n$ execută
        3.4.1. pentru $i = k, k+1, ..., n$ execută
            3.4.1.1. dacă $piv < |a_{ij}|$ atunci
                3.4.1.1.1. $piv \leftarrow |a_{ij}|$
                3.4.1.1.2. $lin \leftarrow i$
                3.4.1.1.3. $col \leftarrow j$
    3.5. dacă $piv \le \varepsilon$ atunci
        3.5.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
        3.5.2. *ieşire*
    3.6. dacă $lin \ne k$ atunci
        3.6.1. pentru $j = k, k+1, ..., n+1$ execută
            3.6.1.1. $aux \leftarrow a_{kj}$
            3.6.1.2. $a_{kj} \leftarrow a_{lin,j}$
            3.6.1.3. $a_{lin,j} \leftarrow aux$
    3.7. dacă $col \ne k$ atunci
        3.7.1. $npc \leftarrow npc + 1$
        3.7.2. $c[npc, 1] \leftarrow k$
        3.7.3. $c[npc, 2] \leftarrow col$
        3.7.4. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
            3.7.4.1. $aux \leftarrow a_{ik}$
            3.7.4.2. $a_{ik} \leftarrow a_{i,col}$
            3.7.4.3. $a_{i,col} \leftarrow aux$
    3.8. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută
        3.8.1. $a_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$
        3.8.2. pentru $j = k+1, k+2, ..., n+1$ execută
            3.8.2.1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$
4. dacă $|a_{nn}| \le \varepsilon$ atunci
    4.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
    4.2. *ieşire*
5. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$
6. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută
    6.1. $S \leftarrow 0$
    6.2. pentru $j = i+1, i+2, ..., n$ execută
        6.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$
    6.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$
7. dacă $npc \ne 0$ atunci
    7.1. pentru $i = npc, npc-1, ..., 1$ execută
        7.1.1. $aux \leftarrow a_{c[i,1],n+1}$
        7.1.2. $a_{c[i,1],n+1} \leftarrow a_{c[i,2],n+1}$
        7.1.3. $a_{c[i,2],n+1} \leftarrow aux$
8. scrie $'x_i =', a_{i,n+1}, 1 \le i \le n.$

Exemple: Folosind metoda lui Gauss cu pivotare totală la fiecare etapă, rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii lineare

$$a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_4 = -2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x - 2y + z = 6 \\ -x - 12y + 5z = 10. \end{cases}$$