Laborator 10

Metoda trapezului pentru evaluarea integralelor

Prezentarea Problemei: Ne propunem să aproximăm valoarea integralei definite

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Prezentarea Metodei: Fie $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, având nodurile de interpolare
$x_i = x_0 + ih$, $0 \leq i \leq n$, unde $h = \frac{b-a}{n}$.

Metoda trapezului, propune următoarea formulă de aproximare

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right).$$

Algoritmul Pseudocod
1. citeşte a, b, ε; declară f
2. $n \leftarrow 1$
3. $II \leftarrow (f(a) + f(b)) \cdot (b - a)/2$
4. repetă
   4.1. $n \leftarrow 2 \cdot n$
   4.2. $h \leftarrow (b - a)/n$
   4.3. $IO \leftarrow II$
   4.4. $s \leftarrow 0$
   4.5. pentru $i = 1, 2, ..., n - 1$ execută
      4.5.1. $s \leftarrow s + f(a + ih)$
   4.6. $II \leftarrow (f(a) + 2s + f(b)) \cdot h/2$
până când $|II - IO| \leq \varepsilon$
5. scriem ('Valoarea integralei, obţinută cu precizia', ε, 'este', II)

Exemplu: 1. Aproximati $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ cu 4 zecimale exacte.
Sol: $I = 0.69314$, în 9 paşi.
2. Aproximati $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$ cu 2 zecimale exacte, unde

$$f(x) = \begin{cases} 0.4(x+1)^3 + 0.6(x+1) - 5x & x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{x+1} & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Sol: $I = 3.59314$.

Metoda Simpson pentru evaluarea integralelor

Prezentarea Problemei: Ne propunem să aproximăm valoarea integralei definite

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Prezentarea Metodei: Fie $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, având nodurile de interpolare
$x_i = x_0 + ih$, $0 \leq i \leq n$, unde $h = \frac{b-a}{n}$.

Metoda Simpson, propune următoarea formulă de aproximare

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_n)\right).$$

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte a, b, ε; declară f
2. $n \leftarrow 1$
3. $II \leftarrow \big(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\big) \cdot (b-a)/6$
4. repetă
   - 4.1. $n \leftarrow 2 \cdot n$
   - 4.2. $h \leftarrow (b-a)/n$
   - 4.3. $IO \leftarrow II$
   - 4.4. $s_1 \leftarrow 0$
   - 4.5. pentru $i = 1, 2, ..., n-1$ execută
     - 4.5.1. $s_1 \leftarrow s_1 + f(a + ih)$
   - 4.6. $s_2 \leftarrow 0$
   - 4.7. pentru $i = 0, 1, ..., n-1$ execută
     - 4.7.1. $s_2 \leftarrow s_2 + f(a + ih + h/2)$
   - 4.8. $II \leftarrow (f(a) + 2s_1 + 4s_2 + f(b)) \cdot h/6$

   până când $|II - IO| \leq \varepsilon$
5. scriem ('Valoarea integralei, obţinută cu precizia', ε, 'este', II)

Exemplu: 1. Aproximati $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ cu 4 zecimale exacte.
Sol: $I = 0.69314$, în 4 paşi.
2. Aproximati $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$ cu 2 zecimale exacte, unde

$$f(x) = \begin{cases} 0.4(x+1)^3 + 0.6(x+1) - 5x & x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{x+1} & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Sol: $I = 3.59314$.