Laborator 12

Metoda Runge-Kutta de ordin doi pentru rezolvarea unei probleme Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale ordinare

Prezentarea Problemei: Considerăm problema Cauchy

$$(1)\qquad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Prezentarea Metodei: Fie $x_0 < x_1 < ... < x_n$, unde $x_{i+1} = x_i + h$, $0 \le i \le n-1$. Ne propunem să determinăm valorile aproximative ale soluţiei problemei Cauchy (1), notate y_i, unde $y_i \simeq y(x_i)$, $1 \le i \le n$.
Formulele utilizate sunt:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2), \text{ unde} \\ k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2k_1}{3}\right), \ 0 \le i \le n-1. \end{cases}$$

Observaţie: În algoritmul următor, valorile $y_1, y_2, ..., y_n$, se calculează, fiecare, cu o precizie ε, dorită, la trecerea de la pasul i la pasul $i+1$, tactica fiind înjumătăţirea pasului h.

Algoritmul Pseudocod

1.declară f; citeşte n, x_i, $0 \le i \le n$, y_0, ε;
2. $i \leftarrow 0$
3. repetă
    3.1. $x \leftarrow x_i$; $xx \leftarrow x_{i+1}$; $y \leftarrow y_i$
    3.2. $h \leftarrow xx - x$
    3.3. $k_1 \leftarrow h \cdot f(x,y)$
    3.4. $k_2 \leftarrow h \cdot f\,(x + 2h/3, y + 2k_1/3)$
    3.5. $yy \leftarrow y + (k_1 + 3k_2)/4$;
    3.6. repetă
        3.6.1. $h \leftarrow \frac{h}{2}$
        3.6.2. $aux \leftarrow yy$
        3.6.3. cât timp $x < xx$ execută
            3.6.3.1. $k_1 \leftarrow h \cdot f(x,y)$
            3.6.3.2. $k_2 \leftarrow h \cdot f(x + 2h/3, y + 2k_1/3)$
            3.6.3.3. $y \leftarrow y + (k_1 + 3k_2)/4$
            3.6.3.4. $x \leftarrow x + h$
        3.6.4. $yy \leftarrow y$; $x \leftarrow x_i$; $y \leftarrow y_i$
        până când $|yy - aux| \le \varepsilon$
    3.7. $y_{i+1} \leftarrow yy$;
    3.8. scrie 'valoarea aproximativa a solutiei in', xx 'este', yy
    3.9. $i \leftarrow i + 1$;
până când $i = n$

Exemplu: Fie problema

$$\begin{cases} y' = \frac{2y}{x} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Se consideră $x_i = 1 + 0.1 \cdot i$, $0 \leq i \leq 5$. Se cer valorile y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 care aproximează $y(1.1)$, $y(1.2)$, $y(1.3)$, $y(1.4)$, $y(1.5)$.
Sol: Pentru $\varepsilon = 10^{-5}$, obţinem aproximările
$y_1 = 1.209997$
$y_2 = 1.439994$
$y_3 = 1.689991$
$y_4 = 1.959987$
$y_5 = 2.249983$.
Valorile exacte ale soluţiei $y = x^2$ sunt: 1.21; 1.44; 1.69; 1.96; 2.25.