Laborator 1

Metoda lui Gauss

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{1}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este matricea sistemului (1) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (1).
Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (1).

Prezentarea Metodei:
Considerăm matricea extinsă $(A\,|\,b) = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n+1}}$, unde $a_{i,n+1} = b_i$, $1 \le i \le n$.
Metoda Gauss constă în prelucrarea matricei extinse $(A\,|\,b)$ astfel încât in $n-1$ paşi matricea A devine superior triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \dots & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} & a_{1,n+1}^{(n)}\\
0 & a_{22}^{(n)} & \dots & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2,n}^{(n)} & a_{2,n+1}^{(n)}\\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} & a_{n-1,n+1}^{(n)}\\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)}
\end{array}\right) = A^{(n)}, \quad \text{unde } \; A^{(1)} = (A\,|\,b). \tag{2}$$

Presupunând că $a_{kk}^{(k)} \neq 0, 1 \le k \le n-1$, unde elementul $a_{kk}^{(k)}$ se numeşte **pivot**, pentru a obţine matricea (2) aplicăm următorul algoritm

- primele k linii se copiază;
- pe coloana "k", sub pivot, elementele vor fi nule;
- restul elementelor, sub linia "k", la dreapta coloanei "k", se vor calcula cu regula dreptunghiului:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \vdots & & \vdots & \\
\text{linia } k & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots\cdots\cdots & a_{kj}^{(k)} & \dots\\
 & & \vdots & & \vdots & \\
\text{linia } i & \cdots & a_{ik}^{(k)} & \cdots\cdots\cdots & a_{ij}^{(k)} & \dots\\
 & & \vdots & & \vdots & \\
 & & \text{coloana } k & & \text{coloana } j &
\end{array}
\Rightarrow a_{ij}^{(k+1)} = \frac{a_{kk}^{(k)} a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

Prin urmare, pentru $1 \le k \le n-1$, obţinem următoarele formule:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & 1 \le i \le k,\ i \le j \le n+1\\ 0 & 1 \le j \le k,\ j+1 \le i \le n\\ a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)} & k+1 \le i \le n,\ k+1 \le j \le n+1. \end{cases} \tag{3}$$

Componentele soluţiei sistemului (1) se obţin direct, prin substituţie inversă:

(4) $$x_n = a^{(n)}_{n,n+1}/a^{(n)}_{nn}, \quad \text{dacă } a^{(n)}_{nn} \neq 0,$$

pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$

(5) $$x_i = \left(a^{(n)}_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a^{(n)}_{ij} \cdot x_j \right) / a^{(n)}_{ii}.$$

Algoritmul Pseudocod

// Citim n, dimensiunea matricei A şi matricea extinsă $(A\,|\,b)$

1. citeste n, a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$
2. pentru $k = 1, 2, ..., n-1$ execută
   2.1. dacă $a_{kk} \neq 0$ atunci
      //Aplicăm formulele din metoda Gauss (regula dreptunghiului) si anume ultima formula din (3)
      2.1.1. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută
         2.1.1.1. $a_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$
         2.1.1.2. pentru $j = k+1, k+2, ..., n+1$ execută
            2.1.1.2.1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$
   2.2. altfel *ieşire*
3. dacă $a_{nn} = 0$ atunci
   3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
   3.2. *ieşire*

//Determinăm x_n aplicând formula (4)

4. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$

//Determinăm $x_i, n-1 \ge i \ge 1$, aplicând formulele (5)

5. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută
   5.1. $S \leftarrow 0$
   5.2. pentru $j = i+1, i+2, ..., n$ execută
      5.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$
   5.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$
6. scrie $'x_i='$, $a_{i,n+1}$, $1 \le i \le n$.

Observatie: Dacă pivotul $a_{kk} = 0$, în locul instructiunii 2.2. se pune următorul bloc de instructiuni
pentru $lin = k+1, k+2, ..., n$ caută $a_{lin,k} \neq 0$
schimbă între ele liniile lin şi k:

2.2. altfel
   2.2.1. $lin \leftarrow k$
   2.2.2. repetă
      2.2.2.1. $lin \leftarrow lin + 1$
      până când $a_{lin,k} \neq 0$ sau $lin > n$
   2.2.3. dacă $lin > n$ atunci
      2.2.3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
      2.2.3.2. *ieşire*
   2.2.4. pentru $j = k, k+1, ..., n+1$ execută
      2.2.4.1. $aux \leftarrow a_{kj}$

2.2.4.2. $a_{kj} \leftarrow a_{lin,j}$
2.2.4.3. $a_{lin,j} \leftarrow aux$

Exemple: Rezolvaţi următoarele sitemele cu ajutorul metodei lui Gauss

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 10x_4 = -6 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 9 \\ -3x_1 - 5x_2 + 15x_4 = 13 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x - y - 3z = 8 \\ 3x - y + z = 4 \\ 2x + 3y + 19z = 10. \end{cases}$$