Laborator 6

Metoda Newton pentru rezolvarea numerică iterativă a ecuaţiilor neliniare

Prezentarea Problemei: Considerăm ecuaţia

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2([a, b])$. Ne propunem să aproximăm soluţia ecuaţiei (1), $x^* \in [a, b]$.

Prezentarea Metodei: Metoda Newton se bazează pe construirea unui şir de aproximaţii succesive $(x_n)_{n\geq 0}$ convergent către x^* şi definit prin formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \geq 0,$$

unde x_0 este aproximatia iniţială a soluţiei exacte x^*.
Criteriul de oprire:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \backsimeq x^*,$$

sau

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \leq \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \backsimeq x^*,$$

sau

$$|f(x_{n+1})| \leq \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \backsimeq x^*,$$

unde ε este precizia de calcul.

Observaţie Pentru optimizarea numarului de iteraţii, x_0 se alege astfel încât $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Algoritmul Pseudocod
1. citeşte x_0, ε, $itmax$; declară f, f'
2. $it \leftarrow 0$
3. repetă
   3.1. $x_1 \leftarrow x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$
   3.2. $dif \leftarrow |x_1 - x_0|$
   3.3. $x_0 \leftarrow x_1$
   3.4. $it \leftarrow it + 1$
până când ($dif \leq \varepsilon$) sau ($it > itmax$)
4. dacă $it > itmax$ atunci
   4.1. scrie *'Nu se poate obţine soluţia în'*, itmax, *'iteraţii, cu precizia'*, ε
   4.2. *ieşire*
5. scrie (*'Soluţia obţinută în '*,it, *'iterţii cu precizia'*,ε, *'este'*, x_1).

Exemple: 1. Să se aproximeze rădăcina pozitivă, cu 4 zecimale exacte, folosind metoda Newton pentru ecuaţia $x^2 = 2$.
2. a)Să se aproximeze rădăcina $x^* > 1$, cu 4 zecimale exacte, folosind metoda Newton pentru ecuaţia $2x - \ln x = 4$.
b) Ştiind că ecuaţia are şi o rădăcină subunitară, să se aproximeze, cu aceeaşi precizie, folosind metoda Newton.
Sol: 2a) $x^* \backsimeq 2.4475$; b) $x^* \backsimeq 0.01902$.

Metoda aproximaţiilor succesive pentru rezolvarea numerică iterativă a ecuaţiilor neliniare

Prezentarea Problemei: Considerăm ecuaţia

$$f(x) = 0, \tag{2}$$

unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^1([a, b])$. Ne propunem să aproximăm soluţia ecuaţiei (2), $x^* \in [a, b]$.

Prezentarea Metodei: Metoda aproximaţiilor succesive constă în transformarea ecuaţiei (2) într-o formă echivalentă

$$x = g(x).$$

Construim şirul de aproximaţii succesive $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n \geq 0, \tag{3}$$

unde x_0 este aproximaţia iniţială a soluţiei exacte x^*.

Observaţii 1. O condiţie suficientă pentru asigurarea convergenţei şirului (3) este aceea ca funcţia g să fie contracţie pe intervalul $[a, b]$.
2. Dacă g este derivabilă pe $[a, b]$, atunci g este contracţie dacă şi numai dacă

$$|g'(x)| \leq q < 1, \quad \forall x \in [a, b].$$

Criteriul de oprire:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \backsimeq x^*,$$

sau

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \leq \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \backsimeq x^*,$$

unde ε este precizia de calcul.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte x_0, ε, $itmax$; declară g
2. $it \leftarrow 0$
3. repetă
   3.1. $x_1 \leftarrow g(x_0)$
   3.2. $dif \leftarrow |x_1 - x_0|$
   3.3. $x_0 \leftarrow x_1$
   3.4. $it \leftarrow it + 1$

până când $(dif \leq \varepsilon)$ sau $(it > itmax)$

4. dacă $it > itmax$ atunci
   4.1. scrie *'Nu se poate obţine soluţia în'*, itmax, *'iteraţii, cu precizia'*, ε
   4.2. *ieşire*
5. scrie (*'Soluţia obţinută în* ',it, *'iterţii cu precizia'*,ε, 'este', x_1).

Exemple: 1. Să se aproximeze rădăcina pozitivă, supraunitară, cu 3 zecimale exacte, folosind metoda aproximaţiilor succesive pentru ecuaţia $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.
2. Să se aproximeze rădăcina ecuaţiei $x = \sqrt[4]{x} + 2$, cu două zecimale exacte.
3. Să se aproximeze rădăcina ecuaţiei $x = (x + 1)^3$, cu o zecimală exactă.
Sol: 1. $x^* \backsimeq 1.3652$; 2. $x^* \backsimeq 3.353$; 3. $x^* \backsimeq -2.324$.

Metoda Seidel-Gauss pentru rezolvarea iterativă a sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{4}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este matricea sistemului (4) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (4).
Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (4).

Prezentarea Metodei: Pentru $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ aproximaţia iniţială a soluţiei sitemului (4), ales arbitrar (de exemplu vectorul nul), calculăm

$$x_i^{(k+1)} = \left(t_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}, 1 \le i \le n,\ k \ge 0,$$

până când este îndeplinită condiţia

$$\max_{1\le i\le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon,$$

unde ε reprezintă precizia cu care dorim să obţinem soluţia sistemului. Atunci $x \backsimeq x^{(k+1)}$.
Observatie: O condiţie suficientă pentru obţinerea soluţiei sitemului (4), cu precizia ε, este ca matricea A să fie dominant diagonală pe linii sau coloane şi strict dominant diagonală pe cel puţin una din linii sau coloane.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \le i, j \le n$, b_i, $1 \le i \le n$, ε, $itmax$, x_i, $1 \le i \le n$
2. $it \leftarrow 0$
3. repetă
    3.1. $max \leftarrow 0$
    3.2. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
        3.2.1. $S \leftarrow 0$
        3.2.2. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută
            3.2.2.1. dacă $j \ne i$ atunci
                3.2.2.1.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot x_j$
        3.2.3. $y \leftarrow (b_i - S)/a_{ii}$
        3.2.4. dacă $max < |y - x_i|$ atunci
            3.2.4.1. $max \leftarrow |y - x_i|$
        3.2.5. $x_i \leftarrow y$
    3.3. $it \leftarrow it + 1$
până când ($max \le \varepsilon$) sau ($it > itmax$)
4. dacă $it > itmax$ atunci
    4.1. scrie *'Nu se poate obţine soluţia în'*, itmax, *'iteraţii, cu precizia'*, ε
    4.2. *ieşire*
5. scrie (*'Soluţia obţinută în* ',it, *'iterţii cu precizia'*,ε, 'este', x_i, $1 \le i \le n$)

Exemple: Să se determine soluţiile următoarelor sisteme cu preciziile $\varepsilon = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-7}, \varepsilon = 10^{-10}$

$$a) \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -30 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -132 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = -132 \\ x_3 + 2x_4 = -30 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 10 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_4 = 10 \\ -2x_1 + 4x_3 - x_4 = 20 \\ -2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Solution: a) Pentru $\varepsilon = 10^{-4}, x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{it} = 9$ şi $x = \begin{pmatrix} 1.000008 \\ -0.999996 \\ 2.999996 \end{pmatrix}$,

b) Pentru $\varepsilon = 10^{-4}, x^{(0)} = 0_4 \Rightarrow \text{it} = 10$ şi $x = \begin{pmatrix} -1.99998855 \\ -26.0000057 \\ -25.9999971 \\ -2.00000143 \end{pmatrix}$.