Laborator 2

Metoda Gauss, cu pivotare parţială la fiecare etapă, pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{1}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este matricea sistemului (1) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (1).
Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (1).

Prezentarea Metodei:
Considerăm matricea extinsă $(A\,|\,b) = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n+1}}$, unde $a_{i,n+1} = b_i$, $1 \le i \le n$.
Metoda Gauss constă în prelucrarea matricei extinse $(A\,|\,b)$ astfel încât in $n-1$ paşi matricea A devine superior triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & ... & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} & a_{1,n+1}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & ... & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2,n}^{(n)} & a_{2,n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} & a_{n-1,n+1}^{(n)} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right) = A^{(n)}, \quad \text{unde } \ A^{(1)} = (A\,|\,b). \tag{2}$$

Presupunând că $a_{kk}^{(k)} \neq 0, 1 \le k \le n-1$, unde elementul $a_{kk}^{(k)}$ se numeşte pivot, pentru a obţine matricea (2) aplicăm următoarele formule

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & 1 \le i \le k,\ i \le j \le n+1 \\ 0 & 1 \le j \le k,\ j+1 \le i \le n \\ a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)} & k+1 \le i \le n,\ k+1 \le j \le n+1. \end{cases} \tag{3}$$

Componentele soluţiei sistemului (1) se obţin direct, prin substituţie inversă:

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)} / a_{nn}^{(n)}, \quad \text{dacă } \ a_{nn}^{(n)} \neq 0, \tag{4}$$

pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$

$$x_i = \left(a_{i,n+1}^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} \cdot x_j \right) / a_{ii}^{(n)}. \tag{5}$$

★La fiecare pas k se caută în coloana k a pivotului, acel elemet $a_{i_k,k}^{(k)}$, $k \le i_k \le n$, care are proprietatea

$$\left| a_{i_k k}^{(k)} \right| = \max_{k \le i \le n} \left| a_{ik}^{(k)} \right|.$$

Observaţii:

1) Dacă $a_{i_k,k}^{(k)} = 0$, atunci sistemul (1) nu are soluţie uninică.

2) Dacă $a_{i_k,k}^{(k)} \neq 0$ şi $i_k \neq k$ atunci se permută liniile k şi i_k în matricea $A^{(k)}$ după care se aplică formulele (3) şi, în final (4).

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$
2. pentru $k = 1, 2, ..., n-1$ execută
   2.1. $piv \leftarrow |a_{kk}|$
   2.2. $lin \leftarrow k$
   2.3. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută
      2.3.1. dacă $piv < |a_{ik}|$ atunci
         2.3.1.1. $piv \leftarrow |a_{ik}|$
         2.3.1.2. $lin \leftarrow i$
   2.4. dacă $piv = 0$ atunci
      2.4.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
      2.4.2. *ieşire*
   2.5. dacă $lin \neq k$ atunci
      2.5.1. pentru $j = k, k+1, ..., n+1$ execută
         2.5.1.1. $aux \leftarrow a_{kj}$
         2.5.1.2. $a_{kj} \leftarrow a_{lin,j}$
         2.5.1.3. $a_{lin,j} \leftarrow aux$
   2.6. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută
      2.6.1. $a_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$
      2.6.2. pentru $j = k+1, k+2, ..., n+1$ execută
         2.6.2.1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$
3. dacă $a_{nn} = 0$ atunci
   3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
   3.2. *ieşire*
4. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$
5. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută
   5.1. $S \leftarrow 0$
   5.2. pentru $j = i+1, i+2, ..., n$ execută
      5.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$
   5.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$
6. scrie $'x_i =', a_{i,n+1}$, $1 \le i \le n$.

Exemple: Folosind metoda lui Gauss cu pivotare partială la fiecare etapă rezolvaţi următoarele sitemele de ecuaţii lineare

$$a)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - 3x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x - 2y + z = 6 \\ -x - 12y + 5z = 10. \end{cases}$$