Laborator 11

Evaluarea numerică a integralelor duble pe triunghiuri

Prezentarea Problemei: Ne propunem să aproximăm valoarea integralei definite

$$I(f) = \iint_D f(x,y)dxdy,$$

unde D este un triunghi cu vârfurile $V_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq 3$.

Prezentarea Metodei: $I(f)$ poate fi aproximată folosind una din următoarele formule

$$I(f) = \frac{S}{3}\left(f(V_1') + f(V_2') + f(V_3')\right), \tag{1}$$

sau

$$I(f) = \frac{S}{12}\left[f(V_1) + f(V_2) + f(V_3) + 9f(V_G)\right], \tag{2}$$

unde S este aria triunghiului D, $V_i'(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq 3$ sunt mijloacele laturilor triunghiului D, iar $V_G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ este centrul de greutate al triunghiului D.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$; declară f
2. $l_1 \leftarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
3. $l_2 \leftarrow \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$
4. $l_3 \leftarrow \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$
5. $p \leftarrow (l_1 + l_2 + l_3)/2$
6. $S \leftarrow \sqrt{p(p - l_1)(p - l_2)(p - l_3)}$
7. $I \leftarrow \frac{S}{12} \cdot \left(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3) + 9f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\right)$
8. scriem ('Valoarea integralei este ', I)

Exemplu: 1. Aproximaţi $I = \iint_D \sqrt{xy - y^2}dxdy$, unde D este tringhiul cu vârfurile $V_1(0,0)$, $V_2(10,1)$ şi $V_3(1,1)$.
Sol: $I = 5.89$.
2. Aproximaţi $I = \iint_D \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(1+xy)}dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 1\}$.

Metoda Euler pentru rezolvarea unei probleme Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale ordinare

Prezentarea Problemei: Considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

Prezentarea Metodei: Fie $x_0 < x_1 < ... < x_n$, unde $x_{i+1} = x_i + h$, $0 \leq i \leq n-1$. Ne propunem sa determinăm valorile aproximative ale soluţiei problemei Cauchy (3), notate y_i, unde $y_i \simeq y(x_i)$, $0 \leq$

$i \leq n-1$.
Formulele utilizate sunt:
$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i),\ 0 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Observaţie: În algoritmul următor, valorile $y_1, y_2, ..., y_n$, se calculează, fiecare, cu o precizie ε, dorită, la trecerea de la pasul i la pasul $i+1$, tactica fiind înjumătăţirea pasului h.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte x_i, $0 \leq i \leq n$, y_0, ε; declară f;
2. $i \leftarrow 0$
3. repetă
   3.1. $x \leftarrow x_i$; $xx \leftarrow x_{i+1}$; $y \leftarrow y_i$
   3.2. $h \leftarrow xx - x$;
   3.3. $yy \leftarrow y + h \cdot f(x, y)$;
   3.4. repetă
      3.4.1. $h \leftarrow \frac{h}{2}$
      3.4.2. $aux \leftarrow yy$
      3.4.3. cât timp $x < xx$ execută
         3.4.3.1. $y \leftarrow y + h \cdot f(x, y)$
         3.4.3.2. $x \leftarrow x + h$
      3.4.4. $yy \leftarrow y$; $x \leftarrow x_i$; $y \leftarrow y_i$
      până când $|yy - aux| \leq \varepsilon$
   3.5. $y_{i+1} \leftarrow yy$;
   3.6. scrie 'valoarea aproximativa a solutiei in', xx 'este', yy
   3.7. $i \leftarrow i + 1$;

până când $i = n$

Exemplu: Fie problema
$$\begin{cases} y' = \frac{2y}{x} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Se consideră $x_i = 1 + 0.1 \cdot i$, $0 \leq i \leq 5$. Se cer valorile y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 care aproximează $y(1.1)$, $y(1.2)$, $y(1.3)$, $y(1.4)$, $y(1.5)$.
Sol: Pentru $\varepsilon = 10^{-4}$, obţinem aproximările
$y_1 = 1.209957$
$y_2 = 1.439906$
$y_3 = 1.689847$
$y_4 = 1.959781$
$y_5 = 2.249707$.
Valorile exacte ale soluţiei $y = x^2$ sunt: 1.21; 1.44; 1.69; 1.96; 2.25.