Laborator 3

Factorizarea LR Doolitle a matricelor aplicată la rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{1}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este matricea sistemului (1) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (1).
Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (1).

Prezentarea Metodei:

Metoda facorizarii LR Doolitle constă în descomunerea matricei A în forma

$$A = L \cdot R, \text{unde}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & 1 \end{pmatrix} \text{-matrice inferior triunghiulară;} \quad \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & ... & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & r_{nn} \end{pmatrix} \text{-matrice superior triunghiulară.}$$

Elementele matricelor L şi R se determină aplicând următoarele formule

$$\begin{cases} r_{1j} = a_{1j}, & 1 \le j \le n \\ l_{i1} = a_{i1}/r_{11}, & 2 \le i \le n \\ r_{kj} = a_{kj} - \displaystyle\sum_{h=1}^{k-1} l_{kh} \cdot r_{hj}, & 2 \le k \le n, \quad k \le j \le n. \\ l_{ik} = \left(a_{ik} - \displaystyle\sum_{h=1}^{k-1} l_{ih} \cdot r_{hk} \right) / r_{kk}, & 2 \le k \le n, \quad k+1 \le i \le n. \end{cases} \tag{2}$$

Observaţii:

1) Orice matrice A nesingulară admite o factorizare LR, eventual după permutări convenabile ale liniilor.

2) Ordinea în care sunt calculate elementele matricelor L şi R, în formulele (2), este: prima linie din R, prima coloană din L, a doua linie din R, a doua coloană din L, etc.
Aplicând metoda Doolitle (formulele (2)) matricei sistemului (1), obţinem

$$A \cdot x = b \Longleftrightarrow L \cdot \underbrace{R \cdot x}_{=y} = b.$$

Pentru determinarea soluţiei x se rezolvă sccesiv sistemele

$$\begin{cases} L \cdot y = b \\ R \cdot x = y. \end{cases}$$

Componentele soluţiei intermediare sistemului inferior triunghiular $L \cdot y = b$ se obţin prin substituţie directă:

$$(3) \qquad \begin{cases} y_1 = b_1, \\ y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k, \quad i = 2, 3, ..., n. \end{cases}$$

Sistemul superior triunghiular $R \cdot x = y$ se rezolvă prin substituţie inversă:

$$(4) \qquad \begin{cases} x_n = y_n / r_{nn}, \\ x_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik} \cdot x_k \right) / r_{ii}, \quad i = n-1, n-2, ..., 1. \end{cases}$$

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$
2. dacă $a_{11} = 0$ atunci
    2.1. $i \leftarrow 1$
    2.2. repetă
        2.2.1. $i \leftarrow i + 1$
        până când $a_{i1} \neq 0$ sau $i > n$
    2.3. dacă $i > n$ atunci
        2.3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
        2.3.2. ieşire
    2.4. pentru $j = 1, 2, ..., n+1$ execută
        2.4.1. $aux \leftarrow a_{1j}$
        2.4.2. $a_{1j} \leftarrow a_{ij}$
        2.4.3. $a_{ij} \leftarrow aux$
3. pentru $i = 2, 3, ..., n$ execută
    3.1. $a_{i1} \leftarrow a_{i1}/a_{11}$
4. pentru $k = 2, 3, ..., n$ execută
    4.1. $i \leftarrow k$
    4.2. repetă
        4.2.1. $S \leftarrow 0$; $piv \leftarrow 0$
        4.2.2. pentru $h = 1, 2, ..., k-1$ execută
            4.2.2.1. $S \leftarrow S + a_{ih} \cdot a_{hk}$
        4.2.3. $piv \leftarrow a_{ik} - S$
        4.2.4. $i \leftarrow i + 1$
        până când $piv \neq 0$ sau $i > n$
    4.3. dacă $piv = 0$ atunci
        4.3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
        4.3.2. *ieşire*
    4.4. dacă $i \neq k + 1$ atunci
        4.4.1. pentru $j = 1, 2, ...n + 1$ execută
            4.4.1.1. $aux \leftarrow a_{kj}$
            4.4.1.2. $a_{kj} \leftarrow a_{i-1,j}$
            4.4.1.3. $a_{i-1,j} \leftarrow aux$
    4.5. pentru $j = k, k+1, ..., n$ execută

4.5.1. $S \leftarrow 0$
4.5.2. pentru $h = 1, 2, ..., k-1$ execută
4.5.2.1. $S \leftarrow S + a_{kh} \cdot a_{hj}$
4.5.3. $a_{kj} \leftarrow a_{kj} - S$
4.6. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută
4.6.1. $S \leftarrow 0$
4.6.2. pentru $h = 1, 2, ..., k-1$ execută
4.6.2.1. $S \leftarrow S + a_{ih} \cdot a_{hk}$
4.6.3. $a_{ik} \leftarrow (a_{ik} - S)/a_{kk}$
5. pentru $i = 2, 3, ..., n$ execută
5.1. $S \leftarrow 0$
5.2. pentru $k = 1, 2, ..., i-1$ execută
5.2.1. $S \leftarrow S + a_{ik} \cdot a_{k,n+1}$
5.3. $a_{i,n+1} \leftarrow a_{i,n+1} - S$
6. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$
7. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută
7.1. $S \leftarrow 0$
7.2. pentru $j = i+1, i+2, ..., n$ execută
7.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$
7.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$
8. scrie $'x_i ='$, $a_{i,n+1}$, $1 \leq i \leq n$.

Exemple: Folosind metoda factorizarii LR Doolitle rezolvaţi următoarele sisteme

$$a) \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y + z = -2 \\ x = -1. \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ -5x_3 - 7x_4 = -8 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + \frac{9}{2}x_3 + x_4 = \frac{7}{2} \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$