Laborator 8

Aproximarea funcţiilor prin interpolare Lagrange

Prezentarea Problemei: Fie:
$x_0 < x_1 < ... < x_n \in \mathbb{R}$ noduri de interpolare;
$f_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, valori data ale unei funcţii în nodurile de interpolare;
$z \in \mathbb{R}$, cu $z \in [x_0, x_n]$.

Ne propunem să aproximăm $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile date.

Prezentarea Metodei:

$$f(z) \cong \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{z - x_i}{x_k - x_i},$$

unde

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$

este polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile $x_0, x_1, ..., x_n$.

Observatie: $d^o(L) = n$.

Algoritmul Pseudocod
1. citeşte n, x_i, $0 \leq i \leq n$, f_i, $0 \leq i \leq n$, z
2. $L \leftarrow 0$
3. pentru $k = 0, 1, .., n$ execută
   3.1. $P \leftarrow 1$
   3.2. pentru $i = 0, 1, .., n$ execută
      3.2.1. dacă $i \neq k$ atunci
         3.2.1.1. $P \leftarrow P \cdot (z - x_i)/(x_k - x_i)$
   3.3. $L \leftarrow L + f_k \cdot P$
4. scrie *'Valoarea aproximativă a funcţiei f în '*, z, *'este'*, L

Exemple: 1. Fie tabelul de date

x_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1
f_i	0	$\frac{1}{2}$	1	0

Să se evalueze $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile date, unde:
$z \in \{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2\}$.
Sol: $\frac{1}{6} \simeq 0.166666$; $f(\frac{1}{4}) = 0.693752$; $f(\frac{1}{3}) = 0.844444$;

2. Fie tabelul de date

x_i	-1	0	2	3	4
f_i	-0.3	0.2	0	1.1	1.8

a) Să se evalueze $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile date, unde: $z \in \{-2; -1.05; -0.5; 0; 1; 2; 2.995; 4; 67\}$.
b) Să se evalueze $f(-0.5)$ şi $f(1)$ folosind un polinom de interpolare Lagrange de gradul 2.
Sol: a) $f(-0.5) = 0.225$, $f(1) = -0.24$, $f(2.995) = 1.093846$

Algoritmul de mai sus se completeaza ţinând cont de următoarele observaţii:
1) dacă $z \notin [x_0, x_n]$, nu putem aproxima f în z;
2) dacă $\exists\, i \in \{0, 1, .., n\}$, astfel încât $z = x_i$, atunci se va afişa valoarea corespunzătoare a lui L (fără a calcula suma);
3) evaluarea polinomului Lagrange se poate face în $z_1, z_2, ..., z_n \in [x_0, x_n]$;
4) dacă $\exists\, i \in \{0, 1, .., n\}$, astfel încât $f_i = 0$, atunci nu se ia în considerare, în sumă, termenul care conţine $f_i = 0$.

Aproximarea funţiilor prin interpolare Newton

Prezentarea Problemei: Fie:
$x_0 < x_1 < ... < x_n \in \mathbb{R}$ noduri de interpolare;
$f_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, valori data ale unei funcţii în nodurile de interpolare;
$z \in \mathbb{R}$, cu $z \in [x_0, x_n]$.

Ne propunem să aproximăm $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Newton pe nodurile date.

Prezentarea Metodei:

$$f(z) \cong f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0; x_1; ...; x_k] \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (z - x_i),$$

unde

$$N(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0; x_1; ...; x_k] \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i),$$

este polinomul de interpolare Newton pe nodurile $x_0, x_1, ..., x_n$ şi

$$f[x_0] = f_0,$$

$$f[x_0; x_1; ...; x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f_j}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k} (x_j - x_i)}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Observatie: $d^o(N) = n$.

Algoritmul Pseudocod
1. citeşte n, x_i, $0 \leq i \leq n$, f_i, $0 \leq i \leq n$, z
2. $N \leftarrow f_0$
3. pentru $k = 1, 2, .., n$ execută
    3.1. $s \leftarrow 0$
    3.2. pentru $j = 0, 1, .., k$ execută

3.2.1. $p \leftarrow 1$

3.2.2. pentru $i = 0, 1, .., k$ execută

3.2.2.1. dacă $i \neq j$ atunci

3.2.2.1.1. $p \leftarrow p \cdot (x_j - x_i)$

3.2.3. $s \leftarrow s + f_j / p$

3.3. $p \leftarrow 1$

3.4. pentru $i = 0, 1, .., k - 1$ execută

3.4.1. $p \leftarrow p \cdot (z - x_i)$

3.5. $N \leftarrow N + s \cdot p$

4. scrie *'Valoarea aproximativă a funcţiei f în '*, z, *'este'*, N

Exemple: 1. Fie tabelul de date

x_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1
f_i	0	$\frac{1}{2}$	1	0

Să se evalueze $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Newton pe nodurile date, unde:
$z \in \{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2\}$.
Sol: $\frac{1}{6} \simeq 0.166666$; $f(\frac{1}{4}) = 0.693752$; $f(\frac{1}{3}) = 0.844444$;

2.Fie tabelul de date

x_i	-1	0	2	3	4
f_i	-0.3	0.2	0	1.1	1.8

a) Să se evalueze $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Newton pe nodurile date, unde:
$z \in \{-2; -1.05; -0.5; 0; 1; 2; 2.995; 4; 67\}$.
b) Să se evalueze $f(-0.5)$ şi $f(1)$ folosind un polinom de interpolare Newton de gradul 3.
Sol: a) $f(-0.5) = 0.225$, $f(1) = -0.24$, $f(2.995) = 1.093846$

Algoritmul de mai sus se completeaza ţinând cont de următoarele observaţii:
1) dacă $z \notin [x_0, x_n]$, nu putem aproxima f în z;
2) dacă $\exists\, i \in \{0, 1, .., n\}$, astfel încât $z = x_i$, atunci se va afişa valoarea corespunzătoare a lui N (fără a calcula suma);
3) evaluarea polinomului Newton se poate face în $z_1, z_2, ..., z_n \in [x_0, x_n]$;
4) dacă $\exists\, i \in \{1, 2, .., n\}$, astfel încât $s = f[x_0; x_1; ...; x_k] = 0$, atunci nu se ia în considerare, în sumă, termenul care conţine $s = 0$.