Laborator 4

Factorizarea LR-Crout a matricelor pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{1}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este matricea sistemului (5) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (5).
Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (5).

Prezentarea Metodei:

Metoda facorizarii LR-Crout constă în descomunerea matricei A în forma

$$A = L \cdot R, \text{unde}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & l_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & l_{nn} \end{pmatrix} \text{-matrice inferior triunghiulară;} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & ... & r_{1n} \\ 0 & 1 & ... & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \text{-matrice superior triunghiulară.}$$

Elementele matricelor L şi R se determină aplicând următoarele formule

$$\begin{cases} l_{i1} = a_{i1}, & 1 \le i \le n \\ r_{1j} = a_{1j}/l_{11}, & 2 \le j \le n \\ l_{ik} = a_{ik} - \displaystyle\sum_{h=1}^{k-1} l_{ih} \cdot r_{hk}, & 2 \le k \le n, \quad k \le i \le n. \\ r_{kj} = \left(a_{kj} - \displaystyle\sum_{h=1}^{k-1} l_{kh} \cdot r_{hj} \right) /l_{kk}, & 2 \le k \le n, \quad k+1 \le j \le n. \end{cases} \tag{2}$$

Sistemul (5) este echivalent cu

$$L \cdot \underbrace{R \cdot x}_{=y} = b.$$

Pentru determinarea soluţiei x se rezolvă sccesiv sistemele

$$\begin{cases} L \cdot y = b \\ R \cdot x = y. \end{cases}$$

Componentele soluţiei intermediare sistemului inferior triunghiular $L \cdot y = b$ se obţin prin substituţie directă:

$$\begin{cases} y_1 = b_1/l_{11}, \\ y_i = \left(b_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k \right) /l_{ii}, \quad i = 2, 3, ..., n. \end{cases} \tag{3}$$

Sistemul superior triunghiular $R \cdot x = y$ se rezolvă prin substituţie inversă:

(4)
$$\begin{cases} x_n = y_n, \\ x_i = y_i - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} r_{ik} \cdot x_k, \quad i = n-1, n-2, ..., 1. \end{cases}$$

Exemple: Modificaţi algoritmul factorizarii LR Doolitle astfel încât să se obţină procedura de factorizare LR-Crout:

$a)\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y + z = -2 \\ x = -1. \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ -5x_3 - 7x_4 = -8 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + \frac{9}{2}x_3 + x_4 = \frac{7}{2} \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Factorizarea LR pentru matrice tridiagonale cu aplicare la rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

(5)
$$A \cdot x = t,$$

unde $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ este o matrice tridiagonală şi $t \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (5).

Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (5).

Prezentarea Metodei:

Căutăm două matrice

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$ -matrice inferior triunghiulară, cu elementele de pe diagonala principală egale cu 1 $R = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & r_2 & s_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & s_3 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & s_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & r_n \end{pmatrix}$ -matrice superior triunghiulară,

cu proprietatea $A = L \cdot R$. Pentru a determina elementele matricelor L şi R aplicăm următoarele formule

(6)
$$\begin{cases} r_1 = a_1, & \\ s_i = b_i, & 1 \le i \le n-1 \\ l_i = c_i / r_i, & 1 \le i \le n-1 \\ r_{i+1} = a_{i+1} - l_i \cdot s_i, & 1 \le i \le n-1. \end{cases}$$

Sistemul (5) este echivalent cu

$$L \cdot \underbrace{R \cdot x}_{=y} = t.$$

Pentru determinarea soluţiei x se rezolvă sccesiv sistemele

$$\begin{cases} L \cdot y = b \\ R \cdot x = y. \end{cases}$$

Avem următoarele formule

$$\begin{cases} y_1 = t_1, \\ y_i = t_i - l_{i-1} \cdot y_{i-1}, \quad i = 2, 3, ..., n. \end{cases} \tag{7}$$

respectiv

$$\begin{cases} x_n = y_n / r_n, \\ x_i = (y_i - s_i \cdot x_{i+1}) / r_i, \quad i = n-1, n-2, ..., 1. \end{cases} \tag{8}$$

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_i, $1 \leq i \leq n$, b_i, $1 \leq i \leq n-1$, c_i, $1 \leq i \leq n-1$, t_i, $1 \leq i \leq n$
2. pentru $i = 1, 2, ..., n-1$ execută
   2.1. dacă $a_i = 0$ atunci
      2.1.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică deoarece avem elementul diagonal nul în linia'*, i
      2.1.2. *ieşire*
   2.2. $c_i \leftarrow c_i / a_i$
   2.3. $a_{i+1} \leftarrow a_{i+1} - b_i \cdot c_i$
3. pentru $i = 2, 3, ..., n$ execută
   3.1. $t_i \leftarrow t_i - c_{i-1} \cdot t_{i-1}$
4. dacă $a_n = 0$ atunci
   4.1. scrie *'Sist. nu are soluţie unică deoarece avem elementul diagonal nul în linia'*, n
   4.2. *ieşire*
5. $t_n \leftarrow t_n / a_n$
6. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută
   6.1. $t_i \leftarrow (t_i - b_i \cdot t_{i+1}) / a_i$
7. scrie $'x_i ='$, t_i, $1 \leq i \leq n$.

Exemple: Folosind factorizarea LR rezolvaţi următoarele sisteme tridiagonale

$$a) \begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 5x + 3y - z = 7 \\ -y + z = 0. \end{cases} \quad b) \begin{cases} -2x_1 + \frac{11}{10}x_2 = -\frac{1}{16} \\ \frac{11}{12}x_1 - 2x_2 + \frac{13}{12}x_3 = -\frac{1}{16} \\ \frac{13}{14}x_2 - 2x_3 = -\frac{1}{16} \end{cases}.$$

Solutie a) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ b) $x_1 = 0.100494$, $x_2 = 0.125899$, $x_3 = 0.089703$.