Laborator 9

Aproximarea funcţiilor prin spline cubic cu derivata a doua nulă la extremităţile intervalului de aproximare

Prezentarea Problemei: Fie:
$x_0 < x_1 < ... < x_n \in \mathbb{R}$ noduri de interpolare;
$f_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, valori data ale unei funcţii în nodurile de interpolare;
$z \in \mathbb{R}$, cu $z \in [x_0, x_n]$.

Ne propunem să aproximăm $f(z)$, folosind spline-ul cubic pe nodurile date.

Prezentarea Metodei:
Notăm

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$S''(x_i) = u_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Avem că $S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \Rightarrow u_0 = u_n = 0$.

Spline-ul cubic care aproximează funcţia f este

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_2(x), & x \in [x_1, x_2] \\ ... & \\ S_n(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$

unde
(1)
$$S_i(x) = \frac{u_i(x - x_{i-1})^3 + u_{i-1}(x_i - x)^3}{6h_i} + \left(f_i - u_i \cdot \frac{h_i^2}{6}\right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \left(f_{i-1} - u_{i-1} \cdot \frac{h_i^2}{6}\right) \frac{x_i - x}{h_i}, i = \overline{1, n}.$$

Pentru a determina $u_1, u_2, ..., u_n$ rezolvăm sistemul

(2)
$$\frac{h_i}{6} u_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} u_i + \frac{h_{i+1}}{6} u_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \quad i = \overline{1, n-1},$$

cu $u_0 = u_n = 0$.

Matricea sistemului (2) este tridiagonală, simetrică, şi are următoarele elemente:

(3)
$$\begin{cases} a_i = (h_i + h_{i+1})/3,\ 1 \leq i \leq n-1 \text{ -pe diagonala principală} \\ b_i = h_{i+1}/6,\ 1 \leq i \leq n-2 \text{ -deasupra diagonalei principale} \\ c_i = h_{i+1}/6,\ 1 \leq i \leq n-2 \text{ -sub diagonala principală} \end{cases}$$

iar termenul liber al sistemului (2) are componentele

(4)
$$t_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Observaţie: Putem simplifica formulele (3) şi (4) prin înmulţirea fiecărei ecuaţii a sistemului (2) cu 6. Obţinem

$$(3') \qquad \begin{cases} a_i = 2(h_i + h_{i+1}), & 1 \le i \le n-1 \\ b_i = c_i = h_{i+1}, & 1 \le i \le n-2, \end{cases}$$

respectiv

$$(4') \qquad t_i = 6(f_{i+1} - f_i)/h_{i+1} - 6(f_i - f_{i-1})/h_i \quad 1 \le i \le n-1.$$

Pentru rezolvarea sistemului (2), folosim factorizarea LR pentru matrice tridiagonale şi înlocuind $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ astfel obţinute, în (1), găsim S.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, x_i, $0 \le i \le n$, f_i, $0 \le i \le n$, z
2. pentru $i = 1, 2, .., n$ execută
   2.1. $h_i \leftarrow x_i - x_{i-1}$
3. pentru $i = 1, 2, .., n-1$ execută
   3.1. $a_i \leftarrow 2(h_i + h_{i+1})$
4. pentru $i = 1, 2, .., n-2$ execută
   4.1. $b_i \leftarrow h_{i+1}$
   4.2. $c_i \leftarrow b_i$
5. pentru $i = 1, 2, .., n-1$ execută
   5.1. $t_i \leftarrow 6(f_{i+1} - f_i)/h_{i+1} - 6(f_i - f_{i-1})/h_i$
6. Se apelează procedura de rezolvarea a sistemelor liniare cu matrice tridiagonală

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$$

7. Se completează algoritmul de mai sus astfel încât să se poată evalua $f(z)$, cu $z \in [x_0, x_n]$.

Exemplu: Fie tabelul de date

x_i	-1	0	1	2
f_i	5	1	1	11

Să se evalueze $f(z)$, unde:
$z \in \{-0.75; -0.5; 0; 0.5; 1.25; 4\}$.
Indicaţie:
Avem $h_1 = h_2 = h_3 = 1$; $u_0 = u_3 = 0$.
Obţinem sistemul

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 60 \end{pmatrix}$$

cu soluţia $u_1 = 2.4$ şi $u_2 = 14.4$
Apoi din formula (1) avem
$f(-0.75) = 3.906$; $f(-0.5) = 2.85$; $f(0.5) = -0.05$; $f(1.25) = 2.7125$.