Laborator 7

Metoda Krylov pentru determinarea coeficienţilor polinomului caracteristic

Prezentarea Problemei: Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ne propunem să determinăm coeficienţii polinonului caracteristic

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n.$$

Prezentarea Metodei:
1) Se alege arbitrar, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, nenul;
2) Calculăm

$$y^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad 1 \le k \le n$$

3) Rezolvăm sistemul linear

$$\left(y^{(n-1)}y^{(n-2)}...y^{(1)}y^{(0)}\right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = -y^{(n)}. \tag{1}$$

Observaţii: i) Dacă sistemul (1) nu are solutie unică, se alege alt $y^{(0)}$ nenul şi se reia algoritmul.
ii) Dacă sistemul (1) are soluţie unică, atunci componentele soluţiei sitemului, $c_1, c_2, ...c_n$, sunt coefiţientii polinomului caracteristic.

Algoritmul Pseudocod
1. citeşte n, a_{ij}, $1 \le i, j \le n$
2. citeşte $b_{i,n}$, $1 \le i \le n$ {reprezintă $y^{(0)}$, nenul}

// *calculăm* $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n-1)}$, *folosind* $y^{(k)} = A \cdot y^{(k-1)}$, $1 \le k \le n$

3. pentru $j = n-1, n-2, ..., 1$ execută
   3.1. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
      3.1.1. $b_{ij} \leftarrow 0$
      3.1.2. pentru $k = 1, 2, ..., n$ execută
         3.1.2.1. $b_{ij} \leftarrow b_{ij} + a_{ik} \cdot b_{k,j+1}$

// *calculăm* $y^{(n)}$, *folosind* $y^{(n)} = A \cdot y^{(n-1)}$, *şi păstrăm* $-y^{(n)}$

4. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
   4.1. $b_{i,n+1} \leftarrow 0$
   4.2. pentru $k = 1, 2, ..., n$ execută
      4.2.1. $b_{i,n+1} \leftarrow b_{i,n+1} + a_{ik} \cdot b_{k1}$
   4.3. $b_{i,n+1} \leftarrow -b_{i,n+1}$

// *rezolvăm sistemul a cărui matrice extinsă este* $(b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n+1}}$, *folosind una din medodele studiate:*

- *Factorizarea LR*
- *Metoda lui Gauss cu pivotare parţială la fiecare pas*
- *Metoda lui Gauss cu pivotare totală la fiecare pas*

Exemple: Determinaţi polinoamele caracteristice ale matricelor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Metoda Fadeev pentru determinarea coeficienţilor polinomului caracteristic

Prezentarea Problemei: Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ne propunem să determinăm coeficienţii polinonului caracteristic

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n,$$

şi dacă există, inversa matricei A.

Prezentarea Metodei: Coeficienţii se calculează cu ajutorul formulelor
1) $A_1 = A$; $c_1 = -\mathrm{Tr}(A_1)$; $B_1 = c_1 I_n + A_1$;
2) $A_2 = AB_1$; $c_2 = -\mathrm{Tr}(A_2)/2$; $B_2 = c_2 I_n + A_2$;
$\vdots$
n) $A_n = AB_{n-1}$; $c_n = -\mathrm{Tr}(A_n)/n$; $B_n = c_n I_n + A_n$.

Observaţii:
1) $B_n = O_n$ (matricea nulă)- deci nu se va calcula.
2) Dacă $c_n \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{c_n} B_{n-1}$.
3) În algoritmul pseudocod, rolul matricei A_k îl joacă matricea D.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$
// *iniţializăm* B *cu matricea unitate* I_n
2. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
    2.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută
        2.1.1. dacă $i = j$ atunci
            2.1.1.1. $b_{ij} \leftarrow 1$
                altfel
            2.1.1.2. $b_{ij} \leftarrow 0$
3. pentru $k = 1, 2, ..., n-1$ execută
// *calculăm* A_k, *folosind* $A_k = A \cdot B_{k-1}$, *şi notăm* $D = A_k$
    3.1. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
        3.1.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută
            3.1.1.1. $d_{ij} \leftarrow 0$
            3.1.1.2. pentru $h = 1, 2, ..., n$ execută
                3.1.1.2.1. $d_{ij} \leftarrow d_{ij} + a_{ih} \cdot b_{hj}$
// *calculăm* c_k, *folosind* $c_k = -Tr(A_k)/k$
    3.2. $c_k \leftarrow 0$
    3.3. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
        3.3.1. $c_k \leftarrow c_k + d_{ii}$

3.4. $c_k \leftarrow -c_k/k$

// *calculăm* B_k*, folosind* $B_k = c_k \cdot I_n + A_k$

3.5. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

3.5.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută

3.5.1.1. dacă $i = j$ atunci

3.5.1.1.1. $b_{ij} \leftarrow d_{ij} + c_k$

altfel

3.5.1.1.2. $b_{ij} \leftarrow d_{ij}$

// *calculăm* $A_n = D$

4. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

4.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută

4.1.1. $d_{ij} \leftarrow 0$

4.1.2. pentru $h = 1, 2, ..., n$ execută

4.1.2.1. $d_{ij} \leftarrow d_{ij} + a_{ih} \cdot b_{hj}$

// *calculăm* $c_n = -Tr(A_n)/n$

5. $c_n \leftarrow 0$

6. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

6.1. $c_n \leftarrow c_n + d_{ii}$

7. $c_n \leftarrow -c_n/n$

8. dacă $c_n = 0$ atunci

8.1. scrie *'Matricea nu este inversabilă'*

altfel

8.2. scrie *'Matricea inversabilă este'*

8.3. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

8.3.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută

8.3.1.1. scrie $-b_{ij}/c_n$

9. scrie *'Coeficienţii polinomului caracteristic sunt',* c_i, $1 \leq i \leq n$

Exemple: Determinaţi polinoamele caracteristice ale matricelor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -12 & 5 \end{pmatrix}.$$