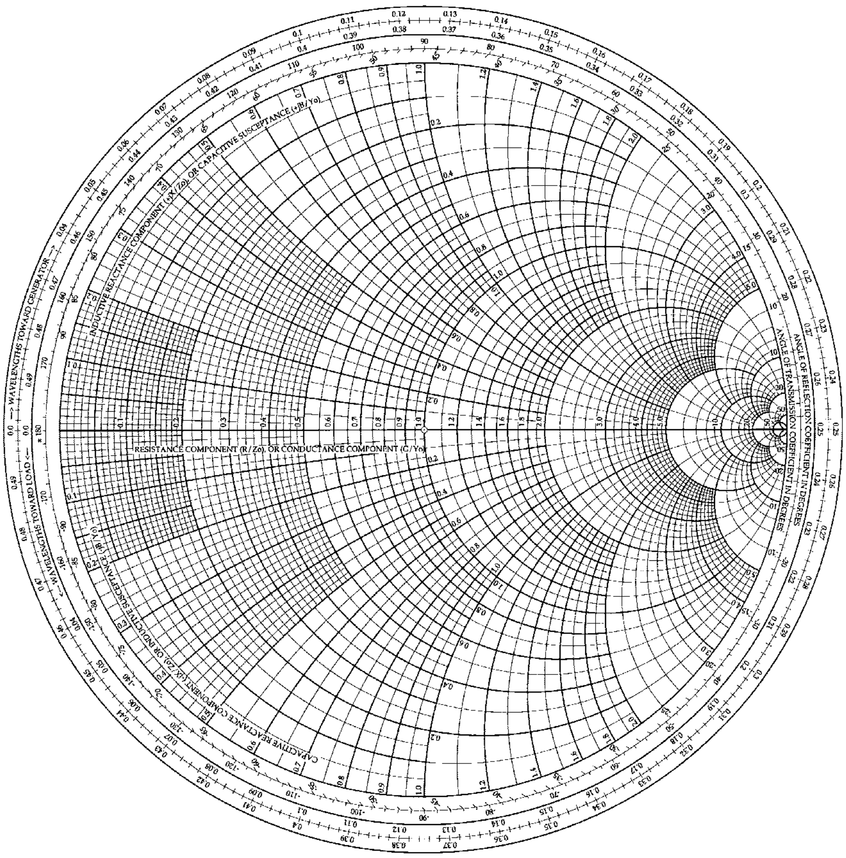
George LOJEWSKI Nicolae MILITARU

MICROUNDE

Culegere de probleme



EDITURA ELECTRONICA 2000

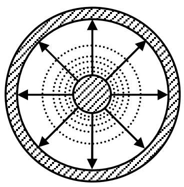
1

LINII DE TRANSMISIUNE TEM

1.1 Să se calculeze parametrii lineici ai unui cablu coaxial fără pierderi având raza conductorului interior $r = 3\,\text{mm}$ şi raza interioară a cămăşii $R = 1\,\text{cm}$. Cablul are dielectricul din polietilenă, $\varepsilon_r = 2{,}2$.

Rezolvare:

Într-un sistem de coordonate cilindrice, dată fiind simetria circulară a cablului coaxial, fiecare dintre cele două câmpuri conţine câte o singură componentă, iar aceste componente nu depind de coordonata unghiulară φ:



$$E_\rho = E_0 \frac{r}{\rho}$$

$$H_\varphi = H_0 \frac{r}{\rho}, \; E_0 = Z_d H_0$$

Sarcina electrică lineică q_L de pe suprafaţa conductorului interior poate fi dedusă din legea fluxului electric aplicată unei suprafeţe Σ cilindrice, coaxiale cu cablul, de lungime unitară şi rază oarecare ρ, $(r < \rho < R)$:

$$q_L = \oint_\Sigma \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_\Sigma \mathrm{d}A = \oint_\Sigma \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_\Sigma \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \varepsilon E_\rho(\rho)\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{dz} = 2\pi r \varepsilon E_0$$

Cunoscând câmpul, tensiunea dintre conductoare poate fi determinată aplicând definiţia ei clasică:

$$U = \int_A^B \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_r^R E_\rho(\rho)\mathrm{d}\rho = \int_r^R E_0 \frac{r}{\rho}\mathrm{d}\rho = E_0 r \ln\frac{R}{r}$$

în care A şi B sunt două puncte arbitrare, situate fiecare pe câte unul dintre cele două conductoare.

Rezultă astfel capacitatea pe unitatea de lungime a conductoarelor:

$$C_L = \frac{q_L}{U} = \frac{2\pi\varepsilon r E_0}{r E_0 \ln\frac{R}{r}} = \frac{2\pi \cdot \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \cdot 2{,}2}{\ln\frac{10}{3}} = 101{,}5 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m} = 101{,}5\ \text{pF/m}$$

Pe de altă parte, orice undă TEM se propagă cu o viteză de fază v_φ egală cu viteza undelor plane în mediul dielectric respectiv, c. Astfel, ştiind că

$$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{L_L C_L}}$$

iar

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

din egalarea celor două expresii rezultă relația:

$$L_L C_L = \varepsilon\mu .$$

Cu alte cuvinte, inductanța lineică a cablului coaxial poate fi exprimată în funcție de capacitatea sa lineică. Se obține:

$$L_L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R}{r} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\ln\frac{10}{3} = 0{,}241\cdot 10^{-6}\ \mathrm{H/m} = 241\ \mathrm{nH/m} .$$

1.2 O porțiune dintr-un cablu coaxial fără pierderi de lungime $l = 10\,\mathrm{cm}$, terminată în gol, prezintă la frecvența $f_1 = 100\,\mathrm{kHz}$ o reactanță de intrare capacitivă $X_i = -138\,\mathrm{k\Omega}$. Mărind treptat frecvența, se constată o scădere a modulului impedanței de intrare până la frecvența $f_2 = 433\,\mathrm{MHz}$, la care apare un minim. Din aceste măsurări să se determine permitivitatea electrică a dielectricului din cablu şi impedanța caracteristică a cablului.

Rezolvare:

Impedanța de intrare a unei linii fără pierderi, terminată în gol, are expresia:

$$Z_i\Big|_{Z_S=\infty} = Z_C \left.\frac{Z_S + \mathrm{j}Z_C \operatorname{tg}\beta l}{Z_C + \mathrm{j}Z_S \operatorname{tg}\beta l}\right|_{Z_S=\infty} = -\mathrm{j}Z_C \operatorname{ctg}\beta l = -\mathrm{j}X_i ,$$

unde $X_i = Z_C \operatorname{ctg}\beta l$ este reactanța de intrare a liniei de transmisiune considerate.

La creşterea frecvenței, minimul modulului impedanței de intrare are loc când $\beta l = \pi/2$, adică $l = \lambda/4$. Folosind datele din problemă, rezultă:

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = 4\cdot l = 40\,\mathrm{cm}.$$

Pe de altă parte,

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{c_0}{f_2\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{\lambda_{02}}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

de unde rezultă valoarea constantei dielectrice:

$$\varepsilon_r = \left(\frac{\lambda_{02}}{\lambda_2}\right)^2 = \left(\frac{c_0}{4lf_2}\right)^2 = \left(\frac{3\cdot 10^8}{0{,}4\cdot 433\cdot 10^6}\right)^2 = 3 .$$

La frecvențe mici ($\lambda >> l$), $\operatorname{tg}\beta l = \operatorname{tg}2\pi l/\lambda \approx \beta l$ astfel încât impedanța de intrare devine

$$Z_i \approx -\mathrm{j}Z_C\frac{1}{\beta l} = -\mathrm{j}Z_C\frac{\lambda}{2\pi l} = -\mathrm{j}Z_C\frac{c}{2\pi f l} = -\mathrm{j}\sqrt{\frac{L_L}{C_L}}\cdot\frac{1}{\omega l\sqrt{L_L C_L}} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_i},$$

unde $C_i = l \cdot C_L$ reprezintă capacitatea de intrare a liniei.

La frecvența f_1 la care $\lambda >> l$, se poate deci scrie

$$X_i = -\frac{1}{\omega_1 C_i} = -\frac{1}{\omega_1 C_L l}$$

astfel încât se poate deduce capacitatea lineică a cablului coaxial de lungime l:

$$C_L = -\frac{1}{2\pi f_1 X_i l} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 138 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1} = 115 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m} = 115\ \mathrm{pF/m}\,.$$

De aici rezultă şi impedanța caracteristică a cablului:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_L}{C_L}} = \frac{1}{C_L}\sqrt{L_L C_L} = \frac{1}{c \cdot C_L} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c_0 \cdot C_L} = \frac{c_0}{4 l f_2}(-2\pi f_1 X_i) = -\frac{\pi f_1 X_i}{2 f_2}$$

deci

$$Z_C = \frac{\pi \cdot 10^5 \cdot 138 \cdot 10^3}{2 \cdot 433 \cdot 10^6} = 50\,\Omega\,.$$

1.3 Cât este rezistența lineică a unei linii de transmisiune având impedanța caracteristică $Z_C = 100\,\Omega$, terminată adaptat, dacă s-a constatat o atenuare a semnalului de $1\,\mathrm{dB}$ la fiecare $10\,\mathrm{m}$ parcurşi? Pierderile în dielectricul liniei se consideră neglijabile.

Rezolvare:

Constanta de atenuare a unei linii este legată de parametrii săi lineici prin relația:

$$\alpha = \mathrm{Re}\{\gamma\},$$

unde constanta de propagare γ are expresia:

$$\gamma = \sqrt{(R_L + \mathrm{j}\omega L_L)(G_L + \mathrm{j}\omega C_L)}\,.$$

Dacă $R_L << \omega L_L$ (pierderi mici în metal) şi $G_L \approx 0$ (pierderi neglijabile în dielectric), se poate scrie:

$$\gamma \cong \sqrt{(R_L + \mathrm{j}\omega L_L) \cdot \mathrm{j}\omega C_L} = \mathrm{j}\omega\sqrt{L_L C_L}\sqrt{1 + \frac{R_L}{\mathrm{j}\omega L_L}} \cong \mathrm{j}\omega\sqrt{L_L C_L}\left(1 + \frac{R_L}{2\mathrm{j}\omega L_L}\right).$$

Rezultă astfel expresia constantei de atenuare a liniei considerate:

$$\alpha = \sqrt{L_L C_L}\frac{R_L}{2L_L} = \frac{R_L}{2Z_C}\,.$$

Cu valorile problemei se obține:

$$\alpha = \frac{A}{l} = 0{,}1\,\mathrm{dB/m} = \frac{0{,}1}{8{,}7}\,\mathrm{Np/m} = 0{,}0115\,\mathrm{Np/m}\,,$$

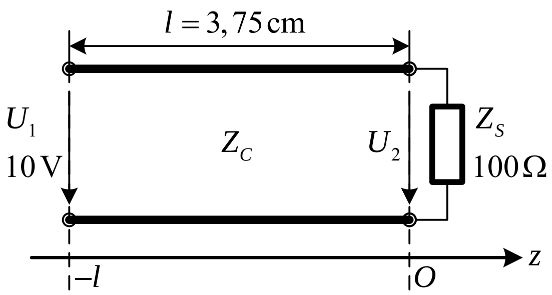
de unde rezultă:

$$R_L = 2\alpha Z_C = 2 \cdot 0{,}0115 \cdot 100 = 2{,}3\,\Omega/\mathrm{m}\,.$$

1.4 Se consideră circuitul cu schema din figura de mai jos în care tronsonul de linie de transmisiune folosit este fără pierderi, are drept dielectric aerul iar impedanța sa caracteristică prezintă valoarea $Z_C = 50\,\Omega$. Se cere:

a) Să se calculeze puterea activă în sarcină, la frecvența $f = 1\,\mathrm{GHz}$, folosind expresia impedanței de intrare în linie;

b) Să se calculeze aceeaşi putere, folosind tensiunea pe sarcină.



Rezolvare:

Lungimea de undă pe linie corespunzătoare frecvenţei de lucru este:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} = 0{,}3\,\text{m} = 30\,\text{cm}$$

şi deci, în raport cu λ, linia folosită are lungimea:

$$l = \frac{\lambda}{8}.$$

a) Impedanța de intrare în tronsonul fără pierderi cu lungimea l are expresia:

$$Z_{in} = Z_C \frac{Z_S + \mathrm{j}Z_C \operatorname{tg} \beta l}{Z_C + \mathrm{j}Z_S \operatorname{tg} \beta l}$$

şi întrucât

$$\operatorname{tg} \beta l = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8}\right) = 1,$$

rezultă valoarea impedanței de intrare:

$$Z_{in} = 50 \frac{100 + \mathrm{j}50}{50 + \mathrm{j}100} = (40 - \mathrm{j}30)\Omega.$$

Puterea activă la intrarea circuitului are expresia:

$$P_{in} = \frac{|U_1|^2}{2|Z_{in}|^2} \cdot \operatorname{Re}\{Z_{in}\}.$$

Deoarece linia folosită este fără pierderi, puterea activă de la intrare este egală cu puterea în sarcină:

$$P_S = P_{in} = \frac{10^2}{2\left(\sqrt{40^2 + 30^2}\right)^2} \cdot 40 = 0{,}8\,\text{W}.$$

Observație: Termenul $|Z_{in}|$ poate fi determinat direct, ştiind că impedanța de intrare a unei linii de lungime $\lambda/8$, fără pierderi, terminată pe o sarcină pur rezistivă, are modulul egal cu impedanța sa caracteristică, $|Z_{in}| = Z_C = 50\,\Omega$.

b) Pentru o linie fără pierderi de lungime l şi impedanță caracteristică Z_C, ecuația tensiunii pe linie poate fi pusă sub forma:

$$U(z) = U_0 \cos \beta z - \mathrm{j}Z_C I_0 \sin \beta z,$$

în care amplitudinile undelor directă şi inversă au fost exprimate în funcție de tensiunea totală de la sarcină U_0 şi curentul total de la sarcină, I_0.
Cu notațiile din figură, relația precedentă devine:

$$U_1 = U(-l) = U_2 \cos\beta(-l) - jZ_C I_2 \sin\beta(-l)$$

şi deoarece curentul prin sarcină, I_2, poate fi exprimat în funcție de tensiunea la sarcină,

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_S},$$

rezultă:

$$U_1 = U_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{8}\right) + j\frac{50}{100}U_2 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + j\frac{1}{2}\right)U_2$$

de unde poate fi dedusă tensiunea la sarcină în funcție de tensiunea de la intrarea liniei:

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\left(1 + j\frac{1}{2}\right)}U_1.$$

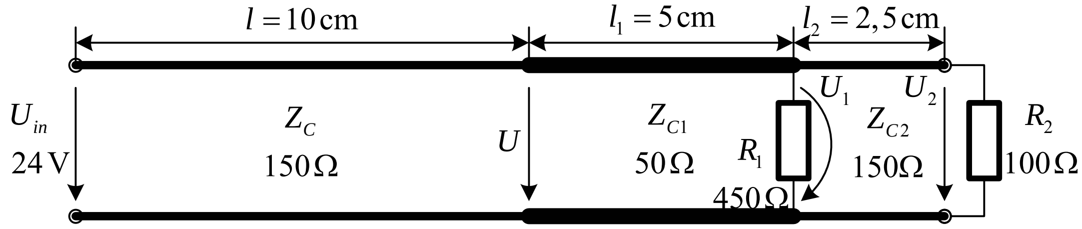
Puterea transmisă sarcinii pur rezistive are expresia:

$$P_S = \frac{|U_2|^2}{2Z_S}$$

şi valoarea:

$$P_S = \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot 10\right)^2}{2\cdot 100} = 0{,}8\,\mathrm{W}.$$

1.5 Pentru circuitul cu schema din figura de mai jos să se deseneze distribuția amplitudinii tensiunii în lungul liniilor de transmisiune la frecvența $f = 3\,\mathrm{GHz}$, dacă tronsoanele de linie de transmisiune sunt considerate fără pierderi iar dielectricul liniei este aerul, $\varepsilon_r = 1$.



<u>**Rezolvare:**</u>
Lungimea de undă pe linie corespunzătoare frecvenței de lucru este:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{f\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^9} = 0{,}1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{cm}.$$

Primul tronson are deci lungimea egală cu o lungime de undă λ, al doilea tronson este repetor de impedanță $(l_1 = \lambda/2)$ iar cel de-al treilea tronson - inversor de impedanță $(l_2 = \lambda/4)$.

Impedanța de intrare în linia de lungime l_2 este:

$$Z_{i2} = \frac{Z_{C2}^2}{R_2} = \frac{150^2}{100} = 225\,\Omega .$$

Tronsonul l_2 este terminat pe o sarcină pur rezistivă, $R_2 = 100\,\Omega$, a cărei valoare este mai mică decât $Z_{C2} = 150\,\Omega$, caz în care raportul de undă staționară pe linia de lungime l_2 se poate calcula direct cu relația:

$$\sigma_2 = \frac{Z_{C2}}{R_2} = \frac{150}{100} = 1{,}5 .$$

Impedanța de sarcină a tronsonului de lungime l_1 are deci valoarea

$$Z_{S1} = R_1 \parallel Z_{i2} = \frac{R_1 \cdot Z_{i2}}{R_1 + Z_{i2}} = \frac{450 \cdot 225}{450 + 225} = 150\,\Omega .$$

Impedanța de intrare în tronsonul de lungime l_1 (repetor de impedanță) este aceeaşi:

$$Z_{i1} = Z_i \big|_{l=\lambda/2} = Z_{S1} = 150\,\Omega .$$

Deoarece linia cu lungimea l_1 este terminată pe o sarcină pur rezistivă, cu o valoare mai mare decât impedanța caracteristică a liniei $Z_{S1} = 150\,\Omega > Z_{C1} = 50\,\Omega$, raportul de undă staționară se poate calcula cu relația:

$$\sigma_1 = \frac{Z_{S1}}{Z_{C1}} = \frac{150}{50} = 3 .$$

Primul tronsonul are drept impedanță de sarcină impedanța de intrare în tronsonul repetor. Aceasta este egală cu impedanța lui caracteristică, $Z_{i1} = Z_C = 150\,\Omega$, deci tronsonul este terminat adaptat, astfel încât raportul de undă staționară $\sigma = 1$ iar tensiunea la sarcină este egală cu tensiunea de la intrare:

$$U = U_{in} = 24\,\mathrm{V} .$$

Impedanța lui de intrare are valoarea:

$$Z_{in} = Z_C = 150\,\Omega .$$

Pentru tronsonul de lungime $l_1 = \lambda/2$, tensiunile de la extremități sunt U, respectiv U_1. Întrucât impedanța de sarcină $Z_{S1} = 150\,\Omega$ a acestui tronson este pur rezistivă şi mai mare decât $Z_{C1} = 50\,\Omega$, rezultă că la capătul dinspre sarcină al tronsonului repetor va exista un maxim de tensiune, egal cu $|U_1| = 24\,\mathrm{V}$. Pe de altă parte, între două maxime ale distribuției de tensiune există şi un minim, situat, față de sarcina tronsonului repetor, la distanța

$$d = \frac{\pi + \varphi_\Gamma}{4\pi}\lambda = \frac{\lambda}{4} = 2{,}5\,\mathrm{cm} .$$

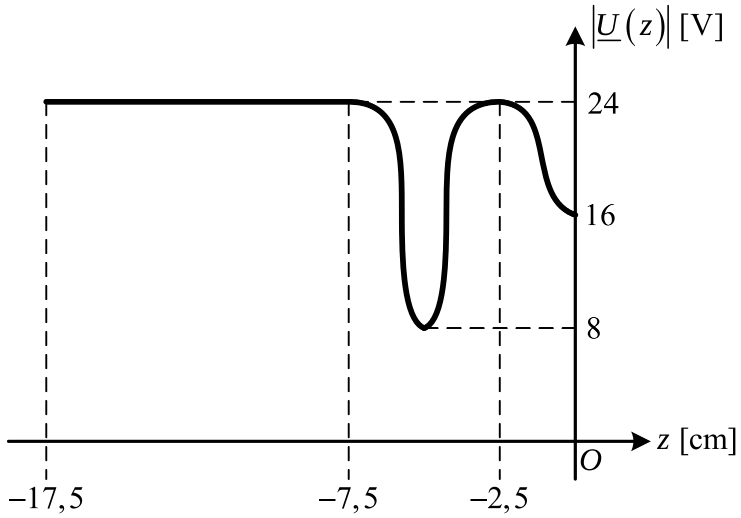
În punctul de minim tensiunea are valoarea:

$$\frac{|U_1|}{\sigma_1} = \frac{24}{3} = 8\,\mathrm{V} .$$

Pentru reprezentarea distribuției de tensiune pe linii se face observația că tensiunea la sarcină este U_2. Întrucât $R_2 = 100\,\Omega < Z_{C2} = 150\,\Omega$ rezultă că la sarcină există un minim al distribuției de tensiune de pe tronsonul inversor egal cu

$$\left|U_2\right| = \frac{\left|U_1\right|}{\sigma_2} = \frac{24}{1{,}5} = 16\,\mathrm{V}\,.$$

Distribuția de tensiune în lungul tronsoanelor este reprezentată în figura de mai jos.



1.6 O linie având impedanța caracteristică $Z_C = 50\,\Omega$ este terminată pe o sarcină compusă dintr-un rezistor cu rezistența de $20\,\Omega$ în serie cu un condensator având capacitatea de 3 pF. Să se calculeze raportul de undă staționară şi distanța la care apare primul minim de tensiune, la frecvența $f_0 = 1\,\mathrm{GHz}$. Dielectricul liniei este aerul iar pierderile ei sunt neglijabile.

<u>Rezolvare:</u>

Reactanța de sarcină are valoarea:

$$X_S = -\frac{1}{\omega_0 C} = -\frac{1}{2\pi f_0 C} = -53\,\Omega$$

astfel încât impedanța de sarcină este

$$Z_S = R_S + \mathrm{j}X_S = 20 - \mathrm{j}53\ \ \Omega\,.$$

Această sarcină determină un coeficient de reflexie al tensiunii, Γ:

$$\Gamma = \frac{Z_S - Z_C}{Z_S + Z_C} = \frac{20 - \mathrm{j}53 - 50}{20 - \mathrm{j}53 + 50} = \left|\Gamma\right| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\Gamma} = 0{,}69\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}1{,}43\,\mathrm{rad}}\,.$$

Raportul de undă staționară σ este determinat de modulul coeficientului de reflexie:

$$\sigma = \frac{1 + \left|\Gamma\right|}{1 - \left|\Gamma\right|} = \frac{1 + 0{,}69}{1 - 0{,}69} = 5{,}45\,.$$

Poziția minimelor este determinată de faza coeficientului de reflexie. Calculând întâi lungimea de undă pe linie,

$$\lambda = \frac{c_0}{f_0\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9 \cdot 1} = 0{,}3\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{cm}$$

se obține în final poziția minimului, calculând distanța lui de la sarcină:

$$d_{\min} = \frac{\pi + \varphi_\Gamma}{4\pi}\lambda = \frac{\pi - 1{,}43}{4\pi} \cdot 30 = 4{,}08 \text{ cm}.$$

Altfel: Pe diagrama Smith:

Se reprezintă punctul corespunzător impedanței normate de sarcină:

$$\frac{Z_S}{Z_C} = r_S + \mathrm{j}x_S = \frac{20 - \mathrm{j}53}{50} = 0{,}4 - \mathrm{j}1{,}06.$$

Acesta se află deci la intersecția dintre cercul $r = 0{,}4$ cu arcul de cerc $x = -1{,}06$.
De pe diagramă se identifică cercul concentric cu diagrama $\sigma \approx 5{,}5$ şi poziția normată a punctului $d/\lambda \approx 0{,}136$, de unde rezultă distanța cerută:

$$d_{\min} \approx 0{,}136\lambda = 0{,}136 \cdot 30 = 4{,}08 \text{ cm}.$$

1.7 Conectând la capătul unei linii de măsură cu pierderi neglijabile o sarcină necunoscută, se măsoară pe linie un raport de undă staționară $\sigma = 2$, iar la distanța $d = 22\,\text{cm}$ de capătul liniei se constată existența unui minim al distribuției tensiunii. Cunoscând lungimea de undă pe linie $\lambda = 30\,\text{cm}$ şi impedanța caracteristică a liniei de măsură $Z_C = 75\,\Omega$, să se determine impedanța sarcinii de la capătul liniei.

<u>Rezolvare</u>:

Din datele experimentale se poate calcula coeficientul de reflexie al sarcinii, $\Gamma = |\Gamma| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\Gamma}$:

$$|\Gamma| = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333,$$

$$\varphi_\Gamma = \pi\left(4\frac{d_{\min}}{\lambda} - 1\right) = \pi\left(4\frac{22}{30} - 1\right) = \left(2\pi - \frac{\pi}{15}\right) \text{ rad}.$$

Reținând o valoare $\varphi_\Gamma \in (-\pi, \pi)$, rezultă:

$$\Gamma = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{15}} \approx 0{,}33\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}209\,\text{rad}}.$$

Din expresia coeficientului de reflexie al tensiunii la sarcină,

$$\Gamma = \frac{Z_S - Z_C}{Z_S + Z_C} = \frac{Z_S/Z_C - 1}{Z_S/Z_C + 1} = \frac{z_S - 1}{z_S + 1}$$

se determină impedanța normată de sarcină:

$$z_S = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{1 + 0{,}333\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}209}}{1 - 0{,}333\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}209}} = 1{,}955\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}154\,\text{rad}} = 1{,}932 - \mathrm{j}0{,}3.$$

În final, prin denormare, se obține valoarea impedanței de la capătul liniei:

$$Z_S = z_S \cdot Z_C = (1{,}932 - \mathrm{j}0{,}3) \cdot 75 = (145 - \mathrm{j}22{,}5)\ \Omega.$$

Observație: Distanța, față de sarcină, la care apare **primul** minim rezultă din relația

$$d_{\min} = \frac{\pi + \varphi_\Gamma}{4\pi}\lambda = 7\,\text{cm}.$$

Pe o linie fără pierderi distanța între două minime consecutive este de $\lambda/2$ astfel încât minimul măsurat este de fapt al doilea:

$$d_{\min} + \lambda/2 = d_{\min,2} = 7 + 15 = 22\,\text{cm}.$$

Altfel: Pe diagrama Smith:

Se desenează cercul concentric cu diagrama $\sigma = 2$, tangent exterior la cercul $r = 2$ şi tangent interior la cercul $r = 1/2$.

Deplasării pe linia fără pierderi de la intrarea sa spre sarcină îi corespunde pe diagrama circulară o rotaţie în sens trigonometric, pe un cerc cu centrul în origine, până la o deplasare normată:

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{22}{30} \approx 0{,}733 .$$

Aceasta presupune parcurgerea completă a diagramei plus încă o deplasare de $0{,}733 - 0{,}5 = 0{,}233$. Punctul astfel obţinut, situat la intersecţia dintre cercul $\sigma = 2$ şi dreapta determinată de centrul diagramei şi poziţia 0,233, corespunde impedanţei normate de sarcină. De pe diagramă se citeşte:

$$r = 1{,}93 ;\ x = -0{,}3$$

şi deci valoarea impedanţei necunoscute, obţinută prin denormare, este:

$$Z_S = (r + \mathrm{j}x)Z_C = (1{,}93 - \mathrm{j}0{,}3) \cdot 75 \approx (145 - \mathrm{j}22{,}5)\Omega .$$

1.8 O linie de transmisiune fără pierderi, cu impedanţa caracteristică $Z_C = 100\,\Omega$, este terminată pe o sarcină având impedanţa $Z_S = (50 + \mathrm{j}150)\,\Omega$. la frecvenţa de lucru. Ştiind că puterea transmisă sarcinii este $P_S = 10\,\mathrm{W}$, să se calculeze valoarea maximă a tensiunii pe linie.

<u>Rezolvare:</u>

Se calculează întâi coeficientul de reflexie al sarcinii:

$$\Gamma = \frac{Z_S - Z_C}{Z_S + Z_C} = \frac{-50 + \mathrm{j}150}{150 + \mathrm{j}150} = \frac{-1 + \mathrm{j}3}{3(1 + \mathrm{j})} = \frac{1 + \mathrm{j}2}{3} \approx 0{,}33 + \mathrm{j}0{,}66 = 0{,}745\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}1{,}107\,\mathrm{rad}} .$$

Rezultă o valoare a coeficientului de reflexie al puterii:

$$\Gamma_p = \frac{P_i}{P_d} = |\Gamma|^2 = \frac{5}{9} .$$

Puterea transmisă sarcinii este diferenţa dintre puterea undei directe şi puterea undei inverse,

$$P_S = P_d - P_i = P_d\left(1 - \Gamma_p\right) = P_d\left(1 - |\Gamma|^2\right).$$

Din datele problemei, se calculează puterea undei directe P_d şi puterea undei inverse, P_i:

$$P_d = \frac{P_s}{1 - |\Gamma|^2} = \frac{10}{1 - (5/9)} = 22{,}5\,\mathrm{W} ,$$

$$P_i = P_d - P_S = 22{,}5 - 10 = 12{,}5\,\mathrm{W} .$$

Puterea undei directe P_d este legată de unda directă de tensiune U_d prin relaţia:

$$P_d = \frac{|U_d|^2}{2Z_C}$$

de unde se obţine amplitudinea undei directe:

$$|U_d| = \sqrt{2Z_C P_d} = \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 22{,}5} = 67\,\mathrm{V} .$$

În mod similar se poate deduce şi amplitudinea undei inverse:

$$|U_i| = \sqrt{2Z_C P_i} = \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 12{,}5} = 50\,\mathrm{V}.$$

Valoarea maximă a tensiunii pe linie este suma amplitudinilor undelor directă şi inversă:

$$|U|_{\max} = |U_d| + |U_i| = 67 + 50 = 117\,\mathrm{V}.$$

Valoarea minimă a tensiunii pe linie este

$$|U|_{\min} = |U_d| - |U_i| = 67 - 50 = 17\,\mathrm{V}.$$

Observaţie: Amplitudinea undei inverse poate fi calculată şi din definiţia coeficientului de reflexie:

$$|U_i| = |\Gamma| \cdot |U_d| = 0{,}745 \cdot 67 \approx 50\,\mathrm{V}.$$

Valorile maxime şi minime calculate în cele de mai sus sunt condiţionate de o lungime suficientă a liniei.

1.9 Să se stabilească condiţiile în care o linie fără pierderi, având ca sarcină o impedanţă pur rezistivă, prezintă la intrare tot o impedanţă pur rezistivă.

<u>Rezolvare:</u>

Expresia impedanţei de intrare a unei linii fără pierderi este:

$$Z_i = Z_C \frac{Z_S + \mathrm{j}Z_C \operatorname{tg} \beta l}{Z_C + \mathrm{j}Z_S \operatorname{tg} \beta l}$$

Întrucât linia este fără pierderi, $Z_C \in \Re$. Considerând $Z_S = R_S \in \Re$, partea imaginară a impedanţei de intrare are expresia:

$$\operatorname{Im}\{Z_i\} = Z_C \frac{\left(Z_C^2 - R_S^2\right)\operatorname{tg} \beta l}{Z_C^2 + R_S^2 \operatorname{tg} \beta l}.$$

Impedanţa de intrare este pur rezistivă atunci când $\operatorname{Im}\{Z_i\} = 0$, adică în unul din următoarele cazuri:

a) $R_S = Z_C$, deci atunci când linia este terminată adaptat;

b) $\operatorname{tg} \beta l = 0$, sau $\beta l = k\pi$, sau $l = k\frac{\lambda}{2}$, adică în situaţia liniilor în $\frac{\lambda}{2}$ (repetoare de impedanţă);

c) $\operatorname{tg} \beta l \to \infty$, sau $\beta l = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, sau $l = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$, deci pentru liniile în $\frac{\lambda}{4}$ (transformatoare de impedanţă).

Altfel: Pe diagrama Smith:

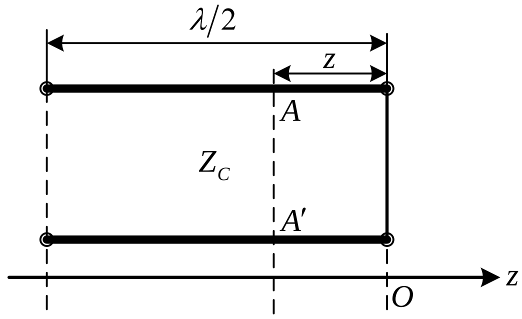
Trecerea de la punctul corespunzător sarcinii pur rezistive, situat pe axa absciselor ($x = 0$), la punctul corespunzător impedanţei de intrare se face prin rotirea, în sens orar, pe un cerc cu centrul în originea diagramei circulare. Şi acest punct, corespunzând unei impedanţe cu partea reactivă normată nulă, trebuie să se afle pe axa absciselor. Această situaţie poate apărea dacă:

a) Punctul iniţial se află în origine, deci raza cercului pe care se face rotaţia este nulă, astfel încât punctul corespunzător impedanţei de intrare este tot în origine. În acest caz $R_S = Z_C$, adică linia este terminată adaptat.

b) Rotația se face cu un unghi de 360° astfel încât cele două puncte se suprapun. În această situație lungimea liniei este de $\lambda/2$.

c) Rotația se face cu un unghi de 180° astfel încât ambele puncte se află pe axa absciselor, aşezate simetric în raport cu centrul cercului. În acest caz lungimea liniei este de $\lambda/4$.

1.10 Se consideră o linie de transmisiune fără pierderi, prezentată în figura de mai jos. Să se determine poziția secțiunii AA' pentru care modulul impedanței de intrare, $|Z_i|$, trece printr-un maxim.



Rezolvare:

Admitanța de intrare a porțiunii de lungime z terminate în scurtcircuit, de la dreapta secțiunii AA', este:

$$Y_{isc} = -\mathrm{j}Y_C \operatorname{ctg} \beta z = -\mathrm{j}Y_C \operatorname{ctg}\frac{2\pi z}{\lambda},$$

unde Y_C este admitanța caracteristică, reală, a liniei, iar λ este lungimea de undă.

Admitanța de intrare a tronsonului terminat în gol, de la stânga secțiunii AA', are expresia:

$$Y_{ig} = \mathrm{j}Y_C \operatorname{tg} \beta\left(\frac{\lambda}{2} - z\right) = \mathrm{j}Y_C \operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2} - z\right) = \mathrm{j}Y_C \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) = -\mathrm{j}Y_C \operatorname{tg}\frac{2\pi z}{\lambda}.$$

Admitanța de intrare văzută în secțiunea AA' reprezintă suma celor două admitanțe calculate anterior:

$$Y_i = Y_{isc} + Y_{ig} = -\mathrm{j}Y_C\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi z}{\lambda} + \operatorname{ctg}\frac{2\pi z}{\lambda}\right) = -\mathrm{j}Y_C\left(u + \frac{1}{u}\right),$$

unde

$$u = \operatorname{tg}\frac{2\pi z}{\lambda}.$$

Rezultă:

$$|Y_i| = Y_C\left|u + \frac{1}{u}\right| = Y_C\left(|u| + \frac{1}{|u|}\right).$$

Deoarece produsul mărimilor $|u|$ şi $1/|u|$ este constant, suma lor este minimă (adică modulul impedanței este maxim) atunci când cele două mărimi sunt egale. Rezultă deci condiția:

$$|u| = 1$$

sau

$$\mathrm{tg}\frac{2\pi z}{\lambda} = \pm 1,$$

de unde

$$\frac{2\pi z}{\lambda} = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in Z\ .$$

Se obține:

$$z = \pm\frac{\lambda}{8} + k\frac{\lambda}{2}.$$

Întrucât $z \in \left(0, \frac{\lambda}{2}\right)$, convin numai valorile

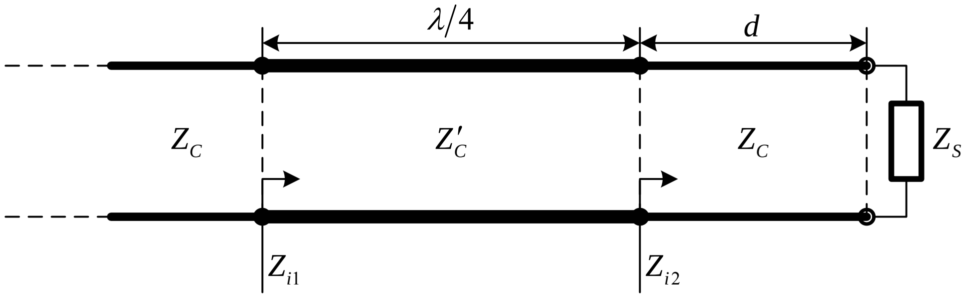
$$z = \frac{\lambda}{8},$$

respectiv

$$z = \frac{3\lambda}{8}.$$

1.11 Să se proiecteze circuitul cu schema din figura de mai jos astfel încât la frecvența corespunzătoare unei lungimi de undă $\lambda = 50\,\mathrm{cm}$ să se obțină adaptarea unei sarcini având impedanța $Z_S = (25 - \mathrm{j}100)\,\Omega$ la o linie de acces cu impedanța caracteristică $Z_C = 75\ \Omega$.

Toate liniile de transmisiune au ca dielectric aerul şi prezintă pierderi neglijabile.



__**Rezolvare:**__

Metoda 1.

Lungimea tronsonului în λ/4 (inversor de impedanță), la frecvența de lucru, este

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5\,\mathrm{cm}.$$

Din condiția de adaptare este necesar ca:

$$Z_{i1} = Z_C = 75\,\Omega\,.$$

Pe de altă parte, tronsonul inversor de impedanță realizează adaptarea unei impedanțe de sarcină **reale**, Z_{i2}, la o altă impedanță, Z_{i1}, de asemenea **reală**:

$$Z'_C = \sqrt{Z_{i1}\cdot Z_{i2}} = \sqrt{Z_C \cdot Z_{i2}}\ .$$

Se impune deci ca lungimea d a celui de-al doilea tronson să prezinte o valoare pentru care $\mathrm{Im}\{Z_{i2}\}=0$, astfel încât impedanța Z_{i2} să fie pur rezistivă.

Impedanța de intrare în tronsonul cu lungimea d, considerat fără pierderi, are expresia:

$$Z_{i2}=Z_C\frac{Z_S+\mathrm{j}Z_C\,\mathrm{tg}\,\beta d}{Z_C+\mathrm{j}Z_S\,\mathrm{tg}\,\beta d}.$$

În mărimi normate se obține:

$$z_{i2}=\frac{Z_{i2}}{Z_C}=\frac{z_S+\mathrm{j}t}{1+\mathrm{j}z_S t},$$

unde

$$z_S=\frac{Z_S}{Z_C}=\frac{25-\mathrm{j}100}{75}=\frac{1}{3}-\mathrm{j}\frac{4}{3}$$

reprezintă impedanța normată de sarcină, iar

$$t=\mathrm{tg}\,\beta d=\mathrm{tg}\,2\pi\frac{d}{\lambda}.$$

Astfel, rezultă:

$$z_{i2}=\frac{\frac{1}{3}-\mathrm{j}\frac{4}{3}+\mathrm{j}t}{1+\mathrm{j}\left(\frac{1}{3}-\mathrm{j}\frac{4}{3}\right)t}=\frac{1+\mathrm{j}(3t-4)}{(3+4t)+\mathrm{j}t}=\frac{\left[1+\mathrm{j}(3t-4)\right]\cdot\left[(3+4t)-\mathrm{j}t\right]}{(3+4t)^2+t^2}$$

adică

$$z_{i2}=r_{i2}+\mathrm{j}x_{i2}=\frac{3\left(t^2+1\right)}{17t^2+24t+9}+\mathrm{j}\frac{12t^2-8t-12}{17t^2+24t+9}.$$

Din condiția $\mathrm{Im}\{z_{i2}\}=0$ rezultă valoarea lungimii d pentru care impedanța z_{i2} este pur rezistivă:

$$12t^2-8t-12=0$$

sau

$$3t^2-2t-3=0$$

deci

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}.$$

Rezultă astfel următoarele cazuri:

- $t_1=\mathrm{tg}\,\beta d_1\approx-0{,}72$

adică

$$\beta d_1=\mathrm{arctg}\left(-0{,}72\right)+k_1\pi,\quad k_1\in Z$$

deci

$$d_1=-\frac{\lambda}{2\pi}\cdot 0{,}624+k_1\frac{\lambda}{2},\quad k_1\in Z;$$

- $t_2=\mathrm{tg}\,\beta d_2\approx 1{,}387$

adică

$$\beta d_2=\mathrm{arctg}\,1{,}387+k_2\pi,\ k_2\in \mathrm{Z}$$

deci

$$d_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot 0{,}946 + k_2 \frac{\lambda}{2}, \quad k_2 \in \mathrm{Z}\,.$$

Rezultă de aici că cele mai mici valori pozitive pentru lungimea d sunt:

- $d_1 = 20\,\mathrm{cm}$
- $d_2 = 7{,}53\,\mathrm{cm}$

Corespunzător acestor valori, impedanța z_{i2}, respectiv impedanța caracteristică Z'_C a tronsonului inversor primesc următoarele valori:

- pentru $d_1 = 20\,\mathrm{cm}$:

$$z_{i2} = \left.\frac{3(t_1^2+1)}{17t_1^2+24t_1+9}\right|_{t_1=-0,72} = \frac{3(0{,}72^2+1)}{17\cdot 0{,}72^2+24\cdot 0{,}72+9} \approx 8{,}55$$

şi, corespunzător,

$$Z'_C = \sqrt{Z_C \cdot Z_{i2}} = \sqrt{75\cdot(75\cdot 8{,}55)} = 219{,}3\,\Omega$$

- pentru $d_2 = 7{,}53\,\mathrm{cm}$:

$$z_{i2} = \left.\frac{3(t_2^2+1)}{17t_2^2+24t_2+9}\right|_{t_2=1,387} = \frac{3(1{,}387^2+1)}{17\cdot 1{,}387^2+24\cdot 1{,}387+9} \approx 0{,}117$$

şi, corespunzător,

$$Z'_C = \sqrt{Z_C \cdot Z_{i2}} = \sqrt{75\cdot(75\cdot 0{,}117)} = 25{,}65\,\Omega$$

Metoda 2.

Se bazează pe observația că impedanța pe o linie de transmisiune fără pierderi este pur rezistivă numai într-un plan de maxim sau de minim al distribuției de tensiune pe linie. În acest caz, impedanța corespunzătoare unui plan de minim al distribuției de tensiune este

$$Z\big|_{z=z_{(\min)}} = \frac{Z_C}{\sigma},$$

unde Z reprezintă impedanța văzută într-un plan situat la $z_{(\min)}$ față de sarcină. Similar, într-un plan de maxim se obține valoarea

$$Z\big|_{z=z_{(\max)}} = Z_C\sigma,$$

unde Z reprezintă impedanța văzută într-un plan situat la $z_{(\max)}$ față de sarcină iar σ este raportul de undă staționară pe linie.

Tronsonul în $\lambda/4$, inversor de impedanță, transformă o impedanță pur rezistivă Z_S în altă impedanță, de asemenea reală, $Z_C'^2/Z_S$. Distanța d trebuie să fie astfel aleasă încât impedanța văzută în planul respectiv să fie reală, deci să corespundă fie unui minim, fie unui maxim al distribuției de tensiune pe linie.

Distanța de la sarcină la care apare primul minim al distribuției de tensiune este dată de relația:

$$d = \frac{\pi + \varphi_\Gamma}{4\pi}\lambda\,.$$

Cu datele problemei, impedanța normată de sarcină este:

$$z_S = \frac{Z_S}{Z_C} = \frac{1}{3} - \mathrm{j}\frac{4}{3}$$

iar coeficientul de reflexie al tensiunii la sarcină are valoarea

$$\Gamma = \frac{Z_S - Z_C}{Z_S + Z_C} = \frac{z_S - 1}{z_S + 1} \cong 0,79\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}1,249\,\mathrm{rad}}\,.$$

Se obține astfel lungimea tronsonului terminal:

$$d = \frac{\pi - 1,249}{4\pi} 50 \cong 7,53 \quad \text{cm}\,.$$

În acest plan, impedanța normată are valoarea:

$$z_{i2} = \frac{1}{\sigma} = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = 0,117\,.$$

Denormând, se obține valoarea impedanței de intrare în tronsonul de lungime d :

$$Z_{i2} = Z_C z_{i2} = 75 \cdot 0,117 = 8,775\,\Omega\,.$$

Impedanța liniei de lungime $l = \lambda/4 = 50/4 = 12,5\,\text{cm}$ se calculează cu ajutorul relației:

$$Z'_C = \sqrt{Z_C Z_{i2}} = \sqrt{75 \cdot 8,775} \cong 25,65\,\Omega\,.$$

În mod similar se determină distanța d şi impedanța caracteristică Z'_C în cazul unui maxim al distribuției de tensiune.

Primul maxim de tensiune pe linie este situat – față de sarcină – la o distanță d :

$$d = \frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi_\Gamma}{4\pi}\lambda \cong 20,03 \quad \text{cm}\,.$$

În acest plan, impedanța normată are valoarea

$$z_{i2} = \sigma = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0,79}{1 - 0,79} \cong 8,52\,.$$

Denormând, se obține valoarea impedanței de intrare în tronsonul de lungime d :

$$Z_{i2} = Z_C z_{i2} = 75 \cdot 8,52 = 639\,\Omega\,.$$

Corespunzător, impedanța caracteristică a tronsonului inversor are valoarea:

$$Z'_C = \sqrt{Z_C Z_{i2}} = \sqrt{75 \cdot 639} = 219\,\Omega\,.$$

Metoda 3. Pe diagrama Smith.

Se reprezintă pe diagramă punctul corespunzător impedanței normate de sarcină:

$$\frac{Z_S}{Z_C} = r_S + \mathrm{j}x_s = \frac{25 - \mathrm{j}100}{75} \cong 0,333 - \mathrm{j}1,333\,.$$

Acesta se află deci la intersecția dintre cercul $r = 0,333$ şi arcul de cerc $x = -1,333$.

Se citeşte de pe diagramă poziția corespunzătoare punctului obținut, notat cu A: $(d/\lambda)_A \approx 0,348$.

Corespunzătoare unei deplasări de la sarcină până într-un plan al liniei în care impedanța este pur rezistivă, pe diagramă se efectuează o rotație în sens orar (spre generator), pe un cerc cu centrul în origine, până la intersectarea semidiametrului real negativ. Punctul astfel obținut, notat cu B, reprezintă impedanța normată z_{i2} . De pe diagramă se citeşte valoarea acesteia, $z_{i2} = r \approx 0{,}12$, şi poziţia ei normată: $(d/\lambda)_B = 0{,}5$.

În acest fel, prin denormare se determină lungimea d a tronsonului terminal care asigură în planul său de intrare o impedanţă pur rezistivă,

$$d = \left[(d/\lambda)_B - (d/\lambda)_A\right]\lambda = (0{,}5 - 0{,}348)\cdot 50 = 7{,}6\,\text{cm},$$

precum şi valoarea ei:

$$Z_{i2} = (z_{i2})_A Z_C \approx 0{,}12\cdot 75 = 9\,\Omega.$$

Urmând relaţiile prezentate în cadrul acestei probleme la metoda 2, poate fi determinată şi valoarea impedanţei caracteristice a tronsonului inversor, corespunzător datelor obţinute pe diagrama circulară.
Astfel, rezultă:

$$Z'_C \approx 26\,\Omega.$$

Continuând rotirea din punctul B, pe acelaşi cerc concentric cu diagrama Smith, se constată intersecţia cu semidiametrul real pozitiv, în punctul B'. Se găseşte astfel şi cea de-a doua soluţie a problemei:

$$(z_{i2})_{B'} = r \approx 8{,}5,$$

adică, prin denormare,

$$Z_{i2} = (z_{i2})_{B'} Z_C \approx 8{,}5\cdot 75 = 638\,\Omega$$

de unde

$$Z'_C \approx 219\,\Omega,$$

respectiv

$$d = \left[(d/\lambda)_{B'} - (d/\lambda)_A\right]\lambda = \left\{\left[(d/\lambda)_B + 0{,}25\right] - (d/\lambda)_A\right\}\lambda \approx$$
$$\approx (0{,}75 - 0{,}348)\cdot 50 = 20{,}1\,\text{cm}.$$

Variaţia cu frecvenţa a modulului coeficientului de reflexie pe linia de acces corespunzător celor două soluţii, obţinută prin simulare pe calculator, este prezentată în figura 1.11.1.

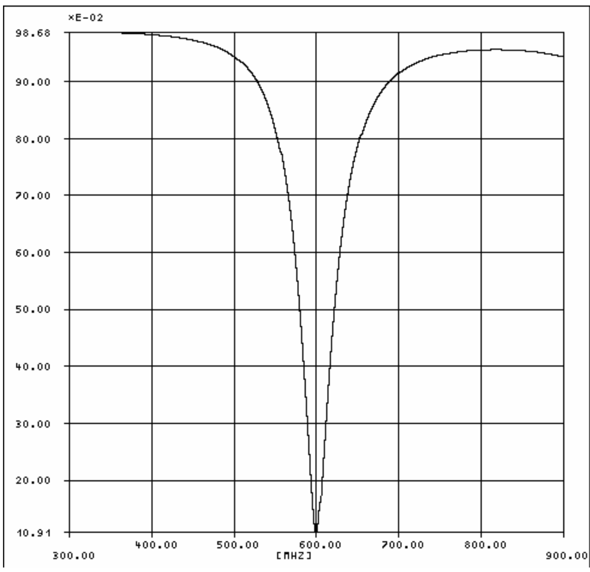


Figura 1.11.1.a
$d = 20\,\text{cm}$
$Z'_C = 219{,}3\,\Omega$

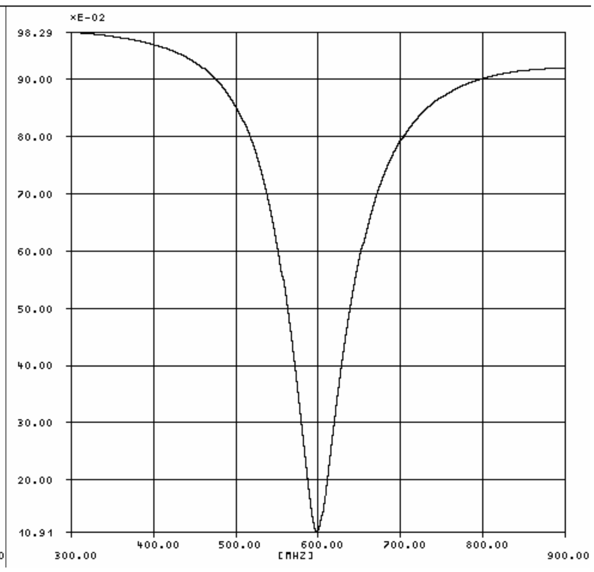


Figura 1.11.1.b
$d = 7{,}53\,\text{cm}$
$Z'_C = 25{,}65\,\Omega$

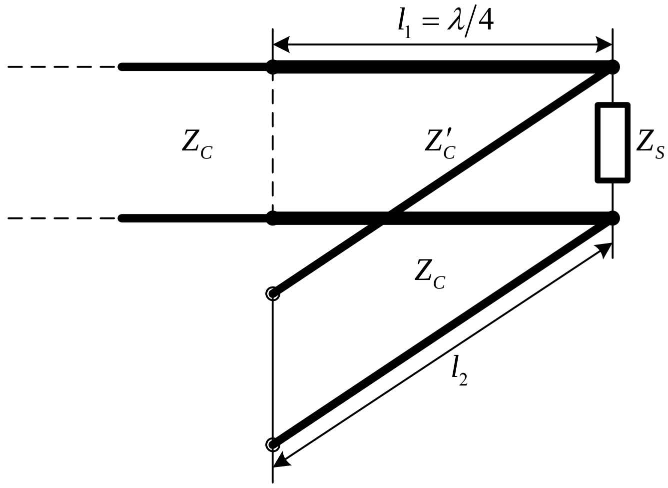
Observație: Se constată că deşi cele două soluții obținute sunt ambele corecte la frecvența nominală, ele conduc la un răspuns în frecvență uşor diferit.

Dacă se acceptă o anumită dezadaptare pe linia de acces, exprimată printr-o valoare maxim admisibilă a lui $|\Gamma|$ sau σ atunci se poate defini o bandă de frecvențe în interiorul căreia circuitul de adaptare considerat funcționează corect.

Banda de frecvențe este mai largă pentru prima soluție.

1.12 Să se calculeze lungimile l_1, l_2 precum şi impedanța caracteristică Z_C' astfel încât circuitul cu schema din figura de mai jos să realizeze la frecvența $f = 1\,\text{GHz}$ adaptarea unei sarcini $Z_S = (20 + \text{j}10)\Omega$ la o linie de acces cu impedanța caracteristică $Z_C = 50\,\Omega$.

Atât cele două tronsoane cât şi linia de acces au ca dielectric aerul şi prezintă pierderi neglijabile.



<u>Rezolvare:</u>

La frecvența $f = 1\,\text{GHz}$ lungimea de undă este

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{10^9} = 0{,}3\,\text{m} = 30\,\text{cm}$$

şi deci

$$l_1 = \frac{\lambda}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5\,\text{cm}.$$

Condiția de adaptare a impedanței complexe de sarcină Z_S la linia de acces având o impedanță caracteristică reală impune ca admitanța totală de sarcină – alcătuită din admitanța $Y_S = 1/Z_S$ şi admitanța de intrare în tronsonul derivație pe sarcină terminat în scurtcircuit – să fie **reală**. În această situație, tronsonul inversor de impedanță are rolul de a transforma valoarea reală obținută într-o valoare egală cu impedanța caracteristică a liniei de acces, fapt care permite adaptarea.

Admitanța de sarcină este

$$Y_S = G_S + jB_S = \frac{1}{Z_S} = \frac{1}{20 + j10} = (0{,}04 - j0{,}02)\ \mathrm{S}$$

iar admitanța de intrare în tronsonul derivație are expresia:

$$Y_i = Y_C \left.\frac{Y_S + jY_C \operatorname{tg} \beta l_2}{Y_C + jY_S \operatorname{tg} \beta l_2}\right|_{Y_S \to \infty} = -jY_C \operatorname{ctg} \beta l_2 .$$

Admitanța totală în planul de sarcină al liniei în $\lambda/4$ are expresia

$$Y_t = Y_i + Y_S = G_S + j\left(B_S - Y_C \operatorname{ctg} \beta l_2\right).$$

Impunând condiția de adaptare,

$$\operatorname{Im}\{Y_t\} = 0 ,$$

rezultă condiția:

$$\operatorname{ctg} \beta l_2 = \frac{B_S}{Y_C}$$

adică soluția:

$$l_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arcctg} \frac{B_S}{Y_C} + k\frac{\lambda}{2}, \quad k \in Z$$

Urmărind obținerea unui tronson cu o lungime minimă, se consideră $k = 0$ şi deci se obține:

$$l_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arcctg}\left(\frac{-0{,}02}{0{,}02}\right) = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\lambda}{8} = \frac{3 \cdot 30}{8} = 11{,}25\,\mathrm{cm} .$$

În această situație, admitanța totală are o valoare reală:

$$Y_t = G_S = 0{,}04\,\mathrm{S}$$

deci impedanța din planul de sarcină al tronsonului inversor este:

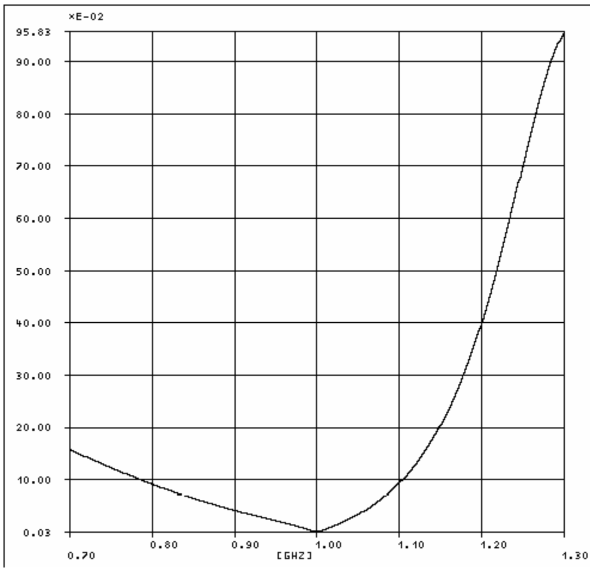


Figura 1.12.1

$l_2 = 11{,}25\,\mathrm{cm}$

$Z'_C \approx 35{,}35\,\Omega$

$$Z_t = \frac{1}{Y_t} = \frac{1}{0{,}04} = 25\,\Omega\,.$$

Impedanța caracteristică a tronsonului în $\lambda/4$ se calculează ca medie geometrică a impedanțelor terminale:

$$Z'_C = \sqrt{Z_C Z_t} = \sqrt{50 \cdot 25} \approx 35{,}35\,\Omega\,.$$

Variația cu frecvența a modulului coeficientului de reflexie pe linia de acces obținută prin simulare pe calculator este prezentată în figura 1.12.1.

1.13 Să se stabilească în ce condiții o linie de transmisiune fără pierderi, intercalată între un generator cu impedanța internă Z_G şi o sarcină cu impedanța Z_S poate fi utilizată ca circuit de adaptare.

Rezolvare:

Impedanța de intrare a liniei fără pierderi, de impedanță caracteristică Z_C, lungime l şi constantă de defazare $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, are expresia:

$$Z_i = Z_C \frac{Z_S + \mathrm{j}Z_C \,\mathrm{tg}\,\beta l}{Z_C + \mathrm{j}Z_S \,\mathrm{tg}\,\beta l}.$$

Transferul maxim de putere este obținut dacă se îndeplineşte condiția

$$Z_i = Z_G^*\,.$$

Notând $Z_G = R_G + \mathrm{j}X_G$, $Z_S = R_S + \mathrm{j}X_S$, $\mathrm{tg}\,\beta l = u$ şi ținând seama de faptul că pentru linia fără pierderi $Z_C \in \Re$, se scrie:

$$R_G - \mathrm{j}X_G = Z_C \frac{R_S + \mathrm{j}(X_S + uZ_C)}{Z_C - uX_S + \mathrm{j}uR_S}.$$

Prin egalarea părților reale şi a părților imaginare de aici rezultă:

$$Z_C(R_G - R_S) = u(X_S R_G - X_G R_S),$$

$$uZ_C^2 + (X_S + X_G)Z_C - u(R_S R_G + X_S X_G) = 0\,,$$

de unde, prin eliminarea variabilei u, se obține ecuația:

$$\frac{R_G - R_S}{R_G X_S - R_S X_G} \cdot Z_C^3 + \left[X_S + X_G - \frac{(R_G - R_S)(R_S R_G + X_S X_G)}{X_S R_G - X_G R_S}\right] Z_C = 0\,.$$

Renunțând la soluția $Z_C = 0$ care nu convine rămâne condiția:

$$Z_C^2 = \frac{R_S\left(R_G^2 + X_G^2\right) - R_G\left(R_S^2 + X_S^2\right)}{R_G - R_S}.$$

Deoarece impedanța caracteristică a liniei fără pierderi este reală, trebuie ca Z_C^2 să fie pozitiv, adică

$$\frac{\dfrac{R_G^2 + X_G^2}{R_G} - \dfrac{R_S^2 + X_S^2}{R_S}}{\dfrac{1}{R_G} - \dfrac{1}{R_S}} \geq 0\,,$$

sau

$$\frac{R_{Gp} - R_{Sp}}{\frac{1}{R_G} - \frac{1}{R_S}} \geq 0,$$

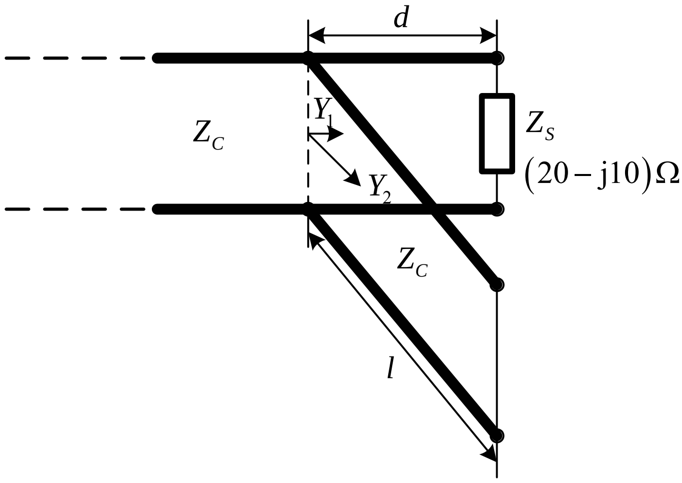
în care s-au notat prin R_{Gp} şi R_{Sp} rezistenţele corespunzătoare reprezentărilor de tip paralel pentru impedanţele Z_G şi, respectiv, Z_S ($Z_G = R_{Gp} \parallel \mathrm{j}X_{Gp}$, $Z_S = R_{Sp} \parallel \mathrm{j}X_{Sp}$).

Dacă această condiţie este satisfăcută rezultă $u \in \Re$ şi din ecuaţia $\mathrm{tg}\,\beta l = u$ se determină lungimea necesară a liniei.

În concluzie, adaptarea este posibilă atunci când rezistenţa în reprezentarea paralel şi conductanţa în reprezentarea serie ale impedanţei generatorului sunt, ambele, ori mai mici, ori mai mari decât mărimile corespunzătoare ale impedanţei de sarcină.

1.14 Să se calculeze lungimea l a unui tronson de linie terminat în scurtcircuit şi distanţa d, faţă de sarcină, la care trebuie legat în derivaţie acest tronson, pentru a se realiza adaptarea unei sarcini cu impedanţa $Z_S = (20 - \mathrm{j}10)\Omega$ la o linie de acces.

Atât linia principală cât şi tronsonul de linie folosit pentru adaptare sunt fără pierderi şi au impedanţa caracteristică $Z_C = 50\,\Omega$, iar lungimea de undă pe linie este $\lambda = 100\,\mathrm{cm}$.



Rezolvare:

Analitic, problema se rezolvă punând condiţia de adaptare; aceasta revine la a scrie că admitanţa totală de la capătul liniei de acces să fie egală cu admitanţa caracteristică a liniei de acces, $Y_C = 1/Z_C$.

Admitanţa normată de intrare în tronsonul de lungime d terminat pe admitanţa normată de sarcină $y_S = Y_S / Y_C$ este:

$$y_1 = \frac{Y_1}{Y_C} = \frac{y_S + \mathrm{j}\,\mathrm{tg}\,\beta d}{1 + \mathrm{j}y_S\,\mathrm{tg}\,\beta d}.$$

Admitanţa normată de intrare în tronsonul de lungime l terminat în scurtcircuit are expresia:

$$y_2 = \frac{Y_2}{Y_C} = y_i\big|_{y_S = \infty} = -\mathrm{j}\,\mathrm{ctg}\,\beta l.$$

Din condiția de adaptare:

$$Y_1 + Y_2 = Y_C$$

sau

$$y_1 + y_2 = 1,$$

se obține:

$$\frac{y_S + \mathrm{j}\,\mathrm{tg}\,\beta d}{1 + \mathrm{j} y_S\,\mathrm{tg}\,\beta d} - \mathrm{j}\,\mathrm{ctg}\,\beta l = 1$$

în care admitanța normată de sarcină are valoarea

$$y_S = \frac{Y_S}{Y_C} = \frac{Z_C}{Z_S} = \frac{50}{20 - \mathrm{j}10} = 2 + \mathrm{j}.$$

Rezultă relația:

$$\frac{2 + \mathrm{j} + \mathrm{j}\,\mathrm{tg}\,\beta d}{1 + \mathrm{j}(2 + \mathrm{j})\,\mathrm{tg}\,\beta d} - \mathrm{j}\,\mathrm{ctg}\,\beta l = 1$$

adică

$$\frac{2\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\beta d\right)}{5\,\mathrm{tg}^2\,\beta d - 2\,\mathrm{tg}\,\beta d + 1} + \mathrm{j}\left[\frac{-\mathrm{tg}^2\,\beta d - 4\,\mathrm{tg}\,\beta d + 1}{5\,\mathrm{tg}^2\,\beta d - 2\,\mathrm{tg}\,\beta d + 1} - \mathrm{ctg}\,\beta l\right] = 1$$

din care, prin identificarea părților reale şi imaginare, se deduc condițiile:

- $$\frac{2\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\beta d\right)}{5\,\mathrm{tg}^2\,\beta d - 2\,\mathrm{tg}\,\beta d + 1} = 1\ ,$$

de unde se obține:

$$3\,\mathrm{tg}^2\,\beta d - 2\,\mathrm{tg}\,\beta d - 1 = 0\ .$$

Rezultă astfel două valori pentru lungimea tronsonului terminal:

$$\mathrm{tg}\,\beta d_1 = -\frac{1}{3}$$

adică

$$\beta d_1 = \mathrm{arctg}(-\frac{1}{3}) + k_1\pi, k_1 \in \mathrm{Z}$$

deci

$$d_1 \approx 44{,}8\,\mathrm{cm},$$

respectiv

$$\mathrm{tg}\,\beta d_2 = 1$$

adică

$$\beta d_2 = \frac{\pi}{4}$$

de unde

$$d_2 = \frac{\lambda}{8} = 12{,}5\,\mathrm{cm}\ .$$

- $$\frac{-\mathrm{tg}^2\,\beta d - 4\,\mathrm{tg}\,\beta d + 1}{5\,\mathrm{tg}^2\,\beta d - 2\,\mathrm{tg}\,\beta d + 1} - \mathrm{ctg}\,\beta l = 0$$

Corespunzător celor două valori ale $\mathrm{tg}\,\beta d$, se obțin de aici două soluții pentru lungimea tronsonului lateral:

$$\mathrm{ctg}\,\beta l_1 = 1$$

adică

$$l_1 = \frac{\lambda}{8} = 12{,}5\,\text{cm}\,,$$

respectiv

$$\text{ctg}\,\beta l_2 = -1\,,$$

adică

$$l_2 = \frac{3\lambda}{8} = 37{,}5\,\text{cm}\,.$$

Sintetizând rezultatele obținute, se constată că adaptarea la linia de acces se produce pentru următoarele perechi de lungimi ale tronsoanelor:

$$d = 44{,}87\,\text{cm}, \quad l = 12{,}5\,\text{cm}\,;$$

$$d = 12{,}5\,\text{cm}, \quad l = 37{,}5\,\text{cm}\,.$$

Altfel: Pe diagrama Smith:

Se începe prin reprezentarea pe diagramă, a punctului, notat cu A, corespunzător impedanței normate de sarcină $z_S = Z_S / Z_C = 0{,}4 - \text{j}0{,}2$.

Datorită conexiunii paralel, se preferă calculul cu admitanțe. Admitanța normată de sarcină $y_S = 1/z_S = 2 + \text{j}$ este reprezentată de punctul notat cu A', simetric cu A în raport cu centrul diagramei.

Determinarea distanței d revine la determinarea unghiului de rotație în sens orar (spre generator), astfel încât admitanța de sarcină, A', să se transforme într-o admitanță având partea reală egală cu unitatea (deoarece adăugarea ulterioară a admitanței de intrare a tronsonului lateral – pur reactiv – nu va influența asupra părții reale a admitanței totale). Efectuând rotația din punctul A' până la intersectarea cercului $g = 1$, se obține punctul B. Unghiul de rotație, determinat cu ajutorul gradațiilor de pe periferia diagramei, corespunde unei distanțe normate la lungimea de undă

$$d/\lambda = 0{,}125\,,$$

adică, denormând,

$$d = 0{,}125\lambda = 12{,}5\,\text{cm}\,.$$

În punctul B, partea imaginară a admitanței (susceptanța) tronsonului terminal, citită pe diagramă, are valoarea normată $b = -1$; în consecință, lungimea tronsonului lateral trebuie astfel determinată încât susceptanța lui de intrare să aibă valoarea normată +1, necesară pentru compensare. Lungimea aceasta poate fi determinată tot pe diagramă, prin intermediul unghiului de rotație necesar pentru a transforma admitanța terminală a tronsonului lateral, $y = \infty$ (reprezentată de punctul C), în susceptanța necesară pentru adaptare (punctul D). Se obține:

$$l/\lambda = 0{,}375\,,$$

de unde, denormând, rezultă:

$$l = 0{,}375 \cdot \lambda = 37{,}5\,\text{cm}\,.$$

Se constată că problema mai admite o soluție, reprezentată de punctul B'. Pentru acest punct se obțin:

$$d/\lambda = 0{,}449\,,$$

adică

$$d = 0{,}449 \cdot \lambda = 44{,}9\,\text{cm}$$

şi

$$l/\lambda = 0{,}125,$$

adică

$$l = 0{,}125\lambda = 12{,}5\,\text{cm}.$$

Observație: Prin acest procedeu poate fi adaptată **orice** sarcină Z_S, deoarece oricare ar fi punctul de pornire, la rotirea în jurul originii se intersectează cercul $g = 1$, deci se obțin soluții.

Variația cu frecvența a modulului coeficientului de reflexie pe linia de acces, corespunzătoare celor două soluții, obținută prin simulare pe calculator, este prezentată în figura de mai jos.

Se poate observa faptul că prima soluție conduce la o bandă ceva mai largă a circuitului de adaptare.

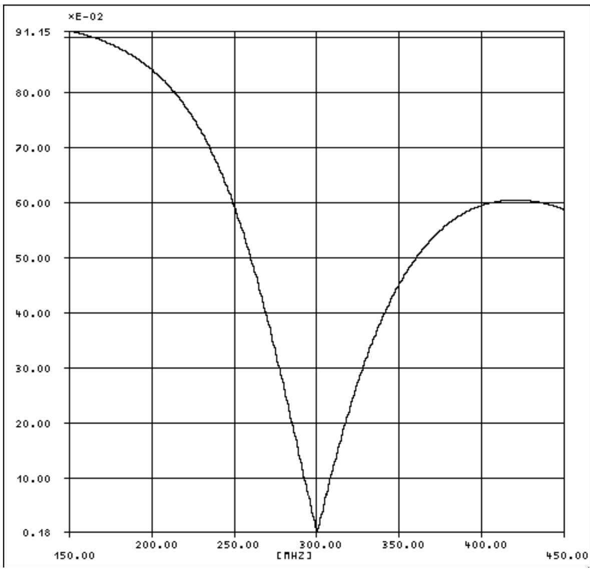


Figura 1.14.2.a

$d = 44{,}87\,\text{cm}$

$l = 12{,}5\,\text{cm}$

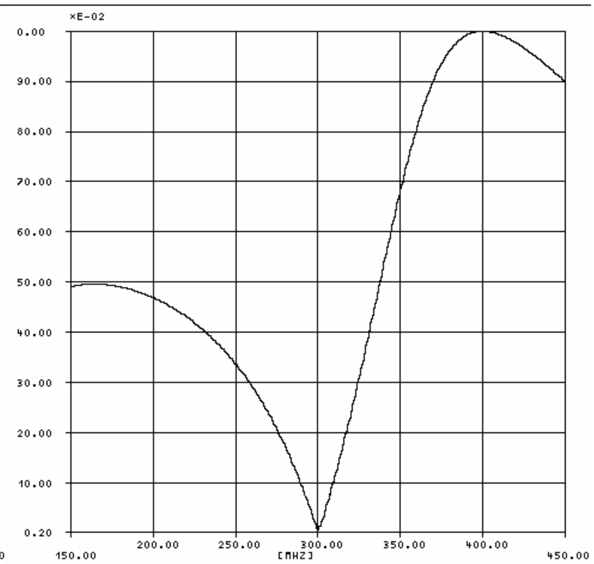
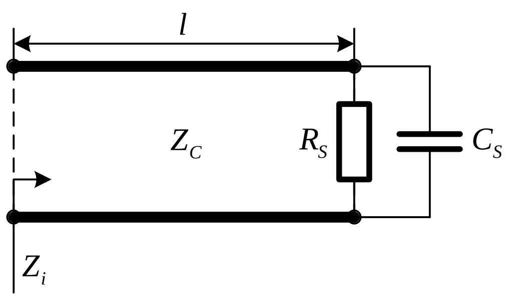


Figura 1.14.2.b

$d = 12{,}5\,\text{cm}$

$l = 37{,}5\,\text{cm}$

1.15 Un cablu coaxial fără pierderi, de lungime $l = 40\,\text{cm}$, are impedanța caracteristică $Z_C = 200\,\Omega$ şi este terminat pe o impedanță compusă dintr-un rezistor cu rezistența de $100\,\Omega$ în paralel cu un condensator având capacitatea de $5\,\text{pF}$.



Ştiind că lungimea de undă pe cablu este $\lambda_d = 25\,\text{cm}$ iar dielectricul dintre conductoare prezintă o constantă dielectrică $\varepsilon_r = 4$, să se calculeze impedanţa de intrare a liniei.

Rezolvare:

Frecvenţa de lucru are valoarea:

$$f = \frac{c}{\lambda_d} = \frac{c_0}{\lambda_d\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{0{,}25\cdot\sqrt{4}} = 6\cdot 10^8\ \text{Hz} = 600\,\text{MHz}\,.$$

Rezultă că admitanţa de sarcină are valoarea

$$Y_S = G_S + \text{j}B_S = \frac{1}{R_S} + \text{j}\omega C_S = 10^{-2} + \text{j}2\pi\cdot 6\cdot 10^8\cdot 5\cdot 10^{-12}$$
$$= \left(0{,}01 + \text{j}188{,}5\cdot 10^{-4}\right)\text{S}$$

sau, în mărime normată,

$$y_S = \frac{Y_S}{Y_C} = 2 + \text{j}3{,}77\,.$$

Admitanţa normată de intrare în linia de transmisiune are expresia:

$$y_i = \frac{y_S + \text{j}\,\text{tg}\,\beta l}{1 + \text{j}y_S\,\text{tg}\,\beta l}\,,$$

unde

$$\beta l = 2\pi\frac{l}{\lambda_d} = 2\pi\frac{40}{25} = 10{,}052\ \text{rad}$$

adică $\text{tg}\,\beta l = 0{,}726$.

Rezultă astfel valoarea admitanţei de intrare:

$$y_i = \frac{2 + \text{j}3{,}77 + \text{j}0{,}726}{1 + \text{j}(2 + \text{j}3{,}77)\cdot 0{,}726} = 0{,}6 - \text{j}2{,}09 = 2{,}174\,\text{e}^{-\text{j}1{,}291\,\text{rad}}\,.$$

Prin urmare, impedanţa de intrare normată este:

$$z_i = 1/y_i = 0{,}127 + \text{j}0{,}442$$

sau, denormând,

$$Z_i = z_i Z_C = (0{,}127 + \text{j}0{,}442)\cdot 200 = (25{,}4 + \text{j}88{,}4)\Omega\,.$$

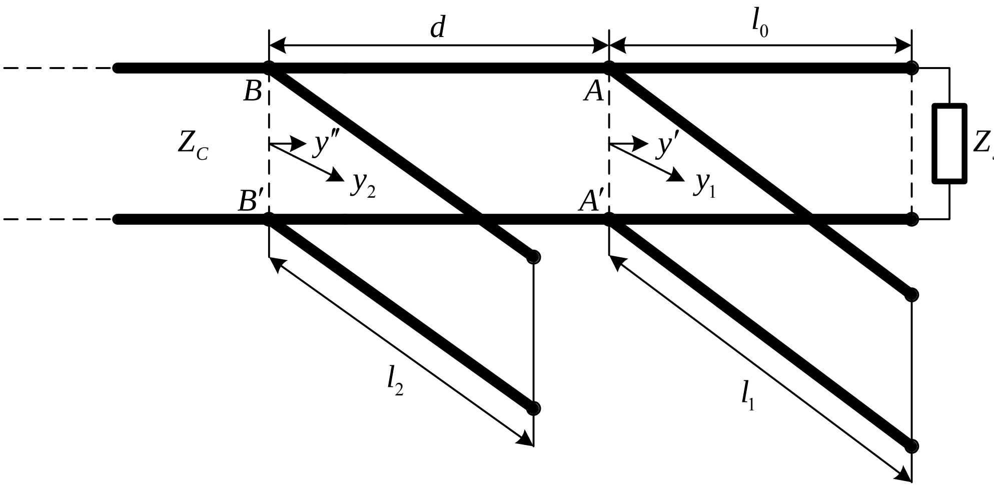
Altfel: Pe diagrama Smith:

Se reprezintă pe diagramă admitanţa normată de sarcină, $y_S = 2 + \text{j}3{,}77$. Punctul obţinut se roteşte apoi în jurul centrului diagramei, în sens orar (deplasare spre generator), cu un unghi corespunzător lungimii normate a liniei, $l/\lambda = 1{,}6$; aceasta presupune parcurgerea completă a trei cercuri, plus încă o deplasare de $1{,}6 - 3\cdot 0{,}5 = 0{,}1$ diviziuni. În punctul astfel obţinut se citeşte admitanţa normată de intrare, $y_i = 0{,}6 - \text{j}2{,}09$. Pentru a afla impedanţa normată de intrare, se consideră punctul simetric lui y_i faţă de origine. Se obţine $z_i = 0{,}127 + \text{j}0{,}442$ sau, denormând, $Z_i = z_i Z_C = (24{,}5 + \text{j}88{,}4)\Omega$, ceea ce corespunde soluţiei obţinute anterior pe cale analitică.

1.16 Pentru o impedanță de sarcină $Z_S = (100 + \mathrm{j}50)\Omega$, să se calculeze lungimile l_1, l_2 ale tronsoanelor de linie conectate în derivație la distanțele (fixe) $l_0 = 50\,\mathrm{cm}$, respectiv $l_0 + d = 75\,\mathrm{cm}$ față de capătul liniei, astfel încât linia de transmisiune să fie terminată adaptat.

Atât linia principală cât şi tronsoanele terminate în scurtcircuit sunt fără pierderi şi au impedanța caracteristică $Z_C = 50\,\Omega$. Lungimea de undă pe linie este $\lambda = 100\,\mathrm{cm}$.

Prin modificarea lungimilor l_1, l_2 ale tronsoanelor este posibilă adaptarea oricărei impedanțe de sarcină ?



Rezolvare:

Se notează cu y_1, y_2 admitanțele normate de intrare ale tronsoanelor laterale terminate în scurtcircuit.

Deoarece $l_0/\lambda = 1/2$, tronsonul terminal de lungime l_0 este repetor de impedanță astfel încât admitanța lui normată de intrare are valoarea:

$$y' = y_S = \frac{1}{z_S} = \frac{Z_C}{Z_S} = \frac{1}{2+\mathrm{j}} = 0{,}4 - \mathrm{j}0{,}2 = g' + \mathrm{j}b'\,.$$

Întrucât $d/\lambda = 1/4$ rezultă că tronsonul de lungime d este inversor de impedanță astfel încât se poate scrie:

$$y'' = \frac{1}{y' + y_1}\,.$$

Condiția de adaptare la intrarea în tronsonul de lungime l_2 este:

$$y_2 + y' = 1\,.$$

Pe de altă parte, admitanțele de intrare în tronsoanele de linie laterale terminate în scurtcircuit au expresiile:

$$y_1 = -\mathrm{j}\,\mathrm{ctg}\,\beta l_1,$$

$$y_2 = -\mathrm{j}\,\mathrm{ctg}\,\beta l_2,$$

prin urmare condiția de adaptare devine:

$$\frac{1}{g' + \mathrm{j}b' - \mathrm{j}\,\mathrm{ctg}\,\beta l_1} - \mathrm{j}\,\mathrm{ctg}\,\beta l_2 = 1.$$

Egalând aici părțile reale și imaginare, se obține sistemul:

$$\frac{g'}{(g')^2+(b'-\operatorname{ctg}\beta l_1)^2}=1,$$

$$\operatorname{ctg}\beta l_2=\frac{-b'+\operatorname{ctg}\beta l_1}{(g')^2+(b'-\operatorname{ctg}\beta l_1)^2}.$$

Rezolvând sistemul, se obțin soluțiile:

$$\operatorname{ctg}\beta l_1=b'\pm\sqrt{g'(1-g')}=\frac{-1\pm\sqrt{6}}{5},$$

$$\operatorname{ctg}\beta l_2=\pm\sqrt{\frac{1}{g'}-1}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2},$$

de unde

$$\beta l_1'=1{,}289+k_1'\pi,\quad k_1'\in Z,$$

$$\beta l_1''=-0{,}967+k_2'\pi,\quad k_2'\in Z$$

respectiv

$$\beta l_2'=0{,}685+k_1''\pi,\quad k_1''\in Z,$$

$$\beta l_2''=-0{,}685+k_2''\pi,\quad k_2''\in Z.$$

Se obțin următoarele valori pozitive minime ale lungimilor tronsoanelor:

$l_1=20{,}5$ cm; $l_2=10{,}9$ cm

sau

$l_1=34{,}6$ cm; $l_2=39{,}1$ cm.

Observație: Problema admite soluții numai dacă $g'<1$.

Variația cu frecvența a modulului coeficientului de reflexie pe linia de acces corespunzătoare celor două soluții, obținută prin simulare pe calculator, este prezentată în figura de mai jos.

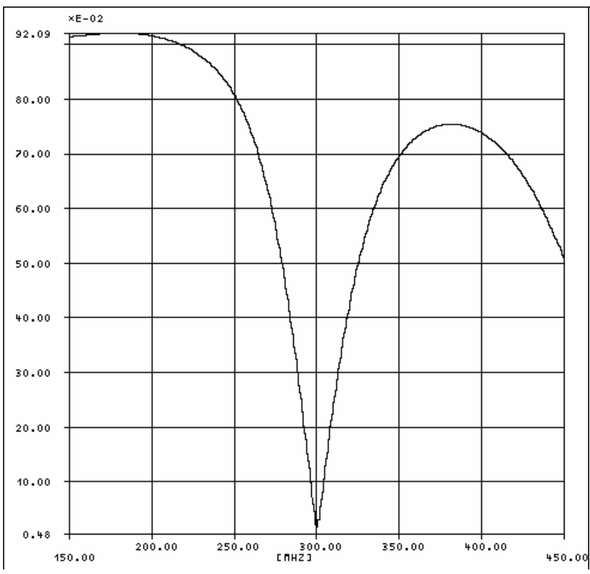


Figura 1.16.2a

$l_1=20{,}5\,\mathrm{cm}$

$l_2=10{,}9\,\mathrm{cm}$

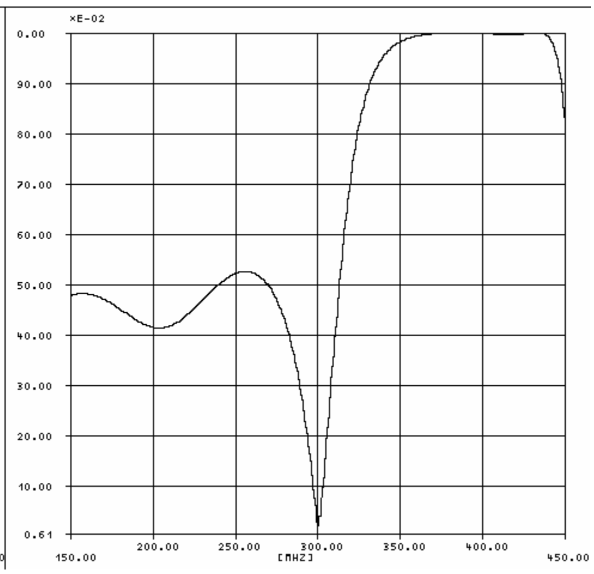


Figura 1.16.2b

$l_1=34{,}6\,\mathrm{cm}$

$l_2=39{,}1\,\mathrm{cm}$

Altfel: Pe diagrama Smith:

Se porneşte de la $y' = y_S + g_S + \mathrm{j}b_S = 0{,}4 - \mathrm{j}0{,}2$, căreia îi corespunde pe diagramă punctul M. Admitanța din stânga în secțiunea AA', $y_A = y_S + y_1 = g_S + \mathrm{j}(b_S - \mathrm{ctg}\,\beta l_1)$, va fi reprezentată de un punct N a cărui poziție pe cercul $g = g_S = 0{,}4$ depinde de l_1. Trecerea în secțiunea BB' se face rotind punctul N pe un cerc cu centrul în origine în sens orar (spre generator) cu $(d/\lambda)\cdot 4\pi = \pi$. Se obține deci punctul diametral opus lui N, care se notează cu Q şi căruia îi corespunde admitanța $y'' = y_A^{-1}$.

Se impune condiția $y'' + y_2 = 1$, adică $y_A^{-1} - j\,\mathrm{ctg}\,\beta l_2 = 1$. Punctul Q se află pe cercul $g = 0{,}4$, rotit cu π radiani. Se caută intersecția acestui cerc cu cercul $g = 1$. Se găsesc punctele Q' şi Q'' prin care trec cercurile $b = b'_Q$, $b = b''_Q$, care corespund susceptanțelor compensate de tronsonul cu lungimea l_2. Rezultă deci: $b'_2 = -b'_Q = -1{,}22$, $b''_2 = -b''_Q = 1{,}22$, adică punctele R' şi R'' care corespund admitanței de intrare în linia cu lungimea l_2.

Această lungime se obține prin deplasarea pe cercul exterior în sens orar (spre sarcină) până se ajunge la scurtcircuit ($y = \infty$, notat cu S). Se măsoară:

$$l'_2/\lambda = 0{,}359 - 0{,}25 = 0{,}109;$$

$$l''_2/\lambda = 0{,}141 + 0{,}25 = 0{,}391,$$

de unde, prin denormare, rezultă:

$$l'_2 = 0{,}109\lambda = 10{,}9\,\mathrm{cm},$$

respectiv

$$l''_2 = 0{,}391\lambda = 39{,}1\,\mathrm{cm}.$$

Se precizează pozițiile N' şi N'' ale punctului N, ca simetrice ale punctelor Q' şi Q'' în raport cu originea. Prin N' şi N'' trec cercurile $b = b'_N = -0{,}48$, respectiv $b = b''_N = 0{,}48$ care corespund susceptanței $b_A = b_S + b_1$. Deci susceptanța liniei l_1 poate avea valorile:

$$b'_1 = b'_N - b_S = -0{,}28,$$

respectiv

$$b''_1 = b''_N - b_S = 0{,}68.$$

Punctele reprezentative se notează cu T', respectiv T''. Deplasându-le în sens trigonometric (spre sarcină) până în punctul S, se obține:

$$l'_1/\lambda = 0{,}456 - 0{,}25 = 0{,}206$$

şi

$$l''_1/\lambda = 0{,}096 + 0{,}25 = 0{,}346$$

adică, prin denormare:

$$l'_1 = 0{,}206\lambda = 20{,}6\,\mathrm{cm},$$

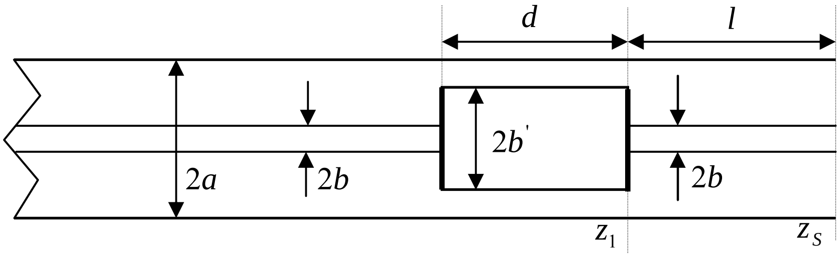
respectiv

$$l''_1 = 0{,}346\lambda = 34{,}6\,\mathrm{cm}.$$

Se constată în final că rezultatele obținute pe cale grafică, cu ajutorul diagramei circulare, sunt în bună concordanță cu cele obținute pe cale analitică.

1.17 Să se calculeze dimensiunile şi poziţia unui tronson de adaptare în $\lambda/4$ cu ajutorul căruia să se realizeze adaptarea unei sarcini $Z_S = (25 - \mathrm{j}100)\Omega$ la un cablu coaxial având impedanţa $Z_C = 75\,\Omega$. Dielectricul cablului este aerul. Raza mare a secţiunii transversale a cablului este $a = 1\,\mathrm{cm}$. Tronsonul de adaptare se realizează prin modificarea razei conductorului interior. Frecvenţa de lucru este $f = 600\,\mathrm{MHz}$.

Se neglijează pierderile.

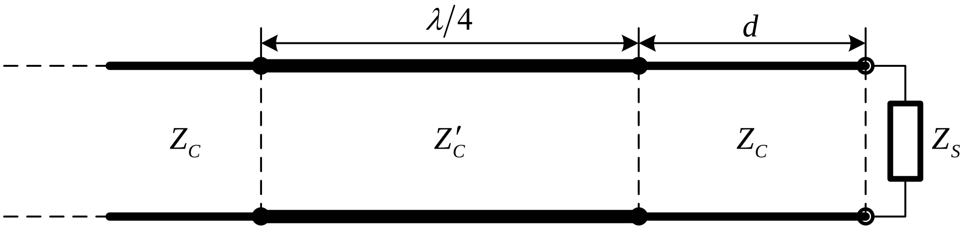


Rezolvare:

Lungimea de undă corespunzătoare frecvenţei de lucru este:

$$\lambda = \frac{c_0}{f\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{6\cdot 10^8} = 0{,}5\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{cm}.$$

Schema echivalentă structurii desenate este prezentată mai jos.



Transformatorul de impedanţă în $\lambda/4$ schimbă o impedanţă reală Z_S în altă impedanţă reală, $Z_C'^2/Z_S$. Distanţa d trebuie să fie aleasă astfel încât impedanţa văzută în planul respectiv să fie reală şi mai mică decât Z_C (deoarece $b' > b$, $Z_C' < Z_C$), deci să corespundă unui minim al tensiunii.

Poziţia minimului de tensiune este dat de relaţia:

$$d = \left(\frac{1}{4} + \frac{\varphi_\Gamma}{4\pi}\right)\lambda.$$

Impedanţa normată de sarcină este

$$z_S = \frac{Z_S}{Z_C} = \frac{25 - \mathrm{j}100}{75} = \frac{1}{3} - \mathrm{j}\frac{4}{3}$$

iar coeficientul de reflexie al tensiunii la sarcină este:

$$\Gamma_S = \frac{Z_S - Z_C}{Z_S + Z_C} = \frac{z_S - 1}{z_S + 1} = \frac{\sqrt{10}}{4}\cdot \mathrm{e}^{(-\mathrm{j}\,\mathrm{arctg}\,3)} \cong 0{,}79\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}1{,}249\,\mathrm{rad}}.$$

Se obține:

$$d = \left(\frac{1}{4} - \frac{1{,}249}{4\pi}\right) \cdot 50 = 7{,}53\,\text{cm}.$$

În acest plan de minim al distribuției de tensiune impedanța normată are valoarea:

$$z_1 = \frac{1}{\sigma} = \frac{1 - |\Gamma_S|}{1 + |\Gamma_S|} = 0{,}117.$$

Impedanța tronsonului de adaptare în $\lambda/4$ trebuie să corespundă ecuației

$$(z_C')^2 = 1 \cdot z_1,$$

deci

$$z_C' = \sqrt{z_1} = 0{,}342,$$

adică

$$Z_C' = Z_C \cdot z_C' = 75 \cdot 0{,}342 = 25{,}65\,\Omega.$$

Din expresia impedanței caracteristice pentru cablurile coaxiale,

$$Z_C = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\frac{a}{b},$$

rezultă că pentru cablul coaxial inițial, raza conductorului interior este:

$$b = a \cdot \exp\left(-\frac{Z_C\sqrt{\varepsilon_r}}{60}\right) = 2{,}86\,\text{mm},$$

iar pentru porțiunea de lungime $\lambda/4$

$$b' = a \cdot \exp\left(-\frac{Z_C'\sqrt{\varepsilon_r}}{60}\right) = 6{,}52\,\text{mm}.$$

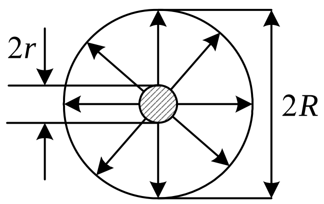
Lungimea l a tronsonului cu impedanța Z_C' este:

$$l = \lambda/4 = 50/4 = 12{,}5\,\text{cm}.$$

1.18 Să se calculeze puterea maximă transmisibilă printr-un cablu coaxial cu dimensiunile $R = 2{,}72\,\text{mm}$, $r = 1\,\text{mm}$ având ca dielectric aerul, terminat pe impedanța lui caracteristică. Se ştie că în cazul aerului intensitatea câmpului electric maxim admisibilă este de $E_{0str} = 30\,\text{kV/cm}$ şi se admite un coeficient de siguranță $C = 0{,}2$.

Rezolvare:

Notând cu E_0 intensitatea maximă a câmpului electric (de la suprafața conductorului interior) rezultă:



$$U = \int_A^B \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_r^R E_0 \frac{r}{\rho} d\rho = rE_0 \ln\frac{R}{r}.$$

Dar:

$$P = \frac{|U|^2}{2Z_C},$$

unde

$$Z_C = 60\ln\frac{R}{r}\ \Omega .$$

În consecință

$$P = \frac{r^2\left|E_0\right|^2\ln^2\dfrac{R}{r}}{2\cdot 60\cdot\ln\dfrac{R}{r}} = \frac{r^2\left|E_0\right|^2\ln\dfrac{R}{r}}{120}\ \text{W}$$

iar dacă se introduce coeficientul de siguranță C rezultă valoarea puterii maxime transmisibile prin cablul coaxial în condițiile date:

$$P_{\max,\mathrm{tr}} = C\cdot\frac{r^2E_{0,str}^2\ln\dfrac{R}{r}}{120} = 0,2\cdot\frac{10^{-6}\cdot\left(3\cdot 10^6\right)^2\cdot\ln 2,72}{120} = 15\,\text{kW} .$$

1.19 Să se calculeze puterea maximă transmisibilă printr-un cablu coaxial cu dimensiunile $R = 2,72\,\text{mm}$, $r = 1\,\text{mm}$, având ca dielectric aerul, dacă impedanța lui terminală este $Z_S = (90 + \mathrm{j}60)\Omega$.

Se consideră, ca şi în cazul problemei precedente, intensitatea câmpului electric de străpungere a aerului $E_{0str} = 30\,\text{kV/cm}$ şi se admite un coeficient de siguranță $C = 0,2$.

<u>Rezolvare:</u>

În cazul unui cablu coaxial, fără pierderi, dezadaptat, puterea transmisă sarcinii are expresia

$$P_S = P_d - P_i = \frac{\left|U_d\right|^2}{2Z_C} - \frac{\left|U_i\right|^2}{2Z_C} ,$$

iar raportul de undă staționară este

$$\sigma = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} = \frac{|U_d| + |U_i|}{|U_d| - |U_i|}$$

deci

$$P_S = \frac{1}{2Z_C}\left(|U_d| - |U_i|\right)\left(|U_d| + |U_i|\right) = \frac{|U|_{\max}^2}{2Z_C\sigma}$$

Comparând cu cablul terminat adaptat, (vezi problema 1.18), se constată că puterea maximă transmisibilă scade de σ ori.

Cu datele problemei, impedanța caracteristică a cablului coaxial are valoarea:

$$Z_C = 60\ln\frac{R}{r} = 60\ln 2,72 \cong 60\,\Omega$$

iar impedanța normată de sarcină este:

$$z_S = \frac{Z_S}{Z_C} = \frac{90 + \mathrm{j}60}{60} = 1,5 + \mathrm{j}$$

astfel încât coeficientul de reflexie al tensiunii la sarcină

$$\Gamma = \frac{z_S - 1}{z_S + 1} = \frac{0,5 + \mathrm{j}}{2,5 + \mathrm{j}} = \frac{1 + \mathrm{j}2}{5 + \mathrm{j}2} = 0,415\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0,727\,\mathrm{rad}} .$$

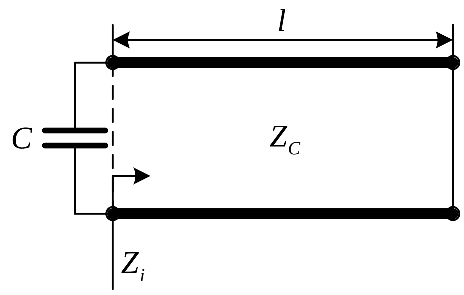
Rezultă de aici valoarea lui σ :

$$\sigma = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+0,415}{1-0,415} \cong 2,42 .$$

Cablul fiind identic cu cel din problema anterioară, se deduce:

$$P_{\text{max,transm.}} = \frac{\left(P_{\text{max,transm.}}\right)_{\text{adaptare}}}{\sigma} = \frac{15 \cdot 10^3}{2,42} = 6,2\,\text{kW} .$$

1.20 Ce capacitate trebuie să aibă un condensator conectat la un capăt al unei linii fără pierderi de lungime $l = 3\,\text{cm}$ pentru ca linia terminată în scurtcircuit la celălalt capăt să rezoneze la frecvența de $1\,\text{GHz}$? Impedanța caracteristică a liniei este $Z_C = 50\,\Omega$ iar dielectricul acesteia are o permitivitate electrică relativă $\varepsilon_r = 4$.



Rezolvare:

Impedanța de intrare în tronsonul cu lungimea l, terminat în scurtcircuit, are expresia:

$$Z_i = \text{j}Z_C \,\text{tg}\,\beta l ,$$

și cum

$$\beta l = 2\pi \frac{l}{\lambda} = 2\pi \frac{lf\sqrt{\varepsilon_r}}{c_0} = 2\pi \frac{0,03 \cdot 10^9 \cdot 2}{3 \cdot 10^8} = 0,4\pi\,\text{rad}$$

rezultă:

$$Z_i = \text{j}50 \cdot \text{tg}(0,4\pi) = \text{j}154\,\Omega .$$

Condiția de rezonanță este:

$$X_C + X_i = 0,$$

de unde

$$X_C = -X_i = -\frac{1}{\omega C}.$$

Se obține astfel capacitatea condensatorului:

$$C = \frac{1}{\omega X_i} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 154} \approx 10^{-12}\,\text{F} = 1\,\text{pF} .$$

1.21 Un emițător transmite semnalul antenei prin intermediul unei linii având constanta de atenuare $\alpha = 0,0434\,\text{dB/m}$ și lungimea de $10\,\text{m}$. Știind că raportul de undă staționară pe linie este $\sigma = 1,25$ și că puterea medie activă în antenă este de $100\,\text{W}$, să se calculeze puterea debitată de emițător.

Rezolvare:

Randamentul unei linii de transmisiune are expresia:

$$\eta = \frac{1-|\Gamma|^2}{e^{2\alpha l}-|\Gamma|^2 e^{-2\alpha l}},$$

unde Γ reprezintă coeficientul de reflexie al sarcinii iar l este lungimea liniei având constanta de atenuare α.

Pentru datele numerice ale problemei, se obține:

$$\alpha l = 0{,}0434 \cdot \frac{1}{8{,}686} \cdot 10 = 0{,}05\,\mathrm{Np/m} << 1,$$

fapt ce permite folosirea aproximației:

$$e^{\pm 2\alpha l} \cong 1 \pm 2\alpha l.$$

Din expresia raportului de undă staționară pe o linie se deduce

$$|\Gamma| = \frac{\sigma-1}{\sigma+1},$$

astfel încât se poate scrie:

$$\eta \cong \frac{1-|\Gamma|^2}{1+2\alpha l-|\Gamma|^2(1-2\alpha l)} = \frac{4\sigma}{4\sigma+2\alpha l\left(2\sigma^2+2\right)} = \frac{1}{1+\alpha l\left(\alpha+\frac{1}{\sigma}\right)}.$$

Din definiția randamentului:

$$\eta = \frac{P_{\text{ant}}}{P_{\text{em}}},$$

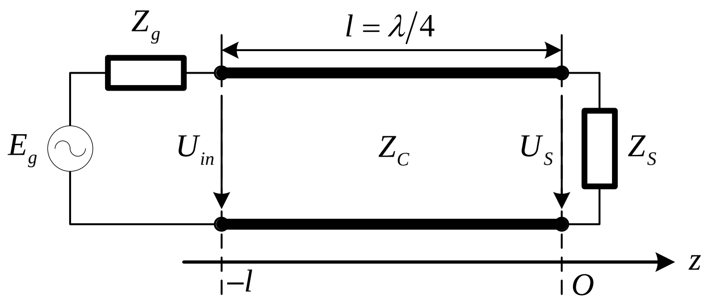
unde P_{ant} este puterea livrată antenei, iar P_{em} este puterea debitată de emițător, rezultă:

$$P_{\text{em}} = \frac{P_{\text{ant}}}{\eta} \cong \left[1+\alpha l\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)\right]P_{\text{ant}},$$

de unde, cu datele problemei se obținea valoarea cerută:

$$P_{em} \cong \left[1+\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{5}{4}+\frac{4}{5}\right)\right]\cdot 100 = 110\,\mathrm{W}.$$

1.22 Să se calculeze impedanța caracteristică şi randamentul unui tronson de cablu coaxial de lungime $\lambda/4$ folosit pentru adaptarea unei sarcini $Z_S = 10\,\Omega$ la un generator având impedanța internă pur rezistivă, $Z_g = 250\,\Omega$. Constanta de atenuare a cablului este $\alpha = 1\,\mathrm{dB/m}$, iar lungimea de undă $\lambda = 20\,\mathrm{cm}$.



Rezolvare:

Condiția de adaptare este:

$$Z_g = Z_{in},$$

unde Z_{in} este impedanța de intrare a liniei cu pierderi,

$$Z_{in} = Z_C \frac{Z_S + Z_C \operatorname{th} \gamma l}{Z_C + Z_S \operatorname{th} \gamma l}.$$

Pentru un tronson inversor ($l = \lambda/4$) se obține $\beta l = \pi/2$, deci

$$\operatorname{th} \gamma l = \lim_{\beta l \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{th}(\alpha l + \mathrm{j}\beta l) = \lim_{\beta l \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{th} \alpha l + \mathrm{j} \operatorname{tg} \beta l}{1 + \mathrm{j} \operatorname{th} \alpha l \cdot \operatorname{tg} \beta l} = \frac{1}{\operatorname{th} \alpha l},$$

astfel încât condiția de adaptare conduce la:

$$Z_g = Z_C \frac{Z_S \operatorname{th} \alpha l + Z_C}{Z_C \operatorname{th} \alpha l + Z_S},$$

de unde rezultă ecuația:

$$Z_C^2 - \left(Z_g - Z_S\right) Z_C \operatorname{th} \alpha l - Z_g Z_S = 0,$$

cu soluțiile

$$Z_C = \frac{\left(Z_g - Z_S\right) \operatorname{th} \alpha l \pm \sqrt{\left(Z_g - Z_S\right)^2 \operatorname{th}^2 \alpha l + 4 Z_g Z_S}}{2}.$$

Valoarea pozitivă a impedanței caracteristice poate fi scrisă sub forma:

$$Z_C = \sqrt{Z_g Z_S} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{Z_g}{Z_S}} - \sqrt{\frac{Z_S}{Z_g}} \right) \operatorname{th} \alpha l + \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{Z_g}{Z_S}} - \sqrt{\frac{Z_S}{Z_g}} \right) \operatorname{th} \alpha l \right]^2} \right\}$$

sau, cu notația $r = Z_g / Z_S$:

$$Z_C = \sqrt{Z_g Z_S} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \operatorname{th} \alpha l + \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \operatorname{th} \alpha l \right]^2} \right\}.$$

Pentru un tronson inversor, fără pierderi, ($\alpha = 0$), se regăsește expresia impedanței caracteristice ca medie geometrică a impedanțelor sale terminale:

$$Z_C = \sqrt{Z_g Z_S}.$$

Dacă linia are pierderi mici iar R_g și R_S nu diferă prea mult, astfel încât $\sqrt{r}$ să nu fie mult diferit de 1, se poate scrie:

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \operatorname{th} \alpha l << 1$$

și de aici rezultă:

$$Z_C \cong \sqrt{Z_g Z_S} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \operatorname{th} \alpha l \right].$$

Cu datele problemei atenuarea tronsonului are valoarea:

$$\alpha l = 0{,}115 \frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{0{,}2}{4} \mathrm{m} = 5{,}75 \cdot 10^{-3} \mathrm{Np},$$

și deci

$$\mathrm{th}\,\alpha l = \mathrm{th}\left(5{,}75\cdot 10^{-3}\right) \cong 5{,}75\cdot 10^{-3} = \alpha l .$$

Astfel, se obține:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{r}-\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\mathrm{th}\alpha l \cong \frac{1}{2}\left(\sqrt{r}-\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\alpha l = \frac{1}{2}\left(5-\frac{1}{5}\right)5{,}75\cdot 10^{-3} = 1{,}38\cdot 10^{-2} << 1 ,$$

astfel încât, pe baza relației aproximative, rezultă valoarea impedanței caracteristice:

$$Z_C \cong \sqrt{2500}\left(1+1{,}38\cdot 10^{-2}\right) = 50{,}69\,\Omega \ .$$

Observație: Rezultatul calculat prin aproximare diferă foarte puțin de valoarea $Z_C = \sqrt{Z_S Z_g} = 50\,\Omega$ rezultată în urma neglijării pierderilor.

Puterea reală medie (puterea activă) pe o impedanță complexă Z la bornele căreia tensiunea are amplitudinea U, este dată relația:

$$P_{\mathrm{mr}} = \frac{1}{2}\frac{|U|^2}{|Z|^2}\cdot \mathrm{Re}\{Z\},$$

astfel încât expresia randamentului tronsonului de adaptare devine:

$$\eta = \frac{P_S}{P_{in}} = \frac{|U_S|^2}{|U_{in}|^2}\frac{|Z_{in}|^2}{Z_S\,\mathrm{Re}\{Z_{in}\}}$$

Se calculează:

$$\frac{U_S}{U_{in}} = \frac{U(z)\big|_{z=0}}{U(z)\big|_{z=-l}} = \frac{U_d(0)+U_i(0)}{U_d(0)\mathrm{e}^{\gamma l}+U_i(0)\mathrm{e}^{-\gamma l}} = \frac{1+\Gamma}{\mathrm{e}^{\gamma l}+\Gamma\,\mathrm{e}^{-\gamma l}} ,$$

unde Γ este coeficientul de reflexie al tensiunii la sarcină,

$$\Gamma = \frac{U_i(0)}{U_d(0)} = \frac{Z_S - Z_C}{Z_S + Z_C} = \frac{z_S - 1}{z_S + 1},$$

iar $z_S = Z_S / Z_C$ reprezintă impedanța normată de sarcină.

În cazul problemei, $l = \lambda/4$, astfel încât

$$\mathrm{e}^{\pm\gamma l} = \mathrm{e}^{\pm\alpha l}\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \pm \mathrm{j}\mathrm{e}^{\pm\alpha l}$$

şi, prin urmare,

$$\left|\frac{U_S}{U_{in}}\right|^2 = \left|\frac{2z_S}{\mathrm{j}(z_S+1)\mathrm{e}^{\alpha l} - \mathrm{j}(z_S-1)\mathrm{e}^{-\alpha l}}\right|^2 = \left(\frac{z_S}{z_S\,\mathrm{sh}\,\alpha l + \mathrm{ch}\,\alpha l}\right)^2 .$$

De asemenea,

$$\frac{\mathrm{Re}\{Z_{in}\}}{\mathrm{Re}\{Z_S\}} = \frac{Z_{in}}{Z_S} = \frac{Z_C}{Z_S}\cdot\frac{Z_S\,\mathrm{th}\,\alpha l + Z_C}{Z_C\,\mathrm{th}\,\alpha l + Z_S} = \frac{\mathrm{th}\,\alpha l + 1/z_S}{\mathrm{th}\,\alpha l + z_S} .$$

Randamentul poate fi astfel scris şi sub următoarea formă:

$$\eta = \frac{1}{\left(\mathrm{th}\,\alpha l + 1/z_S\right)^2 \mathrm{ch}^2\,\alpha l}\cdot\frac{\mathrm{th}\,\alpha l + 1/z_S}{\mathrm{th}\,\alpha l + z_S} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\alpha l}\cdot\frac{1}{1+\left(z_S + \dfrac{1}{z_S}\right)\mathrm{th}\,\alpha l + \mathrm{th}^2\,\alpha l} .$$

În cazul liniei cu pierderi mici $\alpha l << 1$ astfel încât, în final, rezultă:

$$\eta \cong \frac{1}{1+\frac{(\alpha l)^2}{2}} \cdot \frac{1}{1+\left(z_S+\frac{1}{z_S}\right)\left(\alpha l-\frac{(\alpha l)^2}{3}\right)+\left(\alpha l-\frac{(\alpha l)^2}{3}\right)^2},$$

adică

$$\eta \cong \frac{1}{1+\left(z_S+\frac{1}{z_S}\right)\alpha l}.$$

Cu datele numerice ale problemei,

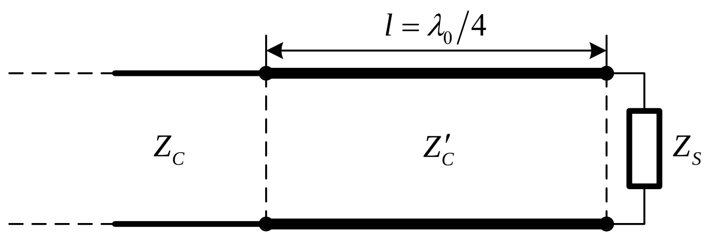
$\alpha l = 5{,}75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Np} << 1$,

$z_S = Z_S / Z_C = 10/50{,}69 = 0{,}197$

şi astfel se obţine valoarea randamentului:

$\eta = 97{,}1\%$.

1.23 Un cablu coaxial având pierderi neglijabile şi lungimea $\lambda/4$ este folosit pentru adaptarea unei impedanţe de sarcină rezistivă $Z_S = 25\Omega$ la o linie de acces având impedanţa caracteristică $Z_C = 100\Omega$. Considerând pentru factorul de undă staţionară pe linia de acces o valoare maxim admisibilă $\sigma_{\max} = 1{,}1$, să se determine banda de frecvenţe a acestui circuit de adaptare calculat pentru o frecvenţă centrală $f_0 = 1\mathrm{GHz}$.



__Rezolvare:__

Condiţia de adaptare la frecvenţa centrală f_0 este:

$$Z_C' = \sqrt{Z_C Z_S} = \sqrt{100 \cdot 25} = 50\Omega.$$

Impedanţa de intrare în tronsonul de adaptare are expresia:

$$Z_i = Z_C' \frac{Z_S + \mathrm{j}Z_C' \operatorname{tg}\beta l}{Z_C' + \mathrm{j}Z_S \operatorname{tg}\beta l}.$$

În vecinătatea frecvenţei f_0 se poate scrie:

$$\beta l = (\beta_0 + \Delta\beta) l = \beta_0 l + \frac{\Delta\beta}{\beta_0}\beta_0 l = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right),$$

de unde admiţând condiţia $\left|\frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right| << 1$, rezultă:

$$\operatorname{tg}\beta l = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\beta}{\beta_0} \cong -\frac{2}{\pi}\frac{\beta_0}{\Delta\beta}.$$

Notând $x=\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\beta}{\beta_0}$, în vecinătatea frecvenței nominale f_0, expresia impedanței de intrare a tronsonului devine:

$$Z_i=Z'_C\frac{Z_S-\mathrm{j}Z'_C\frac{1}{x}}{Z'_C-\mathrm{j}Z_S\frac{1}{x}}=Z'_C\frac{1+\mathrm{j}z_S x}{z_S\left(1+\mathrm{j}\frac{1}{z_S}x\right)}=Z_C\frac{1+\mathrm{j}z_S x}{1+\mathrm{j}\frac{1}{z_S}x},$$

unde

$$z_S=\frac{Z_S}{Z'_C}=\sqrt{\frac{Z_S}{Z_C}}=\frac{1}{2}\ .$$

Deoarece $|x|<<1$, se poate scrie:

$$Z_i\cong Z_C\left[1+\mathrm{j}\left(z_S-\frac{1}{z_S}\right)x\right].$$

În aceste condiții, coeficientul de reflexie calculat la intrarea tronsonului are expresia:

$$\Gamma=\frac{Z_i-Z_C}{Z_i+Z_C}=\frac{\mathrm{j}\left(z_S-\frac{1}{z_S}\right)x}{2+\mathrm{j}\left(z_S-\frac{1}{z_S}\right)x}\cong\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(z_S-\frac{1}{z_S}\right)x\,,$$

iar raportul de undă staționară pe linie are expresia:

$$\sigma=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}\cong 1+2|\Gamma|=1+\left|z_S-\frac{1}{z_S}\right|\cdot|x|\,.$$

De aici, pentru o valoare dată a lui $\sigma_{\max}$, rezultă:

$$|x|_{\max}=\frac{\pi}{2}\left|\frac{\Delta\beta}{\beta_0}\right|_{\max}=\frac{\pi}{2}\left|\frac{\Delta f}{f_0}\right|_{\max}=\frac{\sigma_{\max}-1}{\left|z_S-\frac{1}{z_S}\right|}\,.$$

Cu datele numerice ale problemei, se obține:

$$\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)_{\max}=\frac{1{,}1-1}{\left|\frac{1}{2}-2\right|}\cdot\frac{2}{\pi}=0{,}042\,,$$

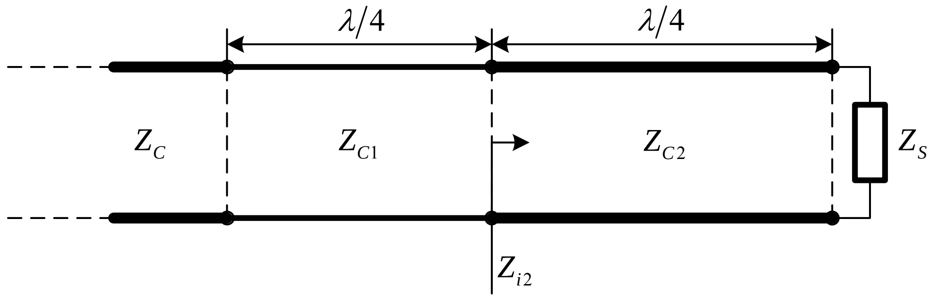
şi deci

$$B=2(\Delta f)_{\max}\cdot f_0=2\cdot 0{,}042\cdot 10^9=84\cdot 10^6\ \mathrm{Hz}=84\mathrm{MHz}.$$

1.24 Pentru a mări banda de frecvențe în care se obține adaptarea unei sarcini, se pot folosi circuite de adaptare compuse din mai multe tronsoane de linie de lungime $\lambda/4$, cu impedanțe caracteristice diferite, conectate în cascadă.

Să se calculeze banda de frecvențe în care are loc adaptarea (admițând $\sigma_{\max}=1{,}1$) dacă pentru a adapta o sarcină cu impedanța $Z_S=25\Omega$ la impedanța caracteristică a liniei de acces, $Z_C=100\Omega$. se folosesc două tronsoane de lungime $\lambda/4$. Frecvența centrală este $f_0=1\mathrm{GHz}$.

Să se compare răspunsul cu cel de la problema precedentă.



Rezolvare:

La frecvența f_0, notând $Z_{i2} = Z_0$, condițiile de adaptare sunt:

$$Z_{C1} = \sqrt{Z_C Z_0}$$

$$Z_{C2} = \sqrt{Z_0 Z_S}\ .$$

Se introduc parametrii

$$r = Z_S/Z_C = \left(Z_{C2}/Z_{C1}\right)^2$$

şi

$$k = Z_S/Z_{C2}\ ;$$

se exprimă Z_S, Z_C, Z_{C1}, Z_{C2} în funcție de Z_0, k, r.

Din relațiile

$$Z_{C2} = \sqrt{Z_0 Z_S},$$

$$kZ_{C2} = Z_S,$$

rezultă

$$Z_S = k^2 Z_0,$$

$$Z_{C2} = kZ_0.$$

Se obțin imediat:

$$Z_{C1} = \frac{Z_{C2}}{\sqrt{r}} = \frac{kZ_0}{\sqrt{r}},$$

$$Z_C = \frac{Z_{C1}^2}{Z_0} = \frac{k^2 Z_0}{r}.$$

Pentru frecvențe puțin diferite de frecvența centrală f_0 la care $l = \lambda/4$, impedanța de intrare a tronsonului de linie terminat pe sarcina Z_S este (vezi problema precedentă)

$$Z_{i2} = Z_{C2}\frac{Z_S - \mathrm{j}Z_{C2}\dfrac{1}{x}}{Z_{C2} - \mathrm{j}Z_S\dfrac{1}{x}} = kZ_0\frac{k - \mathrm{j}\dfrac{1}{x}}{1 - \mathrm{j}\dfrac{k}{x}} = Z_0\frac{1 + \mathrm{j}kx}{1 + \mathrm{j}\dfrac{x}{k}}.$$

Impedanța de intrare a tronsonului de impedanță caracteristică Z_{C1} are expresia:

$$Z_{i1} = Z_{C1}\frac{Z_{i2} - \mathrm{j}Z_{C1}\cdot\frac{1}{x}}{Z_{C1} - \mathrm{j}Z_{i2}\cdot\frac{1}{x}} = Z_{C1}\frac{\frac{Z_{i2}}{Z_{C1}} - \mathrm{j}\frac{1}{x}}{1 - \mathrm{j}\frac{Z_{i2}}{Z_{C1}}\cdot\frac{1}{x}}.$$

Întrucât

$$\frac{Z_{i2}}{Z_{C1}} = \frac{\sqrt{r}}{k}\cdot\frac{1+\mathrm{j}kx}{1+\mathrm{j}\frac{x}{k}},$$

se scrie:

$$Z_{i1} = \frac{k}{\sqrt{r}}Z_0\frac{\frac{\sqrt{r}}{k}\cdot\frac{1+\mathrm{j}kx}{1+\mathrm{j}\frac{x}{k}} - \mathrm{j}\frac{1}{x}}{1 - \mathrm{j}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{r}}{k}\cdot\frac{1+\mathrm{j}kx}{1+\mathrm{j}\frac{x}{k}}} = Z_0\frac{k}{\sqrt{r}}\cdot\frac{k\left(1+\mathrm{j}\frac{x}{k} + \mathrm{j}x\sqrt{r}(1+\mathrm{j}kx)\right)}{\sqrt{r}(1+\mathrm{j}kx) + \mathrm{j}kx\left(1+\mathrm{j}\frac{x}{k}\right)},$$

$$Z_{i1} = Z_0\frac{k}{\sqrt{r}}\cdot\frac{k\left(1-x^2\sqrt{r}\right)+\mathrm{j}\left(1+\sqrt{r}\right)x}{\sqrt{r}-x^2+\mathrm{j}k\left(1+\sqrt{r}\right)x}.$$

Încercând soluția ca Z_{i1} să nu depindă de x, rezultă egalitățile:

$$\frac{-k\sqrt{r}}{-1} = \frac{\mathrm{j}\left(1+\sqrt{r}\right)}{\mathrm{j}k\left(1+\sqrt{r}\right)} = \frac{k}{\sqrt{r}},$$

îndeplinite numai pentru $r = 1$, $k = \pm 1$. Rezultatul nu prezintă interes deoarece conduce la $Z_S = Z_C$, caz în care circuitul de adaptare devine inutil.

Coeficientul de reflexie la intrare este

$$\Gamma = \frac{Z_{i1} - Z_C}{Z_{i1} + Z_C} = \frac{Z_{i1}/Z_C - 1}{Z_{i1}/Z_C + 1},$$

$$\frac{Z_{i1}}{Z_C} = \frac{1 - x^2\sqrt{r} + \mathrm{j}\frac{1}{k}\left(1+\sqrt{r}\right)x}{1 - \frac{1}{\sqrt{r}}\cdot x^2 + \mathrm{j}\frac{k}{\sqrt{r}}\left(1+\sqrt{r}\right)x}.$$

Se obține

$$\Gamma = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r}\right)x^2 + \mathrm{j}\left(1+\sqrt{r}\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{\sqrt{r}}\right)x}{2 - \left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right)x^2 + \mathrm{j}\left(1+\sqrt{r}\right)\left(\frac{1}{k} + \frac{k}{\sqrt{r}}\right)x}.$$

Pentru o valoare dată a lui r se urmărește minimizarea modulului coeficientului de reflexie la variația lui k. În acest scop, derivând $|\Gamma|$ în raport cu k şi deoarece $|x| << 1$, rezultă condiția:

$$\frac{1}{k} - \frac{k}{\sqrt{r}} = 0,$$

deci

$$k = \sqrt[4]{r},$$

ceea ce conduce la alegerea optimă $Z_0 = \sqrt{Z_C Z_S}$.

Pentru această alegere, rezultă:

$$|\Gamma| \cong \frac{\left|\dfrac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r}\right| x^2}{2\sqrt{1 + \left(2 + \sqrt{r} + \dfrac{1}{\sqrt{r}}\right) x^2}} \cong \frac{x^2}{2} \cdot \left|\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}}\right| .$$

De aici se poate calcula raportul de undă staționară pe linia de acces:

$$\sigma = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \cong 1 + 2|\Gamma| = 1 + \left|\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}}\right| x^2.$$

Ținând seama de expresia lui x, rezultă:

$$\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)_{\max} = \left(\frac{\Delta \beta}{\beta_0}\right)_{\max} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{\max} - 1}{\left|\sqrt{r} - 1/\sqrt{r}\right|}} ,$$

sau, numeric,

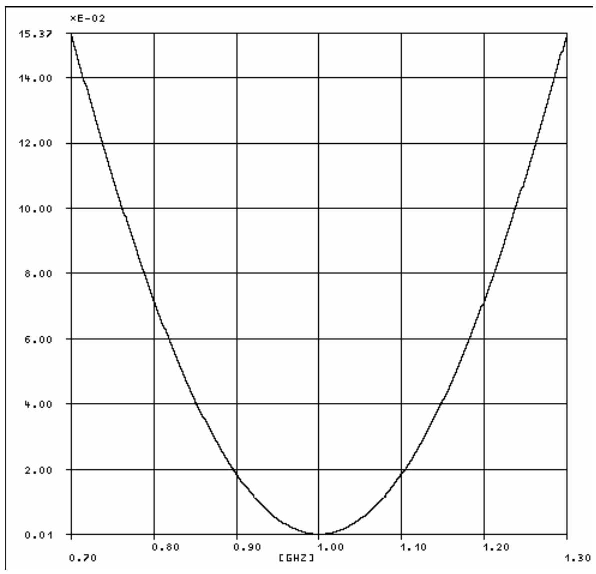
$$\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)_{\max} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1{,}1 - 1}{|2 - 0{,}5|}} = 0{,}16437 .$$

Se obține astfel lărgimea benzii

$$B = 2 \cdot (\Delta f)_{\max} \cdot f_0 = 328{,}75\,\text{MHz},$$

banda obținută fiind de aproape 4 ori mai mare decât în situația analizată în problema precedentă.

Variația cu frecvența a modulului coeficientului de reflexie pe linia de acces, obținută prin simulare pe calculator, este prezentată în figura de mai jos.



Se constată că, într-adevăr, corespunzător unei valori

$$|\Gamma| = \frac{\sigma_{\max} - 1}{\sigma_{\max} + 1} = \frac{1{,}1 - 1}{1{,}1 + 1} = 0{,}047 ,$$

banda circuitului de adaptare considerat este $B_{\mathrm{sim}} \cong 329\,\mathrm{MHz}$, ceea ce confirmă rezultatul obținut pe cale analitică.

1.25 Într-un cablu coaxial se folosesc discuri dintr-un material dielectric pentru susținerea conductorului central. Aceste discuri au grosimea $d = 3\,\mathrm{mm}$ şi sunt fixate la o distanță $D = 2\,\mathrm{cm}$ unul de altul. Ştiind că dielectricul are permitivitatea electrică $\varepsilon_r = 4$ şi pierderi neglijabile, să se calculeze constanta de defazare şi lungimea de undă la frecvența $f = 300\,\mathrm{MHz}$.

<u>Rezolvare:</u>

Se exprimă succesiv:

- capacitatea suplimentară datorită prezenței unui disc:

$$C_{\sup l} = C_L d(\varepsilon_r - 1),$$

unde C_L este capacitatea lineică a liniei în absența discurilor;

- numărul de discuri pe unitatea de lungime:

$$N = 1/D\ ;$$

- capacitatea suplimentară totală pe unitatea de lungime:

$$C_{L\sup l} = C_{\sup l} N = C_L\left[\frac{d}{D}(\varepsilon_r - 1) + 1\right];$$

- capacitatea lineică în prezența discurilor:

$$C_L^{'} = C_L + C_{L\sup l} = C_L\left[\frac{d}{D}(\varepsilon_r - 1) + 1\right].$$

În situația în care lungimea de undă este mult mai mare decât distanța dintre discuri se poate considera că linia are un dielectric omogen, a cărui permitivitate electrică rezultă din relația:

$$\varepsilon_{rech} = C_L^{'}/C_L\ .$$

Se obține astfel:

$$\varepsilon_{rech} = 1 + \frac{d}{D}(\varepsilon_r - 1) = 1 + \frac{3}{20}\cdot 3 = 1{,}45.$$

Lungimea de undă în acest cablu este:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{rech}}} = \frac{c_0}{f\sqrt{\varepsilon_{rech}}} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^8\cdot\sqrt{1{,}45}} = 0{,}83\,\mathrm{m} = 83\,\mathrm{cm},$$

deci ipoteza $\lambda >> d$ este pe deplin justificată, iar

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_{rech}}}{c_0} = 7{,}566\,\mathrm{rad/m}\ .$$

2

GHIDURI UNIFORME

2.1 Să se determine funcțiile de distribuție transversală ale componentelor câmpului electromagnetic pentru modul de propagare E_{21} în ghidul metalic uniform de secțiune dreptunghiulară. Folosind rezultatele obținute, să se reprezinte liniile de câmp electric şi magnetic.

Rezolvare:

Sistemul de coordonate potrivit pentru studiul acestui ghid este sistemul cartezian. Componenta axială E_z se obține din ecuația membranei cu condiția la limită corespunzătoare:

$$E_{z_{mn}}(x,y) = E_0 \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y$$

Pentru modul E_{21},

$$E_{z_{21}}(x,y) = E_0 \sin\frac{2\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{b}y$$

Componentele transversale se obțin din componenta axială cu relațiile de legătură:

$$\mathbf{E}_T = -\frac{\gamma}{k^2}\nabla_T E_z + \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k^2}\left(\mathbf{e}_z \times \nabla_T H_z\right),$$

$$\mathbf{H}_T = -\frac{\gamma}{k^2}\nabla_T H_z - \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k^2}\left(\mathbf{e}_z \times \nabla_T E_z\right),$$

unde $k^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$, iar $\nabla_T = \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial y}$.

Ținând cont că $H_z = 0,$ se obțin expresiile:

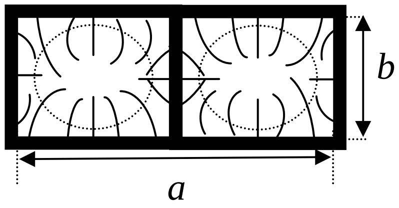
$$E_x = -\frac{\gamma}{k^2}E_0\frac{2\pi}{a}\cos\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y,$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{k^2}E_0\frac{\pi}{b}\sin\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y,$$

$$H_x = \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k^2}E_0\frac{\pi}{b}\sin\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y,$$

$$H_y = -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k^2}E_0\frac{2\pi}{a}\cos\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y.$$

Cu ajutorul lor se reprezintă liniile de câmp electric şi magnetic.



2.2 Să se determine viteza de fază şi viteza de grup ale unei unde H_{10} care se propagă într-un ghid metalic uniform, de secțiune dreptunghiulară, umplut cu un dielectric având permitivitatea electrică relativă $\varepsilon_r = 4$, la frecvența $f = 9\,\text{GHz}$. Dimensiunile transversale ale ghidului sunt $a = 1{,}5\,\text{cm}$, $b = 0{,}75\,\text{cm}$.

Rezolvare:

Pentru modul H_{10} în ghidul dreptunghiular $\lambda_c = 2a = 3\,\text{cm}$. Ca urmare, frecvența critică corespunzătoare modului de propagare are valoarea

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{c_0}{\lambda_C\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{0{,}03\cdot\sqrt{4}} = 5\cdot 10^9\ \text{Hz} = 5\,\text{GHz}$$

de unde se obține $f_c/f = 5/9$.

Viteza de fază este:

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta_g} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(f_c/f\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1-\left(f_c/f\right)^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{4}\sqrt{1-(5/9)^2}} = 1{,}8\cdot 10^8\ \text{m/s}.$$

Viteza de grup este:

$$v_g = \frac{1}{\frac{d\beta_g}{d\omega}} = c\sqrt{1-\left(f_c/f\right)^2} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{1-\left(f_c/f\right)^2} = 1{,}25\cdot 10^8\ \text{m/s}.$$

2.3 Să se calculeze constanta de defazare şi lungimea de undă ale modului H_{10} care se propagă la frecvența $f = 6\,\text{GHz}$ printr-un ghid metalic uniform având secțiunea dreptunghiulară cu $a = 2\,\text{cm}$, $b = 1\,\text{cm}$. Ghidul este umplut cu un dielectric fără pierderi având $\varepsilon_r = 4$.

Rezolvare:

Lungimea de undă critică corespunzătoare modului de propagare H_{10} în ghidul de undă dreptunghiular are valoarea:

$$\lambda_c = 2a = 4\,\text{cm}.$$

Rezultă frecvența critică,

$$f_c = \frac{c_d}{\lambda_c} = \frac{c_0}{\lambda_c\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{0{,}04\sqrt{4}} = 0{,}375\cdot 10^{10}\ \text{Hz} = 3{,}75\,\text{GHz},$$

şi lungimea de undă pe ghid,

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}} = \frac{c_0}{f\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{6\cdot 10^9\sqrt{4}\sqrt{1-(3{,}75/6)^2}} =$$
$$= 0{,}032\,\text{m} = 3{,}2\,\text{cm}.$$

Se obține astfel valoarea constantei de defazare:

$$\beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi}{3{,}2\cdot 10^{-2}} = 196\ \text{rad/m}.$$

Observație: Constanta de defazare mai poate fi calculată şi cu relația

$$\beta_g = \beta\sqrt{1-(f_c/f)^2} = (2\pi/\lambda)\sqrt{1-(f_c/f)^2},$$

unde

$$\lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r} = c_0/f\sqrt{\varepsilon_r} = 3\cdot 10^8/6\cdot 10^9\sqrt{4} = 0{,}025\,\text{m} = 2{,}5\,\text{cm}.$$

Rezultă astfel valoarea constantei de defazare,

$$\beta_g = (2\pi/0{,}025)\sqrt{1-(3{,}75/6)^2} = 196\,\text{rad/m}.$$

2.4 Să se calculeze lungimile de undă $\lambda_{g_{mn}}$ şi vitezele de fază $v_{\varphi_{mn}}$ pentru toate modurile E_{mn} care se pot propaga într-un ghid metalic uniform de secțiune dreptunghiulară, cu dielectric aerul, având dimensiunile $a = 6\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, la frecvența $f = 7{,}5\,\text{GHz}$.

Rezolvare:

În ghidul dreptunghiular, frecvența critică corespunzătoare unui mod de propagare având indicii (m, n), este dată de expresia:

$$f_{c_{mn}} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{c_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}.$$

Pentru modurile E, $m > 0$ şi $n > 0$, astfel încât frecvențele critice sunt:

$$E_{11}:\ f_{c_{11}} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\sqrt{\frac{1}{0{,}06^2}+\frac{1}{0{,}03^2}} = 5{,}59\cdot 10^9\ \text{Hz} = 5{,}59\,\text{GHz} < f$$

$$E_{21}:\ f_{c_{21}} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\sqrt{\frac{4}{0{,}06^2}+\frac{1}{0{,}03^2}} = 7{,}07\cdot 10^9\ \text{Hz} = 7{,}07\,\text{GHz} < f$$

$$E_{12}:\ f_{c_{12}} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\sqrt{\frac{1}{0{,}06^2}+\frac{4}{0{,}03^2}} = 10{,}3\cdot 10^9\ \text{Hz} = 10{,}3\,\text{GHz} > f$$

Deci dintre modurile E_{mn} se propagă numai E_{11} şi E_{21}.

Se calculează, pe rând:

- lungimea de undă în spațiul liber,

  $\lambda_0 = c_0/f = 3\cdot 10^8/7{,}5\cdot 10^9 = 0{,}04\,\text{m} = 4\,\text{cm}$

- lungimea de undă în ghid corespunzătoare modului E_{11} de propagare,

$$\lambda_{g_{11}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_{c_{11}}/f)^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-(5{,}59/7{,}5)^2}} = 6\,\text{cm}$$

- viteza de fază corespunzătoare aceluiaşi mod,

$v_{\varphi_{11}} = f \cdot \lambda_{g_{11}} = 7{,}5 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-2} = 4{,}5 \cdot 10^8 \ \mathrm{m/s}$

- lungimea de undă în ghid corespunzătoare modului E_{21} de propagare,

$$\lambda_{g_{21}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(f_{c_{21}}/f\right)}} = \frac{4}{\sqrt{1-(7{,}1/7{,}5)^2}} = 12{,}4\,\mathrm{cm}$$

- viteza de fază corespunzătoare modului E_{21},

$v_{\varphi_{21}} = f \cdot \lambda_{g_{21}} = 7{,}5 \cdot 10^9 \cdot 12{,}4 \cdot 10^{-2} = 9{,}3 \cdot 10^8 \ \mathrm{m/s}$.

2.5 Ce valoare are permitivitatea electrică relativă a dielectricului care umple un ghid metalic de secțiune dreptunghiulară, dacă la frecvența $f = 3\,\mathrm{GHz}$ lungimea de undă din ghid pentru modul H_{10} este egală cu lungimea de undă în spațiul liber ? Se cunosc dimensiunile transversale ale ghidului: $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 2\,\mathrm{cm}$.

<u>Rezolvare:</u>

Lungimea de undă în ghid are expresia:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_d}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1-(\lambda_d/\lambda_c)^2}} =$$

$$= \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_c)^2(1/\varepsilon_r)}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r-(\lambda_0/\lambda_c)^2}}.$$

Condiția $\lambda_g = \lambda_0$ conduce la:

$$\sqrt{\varepsilon_r-(\lambda_0/\lambda_c)^2} = 1,$$

adică

$$\varepsilon_r = 1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2.$$

Înlocuind cu datele problemei, se obține:

$$\lambda_c = 2a = 8\,\mathrm{cm}$$

$$\lambda_0 = c_0/f = 3\cdot 10^8/3\cdot 10^9 = 0{,}1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{cm}$$

$$\varepsilon_r = 1 + \left(\frac{10}{8}\right)^2 = 2{,}56.$$

2.6 La frecvența $f = 10\,\mathrm{GHz}$, impedanța de undă a modului H_{11} într-un anumit ghid metalic dreptunghiular cu dielectric aer are valoarea $(Z_u)_{H_{11}} = 394\,\Omega$. Cât este impedanța de undă a modului E_{22} la această frecvență ? Care sunt dimensiunile ghidului (presupunând $a = 2b$) ?

<u>Rezolvare:</u>

Impedanța de undă a modului H_{11} are expresia:

$$\left(Z_u\right)_{H_{11}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1-\left(f_{c_{11}}/f\right)^2}},$$

unde $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi \cong 377\,\Omega$ reprezintă impedanța de undă în spațiul liber.

Rezultă:

$$\frac{f_{c_{11}}}{f} = \sqrt{1-\left(\frac{Z_0}{\left(Z_u\right)_{H_{11}}}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{377}{394}\right)^2} = 0{,}29\,.$$

Pe de altă parte, frecvențele critice ale modurilor E_{mn} şi H_{mn} sunt identice:

$$f_{c_{11}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}},$$

$$f_{c_{22}} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2}\,.$$

Se constată că $f_{c_{22}} = 2f_{c_{11}}$, astfel încât

$$f_{c_{22}}/f = 2\cdot 0{,}29 = 0{,}58\,.$$

Rezultă valoarea impedanței de undă a modului E_{22} la frecvența f :

$$\left(Z_u\right)_{E_{22}} = Z_0\sqrt{1-\left(f_{c_{22}}/f\right)^2} = 377\sqrt{1-0{,}58^2} = 307\,\Omega$$

Deoarece $b = a/2$,

$$f_{c_{11}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{c_0\sqrt{5}}{2a},$$

de unde rezultă

$$a = \frac{c_0\sqrt{5}}{2f_{c_{11}}} = \frac{\lambda_0\sqrt{5}}{2\left(f_{c_{11}}/f\right)}.$$

Ştiind că $\lambda_0 = c_0/f = 3\cdot 10^8/10^{10} = 0{,}03\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{cm}$, se pot obține dimensiunile transversale ale ghidului:

$$a = \frac{0{,}03\sqrt{5}}{2\cdot 0{,}29} = 11{,}56\,\mathrm{cm},$$

$$b = a/2 = 5{,}78\,\mathrm{cm}.$$

2.7 Să se calculeze unghiul de incidență pe pereții laterali al celor două unde plane a căror suprapunere alcătuiesc modul H_{10} care se propagă într-un ghid metalic uniform de secțiune dreptunghiulară cu dielectric aerul, la frecvența $f = 7\mathrm{GHz}$.

Dimensiunile transversale ale ghidului sunt $a = 3{,}5\,\mathrm{cm}$, $b = 1{,}7\,\mathrm{cm}$.

Cât devine acest unghi la frecvența $f' = 4{,}3\,\mathrm{GHz}$?

Rezolvare:

Pentru ghidul şi modul considerat,

$\lambda_c = 2a = 7\,\mathrm{cm}$,

$f_c = c/\lambda_c = 3 \cdot 10^8 / 0{,}07 \approx 4{,}28 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 4{,}28\,\text{GHz}.$

Unghiul de incidență pe pereții laterali este dat de relația:

$$\sin\theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}\ .$$

La $f = 7\,\text{GHz}$ rezultă:

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{4{,}28}{7}\right)^2} = 0{,}79$$

adică

$$\theta = 52{,}3^\circ.$$

La $f' = 4{,}3\,\text{GHz}$ rezultă:

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{4{,}28}{4{,}3}\right)^2} = 0{,}096$$

adică

$$\theta = 5{,}52^\circ.$$

Observație: Apropierea de frecvența critică implică o direcție de propagare a undelor plane componente tot mai depărtată de direcția axială, ceea ce înseamnă că odată cu scăderea frecvenței de lucru, unghiul de incidență al celor două unde plane componente scade şi el, devenind chiar zero la frecvența de tăiere În această situație propagarea devine pur transversală şi deci apare un fel de “rezonanță transversală” în interiorul ghidului, fenomen ce echivalează cu absența oricărei propagări în lungul ghidului.

2.8 Să se calculeze constanta de atenuare pentru modul H_{10} în cazul unui ghid uniform de secțiune dreptunghiulară având ca dielectric aerul şi dimensiunile $a = 2\,\text{cm}$, $b = 1\,\text{cm}$, la frecvența $f = 6\,\text{GHz}$.

<u>Rezolvare:</u>

Pentru ghidul şi modul considerat,

$\lambda_c = 2a = 4\,\text{cm},$

$f_c = c_0/\lambda_c = 3 \cdot 10^8 / 0{,}04 = 7{,}5 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 7{,}5\,\text{GHz}.$

Se constată că $f < f_c$, deci în ghid nu are loc o propagare, ci există doar o oscilație atenuată ($\gamma = \alpha$). Constanta de propagare, reală, are expresia:

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \omega^2 \varepsilon\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2 - 1}$$

Se calculează, pe rând:

$\lambda_0 = c_0/f = 3 \cdot 10^8 / 6 \cdot 10^9 = 0{,}05\,\text{m} = 5\,\text{cm},$

$$\alpha = \gamma = \frac{2\pi}{0{,}05}\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} \cong 94{,}24\,\text{Np/m},$$

sau, echivalent,

$$\alpha[\text{dB/m}] = 8{,}686 \cdot \alpha[\text{Np/m}] = 8{,}686 \cdot 94{,}24 = 818{,}5.$$

2.9 Să se calculeze lungimile de undă ale modurilor care se pot propaga într-un ghid metalic de secțiune circulară având raza $a = 5\,\text{cm}$, la frecvența $f = 3\,\text{GHz}$. Ghidul are ca dielectric aerul.

Rezolvare:

În ghidul circular, frecvențele critice ale modurilor de propagare sunt date de:

$$(f_c)_{E_{mn}} = \frac{c}{2\pi a}\rho_{mn},$$

$$(f_c)_{H_{mn}} = \frac{c}{2\pi a}\rho'_{mn},$$

unde ρ_{mn} este rădăcina a m-a a funcției Bessel de speța 1 şi de indice n, iar ρ'_{mn} este rădăcina a m-a a derivatei acesteia.

Din tabelele de funcții Bessel se extrag, în ordine, primele valori ρ_{mn}, ρ'_{mn} şi se calculează frecvențele critice corespunzătoare:

$$\rho'_{11} = 1{,}84 \qquad (f_c)_{H_{11}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\pi\cdot 0{,}05}\cdot 1{,}84 = 1{,}75\cdot 10^9\ \text{Hz} = 1{,}76\ \text{GHz} < f,$$

$$\rho_{10} = 2{,}40 \qquad (f_c)_{E_{10}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot\pi\cdot 0{,}05}\cdot 2{,}4 = 2{,}29\cdot 10^9\ \text{Hz} = 2{,}29\,\text{GHz} < f,$$

$$\rho'_{12} = 3{,}05 \qquad (f_c)_{H_{12}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\pi\cdot 0{,}05}\cdot 3{,}05 = 2{,}91\cdot 10^9\ \text{Hz} = 2{,}91\,\text{GHz} < f,$$

$$\rho_{11} = \rho'_{10} = 3{,}83 \qquad (f_c)_{E_{11}} = (f_c)_{H_{10}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\pi\cdot 0{,}05}\cdot 3{,}83 = 3{,}66\,\text{GHz} > f,$$

$$\rho'_{13} = 4{,}2 \qquad (f_c)_{H_{13}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\pi\cdot 0{,}05}\cdot 4{,}2 = 4{,}01\cdot 10^9\ \text{Hz} = 4{,}01\,\text{GHz} > f.$$

Deci la frecvența $f = 3\,\text{GHz}$ se pot propaga numai modurile H_{11}, E_{10} şi H_{12}. Ele au lungimile de undă:

$$(\lambda_g)_{H_{11}} = \frac{c_0}{f\sqrt{1-\left(f_{cH_{11}}/f\right)^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^9\sqrt{1-(1{,}76/3)^2}} = 0{,}1234\,\text{m} = 12{,}34\,\text{cm},$$

$$(\lambda_g)_{E_{10}} = \frac{c_0}{f\sqrt{1-\left(f_{cE_{10}}/f\right)^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^9\sqrt{1-(2{,}29/3)^2}} = 0{,}1548\,\text{m} = 15{,}48\,\text{cm},$$

$$(\lambda_g)_{H_{12}} = \frac{c_0}{f\sqrt{1-\left(f_{cH_{12}}/f\right)^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^9\sqrt{1-(2{,}91/3)^2}} = 0{,}411\,\text{m} = 41{,}1\,\text{cm}.$$

2.10 O linie microstrip este folosită pentru adaptarea la frecvența de 1 GHz a unei sarcini având impedanța $R_S = 25\,\Omega$, la impedanța generatorului $R_g = 100\,\Omega$. Să se determine (aproximativ) dimensiunile liniei, ştiind că suportul este din alumină ($\varepsilon_r = 9$) şi are grosimea $d = 1\,\text{mm}$.

Rezolvare:

Lungimea tronsonului de linie folosit pentru adaptare trebuie să fie $l = \lambda/4$:

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c_0}{4f\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{4\cdot 10^9\cdot\sqrt{9}} = 0{,}025\,\mathrm{m} = 2{,}5\,\mathrm{cm}.$$

Pentru linia de lungime $\lambda/4$ impedanța de intrare are expresia:

$$Z_i = \frac{Z_C^2}{Z_S}$$

deci valoarea impedanței caracteristice a liniei microstrip trebuie să fie:

$$Z_c = \sqrt{Z_g Z_S} = \sqrt{100\cdot 25} = 50\,\Omega.$$

O expresie foarte aproximativă a impedanței liniei microstrip este:

$$Z_C \cong Z_d\frac{d}{D},$$

unde D este lățimea liniei.

Cu substratul considerat, rezultă:

$$D = d\frac{Z_d}{Z_c} = d\frac{Z_0}{Z_c\sqrt{\varepsilon_r}} = 10^{-3}\frac{120\pi}{50\sqrt{9}} = 2{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 2{,}5\,\mathrm{mm}.$$

2.11 Într-un ghid de undă metalic, umplut cu aer, de secțiune dreptunghiulară, având dimensiunile transversale $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 2{,}5$ cm, se propagă la frecvența $f = 4\,\mathrm{GHz}$ o undă H_{10}. Știind că intensitatea maximă a câmpului electric (în planul de simetrie $x = a/2$ al ghidului) este $E_0 = 10^3\ \mathrm{V/m}$, să se calculeze densitatea maximă a curentului de deplasare J_D și densitatea maximă a curentului superficial de conducție J_C. Să se precizeze poziția și orientarea acestor curenți.

Rezolvare:

Curentul de deplasare este dat de relația

$$\mathbf{J}_D = \mathrm{j}\omega\varepsilon\mathbf{E}.$$

Densitatea maximă apare în planul median al ghidului, ($x = a/2$), deci pentru modul considerat va avea direcția câmpului electric (verticală):

$$J_{D\max} = \omega\varepsilon E_0 = 2\pi\cdot 4\cdot 10^9\,\frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\cdot 10^3 = 0{,}222\cdot 10^3\ \mathrm{A/m^2}$$

Densitatea de curent superficial de conducție este dată de relația:

$$\mathbf{J}_C = \mathbf{n}\times\mathbf{H}.$$

Pe pereții verticali,

$$\mathbf{J}_C = \mathbf{n}\times\mathbf{H}_z,$$

de unde se deduce faptul că

$$J_{C\max} = |H_z|_{\max} = \frac{\lambda_g}{\lambda_c}\frac{|E_y|_{\max}}{(Z_u)_H} = \frac{\lambda_g E_0\lambda_0}{\lambda_c Z_0\lambda_g} = \frac{E_0}{Z_0}\frac{\lambda_0}{\lambda_c},$$

unde

$$\lambda_0 = c_0/f = 3\cdot 10^8/4\cdot 10^9 = 0{,}075\,\mathrm{m} = 7{,}5\,\mathrm{cm},$$

$$\lambda_c = (\lambda_c)_{H_{10}} = 2a = 10\,\text{cm}.$$

Se obține:

$$J_{C\max} = \frac{10^3}{120\pi}\frac{7{,}5}{10} \approx 2\,\text{A/m}$$

şi acest curent are direcția verticală.

Pe pereții orizontali există două componente tangențiale, H_x şi H_z, defazate cu $\pi/2$, de amplitudini inegale, depinzând de coordonata x:

$$H_z = H_0 \cos\frac{\pi}{a}x,$$

$$H_x = \text{j}H_0 \frac{\lambda_c}{\lambda_g}\sin\frac{\pi}{a}x.$$

Polarizarea fiind eliptică, valoarea maximă în timp a câmpului magnetic total este semiaxa mare a elipsei:

$$|H|_{\max} = \max\{|H_x|, |H_z|\}.$$

Deoarece atunci când punctul se apropie de pereții laterali $|H_x|$ scade iar $|H_z|$ creşte, $|H|_{\max}$ va avea un minim corespunzător situației $|H_x| = |H_z|$ (polarizare circulară) şi o valoare maximă:

$$|H_{\max}|_{\max} = \max\{(H_x)_{\max}, (H_z)_{\max}\} = H_0 \max\left\{\frac{\lambda_c}{\lambda_g}, 1\right\}.$$

Cu datele numerice ale problemei, se calculează:

$$\lambda_c = 2a = 10\,\text{cm},$$

$$\lambda_0 = c/f = 3\cdot 10^8/4\cdot 10^9 = 0{,}075\,\text{m} = 7{,}5\,\text{cm},$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_c)^2}} = \frac{7{,}5}{\sqrt{1-(7{,}5/10)^2}} = 11{,}3\,\text{cm},$$

$$\frac{\lambda_c}{\lambda_g} = \frac{10}{11{,}3} = 0{,}88 < 1 \text{ deci } |H_{\max}|_{\max} = H_0 = \frac{E_0}{Z_0}\frac{\lambda_0}{\lambda_c}.$$

Acest $J_{C\max}$ apare la marginea pereților orizontali şi are direcția transversală. Numeric,

$$J_{C\max} = 2\,\text{A/m}.$$

2.12 Să se determine puterea maximă transmisibilă, în cazul adaptării, printr-un ghid metalic cu dielectric aerul, având secțiunea transversală dreptunghiulară cu dimensiunile $a = 2\,\text{cm}$, $b = 1\,\text{cm}$, la frecvența $f = 10\,\text{GHz}$ Se cunoaşte intensitatea câmpului electric de străpungere a aerului, $E_{\text{str}} = 30\,\text{kV/cm}$. Se admite un coeficient de siguranță $C = 0{,}25$.

Cât devine puterea maximă transmisibilă dacă terminația ghidului se modifică astfel încât pe ghid apare un raport de undă staționară $\sigma = 2$?

Rezolvare:

La frecvența dată, în ghid se poate propaga numai modul dominant:

$$\left(f_c\right)_{H_{10}} = \frac{c}{\left(\lambda_c\right)_{H_{10}}} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 0{,}02} = 7{,}5\cdot 10^9\ \text{Hz} = 7{,}5\,\text{GHz} < f\,.$$

Pentru modurile imediat următoare acestui mod fundamental, rezultă:

$$\left(f_c\right)_{H_{20}} = \left(f_c\right)_{H_{01}} = \frac{c_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{c_0}{2b\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c_0}{a\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{0{,}02} =$$

$$= 15\cdot 10^9\ \text{Hz} = 15\,\text{GHz} > f$$

(deoarece $a = 2b$).

În cazul modului H_{10}, puterea transmisă în undă directă este dată de expresia:

$$P = \frac{|E|_{\max}^2}{4Z_0}ab\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}\,,$$

deci puterea maximă transmisibilă pe ghidul de undă dreptunghiular cu dielectric aer, terminat adaptat, este:

$$P_{\max\,\text{tr.adaptare}} = \frac{E_{\text{str}}^2}{4Z_0}ab\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(3\cdot 10^6\right)^2}{4\cdot 120\pi}\cdot 0{,}02\cdot 0{,}01\sqrt{1-\left(\frac{7{,}5}{10}\right)^2} \approx 0{,}79\cdot 10^6\ \text{W} = 0{,}79\,\text{MW}$$

Rezultatul obținut reprezintă de fapt limita teoretică referitoare la posibilitățile ghidului. În practică, puterea maximă transmisibilă este întotdeauna mai mică decât această valoare teoretică, deoarece orice ghid real are tot felul de neregularități ale pereților, iar aceste neregularități – în special muchiile ascuțite – provoacă apariția unor concentrări locale ale câmpului electric, provocând astfel apariția străpungerii mult mai repede decât era de aşteptat. Pentru a se ține seama de acest aspect, expresia teoretică precedentă poate fi corectată în practică prin adăugarea unui coeficient subunitar, a cărui valoare este determinată de calitatea prelucrării suprafețelor pereților ghidului:

$$P_{\max\ \text{tr. adaptare}} = C\frac{E_{\text{str}}^2}{4Z_0}ab\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \approx 0{,}25\cdot 0{,}79 \approx 0{,}2\,\text{MW}$$

Dacă ghidul nu este terminat adaptat, atunci în ghid există simultan atât o undă directă cât şi o undă inversă, situație în care puterea transmisă pe ghid este dată de diferența dintre puterea transportată de unda directă şi puterea transportată de unda inversă:

$$P = P_d - P_i = \frac{|E_d|^2 - |E_i|^2}{4Z_0}ab\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}\,.$$

Dar:

$$|E_d|^2 - |E_i|^2 = \left(|E_d| + |E_i|\right)\left(|E_d| - |E_i|\right) = |E|_{\max}\cdot|E|_{\min} = \frac{|E|_{\max}^2}{\sigma}\,.$$

Obținem:

$$P_{\max\ \text{tr.}} = \frac{|E|_{\max}^2}{4Z_0\sigma}ab\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{P_{\max\ \text{tr. adaptare}}}{\sigma} = \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1\,\text{MW}\,.$$

Puterea maximă transmisibilă unei sarcini oarecare printr-un ghid este deci de σ ori mai mică decât puterea maximă transmisibilă unei sarcini adaptate, prin acelaşi ghid.

2.13 Într-un ghid metalic de secțiune dreptunghiulară se propagă o undă H_{10}, transmițând o putere limită de 1 MW, la frecvența $f = 4\,\text{GHz}$. Cât este puterea limită care se va putea transmite cu acest ghid la frecvența $f' = 3\,\text{GHz}$?

Frecvența critică a ghidului considerat este $(f_c)_{H_{10}} = 2{,}5\,\text{GHz}$.

<u>Rezolvare:</u>

Puterea maximă transmisibilă în cazul undei H_{10} într-un ghid dreptunghiular (vezi problema 2.12) depinde de frecvență conform relației:

$$P_{\max\ \text{tr.}}(f) = k\sqrt{1-(f_c/f)^2}\ ,$$

unde k este o constantă.
Deci:

$$\frac{P_{\max\ \text{tr.}}(f')}{P_{\max\ \text{tr.}}(f)} = \frac{\sqrt{1-(f_c/f')}}{\sqrt{1-(f_c/f)}} = \frac{\sqrt{1-(2{,}5/3)^2}}{\sqrt{1-(2{,}5/4)^2}} = \frac{0{,}55}{0{,}78} = 0{,}7\ .$$

Rezultă:

$$P_{\max\ \text{tr.}}(f') = 0{,}7P_{\max\ \text{tr.}}(f) = 0{,}7\,\text{MW}\ .$$

Se constată scăderea pronunțată a puterii maxime transmisibile la apropierea de frecvența critică.

2.14 Care este intensitatea maximă a câmpului electric într-un ghid metalic de secțiune dreptunghiulară, dacă prin acest ghid se transmite unei sarcini, la frecvența $f = 10\,\text{GHz}$, o putere $P = 1\,\text{kW}$ în condițiile unui raport de undă staționară $\sigma = 1{,}5$?

Ghidul are dimensiunile transversale $a = 2\,\text{cm}$, $b = 1\,\text{cm}$, dielectric aerul şi prezintă pierderi neglijabile.

<u>Rezolvare:</u>

Singurul mod care se poate propaga prin ghidul respectiv la frecvența dată este modul dominant, H_{10}. Într-adevăr:

$$(\lambda_c)_{H_{10}} = 2a = 4\,\text{cm}\ ,$$

$$(f_c)_{H_{10}} = \frac{c_0}{(\lambda_c)_{H_{10}}\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{0{,}04} = 7{,}5\cdot 10^9\ \text{Hz} = 7{,}5\ \text{GHz} < f\ ,$$

$$(f_c)_{H_{01}} = (f_c)_{H_{20}} = \frac{c_0}{a\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{0{,}02} = 15\cdot 10^9\ \text{Hz} = 15\,\text{GHz} > f$$

(deoarece $a = 2b$).

Puterea transportată are expresia:

$$P = P_d - P_i = \frac{|E_d|^2\cdot ab}{4(Z_u)_{H_{10}}} - \frac{|E_i|^2\cdot ab}{4(Z_u)_{H_{10}}} = \frac{ab}{4(Z_u)_{H_{10}}}\left(|E_d|^2 - |E_i|^2\right).$$

Câmpul electric are intensitatea maximă în acele plane transversale în care unda directă şi unda inversă sunt în fază,

$$|E|_{\max} = |E_d| + |E_i|.$$

Dar:

$$|E_d|^2 - |E_i|^2 = (|E_d| + |E_i|)\cdot(|E_d| - |E_i|) = \frac{|E|^2_{\max}}{\sigma}.$$

de unde, înlocuind în expresia puterii, se obține relația dintre puterea transmisă şi valoarea maximă a câmpului electric din ghid sub forma:

$$P = \frac{|E|^2_{\max}\cdot ab}{4(Z_u)_{H_{10}}\sigma} = \frac{|E|^2_{\max}}{4Z_0\sigma} ab\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}.$$

Cu datele problemei, rezultă în final valoarea intensității maxime a câmpului electric:

$$|E|_{\max} = \sqrt{\frac{4\sigma P Z_0}{ab\sqrt{1-(f_c/f)^2}}} = \sqrt{\frac{4\cdot 1{,}5\cdot 10^3\cdot 377}{0{,}02\cdot 0{,}01\cdot\sqrt{1-(7{,}5/10)^2}}} = 13\cdot 10^4\ \mathrm{V/m}.$$

2.15 Să se determine puterea transmisă printr-un ghid de undă fără pierderi, cu dielectric aerul, de secțiune circulară cu raza $a = 5\,\mathrm{cm}$, la frecvența $f = 2\,\mathrm{GHz}$, pentru modul H_{11}, în cazul adaptării, ştiind că intensitatea câmpului magnetic axial are valoarea $H_0 = 10\,\mathrm{A/m}$.

Rezolvare:

Unda H_{11} are două componente electrice transversale. Pentru calculul puterii transmise se preferă exprimarea acestora în funcție de componenta axială, unică.

Pentru modurile de tip H, folosind relația:

$$P = \frac{(Z_u)_H}{2}\int_{\Sigma_T}|\mathbf{H}_T|^2\,\mathrm{d}a$$

şi exprimând H_T prin componenta axială H_z, se obține:

$$P = \frac{(Z_u)_H}{2}\cdot\frac{\beta^2}{k^4}\int_{\Sigma_T}|\nabla_T H_z|^2\,\mathrm{d}a.$$

În ghidurile metalice fără pierderi numărul de undă k este legat de componenta axială $\Phi = E_z$ sau H_z prin relația

$$k^2 = \frac{\int_{\Sigma_T}|\nabla_T\Phi|^2\,\mathrm{d}a}{\int_{\Sigma_T}|\Phi|^2\,\mathrm{d}a}.$$

Deci, pentru un mod H,

$$P = \frac{Z_d}{2}\cdot\frac{\lambda_c^2}{\lambda_0\lambda_g}\int_{\Sigma_T}|\mathbf{H}_z|^2\,\mathrm{d}a.$$

În cazul undei H_{11} în ghidul circular, componenta axială H_z are expresia:

$$H_z = H_0 \mathrm{J}_1(k\rho)\cos\varphi,$$

unde $k = \rho'_{11}/a$. Se obține:

$$P = \frac{Z_0 H_0^2}{2} \cdot \frac{\lambda_c^2}{\lambda_0 \lambda_g} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi \mathrm{d}\varphi \cdot \int_{\rho=0}^{a} \mathrm{J}_1^2(k\rho) \cdot \rho \mathrm{d}\rho .$$

Ultima integrală este o integrală de tip Lommel, [3], deci se poate scrie:

$$\int_{\rho=0}^{a} \mathrm{J}_n^2(k\rho) \cdot \rho \mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{n^2}{k^2}\right) \cdot \mathrm{J}_n^2(ka),$$

pentru $ak = \rho'_{mn}$.

Se obține:

$$P = \frac{Z_0 H_0^2}{4} \cdot \frac{\lambda_c^2}{\lambda_0 \lambda_g} \pi \left[1 - \frac{1}{(\rho'_{11})^2}\right] \mathrm{J}_1^2(\rho'_{11}) a^2 .$$

Cu datele problemei rezultă:

$$\lambda_0 = c_0 / f = 3 \cdot 10^8 / (2 \cdot 10^9) = 0{,}15\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{cm},$$

$$(\lambda_c)_{H_{11}} = \frac{2\pi a}{\rho'_{11}} = \frac{2\pi \cdot 0{,}05}{1{,}84} \approx 17{,}1\,\mathrm{cm},$$

$$(\lambda_g)_{H_{11}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_c)^2}} = \frac{15}{\sqrt{1 - (15/17)^2}} = 31{,}8\,\mathrm{cm},$$

$$P = \frac{120\pi \cdot 10^2}{4} \cdot \frac{17{,}1^2}{15 \cdot 31{,}8} \cdot \pi \cdot \left[1 - \frac{1}{1{,}84^2}\right] \cdot 0{,}58^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 1{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{W} = 1{,}4\,\mathrm{kW}.$$

2.16 Să se calculeze puterea maximă transmisibilă pentru modul E_{10}, printr-un ghid metalic de secțiune circulară având raza $a = 3\,\mathrm{cm}$, la frecvența $f = 5\,\mathrm{GHz}$. Ghidul are ca dielectric aerul ($E_{\mathrm{str}} = 30\,\mathrm{kV/cm}$) şi este terminat pe o sarcină adaptată. Se va admite un coeficient de siguranță $C = 0{,}25$.

Rezolvare:

Se calculează frecvența critică corespunzătoare modului de propagare E_{10}:

$$(f_c)_{E_{10}} = \frac{c_0}{2\pi a} \rho_{10} = \frac{3 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 0{,}03} \cdot 2{,}4 = 3{,}82 \cdot 10^9\ \mathrm{Hz} = 3{,}82\,\mathrm{GHz} < f .$$

Se verifică astfel propagarea modului E_{10}. La acest mod, componentele câmpului electric au expresiile:

$$E_z = E_0 \mathrm{J}_0(k\rho),$$

$$E_\rho = \mathrm{j}\frac{\lambda_c}{\lambda_g} E_0 \mathrm{J}_1(k\rho),$$

$$E_\varphi = 0,$$

unde $k = \rho_{10}/a$, iar $\lambda_c = 2\pi/k = 2\pi a/\rho_{10}$.

În consecință, puterea transmisă are expresia:

$$P = \frac{1}{2(Z_u)_E} \int_{\Sigma_T} |\mathbf{E}_T|^2 \mathrm{d}a = \frac{1}{2(Z_u)_E} \int_{\Sigma_T} |\mathbf{E}_\rho|^2 \mathrm{d}a = \frac{E_0^2}{2(Z_u)_E} \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_g}\right)^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a J_1^2(k\rho) \rho \mathrm{d}\rho$$

Dar, pentru $ka = \rho_{mn}$,

$$\int_0^a J_n^2(k\rho)\rho \mathrm{d}\rho = \frac{a^2}{2} J_n'^2(ka) \quad \text{(integrală Lommel, [3])},$$

astfel încât puterea transmisă poate fi scrisă sub forma:

$$P = \frac{E_0^2}{2(Z_u)_E}\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_g}\right)^2 2\pi \frac{a^2}{2} J_1'^2(\rho_{10}).$$

Câmpul electric, având două componente defazate cu $\pi/2$ radiani, are o polarizare eliptică. Intensitatea maximă va fi egală cu cea mai mare dintre semiaxele elipsei:

$$E_{\max} = \max\left\{E_0 \mathrm{J}_0(k\rho);\ \frac{\lambda_c}{\lambda_g} E_0 \mathrm{J}_1(k\rho)\right\} = E_0 \max\left\{\mathrm{J}_0(0); \frac{\lambda_c}{\lambda_g}\mathrm{J}_1(\rho_{10})\right\}.$$

Se calculează, pe rând:

- lungimea de undă critică, a modului E_{10}:

$$(\lambda_c)_{E_{10}} = \frac{2\pi a}{\rho_{10}} = \frac{2\pi \cdot 0{,}03}{2{,}4} = 0{,}0785\,\mathrm{m} = 7{,}85\,\mathrm{cm};$$

- lungimea de undă în spațiul liber, la frecvența dată:

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^9} = 0{,}06\,\mathrm{m} = 6\ \mathrm{cm};$$

- lungimea de undă din ghid pentru modul E_{10}:

$$(\lambda_g)_{E_{10}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_c)^2}} = \frac{6}{\sqrt{1-(6/7{,}85)^2}} = 9{,}3\,\mathrm{cm}.$$

Deci, în cazul datelor problemei, $E_{\max}$ este:

$$E_{\max} = E_0 \max\left\{1; \frac{7{,}85}{9{,}3} \cdot 0{,}58\right\} = E_0,$$

adică puterea transmisă este legată de câmpul electric maxim prin relația:

$$P = \frac{E_{\max}^2}{2(Z_u)_E}\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_g}\right)^2 \pi a^2 \mathrm{J}_1'^2(2{,}4).$$

Deci puterea maximă transmisibilă are, pentru acest mod, expresia:

$$P_{\max\ \mathrm{tr.}} = C\frac{E_{\mathrm{str}}^2}{2(\mathrm{Z_u})_E}\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_g}\right)^2 \pi a^2 \mathrm{J}_1'^2(2{,}4) = C\frac{E_{\mathrm{str}}^2}{2Z_0\sqrt{1-(f_c/f)^2}}\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_g}\right)^2 \pi a^2 \mathrm{J}_1'^2(2{,}4)$$

Pentru calculul valorii $\mathrm{J}_1'(2{,}4)$ se poate folosi relația cunoscută:

$$\mathrm{J}_1'(x) = \mathrm{J}_0(x) - \frac{\mathrm{J}_1(x)}{x}.$$

Se obține:

$$P_{\max\ \mathrm{tr.}} = 0{,}25 \cdot \frac{\left(3 \cdot 10^6\right)^2}{2 \cdot 120\pi\sqrt{1-(3{,}8/5)^2}} \cdot \left(\frac{7{,}85}{9{,}3}\right)^2 \cdot \pi \cdot \left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot (-0{,}22)^2 \cong 0{,}44\,\mathrm{MW}.$$

2.17 Să se calculeze constanta de atenuare în cazul unui ghid metalic cu pereți perfect conductori având secțiunea dreptunghiulară cu dimensiunile $a = 2\,\text{cm}$, $b = 1\,\text{cm}$, la frecvența $f = 8\,\text{GHz}$. Ghidul este umplut cu un dielectric având permitivitatea relativă $\varepsilon_r = 2$ şi tangenta unghiului de pierderi $\text{tg}(\delta) = 2{,}25 \cdot 10^{-4}$.

<u>Rezolvare:</u>

În cazul pereților perfect conductori, constanta de atenuare este determinată doar de pierderile în dielectric:

$$\alpha_d \cong \frac{\sigma_d Z_d}{2\sqrt{1-\left(f_c/f\right)^2}}.$$

Folosind datele problemei, se calculează:

- frecvența critică corespunzătoare modului dominant:

$$\left(f_c\right)_{H_{10}} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 0{,}02\sqrt{2}} = 5{,}3\cdot 10^9\ \text{Hz} = 5{,}3\,\text{GHz} < f\ ;$$

- lungimea de undă critică corespunzătoare modului H_{10}:

$$\left(\lambda_c\right)_{H_{10}} = 2a = 4\,\text{cm}\ ;$$

- impedanța dielectricului:

$$Z_d = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{2}} = 267\,\Omega.$$

Din relația

$$\text{tg}\delta = \frac{\sigma_d}{\omega\varepsilon}$$

se deduce conductivitatea dielectricului (considerat omogen),

$$\sigma_d = 2\pi f\varepsilon_0\varepsilon_r \text{tg}\delta = 2\pi\cdot 8\cdot 10^9\cdot\frac{1}{36\pi\cdot 10^9}\cdot 2\cdot 2{,}25\cdot 10^{-4} = 2\cdot 10^{-4}\ \text{S/m}.$$

Se obține astfel o constantă de atenuare:

$$\alpha = \frac{2\cdot 10^{-4}\cdot 267}{2\sqrt{1-\left(5{,}3/8\right)^2}} = 0{,}0356\,\text{Np/m},$$

$$\alpha[\text{dB/m}] = \alpha[\text{Np/m}]\cdot 8{,}7 = 0{,}31.$$

2.18 Să se calculeze constanta de atenuare a unui ghid metalic cu dielectric aerul, având secțiunea dreptunghiulară de dimensiuni $a = 4\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{cm}$, la frecvența $f = 5\,\text{GHz}$. Pereții ghidului sunt din cupru, $\sigma_m = 5\cdot 10^7\ \text{S/m}$.

<u>Rezolvare:</u>

Pierderile în aer fiind foarte mici, constanta de atenuare va fi determinată de pierderile în metal:

$$\alpha_m = \frac{R_m}{2\left(Z_u\right)_H}\cdot\frac{\oint_\Gamma \left|H_t\right|^2 \text{d}l}{\int_{\Sigma_T}\left|H_T\right|\text{d}a},$$

unde $R_m = \mathrm{Re}\{Z_m\}$ reprezintă rezistența de undă în metal (adică partea reală a impedanței de undă în metal), Σ_T este secțiunea transversală a ghidului, Γ conturul ei, H_T câmpul magnetic transversal, H_t câmpul magnetic tangențial la pereții ghidului.

La frecvența f se poate propaga doar modul fundamental:

$$(f_c)_{H_{10}} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 0{,}04} = 0{,}375\cdot 10^{10}\ \mathrm{Hz} = 3{,}75\,\mathrm{GHz} < f\ ;$$

$$(f_c)_{H_{20}} = (f_c)_{H_{01}} = \frac{c_0}{2b\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c_0}{a\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{0{,}04} = 0{,}75\cdot 10^{10}\ \mathrm{Hz} = 7{,}5\,\mathrm{GHz} > f\ .$$

Lungimea de undă în ghid, pe modul fundamental, are valoarea:

$$(\lambda_g)_{H_{10}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{c_0/f}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{5\cdot 10^9\sqrt{1-(3{,}75/5)^2}} = 0{,}09\,\mathrm{m} = 9\,\mathrm{cm}\,.$$

În cazul modului H_{10}, componentele câmpului magnetic au expresiile:

$$H_z = H_0 \cos\frac{\pi}{a}x\,,$$

$$H_x = \mathrm{j}\frac{\lambda_c}{\lambda_g}H_0 \sin\frac{\pi}{a}x\,,$$

$$H_y = 0\,.$$

Cu aceste expresii , se pot calcula integralele care determină constanta α_m:

$$\int_{\Sigma_T} |H_T|^2 \mathrm{d}a = \int_{\Sigma_T} |H_x|^2 \mathrm{d}a = \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^a |H_x|^2 \mathrm{d}x =$$

$$= b\cdot\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_g}\right)^2 |H_0|^2 \int_0^a \left|\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right| \mathrm{d}x = |H_0|^2\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_g}\right)^2\frac{ab}{2}$$

$$\oint_\Gamma |H_t|^2 \mathrm{d}l = 2\int_0^a \left(|H_x|^2 + |H_z|^2\right)_{y=0}\mathrm{d}x + 2\int_0^b |H_z|^2_{x=0}\mathrm{d}y = 2|H_0|^2\left[\frac{a}{2}\left(1+\frac{\lambda_c^2}{\lambda_g^2}\right)+b\right].$$

Se obține astfel expresia constantei de atenuare datorată pierderilor în pereții ghidului, pentru modul H_{10}:

$$(\alpha_m)_{H_{10}} = \frac{R_m}{(Z_u)_{H_{10}}}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1+\left(\dfrac{\lambda_c}{\lambda_g}\right)^2+\dfrac{2b}{a}}{\left(\dfrac{\lambda_c}{\lambda_g}\right)^2}.$$

Rezistența în metal are expresia:

$$R_m = \frac{1}{\delta_m\sigma_m},$$

unde

$$\delta_m = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_m}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \mu_r \sigma_m}} = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot 5 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^7}} = 10^{-6}\ \mathrm{m} = 1\,\mu\mathrm{m}$$

reprezintă adâncimea de pătrundere în metal. Se obține astfel:

$$R_m = \frac{1}{10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^7} = 0{,}02\,\Omega\,,$$

$$\left(Z_u\right)_{H_{10}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1-\left(f_c/f\right)^2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{1-\left(3{,}75/5\right)^2}} = 570\,\Omega\,,$$

$$\alpha_m = \frac{0{,}02}{570} \cdot \frac{1}{0{,}02} \cdot \frac{1+\left(8/9\right)^2+1}{\left(8/9\right)^2} = 0{,}006\,\mathrm{Np/m}\,,$$

$$\alpha_m[\mathrm{dB/m}] = \alpha_m[\mathrm{Np/m}] \cdot 8{,}7 = 0{,}053\,.$$

Observație: În realitate constanta de atenuare α_m este întotdeauna mai mare datorită neuniformităților de prelucrare a suprafețelor interioare ale ghidului (vezi şi ordinul de mărime al adâncimii de pătrundere δ_m).

2.19 Să se calculeze frecvența la care constanta de atenuare a modului H_{10} într-un ghid metalic de secțiune dreptunghiulară, având ca dielectric aerul, este minimă, precum şi valoarea aceste constante minime de atenuare. Ghidul are dimensiunile secțiunii transversale $a = 2\,\mathrm{cm}$, $b = 1\,\mathrm{cm}$, iar pereții sunt din cupru cu conductivitatea $\sigma_m = 5 \cdot 10^7\ \mathrm{S/m}$.

<u>Rezolvare:</u>

Constanta de atenuare a ghidului, α, este o sumă între constanta de atenuare datorată pierderilor în pereții metalici imperfect conductori, α_m, şi constanta de atenuare corespunzătoare dielectricului imperfect, α_d :

$$\alpha = \alpha_m + \alpha_d\,.$$

Pierderile în aer fiind neglijabile $\left(\alpha_d \approx 0\right)$, se poate considera că pierderile în ghid sunt cauzate numai de pereții metalici imperfect conductori:

$$\alpha \cong \alpha_{\mathrm{m}} = \frac{R_{\mathrm{m}}}{\left(Z_u\right)_{H_{10}}} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1+\left(\lambda_c/\lambda_g\right)^2+2b/a}{\left(\lambda_c/\lambda_g\right)^2}\,.$$

Frecvența critică corespunzătoare modului dominant de propagare are valoarea:

$$\left(f_c\right)_{H_{10}} = \frac{c_0}{2a} = \frac{3 \cdot 10^8}{0{,}04} = 0{,}75 \cdot 10^{10}\ \mathrm{Hz} = 7{,}5\,\mathrm{GHz}\,.$$

Pentru a urmări variația cu frecvența a constantei α_m, se notează:

$\eta = f/f_c$. Se obține astfel:

$$R_m = \frac{1}{\delta_m \sigma_m} = \frac{1}{\sigma_m \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_m}}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_m}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma_m}} = k_1\sqrt{\eta}\,,$$

unde

$$k_1 = \sqrt{\frac{\pi f_c \mu}{\sigma_m}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 7{,}5 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^7}} = 24{,}33 \cdot 10^{-3}\ \Omega = 24{,}33\,\mathrm{m}\Omega\,,$$

precum şi

$$\left(Z_u\right)_{H_{10}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1-\left(f_c/f\right)^2}} = Z_0 \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}\,,$$

unde $Z_0 = 120\pi \cong 377\,\Omega$.

De asemenea,

$$\frac{\lambda_c}{\lambda_g} = \frac{\lambda_c}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_g} = \frac{f}{f_c}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \eta\sqrt{1-\frac{1}{\eta^2}} = \sqrt{\eta^2 - 1}\,.$$

Înlocuind $2b/a = 1$ se obține:

$$\alpha = \frac{k_1}{Z_0} \frac{\eta^2 + 1}{\sqrt{\eta}\sqrt{\eta^2 - 1}}\,,$$

unde $k_1/Z_0 = 24{,}33 \cdot 10^{-3}/377 = 6{,}45 \cdot 10^{-5}$.

Frecvența la care atenuarea este minimă rezultă din condiția

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\eta} = 0\,,$$

sau, echivalent,

$$\frac{\mathrm{d}\left(\alpha^2\right)}{\mathrm{d}\eta} = 0\,.$$

Efectuând calculele, se obține condiția:

$$\eta\left(\eta^2 - 1\right) \cdot 2\left(\eta^2 + 1\right) \cdot 2\eta - \left(\eta^2 + 1\right)^2\left(\eta^2 - 1 + \eta \cdot 2\eta\right) = 0\,,$$

de unde

$$\eta^4 - 6\eta^2 + 1 = 0$$

deci

$$\eta_{\mathrm{opt}} = 2{,}4\,.$$

Prin urmare atenuarea este minimă la $f = 2{,}4 f_c$ adică la $f = 18\,\mathrm{GHz}$.

Rezultă:

$$\alpha_{\min} = \alpha \cdot 2{,}4 = 2k_1/Z_0$$

şi, numeric,

$$\alpha_{\min} = 2 \cdot \frac{k_1}{Z_0} = 2 \cdot \frac{24{,}33 \cdot 10^{-3}}{377} = 1{,}29 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Np/m}\,,$$

$$\alpha_{\min}[\mathrm{dB/m}] = \alpha_{\min}[\mathrm{Np/m}] \cdot 8{,}7 = 1{,}12 \cdot 10^{-3}\,.$$

Observație: În realitate acest minim de atenuare nu este practic utilizabil deoarece el se află dincolo de limita superioară a benzii normale de lucru a ghidului dreptunghiular.

2.20 Să se calculeze constanta de atenuare a unui ghid coaxial având dimensiunile $R = 5\,\mathrm{mm}$, $r = 3\,\mathrm{mm}$. Ghidul este din cupru, $\sigma_{Cu} = 5 \cdot 10^7\ \mathrm{S/m}$ şi are drept dielectric polietilena având permitivitatea electrică relativă $\varepsilon_r = 2$ şi conductivitatea $\sigma_d = 10^{-4}\ \mathrm{S/m}$. Frecvenţa de lucru este $f = 1\,\mathrm{GHz}$.

Cât devine constanta de atenuare a aceluiaşi ghid la frecvenţa $f_1 = 10\,\mathrm{GHz}$?

Rezolvare:

Pentru modul fundamental (TEM) în ghidul coaxial componentele câmpului (în coordonate cilindrice) au expresiile:

$$E_\rho = E_0 \frac{r}{\rho},$$

unde $E_0 = E_\rho(r)$ este valoarea maximă a intensităţii câmpului electric care apare la suprafaţa conductorului interior, $\rho = r$;

$$H_\varphi = H_0 \frac{r}{\rho},$$

unde $H_0 = H_\varphi(r)$ reprezintă valoarea maximă a intensităţii câmpului magnetic care există la suprafaţa conductorului interior, $\rho = r$.

Pe de altă parte, la orice undă TEM raportul între intensitatea câmpului electric şi magnetic este constanta Z_d:

$$\frac{E_0}{H_0} = Z_d .$$

Deoarece pierderile se produc atât în metal cât şi în dielectric, se poate scrie:

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_m ,$$

unde

$$\alpha_d = \frac{1}{2}\sigma_d Z_d = \frac{1}{2}\sigma_d \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}\cdot\frac{377}{\sqrt{2}} = 13{,}32\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Np/m},$$

$$\alpha_m = \frac{R_m}{2Z_d}\frac{\oint_\Gamma |H_t|^2 \mathrm{d}l}{\int_{\Sigma_T} |H_T|^2 \mathrm{d}a} = \frac{R_m}{2Z_d}\frac{\int_0^{2\pi} |H_\varphi|^2_{\rho=r} r\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi} |H_\varphi|^2_{\rho=R} R\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_r^R |H_\varphi|^2 \rho\mathrm{d}\rho} = \frac{R_m}{2Z_d}\frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{R}}{\ln\frac{R}{r}}.$$

Cu datele numerice ale problemei, se obţine:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_{Cu}}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \sigma_{Cu}}} = \sqrt{\frac{1}{\pi\cdot 10^9\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^7}} = ,$$

$$= 2{,}25\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = 2{,}25\,\mu\mathrm{m}$$

$$R_m = \frac{1}{\delta\sigma_{Cu}} = \frac{1}{2{,}25\cdot 10^{-6}\cdot 5\cdot 10^7} = \frac{1}{112{,}5} \approx 8{,}88\cdot 10^{-3}\ \Omega = 8{,}88\,\mathrm{m}\Omega,$$

$$Z_d = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{2}} = 266\,\Omega,$$

$$\alpha_m = \frac{112{,}5^{-1}}{2\cdot 266}\cdot\frac{\frac{10^3}{3}+\frac{10^3}{5}}{\ln(5/3)} = 17{,}44\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Np/m}.$$

Rezultă:

$$\alpha = \alpha_m + \alpha_d = 17{,}44 \cdot 10^{-3} + 13{,}32 \cdot 10^{-3} = 30{,}76 \cdot 10^{-3}\ \text{Np/m},$$

$$\alpha[\text{dB/m}] = \alpha[\text{Np/m}] \cdot 8{,}7 = 0{,}26.$$

Admițând că σ_d nu variază cu frecvența, la frecvența f_1 se modifică doar adâncimea de pătrundere:

$$\delta_{m1} = \sqrt{\frac{2}{\omega_1 \mu \sigma_{Cu}}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f_1 \mu_0 \sigma_{Cu}}} = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot 10^{10} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{7}}} = ,$$

$$= 7 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 0{,}7\ \mu\text{m}$$

$$R_{m1} = \frac{1}{\delta_{m1}\sigma_{Cu}} = \frac{1}{0{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{7}} = 0{,}0285\,\Omega = 28{,}5\,\text{m}\Omega.$$

La frecvența f_1, constanta de atenuare în metal devine:

$$\alpha_{m1} = \frac{28{,}5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 266} \frac{\frac{10^3}{3} + \frac{10^3}{5}}{\ln(5/3)} = 56 \cdot 10^{-3}\ \text{Np/m},$$

deci

$$\alpha_1 = \alpha_{m1} + \alpha_d = 56 \cdot 10^{-3} + 13{,}3 \cdot 10^{-3} = 69{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{Np/m},$$

$$\alpha_1[\text{dB/m}] = \alpha_1[\text{Np/m}] \cdot 8{,}7 = 0{,}6.$$

Observație: Se poate observa că la ghidul coaxial atenuarea crește monoton cu frecvența. Acesta este unul din motivele pentru care utilizarea ghidurilor coaxiale este limitată în mod normal la frecvențe mai joase de câțiva gigaherți [2].

2.21 Să se determine raza r a conductorului interior al unui ghid coaxial astfel încât constanta lui de atenuare să aibă o valoare minimă. Ghidul este alcătuit din două conductoare din același metal ($\sigma_m = 2 \cdot 10^7$ S/m) separate prin aer. Raza conductorului exterior este $R = 1$cm.

Cât este impedanța caracteristică a acestui ghid ? Dar constanta lui de atenuare la frecvența $f = 1$GHz ?

Rezolvare:

Pierderile în dielectric fiind neglijabile, rezultă (vezi problema 2.20):

$$\alpha = \frac{R_m}{2Z_d} \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{R}}{\ln(R/r)} = \frac{R_m}{2Z_d} \frac{1}{R} \frac{1 + \frac{R}{r}}{\ln(R/r)}.$$

Notând $x = R/r$, raza r pentru care atenuarea este minimă se obține din condiția:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_m}{\mathrm{d}(R/r)} = 0$$

adică

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_m}{\mathrm{d}x} = 0$$

de unde rezultă

$$\left(\frac{1+x}{\ln x}\right)' = 0$$

adică

$$\ln x - \frac{1}{x}(1+x) = 0$$

deci

$$\ln x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Soluția aproximativă (numerică sau grafică) a acestei ecuații este:

$$x \cong 3,6$$

de unde

$$r = R/3{,}6 = 10/3{,}6 = 2{,}77\,\text{mm}.$$

Impedanța caracteristică a ghidului coaxial are valoarea:

$$Z_c = \frac{Z_d}{2\pi}\ln\frac{R}{r} = \frac{Z_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{R}{r} = \frac{120\pi}{2\pi}\ln 3{,}6 \cong 77\,\Omega.$$

Se calculează:

- adâncimea de pătrundere la frecvența de lucru

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_m}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu_0\mu_r\sigma_m}} = \sqrt{\frac{1}{\pi\cdot 10^9\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 2\cdot 10^7}} = ;$$

$$= 35\cdot 10^{-7}\ \text{m} = 3{,}5\,\mu\text{m}$$

- rezistența de undă în metal

$$R_\text{m} = \frac{1}{\delta\sigma_\text{m}} = \frac{1}{3{,}5\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^7} = \frac{1}{70} \cong 0{,}014\,\Omega;$$

Pentru $R/r = 3{,}6$ constanta de atenuare ia valoarea:

$$\alpha = \frac{1}{70\cdot 2\cdot 120\pi}\cdot\frac{1}{0{,}01}\cdot\frac{1+3{,}6}{\ln 3{,}6} = 6{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{Np/m},$$

$$\alpha[\text{dB/m}] = \alpha[\text{Np/m}]\cdot 8{,}7 = 0{,}059.$$

2.22 Să se determine impedanța caracteristică a unui ghid coaxial având raza conductorului exterior R dată, care permite transmiterea unei puteri maxime într-o sarcină adaptată.

Se consideră drept dielectric aerul.

Rezolvare:

În ghidul coaxial, componentele câmpului electromagnetic au expresiile:

$$E_\rho(\rho) = E_0\frac{r}{\rho},$$

$$H_\varphi(\rho) = H_0\frac{r}{\rho},\ \text{cu}\ E_0/H_0 = Z_d,$$

unde E_0 şi H_0 reprezintă valoarea maximă a intensității câmpului electric, respectiv magnetic, valori atinse pe suprafața conductorului interior iar Z_d impedanța dielectricului.

Dacă ghidul coaxial este fără pierderi, puterea transmisă sarcinii adaptate are expresia:

$$P = \frac{|U|^2}{2Z_c}.$$

În relația precedentă U reprezintă tensiunea dintre conductoarele ghidului coaxial:

$$U = \int_A^B \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_r^R E_0 \frac{r}{\rho}\mathrm{d}\rho = E_0 r \int_r^R \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = E_0 r \ln\frac{R}{r},$$

unde A şi B sunt puncte situate pe suprafața conductorului interior, respectiv exterior, în aceeaşi secțiune transversală.
Impedanța caracteristică a unui ghid coaxial este (vezi problema 2.21):

$$Z_c = \frac{Z_d}{2\pi}\ln\frac{R}{r} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{R}{r}.$$

Rezultă pentru puterea transmisă expresia:

$$P = \frac{1}{2}\cdot\frac{E_0^2 r^2 \ln^2\frac{R}{r}}{\frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{R}{r}} = \frac{E_0^2 r^2\sqrt{\varepsilon_r}}{120}\ln\frac{R}{r}.$$

Dar E_0 nu poate depăşi valoarea corespunzătoare străpungerii dielectricului. E_0 şi R fiind date, puterea devine maximă atunci când

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\ln\frac{R}{r}\right) = 0$$

de unde se obține

$$\ln\frac{R}{r} = \frac{1}{2}$$

sau

$$\frac{R}{r} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

deci

$$r = \frac{R}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

În acest caz, impedanța caracteristică a ghidului are valoarea

$$Z_c = 60\ln\sqrt{\mathrm{e}} = 30\,\Omega.$$

Observație: Deoarece la cablul coaxial dimensiunile transversale nu sunt direct impuse de frecvența de lucru, alegerea acestor dimensiuni poate avea în vedere o optimizare a anumitor proprietăți ale cablului. Astfel, conform problemelor 2.21 şi 2.22, rezultă că o atenuare minimă se obține cu o valoare a impedanței caracteristice a cablului coaxial cu aer de $Z_c \approx 77\,\Omega$, în timp ce o putere transmisibilă maximă se obține cu o impedanță caracteristică a cablului folosit (cu dielectric aer) de $Z_c = 30\,\Omega$. În aceste condiții valoarea uzuală $Z_c = 50\,\Omega$ reprezintă de fapt un compromis acceptabil. Valoarea de $75\,\Omega$ este totuşi recomandată aplicațiilor în care semnalele sunt foarte mici, cum ar fi cablurile de la antenele de recepție TV, iar valori ale lui Z_c mai mici de $50\,\Omega$ apar uneori în aplicațiile de mare putere cum ar fi alimentarea unor antene de emisie etc.

2.23 Să se determine impedanța caracteristică a ghidului coaxial care permite aplicarea unei tensiuni maxime spre o sarcină adaptată. Raza conductorului interior R este dată şi se consideră drept dielectric aerul iar.

Rezolvare:

Procedând similar ca la problema (2.22) se obține o expresie a tensiunii dintre conductoarele componente ale ghidului coaxial,

$$U = E_0 r \ln\frac{R}{r},$$

unde E_0 este valoarea maximă a intensității câmpului electric. Considerând E_0 şi R constante (E_0 nu poate depăşi valoarea corespunzătoare străpungerii dielectricului) tensiunea admisibilă este maximă dacă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\ln\frac{R}{r}\right) = 0,$$

de unde rezultă

$$\ln\frac{R}{r} + r\frac{r}{R}\left(-\frac{R}{r^2}\right) = 0$$

adică

$$\ln\frac{R}{r} = 1$$

sau

$$\frac{R}{r} = \mathrm{e}$$

deci

$$r = \frac{R}{\mathrm{e}}.$$

În acest caz impedanța caracteristică a cablului are valoarea:

$$Z_c = \frac{Z_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{R}{r} = \frac{120\pi}{2\pi}\ln\mathrm{e} = 60\,\Omega.$$

2.24 Să se calculeze constanta de atenuare şi factorul de calitate propriu al unei linii microstrip realizate pe un substrat dielectric de grosime $d = 1\,\mathrm{mm}$ având permitivitatea electrică relativă (constanta dielectrică) $\varepsilon_r = 4$ şi conductivitatea $\sigma_d = 5\cdot10^{-4}\,\mathrm{S/m}$, cu depunerile din cupru, $\sigma_{Cu} = 5\cdot10^{7}\,\mathrm{S/m}$, la frecvența $f = 10\,\mathrm{GHz}$.

Rezolvare:

Deoarece există pierderi atât în dielectric cât şi în metal,

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_m.$$

Constanta de atenuare produsă de dielectricul imperfect este

$$\alpha_d = \frac{\sigma_d Z_d}{2}$$

iar constanta de atenuare în metal are expresia

$$\alpha_m = \frac{R_m}{2Z_d} \frac{\oint_{\Gamma} |H_t|^2 \mathrm{d}l}{\int_{\Sigma_T} |H_T|^2 \mathrm{d}a} .$$

În cazul liniei microstrip, neglijând efectele de margine se poate admite că $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_x$, deci $H_t = H_0 = \text{constant}$, pe domeniul situat sub depunerea metalică. Se obține:

$$\alpha_m = \frac{R_m}{2Z_d} \frac{2D|H_0^2|}{Dd|H_0^2|} = \frac{R_m}{Z_d d} .$$

Folosind datele problemei, se calculează:

- adâncimea de pătrundere, δ_m

$$\delta_m = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_{Cu}}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \sigma_{Cu}}} = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot 10^{10} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^7}} = ;$$

$$= 7 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0{,}7\,\mu\text{m}$$

- rezistența de undă în metal, R_m :

$$R_m = \frac{1}{\delta_m \sigma_{Cu}} = \frac{1}{0{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^7} = \frac{1}{35}\Omega ;$$

- impedanța dielectricului, Z_d :

$$Z_d = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{4}} = 188\,\Omega .$$

Rezultă:

$$\alpha_d = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 188}{2} = 0{,}047\,\text{Np/m} ,$$

$$\alpha_m = \frac{1}{35 \cdot 188 \cdot 10^{-3}} = 0{,}152\,\text{Np/m} ,$$

$$\alpha = 0{,}047 + 0{,}152 \cong 0{,}2\,\text{Np/m} ,$$

$$\alpha[\text{dB/m}] = \alpha[\text{Np/m}] \cdot 8{,}7 = 1{,}74 .$$

Factorul de calitate propriu (intrinsec) al liniei este dat de relația:

$$Q_0 = \frac{\pi}{\alpha\lambda} = \frac{\pi f \sqrt{\varepsilon_r}}{\alpha c_0} = \frac{\pi \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{4}}{0{,}2 \cdot 3 \cdot 10^8} = 1047 .$$

Observație: Linia microstrip este o linie deschisă, la care pe lângă pierderile în metal și în dielectric trebuie luate în considerație și pierderile prin radiație:

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_m + \alpha_{\text{rad}} .$$

Pierderile prin radiație – care au fost neglijate în problemă – nu pot avea o expresie simplă deoarece ele depind nu numai de geometria secțiunii transversale a liniei, ci și de lungimea și forma ei (dreaptă sau curbată etc.). Drept regulă generală, aceste pierderi sunt proporționale cu pătratul frecvenței.

2.25 Cât este constanta de atenuare a modului H_{01} într-un ghid metalic de secțiune circulară, de rază $r = 5\,\text{cm}$, la frecvența $f_2 = 10\,\text{GHz}$, dacă la frecvența $f_1 = 4\,\text{GHz}$ constanta de atenuare este $0{,}01\,\text{dB/m}$?

Rezolvare:

Constanta de atenuare a modului H_{01} într-un ghid circular are expresia [1]:

$$\alpha_{H_{01}} \cong \alpha_{\text{m}} = \frac{\pi}{a}\frac{\delta_c}{\lambda_c}\frac{1}{\sqrt{\eta}\sqrt{\eta^2-1}} = K\frac{1}{\sqrt{\eta}\sqrt{\eta^2-1}} \quad \text{Np/m},$$

unde δ_c este adâncimea de pătrundere la frecvența critică f_c iar $\eta \overset{\text{not}}{=} f/f_c$. Rezultă:

$$\alpha(f_1) = K\frac{1}{\sqrt{\eta_1}\sqrt{\eta_1^2-1}},$$

$$\alpha(f_2) = K\frac{1}{\sqrt{\eta_2}\sqrt{\eta_2^2-1}},$$

de unde se obține:

$$\alpha(f_2) = \alpha(f_1)\sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}}\frac{\sqrt{\eta_1^2-1}}{\sqrt{\eta_2^2-1}} = \alpha(f_1)\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}\frac{\sqrt{f_1^2-f_c^2}}{\sqrt{f_2^2-f_c^2}}.$$

Frecvența critică corespunzătoare modului H_{01} în ghidul circular este:

$$(f_c)_{H_{01}} = \frac{c_0}{2\pi r}\rho'_{01} = \frac{3\cdot 10^8}{2\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}}\cdot 3.83 = 0{,}366\cdot 10^{10}\ \text{Hz} = 3{,}66\,\text{GHz}.$$

Se obține deci:

$$\alpha(f_2) = 0{,}01\cdot\sqrt{\frac{4}{10}}\cdot\frac{\sqrt{4^2-3{,}66^2}}{\sqrt{10^2-3{,}66^2}} = 0{,}001\,\text{dB/m} = 1\,\text{dB/Km}.$$

2.26 Să se determine lungimea de undă în ghidul dielectric placă infinită, de grosime $d = 2\,\text{cm}$ şi având $\varepsilon_r = 4$, la frecvența $f = 4\,\text{GHz}$. La ce distanță de placă câmpul scade de 100 de ori față de valoarea lui de la suprafața plăcii?

Rezolvare:

Modurile care se pot propaga printr-un ghid placă dielectrică sunt cele care au frecvența prag f_p mai mică decât frecvența de lucru f [1]:

$$(f_p)_n = \frac{(n-1)c_0}{2d\sqrt{\varepsilon_r - 1}}.$$

Cu datele problemei, avem:

$$(f_p)_2 = f_p = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 0{,}02\sqrt{3}} = 0{,}433\cdot 10^{10}\,\text{Hz} = 4{,}33\,\text{GHz} > f.$$

În concluzie, se pot propaga numai modurile H_1 şi E_1.

Numărul de undă în dielectric, k_1, se obține din ecuațiile:

$$\operatorname{ctg} u = \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2}} \qquad \text{pentru modul } H_1,$$

respectiv

$$\operatorname{ctg} u = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2}} \qquad \text{pentru modul } E_1,$$

unde s-au folosit notațiile:

$$u = k_1 \frac{d}{2},$$

$$R = \omega\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)\mu}\,\frac{d}{2} = \pi \frac{d}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_r - 1}\,.$$

Înlocuind cu datele numerice, se obține:

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^9} = 0{,}075\,\mathrm{m} = 7{,}5\,\mathrm{cm}\,,$$

$$R = \pi \frac{2}{7{,}5}\sqrt{3} = 0{,}46\pi\,.$$

Soluțiile aproximative (obținute grafic sau numeric) sunt:

$$u_H = 0{,}285\pi\,,$$

$$u_E = 0{,}385\pi\,.$$

Numerele de undă $k_2 = \mathrm{j}K_2$ din mediul ambiant plăcii se obțin din relația:

$$u^2 + q^2 = R^2,$$

unde $q \overset{\text{not}}{=} K_2 \frac{d}{2}$. Rezultă:

$$q_H = \sqrt{R^2 - u_H^2} = \pi\sqrt{0{,}46^2 - 0{,}285^2} = 0{,}36\pi\,,$$

respectiv

$$q_E = \sqrt{R^2 - u_E^2} = \pi\sqrt{0{,}46^2 - 0{,}385^2} = 0{,}25\pi\,.$$

Constanta de defazare are expresia:

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_r - \frac{k_1^2}{\omega^2\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r - \frac{k_1^2 c_0^2}{\omega^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_r - \frac{k_1^2\lambda_0^2}{4\pi^2}}$$

deci

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r - \dfrac{\lambda_0^2 u^2}{d^2\pi^2}}}\,.$$

Se obține:

$$\lambda_{H_1} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r - \dfrac{\lambda_0^2 u_H^2}{d^2\pi^2}}} = \frac{7{,}5}{\sqrt{4 - \dfrac{7{,}5^2 \cdot 0{,}285^2\pi^2}{4\pi^2}}} = 4{,}44\,\mathrm{cm}$$

şi

$$\lambda_{E_1} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r - \frac{\lambda_0^2 u_E^2}{d^2\pi^2}}} = \frac{7{,}5}{\sqrt{4 - \frac{7{,}5^2 \cdot 0{,}385^2 \pi^2}{4\pi^2}}} = 0{,}0542\,\text{m} = 5{,}42\,\text{cm}.$$

În exteriorul plăcii, câmpul descreşte proporțional cu $\exp(-K_2 x)$. Distanța la care câmpul scade de 100 de ori rezultă din:

$$\mathrm{e}^{-K_2\delta} = 100^{-1}$$

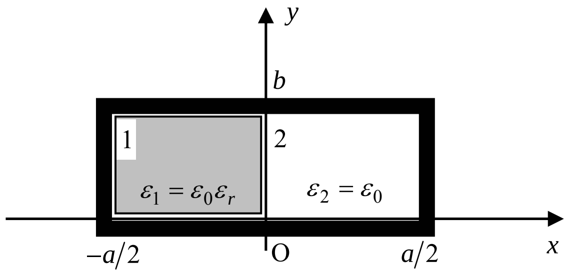


Figura 2.27.1

deci

$$\delta = \frac{1}{K_2}\ln 100 = \frac{d}{2q}\cdot 4{,}6 = \frac{2{,}3}{q}d.$$

Se obține:

$$\delta_{H_1} = \frac{2{,}3}{q_H}d = \frac{2{,}3}{0{,}36\pi}\cdot 2 = 4{,}1\,\text{cm},$$

$$\delta_{E_1} = \frac{2{,}3}{q_E}d = \frac{2{,}3}{0{,}25\pi}\cdot 2 = 5{,}8\,\text{cm}.$$

2.27 Să se determine cea mai joasă frecvență critică a unui ghid metalic de secțiune dreptunghiulară, al cărui interior este umplut pe jumătate cu un dielectric fără pierderi, având permitivitatea electrică relativă (constanta dielectrică) $\varepsilon_r = 4$. Ghidul are dimensiunile transversale $a = 2b = 3\,\text{cm}$.

<u>Rezolvare:</u>

Într-un sistem de referință cartezian, componentele **axiale** E_z şi H_z satisfac ecuațiile:

- în mediul 1:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + k_1^2\phi = 0,$$

unde $k_1^2 = \gamma^2 + \omega^2\varepsilon_1\mu_0$;

- în mediul 2:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + k_2^2\phi = 0,$$

unde $k_2^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_2 \mu_0$,

cu condiții de anulare (pentru E_z) respectiv extrem (pentru H_z) pe pereții metalici perfect conductori şi cu condiții de continuitate la suprafața de separație $x = 0$.

Cu sistemul de referință din figura 2.27.1, folosind metoda separării variabilelor se obțin următoarele soluții care satisfac ecuațiile lui Maxwell precum şi condițiile pe pereții perfect conductori:

$$E_{z1} = E_{01} \sin k_{x1}\left(x + \frac{a}{2}\right)\sin\frac{n_1\pi}{b} y,$$

$$E_{z2} = E_{02} \sin k_{x2}\left(x - \frac{a}{2}\right)\sin\frac{n_2\pi}{b} y,$$

$$H_{z1} = H_{01} \cos k_{x1}\left(x + \frac{a}{2}\right)\cos\frac{n_1\pi}{b} y,$$

$$H_{z2} = H_{02} \cos k_{x2}\left(x - \frac{a}{2}\right)\cos\frac{n_2\pi}{b} y,$$

unde $k_1^2 = k_{x1}^2 + \left(\frac{n_1\pi}{b}\right)^2$, respectiv $k_2^2 = k_{x2}^2 + \left(\frac{n_2\pi}{b}\right)^2$, n_1 şi n_2 fiind numere întregi.

Rămâne ca acestor soluții să li se impună continuitatea componentelor câmpului la $x = 0$.

1. Continuitatea componentelor **longitudinale** la $x = 0$:

(a) $E_{z1} = E_{z2}\big|_{x=0,\ \forall y}$ de unde $n_1 = n_2$ şi $E_{01} \sin p = -E_{02} \sin q$,

(b) $H_{z1} = H_{z2}\big|_{x=0,\ \forall y}$ de unde $n_1 = n_2$ şi $H_{01} \cos p = H_{02} \cos q$,

unde $p \overset{\text{not}}{=} k_{x1}\frac{a}{2}$, $q \overset{\text{not}}{=} k_{x2}\frac{a}{2}$.

Se obține astfel condiția:

$$p^2 - q^2 = \frac{a^2}{4}\left(k_{x1}^2 - k_{x2}^2\right) = \frac{a^2}{4}\left(k_1^2 - k_2^2\right) = \frac{a^2}{4}\omega^2\mu\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) = R^2,$$

cu $R \overset{\text{not}}{=} \frac{a}{2}\omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)}$.

Deci soluțiile care satisfac şi cerința (1.) au forma:

$$\begin{aligned}
E_{z1} &= E_{01} \sin k_{x1}\left(x + \frac{a}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{b} y \\
E_{z2} &= E_{02} \sin k_{x2}\left(x - \frac{a}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{b} y \\
H_{z1} &= H_{01} \cos k_{x1}\left(x + \frac{a}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{b} y \\
H_{z2} &= H_{02} \cos k_{x2}\left(x - \frac{a}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{b} y
\end{aligned} \tag{1}$$

2. Continuitatea componentelor **transversale** la $x = 0$:

(a) $E_{y1} = E_{y2}$,

(b) $H_{y1} = H_{y2}$,

(c) $\varepsilon_1 E_{x1} = \varepsilon_2 E_{x2}$,

(d) $H_{x1} = H_{x2}$.

Exprimând componentele transversale prin componentele longitudinale E_z, H_z, relația (a) devine:

$$-\frac{\gamma}{k_1^2}\frac{\partial E_{z1}}{\partial y}\bigg|_{x=0} + \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_1^2}\frac{\partial H_{z1}}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\frac{\gamma}{k_2^2}\frac{\partial E_{z2}}{\partial y}\bigg|_{x=0} + \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_2^2}\frac{\partial H_{z2}}{\partial x}\bigg|_{x=0}.$$

Se obține de aici:

$$\frac{1}{k_1^2}\left(\gamma\frac{n\pi}{b}E_{01} + \mathrm{j}\omega\mu k_{x1}H_{01}\right)\sin p = -\frac{1}{k_2^2}\left(\gamma\frac{n\pi}{b}E_{02} + \mathrm{j}\omega\mu k_{x2}H_{02}\right)\sin q.$$

Analog, din (b) rezultă:

$$\frac{1}{k_1^2}\left(\gamma\frac{n\pi}{b}H_{01} - \mathrm{j}\omega\varepsilon_1 k_{x1}E_{01}\right)\cos p = \frac{1}{k_2^2}\left(\gamma\frac{n\pi}{b}H_{02} - \mathrm{j}\omega\varepsilon_2 k_{x2}E_{02}\right)\cos q.$$

Observație: De fapt, în formularea continuității câmpului la o suprafață de separație, este întotdeauna suficientă impunerea continuității componentelor **tangențiale** ale E şi H.

Din (c) şi (d) ținând seama de (1) se obțin aceleaşi condiții ca şi din (a) şi (b).

Rezumând, la o frecvență dată ω soluțiile problemei au forma (1) şi satisfac condițiile:

$$p^2 - q^2 = R^2,$$

$$E_{01}\sin p = -E_{02}\sin q,$$

$$H_{01}\cos p = H_{02}\cos q,$$

$$\frac{1}{p^2+\eta^2}\left[\frac{\eta\sqrt{1-\dfrac{p^2+\eta^2}{\varphi_1^2}}}{Z_{d1}}E_{01} + pH_{01}\right]\sin p = \frac{-1}{q^2+\eta^2}\left[\frac{\eta\sqrt{1-\dfrac{q^2+\eta^2}{\varphi_2^2}}}{Z_{d2}}E_{02} + pH_{02}\right]\sin q$$

$$\frac{1}{p^2+\eta^2}\left[\eta Z_{d1}\sqrt{1-\frac{p^2+\eta^2}{\varphi_1^2}}H_{01} - pE_{01}\right]\cos p = \\ = \frac{1}{q^2+\eta^2}\left[\eta Z_{d2}\sqrt{1-\frac{q^2+\eta^2}{\varphi_2^2}}H_{02} - pE_{02}\right]\cos q,$$

unde $\eta \overset{\text{not}}{=} \frac{n\pi}{b}\frac{a}{2}$, $\varphi_1 \overset{\text{not}}{=} \omega\frac{a}{2}\sqrt{\varepsilon_1\mu}$ şi $\varphi_2 = \omega\frac{a}{2}\sqrt{\varepsilon_2\mu}$.

Frecvența critică este frecvența la care $\gamma = 0$, deci la frecvența critică $k_1^2 = \varphi_1^2$, respectiv $k_2^2 = \varphi_2^2$, iar relațiile de mai sus iau o formă mai simplă:

Se obține astfel sistemul:

$$p^2 - q^2 = R^2,$$

$$E_{01}\sin p = -E_{02}\sin q,$$

$$H_{01}\cos p = H_{02}\cos q,$$

$$\frac{pH_{01}\sin p}{\varepsilon_1} = -\frac{qH_{02}\sin q}{\varepsilon_2},$$

$$pE_{01}\cos p = qE_{02}\cos q.$$

Eliminând aici E_{01}, E_{02}, H_{01}, H_{02} între ultimele patru ecuații, se obține:

$$\begin{cases} \dfrac{p\,\mathrm{tg}\,p}{\varepsilon_1} = -\dfrac{q\,\mathrm{tg}\,q}{\varepsilon_2} \\ \dfrac{p}{\mathrm{tg}\,p} = -\dfrac{q}{\mathrm{tg}\,q} \end{cases}$$

de unde rezultă relația

$$\mathrm{tg}\,p = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cdot \mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\,p\right),$$

sau

$$\mathrm{tg}\,Kp = -K\,\mathrm{tg}\,p, \tag{2}$$

unde s-a notat $K = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$.

Rezolvând această ecuație transcendentă, din soluțiile ei, p_c, se obțin frecvențele critice ale diferitelor moduri de propagare posibile în ghidul considerat:

$$\omega_c = \frac{k_{1c}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu}},$$

unde

$$k_{1c} = \sqrt{p_c^2 + \eta^2}.$$

Primele soluții pozitive ale ecuației (2), determinate numeric sau grafic, sunt: $(p_c)_1 = 0$, $(p_c)_2 = 0{,}955$, $(p_c)_3 = 2{,}186$ etc...

Cele mai joase frecvențe critice corespund celor mai mici soluții ale ecuației şi celor mai mici valori ale numărului natural *n.*

$$(p_c)_1 = 0 \begin{cases} n = 0 \ \text{ imposibil (ar corespunde unei unde TEM)} \\ n = 1 \quad \Rightarrow \quad k_{1c} = \pi a/2b = \pi \\ \quad\vdots \end{cases}$$

$$(p_c)_2 = 0{,}955 \begin{cases} n = 0 \ \Rightarrow \ k_{1c} = 0{,}955 \\ n = 1 \ \Rightarrow \ k_{1c} = \sqrt{\pi^2 + 0{,}955^2} \\ \quad\vdots \end{cases}$$

$$(p_c)_3 = 2{,}186 \begin{cases} n = 0 \ \Rightarrow \ k_{1c} = 2{,}186 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Se constată că cea mai joasă frecvență critică corespunde combinației ($p_c = 0{,}955;\ n = 0$). Acesta este modul H_{10} (având $E_z = 0$) şi are frecvența critică:

$$(f_c)_{H_{10}} = \frac{k_{1c}}{2\pi\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}} \approx 3{,}04\cdot 10^9\ \text{Hz} = 3{,}04\,\text{GHz}.$$

Următorul mod este dat de perechea ($p_c = 2{,}186;\ n = 0$). Acesta este un mod H_{20}, care are frecvența critică:

$$\left(f_c\right)_{H_{20}} \approx 3{,}04 \cdot \frac{2{,}186}{0{,}955} = 6{,}96 \cdot 10^9\ \text{Hz} = 6{,}96\,\text{GHz}.$$

Observație:1. În general, modurile care se propagă prin ghidul considerat au, atât $E_z \neq 0$ cât și $H_z \neq 0$, deci sunt moduri HE sau EH. Singura excepție o constituie modurile cu $n = 0$, care sunt de tip H.

2. Ca și la ghidul dielectric, numerele de undă k_{x1}, k_{x2} deci aspectul câmpului, depinde de frecvență.

3. Frecvențele critice ale modurilor superioare H_{n0} nu sunt multipli întregi ai frecvenței critice a modului dominant H_{10}.

Metoda 2.

Frecvențele critice corespunzătoare modurilor $H_{n,0}$ pot fi calculate mai simplu folosind metoda "rezonanței transversale". Această metodă se bazează pe faptul că la frecvența critică cele două unde parțiale care compun modul $H_{n,0}$ au direcții de propagare normale la pereții ghidului, iar câmpul este o undă staționară transversală.

Frecvențele la care se produce această "rezonanță transversală" pot fi se obținute considerându-se linii de transmisiune echivalente celor două domenii din secțiunea transversală a ghidului (figura 2.27.2) și calculând frecvențele de rezonanță ale acestui circuit echivalent:

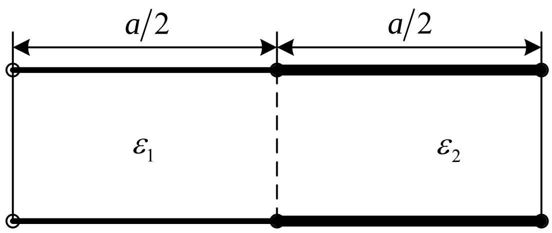


Figura 2.27.2

$$\mathrm{j}Z_{c1}\,\mathrm{tg}\,\beta_1 \frac{a}{2} + \mathrm{j}Z_{c2}\,\mathrm{tg}\,\beta_2 \frac{a}{2} = 0.$$

Dar:

$$\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}},$$

$$\beta_1 = \beta_0 \sqrt{\varepsilon_1},$$

$$\beta_2 = \sqrt{\varepsilon_2}.$$

Se regăsește astfel, direct, ecuația (2):

$$\frac{\mathrm{tg}\,Kp}{\mathrm{tg}\,p} = -K$$

ale cărei soluții p_c conduc la valorile frecvențelor critice.

2.28 Să se calculeze grosimea maximă pe care o poate avea o placă de dielectric având permitivitatea electrică relativă (constanta dielectrică) $\varepsilon_r = 5$ pentru ca să asigure o transmisiune unimodală la frecvența $f = 20\,\text{GHz}$.

Rezolvare:
Într-un ghid placă dielectrică, frecvențele prag ale modurilor care se propagă sunt date de relația:

$$\left(f_p\right)_n = \frac{(n-1)c_0}{2d(\varepsilon_r - 1)}$$

unde n este numărul de ordine al modului (E sau H), iar d este grosimea plăcii de dielectric.

Cea mai joasă frecvență prag (nenulă) se obține pentru $n = 2$:

$$\left(f_p\right)_2 = \frac{c_0}{2d\sqrt{(\varepsilon_r - 1)}}\,.$$

Condiția este ca această frecvență prag să fie mai mare decât frecvența de lucru:

$$\left(f_p\right)_2 > f\,.$$

De aici rezultă:

$$d < \frac{c_0}{2f\sqrt{(\varepsilon_r - 1)}}$$

adică

$$d < \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 2 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = 0{,}0375\,\text{m} = 3{,}75\,\text{cm}\,.$$

Observație: În aceste condiții se pot propaga totuşi două moduri: H_1 şi E_1, ambele având aceeaşi frecvență prag, $f_p = 0$. Transmisia poate deveni unimodală dacă sistemul de excitație evită apariția uneia dintre aceste două unde.

3

REZONATOARE ELECTROMAGNETICE PENTRU MICROUNDE

3.1 O cavitate paralelipipedică cu aer oscilează pe modul E_{111} la frecvența $f_1 = 17{,}5$ GHz, pe modul E_{112} la frecvența $f_2 = 19{,}5$ GHz și pe modul E_{121} la frecvența $f_3 = 31{,}3$ GHz. Să se determine dimensiunile cavității.

Ce permitivitate electrică relativă ε_r trebuie să aibă un dielectric care ar umple complet cavitatea, pentru ca f_1 să scadă la $f_1' = 10\,\mathrm{GHz}$?

Rezolvare:

Pentru cavități paralelipipedice frecvențele de rezonanță sunt date de relația:

$$f_{m,n,p} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2},$$

unde a, b, c sunt dimensiunile cavității iar m, n, p reprezintă setul de numere întregi formând indicele modului de oscilație.

Deci:

$$f_1 = f_{111} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}},$$

$$f_2 = f_{112} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{c^2}},$$

$$f_3 = f_{121} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{1}{c^2}}.$$

Din aceste ecuații rezultă:

$$c = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{3}{f_2^2 - f_1^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\sqrt{\frac{3}{\left(19{,}5\cdot 10^9\right)^2 - \left(17{,}5\cdot 10^9\right)^2}} = 0{,}03\,\mathrm{m} = 3\ \mathrm{cm},$$

$$b = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{3}{f_3^2 - f_1^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\sqrt{\frac{3}{\left(31{,}3\cdot 10^9\right)^2 - \left(17{,}5\cdot 10^9\right)^2}} = 0{,}01\,\mathrm{m} = 1\ \mathrm{cm},$$

$$\frac{1}{a^2}=\frac{4f_1^2}{c_0^2}-\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right),$$

adică

$$a = 2\text{ cm}.$$

Introducând în cavitate un dielectric, frecvențele de rezonanță devin:

$$f'_{m,n,p}=\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{m}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{n}}{b}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{p}}{c}\right)^2}=\frac{c_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{m}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{n}}{b}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{p}}{c}\right)^2}=\frac{f_{m,n,p}}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}}.$$

Rezultă:

$$\varepsilon_r=\left(\frac{f_{m,n,p}}{f'_{m,n,p}}\right)^2=\left(\frac{17{,}5}{10}\right)^2=3{,}06.$$

3.2 O cavitate paralelipipedică rezonează la temperatura $t = 20^\circ\mathrm{C}$ pe frecvența $f = 5\,\mathrm{GHz}$. Care va fi frecvența aceluiași mod de oscilație la temperatura $t' = 50^\circ\mathrm{C}$? Cavitatea are pereți din cupru, $\alpha_\mathrm{cu} = 1{,}7\cdot10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$.

Rezolvare:

Frecvențele de rezonanță ale cavității paralelipipedice sunt date de relația:

$$f_{m,n,p}=\frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2}.$$

În urma dilatației termice, dimensiunile cavității devin:

$$a' = a(1+\alpha_\mathrm{cu}\Delta t),$$
$$b' = b(1+\alpha_\mathrm{cu}\Delta t),$$
$$c' = c(1+\alpha_\mathrm{cu}\Delta t),$$

unde α_cu este coeficientul de dilatație termică al cuprului.
Rezultă:

$$f'_{m,n,p}=\frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a'}\right)^2+\left(\frac{n}{b'}\right)^2+\left(\frac{p}{c'}\right)^2}=\frac{f_{m,n,p}}{1+\alpha_\mathrm{cu}\Delta t}\approx f_{m,n,p}(1-\alpha_\mathrm{cu}\Delta t).$$

Se obține:

$$f'_{m,n,p}=5\cdot10^9\left(1-1{,}7\cdot10^{-6}\cdot293\right)=4{,}9975\cdot10^9\text{ Hz}=4{,}9975\,\mathrm{GHz}.$$

3.3 Să se calculeze frecvența de rezonanță a modului TEM_2 într-o cavitate coaxială având dimensiunile $r = 1\,\mathrm{cm}$, $\mathrm{R} = 3\,\mathrm{cm}$, $l = 10\,\mathrm{cm}$, umplută cu un dielectric fără pierderi având permitivitatea electrică relativă (constanta dielectrică) $\varepsilon_r = 2$.

Rezolvare:

Deoarece la modurile de propagare TEM $\lambda_g = \lambda$ şi nu depinde de dimensiunile transversale, modurile de oscilație TEM_n în cavitatea coaxială au frecvențele de rezonanță date de relația (vezi metoda reflexiilor în studiul rezonatoarelor):

$$\left(f_0\right)_n = n\frac{c}{2l} = n\frac{c_0}{2l\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Înlocuind, se obține:

$$f_{\mathrm{TEM}_2} = 2\cdot\frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 0{,}1\sqrt{2}} = 21{,}2\cdot 10^8\ \mathrm{Hz} = 2{,}12\,\mathrm{GHz}.$$

3.4 O cavitate cilindrică cu aer are dimensiunile $a = 3\,\mathrm{cm}$, $l = 5\,\mathrm{cm}$. Să se calculeze primele trei frecvențe de rezonanță ale acestei cavități.

Rezolvare:

Frecvențele de rezonanță ale diverselor moduri de oscilație rezultă din relația:

$$l = p\cdot\frac{\lambda_g}{2},$$

unde p este un număr natural şi $p \neq 0$ pentru moduri H.

Se obține:

$$f_0 = \sqrt{f_c^2 + \left(\frac{pc}{2l}\right)^2}.$$

Frecvența de rezonanță creşte cu indicele p.

Frecvențele critice cele mai scăzute în ghidul metalic de secțiune circulară corespund, în ordine, modurilor H_{11}, E_{10}, H_{12}, E_{11} şi H_{10} (moduri degenerate) etc.

Se calculează, pe rând:

$$\left(f_c\right)_{H_{11}} = \frac{c_0\rho'_{11}}{2\pi a} = \frac{3\cdot 10^8\cdot 1{,}84}{2\pi\cdot 0{,}03} = 29{,}3\cdot 10^8\ \mathrm{Hz} = 2{,}93\,\mathrm{GHz},$$

$$\left(f_c\right)_{E_{10}} = \frac{c_0\rho_{10}}{2\pi a} = \frac{3\cdot 10^8\cdot 2{,}4}{2\pi\cdot 0{,}03} = 38{,}2\cdot 10^8\ \mathrm{Hz} = 3{,}82\,\mathrm{GHz},$$

$$\left(f_c\right)_{H_{12}} = \frac{c_0\rho'_{12}}{2\pi a} = \frac{3\cdot 10^8\cdot 3{,}05}{2\pi\cdot 0{,}03} = 48{,}5\cdot 10^8\ \mathrm{Hz} = 4{,}85\,\mathrm{GHz},$$

$$\left(f_c\right)_{H_{10}} = \left(f_c\right)_{E_{11}} = \frac{c_0\rho_{11}}{2\pi a} = \frac{3\cdot 10^8\cdot 3{,}83}{2\pi\cdot 0{,}03} = 61\cdot 10^8\ \mathrm{Hz} = 6{,}1\,\mathrm{GHz},$$

$$\frac{c}{2l} = \frac{c_0}{2l\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 0{,}05} = 30\cdot 10^8\ \mathrm{Hz} = 3\,\mathrm{GHz}.$$

Rezultă apoi:

$$f_{E_{1,0,0}} = \left(f_c\right)_{E_{10}} = 3{,}82\,\mathrm{GHz},$$

$$f_{E_{1,1,0}} = \left(f_c\right)_{E_{11}} = 6{,}1\,\mathrm{GHz},$$

$$f_{H_{1,1,1}} = \sqrt{\left(f_c^2\right)_{H_{11}} + \left(c/2l\right)^2} = \sqrt{2{,}93^2 + 3^2} = 4{,}19\,\mathrm{GHz},$$

$$f_{E_{1,0,1}} = \sqrt{\left(f_c^2\right)_{E_{10}} + \left(c/2l\right)^2} = \sqrt{3{,}82^2 + 3^2} = 4{,}86\,\mathrm{GHz},$$

$$f_{H_{1,2,1}} = \sqrt{\left(f_c\right)_{H_{12}} + \left(c/2l\right)^2} = \sqrt{4{,}85^2 + 3^2} = 5{,}7\,\mathrm{GHz},$$

şi aşa mai departe.

Deci modurile acestei cavități care au cele mai joase frecvențe de rezonanță sunt, în ordine: $E_{1,0,0}$, $H_{1,1,1}$, $E_{1,0,1}$.

3.5 O cavitate paralelipipedică cu pereți perfect conductori, având dimensiunile $a = 5\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$ şi ca dielectric aerul, oscilează pe modul $H_{1,0,1}$. Ştiind că intensitatea maximă a câmpului electric din cavitate este $E_0 = 10^3\ \text{V/m}$, să se determine valorile maxime ale densităților de curent de deplasare şi de curent superficial de conducție.

Rezolvare:

Cu ajutorul metodei reflexiilor, plecând de la modul H_{10} în ghidul dreptunghiular pentru modul $H_{1,0,1}$ se obține structura câmpului în cavitate:

$$H_z = -2\text{j}H_0 \cos\frac{\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{c}z\,,$$

$$H_x = 2\text{j}\frac{\lambda_\text{c}}{\lambda_\text{g}} H_0 \sin\frac{\pi}{a}x \cos\frac{\pi}{c}z\,,$$

$$E_y = -2\frac{\lambda_c}{\lambda_g} H_0 (Z_u)_H \sin\frac{\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{c}z\,,$$

unde $\lambda_c = 2a,\ \lambda_g = 2c.$

$$(Z_u)_H = \frac{Z_d}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_c)^2}} = Z_d\frac{\lambda_g}{\lambda_0} = Z_d\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}.$$

Frecvența de rezonanță a modului $H_{1,0,1}$ este:

$$f_{1,0,1} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\sqrt{\frac{1}{25\cdot 10^{-4}}+\frac{1}{36\cdot 10^{-4}}} = 39\cdot 10^8\ \text{Hz} = 3{,}9\,\text{GHz}.$$

Densitatea de curent de deplasare este dată de relația

$$\mathbf{J}_d = \text{j}\omega\varepsilon\mathbf{E}\,,$$

deci are aceeaşi distribuție ca şi $\mathbf{E}$, valoarea maximă fiind în axul central al cavității, paralel cu (Oy):

$$(\mathbf{J}_d)_{\max} = \omega_0\varepsilon_0 E_0 = 2\pi\cdot 3{,}9\cdot 10^9\cdot\frac{1}{36\pi\cdot 10^9}\cdot 10^3 = 217\ \text{A/m}^2.$$

Densitatea de curent superficial este

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n}\times\mathbf{H},$$

deci curenții sunt verticali pe pereții laterali şi "radiali" pe pereții orizontali, completând astfel liniile închise ale curentului total $\mathbf{J} = \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_s$.

Dar

$$\mathbf{H} = H_x\mathbf{e}_x + H_z\mathbf{e}_z,$$

adică

$$|\mathbf{H}| = \sqrt{|H_x|^2 + |H_z|^2}.$$

Deoarece între H_z şi H_x există un defazaj de 90°, maximul rezultantei, corespunzând semiaxei mari a elipsei descrise de $\mathbf{H}$, coincide cu maximul celei mai mari componente. Acest maxim se produce pe axele a două dintre fețele laterale; fie la

$$x = 0 \text{ sau } a;\ \ z = c/2,$$

fie la

$$x = a/2;\ \ z = 0 \text{ sau } c$$

şi are valoarea:

$$|\mathbf{H}|_{\max} = 2H_0 \max\{1;\ a/c\}.$$

Cu datele numerice ale problemei, $a/c < 1$ deci

$$|\mathbf{H}|_{\max} = |\mathbf{J}_s|_{\max} = 2H_0 = \frac{E_0}{Z_0}\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{10^3}{120\pi}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{25+36}} = 2{,}03\,\mathrm{A/m}.$$

3.6 Într-o cavitate paralelipipedică cu dimensiunile $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 1{,}5\,\mathrm{cm}$, $c = 4\,\mathrm{cm}$ se introduce prin peretele $y = 0$ o mică tijă metalică cilindrică, cu diametrul $d = 2\,\mathrm{mm}$, care pătrunde în interiorul cavității pe o lungime $l = 3\,\mathrm{mm}$. Tija este paralelă cu axa (Oy) şi este introdusă prin centrul peretelui respectiv.

Să se calculeze variația frecvenței de rezonanță a modului de oscilație $H_{1,0,1}$ cauzată de introducerea tijei.

Rezolvare:

În lipsa tijei, frecvența de oscilație a modului $H_{1,0,1}$ este:

$$f_{1,0,1} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\sqrt{\frac{1}{9\cdot 10^{-4}}+\frac{1}{16\cdot 10^{-4}}} = 62{,}5\cdot 10^8\ \mathrm{Hz} = 6{,}25\,\mathrm{GHz}.$$

Datorită introducerii tijei (perturbație mică), se produce o variație de frecvență conform relației [2]:

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx \frac{\Delta W_M - \Delta W_E}{W_M + W_E},$$

unde W_M şi W_E sunt energiile magnetică, respectiv electrică din întregul rezonator, iar ΔW_M şi ΔW_E sunt energiile care existau în volumul ΔV şi care au dispărut din cavitate în urma micşorării volumului ei.

Se observă că variația frecvenței de rezonanță produsă în urma micii reduceri a volumului cavității poate fi pozitivă, negativă sau chiar nulă, în funcție de raportul dintre densitățile de energie magnetică şi electrică din locul unde se produce perturbația [2]. O aplicație curentă a acestor concluzii este utilizarea unor şuruburi la realizarea acordului fin al cavităților rezonante, soluție practicată la reglajul filtrelor de microunde.

Pentru a calcula mărimile implicate în relația precedentă se folosesc expresiile componentelor câmpului pentru modul $H_{1,0,1}$ în cavitatea dreptunghiulară:

$$H_z = -2\mathrm{j}H_0\cos\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{c}z,$$

$$H_x = 2\mathrm{j}\frac{a}{c}H_0\sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{c}z,$$

$$E_y = -2\frac{a}{c}H_0(Z_u)_H \sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{c}z = E_0 \sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{c}z\,.$$

Se obține:

$$W_E + W_M = 2W_E = 2\int_V \frac{\varepsilon|E|^2}{4}\mathrm{d}V =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V |E_0|^2 \sin^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi z}{c}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2\frac{abc}{4}$$

În axul cavității, paralel la (Oy) $(x_0 = a/2, z_0 = c/2)$, componentele câmpului sunt:

$$H_z(x_0, z_0) = 0\,,$$

$$H_x(x_0, z_0) = 0\,,$$

$$E_y(x_0, z_0) = E_0\,.$$

Prin urmare:

$$\Delta\,\mathrm{W}_M \cong 0\,,$$

$$\Delta\,\mathrm{W}_E \cong \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}V = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\frac{\pi d^2 l}{4}$$

şi deci rezultă:

$$\Delta f \cong -f_0\frac{\pi d^2 l}{2abc} = -6,25\cdot 10^9\cdot\frac{\pi\cdot 4\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{-3}}{2\cdot 0,03\cdot 0,015\cdot 0,04} = -6,54\,\mathrm{MHz}\,.$$

3.7 Într-o cavitate paralelipipedică cu dimensiunile $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 2\,\mathrm{cm}$, $c = 5\,\mathrm{cm}$, prin centrul peretelui $x = 0$ se introduce o tijă metalică cilindrică de diametru $d = 1\,\mathrm{mm}$, paralelă cu axa (Ox). Tija pătrunde în interiorul cavității pe o lungime $l = 1\,\mathrm{cm}$. Să se calculeze variație frecvenței de rezonanță a modului $H_{1,0,1}$ în cavitate, în urma introducerii tijei.

<u>**Rezolvare:**</u>

Frecvența modului $H_{1,0,1}$ fără tijă este:

$$f_{1,0,1} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\sqrt{\frac{1}{16\cdot 10^{-4}}+\frac{1}{25\cdot 10^{-4}}} = 48\cdot 10^8\ \mathrm{Hz} = 4{,}8\,\mathrm{GHz}\,.$$

Variația de frecvență provocată de introducerea tijei este:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta W_M - \Delta W_E}{W_M + W_E}\,.$$

Pentru a calcula această modificare de frecvență se folosesc expresiile câmpului în cavitate:

$$H_z = -2\mathrm{j}H_0\cos\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{c}z\,,$$

$$H_x = 2\mathrm{j}\frac{a}{c}H_0\sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{c}z\,,$$

$$E_y = -2\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}H_0 Z_d\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{c}z\,.$$

În axul de simetrie al cavității în lungul căreia este introdusă tija $(y = b/2,\ z = c/2)$ expresiile componentelor sunt:

$$H_z = 2\mathrm{j}H_0 \cos\frac{\pi}{a}x,$$

$$H_x = 0,$$

$$E_y = -2\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}H_0 Z_d \sin\frac{\pi}{a}x.$$

Se calculează ΔW_M, ΔW_E corespunzătoare volumului V al tijei:

$$\Delta W_M = \frac{\mu_0}{4}\int_{\Delta V}|H|^2 \mathrm{d}V = \frac{\mu_0}{4}\int_0^l |H_z|^2 S\mathrm{d}x = \frac{\mu_0}{4}S\cdot 4\cdot H_0^2\int_0^l \cos^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mu_0 \pi d^2 H_0}{4}\left(\frac{l}{2}+\frac{a}{4\pi}\sin 2\pi\frac{l}{a}\right)$$

$$\Delta W_E = \frac{\varepsilon_0}{4}\int_{\Delta V}|E|^2 \mathrm{d}V = \frac{\varepsilon_0}{4}\int_0^l |E_y|^2 S\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon_0}{4}S\frac{4H_0^2 Z_d^2\left(a^2+c^2\right)}{c^2}\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mu_0 \pi d^2 H_0^2\left(a^2+c^2\right)}{4c^2}\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{4\pi}\sin 2\pi\frac{l}{a}\right)$$

Se calculează apoi energia totală din cavitate:

$$W_E + W_M = 2W_E = 2\int_V \frac{\varepsilon|E|^2}{4}\mathrm{d}V = 2\frac{\varepsilon_0}{4}\frac{4H_0^2 Z_d^2\left(a^2+c^2\right)}{c^2}\int_0^a\int_0^b\int_0^c \sin^2\frac{\pi}{a}x\sin^2\frac{\pi}{c}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{\mu_0 H_0^2\left(a^2+c^2\right)ab}{2c}$$

Înlocuind, se obține:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{d^2 c}{8b\left(a^2+c^2\right)}\left[\frac{a^2+2c^2}{c^2}\sin 2\pi\frac{l}{a} - 2\pi\frac{la}{c^2}\right] =$$

$$= \frac{10^{-6}\cdot 0{,}05}{8\cdot 0{,}02\left(16\cdot 10^{-4}+25\cdot 10^{-4}\right)}\left[\frac{16\cdot 10^{-4}+25\cdot 10^{-4}}{25\cdot 10^{-4}}\sin 2\pi\frac{1}{4} - 2\pi\frac{10^{-2}\cdot 0{,}04}{25\cdot 10^{-4}}\right]$$

Rezultă:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 1{,}13\cdot 10^{-4}$$

și deci

$$\Delta f = 1{,}13\cdot 10^{-4}\cdot f_0 = 1{,}13\cdot 10^{-4}\cdot 4{,}8\cdot 10^9 \approx 542{,}4\cdot 10^3\ \mathrm{Hz} = 0{,}54\,\mathrm{MHz}.$$

3.8 Într-o cavitate paralelipipedică de dimensiuni $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 2\,\mathrm{cm}$, $c = 6\,\mathrm{cm}$ se introduce o probă dintr-o ferită şi se urmăreşte modificarea frecvenței de rezonanță a modului de oscilație $H_{1,0,1}$. Proba are forma unei sfere de rază $r = 1{,}5\,\mathrm{mm}$ şi poate fi deplasată pe peretele inferior $(y = 0)$ al cavității.

Când proba este în centru, se constată o modificare a frecvenței rezonatorului cu $\Delta f_1 = -7{,}95\,\mathrm{MHz}$. Când proba este adusă lângă mijlocul laturii mari a peretelui inferior, se constată o variație a frecvenței $\Delta f_2 = -16{,}5\,\mathrm{MHz}$, față de frecvența cavității fără probă.

Să se determine permitivitatea electrică şi permeabilitatea magnetică relativă (ε_r, μ_r) ale feritei din care a fost făcută proba.

Rezolvare:

Se poate arăta că dacă o sferă dielectrică este plasată într-un câmp electrostatic uniform, E_1, câmpul produs în interiorul sferei este:

$$E_2 = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_1 = \frac{E_1}{\varepsilon_{ra}},$$

unde ε_r este permitivitatea electrică relativă (constanta dielectrică) a dielectricului iar $\varepsilon_{ra} = (\varepsilon_r + 2)/3$ este permitivitatea electrică aparentă. Relația poate fi folosită dacă sfera este foarte mică şi este plasată într-o regiune de câmp electric omogen.

Similar, pentru câmpul magnetic dintr-o sferă se poate scrie:

$$H_2 = \frac{3}{\mu_r + 2} H_1 = \frac{H_1}{\mu_{ra}}.$$

Frecvența modului de oscilație $H_{1,0,1}$ în cavitatea neperturbată este:

$$f_{1,0,1} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\sqrt{\frac{1}{16\cdot 10^{-4}} + \frac{1}{36\cdot 10^{-4}}} = 45\cdot 10^8\ \mathrm{Hz} = 4{,}5\,\mathrm{GHz}.$$

Variația de frecvență datorată introducerii probei este dată de relația:

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx -\frac{\Delta W_M - \Delta W_E}{W_M + W_E} \approx -\frac{V_1}{V}\frac{(\mu_{ra} - 1)w_M + (\varepsilon_{ra} - 1)w_E}{2w_0},$$

unde w_M, w_E sunt densitățile de energie locale din locul unde a fost introdusă proba, w_0 este densitatea de energie (electrică sau magnetică) medie din cavitate, iar V_1 şi V sunt volumul probei, respectiv volumul cavității.

Pentru modul considerat, componentele câmpului din cavitate, au expresiile:

$$H_z = -2\mathrm{j}H_0 \cos\frac{\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{c}z,$$

$$H_x = 2\mathrm{j}\frac{a}{c}H_0 \sin\frac{\pi}{a}x \cos\frac{\pi}{c}z,$$

$$E_y = -2\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{c}H_0 Z_d \sin\frac{\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{c}z.$$

Energia electrică medie din cavitate, w_0, este:

$$w_0 = \frac{1}{V}\int_V \frac{\varepsilon_0 |E|^2}{4}\mathrm{d}V = \frac{\varepsilon_0}{4}\frac{1}{4}4H_0^2 Z_d^2 \frac{a^2 + c^2}{c^2} = \frac{\mu_0 H_0^2}{4}\frac{a^2 + c^2}{c^2}.$$

În prima poziție a probei, câmpul este:

$$H_z = H_x = 0,$$

$$E_y = -2H_0 Z_d \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{c},$$

prin urmare:

$$\frac{\Delta f_1}{f_0} = -\frac{V_1}{V}\frac{(\varepsilon_{ra}-1)\frac{\varepsilon_0}{4}4H_0^2 Z_d^2 \frac{a^2+c^2}{c^2}}{\frac{\mu_0 H_0^2}{2}\frac{a^2+c^2}{c^2}} = \frac{2V_1}{V}(\varepsilon_{ra}-1).$$

Rezultă de aici:

$$\varepsilon_{ra} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta f_1}{f_0}\cdot\frac{V}{V_1} = 2$$

deci

$$\varepsilon_r = 4.$$

În cea de a doua poziție, $(x=0,\, z=c/2)$, câmpul este:

$$H_z = -\mathrm{j}2H_0,$$

$$H_x = E_y = 0.$$

Se obține:

$$\frac{\Delta f_1}{f_0} = -\frac{V_1}{V}\frac{(\mu_{ra}-1)\frac{\mu_0}{4}4H_0^2}{\frac{\mu_0 H_0^2}{2}\frac{a^2+c^2}{c^2}} = -\frac{2V_1}{V}(\mu_{ra}-1)\frac{c^2}{a^2+c^2},$$

de unde rezultă

$$\mu_{ra} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta f_2}{f_0}\frac{V}{V_1}\frac{a^2+c^2}{c^2} = 4$$

adică

$$\mu_r = 10.$$

3.9 La ce distanță de capătul unui rezonator coaxial, având dimensiunile $r = 1\,\text{cm}$, $R = 3\,\text{cm}$, $l = 10\,\text{cm}$, se poate introduce un şurub de metal care să pătrundă puțin în interiorul cavității şi totuşi să nu modifice frecvența de rezonanță a modului de oscilație TEM_1?

Rezolvare:

Deoarece se urmăreşte să se obțină o variație nulă a frecvenței,

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx \frac{\Delta W_M - \Delta W_E}{W_M + W_E} = 0,$$

şurubul trebuie introdus într-un plan transversal în care densitatea de energie electrică şi magnetică sunt egale între ele.

Pentru rezonatorul coaxial oscilând pe modul TEM_1, componentele câmpului sunt (conform metodei reflexiilor):

$$E_\rho = -\mathrm{j}2E_0\frac{r}{\rho}\sin\frac{\pi}{l}z,$$

$$H_\varphi = 2H_0\frac{r}{\rho}\cos\frac{\pi}{l}z,$$

unde $E_0 = Z_d H_0$.

În apropierea peretelui exterior $(\rho = R)$, densitățile de energie au expresiile:

$$w_M = \frac{\mu_0}{4}|H|^2 = \frac{\mu_0}{4} 4H_0^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{l} z ,$$

$$w_E = \frac{\varepsilon_0}{4}|E|^2 = \frac{\varepsilon_0}{4} 4E_0^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{l} z .$$

Condiția $w_E = w_M$ se reduce la egalitatea

$$\cos^2 \frac{\pi}{l} z = \sin^2 \frac{\pi}{l} z$$

de unde rezultă

$$\frac{\pi}{l} z_0 = \frac{\pi}{4}$$

adică

$$z_0 = l/4 = 2{,}5\,\text{cm}.$$

3.10 Să se calculeze factorul de calitate al unei cavități cilindrice oscilând pe modul $E_{1,1,1}$ știind că pereții sunt dintr-un metal perfect conductor, iar dielectricul are permitivitatea electrică relativă $\varepsilon_r = 4$ și conductivitatea $\sigma = 10^{-4}\,\text{S/m}$.

Cavitatea are raza $a = 5\,\text{cm}$ și lungimea $l = 7\,\text{cm}$.

Rezolvare:

Frecvența de rezonanță a modului $E_{1,1,1}$ în cavitatea cilindrică este:

$$(f_0)_{E_{1,1,1}} = \sqrt{f_{E_{1,1}}^2 + \left(\frac{c}{2l}\right)^2} = \frac{c_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{\rho_{11}}{\pi a}\right)^2 + \frac{1}{l^2}} = 21 \cdot 10^8\ \text{Hz} = 2{,}1\,\text{GHz} .$$

Deoarece pierderile cavității sunt numai în dielectric, factorul de calitate pentru orice mod de oscilație este dat de relația

$$Q_0 = Q_d = \frac{\omega_0 \varepsilon}{\sigma_d} = \frac{2\pi (f_0)_{E_{1,1,1}} \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma_d} .$$

Înlocuind datele problemei, se obține:

$$Q_0 = \frac{2\pi \cdot 2{,}1 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{1}{36\pi \cdot 10^9} \cdot 4}{10^{-4}} \approx 4666 .$$

3.11 Să se calculeze factorul de calitate al unei cavități paralelipipedice din cupru, $\sigma_{Cu} = 5 \cdot 10^7\,\text{S/m}$, având dimensiunile $a = 2\,\text{cm}$, $b = 1\,\text{cm}$, $c = 2{,}5\,\text{cm}$, oscilând pe modul $H_{1,0,1}$, dacă rezonatorul conține un dielectric fără pierderi cu permitivitatea electrică relativă (constanta dielectrică) $\varepsilon_r = 2$.

Rezolvare:

Factorul de calitate propriu al unei cavități care are dielectric ideal dar ai cărei pereți nu sunt perfect conductori este:

$$Q_0 = Q_m = \frac{2}{\delta_m} \frac{\int_V |H|^2 \mathrm{d}V}{\oint_\Sigma |H_t|^2 \mathrm{d}a},$$

unde δ_m este adâncimea de pătrundere a câmpului în pereții metalici, Σ reprezintă suprafața pereților, iar H_t este câmpul magnetic tangențial la această suprafață.

În cazul modului de oscilație $H_{1,0,1}$ din cavitatea paralelipipedică, ținând seama de faptul că

$$\frac{|H_{x0}|}{|H_{z0}|} = \frac{\lambda_c}{\lambda_g} = \frac{c}{a},$$

pentru integrala de la numărător se obține expresia:

$$\int_V |H|^2 \mathrm{d}V = \int_V \left(|H_z|^2 + |H_x|^2\right) \mathrm{d}V = |H_{z0}|^2 \frac{abc}{4}\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right).$$

Calculul integralei de la numitor poate fi efectuat considerându-se separat integralele pe fiecare perete al rezonatorului paralelipipedic:

$$\oint_\Sigma |H_t|^2 \mathrm{d}a = 2\int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c |H_z|^2_{x=0} \mathrm{d}z + 2\int_0^b \int_0^c \left(|H_x|^2 + |H_z|^2\right)_{y=0} \mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2\int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c |H_x|^2_{z=0} \mathrm{d}x =$$

$$= 2|H_{z0}|^2 \left[\frac{bc}{2} + \frac{ac}{4}\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) + \frac{ab}{2}\frac{a^2}{c^2}\right]$$

Înlocuind aceste rezultate în expresia factorului de calitate, rezultă:

$$Q = Q_m = \frac{1}{\delta_m} \frac{1 + \frac{a^2}{c^2}}{\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right)}.$$

Cu datele problemei, se calculează frecvența modului de oscilație $H_{1,0,1}$:

$$f_{1,0,1} = \frac{c_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^{-4}} + \frac{1}{6{,}25 \cdot 10^{-4}}} = 68 \cdot 10^8\ \mathrm{Hz} = 6{,}8\,\mathrm{GHz}.$$

Adâncimea de pătrundere δ_m are valoarea:

$$\delta_m = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_m}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \sigma_m}} = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot 6{,}8 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^7}} = 0{,}86\,\mu\mathrm{m}.$$

Rezultă:

$$Q = \frac{1}{0{,}86 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1 + (2/2{,}5)^2}{\frac{2}{0{,}02} + \frac{1}{0{,}01} + \left(\frac{2}{2{,}5}\right)^2 \left(\frac{1}{0{,}01} + \frac{2}{0{,}025}\right)} = 6050.$$

3.12 Să se calculeze factorul de calitate al unei cavități paralelipipedice de dimensiuni $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 1{,}5\,\mathrm{cm}$, $c = 5\,\mathrm{cm}$, oscilând pe modul $H_{1,0,1}$, ştiind că dielectricul din interiorul cavității are permitivitatea electrică relativă $\varepsilon_r = 4$ şi conductivitatea $\sigma_d = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{S/m}$. Cavitatea este din cupru, $\sigma_{Cu} = 5 \cdot 10^7\ \mathrm{S/m}$.

Rezolvare:

Deoarece există pierderi atât în metal cât şi în dielectric, factorul de calitate al rezonatorului se calculează cu formula

$$\frac{1}{Q_0}=\frac{1}{Q_m}+\frac{1}{Q_d},$$

unde

$$Q_d=\frac{\omega_0\varepsilon}{\sigma_d}$$

iar

$$Q_m=\frac{1}{\delta_m}\cdot\frac{1+\left(\frac{a}{c}\right)^2}{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\left(\frac{a}{c}\right)^2\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right)}, \text{ (vezi problema precedentă).}$$

Cu datele problemei, se calculează frecvenţa de rezonanţă a modului de oscilaţie considerat:

$$f_{1,0,1}=\frac{c_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}}=\frac{3\cdot10^8}{2\sqrt{4}}\sqrt{\frac{1}{0{,}03^2}+\frac{1}{0{,}05^2}}=29{,}1\cdot10^8\ \text{Hz}=2{,}91\,\text{GHz}.$$

La această frecvenţă, adâncimea de pătrundere în cupru este

$$\delta_m=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_{Cu}}}=\sqrt{\frac{1}{\pi f\mu_0\sigma_{Cu}}}=\sqrt{\frac{1}{\pi\cdot2{,}91\cdot10^9\cdot4\pi\cdot10^{-7}\cdot5\cdot10^7}}=1{,}31\,\mu\text{m}.$$

Rezultă:

$$Q_m=\frac{1}{1{,}31\cdot10^{-6}}\cdot\frac{1+\left(\frac{3}{5}\right)^2}{\frac{2}{0{,}03}+\frac{1}{0{,}015}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{1}{0{,}015}+\frac{2}{0{,}05}\right)}=6045,$$

$$Q_d=\frac{2\pi\cdot2{,}91\cdot10^9\cdot\frac{1}{36\pi\cdot10^9}\cdot4}{2\cdot10^{-5}}=32333$$

şi deci

$$Q_0=\frac{Q_mQ_d}{Q_m+Q_d}=\frac{6045\cdot32333}{6045+32333}=5092.$$

3.13 Să se calculeze factorul de calitate al unui rezonator coaxial realizat dintr-o porţiune de ghid coaxial, de lungime $l=10\,\text{cm}$, terminată în scurtcircuit la ambele capete care rezonează pe frecvenţa fundamentală $f_0=2\,\text{GHz}$. Constanta de atenuare a ghidului la frecvenţa f_0 este $\alpha=0{,}05\,\text{dB/m}$, iar discurile terminale de scurtcircuit sunt din alamă, $\sigma=4\cdot10^7\ \text{S/m}$.

Rezolvare:

Pierderile din rezonator pot fi grupate astfel:

$$P_p = P_{pm} + P_{pd} + P_{psc},$$

unde P_{pm} este puterea pierdută în conductoarele cilindrice, P_{pd} puterea pierdută în dielectric iar P_{psc} reprezintă puterea pierdută în cele două discuri de scurcircuitare.

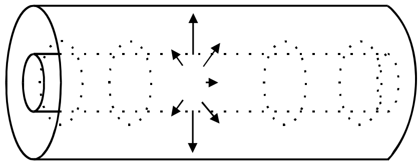


Figura 3.13.1 Liniile câmpului pentru modul de oscilație TEM_1 în rezonatorul coaxial

Rezultă:

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_{0c}} + \frac{1}{Q_{sc}},$$

unde Q_{0c} este factorul de calitate intrinsec al cablului (înglobând pierderile P_{pm} şi P_{pd}) iar Q_{sc} este factorul de calitate al scurtcircuitelor, definit cu relația:

$$Q_{sc} = \omega_0 \frac{W}{P_{psc}} = \frac{2}{\delta_m} \frac{\int_V |H|^2 dV}{\int_{\Sigma_{sc}} |H_t|^2 \mathrm{d}a}.$$

În rezonatorul coaxial oscilând pe modul fundamental (TEM_1), câmpul electromagnetic are o singură componentă:

$$H_\varphi = H_0 \frac{r}{\rho} \cos\frac{\pi}{l} z,$$

deci

$$Q_{sc} = \frac{2}{\delta_m} \frac{H_0^2 r^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^l \cos^2 \frac{\pi}{l} \mathrm{z}\mathrm{d}\mathrm{z} \int_r^R \frac{1}{\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho}{2H_0^2 r^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_r^R \frac{1}{\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho}.$$

Factorul de calitate intrinsec al cablului este:

$$Q_{0c} = \frac{\pi}{\alpha\lambda} = \frac{\pi}{2\alpha l}.$$

Deoarece, cu datele problemei,

$$\alpha = 0{,}05\,\mathrm{dB/m} = \frac{0{,}05}{8{,}7}\,\mathrm{Np/m} = 5{,}75 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Np/m},$$

iar

$$\delta_m = \sqrt{\frac{2}{\omega_0 \mu_0 \sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^7}} = 178 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m} = 1{,}78\,\mu\mathrm{m},$$

rezultă

$$Q_{0c} = \frac{\pi}{2 \cdot 5{,}75 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}1} = 2732,$$

$$Q_{sc} = \frac{l}{2\delta} = \frac{0{,}1}{2 \cdot 1{,}78 \cdot 10^{-6}} = 28090,$$

deci, în final,

$$Q_0 = \frac{Q_{0c} Q_{sc}}{Q_{0c} + Q_{sc}} = \frac{2732 \cdot 28090}{2732 + 28090} = 2490.$$

3.14 O cavitate rezonantă pe un anumit mod are frecvenţa de rezonanţă $f_0 = 10\,\text{GHz}$ şi este cuplată la un ghid coaxial de acces având impedanţa caracteristică $Z_C = 50\,\Omega$. Să se calculeze factorul de calitate propriu Q_0 al cavităţii cunoscând factorul lui de calitate în sarcină, $Q_s = 1000$, şi indicele de cuplaj al cavităţii cu linia de acces, $\beta = 2$.

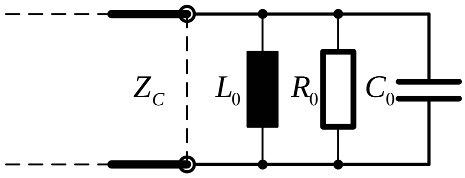
Să se determine o schemă echivalentă pentru rezonator.

Rezolvare:

Factorul de calitate propriu Q_0 este legat de factorul de calitate în sarcină Q_s prin relaţia [1]:

$$Q_0 = (1+\beta)Q_s = (1+2) \cdot 1000 = 3000.$$

Schema echivalentă a cavităţii depinde de planul considerat pe linia de acces. Alegând un plan în care la dezacord (departe de frecvenţa de rezonanţă f_0) există un minim al distribuţiei de tensiune, se obţine o schemă echivalentă de tip derivaţie.



Pentru această schemă,

$$\beta = \frac{R_0}{Z_C},$$

$$Q_0 = \frac{R_0}{X_L} = -\frac{R_0}{X_C}.$$

Rezultă astfel elementele schemei echivalente:

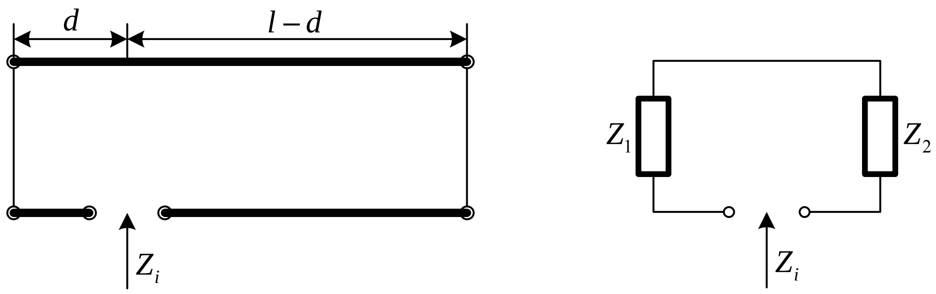
$$R_0 = \beta Z_C = 2 \cdot 50 = 100\,\Omega,$$

$$X_L = \frac{R_0}{Q_0} = \frac{100}{3000} = 0{,}033\,\Omega,$$

$$X_C = -X_L = -0{,}033\,\Omega.$$

3.15 Un rezonator este alcătuit dintr-o linie bifilară, având ca dielectric aerul, terminată în scurtcircuit la capete. Să se determine schema echivalentă a acestui rezonator, valabilă în jurul frecvenţei de rezonanţă $f_0 = 1{,}5\,\text{GHz}$ a modului de oscilaţie fundamental (TEM_1), dacă cuplajul cu rezonatorul se face serie, la o distanţă $d = 2\,\text{cm}$ de unul din capete.

Linia are capacitatea lineică $C_L = 67\,\text{pF/m}$ şi o constantă de atenuare, la frecvența f_0, de valoare $\alpha = 3\,\text{dB/m}$.



Rezolvare:

Schema echivalentă în cazul cuplajului considerat este o schemă de rezonator serie, având elementele:

$$R'_e = \frac{Z_C \alpha l}{\cos^2(\pi d/l)},$$

$$L'_e = \frac{L_L l}{2\cos^2(\pi d/l)},$$

$$C'_e = \frac{1}{\omega_0^2 L'_e}.$$

Cu datele problemei, se calculează, pe rând:

- impedanța caracteristică a liniei:

$$Z_C = \frac{1}{c_0 C_L} = \frac{1}{3\cdot 10^8 \cdot 67\cdot 10^{-12}} = 50\,\Omega;$$

- inductanța lineică:

$$L_L = Z_C^2 C_L = 50^2 \cdot 67\cdot 10^{-12} = 167{,}5\cdot 10^{-9}\ \text{H/m} = 167{,}5\,\text{nH/m}.$$

Pe de altă parte,

$$\alpha = 3\,\text{dB/m} = \frac{3}{8{,}7}\,\text{Np/m} = 0{,}345\,\text{Np/m},$$

iar lungimea rezonatorului este:

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{c_0}{2f_0} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 1{,}5\cdot 10^9} = 0{,}1\,\text{m}$$

astfel încât se obține:

$$R'_e = \frac{50\cdot 0{,}345\cdot 0{,}1}{\cos^2(\pi\cdot 2/10)} = 2{,}63\,\Omega,$$

$$L'_e = \frac{167{,}5\cdot 10^{-9}\cdot 0{,}1}{2\cos^2(\pi\cdot 2/10)} = 12{,}79\cdot 10^{-9}\ \text{H} = 12{,}79\,\text{nH},$$

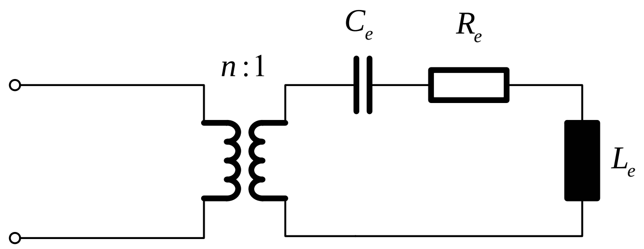
$$C'_e = \frac{1}{4\pi^2\cdot (1{,}5\cdot 10^9)^2\cdot 12{,}79\cdot 10^{-9}} = 0{,}88\cdot 10^{-12}\ \text{F} = 0{,}88\,\text{pF}.$$

Observație: Se știe că pentru un rezonator serie (fără priză) elementele schemei echivalente au expresiile:

$$R_e = Z_C \alpha l = R'_e \cos^2(\pi d/l),$$

$$L_e = \frac{1}{2} L_L l = L'_e \cos^2(\pi d/l),$$

$$C_e = \frac{1}{\omega_0^2 L_e} = \frac{C'_e}{\cos^2(\pi d/l)}.$$



Se observă că schema echivalentă a rezonatorului cu priză se deosebește de schema echivalentă a rezonatorului serie (fără priză) prin prezența unui transformator ideal având raportul de transformare:

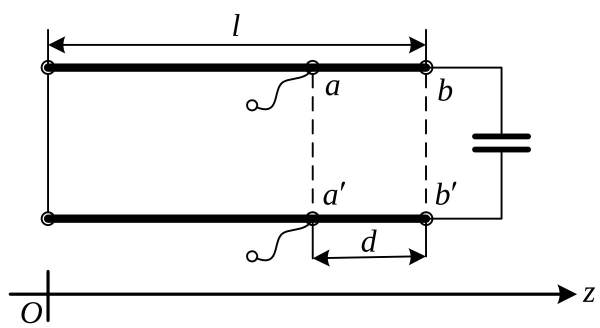
$$n = \frac{1}{|\cos(\pi d/l)|}.$$

3.16 Un rezonator este realizat dintr-un tronson de ghid coaxial de lungime $l = 15\,\text{cm}$, terminat la un capăt în scurtcircuit, iar la celălalt capăt având un condensator cu capacitatea $C = 5\,\text{pF}$. Linia din care a fost realizat tronsonul are impedanța caracteristică $Z_C = 50\,\Omega$, constanta de atenuare $\alpha = 0{,}05\,\text{dB/m}$ iar permitivitatea electrică relativă a dielectricului din interior este $\varepsilon_r = 2$.

Să se calculeze cea mai joasă frecvență de rezonanță a acestui rezonator.

Să se determine factorul de calitate propriu al rezonatorului, considerând o capacitate terminală ideală (fără pierderi) și admițând pierderi nule în conductoarele cablului.

Să se alcătuiască schema echivalentă a rezonatorului dacă cuplajul se face paralel, la o distanță $d = 4\,\text{cm}$ de capătul liniei terminat pe condensator.



Rezolvare:

Expresiile tensiunii şi curentului în lungul liniei terminate în scurtcircuit la $z = 0$ sunt de forma:

$$U = U_0 \sin \beta z,$$

$$I = I_0 \cos \beta z,$$

unde U_0 şi I_0 sunt legate prin relația:

$$\frac{|U_0|}{|I_0|} = Z_C .$$

Frecvențele de rezonanță rezultă din condiția generală de rezonanță,

$$W_E = W_M ,$$

unde

$$W_E = \frac{1}{4}\int_0^l C_L \left|U^2(z)\right| \mathrm{dz} + \frac{1}{4} C \left|U^2(l)\right| = \frac{1}{4} C_L \left|U_0^2\right| \left[\int_0^l \sin^2 \beta z \mathrm{dz} + \frac{C}{C_L}\sin^2 \beta l\right],$$

respectiv

$$W_M = \frac{1}{4}\int_0^l L_L \left|I^2(z)\right| \mathrm{dz} = \frac{1}{4} L_L \left|I_0^2\right| \int_0^l \cos^2 \beta z \mathrm{dz} .$$

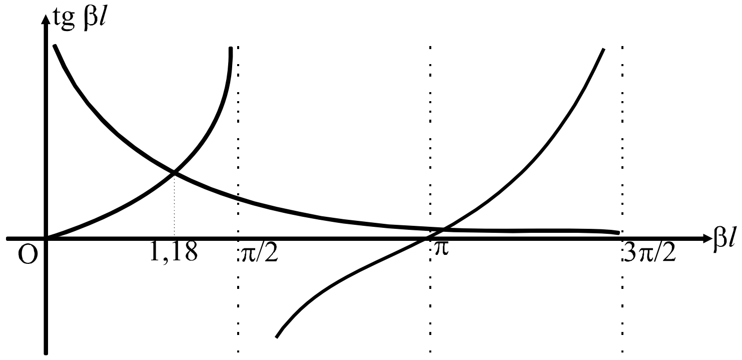
Din egalarea energiilor rezultă:

$$\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\beta l}{4\beta} + \frac{C}{C_L}\sin^2 \beta l = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\beta l}{4\beta},$$

adică

$$\mathrm{tg}\, \beta l = \frac{C_L l}{C} \cdot \frac{1}{\beta l} .$$

Ecuația poate fi rezolvată numeric sau grafic:



În cazul problemei considerate, se calculează:

$$C_L = \frac{1}{c_d Z_C} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c_0 Z_C} = \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 10^8 \cdot 50} = 94{,}2 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m} = 94{,}2\,\mathrm{pF/m},$$

de unde

$$\frac{lC_L}{C} = \frac{0{,}15 \cdot 94{,}2 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{-12}} \approx 2{,}83 .$$

Înlocuind, se obține prima soluție

$$\beta_{01} l \approx 1{,}18$$

şi deci

$$f_{01} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}\, l}\beta_{01} l = \frac{3\cdot 10^8}{2\pi\sqrt{2}\cdot 0{,}15}\cdot 1{,}18 \approx 266\cdot 10^6\ \mathrm{Hz} = 266\,\mathrm{MHz}.$$

Observaţie: Celelalte frecvenţe de rezonanţă nu sunt multipli ai acestei valori !
Factorul de calitate propriu se obţine din relaţia:

$$Q_0 = \omega_0 \frac{\mathrm{W}}{P_p} = \omega_0 \frac{\mathrm{W}}{P_{pm} + P_{pd} + P_{pc}} \cong \omega_0 \frac{\mathrm{W}}{P_{pd}},$$

unde au fost notate cu P_{pm}, P_{pd}, P_{pc} puterile pierdute în metal, respectiv în dielectric şi în capacitatea terminală.

Pentru calculul factorului de calitate se exprimă, pe rând:

$$W = W_E + W_M = 2W_M = 2\frac{1}{4} I_0^2 L_L \int_0^l \cos^2(\beta_{01} z)\mathrm{d}z,$$

$$P_{pd} = \frac{1}{2} G_L \int_0^l U^2(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2} U_0^2 G_L \int_0^l \sin^2(\beta_{01} z)\mathrm{d}z,$$

$$P_{pm} = 0,$$

$$P_{pc} = 0,$$

şi deci:

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L_L}{Z_C^2 G_L} \frac{\int_0^l \cos^2(\beta_{01} z)\mathrm{d}z}{\int_0^1 \sin^2(\beta_{01} z)\mathrm{d}z} = \omega_0 \frac{C_L}{G_L} \frac{\int_0^l \cos^2(\beta_{01} z)\mathrm{d}z}{\int_0^1 \sin^2(\beta_{01} z)\mathrm{d}z} = \frac{\pi}{\lambda}\frac{2Y_C}{G_L} \frac{\int_0^l \cos^2(\beta_{01} z)\mathrm{d}z}{\int_0^1 \sin^2(\beta_{01} z)\mathrm{d}z}$$

Constanta de atenuare a unei linii TEM cu pierderi mici are expresia [4]:

$$\alpha = \alpha_m + \alpha_d = \frac{R_L}{2Z_C} + \frac{G_L}{2Y_C}.$$

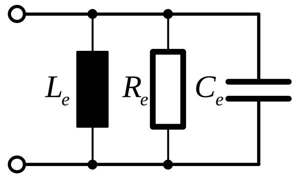
Dacă pierderile în metal sunt neglijabile, $R_L \approx 0$ şi deci

$$\alpha \approx \frac{G_L}{2Y_C}.$$

Înlocuind, se obţine pentru factorul de calitate:

$$Q_0 = \frac{\pi}{\alpha\lambda} \frac{\int_0^l \cos^2(\beta_{01} z)\mathrm{d}z}{\int_0^1 \sin^2(\beta_{01} z)\mathrm{d}z} = \frac{\pi}{\alpha\lambda} \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\beta_{01} l)}{4\beta}}{\frac{1}{2} - \frac{\sin(2\beta_{01} l)}{4\beta}} = 1274.$$

La bornele capacităţii (cuplaj paralel) apare un circuit rezonant derivaţie, având frecvenţa de rezonanţă f_{01} şi factorul de calitate Q_0.



Capacitatea echivalentă se obține din egalarea energiilor electrice din rezonator şi din schema echivalentă:

$$\frac{1}{4}C_e\left|U_0^2\right|\sin^2(\beta_{01}l)=\frac{1}{4}C_L\left|U_0^2\right|\left[\int_0^l\sin^2(\beta_{01}z)\mathrm{d}z+\frac{C}{C_L}\sin^2(\beta_{01}l)\right],$$

de unde rezultă:

$$C_e=C+C_L\frac{\int_0^l\sin^2(\beta_{01}z)\mathrm{d}z}{\sin^2(\beta_{01}l)}=C+\frac{C_Ll}{2}\frac{1-\frac{\lambda}{l}\frac{1}{4\pi}\sin^2\beta_{01}l}{\sin^2\beta_{01}l}=10{,}8\,\mathrm{pF}.$$

Se obține:

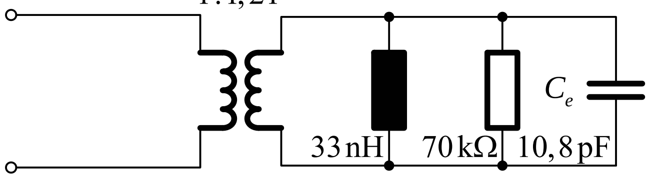
$$L_e=\frac{1}{\omega_0^2C_e}=\frac{1}{4\pi^2f^2C_e}=\frac{1}{4\pi^2\cdot\left(266\cdot10^6\right)^2\cdot10{,}8\cdot10^{-12}}=33\,\mathrm{nH},$$

$$R_e=Q_0\omega_0L_e=1274\cdot2\pi\cdot266\cdot10^6\cdot33\cdot10^{-9}=70\cdot10^3\,\Omega=70\,\mathrm{k}\Omega.$$

Cunoscând schema echivalentă la bornele capacității (bb') se obține imediat schema echivalentă la bornele de acces (aa') prin adăugarea unui transformator ideal, cu raportul de transformare:

$$N=\frac{U_{aa'}}{U_{bb'}}=\frac{|U_0|\sin\beta_{01}(l-d)}{|U_0|\sin\beta_{01}l}=\frac{1}{1{,}21}=0{,}82$$

Schema echivalentă obținută este prezentată în figura de mai jos.



3.17 Se consideră un rezonator *Fabry – Perot*, alcătuit din două plăci metalice conductoare, paralele, foarte mari față de lungimea de undă (teoretic infinite). Să se determine factorul de calitate al acestui rezonator, dacă dielectricul este aer, iar pereții au conductivitatea $\sigma=5\cdot10^7\,\mathrm{S/m}$. Frecvența de lucru este de $300\,\mathrm{GHz}$, iar distanța dintre plăci este de $10\,\mathrm{cm}$.

Rezolvare:

Pentru un astfel de rezonator, factorul de calitate se calculează din energia înmagazinată şi din puterea pierdută corespunzătoare unității de arie transversală. Câmpul din rezonator este o undă staționară, rezultată din reflexiile unei unde plane care se propagă normal pe pereți.

Se obține:

$$Q_0 = \frac{2}{\delta_m} \frac{\int\limits_V |H|^2 \mathrm{d}V}{\oint\limits_\Sigma |H_t|^2 \mathrm{d}a} = \frac{2}{\delta_m} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2\delta_m}$$

în care adâncimea de pătrundere are valoarea:

$$\delta_m = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot 3 \cdot 10^{11} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^7}} = 13 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m} = 0{,}13\,\mu\mathrm{m}.$$

Rezultă:

$$Q_0 = \frac{0{,}1}{2 \cdot 0{,}13 \cdot 10^{-6}} = 384615.$$

Observație: Deoarece

$$p = \frac{2a}{\lambda_0} = \frac{2af_0}{c_0} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 3 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 200,$$

modul de oscilație din rezonator poate fi numit TEM_{200}.

3.18 O cavitate prezintă o rezonanță la $f_r = 7\,\mathrm{GHz}$, iar pe ghidul de acces la această frecvență se constată un raport de undă staționară $\sigma_r = 2$. Modificând frecvența în jurul acestei valori, se obține o curbă $\sigma = \sigma(f)$ care poate fi aproximată de expresia analitică $\sigma \approx \sigma_0 + k(f - f_r)^2$, unde $k = 4 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{s}^2$.

Să se determine factorul de calitate propriu al cavității.

__**Rezolvare:**__

Curba $\sigma = \sigma(f)$ permite determinarea factorului de calitate în sarcină Q_s cu relația [1]:

$$Q_s = \frac{f_r}{B_{3\mathrm{dB}}},$$

unde $B_{3\mathrm{dB}}$ este banda de frecvențe cuprinsă între limitele determinate de o anumită valoare $\sigma_{1/2}$ a raportului de undă staționară. Dacă σ crește nemărginit atunci când frecvența se îndepărtează de f_r, atunci $\sigma_{1/2}$ este dat de relația:

$$\sigma_{1/2} \approx \frac{\sigma_r + 1 + \sqrt{\sigma_r^2 + 1}}{\sigma_r + 1 - \sqrt{\sigma_r^2 + 1}} = 6{,}85.$$

Acestei valori limită îi corespunde un dezacord:

$$|f - f_r| = \sqrt{\frac{\sigma_{1/2} - \sigma_r}{k}} = \sqrt{\frac{6{,}85 - 2}{4 \cdot 10^{-13}}} = 3{,}48\,\mathrm{MHz}.$$

Deci:

$$Q_s = 1000.$$

Factorul de calitate propriu Q_0 este legat de Q_s prin relația:

$$Q_0 = (1 + \beta)Q_s,$$

în care β este indicele de cuplaj,

$$\beta = \begin{cases} 1/\sigma_r \text{, la o cavitate subcuplată} \\ \sigma_r \text{, la o cavitate supracuplată} \end{cases}$$

Pentru a calcula Q_0 trebuie cunoscut tipul de cuplaj (subcuplat sau supracuplat). În funcție de aceasta se obțin următoarele valori posibile ale lui Q_0 :

$$Q_{01} = (1 + 1/\sigma_r)Q_s = 1500 \text{, dacă } \beta < 1 \text{,}$$

$$Q_{02} = (1 + \sigma_r)Q_s = 3000 \text{, dacă } \beta > 1 \text{.}$$

Caracterul sub – sau supracuplat nu rezultă din datele problemei, dar poate fi dedus experimental [1].

4

NOȚIUNI DE TEORIA CIRCUITELOR LINIARE DE MICROUNDE

4.1 Să se calculeze elementele schemei echivalente în T a unei porțiuni de ghid uniform, fără pierderi, de lungime l.

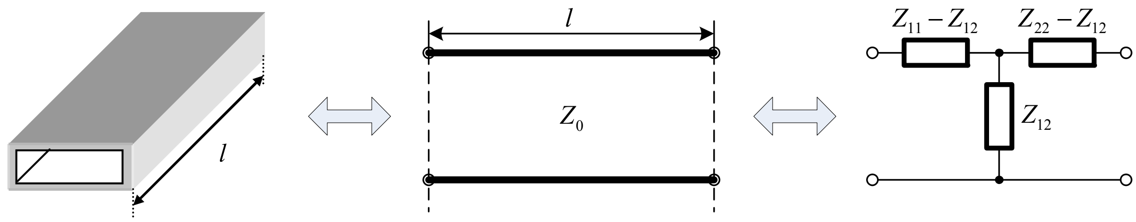
Rezolvare:

Ghidul fiind fără pierderi, schema lui echivalentă în T va fi compusă din trei reactanțe, ca în figură, unde

$$Z_{11} = Z_{i1}\Big|_{I_2=0}$$

$$Z_{22} = Z_{i2}\Big|_{I_1=0}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} .$$



Reactanțele Z_{11} și Z_{22} se obțin imediat:

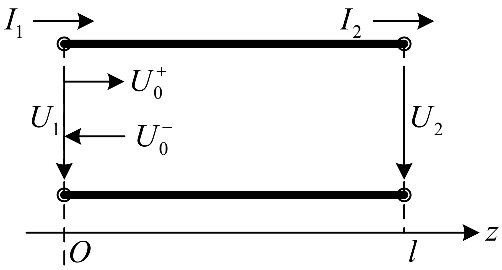
$$Z_{11} = Z_{22} = Z_i\Big|_{Z_s=\infty} = -\mathrm{j}Z_0 \operatorname{ctg} \beta l$$

Pentru calculul reactanței Z_{12} pot fi folosite expresiile undelor (directă și inversă) de tensiune, la o linie fără pierderi:

$$U_1 = U_0^+ + U_0^-$$

$$U_2 = U(z)\big|_{z=l} = U_0^+ \,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l} + U_0^- \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta l}$$

În același mod se pot exprima și curenții I_1 și I_2:



$$I_1 = \frac{1}{Z_0}\left(U_0^+ - U_0^-\right)$$

$$I_2 = I(z)\big|_{z=l} = \frac{1}{Z_0}\left(U_0^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l} - U_0^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta l}\right)$$

Pentru $I_2 = 0$ rezultă:

$$U_0^- = U_0^+ \,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}$$

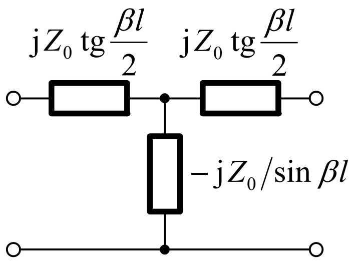
deci

$$Z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{2U_0^+ \,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l}}{\frac{1}{Z_0} U_0^+\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}\right)} = -\mathrm{j}Z_0 \frac{1}{\sin \beta l}.$$

Se obține apoi:

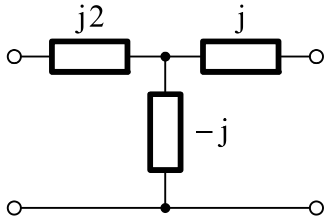
$$Z_{11} - Z_{12} = Z_{22} - Z_{12} = \mathrm{j}Z_0\left(\frac{1}{\sin\beta l} - \operatorname{ctg}\beta l\right) = \mathrm{j}Z_0 \operatorname{tg}\frac{\beta l}{2}$$

Schema echivalentă a tronsonului de ghid este reprezentată în figura de mai jos.



4.2 Să se calculeze matricea de repartiție **S** corespunzătoare diportului cu schema din figură. Valorile impedanțelor componente sunt normate la impedanța caracteristică a liniilor de acces, $Z_{C1} = Z_{C2} = Z_0$.

Să se verifice apoi proprietățile matricei **S** pentru joncțiuni reciproce, fără pierderi.

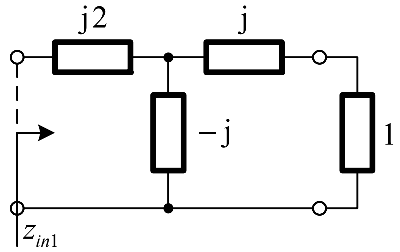


Rezolvare:

Termenii S_{11} şi S_{22} se obțin imediat, ei reprezentând coeficienți de reflexie la câte una dintre porți, atunci când cealaltă este terminată adaptat:

$$S_{11} = \Gamma_1\big|_{Z_2=Z_0},$$

$$S_{22} = \Gamma_2\big|_{Z_1=Z_0}.$$



Se calculează, pe rând:

$$S_{11} = \left.\frac{Z_{in1}-Z_0}{Z_{in1}+Z_0}\right|_{Z_2=Z_0} = \left.\frac{\frac{Z_{in1}}{Z_0}-1}{\frac{Z_{in1}}{Z_0}+1}\right|_{Z_2=Z_0} = \left.\frac{z_{in1}-1}{z_{in1}+1}\right|_{z_2=1}.$$

Impedanța de intrare normată, la poarta 1, cu poarta 2 terminată adaptat, are valoarea:

$$z_{in1}\big|_{z_2=1} = [(1+\mathrm{j}) \,||\, (-\mathrm{j})] + \mathrm{j}2 = \frac{(-\mathrm{j})(1+\mathrm{j})}{1} + \mathrm{j}2 = 1+\mathrm{j}$$

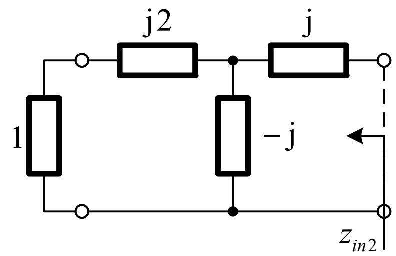
astfel încât se obține:

$$S_{11} = \frac{(1+\mathrm{j})-1}{(1+\mathrm{j})+1} = \frac{1+\mathrm{j}2}{5}.$$

Analog, se poate scrie:

$$S_{22} = \left.\frac{Z_{in2}-Z_0}{Z_{in2}+Z_0}\right|_{Z_1=Z_0} = \left.\frac{\frac{Z_{in2}}{Z_0}-1}{\frac{Z_{in2}}{Z_0}+1}\right|_{Z_1=Z_0} = \left.\frac{z_{in2}-1}{z_{in2}+1}\right|_{z_1=1},$$

unde z_{in2} reprezintă impedanța normată de intrare la poarta 2 cu poarta 1 terminată adaptat.



Cu datele din enunț

$$z_{in2}\Big|_{z_1=1} = \mathrm{j} + \left[(1+\mathrm{j}2)\|(-\mathrm{j})\right] = \mathrm{j} + \frac{(1+\mathrm{j}2)(-\mathrm{j})}{1+\mathrm{j}} = \frac{1-\mathrm{j}}{2}$$

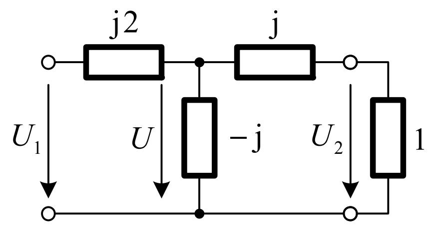
şi deci

$$S_{22} = \frac{\frac{1-\mathrm{j}}{2}-1}{\frac{1-\mathrm{j}}{2}+1} = -\frac{1+\mathrm{j}}{3-\mathrm{j}} = -\frac{1+\mathrm{j}2}{5}.$$

Pentru calculul lui S_{21}, care este coeficientul de transfer (de transmisie) de la poarta 1 la poarta 2, se poate folosi relația

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Big|_{a_2=0} = \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}}(1+S_{11})\frac{U_2}{U_1}\Big|_{Z_2=Z_0} = (1+S_{11})\frac{U_2}{U_1}\Big|_{Z_2=Z_0},$$

în care U_1 reprezintă tensiunea de la poarta 1 iar U_2 tensiunea de la poarta 2, conform figurii de mai jos.



Se obține:

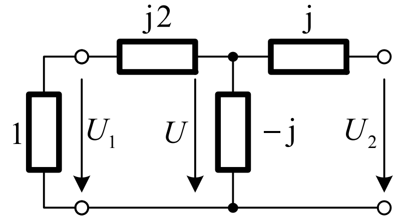
$$\frac{U_2}{U_1}\Big|_{Z_2=Z_0} = \frac{U_2}{U}\cdot\frac{U}{U_1}\Big|_{z_2=1} = \frac{1}{1+\mathrm{j}}\cdot\frac{(1+\mathrm{j})\|(-\mathrm{j})}{\left[(1+\mathrm{j})\|(-\mathrm{j})\right]+\mathrm{j}2} = \frac{1}{1+\mathrm{j}}\cdot\frac{1-\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}} = -\frac{1+\mathrm{j}}{2}$$

şi deci:

$$S_{21} = \left(1+\frac{1+\mathrm{j}2}{5}\right)\left(-\frac{1+\mathrm{j}}{2}\right) = -\frac{2+\mathrm{j}4}{5}.$$

Analog, se poate scrie:

$$S_{12} = \frac{b_1}{a_2}\Big|_{a_1=0} = \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}}(1+S_{22})\frac{U_1}{U_2}\Big|_{Z_1=Z_0} = (1+S_{22})\frac{U_1}{U_2}\Big|_{Z_1=Z_0}.$$



Se obține:

$$\frac{U_1}{U_2}\Big|_{Z_1=Z_0} = \frac{U_1}{U}\cdot\frac{U}{U_2}\Big|_{z_1=1} = \frac{1}{1+\mathrm{j}2}\cdot\frac{(1+\mathrm{j}2)\,\|\,(-\mathrm{j})}{\left[(1+\mathrm{j}2)\,\|\,(-\mathrm{j})\right]+\mathrm{j}} = \frac{1-\mathrm{j}2}{5}\cdot\frac{1-\mathrm{j}3}{1-\mathrm{j}} = -\mathrm{j}$$

şi deci

$$S_{12}=\left(1-\frac{1+\mathrm{j}2}{5}\right)(-\mathrm{j})=-\frac{2+\mathrm{j}4}{5}.$$

Rezultă astfel matricea **S** a diportului considerat:

$$[S]=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1+\mathrm{j}2}{5} & -\dfrac{2+\mathrm{j}4}{5}\\ -\dfrac{2+\mathrm{j}4}{5} & -\dfrac{1+\mathrm{j}2}{5}\end{bmatrix}.$$

<u>Verificări:</u>

1. $S_{12}=S_{21}$ (diport **reciproc**);
2. $|S_{11}|=|S_{22}|=\left|\dfrac{1+\mathrm{j}2}{5}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}<1$; $|S_{12}|=|S_{21}|=\left|-\dfrac{2+\mathrm{j}4}{5}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{5}}<1$ (diport **pasiv**);

3.1 $|S_{11}|^2+|S_{12}|^2=\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{5}=1$; $|S_{21}|^2+|S_{22}|^2=\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}=1$;

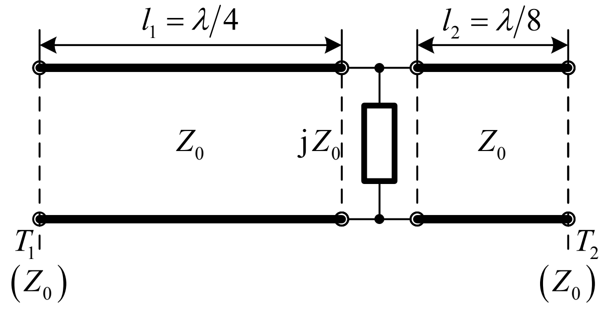
3.2 $S_{11}S_{21}^*+S_{12}S_{22}^*=0$

adică

$\varphi_{12}=\dfrac{\varphi_{11}+\varphi_{22}}{2}\pm\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\mathrm{arctg}\,2+\mathrm{arctg}\,2}{2}\pm\dfrac{\pi}{2}=\varphi_{21}$ (diport reciproc, pasiv şi **nedisipativ**);

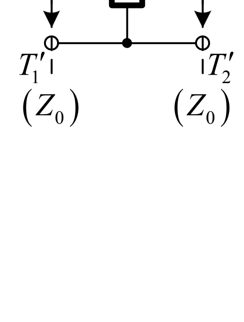
4. $S_{11}\neq S_{22}$ (diport **nesimetric**).

4.3 Să se calculeze matricea de repartiţie în raport cu impedanţa de referinţă Z_0, pentru diportul cu schema din figură. Tronsoanele de linie de transmisiune din circuit sunt fără pierderi.



<u>Rezolvare:</u>

Se calculează întâi matricea $\mathbf{S}'$ a diportului subţire reprezentat de reactanţa derivaţie, iar apoi se aplică teorema schimbării planelor de referinţă.



$$S'_{11} = \Gamma'_1\Big|_{Z'_2=Z_0} = \frac{Z_{i1} - Z_0}{Z_{i1} + Z_0}\Bigg|_{Z'_2=Z_0} = \frac{z_{i1} - 1}{z_{i1} + 1}\Bigg|_{z'_2=1} = \frac{\dfrac{\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}} - 1}{\dfrac{\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}} + 1} = \frac{-1+\mathrm{j}2}{5}.$$

Circuitul considerat fiind un diport subțire, $S'_{11} = S'_{22}$ iar

$$S'_{21} = S'_{12} = 1 + S'_{11} = 1 + \frac{-1+\mathrm{j}2}{5} = \frac{4+\mathrm{j}2}{5}.$$

Readucând planele de referință T'_1 și T'_2 în pozițiile inițiale, T_1, respectiv T_2, se obține:

$$S_{11} = S'_{11}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l_1} = S'_{11}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi} = -S'_{11} = \frac{1-\mathrm{j}2}{5},$$

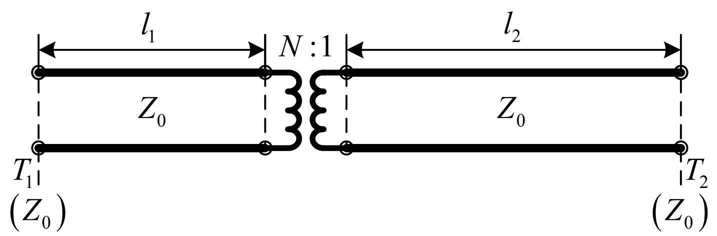
$$S_{22} = S'_{22}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l_2} = S'_{22}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{j}S'_{22} = \frac{2+\mathrm{j}}{5},$$

$$S_{12} = S_{21} = S'_{21}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(l_1+l_2)} = S'_{21}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{5}(1+\mathrm{j}3).$$

Deci matricea repartiție corespunzătoare circuitului considerat este:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\mathrm{j}2}{5} & -\dfrac{\sqrt{2}}{5}(1+\mathrm{j}3) \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{5}(1+\mathrm{j}3) & \dfrac{2+\mathrm{j}}{5} \end{bmatrix}.$$

4.4 Să se calculeze matricea de repartiție corespunzătoare diportului din figură, la o frecvență la care lungimea de undă este $\lambda = 40\,\mathrm{cm}$ știind că lungimile tronsoanelor de linie sunt $l_1 = 10\,\mathrm{cm}$, $l_2 = 15\,\mathrm{cm}$, iar raportul de transformare al transformatorului ideal este $N = 2$.



Rezolvare:

Se calculează întâi matricea de repartiție $\mathbf{S}'$ a transformatorului ideal:

$$S'_{11} = \frac{Z'_{i1} - Z_0}{Z'_{i1} + Z_0}\Bigg|_{Z_2=Z_0} = \frac{N^2 Z_0 - Z_0}{N^2 Z_0 + Z_0} = \frac{N^2 - 1}{N^2 + 1},$$

$$S'_{22} = \frac{Z'_{i2} - Z_0}{Z'_{i2} + Z_0}\Bigg|_{Z_1=Z_0} = \frac{Z_0/N^2 - Z_0}{Z_0/N^2 + Z_0} = \frac{1 - N^2}{1 + N^2}.$$

Deoarece la transformatorul ideal

$$\frac{U_2'}{U_1'} = \frac{1}{N}$$

rezultă:

$$S_{21}' = \left(1 + S_{11}'\right) \cdot \left.\frac{U_2'}{U_1'}\right|_{Z_2 = Z_0} = \left(1 + \frac{N^2 - 1}{N^2 + 1}\right) \cdot \frac{1}{N} = \frac{2N}{N^2 + 1} = S_{12}' .$$

Utilizând teorema schimbării planelor de referință, se obține apoi matricea de repartiție a diportului complet:

$$S_{11} = S_{11}' \,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l_1} = \frac{N^2 - 1}{N^2 + 1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi \frac{l_1}{\lambda}},$$

$$S_{22} = S_{22}' \,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l_2} = \frac{1 - N^2}{1 + N^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi \frac{l_2}{\lambda}},$$

$$S_{12} = S_{21} = S_{21}' \,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(l_1 + l_2)} = \frac{2N}{N^2 + 1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}(l_1 + l_2)} .$$

Folosind datele problemei, se obține:

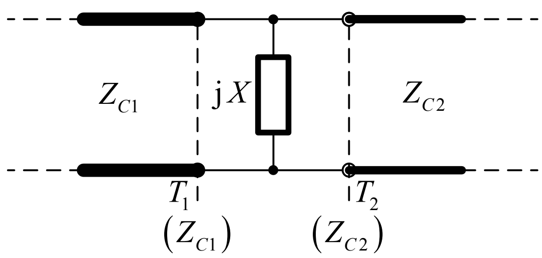
$$S_{11} = \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi \frac{10}{40}} = \frac{3}{5} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi} = -\frac{3}{5},$$

$$S_{22} = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{j}\frac{3}{5},$$

$$S_{12} = \frac{2 \cdot 2}{2^2 + 1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{40}(10 + 15)} = \frac{4}{5} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5\pi}{4}} = \frac{4}{5}\left(\cos\frac{5\pi}{4} - \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{5}\left(-1 + \mathrm{j}\right).$$

Observație: Se pot verifica și aici proprietățile matricei de repartiție corespunzătoare diporților reciproci, pasivi și nedisipativi. Matricea nu are $S_{11} = S_{22}$ deoarece diportul nu este simetric (având tronsoane cu lungimi diferite la cele două porți).

4.5 Să se calculeze elementele matricei de repartiție corespunzătoare unei reactanțe paralel $X = 200\,\Omega$, dacă linia de intrare are impedanța caracteristică $Z_{C1} = 50\,\Omega$ iar linia de ieșire are impedanța caracteristică $Z_{C2} = 100\,\Omega$.



<u>**Rezolvare:**</u>

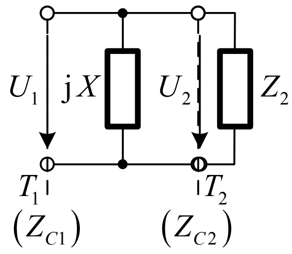
Folosind drept impedanță de normare la poarta 1 impedanța Z_{C1} iar la poarta 2 impedanța Z_{C2}, se obține:

$$S_{11} = \left.\Gamma_1\right|_{Z_2 = Z_{C2}} = \left.\frac{Z_{in1} - Z_{C1}}{Z_{in1} + Z_{C1}}\right|_{Z_2 = Z_{C2}},$$

unde

$$Z_{in1} = \mathrm{j}X \parallel Z_{C_2} = \frac{\mathrm{j}X \cdot Z_{C2}}{\mathrm{j}X + Z_{C2}} = \frac{\mathrm{j}200 \cdot 100}{\mathrm{j}200 + 100} = (80 + \mathrm{j}40)\Omega$$

reprezintă impedanța de intrare la poarta 1 calculată cu poarta 2 terminată adaptat, $Z_2 = Z_{C2}$.



Rezultă:

$$S_{11} = \frac{\mathrm{j}40(1-\mathrm{j}2) - 50}{\mathrm{j}40(1-\mathrm{j}2) + 50} = \frac{11 + \mathrm{j}8}{37}.$$

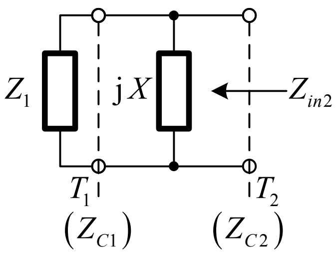
Analog, se obține:

$$S_{22} = \Gamma_2\Big|_{Z_1 = Z_{C1}} = \left.\frac{Z_{in2} - Z_{C2}}{Z_{in2} + Z_{C2}}\right|_{Z_1 = Z_{C1}},$$

unde

$$Z_{in2} = \mathrm{j}X \parallel Z_{C1} = \frac{\mathrm{j}X \cdot Z_{C1}}{\mathrm{j}X + Z_{C1}} = \frac{\mathrm{j}200 \cdot 50}{\mathrm{j}200 + 50} = \left(\frac{800}{17} + \mathrm{j}\frac{200}{17}\right)\Omega$$

este impedanța de intrare la poarta 2 cu poarta 1 terminată adaptat, $Z_1 = Z_{C1}$.



Rezultă:

$$S_{22} = \frac{\frac{\mathrm{j}200}{17}(1-\mathrm{j}4) - 100}{\frac{\mathrm{j}200}{17}(1-\mathrm{j}4) + 100} = \frac{-13 + \mathrm{j}4}{37}.$$

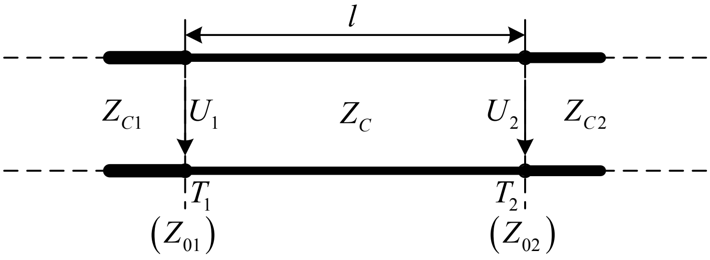
Pentru S_{21}, coeficientul de transfer de la poarta 1 la poarta 2, se obține:

$$S_{21} = S_{12} = \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \cdot (1 + S_{11}) \cdot \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{Z_2 = Z_{C2}} = \sqrt{\frac{50}{100}} \cdot \left(1 + \frac{11 + \mathrm{j}8}{37}\right) \cdot 1 = \frac{4\sqrt{2}}{37}(6 + \mathrm{j}).$$

Observație: Se pot verifica proprietățile matricelor de repartiție corespunzătoare diporților reciproci, fără pierderi, subțiri. Matricea nu are $S_{11} = S_{22}$ deoarece diportul nu poate fi considerat simetric (având impedanțe de normare diferite la cele două porți).

4.6 Să se determine matricea de repartiție a unui tronson de linie de lungime l, având impedanța caracteristică Z_C, conectat între o linie de intrare având impedanța caracteristică Z_{C1} și o linie de ieșire având impedanța caracteristică Z_{C2}.

Cele trei linii de transmisiune sunt fără pierderi.



<u>**Rezolvare:**</u>

Parametrii de repartiție ai liniei se pot determina cu ușurință în cazul în care normarea la cele două porți s-ar face cu impedanțe egale cu impedanța caracteristică a acestei linii,

$Z_{01} = Z_{02} = Z_C \in \Re$.

Într-adevăr, urmărind figura, pentru impedanțe de normare egale cu Z_C, se scrie:

$$S_{11} = \left.\frac{Z_{in1} - Z_{01}}{Z_{in1} + Z_{01}}\right|_{Z_2 = Z_{02}} = \left.\frac{Z_{in1} - Z_C}{Z_{in1} + Z_C}\right|_{Z_2 = Z_C} = \frac{Z_C - Z_C}{Z_C + Z_C} = 0 = S_{22},$$

$$S_{21} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \cdot (1 + S_{11}) \cdot \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{Z_2 = Z_{02}} = \sqrt{\frac{Z_C}{Z_C}} \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l} = S_{12}$$

și deci matricea repartiție calculată în raport cu impedanța de normare Z_C, $S_{(Z_C)}$, este:

$$S_{(Z_C)} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l} & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricea $\mathbf{S}'$ corespunzătoare enunțului problemei poate fi obținută din matricea $\mathbf{S}$ determinată mai sus, cu ajutorul formulelor de schimbare a impedanței de normare. Întrucât noile impedanțe de normare, $Z'_{01} = Z_{C1}$, $Z'_{02} = Z_{C2}$, sunt și ele reale, pot fi utilizate formulele simplificate, valabile pentru diporți:

$$S'_{11} = \frac{S_{11} - \Gamma_2 \Delta - \Gamma_1 (1 - \Gamma_2 S_{22})}{D},$$

$$S'_{12} = \frac{S_{12} \sqrt{(1 - \Gamma_1^2)(1 - \Gamma_2^2)}}{D},$$

$$S'_{21} = \frac{S_{21} \sqrt{(1 - \Gamma_1^2)(1 - \Gamma_2^2)}}{D},$$

$$S'_{22} = \frac{S_{22} - \Gamma_1 \Delta - \Gamma_2 \left(1 - \Gamma_1 S_{11}\right)}{D},$$

unde

$$\Gamma_k = \frac{Z'_{0k} - Z_{0k}}{Z'_{0k} + Z_{0k}} = \frac{Z_{Ck} - Z_C}{Z_{Ck} + Z_C}, \quad k \in \{1,\ 2\}$$

$$\Delta = \det[S] = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l},$$

$$D = 1 - S_{22}\Gamma_2 - \Gamma_1 \left(S_{11} - \Gamma_2 \Delta\right) = 1 + \Gamma_1 \Gamma_2 \Delta = 1 - \Gamma_1 \Gamma_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}.$$

Rezultă:

$$S'_{11} = \frac{\Gamma_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l} - \Gamma_1}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}},$$

$$S'_{12} = S'_{21} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l} \sqrt{\left(1 - \Gamma_1^2\right)\left(1 - \Gamma_2^2\right)}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}},$$

$$S'_{22} = \frac{\Gamma_1\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l} - \Gamma_2}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}}.$$

Deşi, în principiu, problema a fost rezolvată, relațiile de mai sus pot fi puse şi sub o altă formă, calculând

$$\Gamma_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l} - \Gamma_1 = \left(\Gamma_2\, \mathrm{e}^{-j\beta l} - \Gamma_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta l}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l} =$$
$$= 2\left[\left(\Gamma_2 - \Gamma_1\right)\cos\beta l - \mathrm{j}\left(\Gamma_2 + \Gamma_1\right)\sin\beta l\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l}$$

$$1 - \Gamma_1 \Gamma_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta l} - \Gamma_1 \Gamma_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l} =$$
$$= 2\left[\left(1 - \Gamma_1 \Gamma_2\right)\cos\beta l + \mathrm{j}\left(1 + \Gamma_1 \Gamma_2\right)\sin\beta l\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l}$$

$$\Gamma_1\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l} - \Gamma_2 = 2\left[\left(\Gamma_1 - \Gamma_2\right)\cos\beta l - j\left(\Gamma_1 + \Gamma_2\right)\sin\beta l\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l}.$$

Expresiile parametrilor de repartiție devin:

$$S'_{11} = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1 - \mathrm{j}\left(\Gamma_2 + \Gamma_1\right)\mathrm{tg}\,\beta l}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 + \mathrm{j}\left(1 + \Gamma_1 \Gamma_2\right)\mathrm{tg}\,\beta l},$$

$$S'_{12} = S'_{21} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\left(1 - \Gamma_1^2\right)\left(1 - \Gamma_2^2\right)}}{\left(1 - \Gamma_1 \Gamma_2\right)\cos\beta l + \mathrm{j}\left(1 + \Gamma_1 \Gamma_2\right)\sin\beta l},$$

$$S'_{22} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2 - \mathrm{j}\left(\Gamma_1 + \Gamma_2\right)\mathrm{tg}\,\beta l}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 + \mathrm{j}\left(1 + \Gamma_1 \Gamma_2\right)\mathrm{tg}\,\beta l}.$$

Dacă se înlocuiesc Γ_1 şi Γ_2, se calculează:

$$\Gamma_2 - \Gamma_1 = \frac{Z_{C2} - Z_C}{Z_{C2} + Z_C} - \frac{Z_{C1} - Z_C}{Z_{C1} + Z_C} = \frac{2Z_C\left(Z_{C2} - Z_{C1}\right)}{\left(Z_{C1} + Z_C\right)\left(Z_{C2} + Z_C\right)},$$

$$\Gamma_2 + \Gamma_1 = \frac{2\left(Z_{C1} Z_{C2} - Z_C^2\right)}{\left(Z_{C1} + Z_C\right)\left(Z_{C2} + Z_C\right)},$$

$$1 - \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{2Z_C\left(Z_{C1} + Z_{C2}\right)}{\left(Z_{C1} + Z_C\right)\left(Z_{C2} + Z_C\right)},$$

$$1 + \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{2\left(Z_{C1} Z_{C2} + Z_C^2\right)}{\left(Z_{C1} + Z_C\right)\left(Z_{C2} + Z_C\right)},$$

$$\left(1-\Gamma_1^2\right)\left(1-\Gamma_2^2\right)=\frac{16Z_{C1}Z_{C2}Z_C^2}{\left(Z_{C1}+Z_C\right)^2\left(Z_{C2}+Z_C\right)^2}$$

şi rezultă:

$$S'_{11}=\frac{Z_C\left(Z_{C2}-Z_{C1}\right)+\mathrm{j}\left(Z_C^2-Z_{C1}Z_{C2}\right)\mathrm{tg}\,\beta l}{Z_C\left(Z_{C2}+Z_{C1}\right)+\mathrm{j}\left(Z_C^2+Z_{C1}Z_{C2}\right)\mathrm{tg}\,\beta l},$$

$$S'_{12}=S'_{21}=\frac{2Z_C\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}}}{Z_C\left(Z_{C1}+Z_{C2}\right)\cos\beta l+\mathrm{j}\left(Z_{C1}+Z_C\right)\left(Z_{C2}+Z_C\right)\sin\beta l},$$

$$S'_{22}=\frac{Z_C\left(Z_{C1}-Z_{C2}\right)+\mathrm{j}\left(Z_C^2-Z_{C1}Z_{C2}\right)\mathrm{tg}\,\beta l}{Z_C\left(Z_{C1}+Z_{C2}\right)+\mathrm{j}\left(Z_C^2+Z_{C1}Z_{C2}\right)\mathrm{tg}\,\beta l}.$$

4.7 Să se exprime parametrii matricei de repartiţie corespunzătoare unui diport reciproc, subţire şi fără pierderi, în funcţie de:

a) modulul coeficientului de reflexie la intrare, când ieşirea este terminată adaptat;
b) faza coeficientului de reflexie la intrare, când ieşirea este terminată adaptat;
c) susceptanţa normată paralel, corespunzătoare diportului.

Rezolvare:

Considerând matricea repartiţie **S** de forma

$$\mathrm{S}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}$$

pentru diporţii liniari, reciproci, pasivi şi nedisipativi, având impedanţe de normare identice la cele două porţi, pot fi scrise următoarele relaţii:

$$\left|S_{11}\right|^2+\left|S_{12}\right|^2=1,$$

$$\left|S_{21}\right|^2+\left|S_{22}\right|^2=1,$$

$$S_{11}S_{21}^*+S_{12}S_{22}^*=0.$$

Dacă se ţine seama de faptul că diportul este reciproc $\left(S_{12}=S_{21}\right)$, din primele două relaţii rezultă:

$$\left|S_{11}\right|=\left|S_{22}\right|,$$

$$\left|S_{12}\right|=\left|S_{21}\right|=\sqrt{1-\left|S_{11}\right|^2},$$

iar din ultima relaţie se obţine

$$\varphi_{12}=\frac{\varphi_{11}+\varphi_{22}}{2}\pm\frac{\pi}{2}=\varphi_{21}.$$

Dacă diportul este subţire atunci tensiunile de la cele două porţi sunt întotdeauna egale între ele, $U_1=U_2$, ceea ce conduce la relaţia:

$$S_{21}=1+S_{11}.$$

Similar,

$$S_{12}=1+S_{22},$$

prin urmare $S_{11}=S_{22}$.

Sumarizând, în cazul tipului de diport considerat există următoarele relaţii:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \tag{1}$$
$$S_{21} = 1 + S_{11} \tag{2}$$
$$S_{11} = S_{22} \tag{3}$$
$$S_{12} = S_{21} \tag{4}$$

care permit determinarea tuturor parametrilor S în funcție de o singură mărime reală.

Egalând modulele şi argumentele relației (2) şi folosind relația (1), se obține:

$$\sqrt{1-|S_{11}|^2} = \sqrt{(1+|S_{11}|\cos\varphi_{11})^2 + |S_{11}|^2\sin^2\varphi_{11}}\ ,$$
$$\varphi_{21} = \operatorname{arctg}\frac{|S_{11}|\sin\varphi_{11}}{1+|S_{11}|\cos\varphi_{11}}\ ,$$

de unde rezultă

$$|S_{11}| = -\cos\varphi_{11}\,,$$
$$\varphi_{12} = \varphi_{11} \pm \frac{\pi}{2}\,.$$

a) Alegând drept parametru independent $|S_{11}|$, se obțin expresiile:

$$S_{11} = S_{22} = |S_{11}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arccos(-|S_{11}|)},$$
$$S_{12} = S_{21} = \pm\mathrm{j}\sqrt{1-|S_{11}|^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arccos(-|S_{11}|)}.$$

b) Alegând drept parametru independent φ_{11}, rezultă expresiile:

$$S_{11} = S_{22} = -\cos\varphi_{11}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{11}}\,,$$
$$S_{12} = S_{21} = -\mathrm{j}\sin\varphi_{11}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{11}}\,.$$

c) Deoarece tipul de diport considerat poate fi reprezentat printr-o simplă reactanță paralel, notând cu b valoarea susceptanței normate respective rezultă:

$$S_{11} = \Gamma_1\Big|_{Y_2=Y_0} = \frac{Y_0 - Y_{in1}}{Y_0 + Y_{in1}}\Bigg|_{Y_2=Y_0} = \frac{-\mathrm{j}b}{2+\mathrm{j}b} = \frac{b(b+\mathrm{j}2)}{4+b^2} = \frac{|b|}{\sqrt{4+b^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{2}{b}\right)} = S_{22}\,,$$

precum şi

$$S_{21} = 1 - \frac{\mathrm{j}b}{2+\mathrm{j}b} = \frac{2(2-\mathrm{j}b)}{4+b^2} = \frac{2}{\sqrt{4+b^2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\operatorname{arctg}\frac{2}{b}} = S_{12}\,.$$

4.8 Care trebuie să fie distanța dintre două bobine ideale, conectate în paralel pe o linie de transmisiune având impedanța caracteristică $Z_C = 300\,\Omega$, pentru ca diportul astfel format să prezinte o atenuare de inserție nulă la frecvența $f = 100\,\mathrm{MHz}$? Cele două bobine, identice, au inductanța $L = 1\,\mu\mathrm{H}$ iar linia, ideală, are ca dielectric aerul.

<u>Rezolvare:</u>

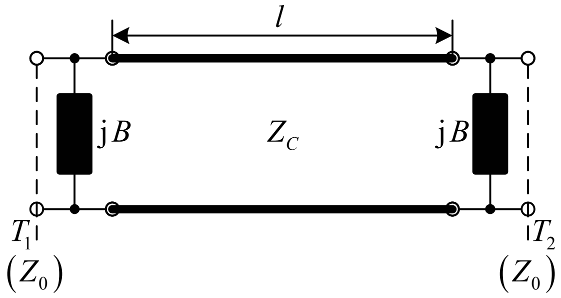
Condiția de transmisiune totală (de atenuare nulă) este

$$|S_{21}| = 1\,,$$

sau, echivalent,

$$S_{11} = 0$$

deoarece diportul este nedisipativ.



Parametrul S_{11} reprezintă coeficientul de reflexie la poarta 1 când poarta 2 este terminată adaptat, adică

$$S_{11} = \Gamma_1\big|_{Y_2=Y_C} = \left.\frac{Y_C - Y_{in1}}{Y_C + Y_{in1}}\right|_{Y_2=Y_C} = \left.\frac{1-y_{in1}}{1+y_{in1}}\right|_{y_2=1}$$

astfel încât condiția $S_{11} = 0$ este echivalentă cu

$$y_{in1}\big|_{y_2=1} = 1 \qquad (1)$$

Admitanța de intrare în linia de lungime l terminată pe admitanța normată $\mathrm{j}b$ în paralel cu conductanța normată unitate $(y_2 = 1)$ are expresia:

$$y'_{in1} = \frac{y_s + \mathrm{j}\,\mathrm{tg}\,\beta l}{1 + \mathrm{j}y_s\,\mathrm{tg}\,\beta l} = \frac{1 + \mathrm{j}b + \mathrm{j}\,\mathrm{tg}\,\beta l}{1 + \mathrm{j}(1 + \mathrm{j}b)\mathrm{tg}\,\beta l}$$

astfel încât admitanța normată de intrare în circuitul considerat, cu poarta 2 terminată adaptat $(y_2 = 1)$ este:

$$y_{in1}\big|_{y_2=1} = \mathrm{j}b + \frac{1 + \mathrm{j}(b + \mathrm{tg}\,\beta l)}{(1 - b\,\mathrm{tg}\,\beta l) + \mathrm{j}\,\mathrm{tg}\,\beta l}.$$

Condiția (1) devine:

$$\mathrm{j}b - \mathrm{j}b^2\,\mathrm{tg}\,\beta l - b\,\mathrm{tg}\,\beta l + 1 + \mathrm{j}b + \mathrm{j}\,\mathrm{tg}\,\beta l = 1 - b\,\mathrm{tg}\,\beta l + \mathrm{j}\,\mathrm{tg}\,\beta l$$

adică

$$\mathrm{j}2b - \mathrm{j}b^2\,\mathrm{tg}\,\beta l = 0$$

de unde (soluția $b = 0$ nu corespunde) rezultă:

$$\mathrm{tg}\,\beta l = \frac{2}{b},$$

deci

$$\beta l = \mathrm{arctg}\frac{2}{b} + k\pi, \text{ unde } k \in Z$$

respectiv

$$l = \frac{\lambda}{2\pi}\mathrm{arctg}\frac{2}{b} + k\frac{\lambda}{2},\ k \in N.$$

Înlocuind datele numerice ale problemei, rezultă:

$$X = \omega_0 L = 2\pi f_0 L = 2\pi \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} = 628{,}3\,\Omega,$$

$$x = \frac{X}{Z_C} = \frac{628{,}3}{300} = 2{,}09,$$

$$b = \frac{B}{Y_C} = -\frac{1}{x} = -0,477\,,$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3\,\text{m}\,.$$

Se obține:

$$l = \frac{3}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{0,477}\right) + k\frac{3}{2} = -0,638 + k \cdot 1,5 \overset{k=1}{=} 0,861\,\text{m}\,.$$

Observație: 1. S-a considerat pentru k valoarea care conduce la o lungime l pozitivă dar minimă.

2. Determinarea parametrului S_{11} se poate face şi prin alte metode. De exemplu, se consideră o undă incidentă şi se urmăresc reflexiile repetate, succesive pe diporții subțiri reprezentați de cele două inductanțe. Un alt procedeu constă în determinarea matricei de repartiție a întregului circuitului prin combinarea matricelor de repartiție ale diporților componenți, corespunzători inductanțelor şi liniei, diporți conectați în lanț (în cascadă).

O astfel de metodă este prezentată în cele ce urmează.

Circuitul considerat este descompus într-o cascadă de 3 diporți elementari, primul şi ultimul reprezentând susceptanța derivație iar diportul central – tronsonul de linie fără pierderi (figura 4.8.2).

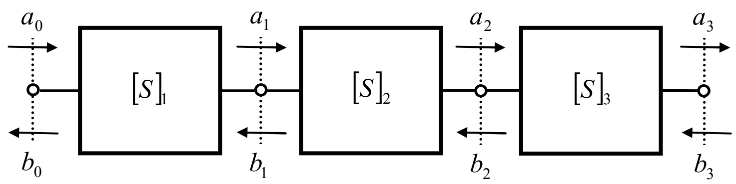


Figura 4.8.2

Determinarea termenilor S_{11} sau S_{21} poate fi realizată dacă se cunosc matricile **S** corespunzătoare diporților din figura de mai sus.

Pentru susceptanța derivație, coeficientul de reflexie la poarta 1, cu poarta 2 terminată adaptat este

$$S_{11} = \left.\frac{1-y_{i1}}{1+y_{i1}}\right|_{y_2=1} = \frac{1-(1+\mathrm{j}b)}{1+(1+\mathrm{j}b)} = \frac{-\mathrm{j}b}{2+\mathrm{j}b} = S_{22} \overset{\text{not}}{=} \Gamma\,, \tag{1}$$

unde y_{i1} este admitanța normată de intrare la poarta 1 iar Γ semnifică coeficientul de reflexie al susceptanței normate b.

Coeficientul de transmisie S_{21} are valoarea

$$S_{21} = 1 + S_{11} = 1 + \Gamma = S_{12}\,. \tag{2}$$

Observație: În relațiile (1) şi (2) s-a făcut apel la proprietățile diportului subțire reprezentat de către susceptanța derivație.

Rezultă astfel matricile **S** corespunzătoare diporților terminali, identici:

$$[S]_1 = [S]_3 = \begin{bmatrix} \Gamma & 1+\Gamma \\ 1+\Gamma & \Gamma \end{bmatrix}.$$

Pentru tronsonul de linie de transmisiune, termenul S_{11} are valoarea:

$$S_{11} = \left.\frac{Z_{i1} - Z_0}{Z_{i1} + Z_0}\right|_{Z_2 = Z_0} = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0 = S_{22}, \tag{3}$$

unde Z_{i1} reprezintă impedanța de intrare la poarta 1 a tronsonului iar Z_0 este impedanța de normare la ambele porți, egală cu impedanța caracteristică a liniei.

În cazul analizat, coeficientul de transmisie S_{21} are expresia:

$$S_{21} = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{Z_2 = Z_0},$$

unde U_1 reprezintă tensiunea la intrarea liniei iar U_2 tensiunea la sarcină.
Legătura dintre cei doi termeni este dată de distribuția tensiunii în lungul liniei considerate:

$$U_1 = U_2 \cos\beta l + \mathrm{j}Z_0 I_2 \sin\beta l,$$

în care, exprimând curentul prin sarcină în funcție de tensiunea la sarcină,

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_S} = \frac{U_2}{Z_0},$$

se obține:

$$U_1 = U_2 \cos\beta l + \mathrm{j}U_2 \sin\beta l = U_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta l} = U_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

şi deci

$$S_{21} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = S_{12}, \tag{4}$$

astfel încât matricea **S** corespunzătoare tronsonului de linie este

$$[S]_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} & 0 \end{bmatrix}.$$

Având astfel calculate matricile **S** ale diporților constituenți, matricea repartiție care descrie proprietățile circuitului studiat poate fi determinată folosind, de pildă, metoda grafului de fluență [6].

Ținând cont de convenția folosită pentru desenarea undelor generalizate de putere, rezultă graful asociat structurii analizate, prezentat în figura 4.8.3.

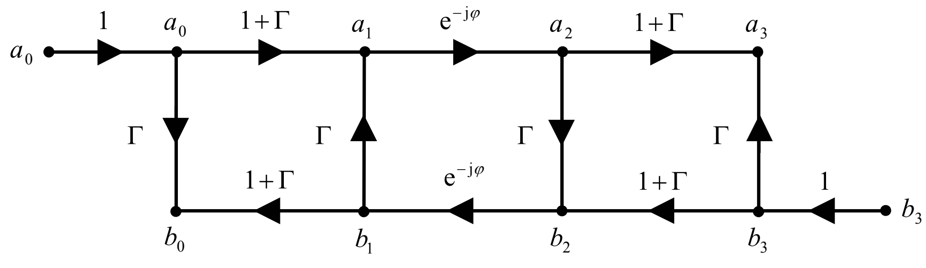


Figura 4.8.3

Din definiția coeficientului de reflexie S_{11} al circuitului considerat, particularizată conform notațiilor din figura 4.8.2 şi folosind regula lui Mason, [6], se obține:

$$S_{11} = \left.\frac{b_0}{a_0}\right|_{b_3=0} = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta},$$

unde:

k reprezintă numărul căilor între nodurile a_0 şi b_0 (vezi figura 4.8.3);

P_k este transmitanţa unei căi, între nodurile a_0 şi b_0;

Δ reprezintă determinantul grafului;

Δ_k se obţine din Δ în care nu se iau în considerare termenii ce conţin bucle cu cel puţin un nod comun cu calea "k".

Din graf, rezultă:

$$\Delta = 1 - \Gamma^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi},$$
$$k = 2,$$
$$P_1 = \Gamma,$$
$$\Delta_1 = 1 - \Gamma^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi},$$
$$P_2 = \Gamma(1+\Gamma)^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi},$$
$$\Delta_2 = 1$$

şi deci

$$S_{11} = \frac{\Gamma\left(1-\Gamma^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}\right) + \Gamma(1+\Gamma)^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}}{1-\Gamma^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}} = \frac{\Gamma\left[1+(1+2\Gamma)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}\right]}{1-\Gamma^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}} = S_{22}.$$

Coeficientul de transfer S_{21} are expresia:

$$S_{21} = \left.\frac{a_3}{a_0}\right|_{b_3=0}.$$

Conform regulii lui Mason, se calculează:

$$k = 1,$$
$$P_1 = (1+\Gamma)^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi},$$
$$\Delta_1 = 1$$

şi deci

$$S_{21} = \frac{(1+\Gamma)^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{1-\Gamma^2\, \mathrm{e}^{-j2\varphi}} = S_{12}.$$

Rezultă în final matricea repartiţie corespunzătoare circuitului din problemă:

$$[S] = \begin{bmatrix} \dfrac{\Gamma\left[1+(1+2\Gamma)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}\right]}{1-\Gamma^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}} & \dfrac{(1+\Gamma)^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{1-\Gamma^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}} \\ \dfrac{(1+\Gamma)^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{1-\Gamma^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}} & \dfrac{\Gamma\left[1+(1+2\Gamma)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}\right]}{1-\Gamma^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}} \end{bmatrix}.$$

Condiţia de atenuare nulă, $S_{11} = 0$, conduce la:

$$\frac{\Gamma\left[1+(1+2\Gamma)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}\right]}{1-\Gamma^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}} = 0,$$

adică

$$\Gamma\left[1+(1+2\Gamma)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}\right] = 0$$

şi întrucât soluţia $\Gamma = 0$ nu convine (implică $b = 0$, fals!), rezultă:

$$1+\left(1+2\Gamma\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}=0\,,$$

sau

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}=\frac{-1}{1+2\Gamma}=\frac{-1}{1+2\dfrac{-\mathrm{j}b}{2+\mathrm{j}b}}=\frac{b^2-4}{b^2+4}-\mathrm{j}\frac{4b}{b^2+4}=-0{,}892+\mathrm{j}0{,}451=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2{,}673\ \mathrm{rad}}$$

adică

$$\varphi=\beta l=-1{,}3365$$

şi deci

$$l=\frac{\lambda}{2\pi}\left(-1{,}3365\right)+k\frac{\lambda}{2}=\frac{3}{2\pi}\left(-1{,}3365\right)+k\frac{3}{2}\overset{k=1}{=}0{,}861\,\mathrm{m}\,.$$

Observaţie: De asemenea, la fel ca la metoda precedentă, s-a considerat pentru k valoarea care conduce la o lungime l pozitivă dar minimă.

4.9 Să se arate că puterea disponibilă a unui generator

$$P_{dG}=\frac{\left|a_G\right|^2}{2\left(1-\left|\Gamma_G\right|^2\right)}$$

nu depinde de impedanţa de normare Z_0 utilizată la definirea variabilelor de repartiţie.

Rezolvare:

Considerând cazul general al unei impedanţe de normare Z_0 complexe, unda de putere emergentă dintr-un generator, în absenţa oricărei unde incidente, este:

$$a_G=\frac{E\sqrt{\mathrm{Re}\{Z_0\}}}{Z_G+Z_0^*}$$

iar coeficientul de reflexie generalizat al generatorului se scrie

$$\Gamma_G=\frac{Z_G-Z_0}{Z_G+Z_0^*}\,.$$

Înlocuind în expresia puterii disponibile, se obţine:

$$P_{dG}=\frac{\left|E\right|^2\cdot\mathrm{Re}\{Z_0\}}{\left|Z_G+Z_0^*\right|^2}\cdot\frac{1}{2\left(1-\left|\dfrac{Z_G-Z_0}{Z_G+Z_0^*}\right|^2\right)}=\frac{\left|E\right|^2\,\mathrm{Re}\{Z_0\}}{2\left(\left|Z_G+Z_0^*\right|^2-\left|Z_G-Z_0\right|^2\right)}=$$

$$=\frac{\left|E\right|^2\cdot R_0}{2\left[\left(R_G+R_0\right)^2+\left(X_G-X_0\right)^2-\left(R_G-R_0\right)^2-\left(X_G-X_0\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{\left|E\right|^2\cdot R_0}{2\cdot4\cdot R_GR_0}=\frac{\left|E\right|^2}{8R_G}$$

S-a regăsit astfel o relaţie cunoscută, care exprimă puterea disponibilă a unui generator, evident independentă de impedanţa de normare Z_0 considerată.

4.10 Să se determine schema echivalentă în T (cu elemente normate) corespunzătoare unui diport reciproc şi fără pierderi conectat între linii de acces identice, fără pierderi, dacă se cunosc:

$$|S_{11}| = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\varphi_{11} = \pi - \operatorname{arctg} 2;$$

$$\varphi_{22} = -\operatorname{arctg} 2.$$

Rezolvare:

Se calculează mai întâi toate elementele matricei de repartiție, folosind proprietățile diporților reciproci şi fără pierderi:

$$|S_{12}| = |S_{21}| = \sqrt{1-|S_{11}|^2} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$|S_{22}| = |S_{11}| = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \frac{\varphi_{11}+\varphi_{22}}{2} \pm \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} 2}{2} \pm \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă:

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = -\operatorname{arctg} 2$$

sau

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \pi - \operatorname{arctg} 2.$$

În primul caz matricea S corespunzătoare diportului considerat este:

$$S = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1+\mathrm{j}2 & 2-\mathrm{j}4 \\ 2-\mathrm{j}4 & 1-\mathrm{j}2 \end{bmatrix}.$$

De aici se calculează matricea impedanță normată, z, cu ajutorul relației:

$$z = (1-S)^{-1}\cdot(1+S).$$

Pentru aceasta, se calculează, pe rând:

$$1+S = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 2+\mathrm{j} & 1-\mathrm{j}2 \\ 1-\mathrm{j}2 & 3-\mathrm{j} \end{bmatrix},$$

$$1-S = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 3-\mathrm{j} & -1+\mathrm{j}2 \\ -1+\mathrm{j}2 & 2+\mathrm{j} \end{bmatrix},$$

$$(1-S)^{-1} = \frac{1}{2(2+\mathrm{j})}\begin{bmatrix} 2+\mathrm{j} & 1-\mathrm{j}2 \\ 1-\mathrm{j}2 & 3-\mathrm{j} \end{bmatrix}.$$

Se obține:

$$z = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{j} \\ -\mathrm{j} & -\mathrm{j} \end{bmatrix}.$$

Schema echivalentă în T, reprezentată în figura 4.10 a, rezultă din relațiile:

$$\mathrm{j}x_1 = z_{11} - z_{12},$$

$$\mathrm{j}x_2 = z_{22} - z_{12},$$

$$\mathrm{j}x_3 = z_{12}$$

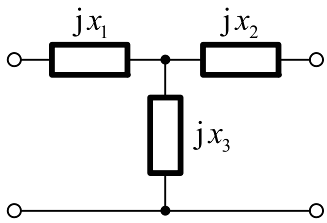


Figura 4.10 a.

adică, înlocuind cu valorile problemei:

$jx_1 = j$,

$jx_2 = 0$,

$jx_3 = -j$.

Se obține deci schema echivalentă din figura (4.10 b).

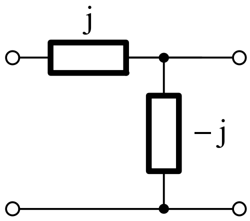


Figura 4.10 b.

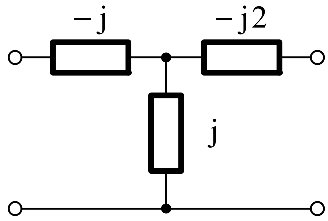


Figura 4.10 c.

Similar, considerînd

$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \pi - \mathrm{arctg}\,2$,

se obține o a doua schemă echivalentă, reprezentată în figura (4.10 c).

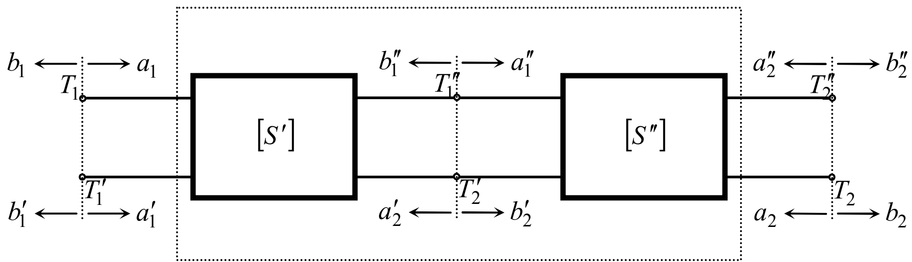
4.11 Să se calculeze parametrul S_{21} pentru diportul rezultat prin conectarea în lanț (în cascadă) a doi diporți identici, având matricele de repartiție:

$$[S] = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2+j4 & 2-j \\ 2-j & 2+j4 \end{bmatrix},$$

în raport cu impedanța de referință Z_0.

Rezolvare:

Se utilizează schema din figura de mai jos.



Comportarea diportului poate fi descrisă convenabil în cazul conectării în lanț cu ajutorul matricei de transfer **T**, definită prin relațiile:

$$a_1 = T_{11}b_2 + T_{12}a_2 \tag{2}$$
$$b_1 = T_{21}b_2 + T_{22}a_2 \tag{3}$$
care se pot scrie şi compact, sub formă matriceală, astfel:
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$
Considerând că cei doi diporți conectați în cascadă au matricele de transfer $\mathbf{T}'$, respectiv $\mathbf{T}''$ şi observând pe baza schemei din figură că $a_1 = a_1'$, $b_1 = b_1'$, $a_2' = b_1''$, $b_2' = a_1''$, $a_2'' = a_2$, $b_2'' = b_2$, se obține succesiv:
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1' \\ b_1' \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} b_2' \\ a_2' \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} a_1'' \\ b_1'' \end{bmatrix} = \mathbf{T}'\mathbf{T}'' \begin{bmatrix} b_2'' \\ a_2'' \end{bmatrix} = \mathbf{T}'\mathbf{T}'' \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$
Comparând acest rezultat cu expresia scrisă pentru diportul echivalent, având matricea de transfer $\mathbf{T}$,
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix},$$
se obține
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}'\mathbf{T}''. \tag{4}$$
În cazul problemei se cunosc şi se cer termeni ai matricelor de repartiție. Este necesar să se folosească relațiile de legătură dintre parametrii de repartiție şi cei de transfer.

Deoarece trebuie aflat parametrul S_{21}, se va exprima acest parametru în funcție de parametrii de transfer. În acest scop se explicitează b_2 din relația (2):
$$b_2 = \frac{1}{T_{11}} a_1 - \frac{T_{12}}{T_{11}} a_2$$
şi se compară cu cea de a doua ecuație din cele care caracterizează diportul cu ajutorul parametrilor de repartiție:
$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \tag{5}$$
$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \tag{6}$$
Rezultă:
$$S_{21} = \frac{1}{T_{11}}.$$
Termenul T_{11} al matricei de transfer a diportului rezultat prin conectarea în lanț a celor doi diporți dați se obține din relația (4):
$$T_{11} = T_{11}'T_{11}'' - T_{12}'T_{21}''. \tag{7}$$
Pentru a-l calcula este necesar să se cunoască formulele de trecere de la parametrii S la parametrii T_{11}, T_{12} şi T_{21}. Acestea se determină rezolvând în raport cu necunoscutele a_1 şi b_1 sistemul format din ecuațiile (5) şi (6):
$$a_1 = \frac{1}{S_{21}} b_2 - \frac{S_{22}}{S_{21}} a_2,$$
$$b_1 = \frac{S_{11}}{S_{21}} b_2 - \frac{\det \mathbf{S}}{S_{21}} a_2$$
şi făcând identificarea cu relațiile (2) şi (3). Astfel, rezultă:

$$T_{11}=\frac{1}{S_{21}},$$

$$T_{12}=-\frac{S_{22}}{S_{21}},$$

$$T_{21}=\frac{S_{11}}{S_{21}}.$$

Utilizând aceste expresii, relația (7) devine:

$$T_{11}=\frac{1-S'_{22}S''_{11}}{S'_{21}S''_{21}},$$

de unde se poate determina parametrul cerut în problemă,

$$S_{21}=\frac{1}{T_{11}}=\frac{S'_{21}S''_{21}}{1-S'_{22}S''_{11}},$$

sau, numeric,

$$S_{21}=\frac{\left(\frac{2-\mathrm{j}}{5}\right)^2}{1-\left(\frac{2+\mathrm{j}4}{5}\right)^2}=\frac{7-\mathrm{j}4}{65}.$$

O altă metodă de rezolvare constă în determinarea termenului S_{21} pe baza grafului de fluență asociat circuitului din problemă.

Se reprezintă, în prealabil, cei doi diporți conectați în cascadă și se desenează în dreptul planelor lor de referință undele generalizate de putere (figura 4.11.2).

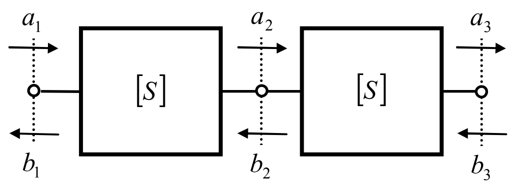


Figura 4.11.2

Corespunzător, graful de fluență are forma din figura 4.11.3.

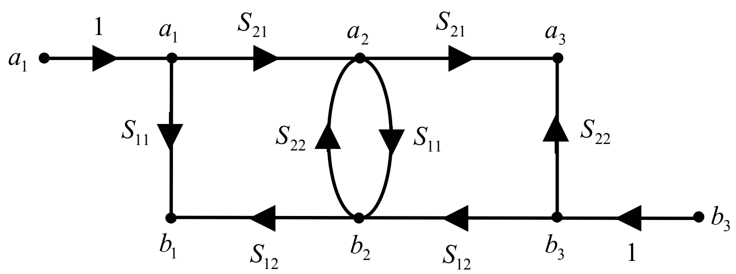


Figura 4.11.3

Parametrii repartiție care apar în figură reprezintă termenii matricei **S** a celor doi diporți identici:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2+\mathrm{j}4 & 2-\mathrm{j} \\ 2-\mathrm{j} & 2+\mathrm{j}4 \end{bmatrix}.$$

Coeficientul de transfer al circuitului, conform notațiilor din figura 4.11.2, este dat de expresia:

$$S_{21} = \left.\frac{a_3}{a_1}\right|_{b_3=0}$$

şi poate fi determinat folosind regula lui Mason aplicată grafului din figura 4.11.3 (vezi şi problema 4.8).
Cu datele problemei, se calculează:

$$\Delta = 1 - S_{11}S_{22} = 1 - \left(\frac{2+\mathrm{j}4}{5}\right)^2 = \frac{37-\mathrm{j}16}{25},$$

$$k = 1,$$

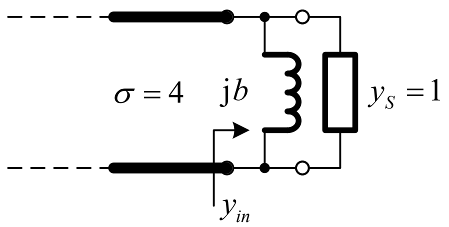
$$P_1 = S_{21}^2 = \left(\frac{2-\mathrm{j}}{5}\right)^2 = \frac{3-\mathrm{j}4}{25},$$

$$\Delta_1 = 1$$

şi se obține

$$S_{21} = \frac{\dfrac{3-\mathrm{j}4}{25}}{\dfrac{37-\mathrm{j}16}{25}} = \frac{7-\mathrm{j}4}{65}.$$

4.13 Să se calculeze reactanța normată paralel reprezentată printr-un diport subțire, fără pierderi, dacă pe linia de acces s-a măsurat un raport de undă staționară $\sigma = 4$ atunci când diportul era terminat pe o sarcină adaptată.



Rezolvare:

Un diport subțire şi fără pierderi poate fi reprezentat printr-o susceptanță derivație a cărei valoare normată este notată cu b.Dacă diportul este terminat pe o sarcină adaptată, atunci:

$$y_{in} = 1 + \mathrm{j}b,$$

deci coeficientul de reflexie de la intrarea lui este:

$$\Gamma = S_{11} = \frac{1-y_{in}}{1+y_{in}} = \frac{1-(1+\mathrm{j}b)}{1+(1+\mathrm{j}b)} = \frac{-\mathrm{j}b}{2+\mathrm{j}b} = -\frac{b(1+\mathrm{j}2)}{4+b^2},$$

astfel încât raportul de undă staționară pe linia de acces are expresia:

$$\sigma = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+\dfrac{|b|}{\sqrt{b^2+4}}}{1-\dfrac{|b|}{\sqrt{b^2+4}}} = \frac{\sqrt{b^2+4}+|b|}{\sqrt{b^2+4}-|b|}.$$

Din această relație rezultă:

$$\frac{1}{|\Gamma|} = \frac{\sigma+1}{\sigma-1} = \frac{\sqrt{b^2+4}}{|b|} \quad \Rightarrow \quad \frac{(\sigma+1)^2}{(\sigma-1)^2} = \frac{b^2+4}{b^2},$$

adică

$$|b| = \frac{\sigma-1}{\sqrt{\sigma}}$$

sau

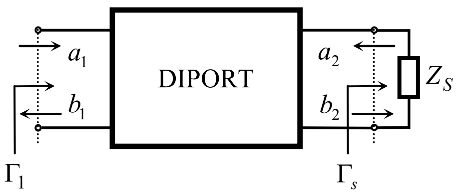
$$|x| = \frac{1}{|b|} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma-1}.$$

Folosind datele problemei, rezultă că este vorba de o reactanță normată având modulul:

$$|x| = \frac{\sqrt{4}}{4-1} \approx 0{,}67 .$$

Reactanța poate fi de natură inductivă sau capacitivă.

4.14 Să se determine matricea de repartiție a unui diport reciproc, pasiv, fără pierderi, simetric, știind că faza coeficientului de reflexie la intrare, Γ_1, este $\varphi_{1g} = 60^\circ$ atunci când diportul este terminat în gol, respectiv $\varphi_{1sc} = -30^\circ$ atunci când diportul este terminat în scurtcircuit.



Rezolvare:

Coeficientul de reflexie la intrare în poarta 1 a unui diport reciproc are expresia:

$$\Gamma_1 = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_S}{1-S_{22}\Gamma_S} = S_{11} + \frac{S_{12}^2\Gamma_S}{1-S_{22}\Gamma_S},$$

unde

$$\Gamma_S = \frac{a_2}{b_2}$$

este coeficientul de reflexie al sarcinii de la poarta 2 a diportului.

Deci:

$$\Gamma_{1g} = \Gamma_1\big|_{\Gamma_S=1} = S_{11} + \frac{S_{12}^2}{1-S_{22}},$$

$$\Gamma_{1sc} = \Gamma_1\big|_{\Gamma_S=-1} = S_{11} - \frac{S_{12}^2}{1+S_{22}}.$$

Ținând cont și de condiția de simetrie, $(S_{11} = S_{22})$, din aceste relații se obține:

$$\frac{\Gamma_{1g} - S_{11}}{\Gamma_{1sc} - S_{11}} = -\frac{1+S_{11}}{1-S_{11}},$$

de unde se poate calcula coeficientul de reflexie S_{11},

$$S_{11} = S_{22} = \frac{\Gamma_{1sc} + \Gamma_{1g}}{2+\Gamma_{1g} - \Gamma_{1sc}}.$$

Deoarece diportul este fără pierderi,

$$\left|\Gamma_{1g}\right| = \left|\Gamma_{1sc}\right| = 1$$

deci rezultă

$$S_{11} = S_{22} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{1sc}} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{1g}}}{2+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{1g}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{1sc}}},$$

iar apoi parametrii $S_{12} = S_{21}$ se obțin cu ajutorul relațiilor existente între termenii matricei de repartiție a unui diport reciproc și fără pierderi.

Cu datele din problemă, rezultă:

$$S_{11} = S_{22} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}{2+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{6}}} = \frac{\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{2}},$$

adică

$$S_{11} = S_{22} = 0{,}664\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}435\,\mathrm{rad}} = 0{,}664\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}24{,}9^\circ}.$$

Ceilalți termeni se obțin imediat:

$$\left|S_{21}\right| = \sqrt{1-\left|S_{11}\right|^2} = \sqrt{1-0{,}664^2} = 0{,}748,$$

$$\varphi_{21} = \varphi_{11} \pm \frac{\pi}{2} = -0{,}435 \pm 1{,}57\,\mathrm{rad}.$$

Alegând în relația precedentă semnul +, rezultă:

$$S_{12} = S_{21} = 0{,}748\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}1{,}135\,\mathrm{rad}} = 0{,}748\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}65^\circ}$$

astfel încât, în final, se poate scrie matricea **S** corespunzătoare diportului considerat:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}664\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}24{,}9^\circ} & 0{,}748\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}65^\circ} \\ 0{,}748\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}65^\circ} & 0{,}664\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}24{,}9^\circ} \end{bmatrix}.$$

4.15 Într-un cablu coaxial cu aer spațiul dintre cele două conductoare se umple, pe o lungime $d = 5\,\mathrm{cm}$, cu un material dielectric fără pierderi. Discontinuitatea astfel formată este măsurată, la frecvența $f = 1\,\mathrm{GHz}$, prin metoda deplasării minimelor obținându-se la curba experimentală în punctul de inflexiune o pantă a tangentei de valoare $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.

Să se deducă din această măsurătoare permitivitatea electrică relativă a dielectricului folosit.

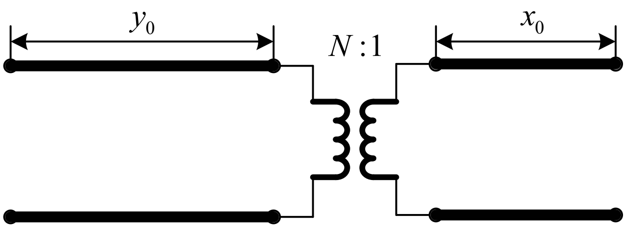


Figura 4.15.1

Rezolvare:

Schema echivalentă a unei porțiuni de ghid incluzând partea cu dielectric este reprezentată în figura 4.15.1, unde, conform metodei de măsură menționate [5]:

$N = \sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha} = \sqrt{2}$.

Pe de altă parte, înlocuind placa printr-un tronson de linie de lungime d , având o altă impedanță caracteristică, se obține o a doua schemă, prezentată în figura 4.15.2.

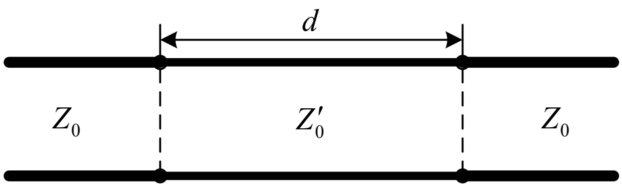


Figura 4.15.2

Pentru ca cele două scheme să fie echivalente, este necesar (şi suficient) ca, în cazul ieşirii terminate adaptat, pe linia de intrare să existe acelaşi raport de undă staționară, adică modulul coeficientului de reflexie să fie acelaşi.

Se calculează:

$$|\Gamma|_1 = \frac{N^2 - 1}{N^2 + 1},$$

$$|\Gamma|_2 = \left|\frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}\right| = \left|\frac{Z_0' \dfrac{Z_0 + \mathrm{j}Z_0' \,\mathrm{tg}\,\beta d}{Z_0' + \mathrm{j}Z_0 \,\mathrm{tg}\,\beta d} - Z_0}{Z_0' \dfrac{Z_0 + \mathrm{j}Z_0' \,\mathrm{tg}\,\beta d}{Z_0' + \mathrm{j}Z_0 \,\mathrm{tg}\,\beta d} + Z_0}\right| = \left|\frac{\mathrm{j}\left(Z_0'^2 - Z_0^2\right)\mathrm{tg}\,\beta d}{2Z_0 Z_0' + \mathrm{j}\left(Z_0^2 + Z_0'^2\right)\mathrm{tg}\,\beta d}\right| =$$

$$= \frac{\left(Z_0^2 - Z_0'^2\right)\left|\mathrm{tg}\,\beta d\right|}{\sqrt{4Z_0^2 Z_0'^2 + \left(Z_0^2 + Z_0'^2\right)\mathrm{tg}^2\,\beta d}}$$

Constanta de defazare β poate fi exprimată în funcție de constanta de defazare în spațiul liber, β_0 ,

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\varepsilon_r}\,\beta_0 ,$$

iar impedanța caracteristică Z_0' este

$$Z_0' = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} .$$

Înlocuind, se obține relația

$$\frac{N^2-1}{N^2+1}=\frac{\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)\left|\operatorname{tg}\left(\beta_0 d\sqrt{\varepsilon_r}\right)\right|}{\sqrt{4\dfrac{1}{\varepsilon_r}+\left(1+\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)^2\cdot\operatorname{tg}^2\left(\beta_0 d\sqrt{\varepsilon_r}\right)}}$$

din care apoi poate fi determinată constanta dielectrică ε_r.

Utilizând datele numerice ale problemei, se obţine:

$$\lambda_0=\frac{c_0}{f}=\frac{3\cdot 10^8}{10^9}=30\,\text{cm},$$

$$\beta_0 d=\frac{2\pi}{\lambda_0}d=\frac{2\pi}{30}\cdot 5=\frac{\pi}{3},$$

$$\frac{N^2-1}{N^2+1}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

Permitivitatea electrică relativă, ε_r, rezultă deci din ecuaţia

$$\frac{1}{3}=\frac{(\varepsilon_r-1)\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}\sqrt{\varepsilon_r}\right)\right|}{\sqrt{4\varepsilon_r+(\varepsilon_r+1)^2\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{3}\sqrt{\varepsilon_r}\right)}}.$$

Relaţia precedentă poate fi adusă şi la forma

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{\varepsilon_r}\right)=\frac{\varepsilon_r}{(\varepsilon_r-2)(2\varepsilon_r-1)},\qquad \varepsilon_r>1.$$

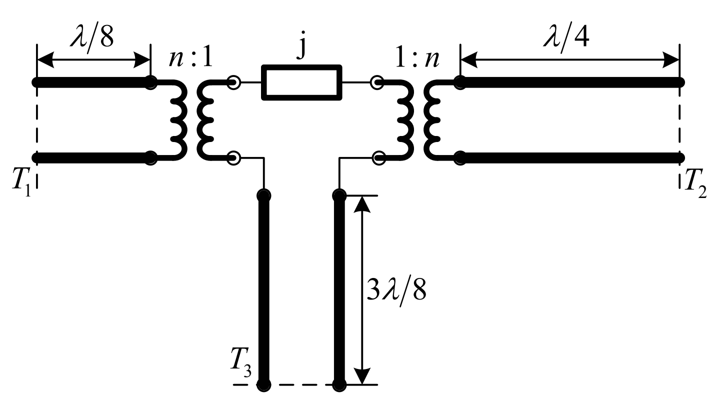
Prin rezolvarea numerică sau grafică se obţin soluţiile:

$\varepsilon_{r1}\approx 2$, $\varepsilon_{r2}\approx 7{,}3$, $\varepsilon_{r3}\approx 10{,}5$, …

deci răspunsul nu este univoc.

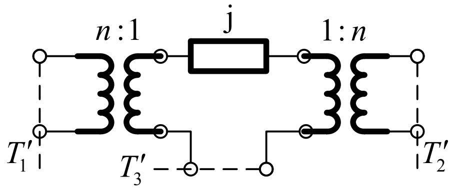
În consecinţă, metoda de măsurare a ε_r bazată pe această idee poate fi aplicată numai dacă este apriori cunoscută o valoare aproximativă a constantei dielectrice.

4.16 Se consideră triportul reciproc, pasiv şi nedisipativ având schema cu elemente normate reprezentată în figura de mai jos. Impedanţele de normare la porţi sunt egale cu impedanţa caracteristică, aceeaşi pentru cele trei linii fără pierderi, iar transformatoarele sunt ideale. Să se calculeze parametrii S_{11}, S_{22} şi S_{33} ai triportului.



Rezolvare:

Se pleacă de la triportul din figura de mai jos, pentru care se calculează impedanțele de intrare la fiecare poartă în condițiile în care celelalte porți sunt terminate adaptat:



$$z'_{in1}\Big|_{z'_{in2}=z'_{in3}=1} = n^2\left(\mathrm{j}+\frac{1}{n^2}+1\right) = \left(1+n^2\right)+\mathrm{j}n^2 = z'_{in2}\Big|_{z'_{in1}=z'_{in3}=1}$$

$$z'_{in3}\Big|_{z'_{in1}=z'_{in2}=1} = \frac{2}{n^2}+\mathrm{j}$$

Se determină parametrii de repartiție $S'_{ii},\ i\in\{1,2,3\}$ ai acestui triport:

$$S'_{11} = \frac{z'_{in1}-1}{z'_{in1}+1}\Bigg|_{z'_2=z'_3=1} = \frac{\left(1+n^2\right)+\mathrm{j}n^2-1}{\left(1+n^2\right)+\mathrm{j}n^2+1} = \frac{n^2+\mathrm{j}n^2}{\left(2+n^2\right)+\mathrm{j}n^2} = n^2\,\frac{n^2+1+\mathrm{j}}{n^4+2n^2+2},$$

$$S'_{22} = S'_{11},$$

$$S'_{33} = \frac{z'_{in3}-1}{z'_{in3}+1}\Bigg|_{z'_1=z'_2=1} = \frac{\left(\dfrac{2}{n^2}+\mathrm{j}\right)-1}{\left(\dfrac{2}{n^2}+\mathrm{j}\right)+1} = \frac{2-n^2+\mathrm{j}n^2}{2+n^2+\mathrm{j}n^2} = \frac{2-n^4+\mathrm{j}2n^2}{n^4+2n^2+2}$$

Dacă se deplasează convenabil planele de referință, ale triportului din figura de mai sus se obține circuitul din problemă. Parametrii săi de repartiție sunt:

$$S_{11} = S'_{11}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l_1} = S'_{11}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8}} = S'_{11}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{j}S'_{11} = \frac{n^2-\mathrm{j}n^2\left(n^2+1\right)}{n^4+2n^2+2}$$

$$S_{22} = S'_{22}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta\frac{\lambda}{4}} = S'_{22}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}} = S'_{22}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi} = -S'_{22} = -\frac{n^2\left(n^2+1\right)+\mathrm{j}n^2}{n^4+2n^2+2}$$

$$S_{33} = S'_{33}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta\frac{3\lambda}{8}} = S'_{33}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{8}} = S'_{33}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}} = \mathrm{j}S'_{33} = \frac{-2n^2+\mathrm{j}\left(2-n^4\right)}{n^4+2n^2+2}$$

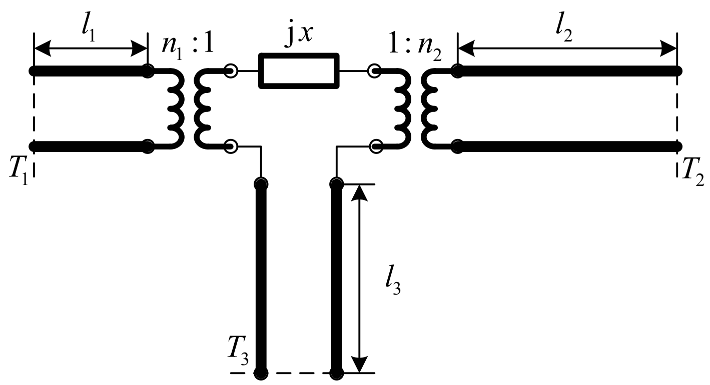
4.17 Pentru măsurarea unei joncțiuni triport reciproce, pasive, fără pierderi, cu plan de simetrie, (porțile 1 și 2 fiind simetrice) s-a conectat la poarta 3 un scurtcircuit deplasabil. S-a constatat că transmisia de putere între porțile 1 și 2 este întreruptă atunci când pistonul de scurtcircuit se află la o distanță $z_1 = 1\,\mathrm{cm}$ de poarta 3, iar atunci când pistonul este la distanța $z_2 = 1{,}625\,\mathrm{cm}$ de aceeași poartă puterea este transmisă în întregime (fără reflexii). În această a doua situație, defazajul între porțile 1 și 2 este de π radiani.

Terminând adaptat porțile 2 și 3, s-a măsurat pe ghidul de intrare un raport de undă staționară $\sigma = 2$.

Știind că toate ghidurile de acces sunt identice şi că lungimea de undă în aceste ghiduri este $\lambda_g = 5\,\text{cm}$, să se determine schema echivalentă (normată) a triportului.

Rezolvare:

Orice triport pasiv reciproc şi nedisipativ admite schema echivalentă cu elemente normate reprezentată în figura de mai jos.



Condiția de întrerupere a transmisiei de putere între porțile 1 şi 2 se poate scrie sub forma:

$$\operatorname{tg} \beta(l_3 + z_1) \to \infty ,$$

deci

$$\frac{2\pi}{\lambda_g}(l_3 + z_1) = \frac{\pi}{2},$$

de unde rezultă

$$l_3 = \frac{\lambda_g}{4} - z_1 = \frac{5}{4} - 1 = 0{,}25\,\text{cm}.$$

Pentru joncțiunile cu plan de simetrie $(n_1 = n_2 = n)$, transmisia integrală a puterii între porțile 1 şi 2 este condiționată de relația:

$$\operatorname{tg} \beta(l_3 + z_2) + x = 0 ,$$

de unde rezultă:

$$x = -\operatorname{tg} \beta(l_3 + z_2) = -\operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda_g}(l_3 + z_2) = -\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}(0{,}25 + 1{,}625) = 1 .$$

Conectând la porțile 2 şi 3 sarcini adaptate, impedanța de intrare normată văzută la poarta 1 este:

$$z_{in1} = n^2\left(1 + \frac{1}{n^2} + \mathrm{j}x\right) = \left(1 + n^2\right) + \mathrm{j}n^2 x .$$

astfel încât coeficientul de reflexie are expresia

$$\Gamma_1 = \frac{z_{in1} - 1}{z_{in1} + 1} = \frac{\left[\left(1 + n^2\right) + \mathrm{j}n^2 x\right] - 1}{\left[\left(1 + n^2\right) + \mathrm{j}n^2 x\right] + 1} = \frac{n^2 + \mathrm{j}n^2 x}{\left(2 + n^2\right) + \mathrm{j}n^2 x}$$

$$= \frac{n^2(1 + \mathrm{j})}{\left(2 + n^2\right) + \mathrm{j}n^2} = n^2\,\frac{1 + n^2 + \mathrm{j}}{n^4 + 2n^2 + 2}$$

Modulul coeficientului de reflexie este legat de raportul de undă staționară, prin relația:

$$\left|\Gamma_1\right| = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Egalând modulele, se obține:

$$\frac{n^2\sqrt{2}}{\sqrt{2n^4 + 4n^2 + 4}} = \frac{1}{3},$$

de unde rezultă

$$n_1 = n_2 = n = 0{,}8\,.$$

Mai trebuie determinate lungimile $l_1 = l_2 = l$. În cazul transmisiei integrale de putere, defazajul dintre porțile 1 și 2 are expresia simplă

$$\Delta\varphi = \beta l_1 + \beta l_2 = 2\beta l = 2\frac{2\pi}{\lambda_g} l$$

și, întrucât

$$\Delta\varphi = \pi \text{ radiani}$$

rezultă

$$l = l_1 = l_2 = \frac{\lambda_g}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25\,\text{cm.}$$

4.18 Să se arate că joncțiunea cu 4 porți, în dublu T, simetrică, poate fi folosită ca punte de microunde, adică alimentând-o la poarta 3 (sau 4) și conectând un detector adaptat la poarta 4 (respectiv 3), acesta va indica o putere nulă dacă și numai dacă impedanțele conectate la porțile 1 și 2 sunt egale între ele.

Rezolvare:

Matricea de repartiție a joncțiunii dublu T simetrice are forma:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & -S_{14} \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 \\ S_{14} & -S_{14} & 0 & S_{44} \end{bmatrix}$$

Se consideră un generator aplicat la poarta 3 și un detector adaptat montat la poarta 4 $\left(a_4 = 0\right)$. Se notează Γ_1, respectiv Γ_2, coeficienții de reflexie ai sarcinilor conectate la porțile 1, respectiv 2. Se scriu relațiile:

$$\Gamma_1 = \frac{a_1}{b_1} \;\Rightarrow\; a_1 = \Gamma_1 b_1 \tag{1}$$

$$\Gamma_2 = \frac{a_2}{b_2} \;\Rightarrow\; a_2 = \Gamma_2 b_2 \tag{1'}$$

Prima, a doua și a patra ecuație a sistemului $b = S \cdot a$ au expresiile:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3\,, \tag{2}$$

$$b_2 = S_{12}a_1 + S_{11}a_2 + S_{13}a_3\,, \tag{3}$$

$$b_4 = S_{14}a_1 - S_{14}a_2\,. \tag{4}$$

Dacă se scad relațiile (2) şi (3) şi se ține seama de egalitățile (1) şi (1'), se obține:

$$\frac{a_1}{\Gamma_1} - \frac{a_2}{\Gamma_2} = \left(S_{11} - S_{12}\right)\left(a_1 - a_2\right).$$

De aici rezultă imediat faptul că

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2. \tag{5}$$

Pe de altă parte, egalitatea $\Gamma_1 = \Gamma_2$ se poate scrie sub forma

$$\frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} = \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1},$$

ceea ce înseamnă că

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z_2, \tag{6}$$

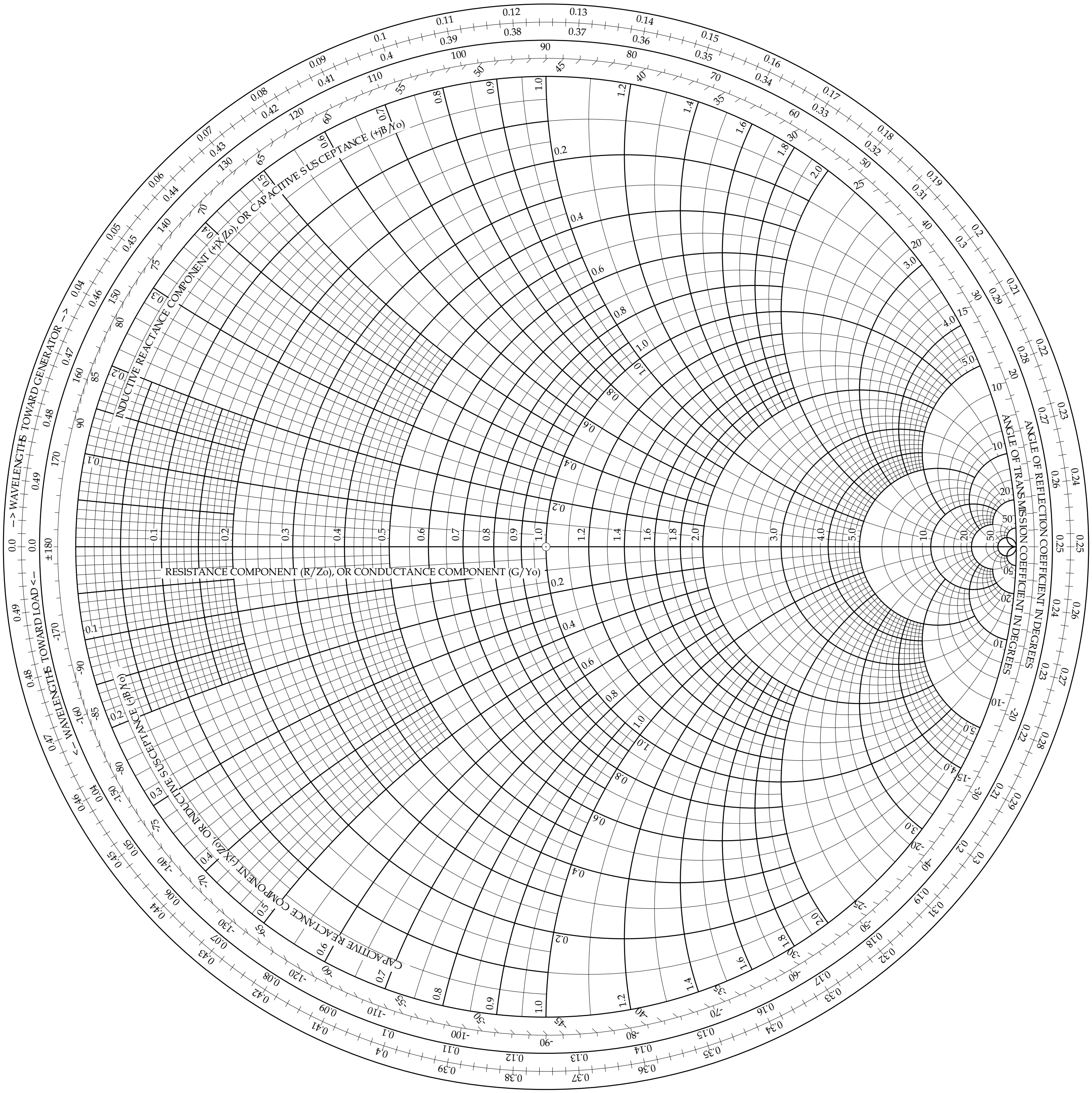
unde z_1 şi z_2 sunt impedanțele normate de la porțile 1 şi 2.

Pe de altă parte, din relația (4) rezultă că

$$b_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2. \tag{7}$$

În consecință, din echivalențele (5), (6) şi (7) se obține, concluzia:

$$b_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z_2.$$



—> WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR —>
<— WAVELENGTHS TOWARD LOAD <—
INDUCTIVE REACTANCE COMPONENT (+jX/Zo), OR CAPACITIVE SUSCEPTANCE (+jB/Yo)
RESISTANCE COMPONENT (R/Zo), OR CONDUCTANCE COMPONENT (G/Yo)
CAPACITIVE REACTANCE COMPONENT (-jX/Zo), OR INDUCTIVE SUSCEPTANCE (-jB/Yo)
ANGLE OF REFLECTION COEFFICIENT IN DEGREES
ANGLE OF TRANSMISSION COEFFICIENT IN DEGREES