Problema rucsacului 1/0. Rezolvare prin metoda branch and bound

Fiind date n obiecte fiecare cu o greutate si o valoare cunoscuta si un rucsac de capacitate W determinati setul de obiecte care pot fi incarcate in rucasac astfel incat sa se maximizeze valoarea lor.

Datele initiale ale problemei:

N = 4, W = 16

i	value[i]	weight[i]	Value[i]/weight[i]
1	40	2	20
2	30	5	6
3	50	10	5
4	10	5	2

Obiectele au fost ordonate descrescator dupa rapotul value[i]/weight[i] (valoarea pe unitate de greutate).

Pentru a determina daca un nod din arborele decizional este promitator vom initializa variabilele *totalweight* si *bound* cu greutatea si valoarea obiectelor deja incluse in rucasac si vom adauga apoi obiecte pana cand dam de un obiect a carui greutate ar face ca *totalweight* sa depaseasca W.

Pentru a calcula limita maxima a valorii luam o fractiune din acest obiect, atat cat permite spatiul ramas in rucsac si adaugam valoarea acestei fractiuni la valoarea variabilei *bound*. In acest fel *bound* devine o limita maxima a valorii ce poate fi obtinuta expandand acest nod.

Daca nodul pe care il expandam este la nivelul *i* iar nodul care ar duce la depasirea greutatii W este la nivelul *k* atunci avem:

$$totalweight = weight + \sum_{j=i+1}^{k-1} weight[j]$$

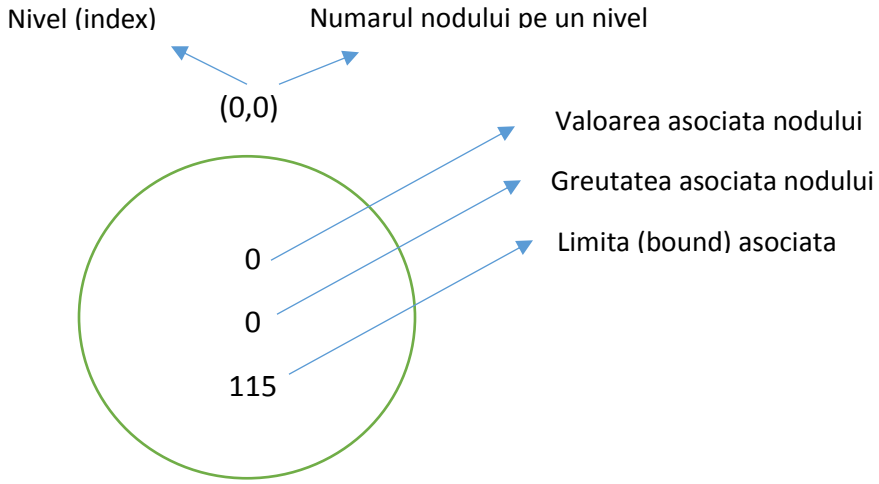
Si

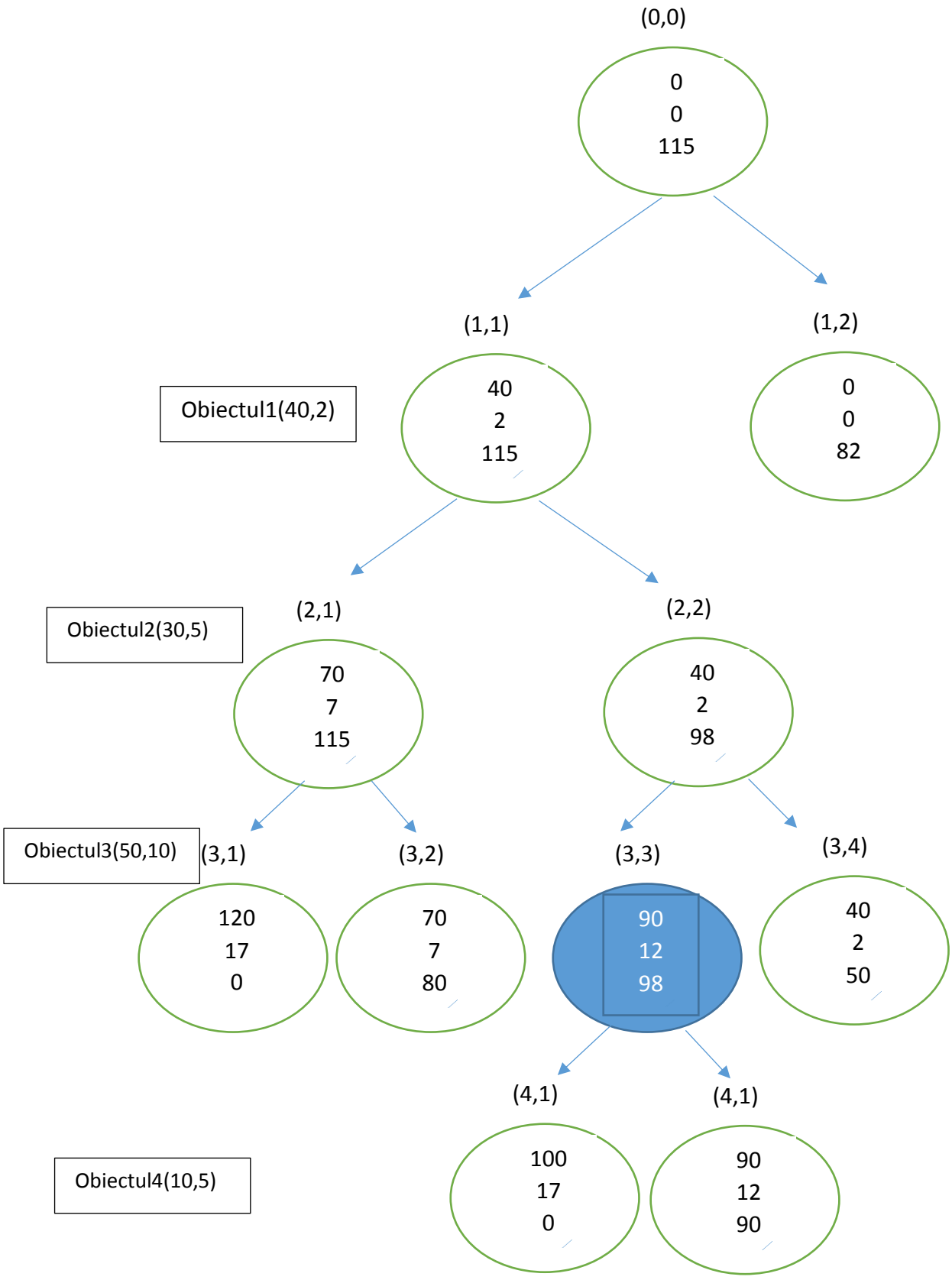
$$bound = value + \sum_{j=i+1}^{k-1} value[j] + (W - totalweight)\frac{value[k]}{weight[k]}$$

Un nod nu este promitator daca aceasta limita este mai mica decat *maxvalue*, adica valoarea celei mai bune solutii gasita pana la acest punct.

Vom adopta o strategie de tipul Best-First de vizitare a nodurilor arborelui de decizie. Dupa vizitarea tuturor copiilor unui nod, dintre nodurile promitatoare vom vizita nodul cu cea mai mare limita a valorii. In acest fel putem ajunge la solutia optimala mai repede decat daca am vizita toate nodurile promitatoare intr-o ordine oarecare.

In figura de mai jos avem reprezentat arborele de decizie iar pentru fiecare nod avem specificate *value*, *weight* si *bound*. Ne vom referi la un nod prin nivelul lui (level) si pozitia sa (din stanga) in arbore.




(0,0)
0
0
115
(1,1)
(1,2)
Obiectul1(40,2)
40
2
115
0
0
82
(2,1)
(2,2)
Obiectul2(30,5)
70
7
115
40
2
98
Obiectul3(50,10)
(3,1)
(3,2)
(3,3)
(3,4)
120
17
0
70
7
80
90
12
98
40
2
50
(4,1)
(4,1)
Obiectul4(10,5)
100
17
0
90
12
90

Pasii algoritmului:

1. Vizitam nodul (0, 0) (radacina).
2. Setam *value* si *weight* la 0 and 0.
3. Calculam *bound* si obtinem 115 (= 40 + 30 + 5 * (16-7).
4. Setam *maxvalue* la 0.
5. Vizitam nodul (1, 1).
6. Caculam *value* si *weight* : 40 respectiv 2.
7. Deoarece 2 < 16 iar 40 > 0 setam *maxvalue = 40.*
8. Calculam *bound* = 115.
9. Vizitam nodul (1, 2).
10. Calculam *value* = 0 si *weight* =0.
11. Calculam *bound* = 82 (=30 + 50 + 2 * (16 – 15)).
12. Determinam nodul promitator cu cel mai mare *bound*
13. Alegem nodul (1, 1) deoarece 115 > 82 si il vom expanda la pasul urmator.
14. Vizitam nodul (2, 1).
15. Calculam *value* = 70, *weight* = 7.
16. Deaorece 7 < 16, si 70 > 40 setam *maxvalue* = 70.
17. Calculam *bound* = 115.
18. Vizitam nodul (2, 2).
19. Calculam *value* = 40, *weight* = 2.
20. Calculam *bound* = 98 (= 40 + 50 + (16-2)*2).
21. Alegem nodul promitator cu cel mai mare *bound*.
22. Acesta este nodul (2, 1). Il vom expanda la pasul urmator.
23. Vizitam nodul (3, 1).
24. Calculam value=120, weight=17.
25. Acesta nu este admisibil deoarece 17 > 16 Setam *bound* =0.
26. Vizitam nodul (3, 2).
27. Calculam *value*=70, *weight*=7.
28. Calculam *bound* = 80.
29. Determinam nodul promitator cu cel mai mare *bound*.
30. Acesta este nodul (2, 2). Il vom expanda la pasul urmator.
31. Vizitam nodul (3, 3).
32. Calculam *value* = 90, *weight* = 12.
33. Deoarece 12 < 16 si 90 > 70 , actualizam *maxvalue = 90*.
34. In acest moment nodurile (1, 2) si (3, 2) devin nepromitatoare deoarece valoarea *bound* (82 respectiv 80) este mai mica decat 90.
35. Calculam *bound* = 98 (pentru nodul (3,3).
36. Vizitam nodul (3, 4).
37. Calculam *value* = 40, *weight* = 2.
38. Calculam *bound* = 50.
39. Determinam ca nu este nod promitator deoarece 50 < 90 (valaorea actuala a lui *maxvalue*).
40. Determinam nodul promitator cu cea mai mare valoarea a lui *bound*.
41. Acesta este nodul (3, 3). Il vom expanda la pasul urmator.
42. Vizitam nodul (4, 1).

43. Calculam *value* = 100, *weight* = 17.
44. Determinam ca nu este nod promitator deoarece 17 > 16. Setam *bound* = 0.
45. Vizitam nodul (4, 2).
46. Calculam *value* = 90, *weight* =12.
47. Calculam *bound* = 90.
48. Determinam ca nu este nod promitator deoarece 90 <= 90 (valoarea curenta a lui *maxvalue*).

Observatie: chiar daca la fiecare pas expandam nodul cu cea mai mare valoare a lui *bound*, nu avem totusi nici o garantie ca acesta va conduce la solutia optimala. In exemplul nostru nodul (2,1) pare a fi mai bun decat nodul (2,2) dar totusi nodul (2,2) a condus la solutia optima.

Mai jos este prezentat pseudocodul pentru algoritmul branch and bound aplicat in cazul problemei rucsacului. Vom mentine lista nodurilor promitatoare intr-o structura de tip coada. Pentru a extrage din aceasta coada nodul cu valoarea bound cea mai mare (strategia best-first), elementele din coada vor fi sortate in ordine descrescatoare dupa valoarea bound.

```
void best_first_branch_and_bound (state_space_tree T, number& best) {
  queue Q;
  node u, v;

 initialize (Q);           // Initializam Q (coada goala)
 v = root of T;
 best = value(v);
 insert (Q, v);
 while (! isEmpty (Q)) {
  remove (Q, v);           // extragem nodul cu cea mai mare valoare bound
  if (bound (v) is better than best) // Verificam daca nodul este promitator
      for (each child u of v) {
          if (value(u) is better than best)
                  best = value (u);
          if (bound (u) is better than best)
                 insert (Q, u);
      }
   }
}
```

Un nod in arborele solutiilor va avea structura:

```
struct node {
     int level;
     int value;
     int weight;
     float bound;
};
```

Aici, *level* este nivelul nodului in arbore (totodata, indexul nodului in vectorul cu obiecte), *value* este valoarea totala a obiectelor incarcate in rucsac inclusiv obiectul din nodul curent, *weight*

greutatea totala a obiectelor incarcate in rucsac inclusiv obiectul din nodul curent iar *bound* este limita maxima a valorii ce se poate obtine expandand nodul curent.

Functia *knapsack* de mai jos implementeaza algoritmul prezentat.

```
void knapsack(int n, int value[], int weight[],int W) {
  Queue Q;
  int maxvalue;
  node u, v;
  Initialize(Q);
  v.level = 0;
  v.value = 0;
  v.weight = 0;
  v.bound = bound(v); // nodul v va fi radacina arborelui
  maxvalue = 0;
  insert(Q, v);
  while (! isEmpty(Q)){
     remove(Q, v);  //extrag nodul cu cel mai mare bound
     if (v.bound > maxvalue) { // verific daca este nod promitator
        u.level = v.level + 1;  // nodul u va fi nodul copil care include
                                // urmatorul obiect
        u.weight = v.weight + w[u.level];
        u.value = v.value + value[u.level];
        if (u.weight <= W && u.value > maxvalue)
           maxvalue = u.value;
        u.bound = bound(u);
        if (u.bound > maxvalue)
           insert(Q, u);

        u.weight = v.weight; // nodul u va fi nodul copil care NU include
                             // urmatorul obiect

        u.value = v.value;
        u.bound = bound(u);
        if (u.bound > maxvalue)
           insert(Q, u);
     }
  }
  return maxvalue;
}
```

Functia *bound(node u)* care calculeaza limita maxima a valorii ce se poate obtine plecand de la nodul u este:

```
float bound (node u){
   index j, k;
   int totweight;
   float result;

   if (u.weight >= W)
         return 0;
   else {
         result = u.value;
         j = u.level + 1;
         totweight = u.weight;
```

```
        while (j <= n && totweight + weight[j] <= W){
           totweight = totweight + w[j];
           result = result + value[j];
           j++;
        }
        k = j;
        if (k <=n)
           result = result + (W - totweight) * value[k] /weight[k];
        return result;
   }
}
```