Основные определения и обозначения

Матрица – это прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Упорядоченная пара чисел, записываемая в виде $m\times n$, называется *размером* или *порядком матрицы* (говорят "матрица порядка m на n" или "матрица размера m на n").
Матрица называется *квадратной*, если количество строк равно количеству столбцов, т.е. когда $m=n$. Матрица, состоящая из одной строки (столбца), называется *вектор-строкой* (*вектор-столбцом*). Матрица, состоящая их одного элемента, называется *скаляром*, т.е. любое число можно считать матрицей размера 1×1.

Для записи матриц используются следующие обозначения:

1) $\mathbf{A}=\| a_{ij} \|$, где a_{ij} – элемент матрицы, расположенный в i-й строке j-го столбца, $i=1,2,...,m$ и $j=1,2,...,n$;

2) $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix};$$

3) $$\mathbf{A}=\| a_j^i \|=\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^m & a_2^m & ... & a_n^m \end{Vmatrix}.$$

Пусть имеется матрица $\mathbf{A}=\| a_{ij} \|$, где $i=1,2,...,m$ и $j=1,2,...,n$.

Введём обозначения

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{bmatrix},\ldots,\ \mathbf{a}_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$ т.е. $\mathbf{a}_j$ – это j-й столбец матрицы $\mathbf{A}$,

тогда матрицу A можно записать в виде $\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid ... \mid \mathbf{a}_n\right]$.

Пусть теперь $\mathbf{a}_1=\left[a_{11} \quad a_{12} \quad ... \quad a_{1n}\right]$, $\mathbf{a}_2=\left[a_{21} \quad a_{22} \quad ... \quad a_{2n}\right]$,..., $\mathbf{a}_m=\left[a_{m1} \quad a_{m2} \quad ... \quad a_{mn}\right]$, т.е. $\mathbf{a}_i$ – это i-я строка матрицы $\mathbf{A}$, тогда матрицу $\mathbf{A}$ можно записать в виде

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \hline \mathbf{a}_2 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{a}_m \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица $\mathbf{A}=\| a_{ij} \|$ называется *симметричной*, если $a_{ij}=a_{ji}$ для всех i и j.

Множество элементов a_{ij}, у которых $i=j$, называется *главной диагональю матрицы*.

Примеры матриц:

1) $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$ – нулевая матрица,

2) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$ – единичная матрица,

3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$ – верхняя треугольная матрица,

4) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$ – нижняя треугольная матрица,

5) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$ – диагональная матрица.

Элементарные операции над матрицами

Матрицы $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ и $\mathbf{B} = \| b_{ij} \|$ *равны*, если они одного порядка и $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

Суммой матриц $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ *и* $\mathbf{B} = \| b_{ij} \|$ совпадающих размеров называется матрица $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех i и j.

Произведением матрицы $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ *на число* λ называется матрица $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для всех i и j.

Транспонирование матрицы – это операция преобразования матрицы, в результате которой её строки становятся столбцами (а столбцы строками).
Пусть имеется матрица $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ размера $m \times n$, тогда её транспонированная матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \| a'_{ij} \|$, имеет порядок $n \times m$ и $a'_{ij} = a_{ji}$ для $i = 1, 2, ..., n$ и $j = 1, 2, ..., m$.

Пример:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Операции сложения матриц, умножения матрицы на число и транспонирования обладают следующими свойствами:

1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$,
2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$,
3) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$,
4) для $\forall\mathbf{A}\ \ \exists!\mathbf{A}'$: $\mathbf{A}+\mathbf{A}'=\mathbf{O}$,
5) $1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$,
6) $\lambda(\mu\mathbf{A})=(\lambda\mu)\mathbf{A}$,
7) $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$,
8) $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$,
9) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$,
10) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$,
11) $(\lambda\mathbf{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Пусть имеются две матрицы $\mathbf{A}_{m\times l}$ и $\mathbf{A}_{l\times n}$, тогда произведением матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется матрица $\mathbf{C}$, элементы которой вычисляются следующим образом

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}\text{ , где } i=1,2,...,m \text{ и } j=1,2,...,n\,.$$

Примеры:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=14,\quad \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}.$$

Операция умножения матриц обладает следующими свойствами:

1) в общем случае $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$,
2) $\mathbf{AE}=\mathbf{EA}=\mathbf{A}$,
3) $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$,
4) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$,
5) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$,
6) $(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}=\lambda(\mathbf{AB})$,
7) $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Полезные "метафоры" для умножения матриц

Пусть имеется матрица $\mathbf{A}_{m\times n}$ и вектор-столбец $\mathbf{x}_{n\times 1}$, тогда

$$\mathbf{Ax}=[\mathbf{a}_1\,|\,\mathbf{a}_2\,|\ldots|\,\mathbf{a}_n]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{bmatrix}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\ldots+x_n\mathbf{a}_n,$$

т.е. произведение $\mathbf{Ax}$ – это вектор-столбец, равный линейной комбинации вектор-столбцов матрицы $\mathbf{A}$ с коэффициентами – элементами вектор-столбца $\mathbf{x}$.

Пусть имеется матрица $\mathbf{A}_{m\times n}$ и вектор-строка $\mathbf{y}_{1\times m}$, тогда

$$\mathbf{yA}=[y_1\quad y_2\quad \ldots\quad y_m]\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \hline \mathbf{a}_2\\ \hline \ldots\\ \hline \mathbf{a}_m\end{bmatrix}=y_1\mathbf{a}_1+y_2\mathbf{a}_2+\ldots+y_m\mathbf{a}_m,$$

т.е. произведение $\mathbf{yA}$ – это вектор-строка, равная линейной комбинации вектор-строк матрицы $\mathbf{A}$ с коэффициентами – элементами вектор-строки $\mathbf{y}$.

Пусть имеются матрицы $\mathbf{A}_{m\times l}$ и $\mathbf{B}_{l\times n}$, тогда:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}[\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{b}_n] = [\mathbf{Ab}_1 \mid \mathbf{Ab}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{Ab}_n],$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \hline \mathbf{a}_2 \\ \hline \ldots \\ \hline \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{a}_2\mathbf{B} \\ \hline \ldots \\ \hline \mathbf{a}_m\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{a}_l] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{b}_2 \\ \hline \ldots \\ \hline \mathbf{b}_l \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{l} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k = \sum_{k=1}^{l} \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{mk} \end{bmatrix} [b_{k1}\ b_{k2}\ \ldots b_{kn}].$$

т.е. произведение $\mathbf{AB}$ можно рассматривать как матрицу, j-й столбец которой равен произведению матрицы $\mathbf{A}$ на j-й столбец матрицы $\mathbf{B}$, или как матрицу, i-я строка которой равна произведению i-й строки матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{B}$, или как сумму произведений вектор-столбцов матрицы $\mathbf{A}$ на вектор-строки матрицы $\mathbf{B}$.

Линейная зависимость матриц

Выражение $\lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{A}_n$ называется *линейной комбинацией матриц* $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – *коэффициентами линейной комбинации.*

Матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют не равные одновременно нулю числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такие, что $\lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{A}_n = \mathbf{O}$.

Матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$ называются *линейно независимыми*, если их линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{A}_n = \mathbf{O}$ только, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Элементарными преобразованиями совокупности матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$ называются:

1) умножение одной из матриц совокупности на число $\lambda \neq 0$,
2) прибавление одной матрицы совокупности к другой.

Замечание: требование $\lambda \neq 0$ гарантирует обратимость элементарных преобразований.

Теорема (о линейной зависимости)

Справедливы следующие утверждения:

1. Матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна из них может быть представлена в виде линейной комбинации других матриц.
2. Если среди матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$ имеется нулевая матрица, то они линейно зависимы.
3. Если какая-то часть из совокупности матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$ линейно зависима, то и вся совокупность матриц линейно зависима.
4. Если совокупность матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$ линейно независима, то и любая её часть линейно независима.
5. В результате элементарных преобразований линейно (не)зависимая совокупность матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$ остаётся линейно (не)зависимой.

Теорема (о разложении матрицы по системе линейно независимых матриц)

Пусть $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots$, $\mathbf{A}_n$ – линейно независимые матрицы и $\mathbf{B} = \lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{A}_n$, тогда коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ определены однозначно.