

Задача 1

Даны матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вычислить матрицы $3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ и $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

Ответы:

$$3\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 6 & -5 & 7 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad 2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 1 \\ -1 & -5 & 8 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Задача 2

Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вычислить матрицу $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^T$ и $3\mathbf{A}^T - 2\mathbf{B}$.

Ответы:

$$2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -6 & 5 & -4 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad 3\mathbf{A}^T - 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -8 \\ 2 & 0 & -7 \\ -7 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Задача 3

Даны матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислить матрицы \mathbf{AB} , \mathbf{BA} , \mathbf{CD} и \mathbf{DC} .

Ответ:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CD} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 4

Даны матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Вычислить матрицу $\mathbf{AC}^T\mathbf{B} + (\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{A}^T)^T$.

Ответ:

$$\mathbf{AC}^T\mathbf{B} + (\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{A}^T)^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Задача 5

Доказать справедливость следующих равенств:

- 1) $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$;
- 2) $(\lambda \mathbf{A})\mathbf{B} = \lambda(\mathbf{AB})$;
- 3) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$;
- 4) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
- 5) $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$, где $tr(...)$ – это сумма диагональных элементов матрицы.

Задача 6

Даны матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислить матрицы \mathbf{A}^n и \mathbf{B}^n .

Ответ:

$$\mathbf{A}^n = 2^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$