Задача 1

Даны матрицы:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \text{и}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Вычислить матрицу $2\mathbf{A}-\mathbf{B}+3\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$.

Ответ:

$$2\mathbf{A}-\mathbf{B}+3\mathbf{C}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 4\end{bmatrix}.$$

Задача 2

Даны матрицы:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad \text{и}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

Вычислить матрицы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$.

Ответ:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ -1 & -2 & -1\\ -3 & 2 & -5\end{bmatrix},\quad \mathbf{BA}=\begin{bmatrix}-4 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 4 & 1\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ -2 & 3 & -3 & -1\end{bmatrix}.$$

Задача 3

Даны матрицы:

$$\mathbf{A}^{T}=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 6 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}7 & 1 & -2\\ 2 & -5 & 1\\ 3 & -4 & -2\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-6 & -2 & -3\\ -1 & 6 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -3\end{bmatrix}.$$

Вычислить матрицу $(\mathbf{BA}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathbf{D}+\mathbf{A}(\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Ответ:

$$(\mathbf{BA}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathbf{D}+\mathbf{A}(\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\ -4\end{bmatrix}.$$

Задача 4

Даны матрицы:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad \text{и}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Вычислить матрицы $\mathbf{A}^{n}$ и $\mathbf{B}^{n}$.

Ответ:

$$\mathbf{A}^{n}=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}^{n}=\begin{bmatrix}\lambda^{n} & \lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}+\ldots+1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Задача 5
Доказать справедливость следующих равенств:
1) $(\lambda\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \lambda\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$,
2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$,
3) $(\mathbf{ABC})^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$,
4) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$,
5) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$.

Задача 6
Пусть $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB}-\mathbf{BA}$.
Доказать справедливость следующих равенств:
6) $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = -[\mathbf{B},\mathbf{A}]$,
7) $[\mathbf{A},\mathbf{A}] = \mathbf{O}$,
8) $[\mathbf{A},\mathbf{E}] = [\mathbf{E},\mathbf{A}] = \mathbf{O}$,
9) $[\mathbf{A},\mathbf{B}+\mathbf{C}] = [\mathbf{A},\mathbf{B}]+[\mathbf{A},\mathbf{C}]$.

Задача 7
Пусть $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})$.
Доказать справедливость следующих равенств:
1) $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\} = \{\mathbf{B},\mathbf{A}\}$,
2) $\{\mathbf{A},\mathbf{A}\} = \mathbf{A}^2$,
3) $\{\mathbf{A},\mathbf{E}\} = \{\mathbf{E},\mathbf{A}\} = \mathbf{A}$,
4) $\{\mathbf{A},\mathbf{B}+\mathbf{C}\} = \{\mathbf{A},\mathbf{B}\}+\{\mathbf{A},\mathbf{C}\}$.

Задача 8
Доказать или опровергнуть следующие равенства:
1) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$,
2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = (\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$,
3) $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})$,
4) $(\mathbf{A}+\mathbf{E})^3 = \mathbf{A}^3+3\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+\mathbf{E}$.

Задача 9
Определить, какие из следующих утверждений являются истинными:
1) если первый и третий столбцы матрицы $\mathbf{B}$ одинаковые, то одинаковыми являются первый и третий столбцы матрицы $\mathbf{AB}$;
2) если второй и четвёртый столбцы матрицы $\mathbf{B}$ одинаковые, то одинаковыми являются вторая и четвёртая строка матрицы $\mathbf{AB}$;
3) если первая и четвёртая строки матрицы $\mathbf{A}$ одинаковые, то одинаковыми являются первый и четвёртый столбцы матрицы $\mathbf{AB}$;
4) если вторая и третья строки матрицы $\mathbf{A}$ одинаковые, то одинаковыми являются вторая и третья строки матрицы $\mathbf{BA}$.

Задача 10 (*)
Пусть матрица $\mathbf{P} = \mathbf{E}-(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)^{\mathrm{T}}(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ – её i и j-я строки. Вычислить матрицы $\mathbf{PA}$ и $\mathbf{AP}$.
Ответ:

$\mathbf{PA}$ – это матрица $\mathbf{A}$, в которой переставлены местами i и j-я строки.

$\mathbf{AP}$ – это матрица $\mathbf{A}$, в которой переставлены местами i и j-й столбцы.

Задача 11 (*)
Пусть $\boldsymbol{\iota} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$.

Вычислить сумму элементов матрицы $\mathbf{Z} = \mathbf{X} - \dfrac{1}{n}\boldsymbol{\iota}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}\,\mathbf{X}$.

Ответ: сумма элементов матрицы $\mathbf{Z}$ равна 0.

Задача 12 (*)
Доказать, что, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – вектор-столбцы размера $n\times 1$ и $\mathbf{C} = \mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}$, то существует такое число λ, что $\mathbf{C}^2 = \lambda\mathbf{C}$.

Задача 13 (*)
Пусть $\mathbf{A} = diag(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\mathbf{B} = diag(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, λ – число, $\mathbf{C}$ – матрица $n\times n$.
Доказать, что:

1) матрицы $\lambda\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ – диагональные;
2) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$;
3) строки матрицы $\mathbf{AC}$ – это строки матрицы $\mathbf{C}$, умноженные на α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$.
4) столбцы матрицы $\mathbf{CA}$ – это столбцы матрицы $\mathbf{C}$, умноженные на α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Задача 14 (*)
Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – *симметричные матрицы*, т.е. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$ и $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}$.
Доказать, что:

1) $\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ – симметричные матрицы;
2) $\mathbf{AB}$ – симметричная матрица, если и только если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – *перестановочные матрицы*, т.е. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Задача 15 (*)
Доказать, что, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – *ортогональные матрицы*, т.е. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$,
то матрица $\mathbf{AB}$ также является ортогональной.

Задача 16 (*)
Доказать, что, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – верхние треугольные матрицы, то матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$ также являются верхними треугольными матрицами. Выразить диагональные элементы матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ через элементы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Задача 17 (*)
Доказать, что, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – *стохастические матрицы*, т.е. элементы этих матриц неотрицательные и сумма элементов любой строки (и/или столбца) равна единице, то матрица $\mathbf{AB}$ также является стохастической.

Задача 18 (*)
Вычислить $tr(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ – произвольная матрица.
Ответ:

$$tr(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 .$$

Задача 19 (*)
Вычислить $tr(\mathbf{A}^m)$, где $\mathbf{A}$ – треугольная матрица.
Ответ:

$$tr(\mathbf{A}^m) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^m .$$

Задача 20 (*)
Доказать или опровергнуть утверждение: если $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$, то $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.