Задача 1

Доказать простейшие следствия из аксиом линейного пространства:

1. Для каждого вектора x линейного пространства имеется единственный противоположный вектор x^{-1}.
2. Для каждого вектора x линейного пространства имеет место $x^{-1} = (-1)\,x$.

Задача 2

Является ли линейным пространством следующее множество:

1. Множество векторов, угол между которыми и заданной прямой равен α.
2. Множество векторов плоскости, длина которых не превышает 1.
3. Множество вектор-столбцов, состоящих из n чисел, сумма которых равна 0.
4. Множество вектор-столбцов, состоящих из n чисел, сумма которых равна 1.
5. Множество вектор-столбцов, состоящих из n целых чисел.
6. Множество вектор-столбцов, состоящих из n элементов, из которых каждый элемент с чётным номером равен 0.
7. Множество вектор-столбцов, состоящих из n элементов, из которых каждый элемент с нечётным номером равен 1.
8. Множество вектор-столбцов, состоящих из n элементов, из которых элементы с чётными номерами равны между собой.
9. Множество вектор-столбцов, состоящих из n элементов, для которых отношение между любыми двумя элементами постоянно.
10. Множество матриц размера $m \times n$, у которых элементы, расположенные на пересечении чётных строк и нечётных столбцов, равны 0.
11. Множество *кососимметричных матриц* (матриц, для которых $A^{\mathrm{T}} = -A$).
12. Множество верхних треугольных матриц.
13. Множество диагональных матриц.
14. Множество невырожденных матриц.
15. Множество непрерывных функций, для которых $f(1) = 0$.
16. Множество непрерывных функций, для которых $f(0) = 1$.
17. Множество чётных полиномов степени не выше n.
18. Множество нечётных полиномов степени не выше n.

Ответ:

1. Да, если угол α равен либо 0 либо $\pi/2$.
2. Нет.
3. Да.
4. Нет.
5. Нет.
6. Да.
7. Нет.
8. Да.
9. Да.
10. Да.
11. Да.
12. Да.
13. Да.
14. Нет.
15. Да.
16. Нет.
17. Да.
18. Да.

Задача 3 (*)

Образует ли совокупность векторов x_1, x_2,… базис и, если да, то найти координаты вектора z в этом базисе:

1. $x_1 = \{1,1,1\}$, $x_2 = \{0,1,0\}$, $x_3 = \{1,0,0\}$ и $z = \{1,2,3\}$.

2. $x_1 = \{1,0,0\}$, $x_2 = \{1,1,0\}$, $x_3 = \{1,1,1\}$ и $z = \{3,2,1\}$.

3. $x_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ и $z = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}$.

4. $x_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ и $z = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\1\end{bmatrix}$.

5. $x_1 = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$ и $z = \begin{bmatrix}2 & -2\\2 & -2\end{bmatrix}$.

6. $x_1 = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & -1\end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$ и $z = \begin{bmatrix}-1 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$.

7. $x_1 = 1 + t + t^2$, $x_2 = 1 + 2t + t^3$, $x_3 = t - 2t^2 + t^3$, $x_4 = 1 - t - t^2$ и $z = 6 + t + t^3$.

8. $x_1 = 1 - t^2 + t^3$, $x_2 = 1 + t^3$, $x_3 = 1 - t^2$, $x_4 = t^2 + t^3 - t$ и $z = t^3$.

Ответ:

1. Да, $z = \{3,-1,-2\}$.
2. Да, $z = \{1,1,1\}$.
3. Да, $z = \{1,-1,1,-1\}$.
4. Да, $z = \{2,1,-2,-1\}$.
5. Да, $z = \{-1,1,-1,1\}$.
6. Нет.
7. Да, $z = \{1,2,-1,3\}$.
8. Да, $z = \{1,0,-1,0\}$.