Матрица 1

Исходная матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Определитель с поправкой на лямбду должен быть равен 0:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

Определитель будет считаться по формуле:

$$(2-\lambda)(3-\lambda)-1*2=0$$
$$\lambda^2-5\lambda+4=0$$

$$\lambda_1=1$$
$$\lambda_2=4$$

Собственные значения равны 1 и 4

Собственный вектор для значения 1:

$$\begin{cases}(2-1)x+2y=0\\ x+(3-1)y=0\end{cases}$$

$$x=2y$$

Таким образом, пример вектора (2, 1)

Собственный вектор для значения 4:

$$\begin{cases}(2-4)x+2y=0\\ x+(3-4)y=0\end{cases}$$

$$x=y$$

Таким образом, пример вектора (3, 3)

Матрица 2

Исходная матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Определитель с поправкой на лямбду должен быть равен 0:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Определитель будет считаться по формуле:

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54 = 0$$

$$\lambda_1 = 3$$
$$\lambda_2 = 6$$

Собственные значения равны 3 и 6

Собственный вектор для значения 3:

$$\begin{cases} (4-3)x + y - z = 0 \\ x + (4-3)y - z = 0 \\ -x - y + (4-3)z = 0 \end{cases}$$

$$x = -y + z$$
$$y = y$$
$$z = z$$

Таким образом, пример вектора (2, -3,-1), пример неколлинеарного вектора (-4, 3, -1)

Можно представить собственный вектор для значения 3 в виде суммы векторов:

$$y * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Обозначенные выше вектора являются неколлинеарными. Следовательно мы можем получить еще несколько собственных векторов:

(5,-5,0), (5, 0, 5)

Собственный вектор для значения 6:

$$\begin{cases} (4-6)x + y - z = 0 \\ x + (4-6)y - z = 0 \\ -x - y + (4-6)z = 0 \end{cases}$$

$$x = -z$$
$$y = -z$$

$$z = z$$

Таким образом, пример вектора (-3,-3, 3)