

Фамилия:.....

Имя:.....

Группа:.....

## Задача №1

У вас имеются следующие данные (обучающая выборка):

Наблюдение	1	2	3	4	5
$T_i$ – покупка	1	1	0	1	0
$X_{1i}$ – скидка	1	1	0	0	1
$X_{2i}$ – друзья	1	0	1	0	2
$Y_i$ – удовлетворенность	200	182	146	270	100

С помощью градиентного бустинга вы прогнозируете покупку пользователем платной подписки на ваше приложение. В качестве признаков используется число друзей индивида, зарегистрированных в приложении, а также факт предложения индивиду скидки. В качестве базовой модели рассматривается метод ближайших соседей с 4 соседями и метрикой расстояния Манхэттен (без нормализации данных). Совершается 1 итерация алгоритма со скоростью обучения 0.6. Применяется логистическая функция потерь:

$$L(T, F) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n -T_i \ln(F_i) - (1 - T_i) \ln(1 - F_i)$$

Для прогнозирования остатков (домноженных на минус единицу градиентов) используется регрессионное дерево глубины 2, в котором разбиения осуществляются на основании средневзвешенной дисперсии.

**Примечание:** при взяти градиента функции потерь обратите внимание, что он скорректирован на объем выборки  $n$ .

1. Рассчитайте точность (ассигасу) базовой модели на обучающей выборке в случае, когда 1 прогнозируется для индивидов с оценкой условной вероятности покупки не меньше 0.5. **(5 баллов)**
2. С помощью описанного градиентного бустинга оцените условную вероятность того, что индивид без скидки и с одним другом приобретет платную подписку. **(10 баллов)**
3. Повторите предыдущий пункт, заменив в градиентном бустинге градиентный спуск на метод Ньютона (догадайтесь, как в таком случае может быть модифицирован метод) и снизив скорость обучения до 0.2. **(15 баллов)**
4. Используя взвешивание на обратные условные вероятности (inverse probability weighting), оцените средний эффект воздействия покупки приложения на удовлетворенность от его использования. В качестве метода оценивания условных вероятностей используйте обученный ранее градиентный бустинг (с градиентным спуском). **(10 баллов)**

# Решение

Соберем результаты основных расчетов всех пунктов в таблицу<sup>1</sup>:

Наблюдение	1	2	3	4	5
$T_i$ – покупка	1	1	0	1	0
$X_{1i}$ – скидка	1	1	0	0	1
$X_{2i}$ – друзья	1	0	1	0	2
$Y_i$ – Удовлетворенность	200	182	146	270	100
$F_0(x) = \hat{P}_{\text{KNN}}(Y_i = 1   X_{1i} = x_1, X_{2i} = x_2)$	0.5	0.75	0.75	0.75	0.5
$\hat{T}_{(0)}$ (прогноз базовой модели)	1	1	1	1	1
$L'_i$	-0.4	-4/15	0.8	-4/15	0.4
$r_{1i}$	0.4	4/15	-0.8	4/15	-0.4
$h_1(x_i)$	0	4/15	-0.8	4/15	0
$F_1(x) = \hat{P}_{\text{GB}}(T_i = 1   X_{1i} = x_1, X_{2i} = x_2)$	0.5	0.91	0.27	0.91	0.5
$L''_i$ (приблизительно)	0.8	0.36	3.2	0.36	0.8
$r_{1i}^* = -L'_i/L''_i$	0.5	0.75	-0.25	0.75	-0.5
$h_1^*(x_i)$	0	0.75	-0.25	0.75	0
$F_1^*(x) = \hat{P}_{\text{GB2}}(T_i = 1   X_{1i} = x_1, X_{2i} = x_2)$	0.5	0.9	0.7	0.9	0.5

1. Обучение базовой модели очевидно. Из результатов обучения, представленных в таблице, следует, что поскольку все оценки условных вероятностей оказались не меньше 0.5, то, с учетом рассматриваемого порога прогнозирования, все прогнозы равны 1. Следовательно, точность базовой модели на обучающей выборке равняется ACC = 0.6, поскольку из 5 наблюдений верно были спрогнозированы 3.
2. Сперва найдем производную функции потерь по значениям модели:

$$L'_i = \frac{\partial L}{\partial F_i} = \frac{1}{n} \left[ -\frac{T_i}{F_i} + \frac{1 - T_i}{1 - F_i} \right]$$

Остатки модели рассчитываются как обратные градиенты  $r_{1i} = -L'_i$ . Например, для первого наблюдения получаем:

$$r_{11} = \frac{1}{n} \left[ -\frac{T_1}{F_0(1, 1)} + \frac{1 - T_1}{1 - F_0(1, 1)} \right] = \frac{1}{5} \left[ -\frac{1}{0.5} + \frac{1 - 1}{1 - 0.5} \right] = 0.4$$

Далее обучим регрессионное дерево прогнозировать остатки  $r_{1i}$  с помощью признаков  $X_{1i}$  и  $X_{2i}$ . Найдем оптимальное **первое** разбиение. Обратим внимание, что при разбиении по  $X_{1i}$  получаем:

$$\begin{aligned} \bar{r}_0 &= \frac{-0.8 + \frac{4}{15}}{2} = -\frac{4}{15} & \bar{r}_1 &= \frac{0.4 + \frac{4}{15} - 0.4}{3} = \frac{4}{45} \\ \widehat{\text{Var}}(r_i, X_{1i}) &= \frac{1}{5} \left[ \left(0.4 - \frac{4}{45}\right)^2 + \left(\frac{4}{15} - \frac{4}{45}\right)^2 + \left(-0.4 - \frac{4}{45}\right)^2 + \left(-0.8 + \frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15} + \frac{4}{15}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{632}{3375} \approx 0.1873 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Расчеты можно найти по ссылке <https://colab.research.google.com/drive/1bQ7vBbEWrbiqd0ubsrZzvIEObDNrCeEK#scrollTo=rjD4vXVNaLZ>.

Разбиение по  $X_{2i}$  возможно путем объединения категорий 0, 1 или 1, 2. В первом случае, рассматривая переменную  $I(X_{2i} < 2)$ , получаем:

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= \frac{0.4 + \frac{4}{15} - 0.8 + \frac{4}{15}}{4} = \frac{1}{30} & \bar{r}_0 &= -0.4 \\ \widehat{\text{Var}}(r_i, I(X_{2i} < 2)) &= \\ &= \frac{1}{5} \left[ \left(0.4 - \frac{1}{30}\right)^2 + \left(\frac{4}{15} - \frac{1}{30}\right)^2 + (-0.4 + 0.4)^2 + \left(-0.8 - \frac{1}{30}\right)^2 + \left(\frac{4}{15} - \frac{1}{30}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{211}{1125} \approx 0.1876\end{aligned}$$

В случае с разбиением по переменной  $I(X_{2i} < 1)$  имеем:

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= \frac{\frac{4}{15} + \frac{4}{15}}{2} = \frac{4}{15} & \bar{r}_0 &= \frac{0.4 + -0.8 - 0.4}{3} = -\frac{4}{15} \\ \widehat{\text{Var}}(r_i, I(X_{2i} < 1)) &= \\ &= \frac{1}{5} \left[ \left(0.4 + \frac{4}{15}\right)^2 + \left(-0.8 + \frac{4}{15}\right)^2 + \left(-0.4 + \frac{4}{15}\right)^2 \right] = \frac{56}{375} \approx 0.1493\end{aligned}$$

Следовательно, первое разбиение осуществляется по переменной  $I(X_{2i} < 1)$ , поскольку оно минимизирует средневзвешенную дисперсию.

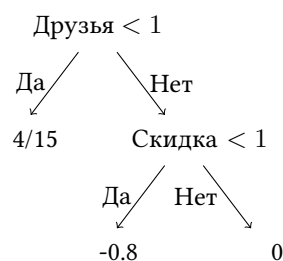
Перейдем к определению **второго** разбиения. Очевидно, что для наблюдений, у которых  $X_{2i} < 1$ , дальнейшее разбиение не имеет смысла, поскольку они все равняются одному и тому же значению  $\frac{4}{15}$ . При разбиении оставшихся наблюдений по  $X_1$  получаем:

$$\begin{aligned}\bar{r}_0 &= -0.8 & \bar{r}_1 &= \frac{0.4 - 0.4}{2} = 0 \\ \widehat{\text{Var}}(r_i, X_{1i}) &= \frac{1}{3} [(0.4 - 0)^2 + (-0.4 - 0)^2] = \frac{8}{75} \approx 0.1067\end{aligned}$$

При разбиении по  $I(X_{2i} = 1)$  имеем:

$$\begin{aligned}\bar{r}_0 &= -0.4 & \bar{r}_1 &= \frac{0.4 - 0.8}{2} = -0.2 \\ \widehat{\text{Var}}(r_i, I(X_{2i} = 1)) &= \frac{1}{3} [(0.4 + 0.2)^2 + (-0.8 + 0.2)^2] = \frac{6}{25} \approx 0.24\end{aligned}$$

Следовательно, второе разбиение необходимо делать по  $X_1$ . Таким образом, мы получили следующее регрессионное дерево, то есть модель  $h_1(x_i)$ :



Наконец, получим прогноз:

$$\hat{P}_{GB}(T_i = 1|X_{1i} = 0, X_{2i} = 1) = F_1(0, 1) = F_0(0, 1) + 0.6 \times h_1(0, 1) = 0.75 + 0.6 \times (-0.8) = 0.27$$

3. Нетрудно показать, что вторая производная функции потерь по значениям модели будет иметь вид:

$$L''(T_i, F_i) = \frac{1}{n} \left( \frac{T_i}{F_i^2} + \frac{1 - T_i}{(1 - F_i)^2} \right)$$

В результате решение аналогично предыдущему пункту, за тем лишь исключением, что вместо отрицательных градиентов прогнозируются:

$$r_{1i}^* = -\frac{L'(T_i, F_i)}{L''(T_i, F_i)}$$

В итоге пользуясь посчитанными в таблице значениями получаем:

$$\hat{P}_{GB2}(T_i = 1|X_{1i} = 0, X_{2i} = 1) = 0.7$$

4. Используя оцененные ранее условные вероятности получаем:

$$\widehat{ATE} = \frac{1}{5} \times \left( \frac{200}{0.5} + \frac{182}{0.91} - \frac{146}{1 - 0.27} + \frac{270}{0.9} - \frac{100}{1 - 0.5} \right) = 100$$

## Задача №2

Нейтральная к риску фирма прогнозирует уход клиентов (1 - ушел, 0 - остался). С каждого оставшегося клиента фирма получает 5 тысяч рублей, а с ушедшего – ничего. Если фирма считает (на основании прогнозов модели), что клиент хочет уйти, то она дает ему 2 тысячи рублей и в таком случае клиент гарантированно остается.

1. Запишите цены различных видов прогнозов для фирмы. (5 баллов)
2. Вы – сотрудник рассматриваемой фирмы. Ваш кот запрыгнул на клавиатуру и случайно (а может и нет) безвозвратно удалил исходные данные, включавшие 100 наблюдений. Однако, вы запомнили рассчитанные по этим данным метрики качества прогнозов модели:

$$\text{precision} = 0.25 \quad \text{recall} = 0.2 \quad \text{ACC} = 0.3 \quad \text{FPR} = 0.6$$

Рассчитайте прибыль от прогнозов модели на удаленных данных. (15 баллов)

**Подсказка:** сперва удобно составить матрицу ошибок (путаницы).

3. По удаленным котом данным (из предыдущего пункта) у вас была составлена таблица с расчетами выигрыша (gain) и подъема (lift). При этом вы разбивали выборку не на 10 (децили), а по аналогии на 5 равных частей. Однако, помахав лапами, кот удалил часть значений в этой таблице.

Часть	Выигрыш	Кумулятивный выигрыш	Подъем	Кумулятивный подъем
1				1.5
2		0.56		
3	0.16			
4			0.8	
5				

Восстановите значения, пропущенные в таблице. (10 баллов)

**Подсказка:** исходя из решения предыдущего пункта определите, сколько всего было ушедших клиентов в данных.

4. У вас была обучена нейросеть с 2 нейронами во входном слое (признаками), 1 скрытым слоем с 200 нейронами и функцией активации ReLU, а также выходным слоем с сигмоидной функцией активации. Кот благополучно стер веса вашей нейросети. Однако, вы помните, что все смещения (константы) равнялись нулю, а остальные веса равнялись одному и тому же положительному числу. Наконец, вам посчастливилось запомнить, что при подаче на вход нейросети наблюдения со значениями признаков  $x_1 = 0.02$  и  $x_2 = -0.015$  в выходном слое вы получали значение  $\frac{1}{1+e^{-9}}$ . Найдите утраченные веса нейросети. (10 баллов)

## Решение

1. Из содержательной постановки задачи следует, что  $P_{TP} = 3$ ,  $P_{TN} = 5$ ,  $P_{FP} = 3$ ,  $P_{FN} = 0$ .
2. Из условия нам известно, что:

$$\begin{aligned} 0.25 &= \frac{TP}{TP + FP} & 0.2 &= \frac{TP}{TP + FN} \\ 0.3 &= \frac{TP + TN}{100} & 0.6 &= \frac{FP}{TN + FP} \end{aligned}$$

Решая соответствующую систему получаем, что  $TP = 10$ ,  $TN = 20$ ,  $FP = 30$  и  $FN = 40$ , откуда:

$$\text{Profit} = 3 \times 10 + 5 \times 20 + 3 \times 30 + 0 \times 40 = 220$$

3. Общее число ушедших клиентов равняется  $TP + FN = 10 + 40 = 50$ . Через  $s_k$  обозначим количество ушедших клиентов, попавших в  $k$ -ю часть выборки.

Из первой строки мы знаем, что кумулятивный подъем равняется 1.5, а значит подъем также равняется 1.5. Кроме того, исходя из принципа расчета подъема мы получаем выигрыш, который очевидно, будет совпадать с кумулятивным выигрышем:

$$\text{lift}(1) = 1.5 = \frac{s_1}{50/5} \Rightarrow s_1 = 15 \Rightarrow \text{gain}(1) = \frac{15}{50} = 0.3$$

Из второй строки мы знаем, что кумулятивный выигрыш равняется  $\text{cumulative gain}(2) = 0.56$ , откуда:

$$\text{gain}(2) = \text{cumulative gain}(2) - \text{cumulative gain}(1) = 0.56 - 0.3 = 0.26$$

Из полученного результата следует, что:

$$\begin{aligned} \text{gain}(2) &= \frac{s_2}{50} \Rightarrow s_2 = 13 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{lift}(2) &= \frac{13}{50/5} = 1.3 \quad \text{cumulative lift}(2) = \frac{15 + 13}{2 \times (50/5)} = 1.4 \end{aligned}$$

По аналогии восстанавливая остальные строки получаем таблицу:

Часть	Выигрыш	Кумулятивный выигрыш	Подъем	Кумулятивный подъем
1	0.3	0.3	1.5	1.5
2	0.26	0.56	1.3	1.4
3	0.16	0.72	0.8	1.2
4	0.16	0.88	0.8	1.1
5	0.12	1	0.6	1

4. Из условия известно, что все веса нейросети равнялись одному и тому же положительному числу, которое мы обозначим как  $\omega > 0$ .

Рассчитаем значения нейронов скрытого слоя:

$$h_i = \max(0, \omega x_1 + \omega x_2) = \max(0, \omega \times 0.02 + \omega \times (-0.015)) = 0.005\omega, \text{ где } i \in \{1, \dots, 200\}$$

Используя информацию о значении выходного слоя получим веса:

$$\begin{aligned} o &= \frac{1}{1 + e^{-(\omega \times 0.005\omega + \dots + \omega \times 0.005\omega)}} = \frac{1}{1 + e^{-(\omega h_1 + \dots + \omega h_{200})}} = \frac{1}{1 + e^{-200 \times \omega \times 0.005\omega}} = \\ &= \frac{1}{1 + e^{-\omega^2}} = \frac{1}{1 + e^{-9}} \Rightarrow e^{-\omega^2} = e^{-9} \Rightarrow \omega = 3 \end{aligned}$$

## Задача №3

По выборке из независимых и одинаково распределенных наблюдений вы хотите оценить относительный средний эффект воздействия (ratio average treatment effect) и условный относительный средний эффект воздействия (термины были придуманы специально для этой задачи):

$$\text{RTE} = E\left(\frac{Y_{1i}}{Y_{0i}}\right) \quad \text{CRTE}_i = E\left(\frac{Y_{1i}}{Y_{0i}}|X_i\right)$$

Предположим, что при фиксированных контрольных переменных  $X_i$  потенциальные исходы  $Y_{1i}$ ,  $Y_{0i}$  и переменная воздействия  $T_i$  попарно независимы (все три случайные величины независимы между собой при условии контрольных переменных). Также допустим, что  $0 \notin \text{supp}(Y_{0i})$ .

**Подсказка:** если случайные величины  $A$  и  $B$  независимы, то независимы и случайные величины  $f(A)$  и  $g(B)$ , где  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  – функции, определенные на носителях  $A$  и  $B$  соответственно. Даже если  $A$  и  $B$  независимы, то в общем случае  $E\left(\frac{A}{B}\right) \neq \frac{E(A)}{E(B)}$ .

1. Напомним, что условный средний эффект воздействия можно записать как функцию от двух условных математических ожиданий, первое из которых зависит (не считая контрольных переменных) только от  $Y_{1i}$ , а второе – только от  $Y_{0i}$ :

$$\text{CATE}_i = E(Y_{1i} - Y_{0i}|X_i) = \underbrace{E(Y_{1i}|X_i)}_{\text{зависит только от } Y_{1i}} - \underbrace{E(Y_{0i}|X_i)}_{\text{зависит только от } Y_{0i}}$$

По аналогии, опираясь на предпосылки, описанные в условии задачи, запишите  $\text{CRTE}_i$  как функцию от двух условных математических ожиданий, одно из которых зависит только от  $Y_{1i}$ , а другое – только от  $Y_{0i}$ . **(2 баллов)**

2. Напомним, что при допущении об условной независимости  $E(Y_{0i}|X_i) = E(Y_i|X_i, T_i = 0)$ . Опираясь на предпосылки, описанные в условии задачи, получите аналогичные выражения для  $E(Y_{1i}|X_i)$  и  $E(1/Y_{0i}|X_i)$ , а также подробно распишите их вывод. **(3 баллов)**
3. Опираясь на предпосылки, описанные в условии задачи, а также на результаты предыдущих пунктов, предложите и опишите аналог T-learner для оценивания  $\text{CRTE}_i$ . Обоснуйте состоятельность оценки описанного вами метода. **(10 баллов)**
4. Опираясь на результаты предыдущего пункта и предпосылки, описанные в условии задачи, предложите и опишите аналог T-learner для оценивания RTE. Обоснуйте состоятельность оценки описанного вами метода. **(5 баллов)**

## Решение

1. Поскольку  $Y_{1i}$  и  $Y_{0i}$  независимы при фиксированных  $X_i$ , то независимыми при соответствующем условии являются также  $Y_{1i}$  и  $1/Y_{0i}$ , откуда:

$$E(Y_{1i}/Y_{0i}|X_i) = E(Y_{1i} \times (1/Y_{0i})|X_i) = E(Y_{1i}|X_i) \times E(1/Y_{0i}|X_i)$$

2. Поскольку при фиксированных  $X_i$  потенциальные исходы  $Y_{1i}$  и  $Y_{0i}$  не зависят от  $T_i$ , получаем:

$$\begin{aligned} E(Y_{1i}|X_i) &= E(Y_{1i}|X_i, T_i = 1) = E(T_i Y_{1i} + (1 - T_i) Y_{0i}|X_i, T_i = 1) = E(Y_i|X_i, T_i = 1) \\ E(1/Y_{0i}|X_i) &= E(1/Y_{0i}|X_i, T_i = 0) = E(1/(T_i Y_{1i} + (1 - T_i) Y_{0i})|X_i, T_i = 0) = E(1/Y_i|X_i, T_i = 0) \end{aligned}$$

3. Сперва методами машинного обучения необходимо оценить условные математические ожидания. Во-первых, оценить  $\hat{E}(Y_i|X_i, T_i = 1)$  по выборке из таких  $i$ , что  $T_i = 1$ . Во-вторых, оценить  $\hat{E}(1/Y_i|X_i, T_i = 0)$  по выборке из таких  $i$ , что  $T_i = 0$ , в качестве целевой переменной рассматривая  $1/Y_i$ . Далее с помощью моделей, обученных оценивать эти условные математические ожидания, для каждого наблюдения в выборке можно получить оценку:

$$\widehat{CRTE}_i = \hat{E}(Y_i|X_i, T_i = 1) \times \hat{E}(1/Y_i|X_i, T_i = 0)$$

Если оценки условных математических ожиданий состоятельны, то с учетом введенных предпосылок по теореме Слуцкого оценка  $\widehat{CRTE}_i$  также окажется состоятельной, поскольку:

$$\widehat{CRTE}_i \xrightarrow{p} E(Y_i|X_i, T_i = 1) \times E(1/Y_i|X_i, T_i = 0) = E(Y_{1i}|X_i) \times E(1/Y_{0i}|X_i) = E(Y_{1i}/Y_{0i}|X_i)$$

4. Состоятельную оценку  $\widehat{RTE}$  можно получить усреднив состоятельные оценки  $\widehat{CRTE}_i$ :

$$\widehat{RTE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \widehat{CRTE}_i \xrightarrow{p} E(E(Y_{1i}/Y_{0i}|X_i)) = E(Y_{1i}/Y_{0i}) = RTE$$

### Проверка в R:

```
# Число наблюдений
n <- 100000

# Вспомогательные переменные
u1 <- rpois(n, lambda = 1)
u2 <- rpois(n, lambda = 1)
u3 <- rpois(n, lambda = 1)
b1 <- rbinom(n, 1, 0.5)
b2 <- rbinom(n, 1, 0.5)

# Контрольные переменные
x1 <- pmin(b1 * u1 + (1 - b1) * u2, 3)
x2 <- pmin(b2 * u1 + (1 - b2) * u3, 3)

# Случайные ошибки
eps1 <- abs(rnorm(n))
eps0 <- abs(rnorm(n))

# Потенциальные исходы
y1 <- 1 + x1 + 0.5 * x2 + eps1
y0 <- 2 + 0.5 * x1 + 0.5 * x2 + eps0

# Переменная воздействия
t <- rbinom(n, 1, pt(x2 / max(x2) - 2 * x1 / max(x1), df = 5, ncp = 0.1))

# Целевая переменная
y <- y1 * t + y0 * (1 - t)

# Обартное значение
```



```
y_inv = 1 / y
```

```
# Значения
```

```
x1_vals <- unique(x1)
```

```
x2_vals <- unique(x2)
```

```
t_vals <- unique(t)
```

```
# Число значений
```

```
n_x1 <- length(x1_vals)
```

```
n_x2 <- length(x2_vals)
```

```
n_t <- length(t_vals)
```

```
# Оценки условных математических ожиданий
```

```
y_est <- rep(NA, n)
```

```
y_inv_est <- rep(NA, n)
```

```
for (i in 1:n_x1)
```

```
{
```

```
  for (j in 1:n_x2)
```

```
  {
```

```
    cond <- (x1 == x1_vals[i]) & (x2 == x2_vals[j])
```

```
    y_est[cond] <- mean(y[cond & (t == 1)])
```

```
    y_inv_est[cond] <- mean(y_inv[cond & (t == 0)])
```

```
  }
```

```
}
```

```
# Пункт 1
```

```
cond <- (x1 == 2) & (x2 == 3)
```

```
c('E(y1/y0|X)' = mean((y1 / y0)[cond]),
```

```
  'E(y1|X) * E(1/y0|X1, X2)' = mean(y1[cond]) * mean(1 / y0[cond]))
```

```
# Пункт 2
```

```
cond <- (x1 == 2) & (x2 == 3)
```

```
c('E(y1|X)' = mean(y1[cond]),
```

```
  'E(y|X, T = 1)' = mean(y[cond & (t == 1)]))
```

```
c('E(1/y0|X)' = mean((1 / y0)[cond]),
```

```
  'E(1/y|X, T = 0)' = mean(1 / y[cond & (t == 0)]))
```

```
# Пункт 3
```

```
cond <- (x1 == 2) & (x2 == 3)
```

```
CRTE <- mean((y1 / y0)[cond])
```

```
CRTE_est <- mean(y[cond & (t == 1)]) * mean((1 / y)[cond & (t == 0)])
```

```
c("CRTE" = CRTE, "CRTE_est" = CRTE_est)
```

```
# Пункт 4
```

```
c("RTE" = mean(y1 / y0), "RTE_est" = mean(y_est * y_inv_est))
```