Фамилия:..

Имя:..

Группа:..

Задача №1

Имеются следующие данные о заемщиках:

Дефолт	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Образование	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
Брак	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0

В **нейтральный к риску** банк пришел образованный **клиент**, состоящий в браке. Если банк не выдаст клиенту кредит, то ничего не получит, но и ничего не потеряет. Если банк выдаст клиенту кредит и клиент сможет выплатить этот кредит, то банк получит 100 рублей. Если банк выдаст клиенту кредит, но клиент не сможет вернуть этот кредит (произойдет дефолт), то банк потеряет 500 рублей.

1. С помощью **наивного** Байесовского классификатора оцените условную вероятность дефолта клиента **(5 баллов)**

2. Банк выдает кредит тогда и только тогда, когда наивный Байесовский классификатор прогнозирует отсутствие дефолта. Укажите цены различных видов прогнозов: TP – истинный положительный, FP – ложный положительный, TN – истинный отрицательный, FN – ложный отрицательный. **(5 баллов)**

3. Ориентируясь на информацию о ценах прогнозов, а также на оцененную условную вероятность дефолта, сделайте вывод о целесообразности выдачи кредита клиенту. **(5 баллов)**

4. Дефолт прогнозируется в случае, когда оценка его условной вероятности превышает 0.5. Вы использовали некоторый классификатор, который дал вам следующие оценки условных вероятностей:

$$\hat{P}(\text{Дефолт} = 1|\text{Образование} = 1, \text{Брак} = 1) = 0.2$$
$$\hat{P}(\text{Дефолт} = 1|\text{Образование} = 1, \text{Брак} = 0) = 0.4$$
$$\hat{P}(\text{Дефолт} = 1|\text{Образование} = 0, \text{Брак} = 1) = 0.6$$
$$\hat{P}(\text{Дефолт} = 1|\text{Образование} = 0, \text{Брак} = 0) = 0.8$$

   Запишите (в форме таблицы) прогнозы дефолта для каждого заемщика в данных и укажите, к какому виду относятся эти прогнозы (TP, TN, FP или FN). Составьте матрицу путаницы (confusion matrix) и рассчитайте F1-метрику (F1-score) данного классификатора на данных. **(5 баллов)**

5. Изобразите наивный Байесовский классификатор как частный случай Байесовской сети: используйте ориентированный ациклический граф (DAG), чтобы описать связи между дефолтом, образованием и браком. **(10 баллов)**

6. Вы собираетесь обучить Байесовскую сеть и предполагаете, что образование является причиной брака, а брак – причиной дефолта. С помощью ориентированного ацикличного графа (DAG) изобразите структуру данной Байесовской сети и, учитывая накладываемые ею ограничения на совместное распределение целевой переменной и признаков, оцените условную вероятность дефолта клиента. Объясните, какие факторы достаточно знать для расчета этой условной вероятности и сделайте вывод о целессообразности учета всех признаков при оценивании условных вероятностей дефолта. **(10 баллов)**

Решение:

1. Оценим априорные вероятности и факторы:

$$\hat{P}\left(\text{Дефолт} = 1\right) = 0.5 \qquad \hat{P}\left(\text{Дефолт} = 0\right) = 0.5$$
$$\hat{P}\left(\text{Образование} = 1|\text{Дефолт} = 1\right) = 0.4 \qquad \hat{P}\left(\text{Образование} = 1|\text{Дефолт} = 0\right) = 1$$
$$\hat{P}\left(\text{Брак} = 1|\text{Дефолт} = 1\right) = 0.2 \qquad \hat{P}\left(\text{Брак} = 1|\text{Дефолт} = 0\right) = 0.6$$

При допущении об условной независимости, то есть о независимости между образованием и браком при фиксированном дефолте, получаем:

$$\begin{gathered}\hat{P}\left(\text{Дефолт} = 1, \text{Образование} = 1, \text{Брак} = 1\right) = \\ = \hat{P}(\text{Дефолт} = 1)\hat{P}\left(\text{Образование} = 1, \text{Брак} = 1|\text{Дефолт} = 1\right) \\ = \hat{P}\left(\text{Дефолт} = 1\right)\hat{P}\left(\text{Образование} = 1|\text{Дефолт} = 1\right)\hat{P}\left(\text{Брак} = 1|\text{Дефолт} = 1\right) = \\ = 0.5 \times 0.4 \times 0.2 = 0.04\end{gathered}$$

По аналогии имеем:

$$\begin{gathered}\hat{P}\left(\text{Дефолт} = 0, \text{Образование} = 1, \text{Брак} = 1\right) = \\ = \hat{P}(\text{Дефолт} = 0)\hat{P}\left(\text{Образование} = 1, \text{Брак} = 1|\text{Дефолт} = 0\right) \\ \hat{P}\left(\text{Дефолт} = 0\right)\hat{P}\left(\text{Образование} = 1|\text{Дефолт} = 0\right)\hat{P}\left(\text{Брак} = 1|\text{Дефолт} = 0\right) = \\ = 0.5 \times 1 \times 0.6 = 0.3\end{gathered}$$

При допущении об условной независимости оценим условную вероятность дефолта:

$$\hat{P}\left(\text{Дефолт} = 1|\text{Образование} = 1, \text{Брак} = 1\right) = \frac{0.04}{0.04 + 0.3} = \frac{2}{17} \approx 0.118$$

2. Запишем различные виды прогнозов и соответствующие им цены:

   а) TP - спрогнозировали дефолт и он бы наступил, $P_{TP} = 0$.
   б) TN - спрогнозировали отсутствие дефолта и он бы не наступил, $P_{TN} = 100$.
   в) FP - спрогнозировали дефолт, но он бы не наступил, $P_{FP} = 0$.
   г) FN - спрогнозировали отсутствие дефолта, но он бы наступил, $P_{FN} = -500$.

3. Ожидаемый выигрыш банка в случае с рассматриваемым клиентом составит:

$$\text{profit} = 100 \times \left(1 - \frac{2}{17}\right) - 500 \times \frac{2}{17} \approx 29.41$$

Поскольку ожидаемая полезность банка от выдачи кредита превышает ожидаемую полезность от отсутствия выдачи, то целессообразно выдать кредит.

4. Запишем таблицу с прогнозами и их видами:

Дефолт	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Образование	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
Брак	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
$\widehat{\text{Дефолт}}$	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Вид	FN	TP	TP	TP	FN	TN	TN	TN	TN	TN

Составим матрицу путаницы:

	$\widehat{\text{Дефолт}} = 1$	$\widehat{\text{Дефолт}} = 0$
$\text{Дефолт} = 1$	TP = 3	FN = 2
$\text{Дефолт} = 0$	FP = 0	TN = 5

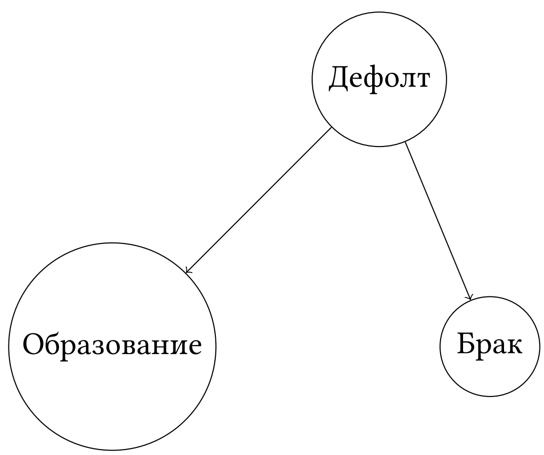
Посчитаем точность и полноту:

$$\text{precision} = \frac{3}{3+0} = 1 \qquad \text{recall} = \frac{3}{3+2} = 0.6$$

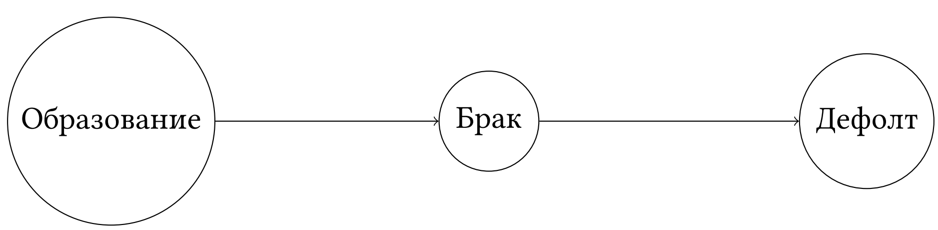
В результате получаем значение метрики:

$$\text{F1} = 2 \times \frac{1 \times 0.6}{1 + 0.6} = \frac{6}{8} = 0.75$$

5. В наивном Байесовском классификаторе в качестве факторов рассматриваются $P(\text{Образование}|\text{Дефолт})$ и $P(\text{Брак}|\text{Дефолт})$. Следовательно, дефолт является родителем образования и брака, а значит наивный Байесовский классификатор можно изобразить следующим образом:



6. Иллюстрируем структуру Байесовской сети:



Сперва оценим совместные вероятности:

$$\hat{P}\left(\text{Дефолт}=1,\text{Образование}=1,\text{Брак}=1\right)=$$
$$\hat{P}\left(\text{Образование}=1\right)\hat{P}\left(\text{Брак}=1|\text{Образование}=1\right)\hat{P}\left(\text{Дефолт}=1|\text{Брак}=1\right)=$$
$$=\underbrace{\frac{7}{10}\times\frac{3}{7}}_{\text{сокращается}}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{40}$$
$$\hat{P}\left(\text{Дефолт}=0,\text{Образование}=1,\text{Брак}=1\right)=$$
$$\hat{P}\left(\text{Образование}=1\right)\hat{P}\left(\text{Брак}=1|\text{Образование}=1\right)\hat{P}\left(\text{Дефолт}=0|\text{Брак}=1\right)=$$
$$=\underbrace{\frac{7}{10}\times\frac{3}{7}}_{\text{сокращается}}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{40}$$

Очевидно, что для расчета условной вероятности достаточно знать лишь оценку фактора $P\left(\text{Дефолт}=0|\text{Брак}=1\right)$, поскольку остальные факторы сокращаются:

$$\hat{P}\left(\text{Дефолт}=1|\text{Образование}=1,\text{Брак}=1\right)=\frac{\frac{3}{40}}{\frac{3}{40}+\frac{9}{40}}=0.25$$

Таким образом, для оценивания условной на брак и образование вероятности дефолта при соответствующей структуру Байесовской сети достаточно учитывать лишь брак.

Фамилия:...

Имя:...

Группа:...

Задача №2

Исследователь оценивает эффект воздействия факта наличия высшего образования T_i на зарплату Y_i, в качестве контрольных переменных X_i рассматривая стаж и здоровье, а в качестве инструментальной переменной Z_i – образование родителей. Средний эффект воздействия оценивается следующим образом:

$$\widehat{\text{ATE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i Y_i}{\hat{P}\left(T_i = 1 | X_i\right)} - \hat{E}\left(Y_i | X_i, T_i = 0\right)$$

1. Объясните, как можно использовать машинное обучение для расчета соответствующей оценки. Уточните, для чего в данном случае лучше использовать методы классификации, а для чего - регрессию. **(10 баллов)**

2. Сформулируйте допущение об условной независимости и выскажите содержательные (социально-экономические) соображения о возможных причинах нарушения данного допущения в рассматриваемом случае. Уточните, как нарушение этого допущения скажется на свойствах оценки $\widehat{\text{ATE}}$. **(10 баллов)**

3. Объясните, можно ли избежать негативных последствий нарушения допущения об условной независимости за счет тюнинга (подбора оптимальных гиперпараметров) методов машинного обучения. **(10 баллов)**

4. Назовите метод, не требующий сильных предпосылок о форме связи между контрольными переменными и целевой переменной, который можно применить для получения состоятельной оценки среднего локального эффекта воздействия при нарушении допущения об условной независимости. Укажите с помощью чего и какие именно два основных вида смещения позволяет ослабить соответствующий метод. **(15 баллов)**

5. При допущении об условной независимости исследователь также оценил несколькими методами условные эффекты воздействия CATE_i и хочет выбрать лучший из методов, ориентируясь на следующую метрику качества оценок CATE_i:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{E}\left(Y_i | X_i, T_i\right)\right)^2$$

   Объясните, можно ли считать данную метрику приемлимой. **(15 баллов)**

Решение:

1. Условную вероятность $P(T_i = 1|X_i)$ и условное математическое ожидание $E(Y_i = 1|X_i)$ можно оценить с помощью методов машинного обучения. При этом, для оценивания условных вероятностей уместно использовать классификацию (например, рашющие деревья или логистическую регрессию), а для условного математического ожидания – регрессию (например, регрессионные деревья).

2. Согласно допущению об условной независимости $E\left(Y_{ji}|X_i, T_i = j\right) = E(Y_{ji}|X_i)$, где $j \in \{0, 1\}$ и Y_{ji} отражает значение j-го потенциального исхода: Y_{1i} – зарплата людей при наличии высшего образования, Y_{0i} – зарплата людей при отсутствии высшего образования.

   Способности индивида, которые он развил еще до поступления в университет, могут положительно влиять как на вероятность получения высшего образования, так и на заработную плату. Поскольку способности не входят в число контрольных переменных и могут существенно различаться между индивидами даже при одинаковом здоровье и стаже, это может приводить к нарушению допущения о независимости, так как, вероятно, $E(Y_{ji}|X_i, T_i = 1) > E(Y_{ji}|X_i)$, поскольку среди людей с высшим образованием могут чаще встречаться развитые способности. В результате оценка $\widehat{\text{ATE}}$ окажется несостоятельной.

3. При нарушении допущения об условной независимости даже если вместо оценок $\hat{P}\left(T_i = 1|X_i\right)$ и $\hat{E}\left(Y_i|X_i, T_i\right)$ исользуются истинные значения $P\left(T_i = 1|X_i\right)$ и $E\left(Y_i|X_i, T_i\right)$, мы получаем:

   $$\widehat{\text{ATE}} \xrightarrow{p} E\left(Y_{1i}|T_i = 1\right) - E\left(Y_{0i}|T_i = 0\right) \neq \text{ATE}$$

   Поскольку качество используемых методов машинного обучения может повлиять лишь на точность оценок $\hat{P}\left(T_i = 1|X_i\right)$ и $\hat{E}\left(Y_i|X_i, T_i\right)$, то оценка $\widehat{\text{ATE}}$ останется несостоятельной независимо от того, насколько хорошо будут подобраны гиперпараметры методов, используемых для оценивания условных вероятностей и условного математического ожидания.

4. В качестве альтернативы исследователь может использовать двойное машинное обучение с инструментальными переменными. В данном методе ортогональность по Нейману и кросс-фиттинг позволяют ослабить смещения, вызванные регуляризацией и переобучением соответственно.

5. Данная метрика не является хорошим вариантом, поскольку модель, точнее оценивающая Y_i, не обязательно будет точнее оценивать CATE_i. Например, даже если оценки $\hat{E}\left(Y_i|X_i, T_i = 1\right)$ и $\hat{E}\left(Y_i|X_i, T_i = 0\right)$ обладают очень большим, но примерно одинаковым смещением, то их разница, то есть $\widehat{\text{CATE}}_i$, может оказаться весьма точной оценкой, поскольку смещения сократятся. В качестве альтернативы MSE можно использовать, например, метрику, опирающуюся на псевдоисходы:

   $$\text{MSE}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i^* - \widehat{\text{CATE}}_i\right)^2$$

   где:

   $$\hat{Y}_i^* = Y_i\left(\frac{T_i}{\hat{P}(T_i = 1|X_i)} + \frac{1 - T_i}{1 - \hat{P}(T_i = 1|X_i)}\right)$$