**Фамилия:**...............................................................................................................................

**Имя:**.......................................................................................................................................

**Группа:**..................................................................................................................................

## Задача №1

Имеются следующие данные о заемщиках:

| Дефолт | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Образование | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Брак | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

В **нейтральный к риску** банк пришел образованный **клиент**, состоящий в браке. Если банк не выдаст клиенту кредит, то ничего не получит, но и ничего не потеряет. Если банк выдаст клиенту кредит и клиент сможет выплатить этот кредит, то банк получит $100$ рублей. Если банк выдаст клиенту кредит, но клиент не сможет вернуть этот кредит (произойдет дефолт), то банк потеряет $500$ рублей.

1. С помощью **наивного** Байесовского классификатора оцените условную вероятность дефолта клиента **(5 баллов)**

2. Банк выдает кредит тогда и только тогда, когда наивный Байесовский классификатор прогнозирует отсутствие дефолта. Укажите цены различных видов прогнозов: TP – истинный положительный, FP – ложный положительный, TN – истинный отрицательный, FN – ложный отрицательный. **(5 баллов)**

3. Ориентируясь на информацию о ценах прогнозов, а также на оцененную условную вероятность дефолта, сделайте вывод о целесообразности выдачи кредита клиенту. **(5 баллов)**

4. Дефолт прогнозируется в случае, когда оценка его условной вероятности превышает $0.5$. Вы использовали некоторый классификатор, который дал вам следующие оценки условных вероятностей:

$$\hat{P}(\text{Дефолт} = 1|\text{Образование} = 1, \text{Брак} = 1) = 0.2$$
$$\hat{P}(\text{Дефолт} = 1|\text{Образование} = 1, \text{Брак} = 0) = 0.4$$
$$\hat{P}(\text{Дефолт} = 1|\text{Образование} = 0, \text{Брак} = 1) = 0.6$$
$$\hat{P}(\text{Дефолт} = 1|\text{Образование} = 0, \text{Брак} = 0) = 0.8$$

   Запишите (в форме таблицы) прогнозы дефолта для каждого заемщика в данных и укажите, к какому виду относятся эти прогнозы (TP, TN, FP или FN). Составьте матрицу путаницы (confusion matrix) и рассчитайте F1-метрику (F1-score) данного классификатора на данных. **(5 баллов)**

5. Изобразите наивный Байесовский классификатор как частный случай Байесовской сети: используйте ориентированный ациклический граф (DAG), чтобы описать связи между дефолтом, образованием и браком. **(10 баллов)**

6. Вы собираетесь обучить Байесовскую сеть и предполагаете, что образование является причиной брака, а брак – причиной дефолта. С помощью ориентированного ациклического графа (DAG) изобразите структуру данной Байесовской сети и, учитывая накладываемые ею ограничения на совместное распределение целевой переменной и признаков, оцените условную вероятность дефолта клиента. Объясните, какие факторы достаточно знать для расчета этой условной вероятности и сделайте вывод о целессообразности учета всех признаков при оценивании условных вероятностей дефолта. **(10 баллов)**

**Решение**:

1. Оценим априорные вероятности и факторы:

$$\hat{P}\left(\text{Дефолт}=1\right)=0.5 \qquad \hat{P}\left(\text{Дефолт}=0\right)=0.5$$
$$\hat{P}\left(\text{Образование}=1|\text{Дефолт}=1\right)=0.4 \qquad \hat{P}\left(\text{Образование}=1|\text{Дефолт}=0\right)=1$$
$$\hat{P}\left(\text{Брак}=1|\text{Дефолт}=1\right)=0.2 \qquad \hat{P}\left(\text{Брак}=1|\text{Дефолт}=0\right)=0.6$$

   При допущении об условной независимости, то есть о независимости между образованием и браком при фиксированном дефолте, получаем:

$$\begin{gathered}\hat{P}\left(\text{Дефолт}=1,\text{Образование}=1,\text{Брак}=1\right)=\\ =\hat{P}(\text{Дефолт}=1)\hat{P}\left(\text{Образование}=1,\text{Брак}=1|\text{Дефолт}=1\right)\\ =\hat{P}\left(\text{Дефолт}=1\right)\hat{P}\left(\text{Образование}=1|\text{Дефолт}=1\right)\hat{P}\left(\text{Брак}=1|\text{Дефолт}=1\right)=\\ =0.5\times 0.4\times 0.2=0.04\end{gathered}$$

   По аналогии имеем:

$$\begin{gathered}\hat{P}\left(\text{Дефолт}=0,\text{Образование}=1,\text{Брак}=1\right)=\\ =\hat{P}(\text{Дефолт}=0)\hat{P}\left(\text{Образование}=1,\text{Брак}=1|\text{Дефолт}=0\right)\\ \hat{P}\left(\text{Дефолт}=0\right)\hat{P}\left(\text{Образование}=1|\text{Дефолт}=0\right)\hat{P}\left(\text{Брак}=1|\text{Дефолт}=0\right)=\\ =0.5\times 1\times 0.6=0.3\end{gathered}$$

   При допущении об условной независимости оценим условную вероятность дефолта:

$$\hat{P}\left(\text{Дефолт}=1|\text{Образование}=1,\text{Брак}=1\right)=\frac{0.04}{0.04+0.3}=\frac{2}{17}\approx 0.118$$

2. Запишем различные виды прогнозов и соответствующие им цены:

   а) TP - спрогнозировали дефолт и он бы наступил, $P_{TP}=0$.

   б) TN - спрогнозировали отсутствие дефолта и он бы не наступил, $P_{TN}=100$.

   в) FP - спрогнозировали дефолт, но он бы не наступил, $P_{FP}=0$.

   г) FN - спрогнозировали отсутствие дефолта, но он бы наступил, $P_{FN}=-500$.

3. Ожидаемый выигрыш банка в случае с рассматриваемым клиентом составит:

$$\text{profit}=100\times\left(1-\frac{2}{17}\right)-500\times\frac{2}{17}\approx 29.41$$

   Поскольку ожидаемая полезность банка от выдачи кредита превышает ожидаемую полезность от отсутствия выдачи, то целессообразно выдать кредит.

4. Запишем таблицу с прогнозами и их видами:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Дефолт | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Образование | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Брак | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\widehat{\text{Дефолт}}$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Вид | FN | TP | TP | TP | FN | TN | TN | TN | TN | TN |

Составим матрицу путаницы:

| | $\widehat{\text{Дефолт}} = 1$ | $\widehat{\text{Дефолт}} = 0$ |
|---|---|---|
| $\text{Дефолт} = 1$ | TP = 3 | FN = 2 |
| $\text{Дефолт} = 0$ | FP = 0 | TN = 5 |

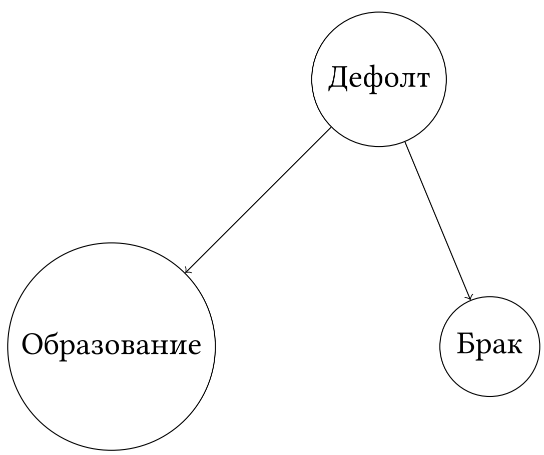
Посчитаем точность и полноту:

$$\text{precision} = \frac{3}{3+0} = 1 \qquad \text{recall} = \frac{3}{3+2} = 0.6$$

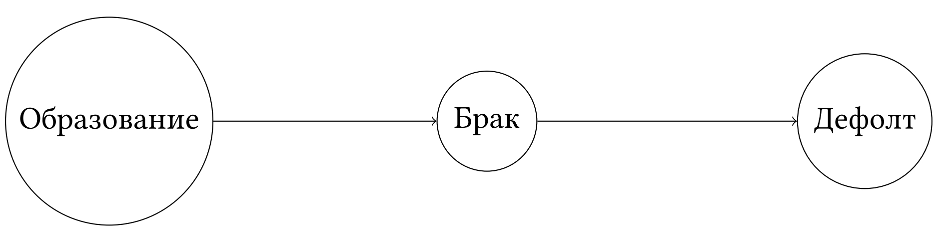
В результате получаем значение метрики:

$$\text{F1} = 2 \times \frac{1 \times 0.6}{1 + 0.6} = \frac{6}{8} = 0.75$$

5. В наивном Байесовском классификаторе в качестве факторов рассматриваются $P(\text{Образование}|\text{Дефолт})$ и $P(\text{Брак}|\text{Дефолт})$. Следовательно, дефолт является родителем образования и брака, а значит наивный Байесовский классификатор можно изобразить следующим образом:




6. Иллюстрируем структуру Байесовской сети:




Сперва оценим совместные вероятности:

$$\hat{P}\left(\text{Дефолт} = 1, \text{Образование} = 1, \text{Брак} = 1\right) =$$
$$\hat{P}\left(\text{Образование} = 1\right)\hat{P}\left(\text{Брак} = 1|\text{Образование} = 1\right)\hat{P}\left(\text{Дефолт} = 1|\text{Брак} = 1\right) =$$
$$= \underbrace{\frac{7}{10} \times \frac{3}{7}}_{\text{сокращается}} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{40} = 0.075$$
$$\hat{P}\left(\text{Дефолт} = 0, \text{Образование} = 1, \text{Брак} = 1\right) =$$
$$\hat{P}\left(\text{Образование} = 1\right)\hat{P}\left(\text{Брак} = 1|\text{Образование} = 1\right)\hat{P}\left(\text{Дефолт} = 0|\text{Брак} = 1\right) =$$
$$= \underbrace{\frac{7}{10} \times \frac{3}{7}}_{\text{сокращается}} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{40} = 0.225$$

Очевидно, что для расчета условной вероятности достаточно знать лишь оценку фактора $P\left(\text{Дефолт} = 0|\text{Брак} = 1\right)$, поскольку остальные факторы сокращаются:

$$\hat{P}\left(\text{Дефолт} = 1|\text{Образование} = 1, \text{Брак} = 1\right) = \frac{\frac{3}{40}}{\frac{3}{40} + \frac{9}{40}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 0.25$$

Таким образом, для оценивания условной на брак и образование вероятности дефолта при соответствующей структуру Байесовской сети достаточно учитывать лишь брак.

**Фамилия:**.............................................................................................................................

**Имя:**.....................................................................................................................................

**Группа:**................................................................................................................................

## Задача №2

Исследователь оценивает эффект воздействия факта наличия высшего образования $T_i$ на зарплату $Y_i$, в качестве контрольных переменных $X_i$ рассматривая стаж и здоровье, а в качестве инструментальной переменной $Z_i$ – образование родителей. Средний эффект воздействия оценивается следующим образом:

$$\widehat{\text{ATE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{T_iY_i}{\hat{P}\left(T_i=1|X_i\right)} - \hat{E}\left(Y_i|X_i,T_i=0\right)$$

1. Объясните, как можно использовать машинное обучение для расчета соответствующей оценки. Уточните, для чего в данном случае лучше использовать методы классификации, а для чего - регрессию. **(10 баллов)**

2. Сформулируйте допущение об условной независимости и выскажите содержательные (социально-экономические) соображения о возможных причинах нарушения данного допущения в рассматриваемом случае. Уточните, как нарушение этого допущения скажется на свойствах оценки $\widehat{\text{ATE}}$. **(10 баллов)**

3. Объясните, можно ли избежать негативных последствий нарушения допущения об условной независимости за счет тюнинга (подбора оптимальных гиперпараметров) методов машинного обучения. **(10 баллов)**

4. Назовите метод, не требующий сильных предпосылок о форме связи между контрольными переменными и целевой переменной, который можно применить для получения состоятельной оценки среднего локального эффекта воздействия при нарушении допущения об условной независимости. Укажите с помощью чего и какие именно два основных вида смещения позволяет ослабить соответствующий метод. **(15 баллов)**

5. При допущении об условной независимости исследователь также оценил несколькими методами условные эффекты воздействия $\text{CATE}_i$ и хочет выбрать лучший из методов, ориентируясь на следующую метрику качества оценок $\text{CATE}_i$:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{E}\left(Y_i|X_i,T_i\right)\right)^2$$

   Объясните, можно ли считать данную метрику приемлимой. **(15 баллов)**

**Решение**:

1. Условную вероятность $P(T_i = 1|X_i)$ и условное математическое ожидание $E(Y_i = 1|X_i)$ можно оценить с помощью методов машинного обучения. При этом, для оценивания условных вероятностей уместно использовать классификацию (например, рашющие деревья или логистическую регрессию), а для условного математического ожидания – регрессию (например, регрессионные деревья).

2. Согласно допущению об условной независимости $E\left(Y_{ji}|X_i, T_i = j\right) = E(Y_{ji}|X_i)$, где $j \in \{0, 1\}$ и $Y_{ji}$ отражает значение $j$-го потенциального исхода: $Y_{1i}$ – зарплата людей при наличии высшего образования, $Y_{0i}$ – зарплата людей при отсутствии высшего образования.

   Способности индивида, которые он развил еще до поступления в университет, могут положительно влиять как на вероятность получения высшего образования, так и на заработную плату. Поскольку способности не входят в число контрольных переменных и могут существенно различаться между индивидами даже при одинаковом здоровье и стаже, это может приводить к нарушению допущения о независимости, так как, вероятно, $E(Y_{ji}|X_i, T_i = 1) > E(Y_{ji}|X_i)$, поскольку среди людей с высшим образованием могут чаще встречаться развитые способности. В результате оценка $\widehat{\text{ATE}}$ окажется несостоятельной.

3. При нарушении допущения об условной независимости даже если вместо оценок $\hat{P}\left(T_i = 1|X_i\right)$ и $\hat{E}\left(Y_i|X_i, T_i\right)$ исользуются истинные значения $P\left(T_i = 1|X_i\right)$ и $E\left(Y_i|X_i, T_i\right)$, мы получаем:

   $$\widehat{\text{ATE}} \xrightarrow{p} E\left(Y_{1i}|T_i = 1\right) - E\left(Y_{0i}|T_i = 0\right) \neq \text{ATE}$$

   Поскольку качество используемых методов машинного обучения может повлиять лишь на точность оценок $\hat{P}\left(T_i = 1|X_i\right)$ и $\hat{E}\left(Y_i|X_i, T_i\right)$, то оценка $\widehat{\text{ATE}}$ останется несостоятельной независимо от того, насколько хорошо будут подобраны гиперпараметры методов, используемых для оценивания условных вероятностей и условного математического ожидания.

4. В качестве альтернативы исследователь может использовать двойное машинное обучение с инструментальными переменными. В данном методе ортогональность по Нейману и кросс-фиттинг позволяют ослабить смещения, вызванные регуляризацией и переобучением соответственно.

5. Данная метрика не является хорошим вариантом, поскольку модель, точнее оценивающая $Y_i$, не обязательно будет точнее оценивать $\text{CATE}_i$. Например, даже если оценки $\hat{E}\left(Y_i|X_i, T_i = 1\right)$ и $\hat{E}\left(Y_i|X_i, T_i = 0\right)$ обладают очень большим, но примерно одинаковым смещением, то их разница, то есть $\widehat{\text{CATE}}_i$, может оказаться весьма точной оценкой, поскольку смещения сократятся. В качестве альтернативы MSE можно использовать, например, метрику, опирающуюся на псевдоисходы:

   $$\text{MSE}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i^* - \widehat{\text{CATE}}_i\right)^2$$

   где:

   $$\hat{Y}_i^* = Y_i\left(\frac{T_i}{\hat{P}(T_i = 1|X_i)} + \frac{1 - T_i}{1 - \hat{P}(T_i = 1|X_i)}\right)$$