

Машинное обучение в экономике

Машинное обучение в эконометрике

Потанин Богдан Станиславович

доцент, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2023–2024

- Методы оценивания параметров:
 - Ридж и Лассо регрессии.
 - Пост-Лассо.
 - Двойное машинное обучение.
- Базовые понятия:
 - Регуляризация.
 - Метод моментов.
 - Структурный параметр.
 - Функция шума.
 - Ортогональность по Нейману.
 - Кросс-фиттинг.
 - Эндогенность и неслучайный отбор.

- Машинное обучение, как правило, применяется для прогнозирования различных характеристик распределения, таких как условные математические ожидания и вероятности.
- Обычно методы машинного обучения дают оценки, обладающие малым смещением и большой дисперсией, поскольку не накладывают структурных предположений (например, о линейности) на форму связи между переменными модели.
- В задаче прогнозирования эконометрические методы обычно демонстрируют преимущество на выборках малого и среднего объема, поскольку обладают структурой, позволяющей компенсировать недостаток данных реалистичными предположениями, снижающими дисперсию оценок.
- Однако, основной упор в эконометрическом анализе делается на оценивание параметров моделей, имеющих содержательную экономическую интерпретацию.
- Иногда исследователя интересуют не все, а лишь часть параметров модели, характеризующих связь между основными переменными. В таком случае можно объединить сильные стороны эконометрики (интерпретируемость) и машинного обучения (высокая точность прогнозирования).
- **Основная идея** – часть модели, не представляющая содержательный интерес для исследователя, оценивается методами машинного обучения, а для оценивания структурных параметров применяются эконометрические методы анализа.

Регуляризация

Основная идея

- **Проблема** – машинное обучение позволяет избегать допущения о линейной связи Y_i с X_i , тем самым снижая смещение оценок, но часто серьезно повышает дисперсию на малых выборках.
- **Идея** – для того, чтобы снизить дисперсию оценок и избежать переобучения, пусть и ценой повышения смещения, можно воспользоваться **регуляризацией**.
- Одним из наиболее популярных подходов к регуляризации заключается в наложении штрафов на параметры модели:

$$\underbrace{L(Y, F(X; \theta))}_{\text{функция потерь}} + \underbrace{\text{penalty}(\theta)}_{\text{штраф}} \quad \text{минимизируемый функционал}$$

- Функция $\text{penalty}(\theta)$ накладывает **штраф** (penalty) за определенные, как правило **большие по модулю** значения элементов n_θ -мерного вектора параметров θ модели $F(X; \theta)$.
- **Интуиция** – ограничение $\theta_i = 0$ обычно соответствует исключению параметра θ_i из модели, что приводит к ее упрощению. Регуляризация предлагает в качестве альтернативы накладывать штрафы, приводящие, образно говоря, к естественному отбору среди параметров, когда значительно отличными от 0 оказываются лишь те из них, что оказывают существенное влияние на качество модели.
- В роли параметров θ , например, могут выступать коэффициенты β в обычной линейной или логистической регрессии.

Регуляризация

Регуляризации с помощью Lp-норм

- В большинстве случаев функция штрафа задается с помощью Lp-нормы:

$$\text{penalty}(\theta) = \|\theta\|_p^p = \sum_{i=1}^{n_\theta} \lambda_i |\theta_i|^p, \text{ где } \lambda_i > 0 \text{ и } p \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

- Случаи $p = 1$ и $p = 2$ являются наиболее популярными:

$$\text{penalty}(\theta) = \sum_{i=1}^{n_\theta} \lambda_i |\theta_i| \quad \text{Лассо регуляризация}$$

$$\text{penalty}(\theta) = \sum_{i=1}^{n_\theta} \lambda_i \theta_i^2 \quad \text{Ридж регуляризация}$$

- Чем больше значения констант λ_i , тем сильнее накладываемый штраф за большие по абсолютной величине значения параметров θ_i
- Подбор λ_i обычно осуществляется по аналогии с гиперпараметрами, например, с помощью кросс-валидации. Для простоты часто полагают $\lambda_i = \lambda \in R$ для всех i .

- Как правило величины коэффициентов θ тесно связаны с единицами измерения признаков X .
- Например, в линейной регрессии если коэффициент при весе в килограммах равняется $\theta_k = 100$, то этот же коэффициент при весе в граммах будет равняться $\theta_k^* = 100/1000 = 0.1$.
- **Проблема** – если на все коэффициенты накладывается один и тот же штраф, например, λ при использовании Lp-нормы, то его сила будет зависеть от единиц измерения признаков.
- **Решение** – привести признаки к сопоставимым единицам измерения, например, за счет стандартизации в форме деления на выборочное стандартное отклонение.
- Кроме того, часто стандартизация снижает сложность оптимизационной задачи (через снижение погрешностей, связанных с операциями над числами с плавающей точкой), тем самым повышая скорость нахождения минимума методами численной оптимизации.

Регуляризация в линейном регрессионном анализе

Лассо регрессия

- Даже сохраняя линейную форму связи $E(Y_i|X_i) = X_i\beta$, линейная регрессия может аппроксимировать очень сложные зависимости, за счет того, что X_i могут быть разнообразными функциями (например, полиномы и сплайны) от исходных данных.
- Чем больше функций от исходных данных включает исследователь, тем, как правило, ниже смещение, но выше дисперсия оценок параметров и прогнозов.
- **Проблема** – при включении большого числа функций от исходных данных число оцениваемых коэффициентов β_i может оказаться чрезвычайно велико, что приведет к крайне большой дисперсии оценок.
- **Решение** – воспользоваться, например, Лассо регуляризацией, минимизируя:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - X_i\beta)^2 + \sum_{i=1}^{n_\beta} \lambda_i |\beta_i|$$

- **Полезное свойство Лассо регуляризации** – часто оценки коэффициентов при наименее значимых (с точки зрения вклада в прогностическое качество модели) регрессорах обнуляются $\hat{\beta}_i = 0$, что эквивалентно их исключению из модели.

Регуляризация в линейном регрессионном анализе

Ридж регрессия

- Преимущество Ридж регуляризации в линейной регрессии заключается в возможности получения аналитических оценок коэффициентов и их характеристик:

$$\hat{\beta} = (X^T X + \Lambda)^{-1} X^T Y, \text{ где } \Lambda = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$$

$$E(\hat{\beta}|X) = \beta - \underbrace{\lambda (X^T X + \Lambda)^{-1}}_{\text{смещение}} \beta$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}|X) = (X^T X + \Lambda)^{-1} X^T \text{Cov}(\varepsilon|X) X (X^T X + \Lambda)^{-1}$$

- Можно показать, что смещение увеличивается по мере роста штрафа λ .
- Производная $\text{Cov}(\hat{\beta}|X)$ по λ является отрицательно определенной матрицей, поэтому увеличение штрафа приводит к уменьшению дисперсии оценок.
- Если случайные ошибки ε_i гетероскедастичны, то существует такая константа c , что при $\lambda \in (0, c)$ оценки Ридж регрессии более эффективны, чем МНК.

Регуляризация в линейном регрессионном анализе

Соотношение смещения и дисперсии в Ридж регрессии в случае с одним регрессором

- Если в модели используется лишь один регрессор (без константы), то легко показать, что смещение возрастает вместе со штрафом λ :

$$\partial \text{bias}(\hat{\beta}|X) / \partial \lambda = \partial \left| \lambda \beta / \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \lambda \right) \right| / \partial \lambda = \left| \beta \sum_{i=1}^n X_i^2 / \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \lambda \right)^2 \right| > 0$$

- Поскольку $\text{Cov}(\varepsilon|X)$ положительно определена, то дисперсия падает с ростом λ :

$$\begin{aligned} \partial \text{Var}(\hat{\beta}|X) / \partial \lambda &= \partial \left(X^T \text{Cov}(\varepsilon|X) X / \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \lambda \right)^2 \right) \partial \lambda = \\ &= \underbrace{\left(-2 / \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \lambda \right)^3 \right)}_{<0} \underbrace{X^T \text{Cov}(\varepsilon|X) X}_{>0} < 0 \end{aligned}$$

Регуляризация в линейном регрессионном анализе

Пост-Лассо

- Напомним, что при Лассо регуляризации в линейных регрессионных моделях некоторые из коэффициентов β могут обращаться в 0.
- **Проблема** – включение большого числа регрессоров с нулевыми коэффициентами может привести к снижению эффективности оценок вследствие серьезного смещения.
- **Решение** – применить двухшаговую процедуру, на первом шаге которой оценивается Лассо регрессия, а на втором – обычная МНК регрессия, в которой в качестве объясняющих переменных используются лишь те, при которых коэффициенты оказались отличными от нуля в Лассо регрессии.
- Поскольку МНК регрессия используется после Лассо, описанный метод именуется **пост-Лассо**.
- **Примечание** – эффективность оценок пост-Лассо может быть ниже, чем у обычной Лассо регрессии.

Метод моментов

Повторение основ, часть 1

- Рассмотрим i.i.d. выборку X_1, \dots, X_n из распределения с параметром $\theta_0 \in R$ (по аналогии для векторов).
- Рассмотрим непрерывную по θ функцию $\psi(X_i, \theta)$, часто именуемую вкладом (score), такую, что:

$$E(\psi(X_i, \theta)) = 0 \iff \theta = \theta_0$$

- Оценка $\hat{\theta}$, полученная из решения следующего равенства, является, при определенных условиях регулярности, состоятельной для параметра θ_0 и асимптотически нормальной:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi(X_i; \hat{\theta}) = 0$$

Метод моментов

Пример, часть 1

- Имеется выборка X_1, \dots, X_n из экспоненциального распределения с параметром λ_0 .
- В качестве вклада рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(X_i, \lambda) = X_i - \frac{1}{\lambda}$$

- Решим моментное тождество:

$$E(\psi(X_i, \lambda)) = E\left(X_i - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} = 0 \iff \lambda_0 = \lambda$$

- Найдем оценку метода моментов:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi(X_i, \hat{\lambda}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{\hat{\lambda}} = 0 \implies \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

- Например, если $X_1 = 5$ и $X_2 = 15$, то $\bar{X}_2 = 10$, а значит $\hat{\lambda} = 0.1$.

- Иногда из равенства $E(\psi(X_i, \theta_0)) = 0$ или некоторым иным образом можно выразить θ_0 как функцию от моментов, не зависящих от этого параметра:

$$\theta_0 = g(E(\psi_1(X_i)), \dots, E(\psi_m(X_i))).$$

- В таком случае, при некоторых условиях регулярности, состоятельная и асимптотически нормальная оценка $\hat{\theta}$ параметра θ_0 может быть получена как:

$$\hat{\theta} = g(\hat{E}(\psi_1(X_i)), \dots, \hat{E}(\psi_m(X_i))), \text{ где } \hat{E}(\psi_k(X_i)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_k(X_i) \xrightarrow{P} E(\psi_k(X_i))$$

- Если некоторые параметры функции ψ_k неизвестны, то иногда ее заменяют состоятельной оценкой $\hat{\psi}_k$, однако в таком случае изучение свойств оценки $\hat{\theta}$ оказывается нетривиальной задачей.

Метод моментов

Пример, часть 2

- Имеется выборка X_1, \dots, X_n из экспоненциального распределения с параметром λ_0 .
- Рассмотрим следующий вклад и соответствующее ему моментное тождество:

$$\psi(X_i, \lambda) = \lambda X_i^2 - 2X_i \implies E(\psi(X_i, \lambda_0)) = \lambda_0 E(X_i^2) - 2E(X_i) = \lambda_0(2/\lambda_0^2) - 2/\lambda_0 = 0$$

- Решая равенство в отношении λ_0 получаем:

$$\lambda_0 = 2E(X_i) / E(X_i^2) = 2E(\psi_1(X_i)) / E(\psi_2(X_i))$$

$$\psi_1(X_i) = X_i \quad \psi_2(X_i) = X_i^2$$

- В результате получаем оценку:

$$\hat{\lambda} = 2\hat{E}(\psi_1(X_i)) / \hat{E}(\psi_2(X_i))$$

$$\hat{E}(\psi_1(X_i)) = \hat{E}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \hat{E}(\psi_2(X_i)) = \hat{E}(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Двойное машинное обучение (DML)

Частично линейная регрессия

- Рассмотрим **частично линейную модель** (partially linear model):

$$Y_i = \alpha T_i + g(X_i) + \varepsilon_i, \text{ где } E(\varepsilon_i | T_i, X_i) = 0 \text{ и } (T_i, X_i, \varepsilon_i) \text{ i.i.d.}$$

- В качестве основного параметра интереса для исследователя выступает $\alpha \in R$.
- Например, Y_i может отражать прибыль фирмы, T_i – долю акций, принадлежащих государству, α – влияние государственного участия на прибыль при прочих равных значениях контрольных переменных X_i (размер, возраст, объем долга и т.д.).
- Проблема** – неизвестная функция $g(X_i)$ может оказаться нелинейной и тогда МНК оценки окажутся несостоятельными.
- Наивное решение** – применить методы машинного обучения, например, Ридж или Лассо регрессию с большим числом функций от X_i (полиномы и сплайны).
- Проблема** – методы машинного обучения могут дать достаточно точные прогнозы \hat{Y}_i , но полученная с их помощью оценка $\hat{\alpha}$ может оказаться неэффективной.

Двойное машинное обучение (DML)

Основная идея метода

- Чтобы оценить параметр α , рассмотрим следующий вклад:

$$E[\psi] = 0, \text{ где } \psi(\alpha; g_Y, g_T) = (Y_i - g_Y(X_i) - \alpha [T_i - g_T(X_i)])(T_i - g_T(X_i))$$

$$g_Y(X_i) = E(Y_i|X_i), \quad g_T(X_i) = E(T_i|X_i)$$

Где аргумент (T_i, X_i, Y_i) функции ψ опущен для краткости.

- Выражая α из равенства $E(\psi) = 0$ получаем:

$$\alpha = \frac{E((Y_i - g_Y(X_i))(T_i - g_T(X_i)))}{E((T_i - g_T(X_i))^2)} = \frac{E(\psi_1(X_i, Y_i, T_i; g_Y, g_T))}{E(\psi_2(X_i, T_i; g_T))}$$

- Следовательно, параметр α можно оценить двухшаговой процедурой, на первом шаге которой **методами машинного обучения** оцениваются **функции шума** $\hat{g}_Y(x) = \hat{E}(Y_i|X_i = x)$ и $\hat{g}_T(x) = \hat{E}(T_i|X_i = x)$, а на втором шаге – параметр α :

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{g}_Y(X_i))(T_i - \hat{g}_T(X_i))}{\sum_{i=1}^n (T_i - \hat{g}_T(X_i))^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \psi_1(X_i, Y_i, T_i; \hat{g}_Y, \hat{g}_T)}{\sum_{i=1}^n \psi_2(X_i, T_i; \hat{g}_T)}$$

Двойное машинное обучение (DML)

Ортогональность по Нейману

- **Проблема** – поскольку оценивание $\hat{\alpha}$ происходит в два шага, то смещение оценок $\hat{E}(Y_i|X_i)$ и $\hat{E}(T_i|X_i)$, часто возникающие вследствие использования регуляризации (**regularization bias**), может приводить к серьезному смещению $\hat{\alpha}$, так как $E(\psi(\alpha, \hat{g}_T, \hat{g}_Y)) \neq 0$.
- **Решение** – частично данная проблема смягчается за счет формы функции ψ , удовлетворяющей условию **ортогональности по Нейману**:

$$\partial E \left(\psi \left(\alpha; g_Y(X_i) + \underbrace{q(\hat{g}_Y(X_i) - g_Y(X_i))}_{\text{смещение}}, g_T(X_i) + \underbrace{q(\hat{g}_T(X_i) - g_T(X_i))}_{\text{смещение}} \right) \right) / \partial q|_{q=0} = 0$$

- **Интуиция** – при небольших отклонениях оцененных условных математических ожиданий от истинных моментное тождество $E(\psi) = 0$ продолжает соблюдаться с малой погрешностью:

$$\alpha \approx \frac{E((Y_i - \hat{g}_Y(X_i))(T_i - \hat{g}_T(X_i)))}{E((T_i - \hat{g}_T(X_i))^2)}$$

Двойное машинное обучение (DML)

Проблема переобучения

- **Проблема** – даже несмотря на регуляризацию, многие методы машинного обучения склонны к переобучению (**overfitting bias**), из-за чего по крайней мере внутривыборочные оценки $Y_i - \hat{g}_Y(X_i)$ и $T_i - \hat{g}_T(X_i)$ могут существенно отклоняться от $Y_i - g_Y(X_i)$ и $T_i - g_T(X_i)$, тем самым снижая точность оценок второго шага.
- **Решение** – применить разбиение выборки (**sample splitting**) на две части – первая часть выборки используется на первом шаге, то есть для оценивания g_Y и g_T , а вторая – на втором шаге для оценивания α с использованием полученных на первом шаге оценок \hat{g}_Y и \hat{g}_T .
- **Проблема** – мы используем лишь по половине выборки для каждого из шагов, что может снижать эффективность наших оценок.
- **Решение** – использовать различные части выборки для оценивания и прогнозирования.

Двойное машинное обучение (DML)

Разбиение выборки

- Обозначим через $\hat{g}_Y^{(1)}$, $\hat{g}_T^{(1)}$ и $\hat{g}_Y^{(2)}$, $\hat{g}_T^{(2)}$ оценки функций g_Y и g_T , полученные на первой и второй половинах выборки соответственно. То есть обе половины выборки поочередно используются на первом шаге.
- Введем вспомогательную переменную q_i , такую, что $q_i = 1$ если наблюдение i не вошло в первую половину выборки, и $q_i = 2$ – в противном случае.
- Оценим $\hat{\alpha}$ таким образом, чтобы для каждого наблюдения i на втором шаге использовались оценки функций g_Y и g_T , которые были получены без использования i -го наблюдения:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{g}_Y^{(q_i)}(X_i) \right) \left(T_i - \hat{g}_T^{(q_i)}(X_i) \right)}{\sum_{i=1}^n \left(T_i - \hat{g}_T^{(q_i)}(X_i) \right)^2}$$

Двойное машинное обучение (DML)

Кросс-фиттинг

- **Проблема** – использование лишь половины выборки может существенно снизить эффективность оценок функций g_Y и g_T .
- **Решение** – реализовать кросс-фиттинг по аналогии с кросс-валидацией, разбив выборку на K (примерно) равных частей, где $\hat{g}_Y^{(k)}$ и $\hat{g}_T^{(k)}$ оцениваются на данных, не вошедших в k -ю из этих выборок (обычно $K = 5$):

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{g}_Y^{(q_i)}(X_i) \right) \left(T_i - \hat{g}_T^{(q_i)}(X_i) \right)}{\sum_{i=1}^n \left(T_i - \hat{g}_T^{(q_i)}(X_i) \right)^2}$$

Где $q_i = k$, если наблюдение i не вошло в k -ю выборку.

- **Проблема** – результаты оценивания могут быть чувствительны к конкретному разбиению на K частей.
- **Решение** – повторить кросс-фиттинг m раз и либо усреднить все полученные оценки, либо взять ту из них, что является выборочной медианой.

Двойное машинное обучение (DML)

Пример

$$\text{Зарплата}_i = \alpha \times \text{Образование}_i + g(\text{Возраст}_i) + \varepsilon_i$$

Для оценивания $g_Y^{(qi)}(X_i)$ и $g_T^{(qi)}(X_i)$ используется метод ближайших соседей с одним соседом.

Возраст _i (X_i)	20	30	40	50	60	24	37	44	47	90
Образование _i (T_i)	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
Зарплата _i (Y_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Разбиение выборки	Первая часть					Вторая часть				
$\hat{g}_Y^{(qi)}(\text{Возраст}_i) = \hat{E}(\text{Зарплата}_i \text{Возраст}_i)$	6	6	7	9	9	1	3	3	4	5
$\hat{g}_T^{(qi)}(\text{Возраст}_i) = \hat{E}(\text{Образование}_i \text{Возраст}_i)$	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1

- Нетрудно показать, что $\hat{\alpha} = -10/6$, поскольку:

$$\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{g}_Y^{(qi)}(X_i) \right) \left(T_i - \hat{g}_T^{(qi)}(X_i) \right) = (1 - 6)(1 - 0) + \dots + (10 - 5)(0 - 1) = -10$$

$$\sum_{i=1}^n \left(T_i - \hat{g}_T^{(qi)}(X_i) \right)^2 = (1 - 0)^2 + \dots + (0 - 1)^2 = 6$$

Двойное машинное обучение (DML)

Резюме

- Описанный метод именуется **двойным машинным обучением (DML)**, поскольку предполагает применение методов машинного обучения при оценивании функций \hat{g}_Y и \hat{g}_T , а также кросс-фиттинга.
- При достаточно слабых допущениях DML метод дает состоятельную и асимптотически нормальную оценку $\hat{\alpha}$.
- Идейно DML опирается на метод моментов, поскольку выражение, используемое для оценивания α , выводится из равенства $E(\psi) = 0$.
- **Проблема** – использование оценок \hat{g}_Y и \hat{g}_T вместо истинных значений g_Y и g_T может приводить к неточностям в оценивании $\hat{\alpha}$.
- **Решение** – кросс-фиттинг и подбор функции ψ , удовлетворяющей ортогональности по Нейману.
 - Ортогональность по Нейману позволяет сгладить смещение вследствие регуляризации.
 - Кросс-фиттинг помогает снизить смещение, обусловленное переобучением.
- Иногда кросс-фиттинг реализуется упрощенным образом – параметр α оценивается на каждой из K подвыборок и полученный результат усредняется. Такой подход называется DML, а рассмотренный ранее – DML2.
- Авторы метода рекомендуют применять DML2, особенно на малых выборках.

Двойное машинное обучение (DML)

Эндогенность

- **Проблема** – если T_i является эндогенной переменной, то $E(\varepsilon_i | T_i, X_i) \neq 0$, откуда $E(\psi) \neq 0$, что не позволяет оценить α описанным ранее способом.
- **Решение** – найти **инструментальную переменную** Z_i (случай с несколькими инструментами рассматривается по аналогии), то есть такую, что $E(\varepsilon_i | X_i, Z_i) = 0$ и $E(\text{Cov}(T_i, Z_i | X_i)) \neq 0$. После этого рассмотреть такую ψ , что $E(\psi) = 0$ и соблюдается ортогональность по Нейману, например:

$$\psi = (Y_i - g_Y(X_i) - \alpha (T_i - g_T(X_i))) (Z_i - g_Z(X_i)), \text{ где } g_Z(X_i) = E(Z_i | X_i)$$

- По аналогии с предыдущим примером применив кросс-фиттинг получаем:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{g}_Y^{(q_i)}(X_i) \right) \left(Z_i - \hat{g}_Z^{(q_i)}(X_i) \right)}{\sum_{i=1}^n \left(T_i - \hat{g}_T^{(q_i)}(X_i) \right) \left(Z_i - \hat{g}_Z^{(q_i)}(X_i) \right)}$$

Двойное машинное обучение (DML)

Неслучайный отбор

- Наблюдаемость Y_i может зависеть от некоторого правила, например, зарплата Y_i наблюдается лишь для работающих $Z_i = 1$ индивидов и ненаблюдается для безработных $Z_i = 0$:

$$\underbrace{Y_i^* = \alpha T_i + g(X_i) + \varepsilon_i}_{\text{целевое уравнение}} \quad \underbrace{Z_i^* = r(W_i) + u_i}_{\text{уравнение отбора}}$$
$$Y_i = \begin{cases} Y_i^*, & \text{если } Z_i = 1 \\ \text{ненаблюдаем, в противном случае} \end{cases} \quad Z_i = \begin{cases} 1, & \text{если } Z_i^* \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

- Поскольку в данных мы наблюдаем лишь $(Y_i^* | Z_i = 1)$, а не Y_i^* , то нарушается допущение о нулевом условном математическом ожидании случайной ошибки:

$$E(\varepsilon_i | Z_i = 1) = E(\varepsilon_i | u_i \geq -r(W_i)) = h(W_i) \implies E(Y_i^* | X_i, T_i, W_i, Z_i = 1) = \alpha T_i + g(X_i) + h(W_i)$$

- Проблема** – если ε_i и u_i зависимы, то функция $h(W_i) \neq 0$ является пропущенной переменной, что приведет к несостоятельности DML оценки $\hat{\alpha}$.
- Решение** – если T_i не входит в W_i , то можно объединить переменные X_i и W_i , получив регрессионное уравнение, в котором α можно оценить DML методом:

$$Y_i = \alpha T_i + g^*(X_i^*) + v_i, \text{ где } g^*(X_i^*) = g(X_i) + h(W_i) \text{ и } X_i^* = (X_i, W_i)$$

Двойное машинное обучение (DML)

Несколько структурных параметров

- **Проблема** – иногда исследователю необходимо оценить не один, а сразу несколько структурных параметров a_j , где $j \in \{1, \dots, d\}$.

$$Y_i = \alpha_1 T_{1i} + \dots + \alpha_d T_{di} + g(X_i) + \varepsilon_i$$

- Например, параметры α_j могут отражать отдачу от различных уровней образования: базовый, бакалавриат и магистратура.
- **Решение** – оценить каждый из параметров α_j поочередно, используя DML метод для следующего уравнения:

$$Y_i = \alpha_j T_{ji} + g_j(X_i, T_{1i}, \dots, T_{(j-1)i}, T_{(j+1)i}, \dots, T_{di}) + \varepsilon_i$$

- Для тестирования гипотез о связи между параметрами α_j можно применить бутстрап.