# Семинар 1. Байесовские сети

**Задание №1. Условная независимость и последствия ее нарушения.**
События $A$ и $B$ независимы при условии события $C$.

1. Пусть $P(A|C) = 0.3$, $P(B,C) = 0.2$ и $P(C) = 0.5$. Найдите $P(A,B|C)$.

2. В дополнение к предыдущему пункту известно, что $P(A,B) = 0.16$. Рассчитайте $P(C|A,B)$.

3. В дополнение к предыдущим пунктам известно, что $P(A|\overline{C}) = P(\overline{B}|\overline{C}) = 0.6$ . Проверьте, являются ли события $A$ и $B$ независимыми при условии события $\overline{C}$.

4. Вы решили использовать наивный Байесовский классификатор с двумя бинарными признаками $X_{i1}$ и $X_{i2}$ для прогнозирования бинарной целевой переменной $Y_i$. События $X_{i1} = 1$, $X_{i2} = 1$ и $Y_i = 1$ эквивалентны событиям $A$, $B$ и $C$ соответственно. Рассчитайте асимптотическое смещение используемой вами оценки условной вероятности $P(Y_i = 1|X_{i1} = 1, X_{i2} = 1)$. Объясните причину возникновения этого смещения.

5. Для оценивания $P(X_{i1} = 1, X_{i2} = 1, Y_i = 1)$ вы используете Байесовскую сеть, в которой $X_{i1}$ является родителем $X_{i2}$ и $Y_i$, которые, в свою очередь, не имеют детей. Найдите асимптотическое смещение этой оценки.

6. Докажите следующие равенства:

$$P(A|C) = P(A|C,B) \qquad P(B|C) = P(B|C,A)$$

**Решение:**

1. Применяя условную независимость, имеем:

$$P(A,B|C) = P(A|C) \times P(B|C) = P(A|C) \times \frac{P(B,C)}{P(C)} = 0.3 \times \frac{0.2}{0.5} = 0.12$$

2. Используя формулу условной вероятности получаем:

$$P(C|A,B) = \frac{P(A,B|C)P(C)}{P(A,B)} = \frac{0.12 \times 0.5}{0.16} = 0.375$$

3. Применяя формулу полной вероятности имеем:

$$\underbrace{P(A,B)}_{0.16} = \underbrace{P(A,B|C)P(C)}_{0.12\times 0.5} + P(A,B|\overline{C})\underbrace{P(\overline{C})}_{0.5}$$

   Отсюда следует, что:

$$P(A,B|\overline{C}) = (0.16 - 0.12 \times 0.5)/0.5 = 0.2$$

   Условная независимость не соблюдается, поскольку:

$$P(A|\overline{C})P(\overline{B}|\overline{C}) = P(A|\overline{C})\left(1 - P(\overline{B}|\overline{C})\right) = 0.6 \times (1 - 0.4) = 0.24 \neq P(A,B|\overline{C})$$

4. Применяя теорему Слуцкого получаем, к чему сремится по вероятности оценка наивного Байесовского классификатора:

$$\hat{P}(Y_i = 1|X_{i1} = 1, X_{i2} = 1) =$$
$$= \frac{\hat{P}(X_{i1} = 1|Y_i = 1)\hat{P}(X_{i2} = 1|Y_i = 1)\hat{P}(Y_i = 1)}{\hat{P}(X_{i1} = 1|Y_i = 1)\hat{P}(X_{i2} = 1|Y_i = 1)\hat{P}(Y_i = 1) + \hat{P}(X_{i1} = 1|Y_i = 0)\hat{P}(X_{i2} = 1|Y_i = 0)\hat{P}(Y_i = 0)} \xrightarrow{p}$$
$$\xrightarrow{p} \frac{P(A|C)P(B|C)P(C)}{P(A|C)P(B|C)P(C) + P(A|\overline{C})P(B|\overline{C})P(\overline{C})} = \frac{0.3 \times 0.4 \times 0.5}{0.3 \times 0.4 \times 0.5 + 0.6 \times 0.4 \times 0.5} = \frac{1}{3}$$

Следовательно, асимптотическое смещение составит:

$$\frac{1}{3} - P(Y_i = 1|X_{i1} = 1, X_{i2} = 1) = \frac{1}{3} - P(C|A, B) = \frac{1}{3} - 0.375 = -\frac{1}{24}$$

Смещение возникло потому, что $X_{i1}$ и $X_{i2}$ условно независимы лишь при $Y_i = 1$, но не при $Y_i = 0$.

5. В силу используемой Байесовской сети получаем:

$$\hat{P}(X_{i1} = 1, X_{i2} = 1, Y_i = 1) \xrightarrow{p} P(A)P(B|A)P(C|A) = P(A, B)\frac{P(A|C)P(C)}{P(A)} =$$
$$= P(A, B)\frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C) + P(A|\overline{C})P(\overline{C})} = 0.16 \times \frac{0.3 \times 0.5}{0.3 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5} = \frac{4}{75}$$

Следовательно, асимптотическое смещение составит:

$$\frac{4}{75} - P(A, B, C) = \frac{4}{75} - P(A, B|C)P(C) = \frac{4}{75} - 0.12 \times 0.5 = -\frac{1}{150}$$

6. В силу условной независимости:

$$P(A, B|C) = P(A|C) \times P(B|C)$$

Используя формулу пересечения событий это выражение также можно записать как:

$$P(A, B|C) = P(A|C) \times P(B|A, C)$$

Оба равенства выполняются лишь при $P(B|A, C) = P(B|C)$. По аналогии можно показать, что $P(A|B, C) = P(A|C)$.