

Микроэконометрика

Модели с эндогенным переключением

Потанин Богдан Станиславович

доцент, кандидат экономических наук

2024-2025

Эндогенное переключение

Мотивация

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.

Эндогенное переключение

Мотивация

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.

Эндогенное переключение

Мотивация

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.
- Механизм формирования зарплаты (отдача от стажа и т.д.) может варьироваться в зависимости от наличия у индивида высшего образования. При этом может различаться отдача как от наблюдаемых, так и от ненаблюдаемых характеристик.

Эндогенное переключение

Мотивация

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.
- Механизм формирования зарплаты (отдача от стажа и т.д.) может варьироваться в зависимости от наличия у индивида высшего образования. При этом может различаться отдача как от наблюдаемых, так и от ненаблюдаемых характеристик.
- Идейно, эндогенное переключение проистекает из неслучайного отбора, поскольку имеется неслучайный отбор в те состояния (режимы), в которых наблюдается зависимая переменная.

Эндогенное переключение

Мотивация

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.
- Механизм формирования зарплаты (отдача от стажа и т.д.) может варьироваться в зависимости от наличия у индивида высшего образования. При этом может различаться отдача как от наблюдаемых, так и от ненаблюдаемых характеристик.
- Идейно, эндогенное переключение проистекает из неслучайного отбора, поскольку имеется неслучайный отбор в те состояния (режимы), в которых наблюдается зависимая переменная.
- Например, неслучайный отбор в число тех, кто получил высшее образование, определяет переключение между двумя типами зарплаты: при условии наличия высшего образования и без него.

Эндогенное переключение

Формулировка

- Имеются два целевых уравнения и уравнение, задающее переключение между ними:

$$\text{Целевое уравнение 1: } y_{1i}^* = x_i\beta_1 + \varepsilon_{1i}$$

$$\text{Целевое уравнение 0: } y_{0i}^* = x_i\beta_0 + \varepsilon_{0i}$$

$$\text{Уравнение переключения: } z_i^* = w_i\gamma + u_i$$

Эндогенное переключение

Формулировка

- Имеются два целевых уравнения и уравнение, задающее переключение между ними:

$$\text{Целевое уравнение 1: } y_{1i}^* = x_i\beta_1 + \varepsilon_{1i}$$

$$\text{Целевое уравнение 0: } y_{0i}^* = x_i\beta_0 + \varepsilon_{0i}$$

$$\text{Уравнение переключения: } z_i^* = w_i\gamma + u_i$$

- Наблюдаемое состояние целевого уравнения определяется эндогенным переключением, то есть зависит от z_i^* :

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если } z_i^* \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} y_{1i}^*, & \text{если } z_i = 1 \\ y_{0i}^*, & \text{если } z_i = 0 \end{cases}$$

Эндогенное переключение

Формулировка

- Имеются два целевых уравнения и уравнение, задающее переключение между ними:

$$\text{Целевое уравнение 1: } y_{1i}^* = x_i\beta_1 + \varepsilon_{1i}$$

$$\text{Целевое уравнение 0: } y_{0i}^* = x_i\beta_0 + \varepsilon_{0i}$$

$$\text{Уравнение переключения: } z_i^* = w_i\gamma + u_i$$

- Наблюдаемое состояние целевого уравнения определяется эндогенным переключением, то есть зависит от z_i^* :

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если } z_i^* \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} y_{1i}^*, & \text{если } z_i = 1 \\ y_{0i}^*, & \text{если } z_i = 0 \end{cases}$$

- Например, y_{1i}^* и y_{0i}^* могут отражать зарплату индивида при условии наличия или отсутствия у него высшего образования соответственно, а $z_i = 1$ в случаях, когда у индивида есть высшее образование. Различие в коэффициентах β_1 и β_0 отражает различную отдачу (влияние) от характеристик в зависимости от состояния. Например, отдача от стажа может быть выше для людей с высшим образованием.

Эндогенное переключение

Совместное распределение случайных ошибок

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.

Эндогенное переключение

Совместное распределение случайных ошибок

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.
- Совместное распределение случайных ошибок целевых уравнений ε_{1i} и ε_{0i} не идентифицируемо, поскольку мы наблюдаем значение целевой переменной лишь в одном из состояний.

Эндогенное переключение

Совместное распределение случайных ошибок

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.
- Совместное распределение случайных ошибок целевых уравнений ε_{1i} и ε_{0i} не идентифицируемо, поскольку мы наблюдаем значение целевой переменной лишь в одном из состояний.
- Однако, для оценивания параметров модели достаточно ввести допущение о совместном распределении этих случайных ошибок со случайной ошибкой уравнения переключения u_i :

$$(u_i, \varepsilon_{ji}) \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho_j \sigma_j \\ \rho_j \sigma_j & \sigma_j^2 \end{bmatrix} \right), \text{ где } j \in \{0, 1\}$$

Эндогенное переключение

Совместное распределение случайных ошибок

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.
- Совместное распределение случайных ошибок целевых уравнений ε_{1i} и ε_{0i} не идентифицируемо, поскольку мы наблюдаем значение целевой переменной лишь в одном из состояний.
- Однако, для оценивания параметров модели достаточно ввести допущение о совместном распределении этих случайных ошибок со случайной ошибкой уравнения переключения u_i :

$$(u_i, \varepsilon_{ji}) \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho_j \sigma_j \\ \rho_j \sigma_j & \sigma_j^2 \end{bmatrix} \right), \text{ где } j \in \{0, 1\}$$

- Дисперсия случайной ошибки σ_j^2 и ее корреляция со случайной ошибкой уравнения переключения ρ_j различаются в зависимости от состояния (режима) целевого уравнения, что, в частности, может быть обусловлено различием в отдаче (влиянии) от ненаблюдаемых характеристик (на целевой показатель).

Эндогенное переключение

Проблема оценивания

- Для краткости обозначим $\tilde{z}_i = 2z_i - 1$.

Эндогенное переключение

Проблема оценивания

- Для краткости обозначим $\tilde{z}_i = 2z_i - 1$.
- Поскольку u_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E(y_i | w_i, x_i) = E(y_{z_i}^* | z_i, w_i, x_i) = x_i \beta_{z_i} + E(\varepsilon_{z_i} | -\tilde{z}_i u_i \leq \tilde{z}_i w_i \gamma, w_i, x_i),$$

- Для краткости обозначим $\tilde{z}_i = 2z_i - 1$.
- Поскольку u_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E(y_i | w_i, x_i) = E(y_{z_i}^* | z_i, w_i, x_i) = x_i \beta_{z_i} + E(\varepsilon_{z_i} | -\tilde{z}_i u_i \leq \tilde{z}_i w_i \gamma, w_i, x_i),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E(\varepsilon_{z_i} | -\tilde{z}_i u_i \leq \tilde{z}_i w_i \gamma, w_i, x_i) = \tilde{z}_i \rho_{z_i} \sigma_{z_i} \frac{\phi(w_i \gamma)}{\Phi(\tilde{z}_i w_i \gamma)} = \tilde{z}_i \rho_{z_i} \sigma_{z_i} \lambda_i,$$

- Для краткости обозначим $\tilde{z}_i = 2z_i - 1$.
- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E(y_i | w_i, x_i) = E(y_{z_i}^* | z_i, w_i, x_i) = x_i \beta_{z_i} + E(\varepsilon_{z_i} | -\tilde{z}_i u_i \leq \tilde{z}_i w_i \gamma, w_i, x_i),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E(\varepsilon_{z_i} | -\tilde{z}_i u_i \leq \tilde{z}_i w_i \gamma, w_i, x_i) = \tilde{z}_i \rho_{z_i} \sigma_{z_i} \frac{\phi(w_i \gamma)}{\Phi(\tilde{z}_i w_i \gamma)} = \tilde{z}_i \rho_{z_i} \sigma_{z_i} \lambda_i,$$

- В результате получаем регрессионные уравнения (где $j \in \{0, 1\}$ и $z_i = j$):

$$y_{ji}^* = x_i \beta_j + \tilde{z}_i \rho_j \sigma_j \lambda_i + v_{ji},$$

- Для краткости обозначим $\tilde{z}_i = 2z_i - 1$.
- Поскольку u_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E(y_i | w_i, x_i) = E(y_{z_i}^* | z_i, w_i, x_i) = x_i \beta_{z_i} + E(\varepsilon_{z_i} | -\tilde{z}_i u_i \leq \tilde{z}_i w_i \gamma, w_i, x_i),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E(\varepsilon_{z_i} | -\tilde{z}_i u_i \leq \tilde{z}_i w_i \gamma, w_i, x_i) = \tilde{z}_i \rho_{z_i} \sigma_{z_i} \frac{\phi(w_i \gamma)}{\Phi(\tilde{z}_i w_i \gamma)} = \tilde{z}_i \rho_{z_i} \sigma_{z_i} \lambda_i,$$

- В результате получаем регрессионные уравнения (где $j \in \{0, 1\}$ и $z_i = j$):

$$y_{ji}^* = x_i \beta_j + \tilde{z}_i \rho_j \sigma_j \lambda_i + v_{ji}, \quad v_{ji} = \varepsilon_{ji} - (2j - 1) \rho_j \sigma_j \lambda_i \implies E(v_{ji} | x_i, w_i) = 0$$

- Для краткости обозначим $\tilde{z}_i = 2z_i - 1$.
- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E(y_i | w_i, x_i) = E(y_{z_i}^* | z_i, w_i, x_i) = x_i \beta_{z_i} + E(\varepsilon_{z_i i} | -\tilde{z}_i u_i \leq \tilde{z}_i w_i \gamma, w_i, x_i),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E(\varepsilon_{z_i i} | -\tilde{z}_i u_i \leq \tilde{z}_i w_i \gamma, w_i, x_i) = \tilde{z}_i \rho_{z_i} \sigma_{z_i} \frac{\phi(w_i \gamma)}{\Phi(\tilde{z}_i w_i \gamma)} = \tilde{z}_i \rho_{z_i} \sigma_{z_i} \lambda_i,$$

- В результате получаем регрессионные уравнения (где $j \in \{0, 1\}$ и $z_i = j$):

$$y_{ji}^* = x_i \beta_j + \tilde{z}_i \rho_j \sigma_j \lambda_i + v_{ji}, \quad v_{ji} = \varepsilon_{ji} - (2j - 1) \rho_j \sigma_j \lambda_i \implies E(v_{ji} | x_i, w_i) = 0$$

- Без учета λ_i при $\rho \neq 0$ и наличии корреляции между λ_i и x_i МНК оценки коэффициентов β_j окажутся несостоятельными вследствие проблемы пропущенной переменной.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
 - **Первый шаг:** при помощи пробит модели оцениваются параметры γ . В силу инвариантности ММП оценок состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i(\tilde{z}_i w_i \hat{\gamma})$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
 - **Первый шаг:** при помощи пробит модели оцениваются параметры γ . В силу инвариантности ММП состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i(\tilde{z}_i w_i \hat{\gamma})$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.
 - **Второй шаг:** В регрессионное уравнение для y_{ji}^* подставляется $\hat{\lambda}_i$ в качестве дополнительного регрессора с коэффициентом $\rho_j \sigma_j$. Затем β_j и $\rho_j \sigma_j$ оцениваются при помощи МНК по выборке из наблюдений, для которых $z_i = j$.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
 - **Первый шаг:** при помощи пробит модели оцениваются параметры γ . В силу инвариантности ММП оценок состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i(\tilde{z}_i w_i \hat{\gamma})$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.
 - **Второй шаг:** В регрессионное уравнение для y_{ji}^* подставляется $\hat{\lambda}_i$ в качестве дополнительного регрессора с коэффициентом $\rho_j \sigma_j$. Затем β_j и $\rho_j \sigma_j$ оцениваются при помощи МНК по выборке из наблюдений, для которых $z_i = j$.
- Оценивание параметров $\hat{\sigma}_j^2$ и $\hat{\rho}_j$, а также асимптотической ковариационной матрицы оценок коэффициентов (с учетом гетероскедастичности и оценок первого шага) осуществляется по аналогии с двухшаговой процедурой Хекмана.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
 - **Первый шаг:** при помощи пробит модели оцениваются параметры γ . В силу инвариантности ММП оценок состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i(\tilde{z}_i w_i \hat{\gamma})$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.
 - **Второй шаг:** В регрессионное уравнение для y_{ji}^* подставляется $\hat{\lambda}_i$ в качестве дополнительного регрессора с коэффициентом $\rho_j \sigma_j$. Затем β_j и $\rho_j \sigma_j$ оцениваются при помощи МНК по выборке из наблюдений, для которых $z_i = j$.
- Оценивание параметров $\hat{\sigma}_j^2$ и $\hat{\rho}_j$, а также асимптотической ковариационной матрицы оценок коэффициентов (с учетом гетероскедастичности и оценок первого шага) осуществляется по аналогии с двухшаговой процедурой Хекмана.
- Эффективность оценок данного метода в существенной степени зависит от наличия ограничений исключения.

- Функция правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(\beta_1, \beta_0, \rho_1, \rho_0, \sigma_1, \sigma_0; y, z | X, W) = \\ = \prod_{i: z_i=1} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 1 | y_i, x_i, w_i) \prod_{i: z_i=0} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 0 | y_i, x_i, w_i) = \end{aligned}$$

- Функция правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(\beta_1, \beta_0, \rho_1, \rho_0, \sigma_1, \sigma_0; y, z | X, W) &= \\ &= \prod_{i: z_i=1} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 1 | y_i, x_i, w_i) \prod_{i: z_i=0} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 0 | y_i, x_i, w_i) = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{z_i}} \phi\left(\frac{y_i - x_i \beta_{z_i}}{\sigma_{z_i}}\right) \Phi\left(\frac{\rho_{z_i} (y_i - x_i \beta_{z_i}) / \sigma_{z_i} + w_i \gamma}{\tilde{z}_i \sqrt{1 - \rho_{z_i}^2}}\right) \end{aligned}$$

- Функция правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(\beta_1, \beta_0, \rho_1, \rho_0, \sigma_1, \sigma_0; y, z | X, W) &= \\ &= \prod_{i: z_i=1} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 1 | y_i, x_i, w_i) \prod_{i: z_i=0} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 0 | y_i, x_i, w_i) = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{z_i}} \phi\left(\frac{y_i - x_i \beta_{z_i}}{\sigma_{z_i}}\right) \Phi\left(\frac{\rho_{z_i} (y_i - x_i \beta_{z_i}) / \sigma_{z_i} + w_i \gamma}{\tilde{z}_i \sqrt{1 - \rho_{z_i}^2}}\right) \end{aligned}$$

- Преимущества и недостатки двухшаговой и ММП процедур оценивания аналогичны тем, что имеют место для модели с неслучайным отбором.

- Функция правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(\beta_1, \beta_0, \rho_1, \rho_0, \sigma_1, \sigma_0; y, z | X, W) &= \\ &= \prod_{i: z_i=1} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 1 | y_i, x_i, w_i) \prod_{i: z_i=0} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 0 | y_i, x_i, w_i) = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{z_i}} \phi\left(\frac{y_i - x_i \beta_{z_i}}{\sigma_{z_i}}\right) \Phi\left(\frac{\rho_{z_i} (y_i - x_i \beta_{z_i}) / \sigma_{z_i} + w_i \gamma}{\tilde{z}_i \sqrt{1 - \rho_{z_i}^2}}\right) \end{aligned}$$

- Преимущества и недостатки двухшаговой и ММП процедур оценивания аналогичны тем, что имеют место для модели с неслучайным отбором.
- Для каждого из уравнений процедура тестирования наличия неслучайного отбора сводится к проверке гипотез $H_0 : \rho_j \sigma_j = 0$ и $H_0 : \rho_j = 0$ для двухшаговой процедуры и ММП соответственно. Уравнение, в котором данная нулевая гипотеза не отвергается, можно оценить при помощи обычного МНК.

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное математическое ожидание имеет такой же вид, как в случае с обычной линейной регрессией:

$$\frac{\partial E(y_{ji}^* | x_i)}{\partial x_{ik}} = \beta_{jk}, \text{ где } j \in \{0, 1\}.$$

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное математическое ожидание имеет такой же вид, как в случае с обычной линейной регрессией:

$$\frac{\partial E(y_{ji}^* | x_i)}{\partial x_{ik}} = \beta_{jk}, \text{ где } j \in \{0, 1\}.$$

- Предельный эффект на условное математическое ожидание рассчитывается как:

$$\frac{\partial E(y_{ji}^* | z_i, x_i, w_i)}{\partial x_{ik}} = \beta_{jk} - \tilde{z}_i \gamma_* \rho_j \sigma_j \delta(\tilde{z}_i w_i \gamma),$$

$$\delta(a) = \lambda(a) (\lambda(a) + a),$$

где γ_* является коэффициентом при x_{ki} в уравнении отбора, если x_{ki} входит в w_i . В противном случае $\gamma_* = 0$.

Средний эффект воздействия

Формулировка

- Эффект воздействия z_i на целевую переменную i -го индивида определяется как:

$$TE_i = y_{1i} - y_{0i}$$

Средний эффект воздействия

Формулировка

- Эффект воздействия z_i на целевую переменную i -го индивида определяется как:

$$TE_i = y_{1i} - y_{0i}$$

- Поскольку на практике мы наблюдаем либо y_{1i} , либо y_{0i} , то мы можем оценить лишь условный средний эффект воздействия:

$$\widehat{CATE}_i = E(y_{1i}|x_i) - E(y_{0i}|x_i) = x_i\beta_1 - x_i\beta_0$$

Средний эффект воздействия

Формулировка

- Эффект воздействия z_i на целевую переменную i -го индивида определяется как:

$$TE_i = y_{1i} - y_{0i}$$

- Поскольку на практике мы наблюдаем либо y_{1i} , либо y_{0i} , то мы можем оценить лишь условный средний эффект воздействия:

$$\widehat{CATE}_i = E(y_{1i}|x_i) - E(y_{0i}|x_i) = x_i\beta_1 - x_i\beta_0$$

- Усредняя CATE можно получить оценку среднего эффекта воздействия:

$$\widehat{ATE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \widehat{CATE}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\beta_1 - x_i\beta_0$$

Средний эффект воздействия

Формулировка

- Эффект воздействия z_i на целевую переменную i -го индивида определяется как:

$$TE_i = y_{1i} - y_{0i}$$

- Поскольку на практике мы наблюдаем либо y_{1i} , либо y_{0i} , то мы можем оценить лишь условный средний эффект воздействия:

$$\widehat{CATE}_i = E(y_{1i}|x_i) - E(y_{0i}|x_i) = x_i\beta_1 - x_i\beta_0$$

- Усредняя CATE можно получить оценку среднего эффекта воздействия:

$$\widehat{ATE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \widehat{CATE}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\beta_1 - x_i\beta_0$$

- Наконец, можно также оценить эффект воздействия на подвергшихся воздействию:

$$ATE_T = E(y_{1i}|z_i = 1) - E(y_{0i}|z_i = 1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i (\beta_1 - \beta_0) + (\rho_1\sigma_1 - \rho_0\sigma_0) \frac{\phi(w_i\gamma)}{\Phi(w_i\gamma)}$$

- Полупараметрическое оценивание осуществляется по аналогии с моделью с неслучайным отбором.

- Полупараметрическое оценивание осуществляется по аналогии с моделью с случайным отбором.
- В частности, для оценивания можно применять метод Ньюи и метод Галланта и Нички.

Модель с эндогенным бинарным регрессором

Формулировка

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.

Модель с эндогенным бинарным регрессором

Формулировка

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.
- Это эквивалентно существованию одного уравнения:

$$y_i = x_i\beta + \alpha z_i + \varepsilon_i,$$

где эндогенность z_i учитывается за счет корреляции между u_i и ε_i .

Модель с эндогенным бинарным регрессором

Формулировка

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.
- Это эквивалентно существованию одного уравнения:

$$y_i = x_i\beta + \alpha z_i + \varepsilon_i,$$

где эндогенность z_i учитывается за счет корреляции между u_i и ε_i .

- Оценивание таких моделей по аналогии осуществляется при помощи метода максимального правдоподобия или с помощью двухшаговой процедуры, а CATE, ATE и ATET, как и сам эффект воздействия, будут совпадать с α .

Модель с эндогенным бинарным регрессором

Формулировка

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.
- Это эквивалентно существованию одного уравнения:

$$y_i = x_i\beta + \alpha z_i + \varepsilon_i,$$

где эндогенность z_i учитывается за счет корреляции между u_i и ε_i .

- Оценивание таких моделей по аналогии осуществляется при помощи метода максимального правдоподобия или с помощью двухшаговой процедуры, а CATE, ATE и ATET, как и сам эффект воздействия, будут совпадать с α .
- Выбрать между данной моделью и моделью с эндогенным переключением можно при помощи LR теста, проверив гипотезу о том, что $\rho_0 = \rho_1$, $\sigma_0 = \sigma_1$, а также о том, что все коэффициенты β_1 и β_0 , за исключением константы, совпадают.

Модель с многокритериальным эндогенным переключением

Неслучайный отбор и эндогенное переключение

- Для наглядности рассмотрим модель, в которой одновременно фигурируют и неслучайный отбор, и эндогенное переключение:

Целевое уравнение 1: $y_{1i}^* = x_i\beta_1 + \varepsilon_{1i}$ Целевое уравнение 0: $y_{0i}^* = x_i\beta_0 + \varepsilon_{0i}$

Уравнение отбора: $z_{0i}^* = w_{0i}\gamma + u_{0i}$ Уравнение переключения: $z_{1i}^* = w_{1i}\gamma + u_{1i}$

$$z_{0i} = \begin{cases} 1, & \text{если } z_{0i}^* \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad z_{1i} = \begin{cases} 1, & \text{если } z_{1i}^* \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} y_{0i}, & \text{если } z_{0i} = 1 \text{ и } z_{1i} = 0 \\ y_{1i}, & \text{если } z_{0i} = 1 \text{ и } z_{1i} = 1 \\ \text{не наблюдается,} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Модель с многокритериальным эндогенным переключением

Неслучайный отбор и эндогенное переключение

- Для наглядности рассмотрим модель, в которой одновременно фигурируют и неслучайный отбор, и эндогенное переключение:

Целевое уравнение 1: $y_{1i}^* = x_i\beta_1 + \varepsilon_{1i}$ Целевое уравнение 0: $y_{0i}^* = x_i\beta_0 + \varepsilon_{0i}$

Уравнение отбора: $z_{0i}^* = w_{0i}\gamma + u_{0i}$ Уравнение переключения: $z_{1i}^* = w_{1i}\gamma + u_{1i}$

$$z_{0i} = \begin{cases} 1, & \text{если } z_{0i}^* \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad z_{1i} = \begin{cases} 1, & \text{если } z_{1i}^* \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} y_{0i}, & \text{если } z_{0i} = 1 \text{ и } z_{1i} = 0 \\ y_{1i}, & \text{если } z_{0i} = 1 \text{ и } z_{1i} = 1 \\ \text{не наблюдается,} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

- Оценивание этой системы возможно с помощью метода максимального правдоподобия или двухшаговой процедуры.

Модель с многокритериальным эндогенным переключением

Порядковый и мультиномиальный неслучайный отбор и эндогенное переключение

- Иногда целевых уравнений и латентных переменных может быть несколько:

$$y_{ji} = x_i \beta_j + \varepsilon_{ji} \quad z_{ji}^* = w_{ji} \gamma_j + u_{ji} \quad j \in \{0, \dots, J-1\}$$

- Порядковый и множественный отборы обычно выглядит как (соответственно):

$$y_i = \begin{cases} y_{0i}, & \text{если } z_{ji}^* < c_1 \\ y_{1i}, & \text{если } c_2 > z_{ji}^* \geq c_1 \\ \vdots \\ y_{(J-1)i}, & \text{если } z_{ji}^* \geq c_{J-1} \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} y_{0i}, & \text{если } z_{0i}^* \geq y_{1i} = z_{1i}^*, \dots, z_{0i}^* \geq z_{(J-1)i}^* \\ y_{1i}, & \text{если } z_{1i}^* \geq z_{0i}^*, \dots, z_{1i}^* \geq z_{(J-1)i}^* \\ \vdots \\ y_{(J-1)i}, & \text{если } z_{(J-1)i}^* \geq z_{0i}^*, \dots, z_{(J-1)i}^* \geq z_{(J-2)i}^* \end{cases}$$

Где $c_1 > c_2 > \dots > c_{J-1}$.

Модель с многокритериальным эндогенным переключением

Порядковый и мультиномиальный неслучайный отбор и эндогенное переключение

- Иногда целевых уравнений и латентных переменных может быть несколько:

$$y_{ji} = x_i \beta_j + \varepsilon_{ji} \quad z_{ji}^* = w_{ji} \gamma_j + u_{ji} \quad j \in \{0, \dots, J-1\}$$

- Порядковый и множественный отборы обычно выглядит как (соответственно):

$$y_i = \begin{cases} y_{0i}, & \text{если } z_{ji}^* < c_1 \\ y_{1i}, & \text{если } c_2 > z_{ji}^* \geq c_1 \\ \vdots \\ y_{(J-1)i}, & \text{если } z_{ji}^* \geq c_{J-1} \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} y_{0i}, & \text{если } z_{0i}^* \geq y_{1i} = z_{1i}^*, \dots, z_{0i}^* \geq z_{(J-1)i}^* \\ y_{1i}, & \text{если } z_{1i}^* \geq z_{0i}^*, \dots, z_{1i}^* \geq z_{(J-1)i}^* \\ \vdots \\ y_{(J-1)i}, & \text{если } z_{(J-1)i}^* \geq z_{0i}^*, \dots, z_{(J-1)i}^* \geq z_{(J-2)i}^* \end{cases}$$

Где $c_1 > c_2 > \dots > c_{J-1}$.

- Например, порядковый отбор возникает, когда уравнения зарплаты y_{ji} различаются в зависимости от уровня образования (базовое, бакалавриат и магистратура), а множественный – когда в зависимости от типа (гуманитарное, техническое, медицинское).