Микроэконометрика

Модели с эндогенным переключением

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021-2022

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.

Эндогенное переключение

Мотивация

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.
- Механизм формирования зарплаты (отдача от стажа и т.д.) может варьироваться в зависимости от наличия у индивида высшего образования. При этом может различаться отдача как от наблюдаемых, так и от ненаблюдаемых характеристик.

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.
- Механизм формирования зарплаты (отдача от стажа и т.д.) может варьироваться в зависимости от наличия у индивида высшего образования. При этом может различаться отдача как от наблюдаемых, так и от ненаблюдаемых характеристик.
- Идейно, эндогенное переключение проистекает из неслучайного отбора, поскольку имеется неслучайный отбор в те состояния (режимы), в которых наблюдается зависимая переменная.

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.
- Механизм формирования зарплаты (отдача от стажа и т.д.) может варьироваться в зависимости от наличия у индивида высшего образования. При этом может различаться отдача как от наблюдаемых, так и от ненаблюдаемых характеристик.
- Идейно, эндогенное переключение проистекает из неслучайного отбора, поскольку имеется неслучайный отбор в те состояния (режимы), в которых наблюдается зависимая переменная.
- Например, неслучайный отбор в число тех, кто получил высшее образование, определяет переключение между двумя типами зарплаты: при условии наличия высшего образования и без него.

- Имеются два целевых уравнения и уравнение, задающее переключение между ними:

$$\text{Целевое уравнение 1: } y_{1i}^{*} = x_i\beta_1 + \varepsilon_{1i}$$

$$\text{Целевое уравнение 0: } y_{0i}^{*} = x_i\beta_0 + \varepsilon_{0i}$$

$$\text{Уравнение переключения: } z_i^{*} = w_i\gamma + u_i$$

- Имеются два целевых уравнения и уравнение, задающее переключение между ними:

$$\text{Целевое уравнение 1: } y_{1i}^{*} = x_i\beta_1 + \varepsilon_{1i}$$

$$\text{Целевое уравнение 0: } y_{0i}^{*} = x_i\beta_0 + \varepsilon_{0i}$$

$$\text{Уравнение переключения: } z_i^{*} = w_i\gamma + u_i$$

- Наблюдаемое состояние целевого уравнения определяется эндогенным переключением, то есть зависит от z_i^{*}:

$$z_i = \begin{cases} 1, \text{ если } z_i^{*} \geq 0 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} \qquad y_i = \begin{cases} y_{1i}^{*}, \text{ если } z_i = 1 \\ y_{0i}^{*}, \text{ если } z_i = 0 \end{cases}$$

- Имеются два целевых уравнения и уравнение, задающее переключение между ними:

$$\text{Целевое уравнение 1: } y_{1i}^* = x_i\beta_1 + \varepsilon_{1i}$$
$$\text{Целевое уравнение 0: } y_{0i}^* = x_i\beta_0 + \varepsilon_{0i}$$
$$\text{Уравнение переключения: } z_i^* = w_i\gamma + u_i$$

- Наблюдаемое состояние целевого уравнения определяется эндогенным переключением, то есть зависит от z_i^*:

$$z_i = \begin{cases} 1, \text{ если } z_i^* \geq 0 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} \qquad y_i = \begin{cases} y_{1i}^*, \text{ если } z_i = 1 \\ y_{0i}^*, \text{ если } z_i = 0 \end{cases}$$

- Например, y_{1i}^* и y_{0i}^* могут отражать зарплату индивида при условии наличия или отсутствия у него высшего образования соответственно, а $z_i = 1$ в случаях, когда у индивида есть высшее образование. Различие в коэффициентах β_1 и β_0 отражает различную отдачу (влияние) от характеристик в зависимости от состояния. Например, отдача от стажа может быть выше для людей с высшим образованием.

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.
- Совместное распределение случайных ошибок целевых уравнений ε_{1i} и ε_{0i} не идентифицируемо, поскольку мы наблюдаем значение целевой переменной лишь в одном из состояний.

Эндогенное переключение

Совместное распределение случайных ошибок

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.
- Совместное распределение случайных ошибок целевых уравнений ε_{1i} и ε_{0i} не идентифицируемо, поскольку мы наблюдаем значение целевой переменной лишь в одном из состояний.
- Однако, для оценивания параметров модели достаточно ввести допущение о совместном распределении этих случайных ошибок со случайной ошибкой уравнения переключения u_i:

$$(u_i, \varepsilon_{ji}) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & \rho_j\sigma_j\\ \rho_j\sigma_j & \sigma_j^2\end{bmatrix}\right), \text{ где } j \in \{0, 1\}$$

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.
- Совместное распределение случайных ошибок целевых уравнений ε_{1i} и ε_{0i} не идентифицируемо, поскольку мы наблюдаем значение целевой переменной лишь в одном из состояний.
- Однако, для оценивания параметров модели достаточно ввести допущение о совместном распределении этих случайных ошибок со случайной ошибкой уравнения переключения u_i:

$$(u_i, \varepsilon_{ji}) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho_j\sigma_j \\ \rho_j\sigma_j & \sigma_j^2 \end{bmatrix}\right), \text{ где } j \in \{0, 1\}$$

- Дисперсия случайной ошибки σ_j^2 и ее корреляция со случайной ошибкой уравнения переключения ρ_j различаются в зависимости от состояния (режима) целевого уравнения, что, в частности, может быть обусловлено различием в отдаче (влиянии) от ненаблюдаемых характеристик (на целевой показатель).

- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E\left(y_i|w_i, x_i\right) = E\left(y^*_{z_i i}|z_i, w_i, x_i\right) = x_i\beta_{z_i} + E\left(\varepsilon_{z_i i}| - u_i \leq (2z_i - 1)w_i\gamma, w_i, x_i\right),$$

- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E\left(y_i|w_i, x_i\right) = E\left(y^*_{z_i i}|z_i, w_i, x_i\right) = x_i\beta_{z_i} + E\left(\varepsilon_{z_i i}| - u_i \leq (2z_i - 1)w_i\gamma, w_i, x_i\right),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E\left(\varepsilon_{z_i i}| - u_i \leq (2z_i - 1)w_i\gamma, w_i, x_i\right) = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\frac{\phi\left(w_i\gamma\right)}{\Phi\left((2z_i - 1)w_i\gamma\right)} = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\lambda_i,$$

- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E\left(y_i|w_i, x_i\right) = E\left(y^*_{z_i i}|z_i, w_i, x_i\right) = x_i\beta_{z_i} + E\left(\varepsilon_{z_i i}| - u_i \leq (2z_i - 1)w_i\gamma, w_i, x_i\right),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E\left(\varepsilon_{z_i i}| - u_i \leq (2z_i - 1)w_i\gamma, w_i, x_i\right) = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\frac{\phi\left(w_i\gamma\right)}{\Phi\left((2z_i - 1)w_i\gamma\right)} = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\lambda_i,$$

- В результате получаем регрессионные уравнения (где $j \in \{0, 1\}$ и $z_i = j$):

$$y^*_{ji} = x_i\beta_j + (2j - 1)\rho_j\sigma_j\lambda_i + v_{ji},$$

- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E\left(y_i|w_i,x_i\right)=E\left(y^*_{z_i i}|z_i,w_i,x_i\right)=x_i\beta_{z_i}+E\left(\varepsilon_{z_i i}|-u_i\leq(2z_i-1)w_i\gamma,w_i,x_i\right),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E\left(\varepsilon_{z_i i}|-u_i\leq(2z_i-1)w_i\gamma,w_i,x_i\right)=(2z_i-1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\frac{\phi\left(w_i\gamma\right)}{\Phi\left((2z_i-1)w_i\gamma\right)}=(2z_i-1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\lambda_i,$$

- В результате получаем регрессионные уравнения (где $j\in\{0,1\}$ и $z_i=j$):

$$y^*_{ji}=x_i\beta_j+(2j-1)\rho_j\sigma_j\lambda_i+v_{ji},\qquad v_{ji}=\varepsilon_{ji}-(2j-1)\rho_j\sigma_j\lambda_i\implies E(v_{ji}|x_i,w_i)=0$$

- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E\left(y_i|w_i,x_i\right)=E\left(y^*_{z_i i}|z_i,w_i,x_i\right)=x_i\beta_{z_i}+E\left(\varepsilon_{z_i i}|-u_i\leq(2z_i-1)w_i\gamma,w_i,x_i\right),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E\left(\varepsilon_{z_i i}|-u_i\leq(2z_i-1)w_i\gamma,w_i,x_i\right)=(2z_i-1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\frac{\phi\left(w_i\gamma\right)}{\Phi\left((2z_i-1)w_i\gamma\right)}=(2z_i-1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\lambda_i,$$

- В результате получаем регрессионные уравнения (где $j\in\{0,1\}$ и $z_i=j$):

$$y^*_{ji}=x_i\beta_j+(2j-1)\rho_j\sigma_j\lambda_i+v_{ji},\qquad v_{ji}=\varepsilon_{ji}-(2j-1)\rho_j\sigma_j\lambda_i\implies E(v_{ji}|x_i,w_i)=0$$

- Без учета λ_i при $\rho\neq0$ и наличии корреляции между λ_i и x_i МНК оценки коэффициентов β_j окажутся несостоятельными вследствие проблемы пропущенной переменной.

Оценивание
Двухшаговая процедура

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.

Оценивание

Двухшаговая процедура

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
  - **Первый шаг**: при помощи пробит модели оцениваются параметры γ. В силу инвариантности ММП оценок состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i\left(w_i\hat{\gamma}\right)$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
  - **Первый шаг**: при помощи пробит модели оцениваются параметры γ. В силу инвариантности ММП оценок состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i(w_i\hat{\gamma})$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.
  - **Второй шаг**: В регрессионное уравнение для y_{ji}^* подставляется $\hat{\lambda}_i$ в качестве дополнительного регрессора с коэффициентом $\rho_j\sigma_j$. Затем β_j и $\rho_j\sigma_j$ оцениваются при помощи МНК по выборке из наблюдений, для которых $z_i = j$.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
  - **Первый шаг**: при помощи пробит модели оцениваются параметры γ. В силу инвариантности ММП оценок состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i\left(w_i\hat{\gamma}\right)$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.
  - **Второй шаг**: В регрессионное уравнение для y_{ji}^{*} подставляется $\hat{\lambda}_i$ в качестве дополнительного регрессора с коэффициентом $\rho_j\sigma_j$. Затем β_j и $\rho_j\sigma_j$ оцениваются при помощи МНК по выборке из наблюдений, для которых $z_i = j$.
- Оценивание параметров $\hat{\sigma}_j^2$ и $\hat{\rho}_j$, а также асимптотической ковариационной матрицы оценок коэффициентов (с учетом гетероскедастичности и оценок первого шага) осуществляется по аналогии с двухшаговой процедурой Хекмана.

Оценивание

Двухшаговая процедура

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
  - **Первый шаг**: при помощи пробит модели оцениваются параметры γ. В силу инвариантности ММП оценок состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i(w_i\hat{\gamma})$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.
  - **Второй шаг**: В регрессионное уравнение для y_{ji}^* подставляется $\hat{\lambda}_i$ в качестве дополнительного регрессора с коэффициентом $\rho_j\sigma_j$. Затем β_j и $\rho_j\sigma_j$ оцениваются при помощи МНК по выборке из наблюдений, для которых $z_i = j$.
- Оценивание параметров $\hat{\sigma}_j^2$ и $\hat{\rho}_j$, а также асимптотической ковариационной матрицы оценок коэффициентов (с учетом гетероскедастичности и оценок первого шага) осуществляется по аналогии с двухшаговой процедурой Хекмана.
- Эффективность оценок данного метода в существенной степени зависит от наличия ограничений исключения.

- Функция правдоподобия:

$$L\left(\beta_1,\beta_0,\rho_1,\rho_0,\sigma_1,\sigma_0;y,z|X,W\right)=$$
$$=\prod_{i:z_i=1} f_{y_i|x_i,w_i}(y_i)P(z_i=1|y_i,x_i,w_i)\prod_{i:z_i=0} f_{y_i|x_i,w_i}(y_i)P(z_i=0|y_i,x_i,w_i)=$$

- Функция правдоподобия:

$$L\left(\beta_1, \beta_0, \rho_1, \rho_0, \sigma_1, \sigma_0; y, z|X, W\right) =$$

$$= \prod_{i:z_i=1} f_{y_i|x_i,w_i}(y_i)P(z_i = 1|y_i, x_i, w_i) \prod_{i:z_i=0} f_{y_i|x_i,w_i}(y_i)P(z_i = 0|y_i, x_i, w_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{z_i}} \phi\left(\frac{y_i - x_i\beta_{z_i}}{\sigma_{z_i}}\right) \Phi\left((2z_i - 1)\frac{\rho_{z_i}\left(y_i - x_i\beta_{z_i}\right)/\sigma_{z_i} + w_i\gamma}{\sqrt{1 - \rho_{z_i}^2}}\right)$$

- Функция правдоподобия:

$$L\left(\beta_1, \beta_0, \rho_1, \rho_0, \sigma_1, \sigma_0; y, z|X, W\right) =$$

$$= \prod_{i:z_i=1} f_{y_i|x_i,w_i}(y_i)P(z_i = 1|y_i, x_i, w_i) \prod_{i:z_i=0} f_{y_i|x_i,w_i}(y_i)P(z_i = 0|y_i, x_i, w_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{z_i}} \phi\left(\frac{y_i - x_i\beta_{z_i}}{\sigma_{z_i}}\right) \Phi\left((2z_i - 1)\frac{\rho_{z_i}\left(y_i - x_i\beta_{z_i}\right)/\sigma_{z_i} + w_i\gamma}{\sqrt{1-\rho_{z_i}^2}}\right)$$

- Преимущества и недостатки двухшаговой и ММП процедур оценивания аналогичны тем, что имеют место для модели с неслучайным отбором.

- Функция правдоподобия:

$$L\left(\beta_1, \beta_0, \rho_1, \rho_0, \sigma_1, \sigma_0; y, z|X, W\right) =$$

$$= \prod_{i:z_i=1} f_{y_i|x_i,w_i}(y_i)P(z_i = 1|y_i, x_i, w_i) \prod_{i:z_i=0} f_{y_i|x_i,w_i}(y_i)P(z_i = 0|y_i, x_i, w_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{z_i}}\phi\left(\frac{y_i - x_i\beta_{z_i}}{\sigma_{z_i}}\right)\Phi\left((2z_i - 1)\frac{\rho_{z_i}\left(y_i - x_i\beta_{z_i}\right)/\sigma_{z_i} + w_i\gamma}{\sqrt{1 - \rho_{z_i}^2}}\right)$$

- Преимущества и недостатки двухшаговой и ММП процедур оценивания аналогичны тем, что имеют место для модели с неслучайным отбором.
- Для каждого из уравнений процедура тестирования наличия неслучайного отбора сводится к проверке гипотез $H_0 : \rho_j\sigma_j = 0$ и $H_0 : \rho_j = 0$ для двухшаговой процедуры и ММП соответственно. Уравнение, в котором данная нулевая гипотеза не отвергается, можно оценить при помощи обычного МНК.

Предельные эффекты
Расчет

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное математическое ожидание имеет такой же вид, как в случае с обычной линейной регрессией:

$$\frac{\partial E\left(y_{ji}^{*}|x_i\right)}{\partial x_{ik}} = \beta_{jk}, \text{ где } j \in \{0, 1\}$$

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное математическое ожидание имеет такой же вид, как в случае с обычной линейной регрессией:

$$\frac{\partial E\left(y_{ji}^{*}|x_i\right)}{\partial x_{ik}} = \beta_{jk},\text{ где } j \in \{0,1\}$$

- Предельный эффект на условное математическое ожидание рассчитывается как:

$$\frac{\partial E\left(y_{ji}^{*}|z_i = 1, x_i, w_i\right)}{\partial x_{ik}} = \beta_{jk} - (2z_i - 1)\,\gamma_{*}\rho_j\sigma_j\delta\left((2z_i - 1)\,w_i\gamma\right),$$

$$\delta(a) = \lambda\,(a)\,(\lambda\,(a) + a)\,,$$

где γ_* является коэффициентом при x_{ki} в уравнении отбора, если x_{ki} входит в w_i. В противном случае $\gamma_* = 0$.

- Эффект воздействия z_i на целевую переменную i-го индивида определяется как:

$$\text{TE}_i = y_{1i} - y_{0i}$$

- Эффект воздействия z_i на целевую переменную i-го индивида определяется как:

$$\text{TE}_i = y_{1i} - y_{0i}$$

- Поскольку на практике мы наблюдаем либо y_{1i}, либо y_{0i}, то мы можем оценить лишь средний предельный эффект на подвергнутых воздействию, определяемый как:

$$\text{ATET} = E(y_{1i} - y_{0i}|z_i = 1, x_i, w_i) = E(y_{1i}|z_i = 1, x_i, w_i) - E(y_{0i}|z_i = 1, x_i, w_i) =$$
$$= x_i\left(\beta_1 - \beta_0\right) + \left(\rho_1\sigma_1 - \rho_0\sigma_0\right)\frac{\phi\left(w_i\gamma\right)}{\Phi\left(w_i\gamma\right)}$$

- Эффект воздействия z_i на целевую переменную i-го индивида определяется как:

$$\text{TE}_i = y_{1i} - y_{0i}$$

- Поскольку на практике мы наблюдаем либо y_{1i}, либо y_{0i}, то мы можем оценить лишь средний предельный эффект на подвергнутых воздействию, определяемый как:

$$\text{ATET} = E(y_{1i} - y_{0i}|z_i = 1, x_i, w_i) = E(y_{1i}|z_i = 1, x_i, w_i) - E(y_{0i}|z_i = 1, x_i, w_i) =$$
$$= x_i\left(\beta_1 - \beta_0\right) + \left(\rho_1\sigma_1 - \rho_0\sigma_0\right)\frac{\phi\left(w_i\gamma\right)}{\Phi\left(w_i\gamma\right)}$$

- В примере с высшим образованием ATET отражает разницу в ожидаемой зарплате индивида, который, в соответствии со своими характеристиками, должен получить высшее образование, в состояниях когда у него есть высшее образование и в состоянии, когда у него нет высшего образования.

- Полупараметрическое оценивание осуществляется по аналогии с моделью с неслучайным отбором.

- Полупараметрическое оценивание осуществляется по аналогии с моделью с неслучайным отбором.
- В частности, для оценивания можно применять метод Ньюи и метод Галланта и Ннчки.

Модель с эндогенным бинарным регрессором

Формулировка

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.

Модель с эндогенным бинарным регрессором
Формулировка

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.
- Это экивалентно существованию одного уравнения:

$$y_i = x_i\beta + \alpha z_i + \varepsilon_i,$$

где эндогенность z_i учитывается за счет корреляции между u_i и ε_i.

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.
- Это эквивалентно существованию одного уравнения:

$$y_i = x_i\beta + \alpha z_i + \varepsilon_i,$$

  где эндогенность z_i учитывается за счет корреляции между u_i и ε_i.
- Оценивание таких моделей по аналогии осуществляется при помощи метода максимального правдоподобия или с помощью двухшаговой процедуры, а ATET, как и сам эффект воздействия, будут совпадать с α.

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.
- Это экивалентно существованию одного уравнения:

$$y_i = x_i\beta + \alpha z_i + \varepsilon_i,$$

где эндогенность z_i учитывается за счет корреляции между u_i и ε_i.
- Оценивание таких моделей по аналогии осуществляется при помощи метода максимального правдоподобия или с помощью двухшаговой процедуры, а ATET, как и сам эффект воздействия, будут совпадать с α.
- Выбрать между данной моделью и моделью с эндогенным переключением можно при помощи LR теста, проверив гипотезу о том, что $\rho_0 = \rho_1$, $\sigma_0 = \sigma_1$, а также о том, что все коэффициенты β_1 и β_0, за исключением константы, совпадают.