

Микроэконометрика

Модели с эндогенным переключением

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021-2022

Эндогенное переключение

Мотивация

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.

Эндогенное переключение

Мотивация

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.

Эндогенное переключение

Мотивация

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.
- Механизм формирования зарплаты (отдача от стажа и т.д.) может варьироваться в зависимости от наличия у индивида высшего образования. При этом может различаться отдача как от наблюдаемых, так и от ненаблюдаемых характеристик.

Эндогенное переключение

Мотивация

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.
- Механизм формирования зарплаты (отдача от стажа и т.д.) может варьироваться в зависимости от наличия у индивида высшего образования. При этом может различаться отдача как от наблюдаемых, так и от ненаблюдаемых характеристик.
- Идейно, эндогенное переключение проистекает из неслучайного отбора, поскольку имеется неслучайный отбор в те состояния (режимы), в которых наблюдается зависимая переменная.

Эндогенное переключение

Мотивация

- Иногда исследователь наблюдает лишь одно из двух возможных состояний зависимой переменной.
- Например, исследователь наблюдает либо зарплату индивида в состоянии, когда у него есть высшее образование, либо когда у него нет высшего образования.
- Механизм формирования зарплаты (отдача от стажа и т.д.) может варьироваться в зависимости от наличия у индивида высшего образования. При этом может различаться отдача как от наблюдаемых, так и от ненаблюдаемых характеристик.
- Идейно, эндогенное переключение проистекает из неслучайного отбора, поскольку имеется неслучайный отбор в те состояния (режимы), в которых наблюдается зависимая переменная.
- Например, неслучайный отбор в число тех, кто получил высшее образование, определяет переключение между двумя типами зарплаты: при условии наличия высшего образования и без него.

Эндогенное переключение

Формулировка

- Имеются два целевых уравнения и уравнение, задающее переключение между ними:

$$\text{Целевое уравнение 1: } y_{1i}^* = x_i\beta_1 + \varepsilon_{1i}$$

$$\text{Целевое уравнение 0: } y_{0i}^* = x_i\beta_0 + \varepsilon_{0i}$$

$$\text{Уравнение переключения: } z_i^* = w_i\gamma + u_i$$

Эндогенное переключение

Формулировка

- Имеются два целевых уравнения и уравнение, задающее переключение между ними:

$$\text{Целевое уравнение 1: } y_{1i}^* = x_i\beta_1 + \varepsilon_{1i}$$

$$\text{Целевое уравнение 0: } y_{0i}^* = x_i\beta_0 + \varepsilon_{0i}$$

$$\text{Уравнение переключения: } z_i^* = w_i\gamma + u_i$$

- Наблюдаемое состояние целевого уравнения определяется эндогенным переключением, то есть зависит от z_i^* :

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если } z_i^* \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} y_{1i}^*, & \text{если } z_i = 1 \\ y_{0i}^*, & \text{если } z_i = 0 \end{cases}$$

Эндогенное переключение

Формулировка

- Имеются два целевых уравнения и уравнение, задающее переключение между ними:

$$\text{Целевое уравнение 1: } y_{1i}^* = x_i\beta_1 + \varepsilon_{1i}$$

$$\text{Целевое уравнение 0: } y_{0i}^* = x_i\beta_0 + \varepsilon_{0i}$$

$$\text{Уравнение переключения: } z_i^* = w_i\gamma + u_i$$

- Наблюдаемое состояние целевого уравнения определяется эндогенным переключением, то есть зависит от z_i^* :

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если } z_i^* \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} y_{1i}^*, & \text{если } z_i = 1 \\ y_{0i}^*, & \text{если } z_i = 0 \end{cases}$$

- Например, y_{1i}^* и y_{0i}^* могут отражать зарплату индивида при условии наличия или отсутствия у него высшего образования соответственно, а $z_i = 1$ в случаях, когда у индивида есть высшее образование. Различие в коэффициентах β_1 и β_0 отражает различную отдачу (влияние) от характеристик в зависимости от состояния. Например, отдача от стажа может быть выше для людей с высшим образованием.

Эндогенное переключение

Совместное распределение случайных ошибок

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.

Эндогенное переключение

Совместное распределение случайных ошибок

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.
- Совместное распределение случайных ошибок целевых уравнений ε_{1i} и ε_{0i} не идентифицируемо, поскольку мы наблюдаем значение целевой переменной лишь в одном из состояний.

Эндогенное переключение

Совместное распределение случайных ошибок

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.
- Совместное распределение случайных ошибок целевых уравнений ε_{1i} и ε_{0i} не идентифицируемо, поскольку мы наблюдаем значение целевой переменной лишь в одном из состояний.
- Однако, для оценивания параметров модели достаточно ввести допущение о совместном распределении этих случайных ошибок со случайной ошибкой уравнения переключения u_i :

$$(u_i, \varepsilon_{ji}) \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho_j \sigma_j \\ \rho_j \sigma_j & \sigma_j^2 \end{bmatrix} \right), \text{ где } j \in \{0, 1\}$$

Эндогенное переключение

Совместное распределение случайных ошибок

- Предположим, что совместное распределение случайных ошибок является многомерным нормальным.
- Совместное распределение случайных ошибок целевых уравнений ε_{1i} и ε_{0i} не идентифицируемо, поскольку мы наблюдаем значение целевой переменной лишь в одном из состояний.
- Однако, для оценивания параметров модели достаточно ввести допущение о совместном распределении этих случайных ошибок со случайной ошибкой уравнения переключения u_i :

$$(u_i, \varepsilon_{ji}) \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho_j \sigma_j \\ \rho_j \sigma_j & \sigma_j^2 \end{bmatrix} \right), \text{ где } j \in \{0, 1\}$$

- Дисперсия случайной ошибки σ_j^2 и ее корреляция со случайной ошибкой уравнения переключения ρ_j различаются в зависимости от состояния (режима) целевого уравнения, что, в частности, может быть обусловлено различием в отдаче (влиянии) от ненаблюдаемых характеристик (на целевой показатель).

- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E(y_i | w_i, x_i) = E(y_{z_i}^* | z_i, w_i, x_i) = x_i \beta_{z_i} + E(\varepsilon_{z_i i} | -u_i \leq (2z_i - 1)w_i \gamma, w_i, x_i),$$

- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E(y_i | w_i, x_i) = E(y_{z_i}^* | z_i, w_i, x_i) = x_i \beta_{z_i} + E(\varepsilon_{z_i i} | -u_i \leq (2z_i - 1)w_i \gamma, w_i, x_i),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E(\varepsilon_{z_i i} | -u_i \leq (2z_i - 1)w_i \gamma, w_i, x_i) = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i} \frac{\phi(w_i \gamma)}{\Phi((2z_i - 1)w_i \gamma)} = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\lambda_i,$$

- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E(y_i | w_i, x_i) = E(y_{z_i}^* | z_i, w_i, x_i) = x_i \beta_{z_i} + E(\varepsilon_{z_i i} | -u_i \leq (2z_i - 1)w_i \gamma, w_i, x_i),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E(\varepsilon_{z_i i} | -u_i \leq (2z_i - 1)w_i \gamma, w_i, x_i) = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i} \frac{\phi(w_i \gamma)}{\Phi((2z_i - 1)w_i \gamma)} = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\lambda_i,$$

- В результате получаем регрессионные уравнения (где $j \in \{0, 1\}$ и $z_i = j$):

$$y_{ji} = x_i \beta_j + (2z_i - 1)\rho_j \sigma_j \lambda_i + v_{ji},$$

- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E(y_i | w_i, x_i) = E(y_{z_i}^* | z_i, w_i, x_i) = x_i \beta_{z_i} + E(\varepsilon_{z_i i} | -u_i \leq (2z_i - 1)w_i \gamma, w_i, x_i),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E(\varepsilon_{z_i i} | -u_i \leq (2z_i - 1)w_i \gamma, w_i, x_i) = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i} \frac{\phi(w_i \gamma)}{\Phi((2z_i - 1)w_i \gamma)} = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\lambda_i,$$

- В результате получаем регрессионные уравнения (где $j \in \{0, 1\}$ и $z_i = j$):

$$y_{ji} = x_i \beta_j + (2z_i - 1)\rho_j \sigma_j \lambda_i + v_{ji}, \quad v_{ji} = \varepsilon_{ji} - (2z_i - 1)\rho_j \sigma_j \lambda_i \implies E(v_{ji} | x_i, w_i) = 0$$

- Поскольку y_i отражает лишь одно из наблюдаемых состояний, то:

$$E(y_i | w_i, x_i) = E(y_{z_i}^* | z_i, w_i, x_i) = x_i \beta_{z_i} + E(\varepsilon_{z_i i} | -u_i \leq (2z_i - 1)w_i \gamma, w_i, x_i),$$

где по свойствам усеченного двумерного нормального распределения:

$$E(\varepsilon_{z_i i} | -u_i \leq (2z_i - 1)w_i \gamma, w_i, x_i) = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i} \frac{\phi(w_i \gamma)}{\Phi((2z_i - 1)w_i \gamma)} = (2z_i - 1)\rho_{z_i}\sigma_{z_i}\lambda_i,$$

- В результате получаем регрессионные уравнения (где $j \in \{0, 1\}$ и $z_i = j$):

$$y_{ji} = x_i \beta_j + (2z_i - 1)\rho_j \sigma_j \lambda_i + v_{ji}, \quad v_{ji} = \varepsilon_{ji} - (2z_i - 1)\rho_j \sigma_j \lambda_i \implies E(v_{ji} | x_i, w_i) = 0$$

- Без учета λ_i при $\rho \neq 0$ и наличии корреляции между λ_i и x_i МНК оценки коэффициентов β_j окажутся несостоятельными вследствие проблемы пропущенной переменной.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
 - **Первый шаг:** при помощи пробит модели оцениваются параметры γ . В силу инвариантности ММП оценок состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i(w_i\hat{\gamma})$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
 - **Первый шаг:** при помощи пробит модели оцениваются параметры γ . В силу инвариантности ММП состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i(w_i\hat{\gamma})$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.
 - **Второй шаг:** В регрессионное уравнение для y_{ji}^* подставляется $\hat{\lambda}_i$ в качестве дополнительного регрессора с коэффициентом $\rho_j\sigma_j$. Затем β_j и $\rho_j\sigma_j$ оцениваются при помощи МНК по выборке из наблюдений, для которых $z_i = j$.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
 - **Первый шаг:** при помощи пробит модели оцениваются параметры γ . В силу инвариантности ММП оценок состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i(w_i\hat{\gamma})$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.
 - **Второй шаг:** В регрессионное уравнение для y_{ji}^* подставляется $\hat{\lambda}_i$ в качестве дополнительного регрессора с коэффициентом $\rho_j\sigma_j$. Затем β_j и $\rho_j\sigma_j$ оцениваются при помощи МНК по выборке из наблюдений, для которых $z_i = j$.
- Оценивание параметров $\hat{\sigma}_j^2$ и $\hat{\rho}_j$, а также асимптотической ковариационной матрицы оценок коэффициентов (с учетом гетероскедастичности и оценок первого шага) осуществляется по аналогии с двухшаговой процедурой Хекмана.

- Процедура оценивания аналогична двухшаговому методу Хекмана и производится по отдельности для каждого из целевых уравнений.
- Двухшаговая процедура оценивания:
 - **Первый шаг:** при помощи пробит модели оцениваются параметры γ . В силу инвариантности ММП оценок состоятельная оценка λ_i рассчитывается как $\hat{\lambda}_i = \lambda_i(w_i\hat{\gamma})$. Этот шаг совпадает для обоих уравнений.
 - **Второй шаг:** В регрессионное уравнение для y_{ji}^* подставляется $\hat{\lambda}_i$ в качестве дополнительного регрессора с коэффициентом $\rho_j\sigma_j$. Затем β_j и $\rho_j\sigma_j$ оцениваются при помощи МНК по выборке из наблюдений, для которых $z_i = j$.
- Оценивание параметров $\hat{\sigma}_j^2$ и $\hat{\rho}_j$, а также асимптотической ковариационной матрицы оценок коэффициентов (с учетом гетероскедастичности и оценок первого шага) осуществляется по аналогии с двухшаговой процедурой Хекмана.
- Эффективность оценок данного метода в существенной степени зависит от наличия ограничений исключения.

- Функция правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(\beta_1, \beta_0, \rho_1, \rho_0, \sigma_1, \sigma_0; y, z | X, W) = \\ = \prod_{i: z_i=1} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 1 | y_i, x_i, w_i) \prod_{i: z_i=0} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 0 | y_i, x_i, w_i) = \end{aligned}$$

- Функция правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(\beta_1, \beta_0, \rho_1, \rho_0, \sigma_1, \sigma_0; y, z | X, W) &= \\ &= \prod_{i: z_i=1} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 1 | y_i, x_i, w_i) \prod_{i: z_i=0} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 0 | y_i, x_i, w_i) = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{z_i}} \phi\left(\frac{y_i - x_i \beta_{z_i}}{\sigma_{z_i}}\right) \Phi\left((2z_i - 1) \frac{\rho_{z_i} (y_i - x_i \beta_{z_i}) / \sigma_{z_i} + w_i \gamma}{\sqrt{1 - \rho_{z_i}^2}}\right) \end{aligned}$$

- Функция правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(\beta_1, \beta_0, \rho_1, \rho_0, \sigma_1, \sigma_0; y, z | X, W) &= \\ &= \prod_{i: z_i=1} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 1 | y_i, x_i, w_i) \prod_{i: z_i=0} f_{y_i|x_i, w_i}(y_i) P(z_i = 0 | y_i, x_i, w_i) = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{z_i}} \phi\left(\frac{y_i - x_i \beta_{z_i}}{\sigma_{z_i}}\right) \Phi\left((2z_i - 1) \frac{\rho_{z_i} (y_i - x_i \beta_{z_i}) / \sigma_{z_i} + w_i \gamma}{\sqrt{1 - \rho_{z_i}^2}}\right) \end{aligned}$$

- Преимущества и недостатки двухшаговой и ММП процедур оценивания аналогичны тем, что имеют место для модели с неслучайным отбором.

- Функция правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(\beta_1, \beta_0, \rho_1, \rho_0, \sigma_1, \sigma_0; y, z|X, W) &= \\ &= \prod_{i:z_i=1} f_{y_i|x_i,w_i}(y_i)P(z_i = 1|y_i, x_i, w_i) \prod_{i:z_i=0} f_{y_i|x_i,w_i}(y_i)P(z_i = 0|y_i, x_i, w_i) = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{z_i}} \phi\left(\frac{y_i - x_i\beta_{z_i}}{\sigma_{z_i}}\right) \Phi\left((2z_i - 1) \frac{\rho_{z_i}(y_i - x_i\beta_{z_i})/\sigma_{z_i} + w_i\gamma}{\sqrt{1 - \rho_{z_i}^2}}\right) \end{aligned}$$

- Преимущества и недостатки двухшаговой и ММП процедур оценивания аналогичны тем, что имеют место для модели с неслучайным отбором.
- Для каждого из уравнений процедура тестирования наличия неслучайного отбора сводится к проверке гипотез $H_0 : \rho_j \sigma_j = 0$ и $H_0 : \rho_j = 0$ для двухшаговой процедуры и ММП соответственно. Уравнение, в котором данная нулевая гипотеза не отвергается, можно оценить при помощи обычного МНК.

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное математическое ожидание имеет такой же вид, как в случае с обычной линейной регрессией:

$$\frac{\partial E(y_{ji}^* | x_i)}{\partial x_{ik}} = \beta_{jk}, \text{ где } j \in \{0, 1\}$$

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное математическое ожидание имеет такой же вид, как в случае с обычной линейной регрессией:

$$\frac{\partial E(y_{ji}^* | x_i)}{\partial x_{ik}} = \beta_{jk}, \text{ где } j \in \{0, 1\}$$

- Предельный эффект на условное математическое ожидание рассчитывается как:

$$\frac{\partial E(y_{ji}^* | z_i = 1, x_i, w_i)}{\partial x_{ik}} = \beta_{jk} - \gamma_* \rho_j \sigma_j \delta((2z_i - 1) w_i \gamma), \quad \delta(a) = \lambda(a)(\lambda(a) + a)$$

где γ_* является коэффициентом при x_{ki} в уравнении отбора, если x_{ki} входит в w_i . В противном случае $\gamma_* = 0$.

Средний эффект воздействия

Формулировка

- Эффект воздействия z_i на целевую переменную i -го индивида определяется как:

$$TE_i = y_{1i} - y_{0i}$$

Средний эффект воздействия

Формулировка

- Эффект воздействия z_i на целевую переменную i -го индивида определяется как:

$$TE_i = y_{1i} - y_{0i}$$

- Поскольку на практике мы наблюдаем либо y_{1i} , либо y_{0i} , то мы можем оценить лишь средний предельный эффект на подвергнутых воздействию, определяемый как:

$$\begin{aligned} ATET &= E(y_{1i} - y_{0i} | z_i = 1, x_i, w_i) = E(y_{1i} | z_i = 1, x_i, w_i) - E(y_{0i} | z_i = 1, x_i, w_i) = \\ &= x_i (\beta_1 - \beta_0) + (\rho_1 \sigma_1 - \rho_0 \sigma_0) \frac{\phi(w_i \gamma)}{\Phi(w_i \gamma)} \end{aligned}$$

Средний эффект воздействия

Формулировка

- Эффект воздействия z_i на целевую переменную i -го индивида определяется как:

$$TE_i = y_{1i} - y_{0i}$$

- Поскольку на практике мы наблюдаем либо y_{1i} , либо y_{0i} , то мы можем оценить лишь средний предельный эффект на подвергнутых воздействию, определяемый как:

$$\begin{aligned} ATET &= E(y_{1i} - y_{0i} | z_i = 1, x_i, w_i) = E(y_{1i} | z_i = 1, x_i, w_i) - E(y_{0i} | z_i = 1, x_i, w_i) = \\ &= x_i (\beta_1 - \beta_0) + (\rho_1 \sigma_1 - \rho_0 \sigma_0) \frac{\phi(w_i \gamma)}{\Phi(w_i \gamma)} \end{aligned}$$

- В примере с высшим образованием ATET отражает разницу в ожидаемой зарплате индивида, который, в соответствии со своими характеристиками, должен получить высшее образование, в состояниях когда у него есть высшее образование и в состоянии, когда у него нет высшего образования.

- Полупараметрическое оценивание осуществляется по аналогии с моделью с случайным отбором.

- Полупараметрическое оценивание осуществляется по аналогии с моделью с случайным отбором.
- В частности, для оценивания можно применять метод Ньюи и метод Галланта и Нички.

Модель с эндогенным бинарным регрессором

Формулировка

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.

Модель с эндогенным бинарным регрессором

Формулировка

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.
- Это эквивалентно существованию одного уравнения:

$$y_i = x_i\beta + \alpha z_i + \varepsilon_i,$$

где эндогенность z_i учитывается за счет корреляции между u_i и ε_i .

Модель с эндогенным бинарным регрессором

Формулировка

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.
- Это эквивалентно существованию одного уравнения:

$$y_i = x_i\beta + \alpha z_i + \varepsilon_i,$$

где эндогенность z_i учитывается за счет корреляции между u_i и ε_i .

- Оценивание таких моделей по аналогии осуществляется при помощи метода максимального правдоподобия или с помощью двухшаговой процедуры, а АТЕТ, как и сам эффект воздействия, будут совпадать с α .

Модель с эндогенным бинарным регрессором

Формулировка

- На практике в исследованиях часто предполагается, что уравнения различаются лишь константами.
- Это эквивалентно существованию одного уравнения:

$$y_i = x_i\beta + \alpha z_i + \varepsilon_i,$$

где эндогенность z_i учитывается за счет корреляции между u_i и ε_i .

- Оценивание таких моделей по аналогии осуществляется при помощи метода максимального правдоподобия или с помощью двухшаговой процедуры, а АТЕТ, как и сам эффект воздействия, будут совпадать с α .
- Выбрать между данной моделью и моделью с эндогенным переключением можно при помощи LR теста, проверив гипотезу о том, что $\rho_0 = \rho_1$, $\sigma_0 = \sigma_1$, а также о том, что все коэффициенты β_1 и β_0 , за исключением константы, совпадают.