Микроэконометрика

Модели с усечением и цензурированием

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021-2022

Усеченная регрессия (truncated regression)

Мотивация

- Часто значение зависимой переменной наблюдается лишь при попадании в определенную область, например:

Усеченная регрессия (truncated regression)

Мотивация

- Часто значение зависимой переменной наблюдается лишь при попадании в определенную область, например:
  - Сумма заказа в интернет магазине известна лишь для индивидов, сделавших заказ на сумму не менее минимально установленного магазином порога.

Усеченная регрессия (truncated regression)

Мотивация

- Часто значение зависимой переменной наблюдается лишь при попадании в определенную область, например:
  - Сумма заказа в интернет магазине известна лишь для индивидов, сделавших заказ на сумму не менее минимально установленного магазином порога.
  - Информация о ежемесячных доходах может быть собрана по результатам опроса лишь людей со средним достатком, например, с доходом от ста тысяч до миллиона рублей.

Усеченная регрессия (truncated regression)

Мотивация

- Часто значение зависимой переменной наблюдается лишь при попадании в определенную область, например:
  - Сумма заказа в интернет магазине известна лишь для индивидов, сделавших заказ на сумму не менее минимально установленного магазином порога.
  - Информация о ежемесячных доходах может быть собрана по результатам опроса лишь людей со средним достатком, например, с доходом от ста тысяч до миллиона рублей.
  - В выборке может содержаться информация о расходах на покупку мороженого лишь среди тех домохозяйств, которые приобрели хотя бы одно мороженое.

- Часто значение зависимой переменной наблюдается лишь при попадании в определенную область, например:
    - Сумма заказа в интернет магазине известна лишь для индивидов, сделавших заказ на сумму не менее минимально установленного магазином порога.
    - Информация о ежемесячных доходах может быть собрана по результатам опроса лишь людей со средним достатком, например, с доходом от ста тысяч до миллиона рублей.
    - В выборке может содержаться информация о расходах на покупку мороженого лишь среди тех домохозяйств, которые приобрели хотя бы одно мороженое.
- Такого рода зависимые переменные именуются усеченными и для их анализа используются специальные эконометрические методы.

- Рассмотрим нормальную случайную величину $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

- Рассмотрим нормальную случайную величину $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
- Случайная величина $Y = X|\left(a \leq X \leq b\right)$ будет иметь усеченное нормальное распределение с нижней (левой) и верхней (правой) границами усечения a и b соответственно, где $b > a$.

Усеченная регрессия (truncated regression)

Усеченное нормальное распределение (truncated normal distribution)

- Рассмотрим нормальную случайную величину $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
- Случайная величина $Y = X|\left(a \leq X \leq b\right)$ будет иметь усеченное нормальное распределение с нижней (левой) и верхней (правой) границами усечения a и b соответственно, где $b > a$.
- Математическое ожидание:

$$E(Y) = \mu + \frac{\phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}\sigma$$

- Рассмотрим нормальную случайную величину $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
- Случайная величина $Y = X|\left(a \leq X \leq b\right)$ будет иметь усеченное нормальное распределение с нижней (левой) и верхней (правой) границами усечения a и b соответственно, где $b > a$.
- Математическое ожидание:

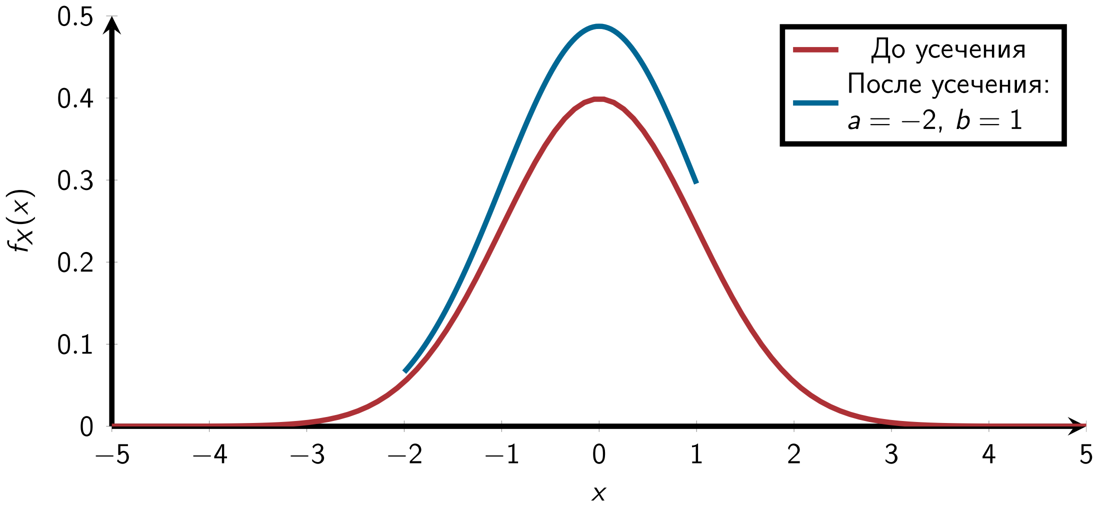
$$E(Y) = \mu + \frac{\phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}\sigma$$

- Дисперсия:

$$Var(Y) = \sigma^2\left(1 + \frac{\frac{a-\mu}{\sigma}\phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \frac{b-\mu}{\sigma}\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)} - \left(\frac{\phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}\right)^2\right) < \sigma^2$$

Усеченная регрессия (truncated regression)

Визуализация усеченного нормального распределения



Усеченная регрессия (truncated regression)

Формулировка

- Имеется латентная переменная:

$$y_i^* = x_i\beta + \varepsilon_i,$$

где случайные ошибки ε_i одинаково распределены и независимы.

Усеченная регрессия (truncated regression)

Формулировка

- Имеется латентная переменная:

$$y_i^* = x_i\beta + \varepsilon_i,$$

где случайные ошибки ε_i одинаково распределены и независимы.

- Исследователь наблюдает лишь зависимую переменную, подвергнутую усечению:

$$y_i = \begin{cases} y_i^*, \text{ если } a \leq y_i^* \leq b \\ \text{не наблюдается, в противном случае} \end{cases},$$

где a и b именуются нижней (левой) и верхней (правой) границами усечения соответственно.

Усеченная регрессия (truncated regression)

Формулировка

- Имеется латентная переменная:

$$y_i^* = x_i\beta + \varepsilon_i,$$

где случайные ошибки ε_i одинаково распределены и независимы.

- Исследователь наблюдает лишь зависимую переменную, подвергнутую усечению:

$$y_i = \begin{cases} y_i^*, \text{ если } a \leq y_i^* \leq b \\ \text{не наблюдается, в противном случае} \end{cases},$$

где a и b именуются нижней (левой) и верхней (правой) границами усечения соответственно.

- Если исследователь изучает факторы, влияющие на ежемесячные доходы индивидов по выборке, собранной по результатам опроса лишь индивидов с доходом от ста тысяч до миллиона рублей, то $a = 10^5$ и $b = 10^6$.

Усеченная регрессия (truncated regression)

Формулировка

- Имеется латентная переменная:

$$y_i^* = x_i\beta + \varepsilon_i,$$

  где случайные ошибки ε_i одинаково распределены и независимы.

- Исследователь наблюдает лишь зависимую переменную, подвергнутую усечению:

$$y_i = \begin{cases} y_i^*, \text{ если } a \leq y_i^* \leq b \\ \text{не наблюдается, в противном случае} \end{cases},$$

  где a и b именуются нижней (левой) и верхней (правой) границами усечения соответственно.

- Если исследователь изучает факторы, влияющие на ежемесячные доходы индивидов по выборке, собранной по результатам опроса лишь индивидов с доходом от ста тысяч до миллиона рублей, то $a = 10^5$ и $b = 10^6$.

- При изучении факторов, влияющих на объем покупок в интернет магазине при минимальной сумме заказа в 500 рублей, границы усечения могут быть заданы как $a = 500$ и $b = \infty$.

- Условное математическое ожидание имеет вид:

$$E(y_i^*|a \leq y_i^* \leq b) = x_i\beta + E(\varepsilon_i|a - x_i\beta \leq \varepsilon_i \leq b - x_i\beta)$$

- Условное математическое ожидание имеет вид:

$$E(y_i^*|a \leq y_i^* \leq b) = x_i\beta + E(\varepsilon_i|a - x_i\beta \leq \varepsilon_i \leq b - x_i\beta)$$

- Для простоты предположим, что случайные ошибки имеют нормальное распределение $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$, откуда по формуле математического ожидания усеченного нормального распределения получаем:

$$E\left(\varepsilon_i|a - x_i\beta \leq \varepsilon_i \leq b - x_i\beta\right) = \frac{\phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right)}\sigma = \sigma\lambda_i$$

Усеченная регрессия (truncated regression)

Проблема оценивания

- Условное математическое ожидание имеет вид:

$$E(y_i^*|a \leq y_i^* \leq b) = x_i\beta + E(\varepsilon_i|a - x_i\beta \leq \varepsilon_i \leq b - x_i\beta)$$

- Для простоты предположим, что случайные ошибки имеют нормальное распределение $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$, откуда по формуле математического ожидания усеченного нормального распределения получаем:

$$E\left(\varepsilon_i|a - x_i\beta \leq \varepsilon_i \leq b - x_i\beta\right) = \frac{\phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right)}\sigma = \sigma\lambda_i$$

- Очевидно, что в данном случае условное математическое ожидание случайной ошибки коррелирует с регрессорами x_i, что влечет несостоятельность МНК оценок β. При этом λ_i можно рассматривать как пропущенную значимую переменную с коэффициентом σ (omitted variable bias).

- Параметры β и стандартное отклонение случайной ошибки σ можно оценить при помощи метода максимального правдоподобия.

- Параметры β и стандартное отклонение случайной ошибки σ можно оценить при помощи метода максимального правдоподобия.
- Функция правдоподобия с учетом усечения будет иметь вид:

$$L\left(\beta,\sigma;y|X\right)=\prod_{i=1}^{n}f_{y_i^*|\left(a\leq y_i^*\leq b,x_i\right)}\left(y_i^*\right)=\prod_{i=1}^{n}f_{\varepsilon_i|\left(a-x_i\beta\leq\varepsilon_i\leq b-x_i\beta,x_i\right)}\left(y_i^*-x_i\beta\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i^*-x_i\beta}{\sigma}\right)/\left[\Phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right)\right]$$

- Параметры β и стандартное отклонение случайной ошибки σ можно оценить при помощи метода максимального правдоподобия.
- Функция правдоподобия с учетом усечения будет иметь вид:

$$L\left(\beta,\sigma;y|X\right)=\prod_{i=1}^{n}f_{y_i^*|\left(a\leq y_i^*\leq b,x_i\right)}\left(y_i^*\right)=\prod_{i=1}^{n}f_{\varepsilon_i|\left(a-x_i\beta\leq\varepsilon_i\leq b-x_i\beta,x_i\right)}\left(y_i^*-x_i\beta\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i^*-x_i\beta}{\sigma}\right)/\left[\Phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right)\right]$$

- Оценки усеченной регрессии могут оказаться несостоятельными при нарушении допущения о нормальном распределении случайной ошибки или при наличии гетероскедастичности.

- Параметры β и стандартное отклонение случайной ошибки σ можно оценить при помощи метода максимального правдоподобия.
- Функция правдоподобия с учетом усечения будет иметь вид:

$$L\left(\beta,\sigma;y|X\right)=\prod_{i=1}^{n}f_{y_i^*|\left(a\leq y_i^*\leq b,x_i\right)}\left(y_i^*\right)=\prod_{i=1}^{n}f_{\varepsilon_i|\left(a-x_i\beta\leq\varepsilon_i\leq b-x_i\beta,x_i\right)}\left(y_i^*-x_i\beta\right)=$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i^*-x_i\beta}{\sigma}\right)/\left[\Phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right)\right]$$

- Оценки усеченной регрессии могут оказаться несостоятельными при нарушении допущения о нормальном распределении случайной ошибки или при наличии гетероскедастичности.
- Модель можно по аналогии оценивать при альтернативных (в том числе гибких) предположениях о распределении случайной ошибки.

Усеченная регрессия (truncated regression)

Оценивание

- Параметры β и стандартное отклонение случайной ошибки σ можно оценить при помощи метода максимального правдоподобия.
- Функция правдоподобия с учетом усечения будет иметь вид:

$$L(\beta, \sigma; y|X) = \prod_{i=1}^{n} f_{y_i^*|(a\leq y_i^*\leq b, x_i)}(y_i^*) = \prod_{i=1}^{n} f_{\varepsilon_i|(a-x_i\beta\leq\varepsilon_i\leq b-x_i\beta, x_i)}(y_i^* - x_i\beta) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i^* - x_i\beta}{\sigma}\right) / \left[\Phi\left(\frac{b - x_i\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - x_i\beta}{\sigma}\right)\right]$$

- Оценки усеченной регрессии могут оказаться несостоятельными при нарушении допущения о нормальном распределении случайной ошибки или при наличии гетероскедастичности.
- Модель можно по аналогии оценивать при альтернативных (в том числе гибких) предположениях о распределении случайной ошибки.
- Для учета гетероскедастичности σ может быть специфицирована по аналогии с гетероскедастичной пробит моделью.

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное математическое ожидание имеет такой же вид, как в случае с обычной линейной регрессией:

$$\frac{\partial E\left(y_i^*|x_i\right)}{\partial x_{ik}} = \beta_k$$

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное математическое ожидание имеет такой же вид, как в случае с обычной линейной регрессией:

$$\frac{\partial E\left(y_i^*|x_i\right)}{\partial x_{ik}} = \beta_k$$

- Предельный эффект на усеченное математическое ожидание рассчитывается как:

$$\frac{\partial E\left(y_i^*|a < y_i^* < b\right)}{\partial x_{ik}} = \beta_k \underbrace{Var\left(\varepsilon_i|a - x_i\beta < \varepsilon_i < b - x_i\beta\right)/\sigma^2}_{0\ <\ \text{эффект усечения}\ <\ 1} =$$

Усеченная регрессия (truncated regression)

Предельные эффекты на математическое ожидание

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное математическое ожидание имеет такой же вид, как в случае с обычной линейной регрессией:

$$\frac{\partial E\left(y_i^*|x_i\right)}{\partial x_{ik}} = \beta_k$$

- Предельный эффект на усеченное математическое ожидание рассчитывается как:

$$\frac{\partial E\left(y_i^*|a < y_i^* < b\right)}{\partial x_{ik}} = \beta_k \underbrace{Var\left(\varepsilon_i|a - x_i\beta < \varepsilon_i < b - x_i\beta\right)/\sigma^2}_{0 < \text{эффект усечения} < 1} =$$

$$= \beta_k\left(1 + \frac{\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right) - \frac{b-x_i\beta}{\sigma}\phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right)} - \left(\frac{\phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right)}\right)^2\right)$$

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное математическое ожидание имеет такой же вид, как в случае с обычной линейной регрессией:

$$\frac{\partial E\left(y_i^*|x_i\right)}{\partial x_{ik}} = \beta_k$$

- Предельный эффект на усеченное математическое ожидание рассчитывается как:

$$\frac{\partial E\left(y_i^*|a < y_i^* < b\right)}{\partial x_{ik}} = \beta_k \underbrace{Var\left(\varepsilon_i|a - x_i\beta < \varepsilon_i < b - x_i\beta\right)/\sigma^2}_{0\,<\,\text{эффект усечения}\,<\,1} =$$

$$= \beta_k\left(1 + \frac{\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right) - \frac{b-x_i\beta}{\sigma}\phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right)} - \left(\frac{\phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right)}\right)^2\right)$$

Данный предельный эффект меньше β_k и совпадает с ним по знаку, но его величина зависит от $x_i\beta$.

- Предельный эффект переменной x_{ik} на вероятность усечения рассчитывается как:

$$\frac{\partial P\left(a < y_i^* < b | x_i\right)}{\partial x_{ik}} = \frac{\beta_k}{\sigma}\left(\phi\left(\frac{a - x_i\beta}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b - x_i\beta}{\sigma}\right)\right)$$

- Предельный эффект переменной x_{ik} на вероятность усечения рассчитывается как:

$$\frac{\partial P\left(a < y_i^* < b|x_i\right)}{\partial x_{ik}} = \frac{\beta_k}{\sigma}\left(\phi\left(\frac{a - x_i\beta}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b - x_i\beta}{\sigma}\right)\right)$$

- Знак данного предельного эффекта может не совпадать со знаком β_k, поскольку разница функций плотности может оказаться как положительной, так и отрицательной.

- Помимо усечения в данных также часто встречается цензурирование – когда исследователю доступна некоторая информация об объектах, не попавших в выборку, но неизвестны точные значения зависимой переменной. Ситуации, в которых встречается цензурирование, часто схожи с теми, в которых имеет место усечение.

- Помимо усечения в данных также часто встречается цензурирование – когда исследователю доступна некоторая информация об объектах, не попавших в выборку, но неизвестны точные значения зависимой переменной. Ситуации, в которых встречается цензурирование, часто схожи с теми, в которых имеет место усечение.
- Рассмотрим разницу между усечением и цензурированием на нескольких примерах:
  - В усеченной выборке имеется информация лишь об индивидах с положительной заработной платой, а в цензурированной также могут иметься характеритики неработающих индивидов, у которых зарплата равна нулю.

Модель Тобина

Цензурирование

- Помимо усечения в данных также часто встречается цензурирование – когда исследователю доступна некоторая информация об объектах, не попавших в выборку, но неизвестны точные значения зависимой переменной. Ситуации, в которых встречается цензурирование, часто схожи с теми, в которых имеет место усечение.
- Рассмотрим разницу между усечением и цензурированием на нескольких примерах:
    - В усеченной выборке имеется информация лишь об индивидах с положительной заработной платой, а в цензурированной также могут иметься характеритики неработающих индивидов, у которых зарплата равна нулю.
    - В усеченной выборке имеется информация о расходах на театр лишь для тех индивидов, которые ходят в театр, а в цензурированной выборке также известны характеристики индивидов, которые вообще не посещают театр.

- Помимо усечения в данных также часто встречается цензурирование – когда исследователю доступна некоторая информация об объектах, не попавших в выборку, но неизвестны точные значения зависимой переменной. Ситуации, в которых встречается цензурирование, часто схожи с теми, в которых имеет место усечение.
- Рассмотрим разницу между усечением и цензурированием на нескольких примерах:
  - В усеченной выборке имеется информация лишь об индивидах с положительной заработной платой, а в цензурированной также могут иметься характеритики неработающих индивидов, у которых зарплата равна нулю.
  - В усеченной выборке имеется информация о расходах на театр лишь для тех индивидов, которые ходят в театр, а в цензурированной выборке также известны характеристики индивидов, которые вообще не посещают театр.
  - Число проданных билетов на стадионе с ограниченным числом мест скорее подходит под цензурирование, чем под усечение, поскольку обычно имеется информация о случаях, когда стадион был полностью заполнен.

Модель Тобина
Цензурирование

- Помимо усечения в данных также часто встречается цензурирование – когда исследователю доступна некоторая информация об объектах, не попавших в выборку, но неизвестны точные значения зависимой переменной. Ситуации, в которых встречается цензурирование, часто схожи с теми, в которых имеет место усечение.
- Рассмотрим разницу между усечением и цензурированием на нескольких примерах:
  - В усеченной выборке имеется информация лишь об индивидах с положительной заработной платой, а в цензурированной также могут иметься характеритики неработающих индивидов, у которых зарплата равна нулю.
  - В усеченной выборке имеется информация о расходах на театр лишь для тех индивидов, которые ходят в театр, а в цензурированной выборке также известны характеристики индивидов, которые вообще не посещают театр.
  - Число проданных билетов на стадионе с ограниченным числом мест скорее подходит под цензурирование, чем под усечение, поскольку обычно имеется информация о случаях, когда стадион был полностью заполнен.
- Модели, построенные на цензурированных данных, инкорпорируют больший объем информации, чем модели, построенные на схожих усеченных данных. Поэтому оценки моделей с цензурированием обычно эффективней оценок моделей с усечением.

- При цензурировании зависимая переменная имеет вид:

$$y_i = \begin{cases} a, \text{ если } y_i^* < a \\ y_i^*, \text{ если } a \leq y_i^* \leq b \\ b, \text{ если } y_i^* > b \end{cases}$$

- При цензурировании зависимая переменная имеет вид:

$$y_i = \begin{cases} a\text{, если } y_i^* < a \\ y_i^*\text{, если } a \leq y_i^* \leq b \\ b\text{, если } y_i^* > b \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание зависимой переменной имеет вид:

$$E\left(y_i|x_i\right) = P\left(y_i^* \leq a|x_i\right) \times a + P\left(a < y_i^* < b|x_i\right) \times E\left(y_i^*|a < y_i^* < b, x_i\right) + P\left(y_i^* \geq b|x_i\right) \times b =$$
$$= P(\varepsilon_i < a - x_i\beta|x_i) \times a + x_i\beta + E\left(\varepsilon_i|a - x_i\beta < \varepsilon_i < b - x_i\beta, x_i\right) + P(\varepsilon_i > b - x_i\beta|x_i) \times b$$

- При цензурировании зависимая переменная имеет вид:

$$y_i = \begin{cases} a, \text{ если } y_i^* < a \\ y_i^*, \text{ если } a \leq y_i^* \leq b \\ b, \text{ если } y_i^* > b \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание зависимой переменной имеет вид:

$$E\left(y_i|x_i\right) = P\left(y_i^* \leq a|x_i\right) \times a + P\left(a < y_i^* < b|x_i\right) \times E\left(y_i^*|a < y_i^* < b, x_i\right) + P\left(y_i^* \geq b|x_i\right) \times b =$$
$$= P(\varepsilon_i < a - x_i\beta|x_i) \times a + x_i\beta + E\left(\varepsilon_i|a - x_i\beta < \varepsilon_i < b - x_i\beta, x_i\right) + P(\varepsilon_i > b - x_i\beta|x_i) \times b$$

- Условное математическое ожидание случайной ошибки аналогично тому, что было получено в случае с усеченной регрессией, из-за чего МНК оценки коэффициентов β окажутся несостоятельными.

- По аналогии с усеченной регрессией оценивание параметров β и σ осуществляется с помощью метода максимального правдоподобия со следующей функцией правдоподобия:

$$L(\beta,\sigma;y|X)=\prod_{i:a<y_i<b}f_{y_i}(y_i)\prod_{i:y_i=a}P(y_i=a)\prod_{i:y_i=b}P(y_i=b)=$$

- По аналогии с усеченной регрессией оценивание параметров β и σ осуществляется с помощью метода максимального правдоподобия со следующей функцией правдоподобия:

$$L(\beta, \sigma; y|X) = \prod_{i:a<y_i<b} f_{y_i}(y_i) \prod_{i:y_i=a} P(y_i = a) \prod_{i:y_i=b} P(y_i = b) =$$

$$= \prod_{i:a<y_i<b} f_{\varepsilon_i}(y_i - x_i\beta) \prod_{i:y_i=a} P(\varepsilon_i < a - x_i\beta) \prod_{i:y_i=b} P(\varepsilon_i > b - x_i\beta) =$$

- По аналогии с усеченной регрессией оценивание параметров β и σ осуществляется с помощью метода максимального правдоподобия со следующей функцией правдоподобия:

$$L\left(\beta,\sigma;y|X\right)=\prod_{i:a<y_i<b}f_{y_i}\left(y_i\right)\prod_{i:y_i=a}P\left(y_i=a\right)\prod_{i:y_i=b}P\left(y_i=b\right)=$$

$$=\prod_{i:a<y_i<b}f_{\varepsilon_i}\left(y_i-x_i\beta\right)\prod_{i:y_i=a}P\left(\varepsilon_i<a-x_i\beta\right)\prod_{i:y_i=b}P\left(\varepsilon_i>b-x_i\beta\right)=$$

$$=\prod_{i:a<y_i<b}\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i-x_i\beta}{\sigma}\right)\prod_{i:y_i=a}\Phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right)\prod_{i:y_i=b}1-\Phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right)$$

- По аналогии с усеченной регрессией оценивание параметров β и σ осуществляется с помощью метода максимального правдоподобия со следующей функцией правдоподобия:

$$L(\beta,\sigma;y|X)=\prod_{i:a<y_i<b}f_{y_i}(y_i)\prod_{i:y_i=a}P(y_i=a)\prod_{i:y_i=b}P(y_i=b)=$$

$$=\prod_{i:a<y_i<b}f_{\varepsilon_i}(y_i-x_i\beta)\prod_{i:y_i=a}P(\varepsilon_i<a-x_i\beta)\prod_{i:y_i=b}P(\varepsilon_i>b-x_i\beta)=$$

$$=\prod_{i:a<y_i<b}\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i-x_i\beta}{\sigma}\right)\prod_{i:y_i=a}\Phi\left(\frac{a-x_i\beta}{\sigma}\right)\prod_{i:y_i=b}1-\Phi\left(\frac{b-x_i\beta}{\sigma}\right)$$

- Альтернативные формы распределения случайной ошибки и гетероскедастичность могут быть учтены по аналогии с усеченной регрессией.

- По аналогии с усеченной регрессией оценивание параметров β и σ осуществляется с помощью метода максимального правдоподобия со следующей функцией правдоподобия:

$$L(\beta, \sigma; y|X) = \prod_{i:a<y_i<b} f_{y_i}(y_i) \prod_{i:y_i=a} P(y_i = a) \prod_{i:y_i=b} P(y_i = b) =$$

$$= \prod_{i:a<y_i<b} f_{\varepsilon_i}(y_i - x_i\beta) \prod_{i:y_i=a} P(\varepsilon_i < a - x_i\beta) \prod_{i:y_i=b} P(\varepsilon_i > b - x_i\beta) =$$

$$= \prod_{i:a<y_i<b} \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - x_i\beta}{\sigma}\right) \prod_{i:y_i=a} \Phi\left(\frac{a - x_i\beta}{\sigma}\right) \prod_{i:y_i=b} 1 - \Phi\left(\frac{b - x_i\beta}{\sigma}\right)$$

- Альтернативные формы распределения случайной ошибки и гетероскедастичность могут быть учтены по аналогии с усеченной регрессией.
- Для того, чтобы гарантировать нахождение глобального максимума данной функции правдоподобия, ее может сделать вогнутой за счет репараметризации Олсена, оценивая вместо β и σ такие β^* и σ^*, что $\beta = \beta^*/\sigma^* =$ и $\sigma = 1/\sigma^*$.

- Состоятельные оценки параметров модели Тобина (с цензурированием) можно также получить и с помощью усеченной регрессии.

- Состоятельные оценки параметров модели Тобина (с цензурированием) можно также получить и с помощью усеченной регрессии.
- Однако, оценки усеченной регрессии окажутся менее эффективными, поскольку игнорируют информацию о случаях, когда $y_i = a$ и $y_i = b$.

Модель Тобина

Сравнение модели Тобина и усеченной регрессии

- Состоятельные оценки параметров модели Тобина (с цензурированием) можно также получить и с помощью усеченной регрессии.
- Однако, оценки усеченной регрессии окажутся менее эффективными, поскольку игнорируют информацию о случаях, когда $y_i = a$ и $y_i = b$.
- Поскольку модель Тобина и усеченная регрессия оцениваются на разных выборках, то их непосредственное сравнение по информационным критериям является некорректным. В качестве альтернативы эти модели можно сравнить, например, по предсказательной силе, однако по возможности следует предпочитать модель Тобина в силу большей эффективности ее оценок.

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное $E(y_i^*|x_i)$ и усеченное $E(y_i^*|a < y_i^* < b)$ математические ожидания латентной переменной аналогичны тем, что были рассмотрены в случае с усеченной регрессией.

Модель Тобина

Предельные эффекты

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное $E(y_i^*|x_i)$ и усеченное $E(y_i^*|a < y_i^* < b)$ математические ожидания латентной переменной аналогичны тем, что были рассмотрены в случае с усеченной регрессией.
- Предельный эффект на математическое ожидание наблюдаемой (с учетом цензурирования) зависимой переменной рассчитывается как:

$$\frac{\partial E\left(y_i|x_i\right)}{\partial x_{ik}} = \beta P(a < y_i^* < b|x_i) = \beta\left(\Phi\left(\frac{b - x_i\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - x_i\beta}{\sigma}\right)\right)$$

  Данный предельный эффект меньше β_k и совпадает с ним по знаку, но его величина зависит от $x_i\beta$. То, что данный предельный эффект меньше, интуитивно связано с тем, что при попадании зависимой переменной под цензурирование малое изменнеие регрессора не изменит значения зависимой переменной.

- Предельный эффект переменной x_{ik} на обычное $E(y_i^*|x_i)$ и усеченное $E(y_i^*|a < y_i^* < b)$ математические ожидания латентной переменной аналогичны тем, что были рассмотрены в случае с усеченной регрессией.
- Предельный эффект на математическое ожидание наблюдаемой (с учетом цензурирования) зависимой переменной рассчитывается как:

$$\frac{\partial E\left(y_i|x_i\right)}{\partial x_{ik}} = \beta P(a < y_i^* < b|x_i) = \beta\left(\Phi\left(\frac{b - x_i\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - x_i\beta}{\sigma}\right)\right)$$

  Данный предельный эффект меньше β_k и совпадает с ним по знаку, но его величина зависит от $x_i\beta$. То, что данный предельный эффект меньше, интуитивно связано с тем, что при попадании зависимой переменной под цензурирование малое измененеие регрессора не изменит значения зависимой переменной.
- Предельные эффекты на вероятность цензурирования считаются как:

$$\frac{\partial P(y_i = b|x_i)}{\partial x_{ik}} = \frac{\beta_k}{\sigma}\phi\left(\frac{x_i\beta - b}{\sigma}\right), \qquad \frac{\partial P(y_i = a|x_i)}{\partial x_{ik}} = -\frac{\beta_k}{\sigma}\phi\left(\frac{a - x_i\beta}{\sigma}\right)$$