Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2021-2022

Дедлайн: домашнее задание отправляется в **pdf** формате на почту семинариста. В копию письма необходимо поставить ассистента группы.

Почты семинаристов, на которые следует отправлять домашние задания:

1. Погорелова Полина Вячеславовна – tvis.we.2021@gmail.com (группы 202 и 203)
2. Потанин Богдан Станиславович – studypotanin@gmail.com (группа 201)
3. Слаболицкий Илья Сергеевич – tvis.fweia.hse@gmail.com (группы 204, 205 и 206)

Почты ассистентов, на которые следует продублировать домашнее задание (поставить в копию при отправке):

1. Романова Дарья Юрьевна – dyuromanova_1@edu.hse.ru (группа 201)
2. Афонина Ангелина Геннадьевна – agafonina@edu.hse.ru (группа 202)
3. Макаров Антон Андреевич – aamakarov_5@edu.hse.ru (группа 203)
4. Атласов Александр Александрович – aaatlasov@edu.hse.ru (группа 204)
5. Костромина Алина Максимовна – amkostromina@edu.hse.ru (группа 205)
6. Краевский Артем Андреевич – aakraevskiy@edu.hse.ru (группа 206)

Домашнее задание должно быть отправлено на указанные почты в **pdf** формате до **22.10.2021, 8.00 (утра)** включительно (по московскому времени). Тема письма должна иметь следующий формат: "МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ", например, "МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 2".

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №2

Дискретные случайные величины

Задание №1. Штангист. (31 балл)

Штангист может поднять штангу весом в 100 или 200 килограмм с вероятностями 0.8 и 0.5 соответственно. У него есть две попытки. Сперва он пытается поднять более легкую штангу. Если у него это успешно получается, то при второй попытке он пытается поднять более тяжелую штангу. В противном случае он вновь пытается поднять более легкую штангу. В качестве итогового результата штангисту засчитывают наибольший из поднятых ими за две попытки весов (в килограммах). Если штангисту за две попытки ни разу не удается поднять штангу, то в качестве итогового результата ему засчитывают 0 килограмм.

1. При помощи таблицы задайте закон распределения случайной величины, отражающей итоговый результат штангиста (наибольший из поднятых им весов в килограммах). **(3 балла)**

2. Рассчитайте математическое ожидание и дисперсию результата штангиста. **(2 балла)**

3. Посчитайте математическое ожидание результата штангиста, при условии, что ему удалось успешно поднять хотя бы одну штангу. **(8 баллов)**

4. За участие в соревнованиях штангист получает 1000 рублей. Также, дополнительно он получает по 10 рублей за каждый килограмм, входящий в итоговый результат (например, если наибольший из поднятых штангистом весов оказался равен 200, то штангист получит дополнительные 2000 рублей). Рассчитайте математическое ожидание и дисперсию денежного вознаграждения штангиста (в рублях). **(7 баллов)**

5. Предположим, что соревнуются два одинаковых штангиста, идентичных тому, что рассматривался в предыдущих пунктах. Победителем объявляется штангист, показавший больший результат. Если же они продемонстрировали идентичные результаты, то их текущие результаты обнуляются и им даются по две новые попытки (которые они также начинают с более легкой штанги). Соответствующая процедура повторяется до тех пор, пока не будет выявлен победитель. Найдите математическое ожидание общего числа попыток, которые совершит первый из этих штангистов (обратите внимание, что каждый раз штангист совершает по две попытки). **(5 баллов)**

6. В предыдущем пункте найдите математическое ожидание результата (в килограммах) победителя (его результата в том раунде, в котором он победил). **(5 баллов)**

7. Штангист может поднять штангу весом от 100/3 до 1100/3 килограмм. Вероятность поднять штангу весом $x \in [100/3, 1100/3]$ составляет $(1.1 - 0.003x)$. Примерьте на себя роль спортивного менеджера: подберите штангисту такую легкую и тяжелую штанги (также, допустимо подбирать штанги равного веса), что математическое ожидание его результата окажется максимальным. **(1 балл)**

Примечание: это несложный, но довольно громоздкий бонусный пункт.
Указание: для максимизации удобно воспользоваться wolframalpha, приводить выражения к красивому виду не обязательно, достаточно записать математическое ожидание как функцию от веса легкой и тяжелой штанг, сформулировать (при этом решать ее аналитически не нужно) оптимизационную задачу и записать ответ (при условии грамотно сформулированной оптимизационной задачи балл за неправильный численный ответ не снимается). Формулируя оптимизационную задачу важно указать надлежащие ограничения на оптимизируемые параметры.

Решение

1. Через x_y обозначим событие, при котором на y-й попытке штангисту удалось поднять x килограммовую штангу. Обозначим случайную величину через X и зададим закон ее распределения:

$$P(X=0)=P(\overline{100}_1\cap\overline{100}_2)=(1-0.8)\times(1-0.8)=0.04$$
$$P(X=100)=P(100_1\cap\overline{200}_2)+P(\overline{100}_1\cap 100_2)=0.8\times(1-0.5)+(1-0.8)\times 0.8=0.56$$
$$P(X=200)=P(100_1\cap 200_2)=0.8\times 0.5=0.4$$

Зададим закон распределения в форме таблицы:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 100 & 200 \\ P(X=x) & 0.04 & 0.56 & 0.4 \end{bmatrix}$$

2. Нетрудно догадаться, что:

$$E(X)=0\times 0.04+100\times 0.56+200\times 0.4=136$$
$$E(X^2)=0^2\times 0.04+100^2\times 0.56+200^2\times 0.4=21600$$
$$Var(X^2)=21600-136^2=3104$$

3. Для начала посчитаем условные вероятности:

$$P(X=100|X>0)=\frac{P(X=100)}{P(X=100)+P(X=200)}=\frac{0.56}{0.56+0.4}=\frac{7}{12}$$
$$P(X=200|X>0)=\frac{P(X=200)}{P(X=100)+P(X=200)}=\frac{0.4}{0.56+0.4}=\frac{5}{12}$$

Используя полученные вероятности рассчитаем условное математическое ожидание:

$$E(X|X>0)=P(X=100|X>0)\times 100+P(X=200|X>0)\times 200=$$
$$=\frac{7}{12}\times 100+\frac{5}{12}\times 200=\frac{425}{3}\approx 141.67$$

4. Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии получаем:

$$E(10X + 1000) = 10E(X) + 1000 = 10 \times 136 + 1000 = 2360$$

$$Var(10X + 1000) = 100Var(X) = 100 \times 3104 = 310400$$

5. Через Y обозначим количество раз, когда первый и второй штангисты соревнуются между собой. Через A обозначим событие, при котором в первом же раунде происходит ничья. Поскольку штангисты идентичные и, очевидно, что их попытки независимы, вероятность ничьей может быть рассчитана следующим образом:

$$P(A) = P(X = 0)^2 + P(X = 100)^2 + P(X = 200)^2 = 0.04^2 + 0.56^2 + 0.4^2 = 0.4752$$

Применяя метод первого шага получаем:

$$E(Y) = E(Y|A)P(A) + E(Y|\overline{A})P(\overline{A}) = (E(Y) + 1) \times 0.4752 + 1 \times (1 - 0.4752)$$

Решая соответствующее равенство для $E(Y)$ получаем, что $E(Y) = 1.90549$

Поскольку каждый раз штангист совершает по 2 попытки, то искомое математическое ожидание составит:

$$E(2Y) = 2 \times 1.90549 = 3.81098$$

6. Результат победителя обозначим как случайную величину Z. Обратим внимание, что:

$$E(Z|\overline{A}) = P(Z = 0|\overline{A}) \times 0 + P(Z = 100|\overline{A}) \times 100 + P(Z = 200|\overline{A}) \times 200 =$$

$$= \frac{2P(X_1 = 100 \cap X_2 = 0)}{1 - 0.4752} \times 100 +$$

$$+ \frac{2P(X_1 = 200 \cap X_2 = 0) + 2P(X_1 = 200 \cap X_2 = 100)}{1 - 0.4752} \times 200 =$$

$$= \frac{2 \times 0.56 \times 0.04}{1 - 0.4752} \times 100 + \frac{2 \times 0.4 \times 0.04 + 2 \times 0.4 \times 0.56}{1 - 0.4752} \times 200 = \frac{7850}{41} \approx 191.46341$$

Вновь воспользуемся методом первого шага:

$$E(Z) = E(Z|A)P(A) + E(Z|\overline{A})P(\overline{A}) = E(Z) \times 0.4752 + \frac{7850}{41} \times (1 - 0.4752)$$

Решая соответствующее равенство получаем, что безусловное математическое ожидание оказывается равно условному $E(Z) = \frac{7850}{41} \approx 191.46341$.

7. Обозначим подбираемые веса штанг через a и b, где $b \geq a$. Найдем закон распределения при соответствующих весах:

$$P(X = 0) = (1 - (1.1 - 0.003a)) \times (1 - (1.1 - 0.003a)) = (0.003a - 0.1)^2$$

$$P(X = a) = (1.1 - 0.003a) \times (1 - (1.1 - 0.003b)) + (1 - (1.1 - 0.003a)) \times (1.1 - 0.003a)$$

$$P(X = b) = (1.1 - 0.003a) \times (1.1 - 0.003b)$$

Запишем математическое ожидание:

$$E(X) = [(1.1 - 0.003a) \times (1 - (1.1 - 0.003b)) +$$
$$+ (1 - (1.1 - 0.003a)) \times (1.1 - 0.003a)] \times a + (1.1 - 0.003a) \times (1.1 - 0.003b) \times b$$

Необходимо максимизировать соответствующее математическое ожидание по a и b при ограничениях на вероятности:

$$0 \leq (1.1 - 0.003a) \leq 1 \text{ и } 0 \leq (1.1 - 0.003b) \leq 1$$

По результатам максимизации[1] получаем, что $a \approx 194.772$ и $b \approx 280.72$.

Проверка в R:

```
# Число симуляций
n <- 100000
# Итоговые результаты
weights <- c(0, 100, 200)
# Вероятности результатов
probs <- c(0.04, 0.56, 0.4)
# Симулируем результаты обоих штангистов
s1 <- sample(weights, n,
             prob = probs, replace = TRUE)
s2 <- sample(weights, n,
             prob = probs, replace = TRUE)
# Векторы для сохранения числа попыток
# и веса, поднятого победителем в последнем раунде
attempt <- rep(1, n)
win <- rep(NA, n)
for (i in 1:n)
{
  # Штангисты соревнуются, до тех пор, пока
  # их результаты не станут отличаться
  while(s1[i] == s2[i])
  {
    attempt[i] <- attempt[i] + 1
    s1[i] <- sample(weights, 1,
                    prob = probs, replace = TRUE)
    s2[i] <- sample(weights, 1,
                    prob = probs, replace = TRUE)
  }
  # Определяем результат победителя в раунде,
  # в котором он победил
  win[i] <- max(s1[i], s2[i])
```

[1] maximize [(1.1-0.003a)*(1-(1.1-0.003b))+(1-(1.1-0.003a))*(1.1-0.003a)]*a + (1.1-0.003a)*(1.1-0.003b)*b for 1.1-0.003b <= 1, 1.1-0.003b >= 0,1.1-0.003a >= 0,1.1-0.003a <= 1

```
}
# пункт 1
probs
# пункт 2
mean(s1)
var(s1)
# пункт 3
mean(s1[s1 > 0])
# пункт 4
mean(10 * s1 + 1000)
var(10 * s1 + 1000)
# пункт 5
mean(2 * attempt)
# пункт 6
mean(win)
```

Задание №2. Курочка Ряба. (30 баллов)

Курочка Ряба несет золотые яйца. Число золотых яиц, которые она сносит за день, является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона. Сумма первого и второго начальных моментов этой случайной величины равняется 15. Число снесенных ранее золотых яиц никак не влияет на число снесенных позже. Стоимость одного золотого яйца составляет 10 монет.

1. Найдите дисперсию стоимости (в монетах) снесенных курочкой Рябой за день золотых яиц. **(5 баллов)**

2. Определите, с какой вероятностью курочка Ряба снесет за день не менее трех золотых яиц. **(3 баллов)**

3. Рассчитай вероятность того, что курочка Ряба снесла хотя бы одно золотое яйцо, если известно, что она снесла менее трех золотых яиц. **(5 баллов)**

4. Определите, с какой вероятностью за 2 дня (суммарно) курочка Ряба снесет ровно 5 яиц. **(2 баллов)**

5. Посчитайте вероятность, с которой хотя бы в один из двух дней курочка Ряба снесет ровно 3 яйца. **(5 баллов)**

6. Из каждого золотого яйца с вероятностью 0.3 может вылупиться золотой дракоцып. Найдите математическое ожидание числа драконоцыпов, которые могут вылупиться из снесенных Курочкой Рябой за день золотых яиц, если известно, что Курочка Ряба снесла менее трех яиц. **(10 баллов)**

Решение

1. Обозначим через X случайную величину, отражающую число яиц, которое курочка Ряба сносит за день. Из условия известно, что $X \sim Pois(\lambda)$. Найдем параметр данного распределения:

$$E(X) + E(X^2) = 15 \implies E(X) + Var(X) + E(X)^2 = 15 \implies \lambda + \lambda + \lambda^2 = 15$$

Решая соответствующее квадратное уравнение получаем, что $\lambda \in \{-5, 3\}$. Однако, параметр λ не может быть отрицательным, а значит $\lambda = 3$.

Поскольку стоимость каждого золотого яйца составляет 10 монет, то общая стоимость может быть выражена как случайная величина $10X$, дисперсия которой имеет вид:

$$Var(10X) = 100Var(X) = 100 \times 3 = 300$$

2. Сперва найдем вероятность обратного события:

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-3}\frac{3^0}{0!} + e^{-3}\frac{3^1}{1!} + e^{-3}\frac{3^2}{2!} \approx 0.42319$$

Исходя из полученного результата имеем:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) \approx 1 - 0.42319 = 0.57681$$

3. Используя формулу условной вероятности получаем:

$$P(X \geq 1|X < 3) = \frac{P(1 \leq X < 3)}{P(X < 3)} \approx \frac{P(X = 1) + P(X = 2)}{0.42319} =$$

$$= \frac{e^{-3}\frac{3^1}{1!} + e^{-3}\frac{3^2}{2!}}{0.42319} \approx 0.882$$

4. Обозначим через $X_i \sim Pois(3)$ число золотых яиц, снесенных Курочкой Рябой в i-й день. Применяя свойство воспроизводимости получаем, что:

$$(X_1 + X_2) \sim Pois(3 + 3) = Pois(6)$$

В результате мы можем посчитать искомую вероятность:

$$P(X_1 + X_2 = 5) = e^{-6}\frac{6^5}{5!} \approx 0.16062$$

5. Применяя формулу объединения событий, а также независимость случайных величин X_1 и X_2 получаем:

$$P(X_1 = 3 \cup X_2 = 3) = P(X_1 = 3) + P(X_2 = 3) - P(X_1 = 3 \cap X_2 = 3) =$$

$$P(X_1 = 3) + P(X_2 = 3) - P(X_1 = 3)P(X_2 = 3) = e^{-3}\frac{3^3}{3!} + e^{-3}\frac{3^3}{3!} - e^{-3}\frac{3^3}{3!} \times e^{-3}\frac{3^3}{3!} \approx 0.398$$

Аналогичный ответ можно получить и воспользовавшись формулой Моргана:

$$P(X_1 = 3 \cup X_2 = 3) = 1 - P(X_1 \neq 3 \cap X_2 \neq 3) = 1 - P(X_1 \neq 3)P(X_2 \neq 3) =$$

$$= 1 - (1 - P(X_1 = 3))(1 - P(X_2 = 3)) = 1 - \left(1 - e^{-3}\frac{3^3}{3!}\right)\left(1 - e^{-3}\frac{3^3}{3!}\right) \approx 0.398$$

6. Обозначим через Y случайную величину, отражающую число вылупившихся драконоцыпов. Обратим внимание, что $(Y|X = x) \sim B(x, 0.3)$, откуда $E(Y|X = x) = 0.3x$. Пользуясь данным наблюдением рассчитаем соответствующее условное математическое ожидание:

$$E(Y|X < 3) =$$

$$= E(Y|X < 3 \cap X = 0)P(X = 0|X < 3) + E(Y|X < 3 \cap X = 1)P(X = 1|X < 3)+$$

$$+E(Y|X < 3 \cap X = 2)P(X = 2|X < 3) =$$

$$= E(Y|X = 0)P(X = 0|X < 3)+E(Y|X = 1)P(X = 1|X < 3)+E(Y|X = 2)P(X = 2|X < 3) =$$

$$= (0 \times 0.3) \times \frac{e^{-3}\frac{3^0}{0!}}{0.42319} + (1 \times 0.3) \times \frac{e^{-3}\frac{3^1}{1!}}{0.42319} + (2 \times 0.3) \times \frac{e^{-3}\frac{3^2}{2!}}{0.42319} \approx 0.42353$$

Проверка в R:

```
# Число симуляций
n <- 1000000
# Задаем параметр распределения яйценостности
# Курочки Рябы
lambda <- 3
# Курочка Ряба откладывает золотые яйца
  # первый день
eggs <- rpois(n, lambda)
  # второй день
eggs2 <- rpois(n, lambda)
# Из золотых яиц появляются драконыцыпы
dragons <- rbinom(n, eggs, 0.3)
# пункт 1
var(10 * eggs)
# пункт 2
mean(eggs >= 3)
# пункт 3
mean((eggs >= 1)[eggs < 3])
# пункт 4
mean((eggs + eggs2) == 5)
# пункт 5
mean((eggs == 3) | (eggs2 == 3))
# пункт 6
mean(dragons[eggs < 3])
```

Задание №3. Маршрутка. (15 баллов)

В пустую маршрутку зашли 10 человек. Маршрутка следует на протяжении 5 остановок (не считая той, на которой зашли пассажиры) и останавливается на остановке лишь в том случае, если хотя бы один из пассажиров просит высадить его на этой остановке. Каждый пассажир с равной вероятностью и независимо от других пассажиров может выйти на той или иной остановке[2].

[2]Пассажиры ведут себя обычным образом: всегда выходят на той остановке, на которой просят остановиться водителя маршрутки.

1. Вычислите математическое ожидание числа остановок маршрутки. **(10 баллов)**

   Подсказка: представьте случайную величину, отражающую общее число остановок как сумму некоторых случайных величин.

2. Рассчитайте вероятность того, что все пассажиры выйдут на первых трех остановках. **(3 балла)**

3. Вычислите вероятность того, что все пассажиры выйдут на первых трех остановках, при условии, что маршрутка сделала ровно две остановки. **(2 балла)**

Решение

1. Случайную величину, отражающую общее число остановок маршрутки, обозначим как X. Через X_i, где $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, обозначим случайные величины, принимающие значение 1, если на остановке вышел хотя бы один пассажир и 0 – в противном случае. Через A_j обозначая событие, в соответствии с которым на 1-й остановке выходит j-й из 10-ти пассажиров. Обращая внимание на то, что по условию соответствующие события независимы, рассмотрим закон распределения случайной величины X_1:

   $$P(X_1 = 1) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}) = 1 - P(\overline{A}_1) \times P(\overline{A}_2) \times \cdots \times P(\overline{A}_{10}) =$$
   $$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0.89263$$
   $$P(X_1 = 0) = 1 - P(X_1 = 0) \approx 1 - 0.89263 = 0.10737$$

   Исходя из информации о распределении найдем математическое ожидание соответствующей случайной величины:

   $$E(X_1) = P(X_1 = 1) \times 1 + P(X_1 = 0) \times 0 \approx 1 \times 0.89263 + 0 \times 0.10737 = 0.89263$$

   Поскольку пассажиры независимо друг от друга и с равной вероятностью могут выходить на любой из остановок, то X_i будут одинаково распределены, то есть так же, как и X_1. В частности, у этих случайных величин будут одинаковые математические ожидания. Кроме того заметим, что:

   $$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

   В результате, в силу свойства линейности математического ожидания получаем:

   $$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) \approx$$
   $$\approx 0.89263 + 0.89263 + 0.89263 + 0.89263 + 0.89263 = 4.46315$$

2. Проще всего решить соответствующую задачу комбинаторно. Число способов, которыми можно назначить каждому из пассажиров одну из 5 остановок, составляет 5^{10}. Из них 3^{10} способов соответствуют ситуации, когда все пассажиры выходят на первых трех остановках. Учитывая, что все соответствующие способы равновероятны (в силу того, что пассажиры с равной вероятностью выходят на любой из остановок), получаем ответ:

   $$\frac{3^{10}}{5^{10}} \approx 0.00605$$

3. Обратим внимание, что на каждой из остановок маршрутка останавливается с равной вероятностью. Следовательно, искомая вероятность совпадает с вероятностью того, что обе сделанные маршруткой остановки окажутся по порядковому номеру не более, чем третьими. Через O_1 и O_2 обозначим события, в соответствии с которыми первая и вторая остановки маршрутки соответственно были не более, чем третьими.

$$P(O_1 \cap O_2) = P(O_1)P(O_2|O_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = 0.3$$

Проверка в R:

```
# Число симуляций
n <- 100000
# Количество пассажиров
n.passanger <- 10
# Количество остановок
n.stop <- 5
# Назначаем каждому пассажиру остановку
stop <- matrix(sample(1:n.stop,
                      n * n.passanger,
                      replace = TRUE),
               ncol = n.passanger)
# Считаем число остановок
n.stop <- apply(stop, 1, function(x)length(unique(x)))
# Определяем фак отсутствия остановок с номером больше третьего
first3 <- apply(stop, 1, function(x)(max(x) <= 3))
# пункт 1
mean(n.stop)
# пункт 2
mean(first3)
# пункт 3
mean(first3[n.stop == 2])
```

Задание №4. Кузнецы. (25 баллов)

В королевстве живут 10 крутых, 20 обычных и 30 криворуких кузнецов. Крутые кузнецы – настоящие мастера своего дела. Они изготавливают качественный меч с вероятностью 0.9. Обычные кузнецы изготавливают качественные мечи с вероятностью 0.7. Криворукие кузнецы, как следует из названия, наименее надежные: для них вероятность изготовления качественного меча составляет 0.1. Король сделал заказ на 7 мечей наугад выбранному кузнецу. За каждый качественный меч король выплачивает кузнецу по 5 монет, а за каждый некачественный – штрафует на 10.

1. Найдите вероятность того, что кузнец изготовит более 5 качественных мечей, если известно, что королю попался крутой кузнец. **(2 баллов)**

2. Вычислите вероятность того, что кузнец изготовит ровно 5 качественных мечей. **(5 баллов)**

3. Определите вероятность, с которой король выбрал крутого кузнеца, если известно, что ему удалось изготовить ровно 5 качественных мечей. **(5 баллов)**

4. Посчитайте математическое ожидание и дисперсию числа монет, которые кузнец получит за заказ короля (число монет может оказаться и отрицательным: в таком случае кузнец останется должен королю). **(8 баллов)**

5. Король отменил свой первоначальный заказ и попросил каждого кузнеца в городе сделать ему по 7 мечей. Найдите математическое ожидание числа качественных мечей, которое получит король. **(5 баллов)**

Решение

1. Через X обозначим случайную величину, отражающую число качественных мечей, изготовленных кузнецом для короля. Через A_1, A_2 и A_3 обозначим события, при которых королю попадается крутой, обычный или криворукий кузнец соответственно. Из условия известно, что:

$$(X|A_1) \sim B(0.9, 7), \qquad (X|A_2) \sim B(0.7, 7), \qquad (X|A_3) \sim B(0.1, 7)$$

В результате получаем искомую вероятность:

$$P(X > 5|A_1) = P(X = 6|A_1) + P(X = 7|A_1) = C_7^6 0.9^6 0.1^1 + C_7^7 0.9^7 0.1^0 \approx 0.85$$

2. Применяя формулу полной вероятности получаем:

$$P(X = 5) = P(X = 5|A_1)P(A_1) + P(X = 5|A_2)P(A_2) + P(X = 5|A_3)P(A_3) =$$

$$= \left(C_7^5 0.9^5 0.1^2\right) \times \frac{1}{6} + \left(C_7^5 0.7^5 0.3^2\right) \times \frac{2}{6} + \left(C_7^5 0.1^5 0.9^2\right) \times \frac{3}{6} \approx 0.1266363$$

3. Применяя формулу условной вероятности получаем:

$$P(A_1|X = 5) = \frac{P(X = 5|A_1)P(A_1)}{P(X = 5)} =$$

$$= \frac{(C_7^5 0.9^5 0.1^2) \times \frac{1}{6}}{(C_7^5 0.9^5 0.1^2) \times \frac{1}{6} + (C_7^5 0.7^5 0.3^2) \times \frac{2}{6} + (C_7^5 0.1^5 0.9^2) \times \frac{3}{6}} =$$

$$= \frac{(0.9^5 0.1^2) \times \frac{1}{6}}{(0.9^5 0.1^2) \times \frac{1}{6} + (0.7^5 0.3^2) \times \frac{2}{6} + (0.1^5 0.9^2) \times \frac{3}{6}} \approx 0.163$$

4. Число монет можно обозначить как:

$$5X - 10(7 - X) = 15X - 70$$

Для начала найдем математическое ожидание и дисперсию числа качественных мечей:

$$E(X) = E(X|A_1)P(A_1) + E(X|A_2)P(A_2) + E(X|A_3)P(A_3) =$$

$$= 0.9 \times 7 \times \frac{1}{6} + 0.7 \times 7 \times \frac{2}{6} + 0.1 \times 7 \times \frac{3}{6} = \frac{91}{30} \approx 3.03$$

$$E(X^2) = E(X^2|A_1)P(A_1) + E(X^2|A_2)P(A_2) + E(X^2|A_3)P(A_3) =$$
$$= (0.9 \times 7(1-0.9) + 7^2 \times 0.9^2) \times \frac{1}{6} + (0.7 \times 7(1-0.7) + 7^2 \times 0.7^2) \times \frac{2}{6} +$$
$$+(0.1 \times 7(1-0.1) + 7^2 \times 0.1^2) \times \frac{3}{6} = \frac{1183}{75} \approx 0.15773$$
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1183}{75} - \left(\frac{91}{30}\right)^2 = \frac{1183}{180} \approx 6.57$$

Исходя из полученного результата посчитаем искомое математическое ожидание

$$E(15X - 70) = 15E(X) - 70 \approx 15 \times 3.03 - 70 = -24.55$$
$$Var(15X - 70) = 15^2 Var(X) \approx 15^2 \times 6.57 = 1478.25$$

5. Пользуясь свойством линейности математического ожидания нетрудно догадаться, что искомое математическое ожидание окажется равно:

$$7 \times (10 \times 0.9 + 20 \times 0.7 + 30 \times 0.1) = 182$$

Проверка в R:

```
# Число симуляций
n <- 1000000
n.swords <- 7
# Кузнецы
blacksmith <- sample(1:3, n, replace = TRUE, prob = c(0.2, 0.4, 0.6))
p.blacksmith <- c(0.9, 0.7, 0.1)
# Мечи
swords <- rbinom(n, n.swords, p.blacksmith[blacksmith])
# пункт 1
mean(swords[blacksmith == 1] > 5)
# пункт 2
mean(swords == 5)
# пункт 3
mean((blacksmith == 1)[swords == 5])
# пункт 4
mean(5 * swords - 10 * (n.swords - swords))
var(5 * swords - 10 * (n.swords - swords))
```