

# Теория Вероятностей и Статистика

## Непрерывные случайные величины

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции
  - Температура



# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции
  - Температура
  - Время в очереди

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции
  - Температура
  - Время в очереди
  - Вес кота

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции
  - Температура
  - Время в очереди
  - Вес кота
  - Число осадков

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции
  - Температура
  - Время в очереди
  - Вес кота
  - Число осадков
- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связано с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

- ВВП страны

- Время на дорогу

- Время в очереди

- Цена квартиры

- Цена акции

- Вес кота

- Прибыль фирмы

- Температура

- Число осадков

- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связано с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.

**Пример:** имеется отрезок  $[0, 1]$ . Точка случайным образом и с **равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину  $X$ . Например,  $P(X = 0.3) = p$ , где  $p$  - вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества  $[0, 1]$  больше мощности множества натуральных чисел):

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

- ВВП страны

- Время на дорогу

- Время в очереди

- Цена квартиры

- Цена акции

- Вес кота

- Прибыль фирмы

- Температура

- Число осадков

- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связано с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.

**Пример:** имеется отрезок  $[0, 1]$ . Точка случайным образом и с **равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину  $X$ . Например,  $P(X = 0.3) = p$ , где  $p$  - вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества  $[0, 1]$  больше мощности множества натуральных чисел):

$$\sum_{x \in [0, 1]} P(X = x) = \sum_{x \in [0, 1]} p > \sum_{x \in \mathbb{N}} p = \infty$$

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

- ВВП страны

- Время на дорогу

- Время в очереди

- Цена квартиры

- Цена акции

- Вес кота

- Прибыль фирмы

- Температура

- Число осадков

- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связано с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.

**Пример:** имеется отрезок  $[0, 1]$ . Точка случайным образом и с **равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину  $X$ . Например,  $P(X = 0.3) = p$ , где  $p$  – вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества  $[0, 1]$  больше мощности множества натуральных чисел):

$$\sum_{x \in [0, 1]} P(X = x) = \sum_{x \in [0, 1]} p > \sum_{x \in \mathbb{N}} p = \infty$$

- **Решение** – предположим, что вероятность того, что случайная величина примет **конкретное** значение, равняется нулю, но отличной от нуля может быть вероятность попадания случайной величины в некоторый интервал.

# Мотивация введения непрерывных случайных величин

## Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

- |                 |                   |                   |
|-----------------|-------------------|-------------------|
| ● ВВП страны    | ● Время на дорогу | ● Время в очереди |
| ● Цена квартиры | ● Цена акции      | ● Вес кота        |
| ● Прибыль фирмы | ● Температура     | ● Число осадков   |

- Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связано с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.

**Пример:** имеется отрезок  $[0, 1]$ . Точка случайным образом и с **равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину  $X$ . Например,  $P(X = 0.3) = p$ , где  $p$  – вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества  $[0, 1]$  больше мощности множества натуральных чисел):

$$\sum_{x \in [0, 1]} P(X = x) = \sum_{x \in [0, 1]} p > \sum_{x \in \mathbb{N}} p = \infty$$

- Решение** – предположим, что вероятность того, что случайная величина примет **конкретное** значение, равняется нулю, но отличной от нуля может быть вероятность попадания случайной величины в некоторый **интервал**. Возвращаясь к примеру положим  $P(X = x) = 0$  для любого  $x \in R$  и  $P(X \in [a, b]) = (b - a)$  при  $[a, b] \in (0, 1)$ , где  $b \geq a$ , откуда, например,  $P(X = 0.3) = 0$ , но  $P(X \in [0.2, 0.7]) = 0.7 - 0.2 = 0.5$ .



- Рассмотрим множество  $U$ . Система подмножеств  $\Sigma$  множества  $U$  является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):

- Рассмотрим множество  $U$ . Система подмножеств  $\Sigma$  множества  $U$  является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
  - ①  $U \in \Sigma$ .

- Рассмотрим множество  $U$ . Система подмножеств  $\Sigma$  множества  $U$  является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
  - 1  $U \in \Sigma$ .
  - 2  $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$ .

- Рассмотрим множество  $U$ . Система подмножеств  $\Sigma$  множества  $U$  является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
  - 1  $U \in \Sigma$ .
  - 2  $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$ .
  - 3 Для любой счетной последовательности подмножеств  $A_1, A_2, \dots$  множества  $\Sigma$  соблюдается  $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \in \Sigma$ .

- Рассмотрим множество  $U$ . Система подмножеств  $\Sigma$  множества  $U$  является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
  - ①  $U \in \Sigma$ .
  - ②  $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$ .
  - ③ Для любой счетной последовательности подмножеств  $A_1, A_2, \dots$  множества  $\Sigma$  соблюдается  $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \in \Sigma$ .
- Дополнительная информация о сигма-алгебрах
  - В последнем условии объединение можно заменить на пересечение, то есть  $(A_1 \cap A_2 \cap \dots) \in \Sigma$ .

- Рассмотрим множество  $U$ . Система подмножеств  $\Sigma$  множества  $U$  является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
  - ①  $U \in \Sigma$ .
  - ②  $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$ .
  - ③ Для любой счетной последовательности подмножеств  $A_1, A_2, \dots$  множества  $\Sigma$  соблюдается  $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \in \Sigma$ .
- Дополнительная информация о сигма-алгебрах
  - В последнем условии объединение можно заменить на пересечение, то есть  $(A_1 \cap A_2 \cap \dots) \in \Sigma$ .
  - Пересечение сигма алгебр является сигма-алгеброй.

- Рассмотрим множество  $U$ . Система подмножеств  $\Sigma$  множества  $U$  является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
  - ①  $U \in \Sigma$ .
  - ②  $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$ .
  - ③ Для любой счетной последовательности подмножеств  $A_1, A_2, \dots$  множества  $\Sigma$  соблюдается  $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \in \Sigma$ .
- Дополнительная информация о сигма-алгебрах
  - В последнем условии объединение можно заменить на пересечение, то есть  $(A_1 \cap A_2 \cap \dots) \in \Sigma$ .
  - Пересечение сигма алгебр является сигма-алгеброй.
  - Множество  $\{\emptyset, U\}$  и булеан множества  $U$  являются сигма-алгебрами множества  $U$ .

# Продвинутый дополнительный материал

## Пример Сигма-алберы

Проверим, является ли  $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$  сигма-алгеброй множества  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ . Для удобства обозначим  $A_1 = \emptyset$ ,  $A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A_3 = \{1, 2\}$ ,  $A_4 = \{3, 4\}$ . Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.



# Продвинутый дополнительный материал

## Пример Сигма-алберы

Проверим, является ли  $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$  сигма-алгеброй множества  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ . Для удобства обозначим  $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 2\}, A_4 = \{3, 4\}$ . Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

❶  $U = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Sigma$ .

# Продвинутый дополнительный материал

## Пример Сигма-алберы

Проверим, является ли  $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$  сигма-алгеброй множества  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ . Для удобства обозначим  $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 2\}, A_4 = \{3, 4\}$ . Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

❶  $U = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Sigma$ .

❷ Сделаем несколько проверок, перебирая все подмножества  $A \in \Sigma$ :

$$\Omega - \emptyset = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset \in \Sigma$$

$$\Omega - \{1, 2\} = \{3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{3, 4\} = \{1, 2\} \in \Sigma$$

# Продвинутый дополнительный материал

## Пример Сигма-алберы

Проверим, является ли  $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$  сигма-алгеброй множества  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ . Для удобства обозначим  $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 2\}, A_4 = \{3, 4\}$ . Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

❶  $U = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Sigma$ .

❷ Сделаем несколько проверок, перебирая все подмножества  $A \in \Sigma$ :

$$\Omega - \emptyset = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset \in \Sigma$$

$$\Omega - \{1, 2\} = \{3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{3, 4\} = \{1, 2\} \in \Sigma$$

❸ Рассмотрим все возможные случаи объединения этих множеств:

$$A_1 \cup A_2 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad A_1 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_4 = \emptyset \cup \{3, 4\} = \{3, 4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_2 \cup A_4 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_4 = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

# Продвинутый дополнительный материал

## Пример Сигма-алберы

Проверим, является ли  $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$  сигма-алгеброй множества  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ . Для удобства обозначим  $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 2\}, A_4 = \{3, 4\}$ . Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

❶  $U = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$ .

❷ Сделаем несколько проверок, перебирая все подмножества  $A \in \Sigma$ :

$$\Omega - \emptyset = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset \in \Sigma$$

$$\Omega - \{1, 2\} = \{3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{3, 4\} = \{1, 2\} \in \Sigma$$

❸ Рассмотрим все возможные случаи объединения этих множеств:

$$A_1 \cup A_2 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad A_1 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_4 = \emptyset \cup \{3, 4\} = \{3, 4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_2 \cup A_4 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_4 = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

Поскольку все три условия соблюдены, то  $\Sigma$  является сигма-алгеброй множества  $U$ .

# Продвинутый дополнительный материал

## Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества  $U$ , для которых множество  $S \subset U$  является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества  $U$ , содержащей  $S$ .

# Продвинутый дополнительный материал

## Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества  $U$ , для которых множество  $S \subset U$  является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества  $U$ , содержащей  $S$ .
- Обозначим через  $S$  множество, включающее все открытые интервалы, то есть  $(1, 2) \in S$ ,  $(3, \infty) \in S$  и т.д.

# Продвинутый дополнительный материал

## Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества  $U$ , для которых множество  $S \subset U$  является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества  $U$ , содержащей  $S$ .
- Обозначим через  $S$  множество, включающее все открытые интервалы, то есть  $(1, 2) \in S$ ,  $(3, \infty) \in S$  и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра**  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел  $R$ , содержащей  $S$ . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть  $[0, 5] \in \mathcal{B}$ ,  $(-3, 8) \in \mathcal{B}$ ,  $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$  и т.д.

# Продвинутый дополнительный материал

## Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества  $U$ , для которых множество  $S \subset U$  является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества  $U$ , содержащей  $S$ .
- Обозначим через  $S$  множество, включающее все открытые интервалы, то есть  $(1, 2) \in S$ ,  $(3, \infty) \in S$  и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра**  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел  $R$ , содержащей  $S$ . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть  $[0, 5] \in \mathcal{B}$ ,  $(-3, 8) \in \mathcal{B}$ ,  $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$  и т.д.

**Пример:** покажите, что  $(0, 1)$ ,  $\{1\}$ ,  $(0, 1]$ ,  $(0, 1] \cup (3, 5.5)$  и множество иррациональных чисел  $\overline{Q}$  принадлежат  $\mathcal{B}$ .



# Продвинутый дополнительный материал

## Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества  $U$ , для которых множество  $S \subset U$  является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества  $U$ , содержащей  $S$ .
- Обозначим через  $S$  множество, включающее все открытые интервалы, то есть  $(1, 2) \in S$ ,  $(3, \infty) \in S$  и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра**  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел  $R$ , содержащей  $S$ . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть  $[0, 5] \in \mathcal{B}$ ,  $(-3, 8) \in \mathcal{B}$ ,  $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$  и т.д.

**Пример:** покажите, что  $(0, 1)$ ,  $\{1\}$ ,  $(0, 1]$ ,  $(0, 1] \cup (3, 5.5)$  и множество иррациональных чисел  $\overline{Q}$  принадлежат  $\mathcal{B}$ .

**Решение:**

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма алгеброй  $R$ , содержащей  $S$ , то  $S \subset \mathcal{B}$ . Поэтому, из того, что  $(0, 1) \in S$ , следует  $(0, 1) \in \mathcal{B}$ .

# Продвинутый дополнительный материал

## Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества  $U$ , для которых множество  $S \subset U$  является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества  $U$ , содержащей  $S$ .
- Обозначим через  $S$  множество, включающее все открытые интервалы, то есть  $(1, 2) \in S$ ,  $(3, \infty) \in S$  и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра**  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел  $R$ , содержащей  $S$ . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть  $[0, 5] \in \mathcal{B}$ ,  $(-3, 8) \in \mathcal{B}$ ,  $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$  и т.д.

**Пример:** покажите, что  $(0, 1)$ ,  $\{1\}$ ,  $(0, 1]$ ,  $(0, 1] \cup (3, 5.5)$  и множество иррациональных чисел  $\overline{Q}$  принадлежат  $\mathcal{B}$ .

**Решение:**

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма алгеброй  $R$ , содержащей  $S$ , то  $S \subset \mathcal{B}$ . Поэтому, из того, что  $(0, 1) \in S$ , следует  $(0, 1) \in \mathcal{B}$ .
- По аналогии нетрудно показать, что  $(-\infty, 1), (1, \infty) \in \mathcal{B}$ . По свойству (3) имеем  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) \in \mathcal{B}$ . Из свойства (1) следует  $R \subset \mathcal{B}$ . Применяя свойство (2) получаем  $R - ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$ .

# Продвинутый дополнительный материал

## Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества  $U$ , для которых множество  $S \subset U$  является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества  $U$ , содержащей  $S$ .
- Обозначим через  $S$  множество, включающее все открытые интервалы, то есть  $(1, 2) \in S$ ,  $(3, \infty) \in S$  и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра**  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел  $R$ , содержащей  $S$ . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть  $[0, 5] \in \mathcal{B}$ ,  $(-3, 8) \in \mathcal{B}$ ,  $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$  и т.д.

**Пример:** покажите, что  $(0, 1)$ ,  $\{1\}$ ,  $(0, 1]$ ,  $(0, 1] \cup (3, 5.5)$  и множество иррациональных чисел  $\overline{Q}$  принадлежат  $\mathcal{B}$ .

**Решение:**

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма алгеброй  $R$ , содержащей  $S$ , то  $S \subset \mathcal{B}$ . Поэтому, из того, что  $(0, 1) \in S$ , следует  $(0, 1) \in \mathcal{B}$ .
- По аналогии нетрудно показать, что  $(-\infty, 1), (1, \infty) \in \mathcal{B}$ . По свойству (3) имеем  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) \in \mathcal{B}$ . Из свойства (1) следует  $R \subset \mathcal{B}$ . Применяя свойство (2) получаем  $R - ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$ .
- Поскольку  $\{1\} \in \mathcal{B}$  и  $(0, 1) \in \mathcal{B}$ , то по свойству (3) получаем  $(0, 1) \cup \{1\} = (0, 1] \in \mathcal{B}$

# Продвинутый дополнительный материал

## Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества  $U$ , для которых множество  $S \subset U$  является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества  $U$ , содержащей  $S$ .
- Обозначим через  $S$  множество, включающее все открытые интервалы, то есть  $(1, 2) \in S$ ,  $(3, \infty) \in S$  и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра**  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел  $R$ , содержащей  $S$ . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть  $[0, 5] \in \mathcal{B}$ ,  $(-3, 8) \in \mathcal{B}$ ,  $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$  и т.д.

**Пример:** покажите, что  $(0, 1)$ ,  $\{1\}$ ,  $(0, 1]$ ,  $(0, 1] \cup (3, 5.5)$  и множество иррациональных чисел  $\overline{Q}$  принадлежат  $\mathcal{B}$ .

**Решение:**

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма алгеброй  $R$ , содержащей  $S$ , то  $S \subset \mathcal{B}$ . Поэтому, из того, что  $(0, 1) \in S$ , следует  $(0, 1) \in \mathcal{B}$ .
- По аналогии нетрудно показать, что  $(-\infty, 1), (1, \infty) \in \mathcal{B}$ . По свойству (3) имеем  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) \in \mathcal{B}$ . Из свойства (1) следует  $R \subset \mathcal{B}$ . Применяя свойство (2) получаем  $R - ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$ .
- Поскольку  $\{1\} \in \mathcal{B}$  и  $(0, 1) \in \mathcal{B}$ , то по свойству (3) получаем  $(0, 1) \cup \{1\} = (0, 1] \in \mathcal{B}$
- Пользуясь полученным ранее результатом и свойством (3) имеем  $(0, 1] \cup (3, 5.5) \in \mathcal{B}$ .

# Продвинутый дополнительный материал

## Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества  $U$ , для которых множество  $S \subset U$  является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества  $U$ , содержащей  $S$ .
- Обозначим через  $S$  множество, включающее все открытые интервалы, то есть  $(1, 2) \in S$ ,  $(3, \infty) \in S$  и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра**  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел  $R$ , содержащей  $S$ . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть  $[0, 5] \in \mathcal{B}$ ,  $(-3, 8) \in \mathcal{B}$ ,  $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$  и т.д.

**Пример:** покажите, что  $(0, 1)$ ,  $\{1\}$ ,  $(0, 1]$ ,  $(0, 1] \cup (3, 5.5)$  и множество иррациональных чисел  $\overline{Q}$  принадлежат  $\mathcal{B}$ .

**Решение:**

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку  $\mathcal{B}$  является минимальной сигма алгеброй  $R$ , содержащей  $S$ , то  $S \subset \mathcal{B}$ . Поэтому, из того, что  $(0, 1) \in S$ , следует  $(0, 1) \in \mathcal{B}$ .
- По аналогии нетрудно показать, что  $(-\infty, 1), (1, \infty) \in \mathcal{B}$ . По свойству (3) имеем  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) \in \mathcal{B}$ . Из свойства (1) следует  $R \subset \mathcal{B}$ . Применяя свойство (2) получаем  $R - ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$ .
- Поскольку  $\{1\} \in \mathcal{B}$  и  $(0, 1) \in \mathcal{B}$ , то по свойству (3) получаем  $(0, 1) \cup \{1\} = (0, 1] \in \mathcal{B}$ .
- Пользуясь полученным ранее результатом и свойством (3) имеем  $(0, 1] \cup (3, 5.5) \in \mathcal{B}$ .
- По аналогии с  $\{1\} \in \mathcal{B}$  можно показать, что  $\{x\} \in \mathcal{B}, \forall x \in R$ . Поскольку множество рациональных чисел  $Q$  счетно, то по свойству (3) получаем  $Q = \left( \bigcup_{x, y \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}} \{x/y\} \right) \in \mathcal{B}$ . Применяя свойство (2) имеем  $\overline{Q} = (R - Q) \in \mathcal{B}$ .

# Продвинутый дополнительный материал

## Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий  $\Omega$  бесконечно и не счетно.

# Продвинутый дополнительный материал

## Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий  $\Omega$  бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию  $X : \Omega \rightarrow R$ . Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества  $B \in \mathcal{B}$  множество  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$  является событием, то есть  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .

# Продвинутый дополнительный материал

## Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий  $\Omega$  бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию  $X : \Omega \rightarrow R$ . Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества  $B \in \mathcal{B}$  множество  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$  является событием, то есть  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .

### Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда  $\Omega = [1, 10]$ .



# Продвинутый дополнительный материал

## Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий  $\Omega$  бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию  $X : \Omega \rightarrow R$ . Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества  $B \in \mathcal{B}$  множество  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$  является событием, то есть  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .

### Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда  $\Omega = [1, 10]$ .
- Предположим, что пространство событий  $\mathcal{F}$  состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть  $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \Omega\} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset [0, 10]\}$ . Например,  $A_1 = [2, 3]$  и  $A_2 = (2, 5) \cup (7.5, 8]$  являются событиями, а  $A_3 = [-3, 2]$  – нет, поскольку  $A_3 \not\subset \Omega$ .

# Продвинутый дополнительный материал

## Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий  $\Omega$  бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию  $X : \Omega \rightarrow R$ . Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества  $B \in \mathcal{B}$  множество  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$  является событием, то есть  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .

### Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда  $\Omega = [1, 10]$ .
- Предположим, что пространство событий  $\mathcal{F}$  состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть  $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \Omega\} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset [0, 10]\}$ . Например,  $A_1 = [2, 3]$  и  $A_2 = (2, 5) \cup (7.5, 8]$  являются событиями, а  $A_3 = [-3, 2]$  – нет, поскольку  $A_3 \not\subset \Omega$ .
- Пусть завод продает весь произведенный металл по цене 3 рубля за тонну. Рассмотрим функцию  $X(\omega) = 3\omega$ , отражающую выручку фирмы. Обратим внимание, что, например,  $X^{-1}([6, 15])$  является событием, поскольку:

$$X^{-1}([6, 15]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [6, 15]\} = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [6, 15]\} = [6/3, 15/3] = [2, 5] \in \mathcal{F}$$

# Продвинутый дополнительный материал

## Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий  $\Omega$  бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию  $X : \Omega \rightarrow R$ . Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества  $B \in \mathcal{B}$  множество  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$  является событием, то есть  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .

### Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда  $\Omega = [1, 10]$ .
- Предположим, что пространство событий  $\mathcal{F}$  состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть  $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \Omega\} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset [0, 10]\}$ . Например,  $A_1 = [2, 3]$  и  $A_2 = (2, 5) \cup (7.5, 8]$  являются событиями, а  $A_3 = [-3, 2]$  – нет, поскольку  $A_3 \not\subset \Omega$ .
- Пусть завод продает весь произведенный металл по цене 3 рубля за тонну. Рассмотрим функцию  $X(\omega) = 3\omega$ , отражающую выручку фирмы. Обратим внимание, что, например,  $X^{-1}([6, 15])$  является событием, поскольку:

$$X^{-1}([6, 15]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [6, 15]\} = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [6, 15]\} = [6/3, 15/3] = [2, 5] \in \mathcal{F}$$

- В более общем случае получаем:

$$X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [a, b]\} = [\max(a/3, 1), \min(b/3, 10)] \in \mathcal{F}$$

# Продвинутый дополнительный материал

## Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий  $\Omega$  бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию  $X : \Omega \rightarrow R$ . Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества  $B \in \mathcal{B}$  множество  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$  является событием, то есть  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .

### Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда  $\Omega = [1, 10]$ .
- Предположим, что пространство событий  $\mathcal{F}$  состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть  $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \Omega\} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset [0, 10]\}$ . Например,  $A_1 = [2, 3]$  и  $A_2 = (2, 5) \cup (7.5, 8]$  являются событиями, а  $A_3 = [-3, 2]$  – нет, поскольку  $A_3 \not\subset \Omega$ .
- Пусть завод продает весь произведенный металл по цене 3 рубля за тонну. Рассмотрим функцию  $X(\omega) = 3\omega$ , отражающую выручку фирмы. Обратим внимание, что, например,  $X^{-1}([6, 15])$  является событием, поскольку:

$$X^{-1}([6, 15]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [6, 15]\} = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [6, 15]\} = [6/3, 15/3] = [2, 5] \in \mathcal{F}$$

- В более общем случае получаем:

$$X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [a, b]\} = [\max(a/3, 1), \min(b/3, 10)] \in \mathcal{F}$$

- Далее остается показать, что продемонстрированный результат справедлив для любого счетного объединения и пересечения интервалов. Но в силу громоздкости этот шаг мы опустим.

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой:  $P(X = x) = 0$  для любого  $x \in R$ .

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой:  $P(X = x) = 0$  для любого  $x \in R$ .
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой:  $P(X = x) = 0$  для любого  $x \in R$ .
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой:  $P(X = x) = 0$  для любого  $x \in R$ .
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

**Доказательство:**

$$P(X \leq a) = P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a)$$



# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой:  $P(X = x) = 0$  для любого  $x \in R$ .
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\ P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \end{aligned}$$

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой:  $P(X = x) = 0$  для любого  $x \in R$ .
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\ P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой:  $P(X = x) = 0$  для любого  $x \in R$ .
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

### Доказательство:

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\ P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

**Пример:** доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 3 \\ (x^2 - 9)/16, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 1, & \text{если } x > 5 \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой:  $P(X = x) = 0$  для любого  $x \in R$ .
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

### Доказательство:

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\ P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

**Пример:** доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 3 \\ (x^2 - 9)/16, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 1, & \text{если } x > 5 \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

$$P(X \leq 3.5) = F_X(3.5) = (3.5^2 - 9)/16 = 13/63$$

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой:  $P(X = x) = 0$  для любого  $x \in R$ .
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

### Доказательство:

$$\begin{aligned}P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \\&= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)\end{aligned}$$

**Пример:** доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 3 \\ (x^2 - 9)/16, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 1, & \text{если } x > 5 \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

$$P(X \leq 3.5) = F_X(3.5) = (3.5^2 - 9)/16 = 13/64$$

$$P(X \in [3.5, 4.2]) = P(3.5 \leq X \leq 4.2) = F_X(4.2) - F_X(3.5) = (4.2^2 - 9)/16 - (3.5^2 - 9)/16 = 539/1600$$

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой:  $P(X = x) = 0$  для любого  $x \in R$ .
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

### Доказательство:

$$\begin{aligned}P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \\&= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)\end{aligned}$$

**Пример:** доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 3 \\ (x^2 - 9)/16, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 1, & \text{если } x > 5 \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

$$P(X \leq 3.5) = F_X(3.5) = (3.5^2 - 9)/16 = 13/64$$

$$P(X \in [3.5, 4.2]) = P(3.5 \leq X \leq 4.2) = F_X(4.2) - F_X(3.5) = (4.2^2 - 9)/16 - (3.5^2 - 9)/16 = 539/1600$$

$$P(4.2 < X < 8) = P(4.2 \leq X \leq 8) = F_X(8) - F_X(4.2) = 1 - (4.2^2 - 9)/16 = 0.465$$

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Свойства

Функция  $F_X(x)$  является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины  $X$  тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы:  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  при любом  $x \in R$ .

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Свойства

Функция  $F_X(x)$  является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины  $X$  тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы:  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  при любом  $x \in R$ .
- Не убывает:  $F_X(x) \leq F_X(y)$  при  $x \leq y$ , где  $x, y \in R$ .



# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Свойства

Функция  $F_X(x)$  является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины  $X$  тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы:  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  при любом  $x \in R$ .
- Не убывает:  $F_X(x) \leq F_X(y)$  при  $x \leq y$ , где  $x, y \in R$ .
- Непрерывна:  $\lim_{x \rightarrow a} F_X(x) = F_X(a)$  для любого  $a \in R$ .

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Свойства

Функция  $F_X(x)$  является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины  $X$  тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы:  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  при любом  $x \in R$ .
- Не убывает:  $F_X(x) \leq F_X(y)$  при  $x \leq y$ , где  $x, y \in R$ .
- Непрерывна:  $\lim_{x \rightarrow a} F_X(x) = F_X(a)$  для любого  $a \in R$ .

## Пример:

Объем поглощаемой котом Аркадием пищи является случайной величиной с функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x < 2 \\ (x - a)/b, & \text{если } x \in [2, 6] \\ d, & \text{если } x > 6 \end{cases}$$

Найдите константы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ .

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Свойства

Функция  $F_X(x)$  является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины  $X$  тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы:  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  при любом  $x \in R$ .
- Не убывает:  $F_X(x) \leq F_X(y)$  при  $x \leq y$ , где  $x, y \in R$ .
- Непрерывна:  $\lim_{x \rightarrow a} F_X(x) = F_X(a)$  для любого  $a \in R$ .

### Пример:

Объем поглощаемой котом Аркадием пищи является случайной величиной с функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x < 2 \\ (x - a)/b, & \text{если } x \in [2, 6] \\ d, & \text{если } x > 6 \end{cases}$$

Найдите константы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ .

### Решение:

Так как функция распределения не убывает и принимает значения от 0 до 1, то  $c = 0$  и  $d = 1$ .

# Функция распределения непрерывной случайной величины

## Свойства

Функция  $F_X(x)$  является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины  $X$  тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы:  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  при любом  $x \in R$ .
- Не убывает:  $F_X(x) \leq F_X(y)$  при  $x \leq y$ , где  $x, y \in R$ .
- Непрерывна:  $\lim_{x \rightarrow a} F_X(x) = F_X(a)$  для любого  $a \in R$ .

### Пример:

Объем поглощаемой котом Аркадием пищи является случайной величиной с функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x < 2 \\ (x - a)/b, & \text{если } x \in [2, 6] \\ d, & \text{если } x > 6 \end{cases}$$

Найдите константы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ .

### Решение:

Так как функция распределения не убывает и принимает значения от 0 до 1, то  $c = 0$  и  $d = 1$ .

Поскольку функция распределения непрерывна, то  $F_X(2) = 0$  и  $F_X(6) = 1$ , откуда:

$$\begin{cases} (2 - a)/b = 0 \\ (6 - a)/b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ (6 - 2)/b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

# Функция плотности

## Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

# Функция плотности

## Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

# Функция плотности

## Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

### Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной  $X$ . Найдите функцию плотности  $X$ , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x^3/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

# Функция плотности

## Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

### Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной  $X$ . Найдите функцию плотности  $X$ , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

### Решение:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, & \text{если } x < 0 \\ d(x^3/1000)/dx, & \text{если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, & \text{если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} x^2/500, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x^3/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$



# Функция плотности

## Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

### Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной  $X$ . Найдите функцию плотности  $X$ , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

### Решение:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x^3/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, & \text{если } x < 0 \\ d(x^3/1000)/dx, & \text{если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, & \text{если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} x^2/500, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 x^2/500 dx = 49/750$$

# Функция плотности

## Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

### Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной  $X$ . Найдите функцию плотности  $X$ , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

### Решение:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x^3/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, & \text{если } x < 0 \\ d(x^3/1000)/dx, & \text{если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, & \text{если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} x^2/500, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 x^2/500 dx = 49/750$$

$$P(X \geq 7) = \int_7^{10} x^2/500 dx + \int_{10}^{\infty} 0 dx = 0.438$$

# Функция плотности

## Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

### Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной  $X$ . Найдите функцию плотности  $X$ , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

### Решение:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x^3/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, & \text{если } x < 0 \\ d(x^3/1000)/dx, & \text{если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, & \text{если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} x^2/500, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 x^2/500 dx = 49/750$$

$$P(X \in [3, 5] \cup (-\infty, 2]) = P(3 \leq X \leq 5) + P(X < 2) =$$

$$P(X \geq 7) = \int_7^{10} x^2/500 dx + \int_{10}^{\infty} 0 dx = 0.438$$

# Функция плотности

## Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

### Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной  $X$ . Найдите функцию плотности  $X$ , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

### Решение:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x^3/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, & \text{если } x < 0 \\ d(x^3/1000)/dx, & \text{если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, & \text{если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} x^2/500, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 x^2/500 dx = 49/750$$

$$P(X \geq 7) = \int_7^{10} x^2/500 dx + \int_{10}^{\infty} 0 dx = 0.438$$

$$\begin{aligned} P(X \in [3, 5] \cup (-\infty, 2]) &= P(3 \leq X \leq 5) + P(X < 2) = \\ &= \int_3^5 x^2/500 dx + \left( \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^2 x^2/500 dx \right) = 53/750 \end{aligned}$$

# Функция плотности

## Связь с функцией распределения

- С помощью функции плотности можно восстановить функцию распределения:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

# Функция плотности

## Связь с функцией распределения

- С помощью функции плотности можно восстановить функцию распределения:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

### Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей объем импорта некоторого государства, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{если } x \in [0, \pi/2] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

# Функция плотности

## Связь с функцией распределения

- С помощью функции плотности можно восстановить функцию распределения:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

**Пример:**

- Функция плотности случайной величины, отражающей объем импорта некоторого государства, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{если } x \in [0, \pi/2] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

**Решение:**

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt, & \text{если } x \in (-\infty, 0) \\ \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \sin(t) dt, & \text{если } x \in [0, \pi/2] \\ \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt + \int_{\pi/2}^x 0 dt, & \text{если } x \in (\pi/2, \infty) \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty, 0) \\ 1 - \cos(x), & \text{если } x \in [0, \pi/2] \\ 1, & \text{если } x \in (\pi/2, \infty) \end{cases}$$

# Функция плотности

## Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$  для любого  $x \in R$ .



# Функция плотности

## Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$  для любого  $x \in R$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

# Функция плотности

## Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$  для любого  $x \in R$ .

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

**Пример:**

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, & \text{если } x \in [2, 10] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите константу  $c \in R$  и функцию распределения времени поездки.

# Функция плотности

## Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$  для любого  $x \in R$ .

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

**Пример:**

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, & \text{если } x \in [2, 10] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите константу  $c \in R$  и функцию распределения времени поездки.

**Решение:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_2^{10} c/x dx = c \ln(5) = 1 \implies c = 1/\ln(5)$$

# Функция плотности

## Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$  для любого  $x \in R$ .

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

**Пример:**

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, & \text{если } x \in [2, 10] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите константу  $c \in R$  и функцию распределения времени поездки.

**Решение:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_2^{10} c/x dx = c \ln(5) = 1 \implies c = 1/\ln(5)$$

Обратим внимание, что при  $x \in [2, 10]$ :

$$F_X(x) = \int_2^x 1/(\ln(5) \times t) dt = \ln(x/2)/\ln(5)$$

# Функция плотности

## Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$  для любого  $x \in R$ .

- $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

**Пример:**

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, & \text{если } x \in [2, 10] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите константу  $c \in R$  и функцию распределения времени поездки.

**Решение:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_2^{10} c/x dx = c \ln(5) = 1 \implies c = 1/\ln(5)$$

Обратим внимание, что при  $x \in [2, 10]$ :

$$F_X(x) = \int_2^x 1/(\ln(5) \times t) dt = \ln(x/2)/\ln(5)$$

Отсюда получаем:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2 \\ \ln(x/2)/\ln(5), & \text{если } x \in [2, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

# Функция плотности

## Носитель непрерывной случайной величины

- **Носителем** непрерывной случайной величины  $X$  является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:

$$\text{supp}(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

# Функция плотности

## Носитель непрерывной случайной величины

- Носителем непрерывной случайной величины  $X$  является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:

$$\text{supp}(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

Пример:

- Случайная величина  $X$  имеет функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} (x - 2)/1.5, & \text{если } x \in [2, 3) \\ (2.5 - 0.5x)/1.5, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите носитель этой случайной величины и вероятность того, что она примет значение от 2.5 до 3.5.

# Функция плотности

## Носитель непрерывной случайной величины

- Носителем непрерывной случайной величины  $X$  является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:

$$\text{supp}(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

Пример:

- Случайная величина  $X$  имеет функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} (x - 2)/1.5, & \text{если } x \in [2, 3) \\ (2.5 - 0.5x)/1.5, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите носитель этой случайной величины и вероятность того, что она примет значение от 2.5 до 3.5.

Решение:

$$\text{supp}(X) = (2, 3) \cup [3, 5) = (2, 5)$$



# Функция плотности

## Носитель непрерывной случайной величины

- Носителем непрерывной случайной величины  $X$  является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:

$$\text{supp}(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

Пример:

- Случайная величина  $X$  имеет функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} (x - 2)/1.5, & \text{если } x \in [2, 3) \\ (2.5 - 0.5x)/1.5, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите носитель этой случайной величины и вероятность того, что она примет значение от 2.5 до 3.5.

Решение:

$$\text{supp}(X) = (2, 3) \cup [3, 5) = (2, 5)$$

$$P(2.5 \leq X \leq 3.5) = \int_{2.5}^3 (x - 2)/1.5 dx + \int_3^{3.5} (2.5 - 0.5x)/1.5 dx \approx 0.542$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x) dx$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x) dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, \text{ где } k \in N$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x) dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, \text{ где } k \in N$$

### Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей доходность акции, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{если } x \in [1, e] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и третий начальный момент доходности акции.

# Моменты непрерывной случайной величины

## Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x) dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, \text{ где } k \in N$$

### Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей доходность акции, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{если } x \in [1, e] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и третий начальный момент доходности акции.

**Решение:**

$$E(X) = \int_{-\infty}^1 (x \times 0) dx + \int_1^e x \ln(x) dx + \int_e^{\infty} (x \times 0) dx \approx 0 + 0.21 + 0 = 0.21$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x) dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, \text{ где } k \in N$$

### Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей доходность акции, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{если } x \in [1, e] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и третий начальный момент доходности акции.

**Решение:**

$$E(X) = \int_{-\infty}^1 (x \times 0) dx + \int_1^e x \ln(x) dx + \int_e^{\infty} (x \times 0) dx \approx 0 + 0.21 + 0 = 0.21$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^1 (x^3 \times 0) dx + \int_1^e x^3 \ln(x) dx + \int_e^{\infty} (x^3 \times 0) dx \approx 0 + 10.3 + 0 = 10.3$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции  $g(x)$  рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции  $g(x)$  рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- В частности, при  $\alpha, \beta \in R$ :

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$



# Моменты непрерывной случайной величины

## Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции  $g(x)$  рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- В частности, при  $\alpha, \beta \in R$ :

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

### Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид  $y(X) = \sin(X)$ . Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

# Моменты непрерывной случайной величины

## Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции  $g(x)$  рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- В частности, при  $\alpha, \beta \in R$ :

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

### Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид  $y(X) = \sin(X)$ . Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

**Решение:**

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции  $g(x)$  рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- В частности, при  $\alpha, \beta \in R$ :

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

### Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид  $y(X) = \sin(X)$ . Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

**Решение:**

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

$$E(5X + 10) = 5E(X) + 10 = 5 \times 0.75 + 10 = 13.75$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции  $g(x)$  рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- В частности, при  $\alpha, \beta \in R$ :

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

### Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид  $y(X) = \sin(X)$ . Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

**Решение:**

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

$$E(5X + 10) = 5E(X) + 10 = 5 \times 0.75 + 10 = 13.75$$

$$E(\sin(X)) = \int_0^1 \sin(x) \times 3x^2 dx \approx 0.67$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при  $\alpha, \beta \in R$ :

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при  $\alpha, \beta \in R$ :

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

### Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

# Моменты непрерывной случайной величины

## Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при  $\alpha, \beta \in R$ :

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

### Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

### Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$



# Моменты непрерывной случайной величины

## Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при  $\alpha, \beta \in R$ :

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

### Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

### Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times 3x^2 dx = 0.6$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при  $\alpha, \beta \in R$ :

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

### Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

### Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times 3x^2 dx = 0.6$$

$$\text{Var}(X) = 0.75 - 0.6^2 = 0.39$$

# Моменты непрерывной случайной величины

## Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при  $\alpha, \beta \in R$ :

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

### Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

### Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times 3x^2 dx = 0.6$$

$$\text{Var}(X) = 0.75 - 0.6^2 = 0.39$$

$$\text{Var}(5X + 10) = 25 \text{Var}(X) = 25 \times 0.39 = 9.75$$

# Квантили

## Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  строго возрастает на носителе  $\text{supp}(X)$ .

# Квантили

## Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  строго возрастает на носителе  $\text{supp}(X)$ .
- **Квантиль** уровня  $q \in (0, 1)$  случайной величины  $X$  это такое число  $x_q \in R$ , что  $F_X(x_q) = q$ .

# Квантили

## Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  строго возрастает на носителе  $\text{supp}(X)$ .
- **Квантиль** уровня  $q \in (0, 1)$  случайной величины  $X$  это такое число  $x_q \in R$ , что  $F_X(x_q) = q$ .
- Квантиль уровня  $q = 0.5$  именуется **медианой**, то есть  $x_{med} = x_{0.5}$ .

# Квантили

## Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  строго возрастает на носителе  $\text{supp}(X)$ .
- **Квантиль** уровня  $q \in (0, 1)$  случайной величины  $X$  это такое число  $x_q \in R$ , что  $F_X(x_q) = q$ .
- Квантиль уровня  $q = 0.5$  именуется **медианой**, то есть  $x_{med} = x_{0.5}$ .
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:

$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

# Квантили

## Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  строго возрастает на носителе  $\text{supp}(X)$ .
- Квантиль** уровня  $q \in (0, 1)$  случайной величины  $X$  это такое число  $x_q \in R$ , что  $F_X(x_q) = q$ .
- Квантиль уровня  $q = 0.5$  именуется **медианой**, то есть  $x_{med} = x_{0.5}$ .
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:

$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

### Пример:

- Функция распределения добытых компанией баррелей нефти имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ (x^2 - 1)/99, & \text{если } x \in [1, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

Определите, не менее скольких баррелей нефти вышка добудет с вероятностью 0.9, а также медиану добываемых баррелей нефти.



# Квантили

## Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  строго возрастает на носителе  $\text{supp}(X)$ .
- Квантиль** уровня  $q \in (0, 1)$  случайной величины  $X$  это такое число  $x_q \in R$ , что  $F_X(x_q) = q$ .
- Квантиль уровня  $q = 0.5$  именуется **медианой**, то есть  $x_{med} = x_{0.5}$ .
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:

$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

### Пример:

- Функция распределения добытых компанией баррелей нефти имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ (x^2 - 1)/99, & \text{если } x \in [1, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

Определите, не менее скольких баррелей нефти вышка добудет с вероятностью 0.9, а также медиану добываемых баррелей нефти.

### Решение:

$$F_X(x_{0.9}) = (x_{0.9}^2 - 1)/99 = 0.9 \implies x_{0.9} \approx 9.49$$

# Квантили

## Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  строго возрастает на носителе  $\text{supp}(X)$ .
- Квантиль** уровня  $q \in (0, 1)$  случайной величины  $X$  это такое число  $x_q \in R$ , что  $F_X(x_q) = q$ .
- Квантиль уровня  $q = 0.5$  именуется **медианой**, то есть  $x_{med} = x_{0.5}$ .
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:

$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

### Пример:

- Функция распределения добытых компанией баррелей нефти имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ (x^2 - 1)/99, & \text{если } x \in [1, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

Определите, не менее скольких баррелей нефти вышка добудет с вероятностью 0.9, а также медиану добываемых баррелей нефти.

### Решение:

$$\begin{aligned} F_X(x_{0.9}) &= (x_{0.9}^2 - 1)/99 = 0.9 \implies x_{0.9} \approx 9.49 \\ F_X(x_{med}) &= F_X(x_{0.5}) = (x_{0.5}^2 - 1)/99 = 0.5 \implies x_{med} \approx 7.1 \end{aligned}$$

# Мода

## Определение и способ нахождения моды

- Модами распределения случайной величины  $X$  именуются локальные максимумы функции плотности  $f_X(x)$ .

# Мода

## Определение и способ нахождения моды

- Модами распределения случайной величины  $X$  именуются локальные максимумы функции плотности  $f_X(x)$ .

### Пример:

- Функция плотности продолжительности собрания имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0, 3] \\ (10 - (1 - x)^2)/27, & \text{если } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Найдите моду (в данном случае единственная) продолжительности собрания.

# Мода

## Определение и способ нахождения моды

- Модами распределения случайной величины  $X$  именуются локальные максимумы функции плотности  $f_X(x)$ .

### Пример:

- Функция плотности продолжительности собрания имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0, 3] \\ (10 - (1 - x)^2)/27, & \text{если } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Найдите моду (в данном случае единственная) продолжительности собрания.

### Решение:

Рассмотрим условия первого порядка при  $x \in [0, 3]$ :

$$df_X(x)/dx = d((10 - (1 - x)^2)/27)/dx = 2(1 - x)/27 = 0 \implies x = 1$$

- Модами распределения случайной величины  $X$  именуются локальные максимумы функции плотности  $f_X(x)$ .

**Пример:**

- Функция плотности продолжительности собрания имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0, 3] \\ (10 - (1 - x)^2)/27, & \text{если } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Найдите моду (в данном случае единственная) продолжительности собрания.

**Решение:**

Рассмотрим условия первого порядка при  $x \in [0, 3]$ :

$$df_X(x)/dx = d((10 - (1 - x)^2)/27)/dx = 2(1 - x)/27 = 0 \implies x = 1$$

Проверка условий второго порядка позволяет утверждать, что найден локальный максимум (он же в данном случае и глобальный, но в контексте решаемой задачи это не имеет значения), откуда получаем моду  $x_{mode} = 1$ .

# Распределение функции от непрерывной случайной величины

## Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины  $g(X)$ , удобно выразить ее функцию распределения  $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$  через  $F_X(x)$ .

# Распределение функции от непрерывной случайной величины

## Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины  $g(X)$ , удобно выразить ее функцию распределения  $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$  через  $F_X(x)$ .

**Пример:**

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов). С каждой зарплаты Алексей отдает  $g(X) = \sqrt{X}$  **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты. Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$



# Распределение функции от непрерывной случайной величины

## Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины  $g(X)$ , удобно выразить ее функцию распределения  $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$  через  $F_X(x)$ .

**Пример:**

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает  $g(X) = \sqrt{X}$  **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

**Решение:**

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

# Распределение функции от непрерывной случайной величины

## Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины  $g(X)$ , удобно выразить ее функцию распределения  $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$  через  $F_X(x)$ .

**Пример:**

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает  $g(X) = \sqrt{X}$  **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

**Решение:**

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

# Распределение функции от непрерывной случайной величины

## Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины  $g(X)$ , удобно выразить ее функцию распределения  $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$  через  $F_X(x)$ .

**Пример:**

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает  $g(X) = \sqrt{X}$  **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

**Решение:**

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

# Распределение функции от непрерывной случайной величины

## Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины  $g(X)$ , удобно выразить ее функцию распределения  $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$  через  $F_X(x)$ .

**Пример:**

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает  $g(X) = \sqrt{X}$  **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

**Решение:**

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

# Распределение функции от непрерывной случайной величины

## Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины  $g(X)$ , удобно выразить ее функцию распределения  $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$  через  $F_X(x)$ .

**Пример:**

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает  $g(X) = \sqrt{X}$  **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

**Решение:**

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

$$F_{\sqrt{X}}(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = (x - 1)^2, \text{ при } x \in [\sqrt{1}, \sqrt{2}]$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

# Распределение функции от непрерывной случайной величины

## Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины  $g(X)$ , удобно выразить ее функцию распределения  $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$  через  $F_X(x)$ .

**Пример:**

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает  $g(X) = \sqrt{X}$  **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

**Решение:**

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

$$F_{\sqrt{X}}(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = (x - 1)^2, \text{ при } x \in [\sqrt{1}, \sqrt{2}]$$

$$f_{\sqrt{X}}(1.3) = \left( dF_{\sqrt{X}}(x)/dx \right) |_{x=1.3} = (d2(x - 1)/dx) / d|_{x=1.3} = 2(1.3 - 1) = 0.6$$

# Распределение функции от непрерывной случайной величины

## Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины  $g(X)$ , удобно выразить ее функцию распределения  $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$  через  $F_X(x)$ .

**Пример:**

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает  $g(X) = \sqrt{X}$  **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

**Решение:**

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

$$F_{\sqrt{X}}(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = (x - 1)^2, \text{ при } x \in [\sqrt{1}, \sqrt{2}]$$

$$f_{\sqrt{X}}(1.3) = \left( dF_{\sqrt{X}}(x)/dx \right) |_{x=1.3} = (d^2(x - 1)/dx) / d|_{x=1.3} = 2(1.3 - 1) = 0.6$$

$$f_{\sqrt{X}}(1.5) = \left( dF_{\sqrt{X}}(x)/dx \right) |_{x=1.5} = d1/dx|_{x=1.5} = 0, \text{ поскольку } F_{\sqrt{X}}(1.5) = F_X(1.5^2) = F_X(2.25) = 1$$

# Условное распределение

## Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества  $B_1$  и  $B_2$ , такие, что  $P(X \in B_1) > 0$  и  $P(X \in B_2) > 0$ .



# Условное распределение

## Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества  $B_1$  и  $B_2$ , такие, что  $P(X \in B_1) > 0$  и  $P(X \in B_2) > 0$ .
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

# Условное распределение

## Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества  $B_1$  и  $B_2$ , такие, что  $P(X \in B_1) > 0$  и  $P(X \in B_2) > 0$ .
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

# Условное распределение

## Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества  $B_1$  и  $B_2$ , такие, что  $P(X \in B_1) > 0$  и  $P(X \in B_2) > 0$ .
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , то события  $X \in B_1$  и  $x \in B_2$  несовместные, а значит  $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$ .

# Условное распределение

## Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества  $B_1$  и  $B_2$ , такие, что  $P(X \in B_1) > 0$  и  $P(X \in B_2) > 0$ .
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , то события  $X \in B_1$  и  $x \in B_2$  несовместные, а значит  $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$ .

### Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.

# Условное распределение

## Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества  $B_1$  и  $B_2$ , такие, что  $P(X \in B_1) > 0$  и  $P(X \in B_2) > 0$ .
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , то события  $X \in B_1$  и  $x \in B_2$  несовместные, а значит  $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$ .

### Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.

### Решение:

В данном случае  $B_1 = (5, \infty)$  и  $B_2 = [1, 6] \cup [8, 10]$ , откуда:

$$P(X \in (5, \infty) | X \in [1, 6] \cup [8, 10]) = \frac{P(X \in [5, \infty] \cap ([1, 6] \cup [8, 10]))}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} =$$

# Условное распределение

## Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества  $B_1$  и  $B_2$ , такие, что  $P(X \in B_1) > 0$  и  $P(X \in B_2) > 0$ .
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , то события  $X \in B_1$  и  $x \in B_2$  несовместные, а значит  $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$ .

### Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.

### Решение:

В данном случае  $B_1 = (5, \infty)$  и  $B_2 = [1, 6] \cup [8, 10]$ , откуда:

$$\begin{aligned} P(X \in (5, \infty) | X \in [1, 6] \cup [8, 10]) &= \frac{P(X \in [5, \infty] \cap ([1, 6] \cup [8, 10]))}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} = \\ &= \frac{P(X \in [5, 6] \cup [8, 10])}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} = \frac{P(X \in [5, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [5, 6] \cap [8, 10])}{P(X \in [1, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [1, 6] \cap [8, 10])} = \end{aligned}$$

# Условное распределение

## Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества  $B_1$  и  $B_2$ , такие, что  $P(X \in B_1) > 0$  и  $P(X \in B_2) > 0$ .
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , то события  $X \in B_1$  и  $x \in B_2$  несовместные, а значит  $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$ .

### Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.

### Решение:

В данном случае  $B_1 = (5, \infty)$  и  $B_2 = [1, 6] \cup [8, 10]$ , откуда:

$$\begin{aligned} P(X \in (5, \infty) | X \in [1, 6] \cup [8, 10]) &= \frac{P(X \in [5, \infty] \cap ([1, 6] \cup [8, 10]))}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} = \\ &= \frac{P(X \in [5, 6] \cup [8, 10])}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} = \frac{P(X \in [5, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [5, 6] \cap [8, 10])}{P(X \in [1, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [1, 6] \cap [8, 10])} = \\ &= \frac{P(X \in [5, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(\{\emptyset\})}{P(X \in [1, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(\{\emptyset\})} = \frac{\int_5^6 0.02x dx + \int_8^{10} 0.02x dx}{\int_1^6 0.02x dx + \int_8^{10} 0.02x dx} = \frac{47}{71} \end{aligned}$$

# Условное распределение

## Условная плотность

- Пусть  $B$  такое множество, что  $P(X \in B) > 0$ .



# Условное распределение

## Условная плотность

- Пусть  $B$  такое множество, что  $P(X \in B) > 0$ .
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B_1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

# Условное распределение

## Условная плотность

- Пусть  $B$  такое множество, что  $P(X \in B) > 0$ .
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|X \in B}(x)$$

# Условное распределение

## Условная плотность

- Пусть  $B$  такое множество, что  $P(X \in B) > 0$ .
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|X \in B}(x)$$

### Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

# Условное распределение

## Условная плотность

- Пусть  $B$  такое множество, что  $P(X \in B) > 0$ .
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|X \in B}(x)$$

### Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

### Решение:

$$P(X < 7) = \int_0^7 0.02x dx = 0.49$$

# Условное распределение

## Условная плотность

- Пусть  $B$  такое множество, что  $P(X \in B) > 0$ .
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|X \in B}(x)$$

### Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

### Решение:

$$P(X < 7) = \int_0^7 0.02x dx = 0.49$$

$$f_{X|X < 7}(x) = \begin{cases} 0.02x/0.49, & \text{если } x \in [0, 7] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

# Условное распределение

## Условная плотность

- Пусть  $B$  такое множество, что  $P(X \in B) > 0$ .
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|X \in B}(x)$$

### Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

### Решение:

$$P(X < 7) = \int_0^7 0.02x dx = 0.49$$

$$f_{X|X < 7}(x) = \begin{cases} 0.02x/0.49, & \text{если } x \in [0, 7] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$E(X|X < 7) = \int_0^7 x \times (0.02x)/0.49 dx \approx 4.67$$

# Условное распределение

## Усеченное распределение

- Условное распределение  $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$  именуется **усеченным распределением** случайной величины  $X$  с верхней и нижней границами усечения, равными  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, причем:

# Условное распределение

## Усеченное распределение

- Условное распределение  $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$  именуется **усеченным распределением** случайной величины  $X$  с верхней и нижней границами усечения, равными  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha \\ (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha)), & \text{если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & \text{если } x > \beta \end{cases}$$



# Условное распределение

## Усеченное распределение

- Условное распределение  $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$  именуется **усеченным распределением** случайной величины  $X$  с верхней и нижней границами усечения, равными  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha \\ (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha)), & \text{если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & \text{если } x > \beta \end{cases}$$

**Доказательство:** рассмотрим случай, когда  $x \in [\alpha, \beta]$ , другие случаи рассматриваются по аналогии:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = P(X \leq x | \alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq x) / P(\alpha \leq X \leq \beta) = (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha))$$

# Условное распределение

## Усеченное распределение

- Условное распределение  $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$  именуется **усеченным распределением** случайной величины  $X$  с верхней и нижней границами усечения, равными  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha \\ (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha)), & \text{если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & \text{если } x > \beta \end{cases}$$

**Доказательство:** рассмотрим случай, когда  $x \in [\alpha, \beta]$ , другие случаи рассматриваются по аналогии:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = P(X \leq x | \alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq x) / P(\alpha \leq X \leq \beta) = (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha))$$

- Функция плотности и моменты находятся обычным образом:

$$f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = dF_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x)/dx \qquad E(g(X)|\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) dx$$

# Условное распределение

## Усеченное распределение

- Условное распределение  $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$  именуется **усеченным распределением** случайной величины  $X$  с верхней и нижней границами усечения, равными  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha \\ (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha)), & \text{если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & \text{если } x > \beta \end{cases}$$

**Доказательство:** рассмотрим случай, когда  $x \in [\alpha, \beta]$ , другие случаи рассматриваются по аналогии:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = P(X \leq x | \alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq x) / P(\alpha \leq X \leq \beta) = (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha))$$

- Функция плотности и моменты находятся обычным образом:

$$f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = dF_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x)/dx \qquad E(g(X)|\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) dx$$

**Пример:**

- Доход ресторана является случайной величиной, функция распределения которой при  $x \in [5, 20]$  имеет вид:

$$F_X(x) = (x^2 - 25)/375$$

Найдите вероятность того, что доход ресторана не превысит 15, если известно, что он оказался больше 10, но меньше 18.

# Условное распределение

## Усеченное распределение

- Условное распределение  $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$  именуется **усеченным распределением** случайной величины  $X$  с верхней и нижней границами усечения, равными  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha \\ (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha)), & \text{если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & \text{если } x > \beta \end{cases}$$

**Доказательство:** рассмотрим случай, когда  $x \in [\alpha, \beta]$ , другие случаи рассматриваются по аналогии:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = P(X \leq x | \alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq x) / P(\alpha \leq X \leq \beta) = (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha))$$

- Функция плотности и моменты находятся обычным образом:

$$f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = dF_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x)/dx \qquad E(g(X)|\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) dx$$

**Пример:**

- Доход ресторана является случайной величиной, функция распределения которой при  $x \in [5, 20]$  имеет вид:

$$F_X(x) = (x^2 - 25)/375$$

Найдите вероятность того, что доход ресторана не превысит 15, если известно, что он оказался больше 10, но меньше 18.

**Решение:**

$$\begin{aligned} P(X \leq 15 | 10 \leq X \leq 18) &= F_{X|10 \leq X \leq 18}(15) = (F_X(15) - F_X(10)) / (F_X(18) - F_X(10)) = \\ &= (8/15 - 1/5) / (299/375 - 1/5) = 125/224 \end{aligned}$$