Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2023-2024

Дедлайн: решение домашнего задания загружается в виде единого файла, имеющего pdf-формат, в систему SmartLMS в разделе с соответствующим размещенным заданием до **3-го декабря включитьельно**. При наличии сбоев в работе системы файл необходимо направить на почту mirectvis@gmail.com. Тема письма должна иметь следующий формат: "МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ", например, "МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 1".

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №2

Задание №1. Выручка (60 баллов)

Вследствие падения метеорита на дороге длиной 10 километров между 2 и 5 километрами образовалась яма длиной 3 километра. Километр дороги, на котором случайно взятый автомобилист останавливается (он может ехать с любого конца дороги), является случайной величиной со следующей функцией плотности:

$$f_X(t) = \begin{cases} (0.05\alpha)t, \text{ если } t \in [0, 2] \\ 0, \text{ в противном случае} \\ 0.04(t - \alpha), \text{ если } t \in [5, 10] \end{cases}$$

1. Найдите параметр α и запишите функцию плотности с учетом его значения. **(5 баллов)**

2. Посчитайте, с какой вероятностью автомобиль остановится ранее, чем за 500 метров до ямы. **(5 баллов)**

3. Вычислите дисперсию километра, на котором автомобилист остановится. **(10 баллов)**

4. Определите вероятность, с которой автомобилист остановится ранее, чем за 500 метров до ямы, если он уже находится не далее, чем в 1 километре от нее. **(10 баллов)**

5. Найдите функцию распределения километра, на котором автомобилист остановится. **(10 баллов)**

6. Запишите функцию распределения случайной величины, отражающей число километров от автомобиля до ямы в момент, когда автомобилист остановится. **Подсказка:** рассмотрите два случая, когда расстояние до ямы меньше 2 километров, и когда – больше. При этом возможные значения функции распределения расстояния до ямы в момент остановики рассчитайте через вероятности случайной величины, отражающей километр остановки. **(10 баллов)**

7. Вычислите математическое ожидание случайной величины из предыдущего пункта. **(5 баллов)**

8. Найдите условное математическое оджидание случайной величины из предыдушего пункта, если известно, что расстояние до ямы составляет более 4 километров. **(5 баллов)**

Решение:

1. Поскольку интеграл функции плотности на носителе должен равняться единице, получаем:

$$\int_{0}^{2} 0.05\alpha t dt + \int_{5}^{10} 0.04(t - \alpha) t dt = 1$$

После взятия интегралов получаем:

$$1.5 - 0.1\alpha = 1$$

Отсюда следует, что $\alpha = 5$, а значит функция плотности имеет вид:

$$f_X(t) = \begin{cases} 0.25t, \text{ если } t \in [0, 2] \\ 0, \text{ в противном случае} \\ 0.04(t-5), \text{ если } t \in [5, 10] \end{cases}$$

2. Рассчитаем соответствующую вероятность:

$$P(X < 1.5 \cup X > 5.5) = P(X < 1.5) + P(X > 5.5) =$$
$$= \int\limits_0^{1.5} 0.25tdt + \int\limits_{5.5}^{10} 0.04(t-5)dt \approx 0.77625$$

3. Посчитаем первый и второй начальные моменты:

$$E(X) = \int\limits_0^2 0.25t \times tdt + \int\limits_5^{10} 0.04(t-5) \times tdt \approx 4.8333$$

$$E(X^2) = \int\limits_0^2 0.25t \times t^2dt + \int\limits_5^{10} 0.04(t-5) \times t^2dt \approx 36.4167$$

Отсюда получаем дисперсию:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \approx 36.4167 - 4.8333^2 \approx 13.06$$

4. Посчитаем условную вероятность:

$$P(X < 1.5 \cup X > 5.5 | X > 1 \cap X < 6) =$$
$$= P(X < 1.5 | X > 1 \cap X < 6) + P(X > 5.5 | X > 1 \cap X < 6) =$$
$$= \frac{P(1 < X < 1.5) + P(5.5 < X < 6)}{P(X \in [1, 2]) + P(X \in [5, 6])}$$

Вычислим соответствующие вероятности:

$$P(1 < X < 1.5) = \int\limits_1^{1.5} 0.25tdt = 0.15625$$

$$P(5.5 < X < 6) = \int\limits_{5.5}^{6} 0.04(t-5)dt = 0.015$$

$$P(X \in [1, 2]) = \int\limits_1^2 0.25tdt = 0.375$$

$$P(X \in [5, 6]) = \int\limits_5^6 0.04(t-5)dt = 0.02$$

В результате имеем:

$$P(X < 1.5 \cup X > 5.5 | X > 1 \cap X < 6) = \frac{0.15625 + 0.015}{0.375 + 0.02} \approx 0.4335$$

5. Найдем функцию распределения:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } t < 0 \\ \int\limits_0^t 0.25x dx, \text{ если } t \in [0, 2] \\ \int\limits_0^2 0.25x dx, \text{ если } t \in (2, 5) \\ \int\limits_0^2 0.25x dx + \int\limits_5^t 0.04(x-5) dx, \text{ если } t \in [5, 10] \\ 1, \text{ если } t > 10 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } t < 0 \\ 0.125t^2, \text{ если } t \in [0, 2] \\ 0.5, \text{ если } t \in (2, 5) \\ 0.02t^2 - 0.2t + 1, \text{ если } t \in [5, 10] \\ 1, \text{ если } t > 10 \end{cases}$$

6. Обозначим рассматриваемую случайную величину как Y. Поскольку $\text{supp}(Y) = (0, 5)$, то рассмотрим несколько случаев.

   Во-первых, если $t \in [0, 2]$, тогда:

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X \in [2 - t, 2]) + P(X \in [5, 5 + t]) =$$
$$= \int_{2-t}^{2} 0.25x dx + \int_{5}^{5+t} 0.04(x - 5) dx = 0.5t - 0.105t^2$$

   Во-вторых, при $t \in [2, 5]$, получаем:

$$F_Y(t) = P(Y \leq 2) + P(2 \leq Y \leq t) =$$
$$= 0.5 \times 2 - 0.105 \times 0.5^2 + P(X \in [7, 5 + t]) =$$
$$= 0.58 + \int_{7}^{5+t} 0.04(x - 5) dx = 0.02t^2 + 0.5$$

   В результате получаем:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < 0 \\ 0.5t - 0.105t^2, \text{ если } t \in [0, 2] \\ 0.02t^2 + 0.5, \text{ если } t \in (2, 5] \\ 1, \text{ если } t > 5 \end{cases}$$

7. Найдем функцию плотности рассматриваемой случайной величины:

$$f_Y(t) = \frac{dF_Y(t)}{dt} = \begin{cases} 0.5 - 0.21t, \text{ если } t \in [0, 2] \\ 0.04t, \text{ если } t \in (2, 5] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Пользуясь найденной функцией плотности рассчитаем математическое ожидание:

$$E(Y) = \int_0^2 0.5t - 0.21t^2 dt + \int_2^5 0.04t^2 dt = 2$$

8. Поскольку $\operatorname{supp}(Y|Y \geq 4)$, рассмотрим случай $t \in [4, 5]$:

$$F_{Y|Y\geq 4}(t) = P(Y \leq t|Y \geq 4) = \frac{P(Y \in [4, t])}{P(Y \geq 4)} =$$
$$= \frac{F_Y(t) - F_Y(4)}{1 - F_Y(4)} = \frac{(0.02t^2 + 0.5) - (0.02 \times 4^2 + 0.5)}{1 - (0.02 \times 4^2 + 0.5)} = \frac{t^2 - 16}{9}$$

Отсюда получаем, что при $t \in [4, 5]$:

$$f_Y(t) = \frac{2t}{9}$$

Пользуясь условной функцией плотности рассчитаем условное математическое ожидание:

$$E(Y|Y \geq 4) = \int_4^5 \frac{2t^2}{9} dt \approx 4.51$$

Задание №2. Последовательность Пуассоновских случайных величин (20 баллов)

Имеется последовательность Пуассоновских случайных величин $X_1, ..., X_n$ таких, что $X_n \sim \text{Pois}(\lambda_n)$, причем $\lambda_n = e^{-n}$.

1. Определите, к чему сходится по вероятности эта последовательность и формально докажите соответствующую сходимость при $\lambda_n = e^{-n}$. **(5 баллов)**

2. Докажите, что данная последовательность сходится по вероятности к 0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. **(5 баллов)**
   Подсказка:: сперва покажите, что из $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ следует сходимость рассматриваемой последовательности к нулю, а затем, что из сходимости этой последовательности к 0 следует $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

3. Определите, к чему сходится по вероятности последовательность $Y_n = \Phi\left(\frac{n - \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)$, если $\lambda_n = 1$ и X_i независимы. Ответ формально обоснуйте. **(5 баллов)**

4. При условиях, оговоренных в предыщем пункте предположим, что $Z_n = X_nY_n$. Запишите функцию вероятности распределения, к которому Z_n сходится по распределению. **(5 баллов)**

Решение:

1. Поскольку $E(X_n) = Var(X_n) = e^{-n}$, то очевидно, что соответствующая последовательность сходится по вероятности к 0. Покажем этот результат формально. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда согласно неравенству Маркова:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{\varepsilon} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}}{\varepsilon} = 0$$

Результат можно доказать и альтернативным образом:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} Var(X_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$$

2. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, тогда последовательность сходится по вероятности к 0, поскольку:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lambda_n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} Var(X_n) = \lambda_n = 0$$

Предположим, что последовательность сходится по вероятности к 0, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} Var(X_n) = 0$. Тогда из $E(X_n) = \lambda_n$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

3. Обратим внимание, что:

$$Y_n = \Phi\left(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Поскольку $\lambda_n = 1$, то X_n одинаково распределены, а так как элементы последовательности по условию являются независимыми, то применим закон больших чисел, вследствие которого:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n \xrightarrow{p} 1$$

Отсюда, по теореме Манна-Вальда получаем, что:

$$Y_n \xrightarrow{p} \Phi(1-1) = 0.5$$

4. Поскольку $\lambda_n = 1$, то $X_n \sim \text{Pois}(1)$, а значит $X_n \xrightarrow{d} \text{Pois}(1)$. Следовательно, по теореме Слуцкого получаем:

$$Z_n = X_nY_n \xrightarrow{p} Z, \text{ где } Z \sim 0.5\text{Pois}(1)$$

В результате имеем:

$$P(Z = x) = P(0.5X_1 = x) = P(X_1 = 2x) = \begin{cases} e^{-1}\frac{1^{2x}}{(2x)!}, \text{ если } x \in \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, ...\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Задание №3. Игра с кубиком и монеткой (20 баллов)

Лаврентий играет в следующую игру. Он бросает обычный кубик и затем, если монетка выпадает орлом, записывает себе число очков, выпавших на кубике. Если же выпадает решка, то он не добавляет себе ни единого очка. Лаврентий сыграл в эту игру 96 раз.

1. Посчитайте математическое ожидание и дисперсию суммарного числа очков, полученных Лаврентием. **(2 балла)**

2. С помощью центральной предельной теоремы найдите приблизительную вероятность того, что суммарно Лаврентий заработает от 160 до 180 очков. **(5 баллов)**

3. Определите, к чему сходится по вероятности разница между средним числом выпавших очков и средним количеством выпавших орлов. **(3 балла)**

4. Посчитайте вероятность того, что суммарное число выпавших очков превысит суммарное количество выпавших орлов более, чем в 3 раза. **(10 баллов)**

Решение:

1. Обозначим через X_i число заработанных Лаврентием очков по результатам i-го броска, где $i \in \{1, ..., 100\}$. Нетрудно показать, что:

$$P(X_i = 0) = 0.5 \qquad P(X_i = 1) = ... = P(X_i = 6) = \frac{1}{12}$$

Отсюда получаем математическое ожидание и дисперсию:

$$E(X_i) = \frac{1+2+3+4+5+6}{12} = 1.75$$
$$E(X_i^2) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{12} = \frac{91}{12}$$
$$Var(X_i) = \frac{91}{12} - 1.75^2 = \frac{217}{48}$$

Посчитаем эти характеристики для суммарнго числа очков, пользуясь их независимостью:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nE(X_1) = 96 \times 1.75 = 168$$
$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = nVar(X_i) = 96 \times \frac{217}{48} = 434$$

2. Поскольку число очков, полученных при том или ином броске можно рассматривать как независимые и одинаково распределенные случайные величины, можно положить:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \dot{\sim} N\left(96 * 1.75, 96 * \frac{217}{48}\right) = N\left(168, 434\right)$$

Рассчитаем искомую вероятность:

$$P\left(160 \leq \sum_{i=1}^{n} X_i \leq 180\right) = \Phi\left(\frac{180-168}{\sqrt{434}}\right) - \Phi\left(\frac{160-168}{\sqrt{434}}\right) \approx 0.367$$

3. Обозначим через $Y_i \sim Ber(0.5)$ число орлов, выпавших при i-м броске. Найдем математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины:

$$E(Y_i) = 0.5 \qquad Var(Y_i) = 0.5 \times (1 - 0.5) = 0.25$$

   Поскольку случанйые величины $X_i - Y_i$ независимы, то можно воспользовать законом больших чисел:

$$E(X_i - Y_i) = 1.75 - 0.5 = 1.25$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i) \xrightarrow{p} 1.25$$

4. Рассмотрим случайную величину $X_i - 3Y_i$. Найдем ее математическое ожидание и дисперсию:

$$E(X_i - 3Y_i) = 1.75 - 3 \times 0.5 = 0.25$$
$$E(X_iY_i) = E(X_iY_i|Y_i = 1)P(Y_i = 1) + E(X_iY_i|Y_i = 0)P(Y_i = 0) =$$
$$= 3.5 \times 0.5 + 0 \times 0.5 = 1.75$$
$$Cov(X_i, Y_i) = Cov(X_i, Y_i) = 1.75 - 1.75 \times 0.5 = 0.875$$
$$Var(X_i - 3Y_i) = Var(X_i) + 9Var(Y_i) - 6Cov(X_i, Y_i) =$$
$$= \frac{217}{48} + 9 \times 0.25 - 6 \times 0.875 = \frac{73}{48}$$

   Применяя ЦПТ получаем, что:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i - 3Y_i \sim N\left(0.25 \times 96, \frac{73}{48} \times 96\right) = N(24, 146)$$

   Рассчитаем искомую вероятность:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \sum_{i=1}^{n} 3Y_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 3Y_i \geq 0\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - 24}{\sqrt{146}}\right) \approx 0.9765$$