

Теория Вероятностей и Статистика

Сходимость по вероятности

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021

Границы вероятностей

Неравенство Маркова

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X < 0) = 0$, то при любом $\alpha > 0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Границы вероятностей

Неравенство Маркова

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X < 0) = 0$, то при любом $\alpha > 0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha > 0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X :

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

Границы вероятностей

Неравенство Маркова

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X < 0) = 0$, то при любом $\alpha > 0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha > 0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X :

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

$$E(X) = \sum_{t \in \text{supp}(X)} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \text{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \text{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)\alpha = \alpha P(X \geq \alpha)$$

Границы вероятностей

Неравенство Маркова

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X < 0) = 0$, то при любом $\alpha > 0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha > 0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X :

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

$$E(X) = \sum_{t \in \text{supp}(X)} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \text{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \text{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)\alpha = \alpha P(X \geq \alpha)$$

Пример:

- Срок службы видеокарты (в годах) является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 2. При помощи неравенства Маркова определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что видеокарта прослужит не менее (не более) 10 лет.

Границы вероятностей

Неравенство Маркова

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X < 0) = 0$, то при любом $\alpha > 0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha > 0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X :

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

$$E(X) = \sum_{t \in \text{supp}(X)} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \text{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \text{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)\alpha = \alpha P(X \geq \alpha)$$

Пример:

- Срок службы видеокарты (в годах) является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 2. При помощи неравенства Маркова определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что видеокарта прослужит не менее (не более) 10 лет.

Решение: обратим внимание, что $P(X < 0) = 0$, $E(X) = 2$ и $\alpha = 10$, откуда:

Границы вероятностей

Неравенство Маркова

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X < 0) = 0$, то при любом $\alpha > 0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha > 0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X :

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

$$E(X) = \sum_{t \in \text{supp}(X)} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \text{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \text{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)\alpha = \alpha P(X \geq \alpha)$$

Пример:

- Срок службы видеокарты (в годах) является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 2. При помощи неравенства Маркова определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что видеокарта прослужит не менее (не более) 10 лет.

Решение: обратим внимание, что $P(X < 0) = 0$, $E(X) = 2$ и $\alpha = 10$, откуда:

$$\text{Верхняя граница: } P(X \geq 10) \leq \frac{2}{10} = 0.2$$

Границы вероятностей

Неравенство Маркова

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X < 0) = 0$, то при любом $\alpha > 0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha > 0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X :

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

$$E(X) = \sum_{t \in \text{supp}(X)} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \text{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \text{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)\alpha = \alpha P(X \geq \alpha)$$

Пример:

- Срок службы видеокарты (в годах) является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 2. При помощи неравенства Маркова определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что видеокарта прослужит не менее (не более) 10 лет.

Решение: обратим внимание, что $P(X < 0) = 0$, $E(X) = 2$ и $\alpha = 10$, откуда:

$$\text{Верхняя граница: } P(X \geq 10) \leq \frac{2}{10} = 0.2$$

$$\text{Нижняя граница: } P(X \leq 10) = 1 - P(X \geq 10) \geq 1 - 0.2 = 0.8$$

Границы вероятностей

Неравенство Чебышева

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}, \alpha > 0$$

Границы вероятностей

Неравенство Чебышева

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}, \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

Границы вероятностей

Неравенство Чебышева

- У случайной величины X для краткости обозначим $\text{Var}(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}, \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

$$P((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) = P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

Границы вероятностей

Неравенство Чебышева

- У случайной величины X для краткости обозначим $\text{Var}(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}, \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

$$P((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) = P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

- Полагая $\alpha = k\sigma$ можно переписать это неравенство в виде:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, k > 0$$

Границы вероятностей

Неравенство Чебышева

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}, \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

$$P((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) = P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

- Полагая $\alpha = k\sigma$ можно переписать это неравенство в виде:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, k > 0$$

Пример:

- Прибыль фирмы является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 10 и дисперсией 25. При помощи неравенства Чебышева определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что прибыль фирмы отклонится от ожидаемой более (менее), чем на 3.

Границы вероятностей

Неравенство Чебышева

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}, \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

$$P((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) = P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

- Полагая $\alpha = k\sigma$ можно переписать это неравенство в виде:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, k > 0$$

Пример:

- Прибыль фирмы является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 10 и дисперсией 25. При помощи неравенства Чебышева определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что прибыль фирмы отклонится от ожидаемой более (менее), чем на 3.

Решение: пользуясь тем, что речь идет о непрерывной с.в., заменим строгие неравенства на нестрогие:

$$\text{Верхняя граница: } P(|X - 10| > 3) = P(|X - 10| \geq 3) \leq 3^2/25 = 9/25$$

Границы вероятностей

Неравенство Чебышева

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}, \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

$$P((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) = P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

- Полагая $\alpha = k\sigma$ можно переписать это неравенство в виде:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, k > 0$$

Пример:

- Прибыль фирмы является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 10 и дисперсией 25. При помощи неравенства Чебышева определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что прибыль фирмы отклонится от ожидаемой более (менее), чем на 3.

Решение: пользуясь тем, что речь идет о непрерывной с.в., заменим строгие неравенства на нестрогие:

$$\text{Верхняя граница: } P(|X - 10| > 3) = P(|X - 10| \geq 3) \leq 3^2/25 = 9/25$$

$$\text{Нижняя граница: } P(|X - 10| < 3) = 1 - P(|X - 10| \geq 3) \geq 1 - 3^2/25 = 16/25$$

Сходимость по вероятности

Определение

- Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится по вероятности** к случайной величине X , что обозначается как $X_n \xrightarrow{P} X$ или $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0$$

Сходимость по вероятности

Определение

- Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится по вероятности** к случайной величине X , что обозначается как $X_n \xrightarrow{P} X$ или $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность **стандартных нормальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X . Известно, что $\text{Cov}(X_n, X) = \frac{n-1}{n}$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по вероятности данная последовательность к X .

Сходимость по вероятности

Определение

- Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится по вероятности** к случайной величине X , что обозначается как $X_n \xrightarrow{P} X$ или $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность **стандартных нормальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X . Известно, что $\text{Cov}(X_n, X) = \frac{n-1}{n}$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по вероятности данная последовательность к X .
Решение: найдем распределение $X_n - X$:

$$\begin{cases} E(X_n - X) = E(X_n) - E(X) = 0 - 0 = 0 \\ \text{Var}(X_n - X) = \text{Var}(X_n) + \text{Var}(X) - 2\text{Cov}(X_n, X) = 1 + 1 - 2\frac{n-1}{n} \end{cases} \implies (X_n - X) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{n}\right)$$

Сходимость по вероятности

Определение

- Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится по вероятности** к случайной величине X , что обозначается как $X_n \xrightarrow{P} X$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{plim } X_n = X$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность **стандартных нормальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X . Известно, что $\text{Cov}(X_n, X) = \frac{n-1}{n}$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по вероятности данная последовательность к X .

Решение: найдем распределение $X_n - X$:

$$\begin{cases} E(X_n - X) = E(X_n) - E(X) = 0 - 0 = 0 \\ \text{Var}(X_n - X) = \text{Var}(X_n) + \text{Var}(X) - 2\text{Cov}(X_n, X) = 1 + 1 - 2\frac{n-1}{n} \end{cases} \implies (X_n - X) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{n}\right)$$

Сходимость $X_n \xrightarrow{P} X$ выполняется, поскольку для любого $\epsilon > 0$ соблюдается:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} [P(X_n - X > \epsilon) + P(X_n - X < -\epsilon)] =$$

Сходимость по вероятности

Определение

- Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится по вероятности** к случайной величине X , что обозначается как $X_n \xrightarrow{P} X$ или $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность **стандартных нормальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X . Известно, что $\text{Cov}(X_n, X) = \frac{n-1}{n}$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по вероятности данная последовательность к X .

Решение: найдем распределение $X_n - X$:

$$\begin{cases} E(X_n - X) = E(X_n) - E(X) = 0 - 0 = 0 \\ \text{Var}(X_n - X) = \text{Var}(X_n) + \text{Var}(X) - 2\text{Cov}(X_n, X) = 1 + 1 - 2\frac{n-1}{n} \end{cases} \implies (X_n - X) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{n}\right)$$

Сходимость $X_n \xrightarrow{P} X$ выполняется, поскольку для любого $\epsilon > 0$ соблюдается:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n - X > \epsilon) + P(X_n - X < -\epsilon) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{\epsilon - 0}{\sqrt{\frac{2}{n}}} \right) \right) = 2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi \left(\frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{2}} \right) = 2 - 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(k) = 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Сходимость по вероятности

Сходимость по вероятности к константе (частный случай)

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.

Сходимость по вероятности

Сходимость по вероятности к константе (частный случай)

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.
- $X_n \xrightarrow{P} c$ тогда и только тогда, когда соблюдаются следующие условия:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) &= c \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) &= 0\end{aligned}$$

Сходимость по вероятности

Сходимость по вероятности к константе (частный случай)

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.
- $X_n \xrightarrow{P} c$ тогда и только тогда, когда соблюдаются следующие условия:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) &= c \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) &= 0\end{aligned}$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots , таких, что $X_n \sim EXP(n)$. Покажите, что эта последовательность сходится по вероятности к $c = 0$.

Сходимость по вероятности

Сходимость по вероятности к константе (частный случай)

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.
- $X_n \xrightarrow{P} c$ тогда и только тогда, когда соблюдаются следующие условия:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) &= c \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) &= 0\end{aligned}$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots , таких, что $X_n \sim \text{EXP}(n)$. Покажите, что эта последовательность сходится по вероятности к $c = 0$.

Решение:

Способ 1 (используя упрощенный способ для констант):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = 1/n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2 = 0$$

Сходимость по вероятности

Сходимость по вероятности к константе (частный случай)

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.
- $X_n \xrightarrow{P} c$ тогда и только тогда, когда соблюдаются следующие условия:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) &= c \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) &= 0\end{aligned}$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots , таких, что $X_n \sim \text{EXP}(n)$. Покажите, что эта последовательность сходится по вероятности к $c = 0$.

Решение:

Способ 1 (используя упрощенный способ для констант):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = 1/n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2 = 0$$

Способ 2 (используя общий подход):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n\epsilon} = 0$$

Сходимость по вероятности

Сходимость по вероятности к константе (частный случай)

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.
- $X_n \xrightarrow{P} c$ тогда и только тогда, когда соблюдаются следующие условия:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) &= c \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) &= 0\end{aligned}$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots , таких, что $X_n \sim \text{EXP}(n)$. Покажите, что эта последовательность сходится по вероятности к $c = 0$.

Решение:

Способ 1 (используя упрощенный способ для констант):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = 1/n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2 = 0$$

Способ 2 (используя общий подход):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n\epsilon} = 0$$

Способ 3 (используя неравенство Маркова):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\epsilon} = 0$$

Сходимость по вероятности

О малое

- Пусть имеется последовательность $X_1/\alpha_1, X_2/\alpha_2, \dots$ со множеством индексов I , где при любом $i \in I$: X_i – случайная величина, а α_i – отличная от нуля константа. Если эта последовательность сходится по вероятности к нулю, то записывают:

$$X_n = o_p(\alpha_n) \text{ или } \frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$$

Сходимость по вероятности

О малое

- Пусть имеется последовательность $X_1/\alpha_1, X_2/\alpha_2, \dots$ со множеством индексов I , где при любом $i \in I$: X_i – случайная величина, а α_i – отличная от нуля константа. Если эта последовательность сходится по вероятности к нулю, то записывают:

$$X_n = o_p(\alpha_n) \text{ или } \frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$$

- В частности, запись $X_n = o_p(1)$ эквивалентна $X_n \xrightarrow{p} 0$, а запись $\frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$ эквивалентна $\frac{X_n}{\alpha_n} \xrightarrow{p} 0$. То есть знак равенства не нужно воспринимать буквально.

Сходимость по вероятности

О малое

- Пусть имеется последовательность $X_1/\alpha_1, X_2/\alpha_2, \dots$ со множеством индексов I , где при любом $i \in I$: X_i – случайная величина, а α_i – отличная от нуля константа. Если эта последовательность сходится по вероятности к нулю, то записывают:

$$X_n = o_p(\alpha_n) \text{ или } \frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$$

- В частности, запись $X_n = o_p(1)$ эквивалентна $X_n \xrightarrow{p} 0$, а запись $\frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$ эквивалентна $\frac{X_n}{\alpha_n} \xrightarrow{p} 0$. То есть знак равенства не нужно воспринимать буквально.
- Если $Y_n = o_p(1)$, то часто записывают $X_n + Y_n = X_n + o_p(1)$.

Сходимость по вероятности

О малое

- Пусть имеется последовательность $X_1/\alpha_1, X_2/\alpha_2, \dots$ со множеством индексов I , где при любом $i \in I$: X_i – случайная величина, а α_i – отличная от нуля константа. Если эта последовательность сходится по вероятности к нулю, то записывают:

$$X_n = o_p(\alpha_n) \text{ или } \frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$$

- В частности, запись $X_n = o_p(1)$ эквивалентна $X_n \xrightarrow{p} 0$, а запись $\frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$ эквивалентна $\frac{X_n}{\alpha_n} \xrightarrow{p} 0$. То есть знак равенства не нужно воспринимать буквально.
- Если $Y_n = o_p(1)$, то часто записывают $X_n + Y_n = X_n + o_p(1)$.

Пример:

Имеется последовательность X_1, X_2, \dots нормальных случайных величин, таких, что $X_n \sim \mathcal{N}(0, n)$.

Покажите, что $X_n = o_p(n)$.

Сходимость по вероятности

О малое

- Пусть имеется последовательность $X_1/\alpha_1, X_2/\alpha_2, \dots$ со множеством индексов I , где при любом $i \in I$: X_i – случайная величина, а α_i – отличная от нуля константа. Если эта последовательность сходится по вероятности к нулю, то записывают:

$$X_n = o_p(\alpha_n) \text{ или } \frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$$

- В частности, запись $X_n = o_p(1)$ эквивалентна $X_n \xrightarrow{p} 0$, а запись $\frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$ эквивалентна $\frac{X_n}{\alpha_n} \xrightarrow{p} 0$. То есть знак равенства не нужно воспринимать буквально.
- Если $Y_n = o_p(1)$, то часто записывают $X_n + Y_n = X_n + o_p(1)$.

Пример:

Имеется последовательность X_1, X_2, \dots нормальных случайных величин, таких, что $X_n \sim \mathcal{N}(0, n)$.

Покажите, что $X_n = o_p(n)$.

Решение: обратим внимание, что $\frac{X_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(\frac{0}{n}, \frac{n}{n^2}\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$, откуда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - 0\right| \geq \varepsilon\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n}{n} > \varepsilon\right) + P\left(\frac{X_n}{n} < -\varepsilon\right) = 2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) = 0$$

Теоремы о сходимости по вероятности

Теорема Манна-Вальда (continuous mapping theorem) о сходимости по вероятности

- Пусть имеется функция $g(x)$ и случайная величина X (которая может быть и константой). Множество точек разрыва этой функции обозначим как D_g . По **теореме Манна-Вальда** если $P(X \in D_g) = 0$, то из $X_n \xrightarrow{P} X$ следует $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

Теоремы о сходимости по вероятности

Теорема Манна-Вальда (continuous mapping theorem) о сходимости по вероятности

- Пусть имеется функция $g(x)$ и случайная величина X (которая может быть и константой). Множество точек разрыва этой функции обозначим как D_g . По **теореме Манна-Вальда** если $P(X \in D_g) = 0$, то из $X_n \xrightarrow{P} X$ следует $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

Пример:

- Рассмотрим последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots , таких, что $X_n \sim EXP(n)$. Найдите, к чему сходится по вероятности последовательность $(X_1 + 10)^2, (X_2 + 10)^2, \dots$.

Теоремы о сходимости по вероятности

Теорема Манна-Вальда (continuous mapping theorem) о сходимости по вероятности

- Пусть имеется функция $g(x)$ и случайная величина X (которая может быть и константой). Множество точек разрыва этой функции обозначим как D_g . По **теореме Манна-Вальда** если $P(X \in D_g) = 0$, то из $X_n \xrightarrow{P} X$ следует $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

Пример:

- Рассмотрим последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots , таких, что $X_n \sim EXP(n)$. Найдите, к чему сходится по вероятности последовательность $(X_1 + 10)^2, (X_2 + 10)^2, \dots$.

Решение:

В данном случае речь идет о функции $g(x) = (x + 10)^2$, которая не имеет разрывов.

Ранее было показано, что $X_n \xrightarrow{P} 0$, откуда, по теореме Манна-Вальда, получаем $(X_n + 10)^2 \xrightarrow{P} (0 + 10)^2$, то есть $(X_n + 10)^2 \xrightarrow{P} 100$.

Теоремы о сходимости по вероятности

Закон больших чисел (ЗБЧ)

- Имеется бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots , у которых $E(X_1) = \mu$ и $Var(X_1) = \sigma^2$. Тогда по **закону больших чисел (ЗБЧ)**:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} \mu$$

Теоремы о сходимости по вероятности

Закон больших чисел (ЗБЧ)

- Имеется бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots , у которых $E(X_1) = \mu$ и $Var(X_1) = \sigma^2$. Тогда по **закону больших чисел** (ЗБЧ):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} \mu$$

Доказательство: применим одинаковую распределенность $Var(X_1) = Var(X_2) = \dots = \sigma^2$ и независимость:

$$Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times Var(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Теоремы о сходимости по вероятности

Закон больших чисел (ЗБЧ)

- Имеется бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots , у которых $E(X_1) = \mu$ и $Var(X_1) = \sigma^2$. Тогда по **закону больших чисел (ЗБЧ)**:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$$

Доказательство: применим одинаковую распределенность $Var(X_1) = Var(X_2) = \dots = \sigma^2$ и независимость:

$$Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times Var(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Используя неравенство Чебышева получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| > \epsilon\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| \geq \epsilon\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} = 0$$

Теоремы о сходимости по вероятности

Закон больших чисел (ЗБЧ)

- Имеется бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots , у которых $E(X_1) = \mu$ и $Var(X_1) = \sigma^2$. Тогда по **закону больших чисел (ЗБЧ)**:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$$

Доказательство: применим одинаковую распределенность $Var(X_1) = Var(X_2) = \dots = \sigma^2$ и независимость:

$$Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times Var(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Используя неравенство Чебышева получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| > \epsilon\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| \geq \epsilon\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} = 0$$

Пример: Лаврентий бесконечное число раз подбрасывает обычную монетку. Найдите, к чему стремится по вероятности доля выпавших орлов.

Теоремы о сходимости по вероятности

Закон больших чисел (ЗБЧ)

- Имеется бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots , у которых $E(X_1) = \mu$ и $Var(X_1) = \sigma^2$. Тогда по **закону больших чисел (ЗБЧ)**:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} \mu$$

Доказательство: применим одинаковую распределенность $Var(X_1) = Var(X_2) = \dots = \sigma^2$ и независимость:

$$Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times Var(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Используя неравенство Чебышева получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| > \epsilon\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| \geq \epsilon\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} = 0$$

Пример: Лаврентий бесконечное число раз подбрасывает обычную монетку. Найдите, к чему стремится по вероятности доля выпавших орлов.

Решение: мы имеем дело с бесконечной последовательности независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин с параметром $p = 0.5$. Поскольку $E(X_i) = 0.5$, то по ЗБЧ:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} 0.5$$

Дополнительные примеры

Фирма и ЗБЧ

- Каждый день прибыль фирмы является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием и дисперсией, равными одному. Также, прибыль не зависит от прибыли, полученной ранее. Пользуясь законом больших чисел, определите, к чему стремится по вероятности средняя прибыль фирмы, а также вероятность того, что средняя прибыль за год отклонится от ожидаемой средней прибыли более, чем на 10%.

Дополнительные примеры

Фирма и ЗБЧ

- Каждый день прибыль фирмы является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием и дисперсией, равными одному. Также, прибыль не зависит от прибыли, полученной ранее. Пользуясь законом больших чисел, определите, к чему стремится по вероятности средняя прибыль фирмы, а также вероятность того, что средняя прибыль за год отклонится от ожидаемой средней прибыли более, чем на 10%.

Решение

Поскольку ежедневные прибыли являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, то в силу ЗБЧ:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} 1$$

Дополнительные примеры

Фирма и ЗБЧ

- Каждый день прибыль фирмы является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием и дисперсией, равными одному. Также, прибыль не зависит от прибыли, полученной ранее. Пользуясь законом больших чисел, определите, к чему стремится по вероятности средняя прибыль фирмы, а также вероятность того, что средняя прибыль за год отклонится от ожидаемой средней прибыли более, чем на 10%.

Решение

Поскольку ежедневные прибыли являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, то в силу ЗБЧ:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} 1$$

Обратим внимание, что:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(1, \frac{1}{n}\right)$$

Дополнительные примеры

Фирма и ЗБЧ

- Каждый день прибыль фирмы является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием и дисперсией, равными одному. Также, прибыль не зависит от прибыли, полученной ранее. Пользуясь законом больших чисел, определите, к чему стремится по вероятности средняя прибыль фирмы, а также вероятность того, что средняя прибыль за год отклонится от ожидаемой средней прибыли более, чем на 10%.

Решение

Поскольку ежедневные прибыли являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, то в силу ЗБЧ:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} 1$$

Обратим внимание, что:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(1, \frac{1}{n}\right)$$

Отсюда получаем искомую вероятность:

$$P\left(\left|\frac{1}{365} \sum_{i=1}^{365} X_i - 1\right| \geq 0.1 \times 1\right) = P\left(\frac{1}{365} \sum_{i=1}^{365} X_i \geq 1.1\right) + P\left(\frac{1}{365} \sum_{i=1}^{365} X_i \leq 0.9\right) =$$

Дополнительные примеры

Фирма и ЗБЧ

- Каждый день прибыль фирмы является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием и дисперсией, равными одному. Также, прибыль не зависит от прибыли, полученной ранее. Пользуясь законом больших чисел, определите, к чему стремится по вероятности средняя прибыль фирмы, а также вероятность того, что средняя прибыль за год отклонится от ожидаемой средней прибыли более, чем на 10%.

Решение

Поскольку ежедневные прибыли являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, то в силу ЗБЧ:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} 1$$

Обратим внимание, что:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(1, \frac{1}{n}\right)$$

Отсюда получаем искомую вероятность:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{365} \sum_{i=1}^{365} X_i - 1\right| \geq 0.1 \times 1\right) &= P\left(\frac{1}{365} \sum_{i=1}^{365} X_i \geq 1.1\right) + P\left(\frac{1}{365} \sum_{i=1}^{365} X_i \leq 0.9\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1.1 - 1}{\sqrt{1/365}}\right) + \Phi\left(\frac{0.9 - 1}{\sqrt{1/365}}\right) \approx 0.056 \end{aligned}$$