Теория Вероятностей и Статистика

Гипотезы о параметрах распределения

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2022-2023

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ, ММП оценку которого обозначим как $\hat{\theta}_n$.

Тестирование гипотез с помощью ММП оценок

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ, ММП оценку которого обозначим как $\hat{\theta}_n$.
- Пользуясь асимптотической нормальностью ММП оценок, при $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : \theta = \theta_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \sqrt{ni(\theta_0)}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right), \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Где допустима замена информации Фишера $i(\theta_0)$ на оценку $i(\hat{\theta}_n)$.

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ, ММП оценку которого обозначим как $\hat{\theta}_n$.
- Пользуясь асимптотической нормальностью ММП оценок, при $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : \theta = \theta_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \sqrt{ni(\theta_0)}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right), \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

  Где допустима замена информации Фишера $i(\theta_0)$ на оценку $i(\hat{\theta}_n)$.
- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

Тестирование гипотез с помощью ММП оценок

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ, ММП оценку которого обозначим как $\hat{\theta}_n$.
- Пользуясь асимптотической нормальностью ММП оценок, при $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : \theta = \theta_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \sqrt{ni(\theta_0)}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right), \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

  Где допустима замена информации Фишера $i(\theta_0)$ на оценку $i(\hat{\theta}_n)$.
- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \theta < \theta_0$	$H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -z_{1-\alpha})$	$\left(-\infty, -z_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(z_{1-\alpha/2}, \infty\right)$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$\Phi(T(x))$	$2\min\left(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x))\right)$	$1 - \Phi(T(x))$

Тестирование гипотез с помощью ММП оценок

Пример

Число ежедневных покупок в приложении описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа покупок в предыдущие дни. Общее число покупок за 100 дней составило 1000. На 10%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что в с среднем в день в магазине совершается 8 покупок, против альтернативы о том, что в среднем покупки происходят чаще.

Тестирование гипотез с помощью ММП оценок

Пример

Число ежедневных покупок в приложении описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа покупок в предыдущие дни. Общее число покупок за 100 дней составило 1000. На 10%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что в с среднем в день в магазине совершается 8 покупок, против альтернативы о том, что в среднем покупки происходят чаще.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \lambda = 8$ и $H_1 : \lambda > 8$, где $X_1 \sim Pois(\lambda)$.

Тестирование гипотез с помощью ММП оценок

Пример

Число ежедневных покупок в приложении описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа покупок в предыдущие дни. Общее число покупок за 100 дней составило 1000. На 10%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что в с среднем в день в магазине совершается 8 покупок, против альтернативы о том, что в среднем покупки происходят чаще.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \lambda = 8$ и $H_1 : \lambda > 8$, где $X_1 \sim Pois(\lambda)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$.

Тестирование гипотез с помощью ММП оценок

Пример

Число ежедневных покупок в приложении описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа покупок в предыдущие дни. Общее число покупок за 100 дней составило 1000. На 10%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что в с среднем в день в магазине совершается 8 покупок, против альтернативы о том, что в среднем покупки происходят чаще.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \lambda = 8$ и $H_1 : \lambda > 8$, где $X_1 \sim Pois(\lambda)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$.
- Так как $\hat{\lambda}_{100}(x) = \overline{x}_{100} = 1000/100 = 10$ и $i(8) = 1/8 = 0.125$, то:

$$T(x) = \sqrt{100 \times 0.125}(10 - 8) \approx 7.07$$

Тестирование гипотез с помощью ММП оценок

Пример

Число ежедневных покупок в приложении описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа покупок в предыдущие дни. Общее число покупок за 100 дней составило 1000. На 10%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что в с среднем в день в магазине совершается 8 покупок, против альтернативы о том, что в среднем покупки происходят чаще.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \lambda = 8$ и $H_1 : \lambda > 8$, где $X_1 \sim Pois(\lambda)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$.
- Так как $\hat{\lambda}_{100}(x) = \overline{x}_{100} = 1000/100 = 10$ и $i(8) = 1/8 = 0.125$, то:

$$T(x) = \sqrt{100 \times 0.125}(10 - 8) \approx 7.07$$

- В силу того, что $7.07 \in (1.28, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 10%-м уровне значимости.

Число ежедневных покупок в приложении описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа покупок в предыдущие дни. Общее число покупок за 100 дней составило 1000. На 10%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что в с среднем в день в магазине совершается 8 покупок, против альтернативы о том, что в среднем покупки происходят чаще.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \lambda = 8$ и $H_1 : \lambda > 8$, где $X_1 \sim Pois(\lambda)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$.
- Так как $\hat{\lambda}_{100}(x) = \overline{x}_{100} = 1000/100 = 10$ и $i(8) = 1/8 = 0.125$, то:
$$T(x) = \sqrt{100 \times 0.125}(10 - 8) \approx 7.07$$
- В силу того, что $7.07 \in (1.28, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, p-value$=1 - \Phi(7.07) \approx 0$, а значит нулевая гипотеза отвергается на любом разумном уровне значимости.

- Рассмотрим выборку $X=(X_1,...,X_n)$ из распределения с параметром θ, ММП оценку строго монотонной функции от которого $g(\theta)$ обозначим как $g(\hat{\theta}_n)$.

Тестирование гипотез с помощью инвариантности ММП оценок

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ, ММП оценку строго монотонной функции от которого $g(\theta)$ обозначим как $g(\hat{\theta}_n)$.
- Пользуясь инвариантностью ММП оценок при $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : g(\theta) = g_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \sqrt{\frac{ni(\hat{\theta}_n)}{g'(\hat{\theta}_n)^2}}\left(g(\hat{\theta}_n) - g_0\right), \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Тестирование гипотез с помощью инвариантности ММП оценок

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ, ММП оценку строго монотонной функции от которого $g(\theta)$ обозначим как $g(\hat{\theta}_n)$.
- Пользуясь инвариантностью ММП оценок при $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : g(\theta) = g_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \sqrt{\frac{ni(\hat{\theta}_n)}{g'(\hat{\theta}_n)^2}}\left(g(\hat{\theta}_n) - g_0\right), \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

Тестирование гипотез с помощью инвариантности ММП оценок

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ, ММП оценку строго монотонной функции от которого $g(\theta)$ обозначим как $g(\hat{\theta}_n)$.
- Пользуясь инвариантностью ММП оценок при $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : g(\theta) = g_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \sqrt{\frac{ni(\hat{\theta}_n)}{g'(\hat{\theta}_n)^2}}\left(g(\hat{\theta}_n) - g_0\right), \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : g(\theta) < g_0$	$H_1 : g(\theta) \neq g_0$	$H_1 : g(\theta) > g_0$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -z_{1-\alpha})$	$\left(-\infty, -z_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(z_{1-\alpha/2}, \infty\right)$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$\Phi(T(x))$	$2\min\left(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x))\right)$	$1 - \Phi(T(x))$

Тестирование гипотез с помощью инвариантности ММП оценок

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ, ММП оценку строго монотонной функции от которого $g(\theta)$ обозначим как $g(\hat{\theta}_n)$.
- Пользуясь инвариантностью ММП оценок при $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : g(\theta) = g_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \sqrt{\frac{ni(\hat{\theta}_n)}{g'(\hat{\theta}_n)^2}}\left(g(\hat{\theta}_n) - g_0\right), \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : g(\theta) < g_0$	$H_1 : g(\theta) \neq g_0$	$H_1 : g(\theta) > g_0$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -z_{1-\alpha})$	$(-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$\Phi(T(x))$	$2\min(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x)))$	$1 - \Phi(T(x))$

- Пользуясь монотонностью функции $g(.)$ вместо описанной процедуры можно также протестировать гипотезу $H_0 : \theta = g^{-1}(g_0)$. Однако, такой подход обычно не обобщается на случай, когда θ является вектором параметров.

Тестирование гипотез с помощью инвариантности ММП оценок

Пример

Число расследованных Жегловым за день преступлений описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа преступлений, расследованных ранее. Общее число расследованных преступлений за 1000 дней составило 100. На 5%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что вероятность того, что за день не будет расследовано ни одного преступления, равняется 0.9, против альтернативы о том, что соответствующая вероятность меньше.

Тестирование гипотез с помощью инвариантности ММП оценок

Пример

Число расследованных Жегловым за день преступлений описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа преступлений, расследованных ранее. Общее число расследованных преступлений за 1000 дней составило 100. На 5%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что вероятность того, что за день не будет расследовано ни одного преступления, равняется 0.9, против альтернативы о том, что соответствующая вероятность меньше.

- Поскольку $X_1 \sim Pois(\lambda)$, то $P(X_1 = 0) = g(\lambda) = e^{-\lambda}$ и $P'(X_1 = 0) = g'(\lambda) = -e^{-\lambda}$.

Тестирование гипотез с помощью инвариантности ММП оценок

Пример

Число расследованных Жегловым за день преступлений описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа преступлений, расследованных ранее. Общее число расследованных преступлений за 1000 дней составило 100. На 5%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что вероятность того, что за день не будет расследовано ни одного преступления, равняется 0.9, против альтернативы о том, что соответствующая вероятность меньше.

- Поскольку $X_1 \sim Pois(\lambda)$, то $P(X_1 = 0) = g(\lambda) = e^{-\lambda}$ и $P'(X_1 = 0) = g'(\lambda) = -e^{-\lambda}$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : e^{-\lambda} = 0.9$ и $H_1 : e^{-\lambda} < 0.9$.

Тестирование гипотез с помощью инвариантности ММП оценок

Пример

Число расследованных Жегловым за день преступлений описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа преступлений, расследованных ранее. Общее число расследованных преступлений за 1000 дней составило 100. На 5%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что вероятность того, что за день не будет расследовано ни одного преступления, равняется 0.9, против альтернативы о том, что соответствующая вероятность меньше.

- Поскольку $X_1 \sim Pois(\lambda)$, то $P(X_1 = 0) = g(\lambda) = e^{-\lambda}$ и $P'(X_1 = 0) = g'(\lambda) = -e^{-\lambda}$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : e^{-\lambda} = 0.9$ и $H_1 : e^{-\lambda} < 0.9$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.05} \approx -1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.

Тестирование гипотез с помощью инвариантности ММП оценок

Пример

Число расследованных Жегловым за день преступлений описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа преступлений, расследованных ранее. Общее число расследованных преступлений за 1000 дней составило 100. На 5%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что вероятность того, что за день не будет расследовано ни одного преступления, равняется 0.9, против альтернативы о том, что соответствующая вероятность меньше.

- Поскольку $X_1 \sim Pois(\lambda)$, то $P(X_1 = 0) = g(\lambda) = e^{-\lambda}$ и $P'(X_1 = 0) = g'(\lambda) = -e^{-\lambda}$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : e^{-\lambda} = 0.9$ и $H_1 : e^{-\lambda} < 0.9$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.05} \approx -1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.
- Так как $\hat{\lambda}_{100}(x) = \overline{x}_{100} = 100/1000 = 0.1$, $i(10) = 1/0.1 = 10$, $g(10) = e^{-0.1}$ и $g'(10) = -e^{-0.1}$, то:

$$T(x) = \sqrt{1000 \times 10/\left(-e^{-0.1}\right)^2}(e^{-0.1} - 0.9) \approx 0.535$$

Число расследованных Жегловым за день преступлений описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа преступлений, расследованных ранее. Общее число расследованных преступлений за 1000 дней составило 100. На 5%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что вероятность того, что за день не будет расследовано ни одного преступления, равняется 0.9, против альтернативы о том, что соответствующая вероятность меньше.

- Поскольку $X_1 \sim Pois(\lambda)$, то $P(X_1 = 0) = g(\lambda) = e^{-\lambda}$ и $P'(X_1 = 0) = g'(\lambda) = -e^{-\lambda}$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : e^{-\lambda} = 0.9$ и $H_1 : e^{-\lambda} < 0.9$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.05} \approx -1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.
- Так как $\hat{\lambda}_{100}(x) = \overline{x}_{100} = 100/1000 = 0.1$, $i(10) = 1/0.1 = 10$, $g(10) = e^{-0.1}$ и $g'(10) = -e^{-0.1}$, то:

$$T(x) = \sqrt{1000 \times 10/\left(-e^{-0.1}\right)^2}(e^{-0.1} - 0.9) \approx 0.535$$

- В силу того, что $0.535 \notin (-\infty, -1.65)$, нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.

Тестирование гипотез с помощью инвариантности ММП оценок

Пример

Число расследованных Жегловым за день преступлений описывается распределением Пуассона с параметром λ и не зависит от числа преступлений, расследованных ранее. Общее число расследованных преступлений за 1000 дней составило 100. На 5%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что вероятность того, что за день не будет расследовано ни одного преступления, равняется 0.9, против альтернативы о том, что соответствующая вероятность меньше.

- Поскольку $X_1 \sim Pois(\lambda)$, то $P(X_1 = 0) = g(\lambda) = e^{-\lambda}$ и $P'(X_1 = 0) = g'(\lambda) = -e^{-\lambda}$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : e^{-\lambda} = 0.9$ и $H_1 : e^{-\lambda} < 0.9$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.05} \approx -1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.
- Так как $\hat{\lambda}_{100}(x) = \overline{x}_{100} = 100/1000 = 0.1$, $i(10) = 1/0.1 = 10$, $g(10) = e^{-0.1}$ и $g'(10) = -e^{-0.1}$, то:

$$T(x) = \sqrt{1000 \times 10/\left(-e^{-0.1}\right)^2}(e^{-0.1} - 0.9) \approx 0.535$$

- В силу того, что $0.535 \notin (-\infty, -1.65)$, нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.
- Наконец, p-value$=\Phi(0.535) \approx 0.704$, а значит нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 70.4%, например, на 80%-м (30%-м).

Метод максимального правдоподобия (ММП) для вектора параметров

Формулировка (очень кратко)

- Оценка вектора параметров $\theta = (\theta_1, ..., \theta_m)$ может быть получена при помощи метода максимального правдоподобия (ММП оценка) за счет максимизации функции правдоподобия по всем элементам вектора θ, то есть по каждому параметру:

$$\hat{\theta}_n = (\hat{\theta}_{1n}, ..., \hat{\theta}_{mn}) = \underset{\theta_1, \ldots, \theta_m}{\operatorname{argmax}}\, L(\theta_1, ..., \theta_m; X)$$

Метод максимального правдоподобия (ММП) для вектора параметров

Формулировка (очень кратко)

- Оценка вектора параметров $\theta = (\theta_1, ..., \theta_m)$ может быть получена при помощи метода максимального правдоподобия (ММП оценка) за счет максимизации функции правдоподобия по всем элементам вектора θ, то есть по каждому параметру:

$$\hat{\theta}_n = (\hat{\theta}_{1n}, ..., \hat{\theta}_{mn}) = \underset{\theta_1, \ldots, \theta_m}{\text{argmax}}\ L(\theta_1, ..., \theta_m; X)$$

- Информация Фишера для вектора параметров является матрицей, которую, при определенных условиях, можно найти с помощью Гессиана H логарифма функции правдоподобия:

$$i(\theta) = -E\left(H(\ln L(\theta; X))\right), \qquad i(\theta_k) = i_{kk}(\theta) = -E\left(H(\ln L(\theta; X))_{kk}\right)$$

- Оценка вектора параметров $\theta = (\theta_1, ..., \theta_m)$ может быть получена при помощи метода максимального правдоподобия (ММП оценка) за счет максимизации функции правдоподобия по всем элементам вектора θ, то есть по каждому параметру:

$$\hat{\theta}_n = (\hat{\theta}_{1n}, ..., \hat{\theta}_{mn}) = \underset{\theta_1, ..., \theta_m}{\text{argmax}}\ L(\theta_1, ..., \theta_m; X)$$

- Информация Фишера для вектора параметров является матрицей, которую, при определенных условиях, можно найти с помощью Гессиана H логарифма функции правдоподобия:

$$i(\theta) = -E\left(H(\ln L(\theta; X))\right), \qquad i(\theta_k) = i_{kk}(\theta) = -E\left(H(\ln L(\theta; X))_{kk}\right)$$

- Асимптотическая ковариационная матрица ММП оценок рассчитывается как матрица, обратная матрице Фишера:

$$As.Cov(\hat{\theta}_n) = ni^{-1}(\theta), \qquad As.Var(\hat{\theta}_{kn}) = n(i^{-1}(\theta))_{kk}$$

Метод максимального правдоподобия (ММП) для вектора параметров

Формулировка (очень кратко)

- Оценка вектора параметров $\theta = (\theta_1, ..., \theta_m)$ может быть получена при помощи метода максимального правдоподобия (ММП оценка) за счет максимизации функции правдоподобия по всем элементам вектора θ, то есть по каждому параметру:

$$\hat{\theta}_n = (\hat{\theta}_{1n}, ..., \hat{\theta}_{mn}) = \underset{\theta_1, ..., \theta_m}{\operatorname{argmax}} \, L(\theta_1, ..., \theta_m; X)$$

- Информация Фишера для вектора параметров является матрицей, которую, при определенных условиях, можно найти с помощью Гессиана H логарифма функции правдоподобия:

$$i(\theta) = -E\left(H(\ln L(\theta; X))\right), \qquad i(\theta_k) = i_{kk}(\theta) = -E\left(H(\ln L(\theta; X))_{kk}\right)$$

- Асимптотическая ковариационная матрица ММП оценок рассчитывается как матрица, обратная матрице Фишера:

$$As.Cov(\hat{\theta}_n) = ni^{-1}(\theta), \qquad As.Var(\hat{\theta}_{kn}) = n(i^{-1}(\theta))_{kk}$$

- Состоятельная оценка асимптотической ковариационной матрицы ММП оценок считается как:

$$\widehat{As.Cov}(\hat{\theta}_n) = -\left(H(\ln L(\hat{\theta}_n; X))\right)^{-1}, \qquad \widehat{As.Var}(\hat{\theta}_{kn}) = -\left(H(\ln L(\hat{\theta}_n; X))\right)^{-1}_{kk}$$

Метод максимального правдоподобия (ММП) для вектора параметров

Формулировка (очень кратко)

- Оценка вектора параметров $\theta = (\theta_1, ..., \theta_m)$ может быть получена при помощи метода максимального правдоподобия (ММП оценка) за счет максимизации функции правдоподобия по всем элементам вектора θ, то есть по каждому параметру:

$$\hat{\theta}_n = (\hat{\theta}_{1n}, ..., \hat{\theta}_{mn}) = \underset{\theta_1, \ldots, \theta_m}{\operatorname{argmax}}\, L(\theta_1, ..., \theta_m; X)$$

- Информация Фишера для вектора параметров является матрицей, которую, при определенных условиях, можно найти с помощью Гессиана H логарифма функции правдоподобия:

$$i(\theta) = -E\left(H(\ln L(\theta; X))\right), \qquad i(\theta_k) = i_{kk}(\theta) = -E\left(H(\ln L(\theta; X))_{kk}\right)$$

- Асимптотическая ковариационная матрица ММП оценок рассчитывается как матрица, обратная матрице Фишера:

$$As.Cov(\hat{\theta}_n) = ni^{-1}(\theta), \qquad As.Var(\hat{\theta}_{kn}) = n(i^{-1}(\theta))_{kk}$$

- Состоятельная оценка асимптотической ковариационной матрицы ММП оценок считается как:

$$\widehat{As.Cov}(\hat{\theta}_n) = -\left(H(\ln L(\hat{\theta}_n; X))\right)^{-1}, \qquad \widehat{As.Var}(\hat{\theta}_{kn}) = -\left(H(\ln L(\hat{\theta}_n; X))\right)^{-1}_{kk}$$

- Для каждой ММП оценки $\hat{\theta}_{kn}$ сохраняются те же свойства, что и в одномерном случае.

Метод максимального правдоподобия (ММП) для вектора параметров

Пример

Каждый вечер Лаврентий решает одну, две или три задачи по статистике с вероятностями p_1, p_2 и $1 - p_1 - p_2$ соответственно. Поможем Лаврентию оценить соответствующие вероятности, учитывая, что на протяжении 100 дней в 20 из них он решил одну задачу, а в 30 – две задачи.

Метод максимального правдоподобия (ММП) для вектора параметров
Пример

Каждый вечер Лаврентий решает одну, две или три задачи по статистике с вероятностями p_1, p_2 и $1 - p_1 - p_2$ соответственно. Поможем Лаврентию оценить соответствующие вероятности, учитывая, что на протяжении 100 дней в 20 из них он решил одну задачу, а в 30 – две задачи.

- Без потери общности реализацию выборки можно представить как $x = (\underbrace{1, ..., 1}_{\text{20 раз}}, \underbrace{2, ..., 2}_{\text{30 раз}}, \underbrace{3, ..., 3}_{\text{50 раз}})$, поэтому функция правдоподобия и ее логарифм принимают вид:

$$L(p_1, p_2; x) = p_1^{20} p_2^{30} (1 - p_1 - p_2)^{50}, \qquad \ln L(p_1, p_2; x) = 20 \ln(p_1) + 30 \ln(p_2) + 50 \ln(1 - p_1 - p_2)$$

Каждый вечер Лаврентий решает одну, две или три задачи по статистике с вероятностями p_1, p_2 и $1 - p_1 - p_2$ соответственно. Поможем Лаврентию оценить соответствующие вероятности, учитывая, что на протяжении 100 дней в 20 из них он решил одну задачу, а в 30 – две задачи.

- Без потери общности реализацию выборки можно представить как $x = (\underbrace{1, ..., 1}_{\text{20 раз}}, \underbrace{2, ..., 2}_{\text{30 раз}}, \underbrace{3, ..., 3}_{\text{50 раз}})$, поэтому функция правдоподобия и ее логарифм принимают вид:

$$L(p_1, p_2; x) = p_1^{20} p_2^{30} (1 - p_1 - p_2)^{50}, \qquad \ln L(p_1, p_2; x) = 20 \ln(p_1) + 30 \ln(p_2) + 50 \ln(1 - p_1 - p_2)$$

- В соответствии с условиями первого порядка (FOC) получаем:

$$\begin{cases} dL(p_1, p_2)/dp_1 = 20/p_1 - 50/(1 - p_1 - p_2) = 0 \\ dL(p_1, p_2)/dp_2 = 30/p_2 - 50/(1 - p_1 - p_2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 20/p_1 = 30/p_2 \\ p_1/20 = (1 - p_1 - p_2)/50 \end{cases} \implies \begin{cases} p_1 = 0.2 \\ p_2 = 0.3 \end{cases}$$

Каждый вечер Лаврентий решает одну, две или три задачи по статистике с вероятностями p_1, p_2 и $1 - p_1 - p_2$ соответственно. Поможем Лаврентию оценить соответствующие вероятности, учитывая, что на протяжении 100 дней в 20 из них он решил одну задачу, а в 30 – две задачи.

- Без потери общности реализацию выборки можно представить как $x = (\underbrace{1,...,1}_{\text{20 раз}}, \underbrace{2,...,2}_{\text{30 раз}}, \underbrace{3,...,3}_{\text{50 раз}})$, поэтому функция правдоподобия и ее логарифм принимают вид:

$$L(p_1, p_2; x) = p_1^{20} p_2^{30} (1 - p_1 - p_2)^{50}, \qquad \ln L(p_1, p_2; x) = 20 \ln(p_1) + 30 \ln(p_2) + 50 \ln(1 - p_1 - p_2)$$

- В соответствии с условиями первого порядка (FOC) получаем:

$$\begin{cases} dL(p_1, p_2)/dp_1 = 20/p_1 - 50/(1 - p_1 - p_2) = 0 \\ dL(p_1, p_2)/dp_2 = 30/p_2 - 50/(1 - p_1 - p_2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 20/p_1 = 30/p_2 \\ p_1/20 = (1 - p_1 - p_2)/50 \end{cases} \implies \begin{cases} p_1 = 0.2 \\ p_2 = 0.3 \end{cases}$$

- Для краткости проверка условий максимума пропускается (найдите Гессиан логарифма функции правдоподобия и примените критерий Сильвестра).

Каждый вечер Лаврентий решает одну, две или три задачи по статистике с вероятностями p_1, p_2 и $1 - p_1 - p_2$ соответственно. Поможем Лаврентию оценить соответствующие вероятности, учитывая, что на протяжении 100 дней в 20 из них он решил одну задачу, а в 30 – две задачи.

- Без потери общности реализацию выборки можно представить как $x = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\text{20 раз}}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{\text{30 раз}}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{\text{50 раз}})$, поэтому функция правдоподобия и ее логарифм принимают вид:

$$L(p_1, p_2; x) = p_1^{20} p_2^{30} (1 - p_1 - p_2)^{50}, \qquad \ln L(p_1, p_2; x) = 20 \ln(p_1) + 30 \ln(p_2) + 50 \ln(1 - p_1 - p_2)$$

- В соответствии с условиями первого порядка (FOC) получаем:

$$\begin{cases} dL(p_1, p_2)/dp_1 = 20/p_1 - 50/(1 - p_1 - p_2) = 0 \\ dL(p_1, p_2)/dp_2 = 30/p_2 - 50/(1 - p_1 - p_2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 20/p_1 = 30/p_2 \\ p_1/20 = (1 - p_1 - p_2)/50 \end{cases} \implies \begin{cases} p_1 = 0.2 \\ p_2 = 0.3 \end{cases}$$

- Для краткости проверка условий максимума пропускается (найдите Гессиан логарифма функции правдоподобия и примените критерий Сильвестра).
- В результате получаем реализации ММП оценок $\hat{p}_1(x) = 0.2$ и $\hat{p}_2(x) = 0.3$.

Каждый вечер Лаврентий решает одну, две или три задачи по статистике с вероятностями p_1, p_2 и $1 - p_1 - p_2$ соответственно. Поможем Лаврентию оценить соответствующие вероятности, учитывая, что на протяжении 100 дней в 20 из них он решил одну задачу, а в 30 – две задачи.

- Без потери общности реализацию выборки можно представить как $x = (\underbrace{1, ..., 1}_{20\text{ раз}}, \underbrace{2, ..., 2}_{30\text{ раз}}, \underbrace{3, ..., 3}_{50\text{ раз}})$, поэтому функция правдоподобия и ее логарифм принимают вид:

$$L(p_1, p_2; x) = p_1^{20} p_2^{30} (1 - p_1 - p_2)^{50}, \qquad \ln L(p_1, p_2; x) = 20 \ln(p_1) + 30 \ln(p_2) + 50 \ln(1 - p_1 - p_2)$$

- В соответствии с условиями первого порядка (FOC) получаем:

$$\begin{cases} dL(p_1, p_2)/dp_1 = 20/p_1 - 50/(1 - p_1 - p_2) = 0 \\ dL(p_1, p_2)/dp_2 = 30/p_2 - 50/(1 - p_1 - p_2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 20/p_1 = 30/p_2 \\ p_1/20 = (1 - p_1 - p_2)/50 \end{cases} \implies \begin{cases} p_1 = 0.2 \\ p_2 = 0.3 \end{cases}$$

- Для краткости проверка условий максимума пропускается (найдите Гессиан логарифма функции правдоподобия и примените критерий Сильвестра).
- В результате получаем реализации ММП оценок $\hat{p}_1(x) = 0.2$ и $\hat{p}_2(x) = 0.3$.
- В общем случае для выборки из мультиномиального распределения $\hat{p}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i = k)$.

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с **вектором** параметров $\theta = (\theta_1, ..., \theta_m)$, ММП оценку которого обозначим как $\hat{\theta}_n$.

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с **вектором** параметров $\theta = (\theta_1, ..., \theta_m)$, ММП оценку которого обозначим как $\hat{\theta}_n$.
- При $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу о k ограничениях на параметры распределения $H_0 : g_1(\theta) = 0, ..., g_k(\theta) = 0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = 2\ln\left(L\left(\hat{\theta}_n; X\right)/L\left(\hat{\theta}_n^{H_0}; X\right)\right) = 2\left(\ln L\left(\hat{\theta}_n; X\right) - \ln L\left(\hat{\theta}_n^{H_0}; X\right)\right), \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \chi^2(k)$$

Где $\hat{\theta}_n^{H_0}$ является ММП оценкой, полученной за счет максимизации функции правдоподобия с учетом ограничений, определяемых нулевой гипотезой.

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с **вектором** параметров $\theta = (\theta_1, ..., \theta_m)$, ММП оценку которого обозначим как $\hat{\theta}_n$.
- При $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу о k ограничениях на параметры распределения $H_0 : g_1(\theta) = 0, ..., g_k(\theta) = 0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = 2\ln\left(L\left(\hat{\theta}_n; X\right)/L\left(\hat{\theta}_n^{H_0}; X\right)\right) = 2\left(\ln L\left(\hat{\theta}_n; X\right) - \ln L\left(\hat{\theta}_n^{H_0}; X\right)\right), \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \chi^2(k)$$

  Где $\hat{\theta}_n^{H_0}$ является ММП оценкой, полученной за счет максимизации функции правдоподобия с учетом ограничений, определяемых нулевой гипотезой.
- Интуиция теста заключается в том, что чем больше максимум функции правдоподобия без учета ограничений, чем максимум функции правдоподобия с учетом ограничений, тем менее правдоподобным кажется соблюдение данных ограничений. Поэтому критическая область является правосторонней:

$$\mathcal{T}_\alpha = \left(\chi^2_{k,1-\alpha}, \infty\right), \qquad \text{p-value} = 1 - F_{\chi^2(k)}(T(x))$$

  Где через $\chi^2_{k,q}$ обозначена квантиль уровня q распределения $\chi^2(k)$.

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с **вектором** параметров $\theta = (\theta_1, ..., \theta_m)$, ММП оценку которого обозначим как $\hat{\theta}_n$.
- При $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу о k ограничениях на параметры распределения $H_0 : g_1(\theta) = 0, ..., g_k(\theta) = 0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:
$$T(X) = 2\ln\left(L\left(\hat{\theta}_n; X\right) / L\left(\hat{\theta}_n^{H_0}; X\right)\right) = 2\left(\ln L\left(\hat{\theta}_n; X\right) - \ln L\left(\hat{\theta}_n^{H_0}; X\right)\right), \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \chi^2(k)$$
Где $\hat{\theta}_n^{H_0}$ является ММП оценкой, полученной за счет максимизации функции правдоподобия с учетом ограничений, определяемых нулевой гипотезой.
- Интуиция теста заключается в том, что чем больше максимум функции правдоподобия без учета ограничений, чем максимум функции правдоподобия с учетом ограничений, тем менее правдоподобным кажется соблюдение данных ограничений. Поэтому критическая область является правосторонней:
$$\mathcal{T}_\alpha = \left(\chi^2_{k,1-\alpha}, \infty\right), \qquad \text{p-value} = 1 - F_{\chi^2(k)}(T(x))$$
Где через $\chi^2_{k,q}$ обозначена квантиль уровня q распределения $\chi^2(k)$.
- Альтернативная гипотеза предполагает, что хотя бы одно ограничение не соблюдается, то есть $H_1 : g_1(\theta) \neq 0 \vee ... \vee g_k(\theta) \neq 0$.

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)

Пример

Лаврентий 100 раз кинул волшебный шестигранный кубик и тестирует, на уровне значимости 1%, гипотезу о том, что первая грань выпадает в два раза чаще второй, а третья грань выпадает в половине случаев. При этом первая грань выпала 20 раз, вторая 10 раз, третья 30 раз, четвертая 5 раз, а пятая – 15 раз.

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)
Пример

Лаврентий 100 раз кинул волшебный шестигранный кубик и тестирует, на уровне значимости 1%, гипотезу о том, что первая грань выпадает в два раза чаще второй, а третья грань выпадает в половине случаев. При этом первая грань выпала 20 раз, вторая 10 раз, третья 30 раз, четвертая 5 раз, а пятая – 15 раз.

- Через p_i обозначим вероятность выпадения i-й грани, причем $p_6 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5$.

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)

Пример

Лаврентий 100 раз кинул волшебный шестигранный кубик и тестирует, на уровне значимости 1%, гипотезу о том, что первая грань выпадает в два раза чаще второй, а третья грань выпадает в половине случаев. При этом первая грань выпала 20 раз, вторая 10 раз, третья 30 раз, четвертая 5 раз, а пятая – 15 раз.

- Через p_i обозначим вероятность выпадения i-й грани, причем $p_6 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_1 - 2p_2 = 0, p_3 - 0.5 = 0$.

Лаврентий 100 раз кинул волшебный шестигранный кубик и тестирует, на уровне значимости 1%, гипотезу о том, что первая грань выпадает в два раза чаще второй, а третья грань выпадает в половине случаев. При этом первая грань выпала 20 раз, вторая 10 раз, третья 30 раз, четвертая 5 раз, а пятая – 15 раз.

- Через p_i обозначим вероятность выпадения i-й грани, причем $p_6 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_1 - 2p_2 = 0, p_3 - 0.5 = 0$.
- Запишем функции правдоподобия с учетом и без учета ограничений, накладываемых нулевой гипотезой:

$$L(p_1, ..., p_5; x) = p_1^{20} p_2^{10} p_3^{30} p_4^{5} p_5^{15} (1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)^{100-20-10-30-5-15}$$

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)

Пример

Лаврентий 100 раз кинул волшебный шестигранный кубик и тестирует, на уровне значимости 1%, гипотезу о том, что первая грань выпадает в два раза чаще второй, а третья грань выпадает в половине случаев. При этом первая грань выпала 20 раз, вторая 10 раз, третья 30 раз, четвертая 5 раз, а пятая – 15 раз.

- Через p_i обозначим вероятность выпадения i-й грани, причем $p_6 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_1 - 2p_2 = 0, p_3 - 0.5 = 0$.
- Запишем функции правдоподобия с учетом и без учета ограничений, накладываемых нулевой гипотезой:

$$L(p_1, ..., p_5; x) = p_1^{20} p_2^{10} p_3^{30} p_4^{5} p_5^{15} (1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)^{100-20-10-30-5-15}$$
$$L_{H_0}(p_1, ..., p_6; x) = (2p_2)^{20} p_2^{10} 0.5^{30} p_4^{5} p_5^{15} (1 - 2p_2 - p_2 - 0.5 - p_4 - p_5)^{100-20-10-30-5-15}$$

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)

Пример

Лаврентий 100 раз кинул волшебный шестигранный кубик и тестирует, на уровне значимости 1%, гипотезу о том, что первая грань выпадает в два раза чаще второй, а третья грань выпадает в половине случаев. При этом первая грань выпала 20 раз, вторая 10 раз, третья 30 раз, четвертая 5 раз, а пятая – 15 раз.

- Через p_i обозначим вероятность выпадения i-й грани, причем $p_6 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_1 - 2p_2 = 0, p_3 - 0.5 = 0$.
- Запишем функции правдоподобия с учетом и без учета ограничений, накладываемых нулевой гипотезой:

$$L(p_1, ..., p_5; x) = p_1^{20} p_2^{10} p_3^{30} p_4^{5} p_5^{15} (1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)^{100-20-10-30-5-15}$$
$$L_{H_0}(p_1, ..., p_6; x) = (2p_2)^{20} p_2^{10} 0.5^{30} p_4^{5} p_5^{15} (1 - 2p_2 - p_2 - 0.5 - p_4 - p_5)^{100-20-10-30-5-15}$$

- Максимизируя **логарифмы** этих функций получаем ММП оценки:

$$\hat{p}_1(x) = 0.2, \hat{p}_2(x) = 0.1, \hat{p}_3(x) = 0.3, \hat{p}_4(x) = 0.05, \hat{p}_5(x) = 0.15$$

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)

Пример

Лаврентий 100 раз кинул волшебный шестигранный кубик и тестирует, на уровне значимости 1%, гипотезу о том, что первая грань выпадает в два раза чаще второй, а третья грань выпадает в половине случаев. При этом первая грань выпала 20 раз, вторая 10 раз, третья 30 раз, четвертая 5 раз, а пятая – 15 раз.

- Через p_i обозначим вероятность выпадения i-й грани, причем $p_6 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_1 - 2p_2 = 0, p_3 - 0.5 = 0$.
- Запишем функции правдоподобия с учетом и без учета ограничений, накладываемых нулевой гипотезой:

$$L(p_1, ..., p_5; x) = p_1^{20} p_2^{10} p_3^{30} p_4^{5} p_5^{15} (1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)^{100-20-10-30-5-15}$$

$$L_{H_0}(p_1, ..., p_6; x) = (2p_2)^{20} p_2^{10} 0.5^{30} p_4^{5} p_5^{15} (1 - 2p_2 - p_2 - 0.5 - p_4 - p_5)^{100-20-10-30-5-15}$$

- Максимизируя **логарифмы** этих функций получаем ММП оценки:

$$\hat{p}_1(x) = 0.2, \hat{p}_2(x) = 0.1, \hat{p}_3(x) = 0.3, \hat{p}_4(x) = 0.05, \hat{p}_5(x) = 0.15$$

$$\hat{p}_1^{H_0}(x) = 1/7, \hat{p}_2^{H_0}(x) = 1/14, \hat{p}_3^{H_0}(x) = 0.5, \hat{p}_4^{H_0}(x) = 1/28, \hat{p}_5^{H_0}(x) = 3/28$$

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)

Пример

Лаврентий 100 раз кинул волшебный шестигранный кубик и тестирует, на уровне значимости 1%, гипотезу о том, что первая грань выпадает в два раза чаще второй, а третья грань выпадает в половине случаев. При этом первая грань выпала 20 раз, вторая 10 раз, третья 30 раз, четвертая 5 раз, а пятая – 15 раз.

- Через p_i обозначим вероятность выпадения i-й грани, причем $p_6 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_1 - 2p_2 = 0, p_3 - 0.5 = 0$.
- Запишем функции правдоподобия с учетом и без учета ограничений, накладываемых нулевой гипотезой:

$$L(p_1, ..., p_5; x) = p_1^{20} p_2^{10} p_3^{30} p_4^{5} p_5^{15} (1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)^{100-20-10-30-5-15}$$

$$L_{H_0}(p_1, ..., p_6; x) = (2p_2)^{20} p_2^{10} 0.5^{30} p_4^{5} p_5^{15} (1 - 2p_2 - p_2 - 0.5 - p_4 - p_5)^{100-20-10-30-5-15}$$

- Максимизируя **логарифмы** этих функций получаем ММП оценки:

$$\hat{p}_1(x) = 0.2, \hat{p}_2(x) = 0.1, \hat{p}_3(x) = 0.3, \hat{p}_4(x) = 0.05, \hat{p}_5(x) = 0.15$$

$$\hat{p}_1^{H_0}(x) = 1/7, \hat{p}_2^{H_0}(x) = 1/14, \hat{p}_3^{H_0}(x) = 0.5, \hat{p}_4^{H_0}(x) = 1/28, \hat{p}_5^{H_0}(x) = 3/28$$

- Рассчитаем реализацию тестовой статистики:

$$T(x) = 2\ln\left(L(0.2, ..., 0.15; x) - \ln L(1/7, ..., 3/28; x)\right) \approx 2\left((-166.958) - (-175.1863)\right) \approx 16.46$$

Тест отношения правдоподобия (LR-тест)

Пример

Лаврентий 100 раз кинул волшебный шестигранный кубик и тестирует, на уровне значимости 1%, гипотезу о том, что первая грань выпадает в два раза чаще второй, а третья грань выпадает в половине случаев. При этом первая грань выпала 20 раз, вторая 10 раз, третья 30 раз, четвертая 5 раз, а пятая – 15 раз.

- Через p_i обозначим вероятность выпадения i-й грани, причем $p_6 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5$.
- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_1 - 2p_2 = 0, p_3 - 0.5 = 0$.
- Запишем функции правдоподобия с учетом и без учета ограничений, накладываемых нулевой гипотезой:

$$L(p_1, ..., p_5; x) = p_1^{20} p_2^{10} p_3^{30} p_4^{5} p_5^{15} (1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)^{100-20-10-30-5-15}$$

$$L_{H_0}(p_1, ..., p_6; x) = (2p_2)^{20} p_2^{10} 0.5^{30} p_4^{5} p_5^{15} (1 - 2p_2 - p_2 - 0.5 - p_4 - p_5)^{100-20-10-30-5-15}$$

- Максимизируя **логарифмы** этих функций получаем ММП оценки:

$$\hat{p}_1(x) = 0.2, \hat{p}_2(x) = 0.1, \hat{p}_3(x) = 0.3, \hat{p}_4(x) = 0.05, \hat{p}_5(x) = 0.15$$

$$\hat{p}_1^{H_0}(x) = 1/7, \hat{p}_2^{H_0}(x) = 1/14, \hat{p}_3^{H_0}(x) = 0.5, \hat{p}_4^{H_0}(x) = 1/28, \hat{p}_5^{H_0}(x) = 3/28$$

- Рассчитаем реализацию тестовой статистики:

$$T(x) = 2\ln\left(L(0.2, ..., 0.15; x) - \ln L(1/7, ..., 3/28; x)\right) \approx 2\left((-166.958) - (-175.1863)\right) \approx 16.46$$

- Поскольку нулевая гипотеза накладывает два ограничения, то $T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \chi^2(2)$, откуда p-value $= 1 - F_{\chi^2(2)}(16.46) \approx 0.0003$, то есть нулевая гипотеза отвергается на любом разумном уровне значимости.

Лемма Неймана-Пирсона

Монотонное преобразование тестовой статистики

- Рассмотрим тестовую статистику $T(X)$ с правосторонней критической областью $\mathcal{T}_\alpha = (q_{1-\alpha}, \infty)$ и реализацией $T(x)$. Где $q_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $T(X)|H_0$.

Лемма Неймана-Пирсона

Монотонное преобразование тестовой статистики

- Рассмотрим тестовую статистику $T(X)$ с правосторонней критической областью $\mathcal{T}_\alpha = (q_{1-\alpha}, \infty)$ и реализацией $T(x)$. Где $q_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $T(X)|H_0$.
- Положим функцию $g(.)$, строго возрастающую на носителе $T(X)$. Обратим внимание, что $T(x) \in \mathcal{T}_\alpha$ тогда и только тогда, когда $g(T(X)) \in \mathcal{T}^*_\alpha = (q^*_{1-\alpha}, \infty)$. Где $q^*_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $g(T(X))|H_0$.

Лемма Неймана-Пирсона

Монотонное преобразование тестовой статистики

- Рассмотрим тестовую статистику $T(X)$ с правосторонней критической областью $\mathcal{T}_\alpha = (q_{1-\alpha}, \infty)$ и реализацией $T(x)$. Где $q_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $T(X)|H_0$.
- Положим функцию $g(.)$, строго возрастающую на носителе $T(X)$. Обратим внимание, что $T(x) \in \mathcal{T}_\alpha$ тогда и только тогда, когда $g(T(X)) \in \mathcal{T}_\alpha^* = (q_{1-\alpha}^*, \infty)$. Где $q_{1-\alpha}^*$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $g(T(X))|H_0$.
- Следовательно, тесты, основанные на статистиках $T(X)$ и $g(T(X))$, с критическими областями $\mathcal{T}_\alpha$ и $\mathcal{T}_\alpha^*$ соответственно, эквивалентны, в частности, обладают одинаковыми вероятностями ошибок первого и второго рода.

Лемма Неймана-Пирсона

Монотонное преобразование тестовой статистики

- Рассмотрим тестовую статистику $T(X)$ с правосторонней критической областью $\mathcal{T}_{\alpha} = (q_{1-\alpha}, \infty)$ и реализацией $T(x)$. Где $q_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $T(X)|H_0$.
- Положим функцию $g(.)$, строго возрастающую на носителе $T(X)$. Обратим внимание, что $T(x) \in \mathcal{T}_{\alpha}$ тогда и только тогда, когда $g(T(X)) \in \mathcal{T}^{*}_{\alpha} = (q^{*}_{1-\alpha}, \infty)$. Где $q^{*}_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $g(T(X))|H_0$.
- Следовательно, тесты, основанные на статистиках $T(X)$ и $g(T(X))$, с критическими областями $\mathcal{T}_{\alpha}$ и $\mathcal{T}^{*}_{\alpha}$ соответственно, эквивалентны, в частности, обладают одинаковыми вероятностями ошибок первого и второго рода.
- Аналогичное справедливо, когда $g(.)$ является строго убывающей функцией, за тем лишь исключением, что критическая область для $g(T(X))$ становится левосторонней $\mathcal{T}^{*}_{\alpha} = (-\infty, q^{*}_{\alpha})$.

Лемма Неймана-Пирсона

Монотонное преобразование тестовой статистики

- Рассмотрим тестовую статистику $T(X)$ с правосторонней критической областью $\mathcal{T}_\alpha = (q_{1-\alpha}, \infty)$ и реализацией $T(x)$. Где $q_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $T(X)|H_0$.
- Положим функцию $g(.)$, строго возрастающую на носителе $T(X)$. Обратим внимание, что $T(x) \in \mathcal{T}_\alpha$ тогда и только тогда, когда $g(T(X)) \in \mathcal{T}^*_\alpha = (q^*_{1-\alpha}, \infty)$. Где $q^*_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $g(T(X))|H_0$.
- Следовательно, тесты, основанные на статистиках $T(X)$ и $g(T(X))$, с критическими областями $\mathcal{T}_\alpha$ и $\mathcal{T}^*_\alpha$ соответственно, эквивалентны, в частности, обладают одинаковыми вероятностями ошибок первого и второго рода.
- Аналогичное справедливо, когда $g(.)$ является строго убывающей функцией, за тем лишь исключением, что критическая область для $g(T(X))$ становится левосторонней $\mathcal{T}^*_\alpha = (-\infty, q^*_\alpha)$.
- Для левосторонней и двухсторонней критических областей $\mathcal{T}_\alpha$ нетрудно воспроизвести аналогичные рассуждения, которые, с некоторыми (часто очевидными) оговорками, можно также адаптировать под случай немонотонной функции $g(.)$.

Лемма Неймана-Пирсона

Монотонное преобразование тестовой статистики

- Рассмотрим тестовую статистику $T(X)$ с правосторонней критической областью $\mathcal{T}_\alpha = (q_{1-\alpha}, \infty)$ и реализацией $T(x)$. Где $q_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $T(X)|H_0$.
- Положим функцию $g(.)$, строго возрастающую на носителе $T(X)$. Обратим внимание, что $T(x) \in \mathcal{T}_\alpha$ тогда и только тогда, когда $g(T(X)) \in \mathcal{T}^*_\alpha = (q^*_{1-\alpha}, \infty)$. Где $q^*_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $g(T(X))|H_0$.
- Следовательно, тесты, основанные на статистиках $T(X)$ и $g(T(X))$, с критическими областями $\mathcal{T}_\alpha$ и $\mathcal{T}^*_\alpha$ соответственно, эквивалентны, в частности, обладают одинаковыми вероятностями ошибок первого и второго рода.
- Аналогичное справедливо, когда $g(.)$ является строго убывающей функцией, за тем лишь исключением, что критическая область для $g(T(X))$ становится левосторонней $\mathcal{T}^*_\alpha = (-\infty, q^*_\alpha)$.
- Для левосторонней и двухсторонней критических областей $\mathcal{T}_\alpha$ нетрудно воспроизвести аналогичные рассуждения, которые, с некоторыми (часто очевидными) оговорками, можно также адаптировать под случай немонотонной функции $g(.)$.

Пример: Гипотеза тестируется на уровне значимости $\alpha = 0.02275$. Критическая область тестовой статистики $T(X) = \overline{X}_n$ имеет вид $\mathcal{T}_{0.02275} = (10, \infty)$, причем $\overline{X}_n|H_0 \sim \mathcal{N}(0, 25)$.

Лемма Неймана-Пирсона

Монотонное преобразование тестовой статистики

- Рассмотрим тестовую статистику $T(X)$ с правосторонней критической областью $\mathcal{T}_\alpha = (q_{1-\alpha}, \infty)$ и реализацией $T(x)$. Где $q_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $T(X)|H_0$.
- Положим функцию $g(.)$, строго возрастающую на носителе $T(X)$. Обратим внимание, что $T(x) \in \mathcal{T}_\alpha$ тогда и только тогда, когда $g(T(X)) \in \mathcal{T}^*_\alpha = (q^*_{1-\alpha}, \infty)$. Где $q^*_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1-\alpha)$ статистики $g(T(X))|H_0$.
- Следовательно, тесты, основанные на статистиках $T(X)$ и $g(T(X))$, с критическими областями $\mathcal{T}_\alpha$ и $\mathcal{T}^*_\alpha$ соответственно, эквивалентны, в частности, обладают одинаковыми вероятностями ошибок первого и второго рода.
- Аналогичное справедливо, когда $g(.)$ является строго убывающей функцией, за тем лишь исключением, что критическая область для $g(T(X))$ становится левосторонней $\mathcal{T}^*_\alpha = (-\infty, q^*_\alpha)$.
- Для левосторонней и двухсторонней критических областей $\mathcal{T}_\alpha$ нетрудно воспроизвести аналогичные рассуждения, которые, с некоторыми (часто очевидными) оговорками, можно также адаптировать под случай немонотонной функции $g(.)$.

Пример: Гипотеза тестируется на уровне значимости $\alpha = 0.02275$. Критическая область тестовой статистики $T(X) = \overline{X}_n$ имеет вид $\mathcal{T}_{0.02275} = (10, \infty)$, причем $\overline{X}_n|H_0 \sim \mathcal{N}(0, 25)$. В таком случае критическую область тестовой статистики $T^*(\overline{X}_n) = 0.2\overline{X}_n$, при которой оба теста будут эквивалентны, можно найти, обратив внимание, что $0.2\overline{X}_n|H_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, откуда $q^*_{1-\alpha} \approx 2$, а значит $\mathcal{T}^*_{0.02275} = (2, \infty)$.

Лемма Неймана-Пирсона

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ.

Лемма Неймана-Пирсона
Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ.
- Необходимо протестировать гипотезу $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta = \theta_1$.

Лемма Неймана-Пирсона

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ.
- Необходимо протестировать гипотезу $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta = \theta_1$.
- Согласно **лемме Неймана-Пирсона** при любом уровне значимости α наибольшей мощностью будет обладать тест со следующей статистикой и правосторонней критической областью:

$$T(X) = \frac{L(\theta_1; X)}{L(\theta_0; X)}, \qquad \mathcal{T}_\alpha = (q_{1-\alpha}, \infty)$$

Где $q_{1-\alpha}$ является квантилью уровня $(1-\alpha)$ тестовой статистики $T(X)|H_0$.

Лемма Неймана-Пирсона

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ.
- Необходимо протестировать гипотезу $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta = \theta_1$.
- Согласно **лемме Неймана-Пирсона** при любом уровне значимости α наибольшей мощностью будет обладать тест со следующей статистикой и правосторонней критической областью:

$$T(X) = \frac{L(\theta_1; X)}{L(\theta_0; X)}, \qquad \mathcal{T}_\alpha = (q_{1-\alpha}, \infty)$$

  Где $q_{1-\alpha}$ является квантилью уровня $(1-\alpha)$ тестовой статистики $T(X)|H_0$.
- Для применения теста, полученного с помощью леммы Неймана-Пирсона, необходимо найти распределение $T(X)|H_0$ и, исходя из него, квантиль $q_{1-\alpha}$.

Лемма Неймана-Пирсона

Формулировка

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с параметром θ.
- Необходимо протестировать гипотезу $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta = \theta_1$.
- Согласно **лемме Неймана-Пирсона** при любом уровне значимости α наибольшей мощностью будет обладать тест со следующей статистикой и правосторонней критической областью:
$$T(X) = \frac{L(\theta_1; X)}{L(\theta_0; X)}, \qquad \mathcal{T}_\alpha = (q_{1-\alpha}, \infty)$$
Где $q_{1-\alpha}$ является квантилью уровня $(1-\alpha)$ тестовой статистики $T(X)|H_0$.
- Для применения теста, полученного с помощью леммы Неймана-Пирсона, необходимо найти распределение $T(X)|H_0$ и, исходя из него, квантиль $q_{1-\alpha}$.
- Иногда распределение $T(X)|H_0$ может оказаться достаточно сложным. В таком случае над тестовой статистикой следует совершить ряд монотонных преобразований, приводящих к ее виду, при котором распределением преобразованной тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы станет очевидным.

Лемма Неймана-Пирсона

Пример

Время работы телефона является экспоненциальной случайной величиной с параметром λ, зависящим от качества аккумулятора. У качественных аккумуляторов $\lambda = 5$, а у некачественных $\lambda = 10$. Используя лемму Неймана-Пирсона предложим тест, позволяющий по одному наблюдению на уровне значимости 10% с наибольшей мощностью протестировать гипотезу о том, что акумулятор является качественным.

Лемма Неймана-Пирсона

Пример

Время работы телефона является экспоненциальной случайной величиной с параметром λ, зависящим от качества аккумулятора. У качественных аккумуляторов $\lambda = 5$, а у некачественных $\lambda = 10$. Используя лемму Неймана-Пирсона предложим тест, позволяющий по одному наблюдению на уровне значимости 10% с наибольшей мощностью протестировать гипотезу о том, что акумулятор является качественным.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \lambda = 5$ и $H_1 : \lambda = 10$, где $X_1 \sim EXP(\lambda)$.

Время работы телефона является экспоненциальной случайной величиной с параметром λ, зависящим от качества аккумулятора. У качественных аккумуляторов $\lambda = 5$, а у некачественных $\lambda = 10$. Используя лемму Неймана-Пирсона предложим тест, позволяющий по одному наблюдению на уровне значимости 10% с наибольшей мощностью протестировать гипотезу о том, что акумулятор является качественным.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \lambda = 5$ и $H_1 : \lambda = 10$, где $X_1 \sim EXP(\lambda)$.
- Запишем тестовую статистику, учитывая, что в данном случае выборка включает одно наблюдение:

$$T(X) = \frac{L(10; X_1)}{L(5; X_1)} = \frac{10e^{-10X_1}}{5e^{-5X_1}} = 2e^{-5X_1}$$

Лемма Неймана-Пирсона

Пример

Время работы телефона является экспоненциальной случайной величиной с параметром λ, зависящим от качества аккумулятора. У качественных аккумуляторов $\lambda = 5$, а у некачественных $\lambda = 10$. Используя лемму Неймана-Пирсона предложим тест, позволяющий по одному наблюдению на уровне значимости 10% с наибольшей мощностью протестировать гипотезу о том, что акумулятор является качественным.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \lambda = 5$ и $H_1 : \lambda = 10$, где $X_1 \sim EXP(\lambda)$.
- Запишем тестовую статистику, учитывая, что в данном случае выборка включает одно наблюдение:

$$T(X) = \frac{L(10; X_1)}{L(5; X_1)} = \frac{10e^{-10X_1}}{5e^{-5X_1}} = 2e^{-5X_1}$$

- Искать распределение данной статистики достаточно долго. Поэтому, совершим над ней возрастающее монотонное преобразование, а именно, поделим ее на два и прологарифмируем:

$$T_2(X) = \ln(T(X)/2) = -5X_1$$

Лемма Неймана-Пирсона

Пример

Время работы телефона является экспоненциальной случайной величиной с параметром λ, зависящим от качества аккумулятора. У качественных аккумуляторов $\lambda = 5$, а у некачественных $\lambda = 10$. Используя лемму Неймана-Пирсона предложим тест, позволяющий по одному наблюдению на уровне значимости 10% с наибольшей мощностью протестировать гипотезу о том, что акумулятор является качественным.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \lambda = 5$ и $H_1 : \lambda = 10$, где $X_1 \sim EXP(\lambda)$.
- Запишем тестовую статистику, учитывая, что в данном случае выборка включает одно наблюдение:

$$T(X) = \frac{L(10; X_1)}{L(5; X_1)} = \frac{10e^{-10X_1}}{5e^{-5X_1}} = 2e^{-5X_1}$$

- Искать распределение данной статистики достаточно долго. Поэтому, совершим над ней возрастающее монотонное преобразование, а именно, поделим ее на два и прологарифмируем:

$$T_2(X) = \ln(T(X)/2) = -5X_1$$

- Для удобства совершим убывающее монотонное преобразование, домножив статистику на -0.2.

$$T_3(X) = -0.2T_2(X) = X_1 \sim EXP(\lambda)$$

Лемма Неймана-Пирсона

Пример

Время работы телефона является экспоненциальной случайной величиной с параметром λ, зависящим от качества аккумулятора. У качественных аккумуляторов $\lambda = 5$, а у некачественных $\lambda = 10$. Используя лемму Неймана-Пирсона предложим тест, позволяющий по одному наблюдению на уровне значимости 10% с наибольшей мощностью протестировать гипотезу о том, что акумулятор является качественным.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \lambda = 5$ и $H_1 : \lambda = 10$, где $X_1 \sim EXP(\lambda)$.
- Запишем тестовую статистику, учитывая, что в данном случае выборка включает одно наблюдение:

$$T(X) = \frac{L(10; X_1)}{L(5; X_1)} = \frac{10e^{-10X_1}}{5e^{-5X_1}} = 2e^{-5X_1}$$

- Искать распределение данной статистики достаточно долго. Поэтому, совершим над ней возрастающее монотонное преобразование, а именно, поделим ее на два и прологарифмируем:

$$T_2(X) = \ln(T(X)/2) = -5X_1$$

- Для удобства совершим убывающее монотонное преобразование, домножив статистику на -0.2.

$$T_3(X) = -0.2T_2(X) = X_1 \sim EXP(\lambda)$$

- Обратим внимание, что $T_3(X)|H_0 \sim EXP(5)$. Поскольку было совершено одно убывающее монотонное преобразование, критическая область окажется левосторонней и для ее записи понадобится квантиль:

$$F_{X_1|H_0}(q_{0.1}) = 0.1 \implies 1 - e^{-5q_{0.1}} = 0.1 \implies q_{0.1} \approx 0.021$$

Используя найденную квантиль получаем $\mathcal{T}_{0.1} = (-\infty, 0.021)$.