

Теория Вероятностей и Статистика

Непрерывные случайные величины

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2022-2023

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
 - ВВП страны

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
 - ВВП страны
 - Цена квартиры

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
 - ВВП страны
 - Цена квартиры
 - Прибыль фирмы

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
 - ВВП страны
 - Цена квартиры
 - Прибыль фирмы
 - Время на дорогу

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
 - ВВП страны
 - Цена квартиры
 - Прибыль фирмы
 - Время на дорогу
 - Цена акции

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
 - ВВП страны
 - Цена квартиры
 - Прибыль фирмы
 - Время на дорогу
 - Цена акции
 - Температура

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
 - ВВП страны
 - Цена квартиры
 - Прибыль фирмы
 - Время на дорогу
 - Цена акции
 - Температура
 - Время в очереди

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
 - ВВП страны
 - Цена квартиры
 - Прибыль фирмы
 - Время на дорогу
 - Цена акции
 - Температура
 - Время в очереди
 - Вес кота

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
 - ВВП страны
 - Цена квартиры
 - Прибыль фирмы
 - Время на дорогу
 - Цена акции
 - Температура
 - Время в очереди
 - Вес кота
 - Число осадков

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
 - ВВП страны
 - Цена квартиры
 - Прибыль фирмы
 - Время на дорогу
 - Цена акции
 - Температура
 - Время в очереди
 - Вес кота
 - Число осадков
- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связано с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

- ВВП страны

- Время на дорогу

- Время в очереди

- Цена квартиры

- Цена акции

- Вес кота

- Прибыль фирмы

- Температура

- Число осадков

- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связано с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.

Пример: имеется отрезок $[0, 1]$. Точка случайным образом и с **равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину X . Например, $P(X = 0.3) = p$, где p - вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества $[0, 1]$ больше мощности множества натуральных чисел):

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

- ВВП страны

- Время на дорогу

- Время в очереди

- Цена квартиры

- Цена акции

- Вес кота

- Прибыль фирмы

- Температура

- Число осадков

- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связано с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.

Пример: имеется отрезок $[0, 1]$. Точка случайным образом и с **равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину X . Например, $P(X = 0.3) = p$, где p - вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества $[0, 1]$ больше мощности множества натуральных чисел):

$$\sum_{x \in [0, 1]} P(X = x) = \sum_{x \in [0, 1]} p > \sum_{x \in \mathbb{N}} p = \infty$$

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

- ВВП страны

- Время на дорогу

- Время в очереди

- Цена квартиры

- Цена акции

- Вес кота

- Прибыль фирмы

- Температура

- Число осадков

- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связано с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.

Пример: имеется отрезок $[0, 1]$. Точка случайным образом и с **равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину X . Например, $P(X = 0.3) = p$, где p – вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества $[0, 1]$ больше мощности множества натуральных чисел):

$$\sum_{x \in [0, 1]} P(X = x) = \sum_{x \in [0, 1]} p > \sum_{x \in \mathbb{N}} p = \infty$$

- **Решение** – предположим, что вероятность того, что случайная величина примет **конкретное** значение, равняется нулю, но отличной от нуля может быть вероятность попадания случайной величины в некоторый интервал.

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

- ВВП страны

- Время на дорогу

- Время в очереди

- Цена квартиры

- Цена акции

- Вес кота

- Прибыль фирмы

- Температура

- Число осадков

- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связано с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.

Пример: имеется отрезок $[0, 1]$. Точка случайным образом и с **равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину X . Например, $P(X = 0.3) = p$, где p – вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества $[0, 1]$ больше мощности множества натуральных чисел):

$$\sum_{x \in [0, 1]} P(X = x) = \sum_{x \in [0, 1]} p > \sum_{x \in \mathbb{N}} p = \infty$$

- **Решение** – предположим, что вероятность того, что случайная величина примет **конкретное** значение, равняется нулю, но отличной от нуля может быть вероятность попадания случайной величины в некоторый **интервал**. Возвращаясь к примеру положим $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$ и $P(X \in [a, b]) = (b - a)$ при $[a, b] \in (0, 1)$, где $b \geq a$, откуда, например, $P(X = 0.3) = 0$, но $P(X \in [0.2, 0.7]) = 0.7 - 0.2 = 0.5$.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$P(X \leq a) = P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\ P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \end{aligned}$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\ P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\ P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

Пример: доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 3 \\ (x^2 - 9)/16, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 1, & \text{если } x > 5 \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\ P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

Пример: доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 3 \\ (x^2 - 9)/16, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 1, & \text{если } x > 5 \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

$$P(X \leq 3.5) = F_X(3.5) = (3.5^2 - 9)/16 = 13/64$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\ P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

Пример: доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 3 \\ (x^2 - 9)/16, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 1, & \text{если } x > 5 \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

$$P(X \leq 3.5) = F_X(3.5) = (3.5^2 - 9)/16 = 13/64$$

$$P(X \in [3.5, 4.2]) = P(3.5 \leq X \leq 4.2) = F_X(4.2) - F_X(3.5) = (4.2^2 - 9)/16 - (3.5^2 - 9)/16 = 539/1600$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}P(X \leq a) &= P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a) \\P(a \leq X \leq b) &= [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) = \\&= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)\end{aligned}$$

Пример: доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 3 \\ (x^2 - 9)/16, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 1, & \text{если } x > 5 \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

$$P(X \leq 3.5) = F_X(3.5) = (3.5^2 - 9)/16 = 13/64$$

$$P(X \in [3.5, 4.2]) = P(3.5 \leq X \leq 4.2) = F_X(4.2) - F_X(3.5) = (4.2^2 - 9)/16 - (3.5^2 - 9)/16 = 539/1600$$

$$P(4.2 < X < 8) = P(4.2 \leq X \leq 8) = F_X(8) - F_X(4.2) = 1 - (4.2^2 - 9)/16 = 0.46$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.
- Не убывает: $F_X(x) \leq F_X(y)$ при $x \leq y$, где $x, y \in R$.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.
- Не убывает: $F_X(x) \leq F_X(y)$ при $x \leq y$, где $x, y \in R$.
- Непрерывна: $\lim_{x \rightarrow a} F_X(x) = F_X(a)$ для любого $a \in R$.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.
- Не убывает: $F_X(x) \leq F_X(y)$ при $x \leq y$, где $x, y \in R$.
- Непрерывна: $\lim_{x \rightarrow a} F_X(x) = F_X(a)$ для любого $a \in R$.

Пример:

Объем поглощаемой котом Аркадием пищи является случайной величиной с функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x < 2 \\ (x - a)/b, & \text{если } x \in [2, 6] \\ d, & \text{если } x > 6 \end{cases}$$

Найдите константы a , b , c и d .

Функция распределения непрерывной случайной величины

Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.
- Не убывает: $F_X(x) \leq F_X(y)$ при $x \leq y$, где $x, y \in R$.
- Непрерывна: $\lim_{x \rightarrow a} F_X(x) = F_X(a)$ для любого $a \in R$.

Пример:

Объем поглощаемой котом Аркадием пищи является случайной величиной с функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x < 2 \\ (x - a)/b, & \text{если } x \in [2, 6] \\ d, & \text{если } x > 6 \end{cases}$$

Найдите константы a , b , c и d .

Решение:

Так как функция распределения не убывает и принимает значения от 0 до 1, то $c = 0$ и $d = 1$.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.
- Не убывает: $F_X(x) \leq F_X(y)$ при $x \leq y$, где $x, y \in R$.
- Непрерывна: $\lim_{x \rightarrow a} F_X(x) = F_X(a)$ для любого $a \in R$.

Пример:

Объем поглощаемой котом Аркадием пищи является случайной величиной с функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x < 2 \\ (x - a)/b, & \text{если } x \in [2, 6] \\ d, & \text{если } x > 6 \end{cases}$$

Найдите константы a , b , c и d .

Решение:

Так как функция распределения не убывает и принимает значения от 0 до 1, то $c = 0$ и $d = 1$.

Поскольку функция распределения непрерывна, то $F_X(2) = 0$ и $F_X(6) = 1$, откуда:

$$\begin{cases} (2 - a)/b = 0 \\ (6 - a)/b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ (6 - 2)/b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X . Найдите функцию плотности X , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x^3/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X . Найдите функцию плотности X , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

Решение:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, & \text{если } x < 0 \\ d(x^3/1000)/dx, & \text{если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, & \text{если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 3x^2/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x^3/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X . Найдите функцию плотности X , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

Решение:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, & \text{если } x < 0 \\ d(x^3/1000)/dx, & \text{если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, & \text{если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 3x^2/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 3x^2/1000 dx = 0.098$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X . Найдите функцию плотности X , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или менее 2 часов.

Решение:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, & \text{если } x < 0 \\ d(x^3/1000)/dx, & \text{если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, & \text{если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 3x^2/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 3x^2/1000 dx = 0.098$$

$$P(X \geq 7) = \int_7^{10} 3x^2/1000 dx + \int_{10}^{\infty} 0 dx = 0.657$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X . Найдите функцию плотности X , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

Решение:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, & \text{если } x < 0 \\ d(x^3/1000)/dx, & \text{если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, & \text{если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 3x^2/1000 dx = 0.098$$

$$P(X \geq 7) = \int_7^{10} 3x^2/1000 dx + \int_{10}^{\infty} 0 dx = 0.657$$

$$P(X \in [3, 5] \cup (-\infty, 2]) = P(3 \leq X \leq 5) + P(X < 2) =$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X . Найдите функцию плотности X , а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

Решение:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x^3/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, & \text{если } x < 0 \\ d(x^3/1000)/dx, & \text{если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, & \text{если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2/1000, & \text{если } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 3x^2/1000 dx = 0.098$$

$$P(X \geq 7) = \int_7^{10} 3x^2/1000 dx + \int_{10}^{\infty} 0 dx = 0.657$$

$$P(X \in [3, 5] \cup (-\infty, 2]) = P(3 \leq X \leq 5) + P(X < 2) =$$

$$= \int_3^5 3x^2/1000 dx + \left(\int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^2 3x^2/1000 dx \right) = 0.106$$

Функция плотности

Связь с функцией распределения

- С помощью функции плотности можно восстановить функцию распределения:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Функция плотности

Связь с функцией распределения

- С помощью функции плотности можно восстановить функцию распределения:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей объем импорта некоторого государства, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{если } x \in [0, \pi/2] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Функция плотности

Связь с функцией распределения

- С помощью функции плотности можно восстановить функцию распределения:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей объем импорта некоторого государства, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{если } x \in [0, \pi/2] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Решение:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt, & \text{если } x \in (-\infty, 0) \\ \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \sin(t) dt, & \text{если } x \in [0, \pi/2] \\ \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt + \int_{\pi/2}^x 0 dt, & \text{если } x \in (\pi/2, \infty) \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty, 0) \\ 1 - \cos(x), & \text{если } x \in [0, \pi/2] \\ 1, & \text{если } x \in (\pi/2, \infty) \end{cases}$$

Функция плотности

Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Функция плотности

Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in R$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

Функция плотности

Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in R$.

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

Пример:

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, & \text{если } x \in [2, 10] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите константу $c \in R$ и функцию распределения времени поездки.

Функция плотности

Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in R$.

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

Пример:

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, & \text{если } x \in [2, 10] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите константу $c \in R$ и функцию распределения времени поездки.

Решение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_2^{10} c/x dx = c \ln(5) = 1 \implies c = 1/\ln(5)$$

Функция плотности

Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in R$.

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

Пример:

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, & \text{если } x \in [2, 10] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите константу $c \in R$ и функцию распределения времени поездки.

Решение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_2^{10} c/x dx = c \ln(5) = 1 \implies c = 1/\ln(5)$$

Обратим внимание, что при $x \in [2, 10]$:

$$F_X(x) = \int_2^x 1/(\ln(5) \times t) dt = \ln(x/2)/\ln(5)$$

Функция плотности

Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in R$.

- $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Пример:

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, & \text{если } x \in [2, 10] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите константу $c \in R$ и функцию распределения времени поездки.

Решение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_2^{10} c/x dx = c \ln(5) = 1 \implies c = 1/\ln(5)$$

Обратим внимание, что при $x \in [2, 10]$:

$$F_X(x) = \int_2^x 1/(\ln(5) \times t) dt = \ln(x/2)/\ln(5)$$

Отсюда получаем:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2 \\ \ln(x/2)/\ln(5), & \text{если } x \in [2, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

Функция плотности

Носитель непрерывной случайной величины

- **Носителем** непрерывной случайной величины X является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:

$$\text{supp}(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

Функция плотности

Носитель непрерывной случайной величины

- Носителем непрерывной случайной величины X является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:

$$\text{supp}(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

Пример:

- Случайная величина X имеет функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} (x - 2)/1.5, & \text{если } x \in [2, 3) \\ (2.5 - 0.5x)/1.5, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите носитель этой случайной величины и вероятность того, что она примет значение от 2.5 до 3.5.

Функция плотности

Носитель непрерывной случайной величины

- Носителем непрерывной случайной величины X является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:

$$\text{supp}(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

Пример:

- Случайная величина X имеет функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} (x - 2)/1.5, & \text{если } x \in [2, 3) \\ (2.5 - 0.5x)/1.5, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите носитель этой случайной величины и вероятность того, что она примет значение от 2.5 до 3.5.

Решение:

$$\text{supp}(X) = (2, 3) \cup [3, 5) = (2, 5)$$

Функция плотности

Носитель непрерывной случайной величины

- Носителем непрерывной случайной величины X является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:

$$\text{supp}(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

Пример:

- Случайная величина X имеет функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} (x - 2)/1.5, & \text{если } x \in [2, 3) \\ (2.5 - 0.5x)/1.5, & \text{если } x \in [3, 5] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите носитель этой случайной величины и вероятность того, что она примет значение от 2.5 до 3.5.

Решение:

$$\text{supp}(X) = (2, 3) \cup [3, 5) = (2, 5)$$

$$P(2.5 \leq X \leq 3.5) = \int_{2.5}^3 (x - 2)/1.5 dx + \int_3^{3.5} (2.5 - 0.5x)/1.5 dx \approx 0.542$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x) dx$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x) dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, \text{ где } k \in N$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x) dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, \text{ где } k \in N$$

Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей доходность акции, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{если } x \in [1, e] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и третий начальный момент доходности акции.

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x) dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, \text{ где } k \in N$$

Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей доходность акции, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{если } x \in [1, e] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и третий начальный момент доходности акции.

Решение:

$$E(X) = \int_{-\infty}^1 (x \times 0) dx + \int_1^e x \ln(x) dx + \int_e^{\infty} (x \times 0) dx \approx 0 + 0.21 + 0 = 0.21$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x) dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, \text{ где } k \in N$$

Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей доходность акции, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{если } x \in [1, e] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и третий начальный момент доходности акции.

Решение:

$$E(X) = \int_{-\infty}^1 (x \times 0) dx + \int_1^e x \ln(x) dx + \int_e^{\infty} (x \times 0) dx \approx 0 + 0.21 + 0 = 0.21$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^1 (x^3 \times 0) dx + \int_1^e x^3 \ln(x) dx + \int_e^{\infty} (x^3 \times 0) dx \approx 0 + 10.3 + 0 = 10.3$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- В частности, при $\alpha, \beta \in R$:

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- В частности, при $\alpha, \beta \in R$:

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид $y(X) = \sin(X)$. Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- В частности, при $\alpha, \beta \in R$:

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид $y(X) = \sin(X)$. Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- В частности, при $\alpha, \beta \in R$:

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид $y(X) = \sin(X)$. Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

$$E(5X + 10) = 5E(X) + 10 = 5 \times 0.75 + 10 = 13.75$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- В частности, при $\alpha, \beta \in R$:

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид $y(X) = \sin(X)$. Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

$$E(5X + 10) = 5E(X) + 10 = 5 \times 0.75 + 10 = 13.75$$

$$E(\sin(X)) = \int_0^1 \sin(x) \times 3x^2 dx \approx 0.67$$

Моменты непрерывной случайной величины

Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Моменты непрерывной случайной величины

Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

Моменты непрерывной случайной величины

Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

Моменты непрерывной случайной величины

Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

Моменты непрерывной случайной величины

Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times 3x^2 dx = 0.6$$

Моменты непрерывной случайной величины

Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times 3x^2 dx = 0.6$$

$$\text{Var}(X) = 0.75 - 0.6^2 = 0.39$$

Моменты непрерывной случайной величины

Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times 3x^2 dx = 0.6$$

$$\text{Var}(X) = 0.75 - 0.6^2 = 0.39$$

$$\text{Var}(5X + 10) = 25 \text{Var}(X) = 25 \times 0.39 = 9.75$$

Квантили

Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.

Квантили

Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.
- **Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.

Квантили

Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.
- **Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.
- Квантиль уровня $q = 0.5$ именуется **медианой**, то есть $x_{med} = x_{0.5}$.

Квантили

Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.
- **Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.
- Квантиль уровня $q = 0.5$ именуется **медианой**, то есть $x_{med} = x_{0.5}$.
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:

$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

Квантили

Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.
- Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.
- Квантиль уровня $q = 0.5$ именуется **медианой**, то есть $x_{med} = x_{0.5}$.
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:

$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

Пример:

- Функция распределения добытых компанией баррелей нефти имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ (x^2 - 1)/99, & \text{если } x \in [1, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

Определите, не более скольких баррелей нефти вышка добудет с вероятностью 0.9, а также медиану добываемых баррелей нефти.

Квантили

Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.
- Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.
- Квантиль уровня $q = 0.5$ именуется **медианой**, то есть $x_{med} = x_{0.5}$.
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:

$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

Пример:

- Функция распределения добытых компанией баррелей нефти имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ (x^2 - 1)/99, & \text{если } x \in [1, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

Определите, не более скольких баррелей нефти вышка добудет с вероятностью 0.9, а также медиану добываемых баррелей нефти.

Решение:

$$F_X(x_{0.9}) = (x_{0.9}^2 - 1)/99 = 0.9 \implies x_{0.9} \approx 9.49$$

Квантили

Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.
- Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.
- Квантиль уровня $q = 0.5$ именуется **медианой**, то есть $x_{med} = x_{0.5}$.
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:

$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

Пример:

- Функция распределения добытых компанией баррелей нефти имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ (x^2 - 1)/99, & \text{если } x \in [1, 10] \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

Определите, не более скольких баррелей нефти вышка добудет с вероятностью 0.9, а также медиану добываемых баррелей нефти.

Решение:

$$\begin{aligned} F_X(x_{0.9}) &= (x_{0.9}^2 - 1)/99 = 0.9 \implies x_{0.9} \approx 9.49 \\ F_X(x_{med}) &= F_X(x_{0.5}) = (x_{0.5}^2 - 1)/99 = 0.5 \implies x_{med} \approx 7.1 \end{aligned}$$

Мода

Определение и способ нахождения моды

- Модами распределения случайной величины X именуются локальные максимумы функции плотности $f_X(x)$.

Мода

Определение и способ нахождения моды

- Модами распределения случайной величины X именуются локальные максимумы функции плотности $f_X(x)$.

Пример:

- Функция плотности продолжительности собрания имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0, 3] \\ (10 - (1 - x)^2)/27, & \text{если } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Найдите моду (в данном случае единственная) продолжительности собрания.

Мода

Определение и способ нахождения моды

- Модами распределения случайной величины X именуются локальные максимумы функции плотности $f_X(x)$.

Пример:

- Функция плотности продолжительности собрания имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0, 3] \\ (10 - (1 - x)^2)/27, & \text{если } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Найдите моду (в данном случае единственная) продолжительности собрания.

Решение:

Рассмотрим условия первого порядка при $x \in [0, 3]$:

$$df_X(x)/dx = d((10 - (1 - x)^2)/27)/dx = 2(1 - x)/27 = 0 \implies x = 1$$

- Модами распределения случайной величины X именуются локальные максимумы функции плотности $f_X(x)$.

Пример:

- Функция плотности продолжительности собрания имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0, 3] \\ (10 - (1 - x)^2)/27, & \text{если } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Найдите моду (в данном случае единственная) продолжительности собрания.

Решение:

Рассмотрим условия первого порядка при $x \in [0, 3]$:

$$df_X(x)/dx = d((10 - (1 - x)^2)/27)/dx = 2(1 - x)/27 = 0 \implies x = 1$$

Проверка условий второго порядка позволяет утверждать, что найден локальный максимум (он же в данном случае и глобальный, но в контексте решаемой задачи это не имеет значения), откуда получаем моду $x_{mode} = 1$.

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.

Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов). С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты. Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.

Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.

Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.

Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.

Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.

Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

$$F_{\sqrt{X}}(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = x^2 - 1, \text{ при } x \in [\sqrt{1}, \sqrt{2}]$$

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.

Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

Решение:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

$$F_{\sqrt{X}}(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = x^2 - 1, \text{ при } x \in [\sqrt{1}, \sqrt{2}]$$

$$f_{\sqrt{X}}(1.3) = \left(dF_{\sqrt{X}}(x)/dx \right) |_{x=1.3} = (d(x^2 - 1)/dx) / d|_{x=1.3} = 2x|_{x=1.3} = 2 \times 1.3 = 2.6$$

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.

Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов).

С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты.

Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

Решение:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

$$F_{\sqrt{X}}(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = x^2 - 1, \text{ при } x \in [\sqrt{1}, \sqrt{2}]$$

$$f_{\sqrt{X}}(1.3) = \left(dF_{\sqrt{X}}(x)/dx \right) |_{x=1.3} = (d(x^2 - 1)/dx) / d|_{x=1.3} = 2x|_{x=1.3} = 2 \times 1.3 = 2.6$$

$$f_{\sqrt{X}}(1.5) = \left(dF_{\sqrt{X}}(x)/dx \right) |_{x=1.5} = d1/dx|_{x=1.5} = 0, \text{ поскольку } F_{\sqrt{X}}(1.5) = F_X(1.5^2) = F_X(2.25) = 1$$

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2 , такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2 , такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2 , такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2 , такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то события $X \in B_1$ и $x \in B_2$ несовместные, а значит $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$.

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2 , такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то события $X \in B_1$ и $x \in B_2$ несовместные, а значит $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$.

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2 , такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то события $X \in B_1$ и $x \in B_2$ несовместные, а значит $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$.

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.

Решение:

В данном случае $B_1 = (5, \infty)$ и $B_2 = [1, 6] \cup [8, 10]$, откуда:

$$P(X \in (5, \infty) | X \in [1, 6] \cup [8, 10]) = \frac{P(X \in [5, \infty] \cap ([1, 6] \cup [8, 10]))}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} =$$

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2 , такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.

- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то события $X \in B_1$ и $x \in B_2$ несовместные, а значит $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$.

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.

Решение:

В данном случае $B_1 = (5, \infty)$ и $B_2 = [1, 6] \cup [8, 10]$, откуда:

$$\begin{aligned} P(X \in (5, \infty) | X \in [1, 6] \cup [8, 10]) &= \frac{P(X \in [5, \infty] \cap ([1, 6] \cup [8, 10]))}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} = \\ &= \frac{P(X \in [5, 6] \cup [8, 10])}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} = \frac{P(X \in [5, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [5, 6] \cap [8, 10])}{P(X \in [1, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [1, 6] \cap [8, 10])} = \end{aligned}$$

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2 , такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то события $X \in B_1$ и $x \in B_2$ несовместные, а значит $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$.

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.

Решение:

В данном случае $B_1 = (5, \infty)$ и $B_2 = [1, 6] \cup [8, 10]$, откуда:

$$\begin{aligned} P(X \in (5, \infty) | X \in [1, 6] \cup [8, 10]) &= \frac{P(X \in [5, \infty] \cap ([1, 6] \cup [8, 10]))}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} = \\ &= \frac{P(X \in [5, 6] \cup [8, 10])}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} = \frac{P(X \in [5, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [5, 6] \cap [8, 10])}{P(X \in [1, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [1, 6] \cap [8, 10])} = \\ &= \frac{P(X \in [5, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(\{\emptyset\})}{P(X \in [1, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(\{\emptyset\})} = \frac{\int_5^6 0.02x dx + \int_8^{10} 0.02x dx}{\int_1^6 0.02x dx + \int_8^{10} 0.02x dx} = \frac{47}{71} \end{aligned}$$

Условное распределение

Условная плотность

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.

Условное распределение

Условная плотность

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Условное распределение

Условная плотность

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|X \in B}(x)$$

Условное распределение

Условная плотность

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|X \in B}(x)$$

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

Условное распределение

Условная плотность

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|X \in B}(x)$$

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

Решение:

$$P(X < 7) = \int_0^7 0.02x dx = 0.49$$

Условное распределение

Условная плотность

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|X \in B}(x)$$

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

Решение:

$$P(X < 7) = \int_0^7 0.02x dx = 0.49$$

$$f_{X|X < 7}(x) = \begin{cases} 0.02x/0.49, & \text{если } x \in [0, 7] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Условное распределение

Условная плотность

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X \in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|X \in B}(x)$$

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, & \text{при } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

Решение:

$$P(X < 7) = \int_0^7 0.02x dx = 0.49$$

$$f_{X|X < 7}(x) = \begin{cases} 0.02x/0.49, & \text{если } x \in [0, 7] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$E(X|X < 7) = \int_0^7 x \times (0.02x)/0.49 dx \approx 4.67$$

Условное распределение

Усеченное распределение

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:

Условное распределение

Усеченное распределение

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha \\ (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha)), & \text{если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & \text{если } x > \beta \end{cases}$$

Условное распределение

Усеченное распределение

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha \\ (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha)), & \text{если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & \text{если } x > \beta \end{cases}$$

Доказательство: рассмотрим случай, когда $x \in [\alpha, \beta]$, другие случаи рассматриваются по аналогии:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = P(X \leq x | \alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq x) / P(\alpha \leq X \leq \beta) = (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha))$$

Условное распределение

Усеченное распределение

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha \\ (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha)), & \text{если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & \text{если } x > \beta \end{cases}$$

Доказательство: рассмотрим случай, когда $x \in [\alpha, \beta]$, другие случаи рассматриваются по аналогии:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = P(X \leq x | \alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq x) / P(\alpha \leq X \leq \beta) = (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha))$$

- Функция плотности и моменты находятся обычным образом:

$$f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = dF_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x)/dx \qquad E(g(X)|\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) dx$$

Условное распределение

Усеченное распределение

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha \\ (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha)), & \text{если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & \text{если } x > \beta \end{cases}$$

Доказательство: рассмотрим случай, когда $x \in [\alpha, \beta]$, другие случаи рассматриваются по аналогии:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = P(X \leq x | \alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq x) / P(\alpha \leq X \leq \beta) = (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha))$$

- Функция плотности и моменты находятся обычным образом:

$$f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = dF_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x)/dx \qquad E(g(X)|\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) dx$$

Пример:

- Доход ресторана является случайной величиной, функция распределения которой при $x \in [5, 20]$ имеет вид:

$$F_X(x) = (x^2 - 25)/375$$

Найдите вероятность того, что доход ресторана не превысит 15, если известно, что он оказался больше 10, но меньше 18.

Условное распределение

Усеченное распределение

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha \\ (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha)), & \text{если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, & \text{если } x > \beta \end{cases}$$

Доказательство: рассмотрим случай, когда $x \in [\alpha, \beta]$, другие случаи рассматриваются по аналогии:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = P(X \leq x | \alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq x) / P(\alpha \leq X \leq \beta) = (F_X(x) - F_X(\alpha)) / (F_X(\beta) - F_X(\alpha))$$

- Функция плотности и моменты находятся обычным образом:

$$f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = dF_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x)/dx \qquad E(g(X)|\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) dx$$

Пример:

- Доход ресторана является случайной величиной, функция распределения которой при $x \in [5, 20]$ имеет вид:

$$F_X(x) = (x^2 - 25)/375$$

Найдите вероятность того, что доход ресторана не превысит 15, если известно, что он оказался больше 10, но меньше 18.

Решение:

$$\begin{aligned} P(X \leq 15 | 10 \leq X \leq 18) &= F_{X|10 \leq X \leq 18}(15) = (F_X(15) - F_X(10)) / (F_X(18) - F_X(10)) = \\ &= (8/15 - 1/5) / (299/375 - 1/5) = 125/224 \end{aligned}$$

- Рассмотрим множество U . Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):

- Рассмотрим множество U . Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
 - 1 $U \in \Sigma$.

- Рассмотрим множество U . Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
 - 1 $U \in \Sigma$.
 - 2 $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$.

- Рассмотрим множество U . Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
 - ① $U \in \Sigma$.
 - ② $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$.
 - ③ Для любой счетной последовательности подмножеств A_1, A_2, \dots множества Σ соблюдается $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \in \Sigma$.

- Рассмотрим множество U . Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
 - ① $U \in \Sigma$.
 - ② $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$.
 - ③ Для любой счетной последовательности подмножеств A_1, A_2, \dots множества Σ соблюдается $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \in \Sigma$.
- Дополнительная информация о сигма-алгебрах
 - В последнем условии объединение можно заменить на пересечение, то есть $(A_1 \cap A_2 \cap \dots) \in \Sigma$.

- Рассмотрим множество U . Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
 - ① $U \in \Sigma$.
 - ② $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$.
 - ③ Для любой счетной последовательности подмножеств A_1, A_2, \dots множества Σ соблюдается $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \in \Sigma$.
- Дополнительная информация о сигма-алгебрах
 - В последнем условии объединение можно заменить на пересечение, то есть $(A_1 \cap A_2 \cap \dots) \in \Sigma$.
 - Пересечение сигма алгебр является сигма-алгеброй.

- Рассмотрим множество U . Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
 - ❶ $U \in \Sigma$.
 - ❷ $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$.
 - ❸ Для любой счетной последовательности подмножеств A_1, A_2, \dots множества Σ соблюдается $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \in \Sigma$.
- Дополнительная информация о сигма-алгебрах
 - В последнем условии объединение можно заменить на пересечение, то есть $(A_1 \cap A_2 \cap \dots) \in \Sigma$.
 - Пересечение сигма алгебр является сигма-алгеброй.
 - Множество $\{\emptyset, U\}$ и булеан множества U являются сигма-алгебрами множества U .

Продвинутый дополнительный материал

Пример Сигма-алберы

Проверим, является ли $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ сигма-алгеброй множества $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Для удобства обозначим $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 2\}, A_4 = \{3, 4\}$. Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

Продвинутый дополнительный материал

Пример Сигма-алберы

Проверим, является ли $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ сигма-алгеброй множества $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Для удобства обозначим $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 2\}, A_4 = \{3, 4\}$. Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

❶ $U = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Sigma$.

Продвинутый дополнительный материал

Пример Сигма-алберы

Проверим, является ли $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ сигма-алгеброй множества $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Для удобства обозначим $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 2\}, A_4 = \{3, 4\}$. Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

❶ $U = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Sigma$.

❷ Сделаем несколько проверок, перебирая все подмножества $A \in \Sigma$:

$$\Omega - \emptyset = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset \in \Sigma$$

$$\Omega - \{1, 2\} = \{3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{3, 4\} = \{1, 2\} \in \Sigma$$

Продвинутый дополнительный материал

Пример Сигма-алберы

Проверим, является ли $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ сигма-алгеброй множества $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Для удобства обозначим $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 2\}, A_4 = \{3, 4\}$. Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

❶ $U = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Sigma$.

❷ Сделаем несколько проверок, перебирая все подмножества $A \in \Sigma$:

$$\Omega - \emptyset = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset \in \Sigma$$

$$\Omega - \{1, 2\} = \{3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{3, 4\} = \{1, 2\} \in \Sigma$$

❸ Рассмотрим все возможные случаи объединения этих множеств:

$$A_1 \cup A_2 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad A_1 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_4 = \emptyset \cup \{3, 4\} = \{3, 4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_2 \cup A_4 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_4 = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

Продвинутый дополнительный материал

Пример Сигма-алберы

Проверим, является ли $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ сигма-алгеброй множества $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Для удобства обозначим $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 2\}, A_4 = \{3, 4\}$. Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

❶ $U = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$.

❷ Сделаем несколько проверок, перебирая все подмножества $A \in \Sigma$:

$$\Omega - \emptyset = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset \in \Sigma$$

$$\Omega - \{1, 2\} = \{3, 4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{3, 4\} = \{1, 2\} \in \Sigma$$

❸ Рассмотрим все возможные случаи объединения этих множеств:

$$A_1 \cup A_2 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad A_1 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_4 = \emptyset \cup \{3, 4\} = \{3, 4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_2 \cup A_4 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_4 = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \Sigma$$

Поскольку все три условия соблюдены, то Σ является сигма-алгеброй множества U .

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U , для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U , содержащей S .

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U , для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U , содержащей S .
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U , для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U , содержащей S .
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** \mathcal{B} является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R , содержащей S . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U , для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U , содержащей S .
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** \mathcal{B} является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R , содержащей S . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0, 1)$, $\{1\}$, $(0, 1]$, $(0, 1] \cup (3, 5.5)$ и множество иррациональных чисел \overline{Q} принадлежат \mathcal{B} .

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U , для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U , содержащей S .
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** \mathcal{B} является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R , содержащей S . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0, 1)$, $\{1\}$, $(0, 1]$, $(0, 1] \cup (3, 5.5)$ и множество иррациональных чисел \overline{Q} принадлежат \mathcal{B} .

Решение:

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку \mathcal{B} является минимальной сигма алгеброй R , содержащей S , то $S \subset \mathcal{B}$. Поэтому, из того, что $(0, 1) \in S$, следует $(0, 1) \in \mathcal{B}$.

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U , для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U , содержащей S .
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** \mathcal{B} является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R , содержащей S . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0, 1)$, $\{1\}$, $(0, 1]$, $(0, 1] \cup (3, 5.5)$ и множество иррациональных чисел \overline{Q} принадлежат \mathcal{B} .

Решение:

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку \mathcal{B} является минимальной сигма алгеброй R , содержащей S , то $S \subset \mathcal{B}$. Поэтому, из того, что $(0, 1) \in S$, следует $(0, 1) \in \mathcal{B}$.
- По аналогии нетрудно показать, что $(-\infty, 1), (1, \infty) \in \mathcal{B}$. По свойству (3) имеем $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) \in \mathcal{B}$. Из свойства (1) следует $R \subset \mathcal{B}$. Применяя свойство (2) получаем $R - ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$.

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U , для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U , содержащей S .
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** \mathcal{B} является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R , содержащей S . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0, 1)$, $\{1\}$, $(0, 1]$, $(0, 1] \cup (3, 5.5)$ и множество иррациональных чисел \overline{Q} принадлежат \mathcal{B} .

Решение:

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку \mathcal{B} является минимальной сигма алгеброй R , содержащей S , то $S \subset \mathcal{B}$. Поэтому, из того, что $(0, 1) \in S$, следует $(0, 1) \in \mathcal{B}$.
- По аналогии нетрудно показать, что $(-\infty, 1), (1, \infty) \in \mathcal{B}$. По свойству (3) имеем $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) \in \mathcal{B}$. Из свойства (1) следует $R \subset \mathcal{B}$. Применяя свойство (2) получаем $R - ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$.
- Поскольку $\{1\} \in \mathcal{B}$ и $(0, 1) \in \mathcal{B}$, то по свойству (3) получаем $(0, 1) \cup \{1\} = (0, 1] \in \mathcal{B}$

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U , для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U , содержащей S .
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** \mathcal{B} является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R , содержащей S . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0, 1)$, $\{1\}$, $(0, 1]$, $(0, 1] \cup (3, 5.5)$ и множество иррациональных чисел \overline{Q} принадлежат \mathcal{B} .

Решение:

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку \mathcal{B} является минимальной сигма алгеброй R , содержащей S , то $S \subset \mathcal{B}$. Поэтому, из того, что $(0, 1) \in S$, следует $(0, 1) \in \mathcal{B}$.
- По аналогии нетрудно показать, что $(-\infty, 1), (1, \infty) \in \mathcal{B}$. По свойству (3) имеем $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) \in \mathcal{B}$. Из свойства (1) следует $R \subset \mathcal{B}$. Применяя свойство (2) получаем $R - ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$.
- Поскольку $\{1\} \in \mathcal{B}$ и $(0, 1) \in \mathcal{B}$, то по свойству (3) получаем $(0, 1) \cup \{1\} = (0, 1] \in \mathcal{B}$
- Пользуясь полученным ранее результатом и свойством (3) имеем $(0, 1] \cup (3, 5.5) \in \mathcal{B}$.

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-алгебра

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U , для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U , содержащей S .
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** \mathcal{B} является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R , содержащей S . Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0, 1)$, $\{1\}$, $(0, 1]$, $(0, 1] \cup (3, 5.5)$ и множество иррациональных чисел \overline{Q} принадлежат \mathcal{B} .

Решение:

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку \mathcal{B} является минимальной сигма алгеброй R , содержащей S , то $S \subset \mathcal{B}$. Поэтому, из того, что $(0, 1) \in S$, следует $(0, 1) \in \mathcal{B}$.
- По аналогии нетрудно показать, что $(-\infty, 1), (1, \infty) \in \mathcal{B}$. По свойству (3) имеем $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) \in \mathcal{B}$. Из свойства (1) следует $R \subset \mathcal{B}$. Применяя свойство (2) получаем $R - ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$.
- Поскольку $\{1\} \in \mathcal{B}$ и $(0, 1) \in \mathcal{B}$, то по свойству (3) получаем $(0, 1) \cup \{1\} = (0, 1] \in \mathcal{B}$.
- Пользуясь полученным ранее результатом и свойством (3) имеем $(0, 1] \cup (3, 5.5) \in \mathcal{B}$.
- По аналогии с $\{1\} \in \mathcal{B}$ можно показать, что $\{x\} \in \mathcal{B}, \forall x \in R$. Поскольку множество рациональных чисел Q счетно, то по свойству (3) получаем $Q = \left(\bigcup_{x, y \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}} \{x/y\} \right) \in \mathcal{B}$. Применяя свойство (2) имеем $\overline{Q} = (R - Q) \in \mathcal{B}$.

Продвинутый дополнительный материал

Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.

Продвинутый дополнительный материал

Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X : \Omega \rightarrow R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B \in \mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Продвинутый дополнительный материал

Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X : \Omega \rightarrow R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B \in \mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда $\Omega = [1, 10]$.

Продвинутый дополнительный материал

Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X : \Omega \rightarrow R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B \in \mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда $\Omega = [1, 10]$.
- Предположим, что пространство событий \mathcal{F} состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \Omega\} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset [0, 10]\}$. Например, $A_1 = [2, 3]$ и $A_2 = (2, 5) \cup (7.5, 8]$ являются событиями, а $A_3 = [-3, 2]$ – нет, поскольку $A_3 \not\subset \Omega$.

Продвинутый дополнительный материал

Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X : \Omega \rightarrow R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B \in \mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда $\Omega = [1, 10]$.
- Предположим, что пространство событий \mathcal{F} состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \Omega\} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset [0, 10]\}$. Например, $A_1 = [2, 3]$ и $A_2 = (2, 5) \cup (7.5, 8]$ являются событиями, а $A_3 = [-3, 2]$ – нет, поскольку $A_3 \not\subset \Omega$.
- Пусть завод продает весь произведенный металл по цене 3 рубля за тонну. Рассмотрим функцию $X(\omega) = 3\omega$, отражающую выручку фирмы. Обратим внимание, что, например, $X^{-1}([6, 15])$ является событием, поскольку:

$$X^{-1}([6, 15]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [6, 15]\} = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [6, 15]\} = [6/3, 15/3] = [2, 5] \in \mathcal{F}$$

Продвинутый дополнительный материал

Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X : \Omega \rightarrow R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B \in \mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда $\Omega = [1, 10]$.
- Предположим, что пространство событий \mathcal{F} состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \Omega\} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset [0, 10]\}$. Например, $A_1 = [2, 3]$ и $A_2 = (2, 5) \cup (7.5, 8]$ являются событиями, а $A_3 = [-3, 2]$ – нет, поскольку $A_3 \not\subset \Omega$.
- Пусть завод продает весь произведенный металл по цене 3 рубля за тонну. Рассмотрим функцию $X(\omega) = 3\omega$, отражающую выручку фирмы. Обратим внимание, что, например, $X^{-1}([6, 15])$ является событием, поскольку:

$$X^{-1}([6, 15]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [6, 15]\} = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [6, 15]\} = [6/3, 15/3] = [2, 5] \in \mathcal{F}$$

- В более общем случае получаем:

$$X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [a, b]\} = [\max(a/3, 1), \min(b/3, 10)] \in \mathcal{F}$$

Продвинутый дополнительный материал

Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X : \Omega \rightarrow R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B \in \mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда $\Omega = [1, 10]$.
- Предположим, что пространство событий \mathcal{F} состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \Omega\} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset [0, 10]\}$. Например, $A_1 = [2, 3]$ и $A_2 = (2, 5) \cup (7.5, 8]$ являются событиями, а $A_3 = [-3, 2]$ – нет, поскольку $A_3 \not\subset \Omega$.
- Пусть завод продает весь произведенный металл по цене 3 рубля за тонну. Рассмотрим функцию $X(\omega) = 3\omega$, отражающую выручку фирмы. Обратим внимание, что, например, $X^{-1}([6, 15])$ является событием, поскольку:

$$X^{-1}([6, 15]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [6, 15]\} = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [6, 15]\} = [6/3, 15/3] = [2, 5] \in \mathcal{F}$$

- В более общем случае получаем:

$$X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [a, b]\} = [\max(a/3, 1), \min(b/3, 10)] \in \mathcal{F}$$

- Далее остается показать, что продемонстрированный результат справедлив для любого счетного объединения и пересечения интервалов. Но в силу громоздкости этот шаг мы опустим.