Теория Вероятностей и Статистика

Гипотезы о среднем, дисперсии и доле

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021-2022

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ.

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ.
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ.
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.
- Задается уровень значимости теста α (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика $T(X)$, исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область $\mathcal{T}_\alpha$, то есть $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$.

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ.
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.
- Задается уровень значимости теста α (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика $T(X)$, исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область $\mathcal{T}_\alpha$, то есть $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$.
- Как правило критическая область $\mathcal{T}_\alpha$ подбирается таким образом, чтобы в нее входили экстремальные (наибольшие и наименьшие) реализации тестовой статистики.

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ.
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.
- Задается уровень значимости теста α (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика $T(X)$, исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область $\mathcal{T}_\alpha$, то есть $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$.
- Как правило критическая область $\mathcal{T}_\alpha$ подбирается таким образом, чтобы в нее входили экстремальные (наибольшие и наименьшие) реализации тестовой статистики.
- Например, если по выборке из нормального распределения тестируется гипотеза $H_0 : \mu = \mu_0$ с помощью статистики $T(X) = \overline{X}_n$, то интуиция подсказывает целесообразность отклонения нулевой гипотезы когда выборочное среднее $\overline{X}_n$ окажется намного больше или намного меньше предполагаемого математического ожидания μ_0.

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ.
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.
- Задается уровень значимости теста α (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика $T(X)$, исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область $\mathcal{T}_\alpha$, то есть $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$.
- Как правило критическая область $\mathcal{T}_\alpha$ подбирается таким образом, чтобы в нее входили экстремальные (наибольшие и наименьшие) реализации тестовой статистики.
- Например, если по выборке из нормального распределения тестируется гипотеза $H_0 : \mu = \mu_0$ с помощью статистики $T(X) = \overline{X}_n$, то интуиция подсказывает целесообразность отклонения нулевой гипотезы когда выборочное среднее $\overline{X}_n$ окажется намного больше или намного меньше предполагаемого математического ожидания μ_0.
- Если мы, например, тестируем гипотезу о математическом ожидании зарплаты случайно взятого индивида, то нулевая гипотеза будет отклоняться, если наблюдаемая по результатам опроса средняя зарплата намного больше или меньше предполагаемой.

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.

Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.

Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) > c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty,)$ именуется **правосторонней**.

Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) > c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty,)$ именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_{\alpha/2}$ и $T(X) > c_{1-\alpha/2}$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = \left(-\infty, c_{\alpha/2}\right) \cup \left(c_{1-\alpha/2}, \infty, \right)$ именуется **двухсторонней**.

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) > c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty,)$ именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_{\alpha/2}$ и $T(X) > c_{1-\alpha/2}$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = \left(-\infty, c_{\alpha/2}\right) \cup \left(c_{1-\alpha/2}, \infty, \right)$ именуется **двухсторонней**.
- Для соответствующих критических областей довольно просто считать p-value:

Левосторонняя: p-value $= F_{T(X)|H_0}(T(x))$

Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) > c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty,)$ именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_{\alpha/2}$ и $T(X) > c_{1-\alpha/2}$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = \left(-\infty, c_{\alpha/2}\right) \cup \left(c_{1-\alpha/2}, \infty,\right)$ именуется **двухсторонней**.
- Для соответствующих критических областей довольно просто считать p-value:

$$\textbf{Левосторонняя: } \text{p-value} = F_{T(X)|H_0}(T(x))$$

$$\textbf{Правосторонняя: } \text{p-value} = 1 - F_{T(X)|H_0}(T(x))$$

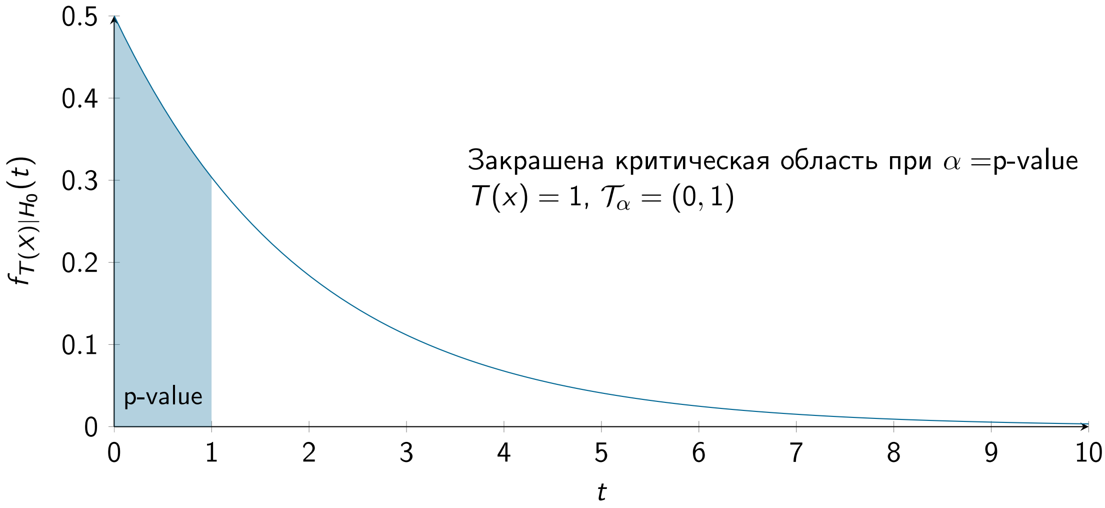
Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) > c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty,)$ именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_{\alpha/2}$ и $T(X) > c_{1-\alpha/2}$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = \left(-\infty, c_{\alpha/2}\right) \cup \left(c_{1-\alpha/2}, \infty, \right)$ именуется **двухсторонней**.
- Для соответствующих критических областей довольно просто считать p-value:

$$\textbf{Левосторонняя: } \text{p-value} = F_{T(X)|H_0}(T(x))$$

$$\textbf{Правосторонняя: } \text{p-value} = 1 - F_{T(X)|H_0}(T(x))$$

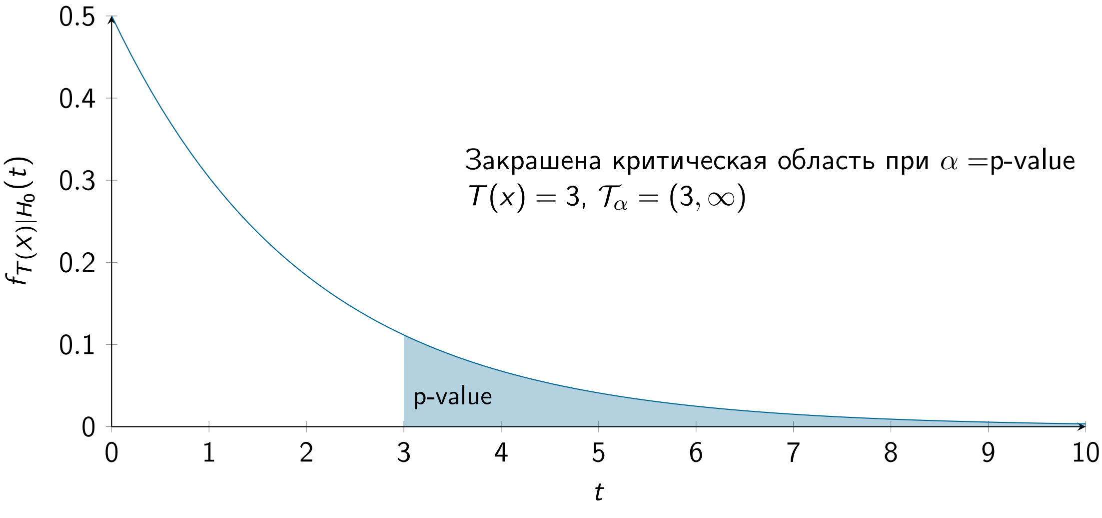
$$\textbf{Двухсторонняя: } \text{p-value} = 2\min\left(F_{T(X)|H_0}(T(x)), 1 - F_{T(X)|H_0}(T(x))\right)$$



Закрашена критическая область при $\alpha =$p-value
$T(x) = 1$, $\mathcal{T}_\alpha = (0, 1)$

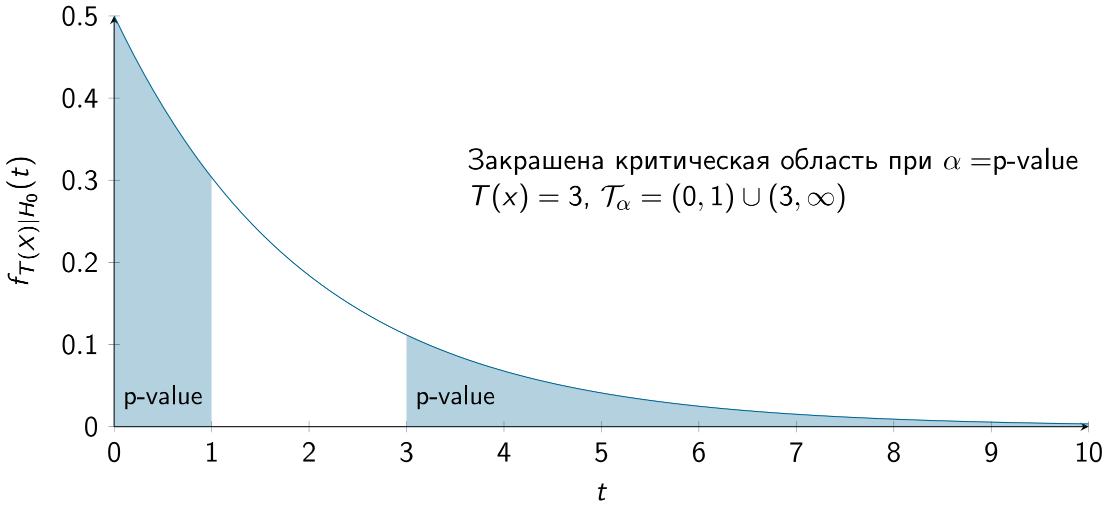
Тестирование гипотез

Правосторонняя критическая область, графическая иллюстрация



Тестирование гипотез

Двухстороняя критическая область, графическая иллюстрация



Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ с неизвестными параметрами.

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu = \mu_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}}, \qquad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu = \mu_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}}, \qquad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через $t_{n-1,q}$ обозначая квантиль уровня q распределения $t(n-1)$:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha})$	$\left(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha/2}\right) \cup \left(t_{n-1,1-\alpha/2}, \infty\right)$	$(t_{n-1,1-\alpha}, \infty)$
p-value	$F_{t(n-1)}(T(x))$	$2\min\left(F_{t(n-1)}(T(x)), 1 - F_{t(n-1)}(T(x))\right)$	$1 - F_{t(n-1)}(T(x))$

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p-value теста.

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 6$ и $H_1 : \mu < 6$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Пример

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 6$ и $H_1 : \mu < 6$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3-1,0.95} = t_{2,0.95} \approx 2.92$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$.

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Пример

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 6$ и $H_1 : \mu < 6$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3-1,0.95} = t_{2,0.95} \approx 2.92$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$.
- Так как $\overline{x}_3 = 5$ и $\hat{\sigma}_3^2(x) = 4$, то $T(x)\frac{(5-6)}{\sqrt{4/3}} \approx -0.866$.

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Пример

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 6$ и $H_1 : \mu < 6$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3-1,0.95} = t_{2,0.95} \approx 2.92$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$.
- Так как $\overline{x}_3 = 5$ и $\hat{\sigma}_3^2(x) = 4$, то $T(x)\frac{(5-6)}{\sqrt{4/3}} \approx -0.866$.
- В силу того, что $-0.866 \notin (-\infty, -2.92)$, нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Пример

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 6$ и $H_1 : \mu < 6$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3-1,0.95} = t_{2,0.95} \approx 2.92$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$.
- Так как $\overline{x}_3 = 5$ и $\hat{\sigma}_3^2(x) = 4$, то $T(x)\frac{(5-6)}{\sqrt{4/3}} \approx -0.866$.
- В силу того, что $-0.866 \notin (-\infty, -2.92)$, нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.
- Наконец, p-value$=F_{t(2)}(-0.866) \approx 0.239$, а значит нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 23.9%, например, на 30%-м (10%-м).

Гипотеза о математическом ожидании

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2.

Гипотеза о математическом ожидании

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2.
- При большом $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu = \mu_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 / n}}, \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Гипотеза о математическом ожидании
Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2.
- При большом $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu = \mu_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2 / n}}, \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -z_{1-\alpha})$	$\left(-\infty, -z_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(z_{1-\alpha/2}, \infty\right)$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$\Phi(T(x))$	$2\min\left(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x))\right)$	$1 - \Phi(T(x))$

Гипотеза о математическом ожидании

Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

Гипотеза о математическом ожидании
Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 8$ и $H_1 : \mu > 8$, где $E(X_1) = \mu$.

Гипотеза о математическом ожидании

Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 8$ и $H_1 : \mu > 8$, где $E(X_1) = \mu$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (1.28, \infty)$.

Гипотеза о математическом ожидании
Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 8$ и $H_1 : \mu > 8$, где $E(X_1) = \mu$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (1.28, \infty)$.
- Так как $\overline{x}_{30} = 300/30 = 10$ и $\hat{\sigma}^2_{30}(x) = 50$, то $T(x)\frac{(10-8)}{\sqrt{50/30}} \approx 1.55$.

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 8$ и $H_1 : \mu > 8$, где $E(X_1) = \mu$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (1.28, \infty)$.
- Так как $\overline{x}_{30} = 300/30 = 10$ и $\hat{\sigma}^2_{30}(x) = 50$, то $T(x)\frac{(10-8)}{\sqrt{50/30}} \approx 1.55$.
- В силу того, что $1.55 \in (1.28, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 10%-м уровне значимости.

Гипотеза о математическом ожидании

Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 8$ и $H_1 : \mu > 8$, где $E(X_1) = \mu$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (1.28, \infty)$.
- Так как $\overline{x}_{30} = 300/30 = 10$ и $\hat{\sigma}^2_{30}(x) = 50$, то $T(x)\frac{(10-8)}{\sqrt{50/30}} \approx 1.55$.
- В силу того, что $1.55 \in (1.28, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, p-value$=1 - \Phi(1.55) \approx 0.06$, а значит нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 6%, например, на 15%-м (5%-м).

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений с конечными математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и дисперсиями σ_X^2, σ_Y^2.

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений с конечными математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и дисперсиями σ_X^2, σ_Y^2.
- При больших $n \geq 30$ и $m \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}_X^2/n + \hat{\sigma}_Y^2/m}}, \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений с конечными математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и дисперсиями σ^2_X, σ^2_Y.
- При больших $n \geq 30$ и $m \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_X/n + \hat{\sigma}^2_Y/m}}, \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \mu_X < \mu_Y$	$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$	$H_1 : \mu_X > \mu_Y$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -z_{1-\alpha})$	$\left(-\infty, -z_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(z_{1-\alpha/2}, \infty\right)$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$\Phi(T(x))$	$2\min\left(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x))\right)$	$1 - \Phi(T(x))$

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

Гипотеза о разнице математических ожиданий
Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, где $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, где $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.01$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.995} \approx 2.58$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, где $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.01$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.995} \approx 2.58$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$.
- Так как $n = m = 100$, $\overline{x}_{100} = 5$, $\overline{y}_{100} = 6$, $\hat{\sigma}^2_X(x) = 9$ и $\hat{\sigma}^2_Y(y) = 7$, то $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{2/100+7/100}} \approx -2.5$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий
Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, где $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.01$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.995} \approx 2.58$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$.
- Так как $n = m = 100$, $\overline{x}_{100} = 5$, $\overline{y}_{100} = 6$, $\hat{\sigma}^2_X(x) = 9$ и $\hat{\sigma}^2_Y(y) = 7$, то $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{2/100+7/100}} \approx -2.5$.
- В силу того, что $-2.5 \notin (-\infty, -2.58)$, нулевая гипотеза не отвергается на 1%-м уровне значимости.

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, где $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.01$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.995} \approx 2.58$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$.
- Так как $n = m = 100$, $\overline{x}_{100} = 5$, $\overline{y}_{100} = 6$, $\hat{\sigma}^2_X(x) = 9$ и $\hat{\sigma}^2_Y(y) = 7$, то $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{2/100+7/100}} \approx -2.5$.
- В силу того, что $-2.5 \notin (-\infty, -2.58)$, нулевая гипотеза не отвергается на 1%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = 2\min\left(\Phi(-2.5), 1 - \Phi(-2.5)\right) \approx 2\min(0.0062, 0.9938) = 2 \times 0.0062 = 0.0124$$

Поскольку p-value$= 0.0124$, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 1.24%, например, на 5%-м (1%-м).

Гипотеза о доле

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.
- При $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : p = p_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0\left(1 - p_0\right)/n}}, \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 1\right)$$

Гипотеза о доле

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.
- При $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : p = p_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0\left(1 - p_0\right)/n}}, \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p \neq p_0$	$H_1 : p > p_0$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -z_{1-\alpha})$	$\left(-\infty, -z_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(z_{1-\alpha/2}, \infty\right)$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$\Phi(T(x))$	$2\min\left(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x))\right)$	$1 - \Phi(T(x))$

Гипотеза о доле

Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p = 0.5$ и $H_1 : p > 0.5$, где $X_1 \sim Ber(p)$.

Гипотеза о доле

Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p = 0.5$ и $H_1 : p > 0.5$, где $X_1 \sim Ber(p)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.2$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.8} \approx 0.84$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$.

Гипотеза о доле
Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p = 0.5$ и $H_1 : p > 0.5$, где $X_1 \sim Ber(p)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.2$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.8} \approx 0.84$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$.
- Так как $\overline{x}_{100} = 60/100 = 0.6$ то $T(x) = \frac{(0.6-0.5)}{\sqrt{0.5(1-0.5)/100}} = 2$.

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p = 0.5$ и $H_1 : p > 0.5$, где $X_1 \sim Ber(p)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.2$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.8} \approx 0.84$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$.
- Так как $\overline{x}_{100} = 60/100 = 0.6$ то $T(x) = \frac{(0.6-0.5)}{\sqrt{0.5(1-0.5)/100}} = 2$.
- В силу того, что $2 \in (0.84, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 20%-м уровне значимости.

Гипотеза о доле

Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p = 0.5$ и $H_1 : p > 0.5$, где $X_1 \sim Ber(p)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.2$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.8} \approx 0.84$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$.
- Так как $\overline{x}_{100} = 60/100 = 0.6$ то $T(x) = \frac{(0.6-0.5)}{\sqrt{0.5(1-0.5)/100}} = 2$.
- В силу того, что $2 \in (0.84, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 20%-м уровне значимости.
- Наконец, p-value$=1 - \Phi(2) \approx 0.023$, а значит нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 2.3%, например, на 25%-м (1%-м).

Гипотеза о разности долей

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений Бернулли с параметрами $p_X, p_Y \in (0, 1)$.

Гипотеза о разности долей

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X=(X_1,...,X_n)$ и $Y=(Y_1,...,Y_m)$ из распределений Бернулли с параметрами $p_X,p_Y\in(0,1)$.
- При $n\geq 30$ и $m\geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0:p_X=p_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X)=\frac{\overline{X}_n-\overline{Y}_m}{\sqrt{Z_{n,m}\left(1-Z_{n,m}\right)\left(1/n+1/m\right)}},\qquad Z_{n,m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j}{n+m},\qquad T(X)|H_0\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,1\right)$$

Гипотеза о разности долей

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений Бернулли с параметрами $p_X, p_Y \in (0, 1)$.
- При $n \geq 30$ и $m \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : p_X = p_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{Z_{n,m}\left(1 - Z_{n,m}\right)\left(1/n + 1/m\right)}}, \qquad Z_{n,m} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i + \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j}{n + m}, \qquad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : p_X < p_Y$	$H_1 : p_X \neq p_Y$	$H_1 : p_X > p_Y$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -z_{1-\alpha})$	$\left(-\infty, -z_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(z_{1-\alpha/2}, \infty\right)$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$\Phi(T(x))$	$2\min\left(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x))\right)$	$1 - \Phi(T(x))$

Гипотеза о разности долей
Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

Гипотеза о разности долей
Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_X = p_Y$ и $H_1 : p_X < p_Y$, где $X_1 \sim Ber(p_X)$ и $Y_1 \sim Ber(p_Y)$.

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_X = p_Y$ и $H_1 : p_X < p_Y$, где $X_1 \sim Ber(p_X)$ и $Y_1 \sim Ber(p_Y)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.95} \approx 1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.

Гипотеза о разности долей

Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_X = p_Y$ и $H_1 : p_X < p_Y$, где $X_1 \sim Ber(p_X)$ и $Y_1 \sim Ber(p_Y)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.95} \approx 1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.
- Так как $\overline{x}_{100} = 70/100 = 0.7$, $\overline{y}_{225} = 180/225 = 0.8$ и $z_{100,225} = (70+180)/(100+225) \approx 0.77$, то $T(x) = \frac{(0.7-0.8)}{\sqrt{0.77(1-0.77)(1/70+1/180)}} \approx -1.69$.

Гипотеза о разности долей
Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_X = p_Y$ и $H_1 : p_X < p_Y$, где $X_1 \sim Ber(p_X)$ и $Y_1 \sim Ber(p_Y)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.95} \approx 1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.
- Так как $\overline{x}_{100} = 70/100 = 0.7$, $\overline{y}_{225} = 180/225 = 0.8$ и $z_{100,225} = (70 + 180)/(100 + 225) \approx 0.77$, то $T(x) = \frac{(0.7-0.8)}{\sqrt{0.77(1-0.77)(1/70+1/180)}} \approx -1.69$.
- В силу того, что $-1.69 \in (-\infty, -1.65)$, нулевая гипотеза отвергается на 5%-м уровне значимости.

Гипотеза о разности долей
Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_X = p_Y$ и $H_1 : p_X < p_Y$, где $X_1 \sim Ber(p_X)$ и $Y_1 \sim Ber(p_Y)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.95} \approx 1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.
- Так как $\overline{x}_{100} = 70/100 = 0.7$, $\overline{y}_{225} = 180/225 = 0.8$ и $z_{100,225} = (70 + 180)/(100 + 225) \approx 0.77$, то $T(x) = \frac{(0.7-0.8)}{\sqrt{0.77(1-0.77)(1/70+1/180)}} \approx -1.69$.
- В силу того, что $-1.69 \in (-\infty, -1.65)$, нулевая гипотеза отвергается на 5%-м уровне значимости.
- Наконец, p-value$=\Phi(-1.69) \approx 0.046$, а значит нулевая гипотеза на любом уровне значимости, больше (меньше) 4.6%, например, на 5%-м (1%-м).

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ с неизвестными параметрами.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2}, \qquad T(X)|H_0 \sim \chi^2\left(n-1\right)$$

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2}, \qquad T(X)|H_0 \sim \chi^2\,(n-1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через $\chi^2_{n-1,q}$ обозначая квантиль уровня q распределения $\chi^2(n-1)$:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(0, \chi^2_{n-1,\alpha})$	$\left(0, \chi^2_{n-1,\alpha/2}\right) \cup \left(\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}, \infty\right)$	$(\chi^2_{n-1,1-\alpha}, \infty)$
p-value	$F_{\chi^2(n-1)}(T(x))$	$2\min\left(F_{\chi^2(n-1)}(T(x)), 1 - F_{\chi^2(n-1)}(T(x))\right)$	$1 - F_{\chi^2(n-1)}(T(x))$

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка
Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma^2 = 20$ и $H_1 : \sigma^2 \neq 20$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma^2 = 20$ и $H_1 : \sigma^2 \neq 20$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантили $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$ и $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma^2 = 20$ и $H_1 : \sigma^2 \neq 20$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантили $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$ и $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}^2_3(x) = 21$, то $T(x) = \frac{(3-1)\times 21}{20} \approx 2.1$.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma^2 = 20$ и $H_1 : \sigma^2 \neq 20$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантили $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$ и $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}^2_3(x) = 21$, то $T(x) = \frac{(3-1)\times 21}{20} \approx 2.1$.
- В силу того, что $2.1 \notin (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$, нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка
Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma^2 = 20$ и $H_1 : \sigma^2 \neq 20$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантили $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$ и $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}^2_3(x) = 21$, то $T(x) = \frac{(3-1)\times 21}{20} \approx 2.1$.
- В силу того, что $2.1 \notin (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$, нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = 2\min\left(F_{\chi^2(2)}(2.1), 1 - F_{\chi^2(2)}(2.1)\right) \approx 2\min(0.65, 0.35) = 0.7$$

Поскольку p-value$=0.7$, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 70%, например, на 80%-м (50%-м).

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ из нормальных распределений $\mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ и $\mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ с неизвестными параметрами.

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ из нормальных распределений $\mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ и $\mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}, \qquad T(X)|H_0 \sim F\left(n-1, m-1\right)$$

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ из нормальных распределений $\mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ и $\mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}, \qquad T(X)|H_0 \sim F\left(n-1, m-1\right)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через $F^q_{n-1,m-1}$ обозначая квантиль уровня q распределения $F(n-1, m-1)$:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$	$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$	$H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$
$\mathcal{T}_\alpha$	$\left(0, F^{\alpha}_{n-1,m-1}\right)$	$\left(0, F^{\alpha/2}_{n-1,m-1}\right) \cup \left(F^{1-\alpha/2}_{n-1,m-1}, \infty\right)$	$\left(F^{1-\alpha}_{n-1,m-1}, \infty\right)$
p-value	$F_{F(n-1,m-1)}(T(x))$	$2\min\left(F_{F(n-1,m-1)}(T(x)), 1 - F_{F(n-1,m-1)}(T(x))\right)$	$1 - F_{F(n-1,m-1)}(T(x))$

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация выборочной дисперсии доходов граждан оказалась равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация выборочной дисперсии доходов граждан оказалась равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ и $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$.

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка
Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация выборочной дисперсии доходов граждан оказалась равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ и $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $F_{6-1,11-1}^{0.9} \approx 0.303$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (0.303, \infty)$.

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация выборочной дисперсии доходов граждан оказалась равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ и $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $F_{6-1,11-1}^{0.9} \approx 0.303$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (0.303, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}_X^2(x) = 20$, и $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 10$, то $T(x) = 20/10 = 2$.

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация выборочной дисперсии доходов граждан оказалась равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ и $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $F^{0.9}_{6-1,11-1} \approx 0.303$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (0.303, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}_X^2(x) = 20$, и $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 10$, то $T(x) = 20/10 = 2$.
- В силу того, что $2 \in (0.303, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 10%-м уровне значимости.

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация выборочной дисперсии доходов граждан оказалась равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ и $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $F_{6-1,11-1}^{0.9} \approx 0.303$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (0.303, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}_X^2(x) = 20$, и $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 10$, то $T(x) = 20/10 = 2$.
- В силу того, что $2 \in (0.303, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, поскольку p-value$=1 - F_{F(5,10)}(2) = 0.164$, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 16.4%, например, на 20%-м (5%-м).

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из нормальных распределений с математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и равными дисперсиями $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из нормальных распределений с математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и равными дисперсиями $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(1/n + 1/m\right)}}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_X^2 + (m-1)\hat{\sigma}_Y^2}{n+m-2}, \qquad T(X)|H_0 \sim t(n+m-2)$$

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях
Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из нормальных распределений с математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и равными дисперсиями $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(1/n + 1/m\right)}}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_X^2 + (m-1)\hat{\sigma}_Y^2}{n+m-2}, \qquad T(X)|H_0 \sim t(n+m-2)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через $t_{n+m-2,q}$ обозначая квантиль уровня q распределения $t(n+m-2)$:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \mu_X < \mu_Y$	$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$	$H_1 : \mu_X > \mu_Y$
$\mathcal{T}_\alpha$	$\left(-\infty, -t_{n+m-2,1-\alpha}\right)$	$\left(-\infty, -t_{n+m-2,1-\alpha/2}\right) \cup \left(t_{n+m-2,1-\alpha/2}, \infty\right)$	$\left(t_{n+m-2,1-\alpha}, \infty\right)$
p-value	$F_{t(n+m-2)}(T(x))$	$2\min\left(F_{t(n+m-2)}(T(x)), 1 - F_{t(n+m-2)}(T(x))\right)$	$1 - F_{t(n+m-2)}(T(x))$

Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обоих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обоих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X > \mu_Y$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma^2\right)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma^2\right)$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях
Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обоих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X > \mu_Y$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma^2\right)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3+2-2,0.95} \approx 2.35$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$.

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обоих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X > \mu_Y$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma^2\right)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3+2-2,0.95} \approx 2.35$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$.
- Так как $\overline{x}_3 = 3$, $\overline{y}_2 = 3.5$, $\hat{\sigma}^2_X(x) = 1$, $\hat{\sigma}^2_Y(y) = 4.5$ и $\hat{\sigma}^2 \approx 0.93$, то $T(x) = \frac{(3-3.5)}{\sqrt{0.93 \times (1/3+1/2)}} \approx -0.568$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обоих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X > \mu_Y$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma^2\right)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3+2-2,0.95} \approx 2.35$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$.
- Так как $\overline{x}_3 = 3$, $\overline{y}_2 = 3.5$, $\hat{\sigma}^2_X(x) = 1$, $\hat{\sigma}^2_Y(y) = 4.5$ и $\hat{\sigma}^2 \approx 0.93$, то $T(x) = \frac{(3-3.5)}{\sqrt{0.93\times(1/3+1/2)}} \approx -0.568$.
- В силу того, что $-0.568 \notin (2.35, \infty)$, нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обоих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X > \mu_Y$, где $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma^2\right)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma^2\right)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3+2-2,0.95} \approx 2.35$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$.
- Так как $\overline{x}_3 = 3$, $\overline{y}_2 = 3.5$, $\hat{\sigma}^2_X(x) = 1$, $\hat{\sigma}^2_Y(y) = 4.5$ и $\hat{\sigma}^2 \approx 0.93$, то $T(x) = \frac{(3-3.5)}{\sqrt{0.93\times(1/3+1/2)}} \approx -0.568$.
- В силу того, что $-0.568 \notin (2.35, \infty)$, нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = 1 - F_{t(3)}\left(-0.568\right) \approx 0.695$$

Поскольку p-value$= 0.695$, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 69.5%, например, на 80%-м (60%-м).

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных объемах

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_n)$, такие, что $X - Y$ является выборкой из нормального распределения. Обозначим $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных объемах

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_n)$, такие, что $X - Y$ является выборкой из нормального распределения. Обозначим $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_n}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{X-Y}/n}}, \qquad \hat{\sigma}^2_{X-Y} \text{ считается по выборке } X - Y, \qquad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных объемах

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_n)$, такие, что $X - Y$ является выборкой из нормального распределения. Обозначим $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью $\mathcal{T}_\alpha$:

$$T(X) = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_n}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{X-Y}/n}}, \qquad \hat{\sigma}^2_{X-Y} \text{ считается по выборке } X - Y, \qquad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через $t_{n-1,q}$ обозначая квантиль уровня q распределения $t(n-1)$:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \mu_X < \mu_Y$	$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$	$H_1 : \mu_X > \mu_Y$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha})$	$\left(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha/2}\right) \cup \left(t_{n-1,1-\alpha/2}, \infty\right)$	$(t_{n-1,1-\alpha}, \infty)$
p-value	$F_{t(n-1)}(T(x))$	$2\min\left(F_{t(n-1)}(T(x)), 1 - F_{t(n-1)}(T(x))\right)$	$1 - F_{t(n-1)}(T(x))$

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях
Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X < \mu_Y$, где $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2_{X-Y}\right)$.

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X < \mu_Y$, где $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2_{X-Y}\right)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{2-1,0.9} \approx 3.08$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X < \mu_Y$, где $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2_{X-Y}\right)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{2-1,0.9} \approx 3.08$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$.
- Так как $x - y = (-60, 10)$, $\overline{x}_2 - \overline{y}_2 = -25$ и $\hat{\sigma}^2 = 2450$, то $T(x) = \frac{-25}{\sqrt{2450/2}} \approx -0.71$.

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X < \mu_Y$, где $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2_{X-Y}\right)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{2-1,0.9} \approx 3.08$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$.
- Так как $x - y = (-60, 10)$, $\overline{x}_2 - \overline{y}_2 = -25$ и $\hat{\sigma}^2 = 2450$, то $T(x) = \frac{-25}{\sqrt{2450/2}} \approx -0.71$.
- В силу того, что $-0.71 \notin (-\infty, -3.08)$, нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X < \mu_Y$, где $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2_{X-Y}\right)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{2-1,0.9} \approx 3.08$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$.
- Так как $x - y = (-60, 10)$, $\overline{x}_2 - \overline{y}_2 = -25$ и $\hat{\sigma}^2 = 2450$, то $T(x) = \frac{-25}{\sqrt{2450/2}} \approx -0.71$.
- В силу того, что $-0.71 \notin (-\infty, -3.08)$, нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = F_{t(1)}\left(-0.71\right) \approx 0.3$$

  Поскольку p-value$= 0.3$, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 30%, например, на 90%-м (20%-м).