Фамилия, имя и номер группы (печатными буквами):	Задача	1	2	3	4	5
....	Балл					

Информация о контрольной работе

1. Эту работу (листы) нельзя открывать до объявления преподавателем о начале контрольной работы. В противном случае оценка за работу будет обнулена.

2. На контрольной работе можно пользоваться простым калькулятором, ручками, линейкой и карандашом. Кроме того, можно использовать один лист А4, содержащий (по обеим сторонам) любую информацию, написанную от руки (самим студентом).

3. Контрольная выполняется индивидуально. Общение или взаимодействие с кем-либо или чем-либо (за исключением обозначенных выше разрешенных предметов) помимо преподавателей и ассистентов по курсу приведет к обнулению оценки за работу. Кроме того, нельзя иметь при себе электронные средства коммуникации, включая телефон, электронные часы и наушники.

4. Продолжительность контрольной работы составляет 170 минут (2 часа, 50 минут). После объявления об окончании времени конторольной работы необходимо прекратить вносить какие-либо правки в работу. В противном случае оценка за работу будет обнулена.

5. Досрочно покидать аудиторию можно лишь в течение первых 155 минут контрольной.

6. По окончанию работы необходимо дождаться, пока преподаватели соберут **все** работы в аудитории и пересчитают их количество, сопоставив с числом находящихся в аудитории студентов.

7. Необходимо иметь с собой студенческий пропуск, который позволит преподавателям и ассистентам идентифицировать вашу личность.

8. Условия из предыдущих пунктов не распространяются на условия из последующих, если в тексте задачи или пункта непосредственно не указано иное.

1. В семье **три** ребенка. Вероятность рождения девочек и мальчиков одинакова.

    а) Посчитайте вероятность того, что девочек в семье больше, чем мальчиков. **(3 балла)**

    б) По крайней мере двое детей - девочки. Найдите условную вероятность того, что в семье есть хотя бы один мальчик. **(7 баллов)**

    в) Каждая девочка в семье подбросила обычную монетку. Найдите, вероятность того, что не выпадет ни одного орла. **(7 баллов)**
    Примечание: в семье может не быть ни одной девочки, в таком случае никто из детей не подбрасывает монетку, а значит не выпадает ни одного орла.

    г) Каждая девочка в семье подбросила обычную монетку. Найдите условную вероятность того, что девочек в семье больше, чем мальчиков, если известно, что не выпало ни одного орла. **(8 баллов)**

Решение:

а) Через G_i обозначим событие, при котором в семье **ровно** i девочек, где $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Поскольку в семье три ребенка, то пространство элементарных событий имеет вид:

$$\Omega = \{(g, g, g), (g, b, g), ..., (b, b, b)\}$$

где g и b выступают краткими обозначениями для девочек и мальчиков соответственно. Нетрудно догадаться, что пространство элементарных событий включает 2^3 элементарных события, поскольку каждый из трех детей является либо девочкой, либо мальчиком.

Событию G_1 удовлетворяют C_3^2 элементарных события, поскольку из трех детей мы должны выбрать ровно двух, которые окажутся девочками, а оставшийся ребенок будет мальчиком. По аналогии событию G_2 удовлетворяет лишь одно элементарное событие. Найдем вероятность искомого события обращая внимание на то, что события G_2 и G_3 несовместные и состоят из равновероятных элементарных событий:

$$P(G_2 \cup G_3) = P(G_2) + P(G_3) = \frac{C_3^2}{2^3} + \frac{C_3^3}{2^3} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

б) Найдем условную вероятность того, что в семье все дети являются девочками:

$$P(G_3|G_2 \cup G_3) = \frac{P(G_3 \cap (G_2 \cup G_3))}{P(G_2 \cup G_3)} =$$

$$= \frac{P(G_3)}{P(G_2 \cup G_3)} = \frac{P(\{(g, g, g)\})}{P(\{(g, g, g), (g, g, b), (g, b, g), (b, g, g)\})} = \frac{1}{4}$$

Найдем условную вероятность того, что в семье есть хотя бы один мальчик, как вероятность события, обратного событию, при котором в семье все дети являются девочками:

$$P(\overline{G}_3|G_2 \cup G_3) = 1 - P(G_3|G_2 \cup G_3) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

в) Через O обозначим событие, в соответствии с которым у детей не выпало ни одного орла. Найдем вероятность данного события используя формулу полной вероятности:

$$P(O) = P(O|G_0)P(G_0) + P(O|G_1)P(G_1) + P(O|G_2)P(G_2) + P(O|G_3)P(G_3) =$$

$$= 1 \times \frac{1}{8} + 0.5 \times \frac{3}{8} + 0.5^2 \times \frac{3}{8} + 0.5^3 \times \frac{1}{8} = \frac{27}{64}$$

г) Учитывая, что события $(G_2|O)$ и $(G_3|O)$ несовместные, рассчитаем условную вероятность того, что в семье есть хотя бы две девочки:

$$P(G_2 \cup G_3|O) = P(G_2|O) + P(G_3|O) = \frac{P(O|G_2)P(G_2)}{P(O)} + \frac{P(O|G_3)P(G_3)}{P(O)} =$$

$$= \frac{0.5^2 \times \frac{3}{8}}{\frac{27}{64}} + \frac{0.5^3 \times \frac{1}{8}}{\frac{27}{64}} = \frac{7}{27}$$

Примечание: последний пункт можно решить и путем перебора всех равновероятных событий. Однако, такое решение не будет являться универсальным, поскольку потребует существенно корректировки в случае, когда шансы выпадения орла и решки не одинаковы (неправильная монетка).

Проверка в R

```
# Число симуляций
n <- 100000
# Количество детей
n.kids <- 3
# Симулируем семьи с детьми
kids <- matrix(rbinom(n * n_kids, 1, 0.5), ncol = n.kids)
# Считаем число девочек и мальчиков в каждой семье
n.girl <- rowSums(kids)
n.boy <- n.kids - n.girl
# Девочки подкидывают монетку
orel <- rbinom(n, n.girl, 0.5)
# пункт 1
mean(n.girl > n.boy)
# пункт 2
mean((n.boy >= 1)[n.girl >= 2])
# пункт 3
mean(orel == 0)
# пункт 4
mean((n.girl > n.boy)[orel == 0])
```

2. Каждый год число набегов, совершенных викингами, является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона. Произведение математического ожидания и дисперсии этой случайной величины равняется 25.

   а) Рассчитайте вероятность того, что за **один** год викинги совершат хотя бы 2 набега. **(2 балла)**

   б) Найдите условную вероятность того, что за **один** год викинги совершат на менее 5-ти набегов, если известно, что они осуществят от 4-х до 6-ти набегов включительно. **(3 балла)**

   в) Вычислите вероятность того, что за **три** года викинги совершат 10 набегов (предположим, что число набегов в конкретный год не зависит от числа набегов, совершенных в предыдущие годы). **(5 баллов)**

   г) Рассчитайте вероятность того, что на протяжении **трех** лет хотя бы в один из годов викинги совершат ровно 6 набегов. **(7 баллов)** д) Каждый набег, с вероятностью 0.6, оказывается успешным (предположим, что успешность набегов не влияет на их количество). Найдите условное математическое ожидание числа **успешных** набегов за **один** год, если известно, что викинги совершили 5 или 6 набегов (в этот же год, при этом были они успешными или нет – неизвестно). **(8 баллов)**

Примечания: вычисления могут оказаться довольно громоздкими, поэтому досчитывать ответ до конца не обязательно, достаточно лишь аккуратно расписать формулу и подставить в нее верные числа.

Решение:

а) Через $X \sim Pois(\lambda)$ обозначим пуассоновскую случайную величину, отражающую число набегов, совершенных викингами за год. Обратим внимание, что $Var(X)E(X) = \lambda \times \lambda = \lambda^2 = 25$, откуда $\lambda = 5$. Отсюда получаем, что:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$
$$= 1 - \frac{5^0}{0!}e^{-5} - \frac{5^1}{1!}e^{-5} = 1 - 6e^{-5} \approx 0.96$$

б) Найдем условную вероятность:

$$P(X \geq 5|4 \leq X \leq 6) = \frac{P((X \geq 5) \cap (4 \leq X \leq 6))}{P(4 \leq X \leq 6)} = \frac{P(X \in \{5,6\})}{P(X \in \{4,5,6\})} =$$
$$= \frac{P(X=5) + P(X=6)}{P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)} = \frac{\frac{5^5}{5!}e^{-5} + \frac{5^6}{6!}e^{-5}}{\frac{5^4}{4!}e^{-5} + \frac{5^5}{5!}e^{-5} + \frac{5^6}{6!}e^{-5}} = \frac{11}{17} \approx 0.647$$

в) Через X_i обозначим число набегов, совершенных викингами в i-й год, где $i \in \{1,2,3\}$. Из условия следует, что эти случайные величины независимы, а значит в силу свойства воспроизводимости:

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim Pois\,(5+5+5) = Pois\,(15)$$

Отсюда получаем искомую вероятность:

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{15^{10}}{10!}e^{-15} \approx 0.04861075$$

г) Используя формулу Моргана, формулу для вероятности обратного события и независимость рассматриваемых событий получаем:

$$P(X_1 = 6 \cup X_2 = 6 \cup X_3 = 6) = 1 - P(\overline{X_1 = 6 \cup X_2 = 6 \cup X_3 = 6}) =$$
$$= 1 - P(X_1 \neq 6 \cap X_2 \neq 6 \cap X_3 \neq 6) =$$
$$= 1 - P(X_1 \neq 6)P(X_2 \neq 6)P(X_3 \neq 6) = (1 - P(X_1 = 6))(1 - P(X_2 = 6))(1 - P(X_3 = 6)) =$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{5^6}{6!}e^{-5}\right)\left(1 - \frac{5^6}{6!}e^{-5}\right)\left(1 - \frac{5^6}{6!}e^{-5}\right) = 1 - \left(1 - \frac{5^6}{6!}e^{-5}\right)^3 \approx 0.3776515$$

д) Через Y обозначим случайную величину, отражающую число успешных набегов. Обратим внимание, что случайная величина $(Y|X=k) \sim B(0.6, k)$, где $k \in \text{supp}(X)$, имеет биномиальное распределение. Применяя аналог формулы полной вероятности для математического ожидания получаем:

$$
\begin{gathered}
E(Y|X=5 \cup X=6) = \\
= E(Y|(X=5 \cup X=6) \cap X=5) \times P(X=6|X=5 \cup X=6) + \\
+ E(Y|(X=5 \cup X=6) \cap X=6) \times P(X=6|X=5 \cup X=6) = \\
= E(Y|X=5) \times P(X=5|X=5 \cup X=6) + E(Y|X=6) \times P(X=6|X=5 \cup X=6) = \\
= (0.6 \times 5) \times \frac{\frac{5^5}{5!}e^{-5}}{\frac{5^5}{5!}e^{-5} + \frac{5^6}{6!}e^{-5}} + (0.6 \times 6) \times \frac{\frac{5^6}{6!}e^{-5}}{\frac{5^5}{5!}e^{-5} + \frac{5^6}{6!}e^{-5}} = \frac{36}{11} \approx 3.272727
\end{gathered}
$$

Проверка в R

```
# Число симуляций
n <- 100000
# Задаем параметр распределения
# числа набегов викингов
lambda <- 5
# Число лет, которые
# совершались набеги
n.years <- 3
# Определяем вероятность успешного набега
p.uspeh <- 0.6
# Курочки совершают набеги
# первый день
nabeg <- matrix(rpois(n * n.years, lambda), ncol = n.years)
colnames(nabeg) <- c("1-year", "2-year", "3-year")
# Проверяем успешность набегов
# в первый год
uspeh <- rbinom(n, nabeg[, 1], p.uspeh)
# пункт 1
mean(nabeg[, 1] >= 2)
# пункт 2
mean((nabeg[, 1] >= 5)[(nabeg[, 1] >= 4) & (nabeg[, 1] <= 6)])
# пункт 3
mean((rowSums(nabeg) == 10))
# пункт 4
mean((nabeg[, 1] == 6) | (nabeg[, 2] == 6) | (nabeg[, 3] == 6))
# пункт 5
mean(uspeh[(nabeg[, 1] == 5) | (nabeg[, 1] == 6)])
```

3. Контрольная работа состоит из 10-ти задач. Каждую из этих задач, **независимо** друг от друга, Вася решает с некоторой **одинаковой** вероятностью, зависящей от того, насколько хорошо он подготовился. Вася готовится либо хорошо, либо плохо, причем хорошо он готовится с вероятностью в 2 раза большей, чем плохо. Если Вася хорошо подготовился к контрольной работе, то вероятность правильного решения для каждой из задач (в отдельности) составит 0.9, а в противном случае – 0.6.

а) Известно, что Вася хорошо подготовился к контрольной работе. Определите условную вероятность, с которой он решит ровно 8 задач. **(2 балла)**

б) Найдите вероятность, с которой Вася правильно решит ровно 8 задач. **(5 баллов)**

в) Рассчитайте математическое ожидание и дисперсию числа верно решенный Васей задач. **(2 балла)**

г) Определите условную вероятность, с которой Вася хорошо подготовился к контрольной, если известно, что он решил 8 задач. **(6 баллов)**

Решение:

а) Обозначим через X число верно решенных Васей задач. Через A обозначим событие, при котором Вася хорошо готовится к контрольной работе. Заметим, что $(X|A) \sim B(10, 0.9)$, и $(X|\overline{A}) \sim B(10, 0.2)$. Отсюда получаем, что:

$$P(X = 7|A) = C_{10}^{8} 0.9^8 (1 - 0.9)^{10-8} \approx 0.1937102$$

б) В результате применения формулы полной вероятности получаем:

$$P(X = 8) = P(X = 8|A)P(A) + P(X = 8|\overline{A})P(\overline{A}) =$$

$$= \left(C_{10}^{8} 0.9^8 (1 - 0.9)^{10-8}\right) \times \frac{2}{3} + \left(C_{10}^{8} 0.6^8 (1 - 0.6)^{10-8}\right) \times \frac{1}{3} \approx 0.1694509$$

в) Раскладывая математическое ожидание имеем:

$$E(X) = E(X|A)P(A) + E(X|\overline{A})P(\overline{A}) = 10 \times 0.9 \times \frac{2}{3} + 10 \times 0.6 \times \frac{1}{3} = 8$$

г) По формуле Байеса получаем, что:

$$P(A|X = 8) = \frac{P(X = 8|A)P(A)}{P(X = 8|A)P(A) + P(X = 8|\overline{A})P(\overline{A})} =$$

$$= \frac{(C_{10}^{8} 0.9^8 (1 - 0.9)^{10-8}) \times \frac{2}{3}}{(C_{10}^{8} 0.9^8 (1 - 0.9)^{10-8}) \times \frac{2}{3} + (C_{10}^{8} 0.6^8 (1 - 0.6)^{10-8}) \times \frac{1}{3}} \approx 0.7621094$$

Решение в R

```
# Число симуляций
n <- 100000
# Вероятности для разного уровня подготовки
p <- c(0.6, 0.9)
# Задаем уровень подготовки (0 - плохо, 1 - хорошо)
good <- rbinom(n, 1, 2/3)
# Устанавливаем число задач
n.zadachi <- 10
# Определяем число решенных задач
zadachi <- rbinom(n, n.zadachi, prob = p[good + 1])
# пункт 1
mean((zadachi == 8)[good])
# пункт 2
```

```
mean(zadachi == 8)
# пункт 3
mean(zadachi)
# пункт 4
mean(good[zadachi == 8])
```

4. В лесу живут 2 белых и 3 черных кролика. Фокусник, случайным образом, приглашает на работу двух из них. Через X обозначим случайную величину, отражающую число приглашенных Фокусником на работу белых кроликов. По аналогии случайная величина Y отражает количество приглашенных на работу черных кроликов.

   а) Задайте совместное распределение X и Y в форме таблицы. **(3 балла)**
   б) Проверьте, являются ли X и Y независимыми. **(3 балла)**
   в) Посчитайте ковариацию между X и Y. **(6 баллов)**
   г) Найдите математическое ожидание числа приглашенных белых кроликов, при условии, что хотя бы один из приглашенных кроликов оказался черным. **(8 баллов)**

Решение:

а) Рассчитаем отличные от нуля совместные вероятности:

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = \frac{A_2^2 A_3^0}{A_5^2} = 0.1$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = \frac{A_2^1 A_3^1}{A_5^2} = 0.6$$

$$P(X = 0 \cap Y = 2) = \frac{A_2^0 A_3^2}{A_5^2} = 0.3$$

Построим таблицу:

Y \ X	0	1	2
0	0	0	0.1
1	0	0.6	0
2	0.3	0	0

б) События являются зависимыми, поскольку, например:

$$P(X = 1) \times P(Y = 1) = 0.6 \times 0.6 \neq 0.6 = P(X = 1 \cap Y = 1)$$

в) Посчитаем все необходимые компоненты:

$$E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.1 = 0.8$$

$$E(Y) = 0 \times 0.1 + 0.6 \times 1 + 0.3 \times 2 = 1.2$$

$$E(XY) = (2 \times 0) \times 0.3 + (1 \times 1) \times 0.6 + (2 \times 0) \times 0.1 = 0.6$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.6 - 0.8 \times 1.2 = -0.36$$

г) Поскольку один из кроликов черный, то не более, чем один кролик, может оказался белым. Следовательно, достаточно рассчитать лишь две соответствующие условные вероятности:

$$P(X=1|Y=1\cup Y=2)=\frac{P(X=1\cap(Y=1\cup Y=2)}{P(Y=1\cup Y=2)}=$$
$$=\frac{P(X=1\cap Y=1)}{P(Y=1)+P(Y=2)}=\frac{0.6}{0.6+0.3}=\frac{2}{3}$$

$$P(X=0|Y=1\cup Y=2)=1-P(X=1|Y=1\cup Y=2)=1-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

В результате получаем:

$$E(X|Y=1\cup Y=2)=P(X=1|Y=1\cup Y=2)\times 1+P(X=0|Y=1\cup Y=2)\times 0=$$
$$=\frac{2}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0=\frac{2}{3}$$

Проверка в R

```
# Число симуляций
n <- 100000
# Число кроликов различного цвета
n.white <- 2
n.black <- 3
# Вектор с кроликами
rabbits <- c(rep("white", n.white), rep("black", n.black))
# Кролики, получившие предложение о работе
offer <- matrix(NA, nrow = n, ncol = 2)
for (i in 1:n)
{
  offer[i, ] <- sample(rabbits, 2)
}
# Определяем число белых и черных кроликов
white <- rowSums(offer == "white")
black <- 2 - white
# пункт 1
table(white, black) / n
# пункт 3
cov(white, black)
# пункт 4
mean(white[black >= 1])
```

5. В городе проживают k преступников. Каждый день капитан Жеглов ловит одного преступника. Однако, с вероятностью 0.1 на место пойманного преступника приходят t новых. Найдите математическое ожидание числа дней, которые понадобятся Жеглову для того, чтобы искоренить преступность в городе, если:

   а) $t=1$ и $k=1$ **(7 баллов)**

   б) $t=1$ и $k=5$ **(3 балла)**

в) $t = 2$ и $k = 1$ **(7 баллов)**

г) $t = 2$ и $k = 5$ **(3 балла)**

Решение:

Введем случайную величину X – число дней, за которое Жеглов искоренит преступность. Через A обозначим событие, в соответствии с которым на место пойманного преступника приходят t новых.

а) Нетрудно догадаться, что $E(X|\overline{A}) = 1$, поскольку, если единственный преступник пойман, то охота Жеглова оканчивается в первый же день. Если же на место пойманного преступника приходит новый, то охота возобновляется заново, с учетом того, что у Жеглова уже ушел один день на поимку самого первого преступника, откуда $E(X|A) = E(X) + 1$. В результате получаем:

$$E(X) = E(X|\overline{A})P(\overline{A}) + E(X|A)P(A) = 1 \times 0.9 + (E(X) + 1) \times 0.1$$

Решая соответствующее равенство для $E(X)$ имеем $E(X) = \frac{10}{9}$.

б) Без потери общности можно представить, что каждый из соответствующих преступников живет в отдельном районе города S_i, где $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Через X_i обозначим число дней, которое Жеглов затрачивает на очистку i-го района от преступности. Очевидно, что X_i одинаково распределены, причем $E(X_i) = \frac{10}{9}$. В таком случае математическое ожидание общего числа необходимых на зачистку города (то есть всех пяти районов) от преступности составит:

$$E(X) = E(X_1 + \cdots + X_5) = E(X_1) + \cdots + E(X_5) = 5 \times \frac{10}{9} = \frac{50}{9}$$

в) Для того, чтобы найти $E(X|A)$ сперва обратим внимание на то, что при возникновении события A появляются два новых преступника. Без потери общности можно вообразить, что первый из них отправляется в район S_1, а второй – в район S_2. Затем Жеглов сперва очищает от преступности район S_1, а затем – район S_2. Через X_1 и X_2 обозначим случайные величины, отражающие число дней, которые Жеглов потратит на очистку от преступности каждого из этих район, причем $(X|A) = X_1 + X_2 + 1$. Нетрудно догадаться, что X, X_1 и X_2 одинаково распределены, откуда $E(X) = E(X_1) = E(X_2)$. В результате имеем:

$$E(X) = E(X|A)P(A) + E(X|\overline{A})P(\overline{A}) = 1 \times 0.9 + E(X_1 + X_2 + 1) \times 0.1 =$$
$$= 1 \times 0.9 + (E(X_1) + E(X_2) + 1) \times 0.1 = 0.9 + (E(X) + E(X) + 1) \times 0.1 = 0.9 + 0.2E(X) + 0.1$$

Решая данное равенство для $E(X)$ получаем, что $E(X) = 1.25$.

г) По аналогии без потери общности представим, что каждый из пяти преступников живет в отдельном районе, которые Жеглов очищает последовательно. Через X_i обозначим случайную величину, отражающую число дней, необходимых Жеглову для очистки i-го района, где $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Обращая внимание на то, что соответствующие случайные величины распределены так же, как и случайная величина X из предыдщуего номера, получаем:

$$E(X_1 + \cdots + X_5) = E(X_1) + \cdots + E(X_5) = E(X) + \cdots E(X) = 5E(X) = 5 \times 1.25 = 6.25$$

Решение в R

```
n <- 100000
criminal <- function(n = 100000, t = 1, k = 1, p = 0.1)
{
  days <- rep(0, n)
  for (i in 1:n)
  {
    k_new <- k
    while(k_new != 0)
    {
      k_new <- k_new - 1
      if (runif(1, 0, 1) <= p)
      {
        k_new <- k_new + t
      }
      days[i] <- days[i] + 1
    }
}
  return(days)
}
# пункт 1
mean(criminal(n = n, t = 1, k = 1, p = 0.1))
# пункт 2
mean(criminal(n = n, t = 1, k = 5, p = 0.1))
# пункт 3
mean(criminal(n = n, t = 2, k = 1, p = 0.1))
# пункт 4
mean(criminal(n = n, t = 2, k = 5, p = 0.1))
```