

Информация о минимуме

1. Минимум включает базовые задачи по теории вероятностей и статистике, для решения которых достаточно применить некоторый типичный алгоритм.
2. Каждая контрольная работа и экзамен состоят из основной части и минимума. В минимум входят задачи, схожие с теми, что представлены далее. За полностью верное решение этих задач можно получить до 5 баллов из 10.
3. Задачи решаются в тестовой форме: необходимо выбрать единственный верный вариант из нескольких доступных.
4. За ответы, не содержащие расписанного решения, исходя из которого понятна логика выбора варианта в тесте, выставляется оценка 0 баллов.
5. Минимум включает как простые задачи, так и задачи повышенной сложности. За правильное решение всех простых задач выставляется 4 балла, а за решение сложной – 1 балл.
6. Задачи повышенной сложности отмечаются пометкой (**доп.**) в конце условия. Эти задачи в контрольной работе могут в заметно большей степени отличаться от своих аналогов в данном файле.
7. Оценка за минимум не нормируется.

Минимум 3

1. Имеется выборка X_1, \dots, X_5 с реализацией $x = (2, 0, 0, -1, 3)$.
- Найдите реализацию вариационного ряда и его третьего члена.
 - Посчитайте реализацию выборочного среднего.
 - Вычислите реализацию исправленной выборочной дисперсии.
 - Определите, чему равняется реализация третьего начального выборочного момента.
 - Запишите реализацию выборочной функции распределения.
 - Найдите реализацию несмещенной оценки вероятности $P(X_1 > 0.5)$, используя информацию о всех наблюдениях в выборке.
 - Вычислите реализацию несмещенной оценки вероятности $P(X_1 > 0.5 | X_1 \leq 2)$, используя информацию о всех наблюдениях в выборке.

Решение:

- а) Сортируя, в порядке возрастания, реализации наблюдений, получаем реализацию вариационного ряда:

$$(-1, 0, 0, 2, 3)$$

Таким образом, реализацией третьего члена вариационного ряда является 0.

- б) Рассчитаем реализацию выборочного среднего:

$$\bar{x}_5 = \frac{-1 + 0 + 0 + 2 + 3}{5} = 0.8$$

- в) Посчитаем реализацию выборочной дисперсии:

$$\hat{\sigma}_5^2 = \frac{(-1 - 0.8)^2 + (0 - 0.8)^2 + (0 - 0.8)^2 + (2 - 0.8)^2 + (3 - 0.8)^2}{5 - 1} = 2.7$$

- г) Вычислим значение реализации третьего начального выборочного момента:

$$\overline{x^3} = \frac{-1^3 + 0^3 + 0^3 + 2^3 + 3^3}{5} = 6.8$$

- д) Запишем реализацию выборочной функции распределения:

$$\hat{F}_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < -1 \\ 0.2, & \text{если } -1 \leq t < 0 \\ 0.6, & \text{если } 0 \leq t < 2 \\ 0.8, & \text{если } 2 \leq t < 3 \\ 1, & \text{если } t \geq 3 \end{cases}$$

- е) Найдем реализацию соответствующей оценки:

$$\begin{aligned} \hat{P}(X > 0.5)(x) &= \frac{1}{5} (I(x_1 > 0.5) + I(x_2 > 0.5) + I(x_3 > 0.5) + I(x_4 > 0.5) + I(x_5 > 0.5)) = \\ &= \frac{1}{5} (I(2 > 0.5) + I(0 > 0.5) + I(0 > 0.5) + I(-1 > 0.5) + I(3 > 0.5)) = \\ &= \frac{1}{5} (1 + 0 + 0 + 0 + 1) = 0.4 \end{aligned}$$

ж) По аналогии с предыдущим пунктом получаем:

$$\hat{P}(X_1 > 0.5 | X_1 \leq 2)(x) = \frac{\hat{P}(X_1 > 0.5 \cap X_1 \leq 2)(x)}{\hat{P}(X_1 \leq 2)(x)} = \frac{\frac{1}{5}(1+0+0+0+0)}{\frac{1}{5}(1+1+1+1+0)} = 0.25$$

2. Имеется выборка X_1, X_2, \dots, X_n из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_i}(t) = \begin{cases} \frac{2(\theta-t)}{\theta^2}, & \text{при } t \in [0, \theta] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \text{ где } \theta > 0$$

- Определите, при каком α оценка $\hat{\theta}_3 = X_1 - 2X_2 + \alpha X_3$ окажется несмещенной.
- Найдите $\alpha > 0$, при котором последовательность оценок $\hat{\theta}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\alpha(n+1)}$ окажется состоятельной, либо покажите, что такого α не существует.
- Реализация выборки имеет вид $x = (1.5, 3.5, 3)$. При помощи второго начального момента найдите реализацию оценки параметра θ .

Решение:

а) Сперва рассчитаем математическое ожидание наблюдения:

$$E(X_i) = \int_0^\theta \frac{x \times 2(\theta - x)}{\theta^2} dx = \frac{\theta}{3}$$

Пользуясь полученным результатам найдем математическое ожидание оценки:

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}_3) &= E(X_1 - 2X_2 + \alpha X_3) = E(X_1) - 2E(X_2) + \alpha E(X_3) = \\ &= E(X_1) - 2E(X_1) + \alpha E(X_1) = \frac{\theta}{3} - \frac{2\theta}{3} + \frac{\alpha\theta}{3} \end{aligned}$$

У несмещенной оценки математическое ожидание равняется истинному значению оцениваемого параметра, откуда:

$$\frac{\theta}{3} - \frac{2\theta}{3} + \frac{\alpha\theta}{3} = \theta$$

Решая соответствующее равенство для θ получаем, что $\alpha = 4$.

б) Сперва найдем, к чему стремится математическое ожидание оценки:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\alpha(n+1)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{\alpha(n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nE(X_1)}{\alpha(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times \frac{\theta}{3}}{\alpha(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\theta}{3\alpha(n+1)} = \frac{\theta}{3\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\theta}{3\alpha} \times 1 = \frac{\theta}{3\alpha} \end{aligned}$$

Поскольку состоятельность требует выполнения асимптотическое несмещенности, то должно соблюдаться $\frac{\theta}{3\alpha} = \theta$, а значит $\alpha = \frac{1}{3}$.

Убедимся, что при соответствующем значении α дисперсия последовательности оценок стремится к нулю. В противном случае необходимого значения α не существует.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\alpha(n+1)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Var(X_1) + \dots + Var(X_n)}{(\alpha(n+1))^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nVar(X_1)}{\alpha^2(n+1)^2} = 0 \end{aligned}$$

Обратим внимание, что для нахождения предела нет необходимости в расчете выражения для $Var(X_i)$, поскольку дисперсия наблюдения является константой, не зависящей от объема выборки n .

В данном случае дисперсия последовательности оценок стремится к нулю при любом $\alpha > 0$, в том числе при $\alpha = \frac{1}{3}$, а значит при соответствующем значении последовательность оценок окажется состоятельной.

в) Найдем второй начальный момент наблюдения:

$$E(X_i^2) = \int_0^\theta \frac{x^2 \times 2(\theta - x)}{\theta^2} dx = \frac{\theta^2}{6}$$

Отсюда получаем, что:

$$\theta = \sqrt{6E(X_i^2)}$$

Следовательно, оценка метода моментов будет иметь вид:

$$\hat{\theta} = \sqrt{6\bar{X}^2_n} = \sqrt{2(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)}$$

В итоге получаем реализацию оценки:

$$\hat{\theta}(x) = \sqrt{2 \times (1.5^2 + 3.5^2 + 3^2)} \approx 6.86$$

3. Имеется выборка X_1, X_2, \dots, X_n из распределения со следующей функцией вероятности:

x	1	2	3
$P(X_1 = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

Реализация выборки имеет вид $x = (1, 2, 2, 1, 3)$

- При помощи первого начального момента найдите оценку параметра θ методом моментов и посчитайте ее реализацию.
- Проверьте, является ли найденная вами в предыдущем пункте оценка несмещенной.

Решение:

а) Найдем математическое ожидание наблюдения:

$$E(X_i) = 1 \times 0.4 + 2 \times (0.3 + \theta) + 3 \times (0.3 - \theta) = 1.9 - \theta$$

Отсюда получаем, что:

$$1.9 - \theta = E(X_i) \Rightarrow \theta = 1.9 - E(X_i)$$

Следовательно, оценка метода моментов имеет вид:

$$\hat{\theta} = 1.9 - \bar{X}$$

В результате получаем реализацию данной оценки:

$$\hat{\theta}(x) = 1.9 - \frac{1 + 2 + 2 + 1 + 3}{5} = 0.1$$

б) Оценка является несмещенной, поскольку:

$$E(\hat{\theta}) = E(1.9 - \bar{X}) = E(1.9) - E(\bar{X}) = E(1.9) - E(X_1) = 1.9 - (1.9 - \theta) = \theta$$

4. Имеется выборка X_1, X_2, X_3 из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} 0.25t, & \text{если } t \in [1, 3] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что:

- а) Наибольшее наблюдение в выборке окажется больше 2.
- б) Наименьшее наблюдение в выборке не превысит 2. (**доп.**)
- в) Медианное значение в выборке не превысит 2. (**доп.**)

Решение:

- а) Сперва найдем функцию распределения наблюдения на носителе, то есть при $t \in [1, 3]$ получаем:

$$F_{X_1}(t) = \int_1^t 0.25q dq = 0.125(t^2 - 1)$$

Применяя формулу для максимальной экстремальной статистики получаем:

$$\begin{aligned} P(X_{(3)} > 2) &= 1 - P(X_{(3)} \leq 2) = 1 - F_{X_{(3)}}(2) = 1 - (F_{X_1}(2))^3 = \\ &= 1 - (0.125 \times (2^2 - 1))^3 \approx 0.947 \end{aligned}$$

- б) По аналогии с помощью формулы для минимальной экстремальной статистики получаем:

$$\begin{aligned} P(X_{(1)} \leq 2) &= F_{X_{(1)}}(2) = 1 - (1 - F_{X_1}(2))^3 = \\ &= 1 - (1 - 0.125 \times (2^2 - 1))^3 \approx 0.756 \end{aligned}$$

- в) Можно вновь воспользоваться формулой:

$$\begin{aligned} P(X_{(2)} \leq 2) &= F_{X_{(2)}}(2) = \sum_{k=2}^3 C_3^k (1 - F_{X_1}(2))^{3-k} (F_{X_1}(2))^k = \\ &= C_3^2 (1 - F_{X_1}(2))^{3-2} (F_{X_1}(2))^2 + C_3^3 (1 - F_{X_1}(2))^{3-3} (F_{X_1}(2))^3 = \\ &= 3(1 - F_{X_1}(2)) (F_{X_1}(2))^2 + (F_{X_1}(2))^3 = \\ &= 3(1 - 0.125 \times (2^2 - 1)) (0.125 \times (2^2 - 1))^2 + (0.125 \times (2^2 - 1))^3 \approx 0.316 \end{aligned}$$

В качестве альтернативы использованию готовой формулы нетрудно вывести ее самостоятельно. Для этого обратим внимание на то, что событие $X_{(2)} \leq 2$ происходит в случае, если

хотя бы два наблюдения не больше 2. То есть если все наблюдения не больше 2 или ровно два наблюдения не меньше 2, а оставшееся – меньше 2.

$$\begin{aligned}
 P(X_{(2)} \leq 2) &= P(X_1 \leq 2 \cap X_2 \leq 2 \cap X_3 \leq 2) + \\
 &\quad + P(X_1 \leq 2 \cap X_2 \leq 2 \cap X_3 > 2) + \\
 &\quad + P(X_1 \leq 2 \cap X_2 > 2 \cap X_3 \leq 2) + \\
 &\quad + P(X_1 > 2 \cap X_2 \leq 2 \cap X_3 \leq 2) = \\
 &= P(X_1 \leq 2 \cap X_2 \leq 2 \cap X_3 \leq 2) + 3P(X_1 \leq 2 \cap X_2 \leq 2 \cap X_3 > 2) = \\
 &= P(X_1 \leq 2)P(X_2 \leq 2)P(X_3 \leq 2) + 3P(X_1 \leq 2)P(X_2 \leq 2)(1 - P(X_3 \leq 2)) = \\
 &= F_{X_1}(2)^3 + 3F_{X_1}(2)^2(1 - F_{X_1}(2)) = \\
 &= (0.125(2^2 - 1))^3 + 3(0.125(2^2 - 1))^2(1 - (0.125(2^2 - 1))) \approx 0.316
 \end{aligned}$$

5. Имеются независимые стандартные нормальные случайные величины Z_1, \dots, Z_5 . Найдите распределение случайной величины:

- а) $X = Z_1^2 + Z_3^2 + Z_5^2$.
 б) $X = \frac{2Z_1}{\sqrt{Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2}}$.
 в) $X = 1.5 \times \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2}$.
 г) $X = \frac{(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)^2}{4} + Z_5^2$. (доп.)

Решение:

- а) Поскольку речь идет о распределении суммы квадратов трех независимых стандартных нормальных случайных величин, то $X \sim \chi^2(3)$.
 б) Поскольку $(Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2) \sim \chi^2(4)$, то:

$$X = \frac{Z_1}{\sqrt{\frac{1}{4}(Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)}} \sim t(4)$$

- в) Так как числитель и знаменатель независимы и имеют Хи-квадрат распределения, а $1.5 = \frac{3}{2}$, то очевидно, что: $X \sim F(2, 3)$.
 г) Перепишем выражение в виде:

$$X = \left(\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{2} \right)^2 + Z_5^2$$

Пользуясь тем, что линейная комбинация независимых нормальных случайных величин имеет нормальное распределение, получаем:

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{2}\right) &= \frac{E(Z_1) + E(Z_2) + E(Z_3) + E(Z_4)}{2} = \frac{0 + 0 + 0 + 0}{2} = 0 \\
 Var\left(\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{2}\right) &= \frac{Var(Z_1) + Var(Z_2) + Var(Z_3) + Var(Z_4)}{2^2} = \frac{1 + 1 + 1 + 1}{4} = 1 \\
 \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{2} &\sim \mathcal{N}(0, 1)
 \end{aligned}$$

В результате $X \sim \chi^2(2)$, поскольку представлен в виде суммы квадратов двух стандартных нормальных случайных величин.

6. Имеется выборка X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 из распределения с функцией распределения:

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2 \\ 0.5, & \text{если } 2 \leq x < 5 \\ 0.9 - \theta, & \text{если } 5 \leq x < 10 \\ 1, & \text{если } x \geq 10 \end{cases}$$

Где $\theta \in [0, 0.4)$. Реализация выборки имеет вид $x = (2, 5, 10, 5, 2)$

- Запишите таблицу распределения для X_1 .
- Оцените параметр θ при помощи метода максимального правдоподобия и запишите реализацию его оценки.

Решение:

- Найдем вероятности всех значений, входящих в носитель X_1 :

$$\begin{aligned} P(X_1 = 2) &= 0.5 \\ P(X_1 = 5) &= P(X_1 \leq 5) - P(X_1 < 5) = (0.9 - \theta) - 0.5 = 0.4 - \theta \\ P(X_1 = 10) &= P(X_1 \leq 10) - P(X_1 < 10) = 1 - (0.9 - \theta) = 0.1 + \theta \end{aligned}$$

Отсюда получаем таблицу распределения:

t	2	5	10
$P(X_1 = t)$	0.5	$0.4 - \theta$	$0.1 + \theta$

- Запишем функцию правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(\theta; x) &= P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 5) \times P(X_3 = 10) \times P(X_4 = 5) \times P(X_5 = 2) = \\ &= 0.5 \times (0.4 - \theta) \times (0.1 + \theta) \times (0.4 - \theta) \times 0.5 \end{aligned}$$

Найдем логарифм функции правдоподобия:

$$\ln L(\theta; x) = \ln(0.5) + \ln(0.4 - \theta) + \ln(0.1 + \theta) + \ln(0.4 - \theta) + \ln(0.5)$$

Для того, чтобы найти максимум функции правдоподобия по оцениваемому параметру θ , рассмотрим условия первого порядка (FOC - first order conditions).

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L(\theta; x)}{d\theta} &= -\frac{1}{0.4 - \theta} + \frac{1}{0.1 + \theta} - \frac{1}{0.4 - \theta} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{0.4 - \theta} &= \frac{1}{0.1 + \theta} \Rightarrow 0.2 + 2\theta = 0.4 - \theta \end{aligned}$$

Решая соответствующее равенство получаем точку, подозреваемую на максимум $\theta^* = \frac{1}{15}$. Убедимся в том, что данная точка соответствует максимуму, рассмотрев условия второго порядка:

$$\frac{d^2 \ln L(\theta; x)}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\theta^*} = -\frac{2}{(0.4 - \theta^*)^2} - \frac{1}{(0.1 + \theta^*)^2} = -\frac{2}{(0.4 - \frac{1}{15})^2} - \frac{1}{(0.1 + \frac{1}{15})^2} = -54 < 0$$

Таким образом, получаем реализацию ММП оценки $\hat{\theta} = \frac{1}{15}$.

7. Имеется выборка X_1, \dots, X_n из нормального распределения, причем $E(X_1) = 1$ и $Var(X_1) = \theta$. Реализация выборки имеет вид $x = (0, 2, -1)$.

- Оцените параметр θ при помощи метода максимального правдоподобия и запишите реализацию полученной оценки.
- Найдите реализацию оценки асимптотической дисперсии найденной в предыдущем пункте ММП оценки.
- Постройте 99%-й асимптотический доверительный интервал для параметра θ .
- На 1%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что $\theta = 1$, против альтернативы $\theta > 1$. Вычислите p-value. При этом используйте оценку асимптотической дисперсии ММП оценки параметра θ .
- Постройте 99%-й асимптотический доверительный интервал для $\ln(\theta)$ (воспользуйтесь дельта-методом). (доп.)
- На 1%-м уровне значимости протестируйте гипотезу о том, что $\ln(\theta) = 2$, против альтернативы $\ln(\theta) < 2$ (воспользуйтесь дельта-методом). (доп.)

Примечание: на практике при столь малом объеме выборки использовать асимптотические свойства ММП оценок, в частности, для построения доверительных интервалов и тестирования гипотез – не корректно. Однако, для простоты вычислений, в данном случае учитываются лишь несколько наблюдений

Решение:

- Запишем функцию правдоподобия:

$$L(\theta; X) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(X_i-1)^2}{2\theta}}$$

Найдем логарифм функции правдоподобия:

$$L(\theta; X) = \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(X_i-1)^2}{2\theta}} \right) = -\frac{n}{2} (\ln(2\pi) + \ln(\theta)) - \sum_{i=1}^n \frac{(X_i-1)^2}{2\theta}$$

Для того, чтобы найти максимум функции правдоподобия по оцениваемому параметру θ , рассмотрим условия первого порядка (FOC - first order conditions).

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L(\theta; x)}{d\theta} &= -\frac{n}{2\theta} + \sum_{i=1}^n \frac{(X_i-1)^2}{2\theta^2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{n}{2\theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{(X_i-1)^2}{2\theta^2} \Rightarrow n = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i-1)^2}{\theta} \end{aligned}$$

Решая соответствующее равенство получаем точку, подозреваемую на максимум:

$$\theta^* = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i-1)^2}{n}$$

Убедимся в том, что данная точка соответствует максимуму, рассмотрев условия второго порядка:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \ln L(\theta; x)}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\theta^*} &= \frac{n}{2(\theta^*)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - 1)^2}{(\theta^*)^3} \propto \frac{n}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - 1)^2}{\theta^*} = \\ &= \frac{n}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2}{n} \right)} = \frac{n}{2} - n = -\frac{n}{2} < 0\end{aligned}$$

Где знак \propto обозначает пропорциональное равенство (с точностью до умножения на положительную константу, что не влияет на знак выражения). Таким образом, получаем ММП оценку:

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - 1)^2}{n}$$

Наконец, подставляя реализации наблюдений, получаем реализацию оценки:

$$\hat{\theta}(x) = \frac{(0 - 1)^2 + (2 - 1)^2 + (-1 - 1)^2}{3} = 2$$

б) Обратим внимание, что, поскольку $E(X_i) = 1$, то:

$$E((X_i - 1)^2) = E((X_i - E(X_i))^2) = \text{Var}(X_i) = \theta$$

Пользуясь данным результатом найдем информацию Фишера:

$$\begin{aligned}I(\theta) &= -E \left(\frac{n}{2\theta^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - 1)^2}{\theta^3} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{E((X_i - 1)^2)}{\theta^3} - \frac{n}{2\theta^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\text{Var}(X_i)}{\theta^3} - \frac{n}{2\theta^2} = \frac{n\text{Var}(X_1)}{\theta^3} - \frac{n}{2\theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{n}{2\theta^2} = \frac{n}{2\theta^2}\end{aligned}$$

В качестве альтернативы, информацию Фишера, содержащуюся во всей выборке, можно было бы найти с помощью информации Фишера, содержащейся в одном наблюдении:

$$i(\theta) = -E \left(\frac{1}{2\theta^2} - \frac{(X_1 - 1)^2}{\theta^3} \right) = \frac{1}{2\theta^2} \Rightarrow I(\theta) = ni(\theta) = \frac{n}{2\theta^2}$$

Исходя из информации Фишера получаем выражение для асимптотической дисперсии ММП оценки:

$$\text{As.Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{I(\theta)} = \frac{2\theta^2}{n}$$

Найдем оценку асимптотической дисперсии за счет замены истинного значения параметра на его ММП оценку:

$$\widehat{\text{As.Var}}(\hat{\theta}) = \frac{2\hat{\theta}^2}{n}$$

Наконец, получаем реализацию данной оценки:

$$\widehat{\text{As.Var}}(\hat{\theta})(x) = \frac{2 \times 2^2}{3} = \frac{8}{3}$$

- в) Формула для асимптотического доверительного интервала параметра, оцененного при помощи метода максимального правдоподобия, имеет вид:

$$\left(\hat{\theta} - z_{0.995} \sqrt{\widehat{As.Var}(\hat{\theta})}, \hat{\theta} + z_{0.995} \sqrt{\widehat{As.Var}(\hat{\theta})} \right)$$

Запишем реализацию соответствующего асимптотического доверительного интервала:

$$\left(2 - 2.58 \times \sqrt{\frac{8}{3}}, 2 + 2.58 \times \sqrt{\frac{8}{3}} \right) \approx (-2.2, 6.2)$$

- г) Поскольку тестируется гипотеза о параметре, оценка которого была получена при помощи метода максимального правдоподобия, то можно воспользоваться следующей статистикой (при верной нулевой гипотезе в асимптотике она имеет стандартное нормальное распределение):

$$T(X) = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sqrt{\widehat{As.Var}(\hat{\theta})}}$$

Найдем реализацию соответствующей статистики:

$$T(x) = \frac{2 - 1}{\sqrt{\frac{8}{3}}} \approx 0.61$$

Поскольку тестируется правосторонняя гипотеза, то критическая область имеет вид $\mathcal{T}_{0.01} = (z_{1-0.01}, \infty) = (2.33, \infty)$. Поскольку $0.6 \notin (2.33, \infty)$, то нулевая гипотеза не отвергается. Также, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} \approx 1 - \Phi(0.61) \approx 0.27$$

Таким образом, нулевая гипотеза не отвергается на любом уровне значимости, меньше, чем 0.27, в том числе не отвергается на уровне значимости 0.01.

- д) Пользуясь инвариантностью ММП оценок получаем ММП оценку $\ln(\theta)$:

$$\widehat{\ln(\theta)} = \ln(\hat{\theta})$$

В соответствии с дельта методом найдем ее асимптотическую дисперсию:

$$As.Var(\ln(\hat{\theta})) = \left(\frac{d \ln(\theta)}{d\theta} \right)^2 \times \frac{2\theta^2}{n} = \left(\frac{1}{\theta} \right)^2 \times \frac{2\theta^2}{n} = \frac{2}{n}$$

Оценка этой асимптотической дисперсии получается за счет замены параметра θ на его оценку $\hat{\theta}$. Однако, поскольку в данном случае θ не входит в соответствующее выражение, то автоматически получаем:

$$\widehat{As.Var}(\ln(\hat{\theta})) = \frac{2}{3}$$

Используя полученные результаты запишем реализацию искомого асимптотического доверительного интервала:

$$\left(\ln(2) - 2.58 \times \sqrt{\frac{2}{3}}, \ln(2) + 2.58 \times \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \approx (-1.2, 2.6)$$

е) Найдем реализацию тестовой статистики:

$$T(x) = \frac{\ln(2) - 2}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \approx -1.6$$

Поскольку тестируется левосторонняя гипотеза, то критическая область имеет вид $\mathcal{T}_{0.01} = (-\infty, -z_{1-0.01}) = (-\infty, -2.33)$. Поскольку $-1.6 \notin (-\infty, -2.33)$, то нулевая гипотеза не отвергается. Также, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} \approx \Phi(-1.6) \approx 0.054$$

Таким образом, нулевая гипотеза не отвергается на любом уровне значимости, меньше, чем 0.054, в том числе не отвергается на уровне значимости 0.01.

8. Имеются две независимые выборки X_1, \dots, X_{100} и Y_1, \dots, Y_{225} из распределений с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями. По этим выборкам были рассчитаны выборочные средние и исправленные выборочные дисперсии $\bar{X}_{100} = 10$, $\bar{Y}_{225} = 20$, $\hat{\sigma}_X^2 = 25$ и $\hat{\sigma}_Y^2 = 100$. Найдите реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала для:

- а) $E(X_1)$
- б) $E(X_1 - Y_1)$
- в) $Var(X_1)$, предполагая, что X_1 имеет нормальное распределение.
- г) $Var(X_1)/Var(Y_1)$, предполагая, что X_1 и Y_1 имеют нормальное распределение.

Подсказки: квантили уровня 0.05 и 0.95 Хи-квадрат распределения с 99 степенями свободы равняются 77.05 и 123.22 соответственно. Квантили уровня 0.05 и 0.95 распределения Фишера $F(224, 99)$ равняются 0.76 и 1.34 соответственно. В качестве подсказки может быть дано большее число квантилей, среди которых необходимо будет выбрать подходящие.

Решение:

- а) Найдем реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала для математического ожидания (среднего):

$$\left(10 - 1.65 \times \sqrt{\frac{25}{100}}, 10 + 1.65 \times \sqrt{\frac{25}{100}} \right) = (9.175, 10.825)$$

- б) Запишем реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала для разницы математических ожиданий (средних) наблюдений из независимых выборок:

$$\left(10 - 20 - 1.65 \times \sqrt{\frac{25}{100} + \frac{100}{225}}, 10 - 20 + 1.65 \times \sqrt{\frac{25}{100} + \frac{100}{225}} \right) = (-8.625, 11.375)$$

- в) Выпишем реализацию 90%-го доверительного интервала для дисперсии наблюдения из нормального распределения при неизвестном математическом ожидании:

$$\left(\frac{(100 - 1) \times 25}{123.22}, \frac{(100 - 1) \times 25}{77.05} \right) \approx (20.09, 32.12)$$

- г) Определим реализацию 90%-го доверительного интервала для отношения дисперсий наблюдений из нормального распределения при неизвестных математических ожиданиях:

$$\left(\frac{25}{100} \times 0.76, \frac{25}{100} \times 1.34 \right) = (0.19, 0.335)$$

9. Имеются две независимые выборки X_1, \dots, X_{100} и Y_1, \dots, Y_{225} из распределений с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями. По этим выборкам были рассчитаны выборочные средние и исправленные выборочные дисперсии $\bar{X}_{100} = 10$, $\bar{Y}_{225} = 20$, $\hat{\sigma}_X^2 = 25$ и $\hat{\sigma}_Y^2 = 100$. Рассчитайте p-value и сделайте вывод на 5%-м уровне значимости в тестах со следующими гипотезами:

- а) $H_0 : E(X_1) = 11$ против $H_1 : E(X_1) < 11$.
 б) $H_0 : E(X_1) = E(Y_1)$ против $H_1 : E(X_1) > E(Y_1)$
 в) $H_0 : Var(X_1) = 22$ против $H_1 : Var(X_1) \neq 22$, предполагая, что X_1 имеет нормальное распределение. Подсказка: $F_{\chi^2(99)}(112.5) \approx 0.833$ и $F_{\chi^2(100)}(102.5) \approx 0.588$.
 г) $H_0 : Var(X_1) = Var(Y_1)$ против $H_1 : Var(X_1) > Var(Y_1)$, предполагая, что X_1 и Y_1 имеют нормальное распределение. Подсказка: $F_{F_{100-1, 225-1}}(0.25) \approx 0$ и $F_{F_{100-1, 225-1}}(0.8) \approx 0.1$.

Решение:

- а) Применим левосторонний тест о равенстве математического ожидания определенному значению для выборки из распределения с конечными математическим ожиданием и дисперсией:

$$T(x) = \frac{10 - 11}{\sqrt{\frac{25}{100}}} = -2$$

$$\text{p-value} = \Phi(-2) \approx 0.023$$

Поскольку $\text{p-value} < 0.05$, то нулевая гипотеза отвергается на 5%-м уровне значимости.

- б) Воспользуемся правосторонним тест о равенстве математических ожиданий для независимых выборок из распределения с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями:

$$T(x) = \frac{10 - 20}{\sqrt{\frac{25}{100} + \frac{100}{225}}} = -12$$

$$\text{p-value} = 1 - \Phi(-12) \approx 1$$

Поскольку $\text{p-value} > 0.05$, то нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.

- в) Будем использовать двухсторонний тест о равенстве дисперсии наблюдения выборки из нормального распределения определенному значению:

$$T(x) = \frac{(100 - 1) \times 25}{22} \approx 112.5$$

$$\text{p-value} = 2 \min(1 - F_{\chi^2(100-1)}(112.5), F_{\chi^2(100-1)}(112.5)) = 2 \min(0.167, 0.833) = 0.334$$

Поскольку $\text{p-value} > 0.05$, то нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.

- г) Применим правосторонний тест о равенстве дисперсий наблюдений выборок из нормального распределения:

$$T(x) = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$\text{p-value} = 1 - F_{F_{100-1, 225-1}}(0.25) \approx 1 - 0 = 1$$

Поскольку $\text{p-value} > 0.05$, то нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.

10. Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_{100})$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_{64})$ из распределения Бернулли с параметрами p_X и p_Y соответственно. Пятый начальный выборочный момент по выборке X оказался равен 0.2, а сумма элементов выборки Y равна 16. Рассчитайте p-value и сделайте вывод на 10%-м уровне значимости в тестах со следующими гипотезами:

- а) $H_0 : p_X = 0.15$ против $p_X \neq 0.15$.
 б) $H_0 : p_X = p_Y$ против $p_X < p_Y$. (доп.)

Решение:

- а) Применим двухсторонний тест о равенстве вероятности (доли) определенному значению, пользуясь тем, что все начальные выборочные моменты для выборки из распределения Бернулли совпадают:

$$\bar{X}_{100} = 0.2$$

$$T(x) = \frac{0.2 - 0.15}{\sqrt{\frac{0.15 \times (1-0.15)}{100}}} \approx 1.4$$

$$\text{p-value} = 2 \min(\Phi(1.4), 1 - \Phi(1.4)) \approx 0.16$$

Поскольку $\text{p-value} > 0.1$, то нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.

- б) Применим левосторонний тест о равенстве вероятностей (долей) определенному значению:

$$\bar{X}_{100} = 0.2 \quad \bar{Y}_{64} = \frac{16}{64} = 0.25$$

$$\sum_{i=1}^{100} X_i = 0.2 \times 100 = 20 \quad \sum_{i=1}^{64} Y_i = 16$$

$$Z_{100,64} = \frac{20 + 16}{100 + 64} = \frac{9}{41}$$

$$T(x) = \frac{0.2 - 0.25}{\sqrt{\frac{9}{41} \times \left(1 - \frac{9}{41}\right) \times (1/100 + 1/64)}} \approx -0.75$$

$$\text{p-value} = \Phi(-0.75) \approx 0.22$$

Поскольку $\text{p-value} > 0.1$, то нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.

11. Имеется выборка, состоящая из одного наблюдения X_1 , имеющего равномерное распределение. Тестируется гипотеза $H_0 : X_1 \sim U(0, 1)$ против альтернативы $H_1 : X_1 \sim U(0, 2)$. Нулевая гипотеза отвергается, если $X_1 > 0.5$.

- а) Запишите критическую область соответствующего теста.

б) Найдите уровень значимости данного теста.

в) Определите мощность этого теста.

Решение:

а) Критическая область теста $\mathcal{T}_\alpha = (0.5, \infty)$. Поскольку как при альтернативной, так и при нулевой гипотезах наблюдения не принимают значения больше 2, то критическую область можно также записать в виде $\mathcal{T}_\alpha = (0.5, 2)$.

б) Уровень значимости теста совпадает с вероятностью совершить ошибку первого рода. Поскольку $X_1|H_0 \sim U(0, 1)$, то:

$$\alpha = P(X_1 \in (0.5, 2)|H_0) = P(X_1 > 0.5|H_0) = 1 - F_{X_1|H_0}(0.5) = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

в) Сперва найдем вероятность ошибки второго рода, учитывая, что $X_1|H_1 \sim U(0, 2)$:

$$\beta = P(X_1 \notin (0.5, 2)|H_1) = P(X_1 \in (0, 0.5)|H_1) = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

В результате получаем, что мощность теста равняется:

$$1 - \beta = 1 - 0.25 = 0.75$$

12. Имеется выборка X_1, \dots, X_n из экспоненциального распределения с параметром λ . Пусть $n = 2$. Тестируется гипотеза $H_0 : \lambda = 1$ против альтернативы $H_1 : \lambda < 1$. Нулевая гипотеза отвергается, если $\max(X_1, \dots, X_n) < k$.

а) Найдите значение параметра k , при котором уровень значимости теста окажется равен 0.25. (доп.)

б) Посчитайте p-value теста, если реализация выборки имеет вид $x = (1, 2)$. (доп.)

Решение:

а) Запишем функцию распределения тестовой статистики:

$$T(X) = \max(X_1, \dots, X_n)$$

$$F_{T_X}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n = (1 - e^{-\lambda t})^2, \text{ где } t > 0$$

Используя найденное распределение рассчитаем уровень значимости теста:

$$\alpha = P(T(X) < k|H_0) = (1 - e^{-1 \times k})^2 = 0.25 \implies 1 - e^{-k} = 0.5 \implies$$

$$\implies e^{-k} = 0.5 \implies -k = \ln(0.5) \implies k = -\ln(0.5) \approx 0.69$$

б) Пользуясь реализацией тестовой статистики $T(x) = \max(1, 2) = 2$ и тем, что критическая область является левосторонней, получаем:

$$\text{p-value} = F_{T(X)|H_0}(2) = (1 - e^{-1 \times 2})^2 \approx 0.75$$