Теория Вероятностей и Статистика

Моменты дискретных случайных величин

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbf{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.
  Решение: $E(X) = P(X = 2) \times 2 + P(X = 5) \times 5 + P(X = 10) \times 10 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 5 + 0.2 \times 10 = 5.1$

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.
  Решение: $E(X) = P(X = 2) \times 2 + P(X = 5) \times 5 + P(X = 10) \times 10 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 5 + 0.2 \times 10 = 5.1$
- Найдите математическое ожидание числа очков, выпавших на правильном кубике.

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.
  Решение: $E(X) = P(X = 2) \times 2 + P(X = 5) \times 5 + P(X = 10) \times 10 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 5 + 0.2 \times 10 = 5.1$
- Найдите математическое ожидание числа очков, выпавших на правильном кубике.
  Решение: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 2) \times 2 + \cdots + P(X = 6) \times 6 = \frac{1}{6}(1 + \cdots + 6) = 3.5$

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.
  Решение: $E(X) = P(X = 2) \times 2 + P(X = 5) \times 5 + P(X = 10) \times 10 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 5 + 0.2 \times 10 = 5.1$
- Найдите математическое ожидание числа очков, выпавших на правильном кубике.
  Решение: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 2) \times 2 + \cdots + P(X = 6) \times 6 = \frac{1}{6}(1 + \cdots + 6) = 3.5$
- Число звезд, которое получит ресторан, является случайной величиной X с распределением, заданным следующей таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

  Найдите математическое ожидание числа звезд, которое получит ресторан.

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.
  Решение: $E(X) = P(X = 2) \times 2 + P(X = 5) \times 5 + P(X = 10) \times 10 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 5 + 0.2 \times 10 = 5.1$
- Найдите математическое ожидание числа очков, выпавших на правильном кубике.
  Решение: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 2) \times 2 + \cdots + P(X = 6) \times 6 = \frac{1}{6}(1 + \cdots + 6) = 3.5$
- Число звезд, которое получит ресторан, является случайной величиной X с распределением, заданным следующей таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

  Найдите математическое ожидание числа звезд, которое получит ресторан.
  Решение: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + \cdots + P(X = 5) \times 5 = 0.1 \times 1 + \cdots + 0.2 \times 5 = 3$

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

Санкт-Петербургский парадокс:

- Игрок подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка.

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

Санкт-Петербургский парадокс:

- Игрок подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка.
- Выигрыш игрока является случайной величиной X, равняющейся 2^Y, где Y - число выпавших орлов.

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

Санкт-Петербургский парадокс:

- Игрок подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка.
- Выигрыш игрока является случайной величиной X, равняющейся 2^Y, где Y - число выпавших орлов.
- Например, если выпало три орла, то это значит, что первые три броска выпал орел, а при последнем броске – выпала решка. Игрок получит выигрыш $2^3 = 8$. Учитывая, что результаты бросков независимы, вероятность получить соответствующий выигрыш составит:

$$P(X = 2^3) = P(O_1) \times P(O_2) \times P(O_3) \times P(\overline{O}_4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+1}$$

где O_i – событие, в соответствии с которым орел выпал при i-м броске.

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

Санкт-Петербургский парадокс:

- Игрок подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка.
- Выигрыш игрока является случайной величиной X, равняющейся 2^Y, где Y - число выпавших орлов.
- Например, если выпало три орла, то это значит, что первые три броска выпал орел, а при последнем броске – выпала решка. Игрок получит выигрыш $2^3 = 8$. Учитывая, что результаты бросков независимы, вероятность получить соответствующий выигрыш составит:

$$P(X = 2^3) = P(O_1) \times P(O_2) \times P(O_3) \times P(\overline{O}_4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+1}$$

  где O_i – событие, в соответствии с которым орел выпал при i-м броске.
- Распределение случайной величины X задается функцией $P(X = 2^y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1}$, где $y \in \{0, 1, 2, \cdots\}$.

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

Санкт-Петербургский парадокс:

- Игрок подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка.
- Выигрыш игрока является случайной величиной X, равняющейся 2^Y, где Y - число выпавших орлов.
- Например, если выпало три орла, то это значит, что первые три броска выпал орел, а при последнем броске – выпала решка. Игрок получит выигрыш $2^3 = 8$. Учитывая, что результаты бросков независимы, вероятность получить соответствующий выигрыш составит:

$$P(X = 2^3) = P(O_1) \times P(O_2) \times P(O_3) \times P(\overline{O}_4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+1}$$

  где O_i – событие, в соответствии с которым орел выпал при i-м броске.
- Распределение случайной величины X задается функцией $P(X = 2^y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1}$, где $y \in \{0, 1, 2, \cdots\}$.
- Математическое ожидание не существует, поскольку ряд не сходится (проверьте критерием Даламбера):

$$P(Y = 2^0) \times |2^0| + P(Y = 2^1) \times |2^1| + \cdots = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty$$

Математическое ожидание

Начальные моменты

- **Начальный момент порядка** $k \in N$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

- **Начальный момент порядка** $k \in N$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X. Маша получает выигрыш в размере X^2. Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.

- **Начальный момент порядка** $k \in N$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X. Маша получает выигрыш в размере X^2. Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.
Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + P(X = 2) \times 2^2 + \dots + P(X = 6) \times 6^2 = \frac{1}{6}\left(1^2 + \dots + 6^2\right) = \frac{91}{6}$

Математическое ожидание

Начальные моменты

- **Начальный момент порядка** $k \in N$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X. Маша получает выигрыш в размере X^2. Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.
  Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + P(X = 2) \times 2^2 + \cdots + P(X = 6) \times 6^2 = \frac{1}{6}\left(1^2 + \cdots + 6^2\right) = \frac{91}{6}$
- Длина стороны куба является случайной величиной X, принимающей значения 1, 2 и 3 с вероятностями 0.2, 0.1 и 0.7 соответственно. Найдите математическое ожидание объема куба.

Математическое ожидание

Начальные моменты

- **Начальный момент порядка** $k \in N$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X. Маша получает выигрыш в размере X^2. Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.
  Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + P(X = 2) \times 2^2 + \cdots + P(X = 6) \times 6^2 = \frac{1}{6}\left(1^2 + \cdots + 6^2\right) = \frac{91}{6}$
- Длина стороны куба является случайной величиной X, принимающей значения 1, 2 и 3 с вероятностями 0.2, 0.1 и 0.7 соответственно. Найдите математическое ожидание объема куба.
  Решение: $E(X^3) = P(X = 1) \times 1^3 + P(X = 2) \times 2^3 + P(X = 3) \times 3^3 = 0.2 \times 1 + 0.1 \times 8 + 0.7 \times 27 = 19.9$

- **Начальный момент порядка** $k \in N$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X. Маша получает выигрыш в размере X^2. Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.
Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + P(X = 2) \times 2^2 + \cdots + P(X = 6) \times 6^2 = \frac{1}{6}\left(1^2 + \cdots + 6^2\right) = \frac{91}{6}$
- Длина стороны куба является случайной величиной X, принимающей значения 1, 2 и 3 с вероятностями 0.2, 0.1 и 0.7 соответственно. Найдите математическое ожидание объема куба.
Решение: $E(X^3) = P(X = 1) \times 1^3 + P(X = 2) \times 2^3 + P(X = 3) \times 3^3 = 0.2 \times 1 + 0.1 \times 8 + 0.7 \times 27 = 19.9$
- Каждый раз приходя в магазин Алексей покупает один новый пиджак и одни новые брюки. Число походов в магазин является случайной величиной X со следующим распределением:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

Каждая комбинация пиджака и брюк создает Алексею новый образ. Найдите математическое ожидание числа различных образов, которые сможет создать Алексей.

- **Начальный момент порядка** $k \in N$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X. Маша получает выигрыш в размере X^2. Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.
Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + P(X = 2) \times 2^2 + \cdots + P(X = 6) \times 6^2 = \frac{1}{6}\left(1^2 + \cdots + 6^2\right) = \frac{91}{6}$
- Длина стороны куба является случайной величиной X, принимающей значения 1, 2 и 3 с вероятностями 0.2, 0.1 и 0.7 соответственно. Найдите математическое ожидание объема куба.
Решение: $E(X^3) = P(X = 1) \times 1^3 + P(X = 2) \times 2^3 + P(X = 3) \times 3^3 = 0.2 \times 1 + 0.1 \times 8 + 0.7 \times 27 = 19.9$
- Каждый раз приходя в магазин Алексей покупает один новый пиджак и одни новые брюки. Число походов в магазин является случайной величиной X со следующим распределением:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

Каждая комбинация пиджака и брюк создает Алексею новый образ. Найдите математическое ожидание числа различных образов, которые сможет создать Алексей.
Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + \cdots + P(X = 5) \times 5^2 = 0.1 \times 1 + \cdots + 0.2 \times 25 = 10.6$

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\sum_{x\in\textbf{supp}(X)}P(X=x)\times g(x)$$

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\sum_{x\in\textbf{supp}(X)}P(X=x)\times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha)=\alpha \text{ и } E(\alpha X^k+\beta)=\alpha E(X^k)+\beta\text{, где } \alpha,\beta,k\in R$$

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\sum_{x\in\textbf{supp}(X)}P(X=x)\times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha)=\alpha \text{ и } E(\alpha X^k+\beta)=\alpha E(X^k)+\beta, \text{ где } \alpha,\beta,k\in R$$
$$E(g_1(X)+g_2(X))=E(g_1(X))+E(g_2(X)), \text{ где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) \text{ – функции}$$

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E\left(g\left(X\right)\right) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha) = \alpha \text{ и } E(\alpha X^k + \beta) = \alpha E(X^k) + \beta\text{, где } \alpha, \beta, k \in R$$
$$E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X))\text{, где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) \text{ – функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X) = \ln(X + 1)$, где X – объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\sum_{x\in \textbf{supp}(X)}P(X=x)\times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha)=\alpha \text{ и } E(\alpha X^k+\beta)=\alpha E(X^k)+\beta, \text{ где } \alpha,\beta,k\in R$$
$$E(g_1(X)+g_2(X))=E(g_1(X))+E(g_2(X)), \text{ где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) \text{ – функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X)=\ln(X+1)$, где X – объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.
Решение: $E(\ln(X+1))=0.3\times\ln(1+1)+0.6\times\ln(3+1)+0.1\times\ln(5+1)=0.2\times 1+0.1\times 8+0.7\times 27\approx 1.22$

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\sum_{x\in\textbf{supp}(X)} P(X=x)\times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha)=\alpha \text{ и } E(\alpha X^k+\beta)=\alpha E(X^k)+\beta, \text{ где } \alpha,\beta,k\in R$$
$$E(g_1(X)+g_2(X))=E(g_1(X))+E(g_2(X)), \text{ где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) \text{ – функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X)=\ln(X+1)$, где X – объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.
  Решение: $E(\ln(X+1))=0.3\times\ln(1+1)+0.6\times\ln(3+1)+0.1\times\ln(5+1)=0.2\times 1+0.1\times 8+0.7\times 27\approx 1.22$
- Андрей пользуется сервисом облачного гейминга. Каждый месяц Андрей платит 100 рублей за доступ к сервису и еще по 20 рублей за каждый час игры. Количество часов, которые Андрей проводит каждый месяц в играх, является случайной величиной X, с равной вероятностью принимающей значения от 1 до 10 включительно. Найдите математическое ожидание ежемесячных затрат Андрея на облачный гейминг.

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E\left(g\left(X\right)\right) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha) = \alpha \text{ и } E(\alpha X^k + \beta) = \alpha E(X^k) + \beta, \text{ где } \alpha, \beta, k \in R$$
$$E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X)), \text{ где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) \text{ – функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X) = \ln(X + 1)$, где X – объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.
  Решение: $E(\ln(X + 1)) = 0.3 \times \ln(1 + 1) + 0.6 \times \ln(3 + 1) + 0.1 \times \ln(5 + 1) = 0.2 \times 1 + 0.1 \times 8 + 0.7 \times 27 \approx 1.22$
- Андрей пользуется сервисом облачного гейминга. Каждый месяц Андрей платит 100 рублей за доступ к сервису и еще по 20 рублей за каждый час игры. Количество часов, которые Андрей проводит каждый месяц в играх, является случайной величиной X, с равной вероятностью принимающей значения от 1 до 10 включительно. Найдите математическое ожидание ежемесячных затрат Андрея на облачный гейминг.
  Решение: $E(X) = 0.1 \times (1 + \dots + 10) = 5.5 \implies E(20X + 100) = 20E(X) + 100 = 20 \times 5.5 + 100 = 210$

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\sum_{x\in\textbf{supp}(X)}P(X=x)\times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha)=\alpha \text{ и } E(\alpha X^k+\beta)=\alpha E(X^k)+\beta\text{, где } \alpha,\beta,k\in R$$
$$E(g_1(X)+g_2(X))=E(g_1(X))+E(g_2(X))\text{, где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) \text{ – функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X)=\ln(X+1)$, где X – объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.
  Решение: $E(\ln(X+1))=0.3\times\ln(1+1)+0.6\times\ln(3+1)+0.1\times\ln(5+1)=0.2\times 1+0.1\times 8+0.7\times 27\approx 1.22$
- Андрей пользуется сервисом облачного гейминга. Каждый месяц Андрей платит 100 рублей за доступ к сервису и еще по 20 рублей за каждый час игры. Количество часов, которые Андрей проводит каждый месяц в играх, является случайной величиной X, с равной вероятностью принимающей значения от 1 до 10 включительно. Найдите математическое ожидание ежемесячных затрат Андрея на облачный гейминг.
  Решение: $E(X)=0.1\times(1+\cdots+10)=5.5\implies E(20X+100)=20E(X)+100=20\times 5.5+100=210$
- Пусть $E(X^2)=7$ и $E(cos(X))=1$, найдите $E(2X^2-cos(X)+5)$.

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\sum_{x\in\textbf{supp}(X)}P(X=x)\times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha)=\alpha \text{ и } E(\alpha X^k+\beta)=\alpha E(X^k)+\beta, \text{ где } \alpha,\beta,k\in R$$
$$E(g_1(X)+g_2(X))=E(g_1(X))+E(g_2(X)), \text{ где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) \text{ – функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X)=\ln(X+1)$, где X – объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.
Решение: $E(\ln(X+1))=0.3\times\ln(1+1)+0.6\times\ln(3+1)+0.1\times\ln(5+1)=0.2\times 1+0.1\times 8+0.7\times 27\approx 1.22$
- Андрей пользуется сервисом облачного гейминга. Каждый месяц Андрей платит 100 рублей за доступ к сервису и еще по 20 рублей за каждый час игры. Количество часов, которые Андрей проводит каждый месяц в играх, является случайной величиной X, с равной вероятностью принимающей значения от 1 до 10 включительно. Найдите математическое ожидание ежемесячных затрат Андрея на облачный гейминг.
Решение: $E(X)=0.1\times(1+\dots+10)=5.5 \implies E(20X+100)=20E(X)+100=20\times 5.5+100=210$
- Пусть $E(X^2)=7$ и $E(cos(X))=1$, найдите $E(2X^2-cos(X)+5)$.
Решение: $E(2X^2-cos(X)+5)=2E(X^2)-E(cos(X))+E(5)=2\times 7-1+5=18$

Дисперсия

Определение дисперсии

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$Var\left(X\right) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$Var\left(X\right) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:
Пользуясь тем, что E(X) – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$Var\left(X\right)=E\left(\left(X-E(X)\right)^{2}\right)=E(X^{2})-E(X)^{2}$$

Доказательство:
Пользуясь тем, что E(X) – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left(\left(X-E(X)\right)^{2}\right)=E\left(X^{2}-2XE(X)+E(X)^{2}\right)=E(X^{2})-2E(X)E(X)+E(X)^{2}=E(X^{2})-E(X)^{2}$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$Var\left(X\right) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:
Пользуясь тем, что E(X) – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.

Дисперсия

Определение дисперсии

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$Var\,(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

  Доказательство:
  Пользуясь тем, что E(X) – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.
  Решение:
  $E(X) = 0.5 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.2 \times 3 = 1.7$

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$Var\left(X\right) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:
Пользуясь тем, что E(X) – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.

Решение:
$E(X) = 0.5 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.2 \times 3 = 1.7$
$E(X^2) = 0.5 \times 1^2 + 0.3 \times 2^2 + 0.2 \times 3^2 = 3.5$

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$Var\,(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:
Пользуясь тем, что E(X) – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.
  Решение:
  $E(X) = 0.5 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.2 \times 3 = 1.7$
  $E(X^2) = 0.5 \times 1^2 + 0.3 \times 2^2 + 0.2 \times 3^2 = 3.5$
  $Var(X) = 3.5 - 1.7 = 1.8$

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:
Пользуясь тем, что E(X) – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.
  Решение:
  $E(X) = 0.5 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.2 \times 3 = 1.7$
  $E(X^2) = 0.5 \times 1^2 + 0.3 \times 2^2 + 0.2 \times 3^2 = 3.5$
  $Var(X) = 3.5 - 1.7 = 1.8$
- Математическое ожидание длины стороны квадрата равняется 3, а дисперсия – 1. Найдите математическое ожидание площади этого квадрата.

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$Var\,(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:
Пользуясь тем, что E(X) – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.
  Решение:
  $E(X) = 0.5 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.2 \times 3 = 1.7$
  $E(X^2) = 0.5 \times 1^2 + 0.3 \times 2^2 + 0.2 \times 3^2 = 3.5$
  $Var(X) = 3.5 - 1.7 = 1.8$
- Математическое ожидание длины стороны квадрата равняется 3, а дисперсия – 1. Найдите математическое ожидание площади этого квадрата.
  Решение: $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 1 + 3^2 = 10$

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Примеры:

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?
  Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?
  Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.
- Дед Иван мастерит и продает аккордеоны по 50 рублей за штуку и получает аккордную субсидию от государства в размере 100 рублей. Он продает все созданные аккордеоны, число которых является случайной величиной X с дисперсией $Var(X) = 3$. Найдите дисперсию дохода Деда Ивана.

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?
  Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.
- Дед Иван мастерит и продает аккордеоны по 50 рублей за штуку и получает аккордную субсидию от государства в размере 100 рублей. Он продает все созданные аккордеоны, число которых является случайной величиной X с дисперсией $Var(X) = 3$. Найдите дисперсию дохода Деда Ивана.
  Решение: $Var(50X + 100) = 50^2 Var(X) = 2500 \times 3 = 7500$

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?
  Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.
- Дед Иван мастерит и продает аккордеоны по 50 рублей за штуку и получает аккордную субсидию от государства в размере 100 рублей. Он продает все созданные аккордеоны, число которых является случайной величиной X с дисперсией $Var(X) = 3$. Найдите дисперсию дохода Деда Ивана.
  Решение: $Var(50X + 100) = 50^2 Var(X) = 2500 \times 3 = 7500$
- Первый, второй, третий и четвертый начальные моменты случайной величины X равняются 1, 2, 4 и 10 соответственно. Найдите дисперсию случайной величины $\left(X^2 - X\right)$.

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?
  Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.
- Дед Иван мастерит и продает аккордеоны по 50 рублей за штуку и получает аккордную субсидию от государства в размере 100 рублей. Он продает все созданные аккордеоны, число которых является случайной величиной X с дисперсией $Var(X) = 3$. Найдите дисперсию дохода Деда Ивана.
  Решение: $Var(50X + 100) = 50^2 Var(X) = 2500 \times 3 = 7500$
- Первый, второй, третий и четвертый начальные моменты случайной величины X равняются 1, 2, 4 и 10 соответственно. Найдите дисперсию случайной величины $\left(X^2 - X\right)$.
  Решение:
  $Var(X^2 - X) = E((X^2 - X)^2) - E(X^2 - X)^2 = E(X^4 - 2X^3 + X^2) - \left(E(X^2) - E(X)\right)^2 =$

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?
  Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.
- Дед Иван мастерит и продает аккордеоны по 50 рублей за штуку и получает аккордную субсидию от государства в размере 100 рублей. Он продает все созданные аккордеоны, число которых является случайной величиной X с дисперсией $Var(X) = 3$. Найдите дисперсию дохода Деда Ивана.
  Решение: $Var(50X + 100) = 50^2 Var(X) = 2500 \times 3 = 7500$
- Первый, второй, третий и четвертый начальные моменты случайной величины X равняются 1, 2, 4 и 10 соответственно. Найдите дисперсию случайной величины $\left(X^2 - X\right)$.
  Решение:
  $Var(X^2 - X) = E((X^2 - X)^2) - E(X^2 - X)^2 = E(X^4 - 2X^3 + X^2) - \left(E(X^2) - E(X)\right)^2 =$
  $= E(X^4) - 2E(X^3) + E(X^2) - [E(X^2)^2 - 2E(X^2)E(X) + E(X)^2] = 10 - 2 \times 4 + 2 - [2^2 - 2 \times 2 \times 1 + 1^2] = 3$

Дисперсия

Стандартное отклонение

- **Стандартное отклонение** определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

- **Стандартное отклонение** определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Примеры:

- Стоимость акции является случайной величиной с дисперсией 25. Найдите стандартное отклонение цены акции.

- **Стандартное отклонение** определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Примеры:

- Стоимость акции является случайной величиной с дисперсией 25. Найдите стандартное отклонение цены акции.
  Решение: $sd(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{25} = 5$

- **Стандартное отклонение** определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Примеры:

- Стоимость акции является случайной величиной с дисперсией 25. Найдите стандартное отклонение цены акции.
  Решение: $sd(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{25} = 5$
- Второй начальный момент числа подписанных министром за день документов равняется 65, а стандартное отклонение равно 1. Найдите математическое ожидание числа подписанных документов.

- **Стандартное отклонение** определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Примеры:

- Стоимость акции является случайной величиной с дисперсией 25. Найдите стандартное отклонение цены акции.
  Решение: $sd(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{25} = 5$
- Второй начальный момент числа подписанных министром за день документов равняется 65, а стандартное отклонение равно 1. Найдите математическое ожидание числа подписанных документов.
  Решение: $E(X) = \sqrt{E(X^2) - Var(X)} = \sqrt{E(X^2) - sd(X)^2} = \sqrt{65 - 1} = 8$

- **Центральный момент** k-го порядка случайной величины X определяется как:

$$E((X - E(X))^k)$$

- **Центральный момент** k-го порядка случайной величины X определяется как:

$$E((X - E(X))^k)$$

- Дисперсия является центральным моментом 2-го порядка.

- **Центральный момент** k-го порядка случайной величины X определяется как:

$$E((X - E(X))^k)$$

- Дисперсия является центральным моментом 2-го порядка.

Пример:

- Известно, что первый, второй и третий начальные моменты случайной величины X равняются 2, 5 и 14 соответственно. Найдите третий центральный момент этой случайной величины.

- **Центральный момент** k-го порядка случайной величины X определяется как:

$$E((X - E(X))^k)$$

- Дисперсия является центральным моментом 2-го порядка.

Пример:

- Известно, что первый, второй и третий начальные моменты случайной величины X равняются 2, 5 и 14 соответственно. Найдите третий центральный момент этой случайной величины.

  Решение :

  $E((X - E(X))^3) = E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 3E(X)E(X)^2 - E(X)^3 =$

- **Центральный момент** k-го порядка случайной величины X определяется как:

$$E((X - E(X))^k)$$

- Дисперсия является центральным моментом 2-го порядка.

Пример:

- Известно, что первый, второй и третий начальные моменты случайной величины X равняются 2, 5 и 14 соответственно. Найдите третий центральный момент этой случайной величины.
  Решение :
  $E((X - E(X))^3) = E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 3E(X)E(X)^2 - E(X)^3 =$
  $= 14 - 3 \times 5 \times 2 + 3 \times 2 \times 2^2 - 2^3 = 0$

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \mathbf{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).
  Решение:
  $E(X|A) = P(X = 1|A) \times 1 + P(X = 2|A) \times 2 + \cdots + P(X = 6|A) \times 6 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 \times 2 + \cdots + 0 \times 6 = \frac{1}{3}(1 + 3 + 5) = 3$

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).
  Решение:
  $E(X|A) = P(X = 1|A) \times 1 + P(X = 2|A) \times 2 + \dots + P(X = 6|A) \times 6 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 \times 2 + \dots + 0 \times 6 = \frac{1}{3}(1 + 3 + 5) = 3$
- Распределение числа просматриваемых за месяц Иваном серий задано таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

  Найдите математическое ожидание и дисперсию числа просмотренных Иваном серий, учитывая, что он посмотрел меньше трех серий.

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A)=\sum_{x\in\textbf{supp}(X)}P(X=x|A)\times x,\text{ где } A\in\mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).

  Решение:

  $E(X|A)=P(X=1|A)\times 1+P(X=2|A)\times 2+\cdots+P(X=6|A)\times 6=\frac{1}{3}\times 1+0\times 2+\cdots+0\times 6=\frac{1}{3}(1+3+5)=3$

- Распределение числа просматриваемых за месяц Иваном серий задано таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

  Найдите математическое ожидание и дисперсию числа просмотренных Иваном серий, учитывая, что он посмотрел меньше трех серий.

  Решение:

  $E(X|X<3)=P(X=1|X<3)\times 1+P(X=2|X<3)\times 2=\frac{P((X=1)\cap(X<3))}{P(X<3)}\times 1+\frac{P((X=2)\cap(X<3))}{P(X<3)}\times 2=$

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).

  Решение:

  $E(X|A) = P(X = 1|A) \times 1 + P(X = 2|A) \times 2 + \dots + P(X = 6|A) \times 6 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 \times 2 + \dots + 0 \times 6 = \frac{1}{3}(1 + 3 + 5) = 3$

- Распределение числа просматриваемых за месяц Иваном серий задано таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

  Найдите математическое ожидание и дисперсию числа просмотренных Иваном серий, учитывая, что он посмотрел меньше трех серий.

  Решение:

  $E(X|X < 3) = P(X = 1|X < 3) \times 1 + P(X = 2|X < 3) \times 2 = \frac{P((X=1)\cap(X<3))}{P(X<3)} \times 1 + \frac{P((X=2)\cap(X<3))}{P(X<3)} \times 2 =$

  $= \frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=2)} \times 1 + \frac{P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)} \times 2 = \frac{0.1}{0.1+0.3} \times 1 + \frac{0.3}{0.1+0.3} \times 2 = 1.75$

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).
  Решение:
  $E(X|A) = P(X = 1|A) \times 1 + P(X = 2|A) \times 2 + \cdots + P(X = 6|A) \times 6 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 \times 2 + \cdots + 0 \times 6 = \frac{1}{3}(1 + 3 + 5) = 3$
- Распределение числа просматриваемых за месяц Иваном серий задано таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

  Найдите математическое ожидание и дисперсию числа просмотренных Иваном серий, учитывая, что он посмотрел меньше трех серий.
  Решение:
  $E(X|X < 3) = P(X = 1|X < 3) \times 1 + P(X = 2|X < 3) \times 2 = \frac{P((X=1)\cap(X<3))}{P(X<3)} \times 1 + \frac{P((X=2)\cap(X<3))}{P(X<3)} \times 2 =$
  $= \frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=2)} \times 1 + \frac{P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)} \times 2 = \frac{0.1}{0.1+0.3} \times 1 + \frac{0.3}{0.1+0.3} \times 2 = 1.75$
  $E(X^2|X < 3) = \frac{0.1}{0.1+0.3} \times 1^2 + \frac{0.3}{0.1+0.3} \times 2^2 = 3.25$

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A)=\sum_{x\in\textbf{supp}(X)}P(X=x|A)\times x,\text{ где } A\in\mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).
  Решение:
  $E(X|A)=P(X=1|A)\times 1+P(X=2|A)\times 2+\dots+P(X=6|A)\times 6=\frac{1}{3}\times 1+0\times 2+\dots+0\times 6=\frac{1}{3}(1+3+5)=3$
- Распределение числа просматриваемых за месяц Иваном серий задано таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

  Найдите математическое ожидание и дисперсию числа просмотренных Иваном серий, учитывая, что он посмотрел меньше трех серий.
  Решение:
  $E(X|X<3)=P(X=1|X<3)\times 1+P(X=2|X<3)\times 2=\frac{P((X=1)\cap(X<3))}{P(X<3)}\times 1+\frac{P((X=2)\cap(X<3))}{P(X<3)}\times 2=$
  $=\frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=2)}\times 1+\frac{P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)}\times 2=\frac{0.1}{0.1+0.3}\times 1+\frac{0.3}{0.1+0.3}\times 2=1.75$
  $E(X^2|X<3)=\frac{0.1}{0.1+0.3}\times 1^2+\frac{0.3}{0.1+0.3}\times 2^2=3.25$
  $Var(X|X<3)=E(X^2|X<3)-E(X|X<3)^2=3.25-1.75^2=0.1875$

- **Условное математическое ожидание функции** $g(X)$ от дискретной случайной величины X считается как:

$$E(g(X)|A) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x|A) \times g(x), \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

- **Условное математическое ожидание функции** $g(X)$ от дискретной случайной величины X считается как:

$$E(g(X)|A) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x|A) \times g(x), \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

- Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \cdots$ со множеством индексов I, тогда:

$$E(X) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times E(X|A_i)$$

- **Условное математическое ожидание функции** $g(X)$ от дискретной случайной величины X считается как:

$$E(g(X)|A) = \sum_{x \in \mathbf{supp}(X)} P(X = x|A) \times g(x), \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

- Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \cdots$ со множеством индексов I, тогда:

$$E(X) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times E(X|A_i)$$

Пример:

- Антон учил билеты к экзамену. Первые три билета он выучил отлично, поэтому, если ему попадется один из них (событие A_1), то математическое ожидание его оценки составит 8. Следующие пять билетов он учил менее внимательно, поэтому достав один из них (событие A_2) он с равной вероятностью получит одну из оценок в диапазоне от 2 до 8 включительно. Наконец, последние два билета Антон не выучил, поэтому сдаст экзамен на 0, если ему попадется один из них (событие A_3). Каждый из билетов может попасться Антону с равной вероятностью. Найдите математическое ожидание его оценки (случайная величина X).

- **Условное математическое ожидание функции** $g(X)$ от дискретной случайной величины X считается как:

$$E(g(X)|A) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x|A) \times g(x), \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

- Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \cdots$ со множеством индексов I, тогда:

$$E(X) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times E(X|A_i)$$

Пример:

- Антон учил билеты к экзамену. Первые три билета он выучил отлично, поэтому, если ему попадется один из них (событие A_1), то математическое ожидание его оценки составит 8. Следующие пять билетов он учил менее внимательно, поэтому достав один из них (событие A_2) он с равной вероятностью получит одну из оценок в диапазоне от 2 до 8 включительно. Наконец, последние два билета Антон не выучил, поэтому сдаст экзамен на 0, если ему попадется один из них (событие A_3). Каждый из билетов может попасться Антону с равной вероятностью. Найдите математическое ожидание его оценки (случайная величина X).

  Решение:

  $E(X|A_2) = \frac{1}{7}(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 5$

- **Условное математическое ожидание функции** $g(X)$ от дискретной случайной величины X считается как:

$$E(g(X)|A) = \sum_{x \in \mathbf{supp}(X)} P(X = x|A) \times g(x), \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

- Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \cdots$ со множеством индексов I, тогда:

$$E(X) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times E(X|A_i)$$

Пример:

- Антон учил билеты к экзамену. Первые три билета он выучил отлично, поэтому, если ему попадется один из них (событие A_1), то математическое ожидание его оценки составит 8. Следующие пять билетов он учил менее внимательно, поэтому достав один из них (событие A_2) он с равной вероятностью получит одну из оценок в диапазоне от 2 до 8 включительно. Наконец, последние два билета Антон не выучил, поэтому сдаст экзамен на 0, если ему попадется один из них (событие A_3). Каждый из билетов может попасться Антону с равной вероятностью. Найдите математическое ожидание его оценки (случайная величина X).

  Решение:

  $E(X|A_2) = \frac{1}{7}(2+3+4+5+6+7+8) = 5$

  Воспользуемся тем, что A_1, A_2, A_3 являются полной группой попарно несовместных событий:

  $E(X) = P(A_1)E(X|A_1) + P(A_2)E(X|A_2) + P(A_3)E(X|A_3) = \frac{3}{10} \times 8 + \frac{5}{10} \times 5 + \frac{2}{10} \times 0 = 4.9$

Условное математическое ожидание

Метод первого шага

Продемонстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет не землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдем математическое ожидание X.

Продемонстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет не землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдем математическое ожидание X.
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберем альтернативный способ решения.

Продемонстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет не землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдем математическое ожидание X.
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберем альтернативный способ решения.
- Рассмотрим событие A – мяч упал после первого же удара и событие $\overline{A}$ – мяч не упал после первого удара.

Условное математическое ожидание

Метод первого шага

Продемонстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет не землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдем математическое ожидание X.
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберем альтернативный способ решения.
- Рассмотрим событие A – мяч упал после первого же удара и событие $\overline{A}$ – мяч не упал после первого удара.
- $E(X|\overline{A}) = E(X) + 1$, поскольку если мяч не упал после первого удара, то значит вы уже один раз его ударили и набьете его в среднем столько же раз, сколько набили бы до этого.

Продемонстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет не землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдем математическое ожидание X.
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберем альтернативный способ решения.
- Рассмотрим событие A – мяч упал после первого же удара и событие $\overline{A}$ – мяч не упал после первого удара.
- $E(X|\overline{A}) = E(X) + 1$, поскольку если мяч не упал после первого удара, то значит вы уже один раз его ударили и набьете его в среднем столько же раз, сколько набили бы до этого.
- $E(X|A) = 1$, поскольку в таком случае вы всего раз ударили мяч и он сразу же упал на землю

Продемонстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет не землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдем математическое ожидание X.
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберем альтернативный способ решения.
- Рассмотрим событие A – мяч упал после первого же удара и событие $\overline{A}$ – мяч не упал после первого удара.
- $E(X|\overline{A}) = E(X) + 1$, поскольку если мяч не упал после первого удара, то значит вы уже один раз его ударили и набьете его в среднем столько же раз, сколько набили бы до этого.
- $E(X|A) = 1$, поскольку в таком случае вы всего раз ударили мяч и он сразу же упал на землю
- Пользуясь полученными результатами и тем, что события A и $\overline{A}$ несовместные и формируют полную группу, зададим рекуррентное соотношение:

$$E(X) = E(X|A) \times P(A) + E(X|\overline{A}) \times P(\overline{A}) = 1 \times \frac{1}{5} + (E(X) + 1) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

Продемонстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет не землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдем математическое ожидание X.
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберем альтернативный способ решения.
- Рассмотрим событие A – мяч упал после первого же удара и событие $\overline{A}$ – мяч не упал после первого удара.
- $E(X|\overline{A}) = E(X) + 1$, поскольку если мяч не упал после первого удара, то значит вы уже один раз его ударили и набьете его в среднем столько же раз, сколько набили бы до этого.
- $E(X|A) = 1$, поскольку в таком случае вы всего раз ударили мяч и он сразу же упал на землю
- Пользуясь полученными результатами и тем, что события A и $\overline{A}$ несовместные и формируют полную группу, зададим рекуррентное соотношение:

$$E(X) = E(X|A) \times P(A) + E(X|\overline{A}) \times P(\overline{A}) = 1 \times \frac{1}{5} + (E(X) + 1) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

- Решая соответствующее равенство для $E(X)$ получаем $E(X) = 5$.

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \mathbf{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \mathbf{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \cdots$$

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \cdots$$

$$E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2E(X^2)}{2!} + \frac{t^3E(X^3)}{3!} + \cdots$$

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \cdots$$
$$E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2E(X^2)}{2!} + \frac{t^3E(X^3)}{3!} + \cdots$$

- Следовательно, дифференцируя производящую функцию моментов можно получать начальные моменты:

$$E(X^k) = \frac{d^kM_X(t)}{d^kt}|_{t=0}, \text{ где } k \in \{1, 2, 3, \cdots\}$$

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}\text{, где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \cdots$$

$$E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2E(X^2)}{2!} + \frac{t^3E(X^3)}{3!} + \cdots$$

- Следовательно, дифференцируя производящую функцию моментов можно получать начальные моменты:

$$E(X^k) = \frac{d^kM_X(t)}{d^kt}|_{t=0}\text{, где } k \in \{1, 2, 3, \cdots\}$$

- Например, для случайной величины X, такой, что $P(X = 1) = P(X = 2) = 0.5$, производящая функция моментов $M_X(t)$ и начальные моменты $E(X^k)$ будут иметь вид:

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \cdots$$

$$E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2E(X^2)}{2!} + \frac{t^3E(X^3)}{3!} + \cdots$$

- Следовательно, дифференцируя производящую функцию моментов можно получать начальные моменты:

$$E(X^k) = \frac{d^k M_X(t)}{d^k t}|_{t=0}, \text{ где } k \in \{1, 2, 3, \cdots\}$$

- Например, для случайной величины X, такой, что $P(X = 1) = P(X = 2) = 0.5$, производящая функция моментов $M_X(t)$ и начальные моменты $E(X^k)$ будут иметь вид:

$$M_X(t) = 0.5 \times e^{t \times 1} + 0.5 \times e^{t \times 2} = 0.5 \times (e^t + e^{2t})$$

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \cdots$$

$$E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2E(X^2)}{2!} + \frac{t^3E(X^3)}{3!} + \cdots$$

- Следовательно, дифференцируя производящую функцию моментов можно получать начальные моменты:

$$E(X^k) = \frac{d^kM_X(t)}{d^kt}|_{t=0}, \text{ где } k \in \{1, 2, 3, \cdots\}$$

- Например, для случайной величины X, такой, что $P(X = 1) = P(X = 2) = 0.5$, производящая функция моментов $M_X(t)$ и начальные моменты $E(X^k)$ будут иметь вид:

$$M_X(t) = 0.5 \times e^{t\times 1} + 0.5 \times e^{t\times 2} = 0.5 \times (e^t + e^{2t})$$

$$E(X^k) = d^k \left(0.5 \times (e^t + e^{2t})\right) / d^kt|_{t=0} = 0.5 \times (1 + 2^k)$$