Теория Вероятностей и Статистика

Сходимость по распределению

Потанин Богдан Станиславович

доцент, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2023–2024

Сходимость по распределению

Определение

- Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ **сходится по распределению** к случайной величине X, что обозначается как $X_n \xrightarrow{d} X$, если:
$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathcal{T}$$
Где $\mathcal{T}$ обозначает множество точек, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна.

Сходимость по распределению

Определение

- Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ **сходится по распределению** к случайной величине X, что обозначается как $X_n \xrightarrow{d} X$, если:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathcal{T}$$

Где $\mathcal{T}$ обозначает множество точек, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна.

Примеры:

- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X. Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X.

Сходимость по распределению

Определение

- Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ **сходится по распределению** к случайной величине X, что обозначается как $X_n \xrightarrow{d} X$, если:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathcal{T}$$

Где $\mathcal{T}$ обозначает множество точек, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна.

Примеры:

- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X. Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X.

Решение: сходимость по распределению соблюдается, поскольку:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{x-\frac{1}{n}}{\sqrt{1}}\right) = \Phi\left(\frac{x-0}{\sqrt{1}}\right) = \Phi(x) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathcal{T}$$

Сходимость по распределению

Определение

- Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ **сходится по распределению** к случайной величине X, что обозначается как $X_n \xrightarrow{d} X$, если:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathcal{T}$$

Где $\mathcal{T}$ обозначает множество точек, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна.

Примеры:

- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X. Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X.

  Решение: сходимость по распределению соблюдается, поскольку:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{n}}{\sqrt{1}}\right) = \Phi\left(\frac{x-0}{\sqrt{1}}\right) = \Phi(x) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathcal{T}$$

- Рассмотрим последовательность **экспоненциальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **экспоненциальную** случайную величину $X \sim EXP(1)$. Известно, что $X_n \sim EXP\left(\frac{n}{n+1}\right)$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X.

Сходимость по распределению
Определение

- Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ **сходится по распределению** к случайной величине X, что обозначается как $X_n \xrightarrow{d} X$, если:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathcal{T}$$

Где $\mathcal{T}$ обозначает множество точек, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна.

Примеры:

- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X. Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X.
Решение: сходимость по распределению соблюдается, поскольку:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{n}}{\sqrt{1}}\right) = \Phi\left(\frac{x-0}{\sqrt{1}}\right) = \Phi(x) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathcal{T}$$

- Рассмотрим последовательность **экспоненциальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **экспоненциальную** случайную величину $X \sim EXP(1)$. Известно, что $X_n \sim EXP\left(\frac{n}{n+1}\right)$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X.
Решение: сходимость по распределению соблюдается, поскольку при $x \geq 0$ (при $x < 0$ предел очевиден):

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} 1 - e^{-\frac{n}{n+1}x} = 1 - e^{-1\times x} = 1 - e^{-x} = F_X(x), \forall x \in \mathcal{T}$$

Сходимость по распределению

Приблизительное распределение (практический смысл)

- Если распределения случайной величины X предполагается схожим с распределением Θ, то записывают $X \dot{\sim} \Theta$.

Сходимость по распределению

Приблизительное распределение (практический смысл)

- Если распределения случайной величины X предполагается схожим с распределением Θ, то записывают $X \dot{\sim} \Theta$.
- Если последовательность $X_1, X_2, ...$ по распределению сходится к $X \sim \Theta$, то при достаточно большом n без существенных потерь в точности можно предположить, что $X_n \dot{\sim} \Theta$. В таких случаях Θ часто именую **асимптотическим распределением**.

Сходимость по распределению

Приблизительное распределение (практический смысл)

- Если распределения случайной величины X предполагается схожим с распределением Θ, то записывают $X\dot{\sim}\Theta$.
- Если последовательность $X_1, X_2, ...$ по распределению сходится к $X \sim \Theta$, то при достаточно большом n без существенных потерь в точности можно предположить, что $X_n\dot{\sim}\Theta$. В таких случаях Θ часто именую **асимптотическим распределением**.

Примеры:

- Если $X \sim U(0, 0.999)$, то полагая $\Theta = U(0, 1)$ без существенной потери в точности можно предположить, что $X\dot{\sim}U(0, 1)$.

Сходимость по распределению

Приблизительное распределение (практический смысл)

- Если распределения случайной величины X предполагается схожим с распределением Θ, то записывают $X\dot{\sim}\Theta$.
- Если последовательность $X_1, X_2, \ldots$ по распределению сходится к $X \sim \Theta$, то при достаточно большом n без существенных потерь в точности можно предположить, что $X_n\dot{\sim}\Theta$. В таких случаях Θ часто именую **асимптотическим распределением**.

Примеры:

- Если $X \sim U(0, 0.999)$, то полагая $\Theta = U(0, 1)$ без существенной потери в точности можно предположить, что $X\dot{\sim}U(0, 1)$.
- Рассмотрим последовательность нормальных случйных величин $X_1, X_2, \ldots$, такую, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$. Ранее было показано, что она стремится по распределению к стандартной нормальной случайной величине $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда при $n = 1000$ без существенной потери в точности можно предположить, что $X_{1000}\dot{\sim}\mathcal{N}(0, 1)$.

- Если распределения случайной величины X предполагается схожим с распределением Θ, то записывают $X \dot{\sim} \Theta$.
- Если последовательность $X_1, X_2, ...$ по распределению сходится к $X \sim \Theta$, то при достаточно большом n без существенных потерь в точности можно предположить, что $X_n \dot{\sim} \Theta$. В таких случаях Θ часто именую **асимптотическим распределением**.

Примеры:

- Если $X \sim U(0, 0.999)$, то полагая $\Theta = U(0,1)$ без существенной потери в точности можно предположить, что $X \dot{\sim} U(0,1)$.
- Рассмотрим последовательность нормальных случйных величин $X_1, X_2, ...$, такую, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$. Ранее было показано, что она стремится по распределению к стандартной нормальной случайной величине $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Тогда при $n = 1000$ без существенной потери в точности можно предположить, что $X_{1000} \dot{\sim} \mathcal{N}(0,1)$. Оценим погрешность в вычислениях на конкретном примере:

Настоящее распределение: $P(X_{1000} < 1) = \Phi\left(1 - \frac{1}{1000}\right) \approx 0.8411027$

Асимптотическое распределение: $P(X_{1000} < 1) \approx \Phi\left(1\right) \approx 0.8413447$

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$.

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{p} X$, где $X \sim Pois(5)$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{d} X$.

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{p} X$, где $X \sim Pois(5)$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} 5$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{p} 5$.

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{p} X$, где $X \sim Pois(5)$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} 5$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{p} 5$.
- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X. Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ и $Cov(X_n, X) = 0.5$, где $n \in I$. Ранее было показано, что $X_n \xrightarrow{d} X$.

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{p} X$, где $X \sim Pois(5)$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} 5$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{p} 5$.
- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X. Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ и $Cov(X_n, X) = 0.5$, где $n \in I$. Ранее было показано, что $X_n \xrightarrow{d} X$. Теперь покажем, что несмотря на то, что соблюдается сходимость по распределению, не будет соблюдаться сходимость по вероятности. Полагая $\varepsilon = 1$ и обращая внимание на то, что $(X_n - X) \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ получаем:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > 1) = \lim_{n\to\infty} P(X_n - X > 1) + P(X_n - X < -1)$$

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{p} X$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{p} X$, где $X \sim Pois(5)$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} 5$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{p} 5$.
- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X. Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ и $Cov(X_n, X) = 0.5$, где $n \in I$. Ранее было показано, что $X_n \xrightarrow{d} X$. Теперь покажем, что несмотря на то, что соблюдается сходимость по распределению, не будет соблюдаться сходимость по вероятности. Полагая $\varepsilon = 1$ и обращая внимание на то, что $(X_n - X) \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ получаем:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > 1) = \lim_{n\to\infty} P(X_n - X > 1) + P(X_n - X < -1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 - \Phi\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1}}\right) - \Phi\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1}}\right) \geq 2 - \Phi\left(\frac{1-1}{\sqrt{1}}\right) - \Phi\left(\frac{1+0}{\sqrt{1}}\right) \approx 0.66 > 0$$

Рассмотрим последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ и $Y_1, Y_2, \ldots$ такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Слуцкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$

Рассмотрим последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots$ и $Y_1, Y_2, \dots$ такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Слуцкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$

Рассмотрим последовательности случайных величин $X_1, X_2, ...$ и $Y_1, Y_2, ...$ такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Слуцкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
- $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X / c$, где $c \neq 0$.

Основные теоремы о сходимости по распределению
Теорема Слуцкого

Рассмотрим последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ и $Y_1, Y_2, \ldots$ такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Слуцкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
- $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X / c$, где $c \neq 0$.

Важно: поскольку из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению, то теорема останется справедливой, если при ее формулировке все $\xrightarrow{d}$ заменить на $\xrightarrow{p}$.

Рассмотрим последовательности случайных величин $X_1, X_2, ...$ и $Y_1, Y_2, ...$ такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Слуцкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
- $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c$, где $c \neq 0$.

Важно: поскольку из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению, то теорема останется справедливой, если при ее формулировке все $\xrightarrow{d}$ заменить на $\xrightarrow{p}$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} 10$, где $X \sim U(0,1)$. Тогда верно также, что $X_n Y_n \xrightarrow{d} 10X$, где $10X \sim U(0,10)$.

Рассмотрим последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ и $Y_1, Y_2, \ldots$ такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Слуцкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
- $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c$, где $c \neq 0$.

Важно: поскольку из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению, то теорема останется справедливой, если при ее формулировке все $\xrightarrow{d}$ заменить на $\xrightarrow{p}$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} 10$, где $X \sim U(0,1)$. Тогда верно также, что $X_n Y_n \xrightarrow{d} 10X$, где $10X \sim U(0,10)$.
- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} 5$ и $Y_n \xrightarrow{p} 10$. Тогда верно также, что $X_n Y_n \xrightarrow{d} 50$ и $X_n Y_n \xrightarrow{p} 50$.

Пусть имеется последовательность $X_1, X_2, ...$ биномиальных случайных величин $X_n \sim B(n, p_n)$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Тогда по **теореме Пуассона** $X_n \xrightarrow{d} X$, где $X \sim Pois(\lambda)$.

Пусть имеется последовательность $X_1, X_2, ...$ биномиальных случайных величин $X_n \sim B(n, p_n)$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Тогда по **теореме Пуассона** $X_n \xrightarrow{d} X$, где $X \sim Pois(\lambda)$.

Доказательство: сперва рассмотрим, к чему стремится функция вероятностей элементов последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = x) = \lim_{n\to\infty} C_n^x p_n^x (1 - p_n)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

Пусть имеется последовательность $X_1, X_2, \ldots$ биномиальных случайных величин $X_n \sim B(n, p_n)$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Тогда по **теореме Пуассона** $X_n \xrightarrow{d} X$, где $X \sim Pois(\lambda)$.

Доказательство: сперва рассмотрим, к чему стремится функция вероятностей элементов последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = x) = \lim_{n\to\infty} C_n^x p_n^x (1-p_n)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n*(n-1)*\ldots*(n-x+1)}{n^x}\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

Пусть имеется последовательность $X_1, X_2, \ldots$ биномиальных случайных величин $X_n \sim B(n, p_n)$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Тогда по **теореме Пуассона** $X_n \xrightarrow{d} X$, где $X \sim Pois(\lambda)$.

Доказательство: сперва рассмотрим, к чему стремится функция вероятностей элементов последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = x) = \lim_{n\to\infty} C_n^x p_n^x (1-p_n)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n*(n-1)*\ldots*(n-x+1)}{n^x}\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n^x}{n^x} - \ldots - \frac{(1+2+\ldots+x-1)*n}{n^x}\right)}_{\text{стремится к 1}} * \frac{\lambda^x}{x!} * \underbrace{\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^n}_{\text{стремится к } e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\text{стремится к 1}} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = P(X = x)$$

Пусть имеется последовательность $X_1, X_2, \ldots$ биномиальных случайных величин $X_n \sim B(n, p_n)$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Тогда по **теореме Пуассона** $X_n \xrightarrow{d} X$, где $X \sim Pois(\lambda)$.

Доказательство: сперва рассмотрим, к чему стремится функция вероятностей элементов последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = x) = \lim_{n\to\infty} C_n^x p_n^x (1-p_n)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n*(n-1)*\ldots*(n-x+1)}{n^x}\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n^x}{n^x} - \ldots - \frac{(1+2+\ldots+x-1)*n}{n^x}\right)}_{\text{стремится к } 1} * \frac{\lambda^x}{x!} * \underbrace{\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^n}_{\text{стремится к } e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\text{стремится к } 1} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = P(X = x)$$

Пользуясь тем, что предел суммы равен сумме пределов, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{t\in\{0,1,\ldots,\lceil x\rceil\}:t\leq x} P(X_n = t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{t\in\{0,1,\ldots,\lceil x\rceil\}:t\leq x} P(X = t) = F_X(x)$$

- Если $X \sim B(n,p)$, причем n велико, а p – мало, то без существенной потери в точности можно предположить, что $X \dot{\sim} Pois(np)$.

Применение теоремы Пуассона

- Если $X \sim B(n, p)$, причем n велико, а p – мало, то без существенной потери в точности можно предположить, что $X \dot{\sim} Pois(np)$.
- Преимущество данного подхода заключается в том, что как правило функция вероятностей распределения Пуассона считается гораздо проще, чем функция вероятностей Биномиального распределения.

- Если $X \sim B(n, p)$, причем n велико, а p – мало, то без существенной потери в точности можно предположить, что $X \dot{\sim} Pois(np)$.
- Преимущество данного подхода заключается в том, что как правило функция вероятностей распределения Пуассона считается гораздо проще, чем функция вероятностей Биномиального распределения.

Примеры:

- Вероятность наступления страхового случая для каждого клиента составляет 0.01. В фирме застрахованы 1000 клиентов. Рассчитайте вероятность того, что наступит ровно два страховых случая.

- Если $X \sim B(n,p)$, причем n велико, а p – мало, то без существенной потери в точности можно предположить, что $X \dot{\sim} Pois(np)$.
- Преимущество данного подхода заключается в том, что как правило функция вероятностей распределения Пуассона считается гораздо проще, чем функция вероятностей Биномиального распределения.

Примеры:

- Вероятность наступления страхового случая для каждого клиента составляет 0.01. В фирме застрахованы 1000 клиентов. Рассчитайте вероятность того, что наступит ровно два страховых случая.

  Решение:

  Через $X \sim B(1000, 0.01)$ обозначим число страховых случаев, которое можно аппроксимировать как $X \dot{\sim} Pois(1000 \times 0.01) = Pois(10)$. В результате получаем:

$$P\left(X = 2\right) \approx \frac{10^2}{2!}e^{-10} \approx 0.00227$$

- Если $X \sim B(n,p)$, причем n велико, а p – мало, то без существенной потери в точности можно предположить, что $X \dot{\sim} Pois(np)$.
- Преимущество данного подхода заключается в том, что как правило функция вероятностей распределения Пуассона считается гораздо проще, чем функция вероятностей Биномиального распределения.

Примеры:

- Вероятность наступления страхового случая для каждого клиента составляет 0.01. В фирме застрахованы 1000 клиентов. Рассчитайте вероятность того, что наступит ровно два страховых случая.

  Решение:
  Через $X \sim B(1000, 0.01)$ обозначим число страховых случаев, которое можно аппроксимировать как $X \dot{\sim} Pois(1000 \times 0.01) = Pois(10)$. В результате получаем:

$$P\left(X = 2\right) \approx \frac{10^2}{2!}e^{-10} \approx 0.00227$$

С использованием истинного распределения мы бы получили близкий результат:

$$P\left(X = 2\right) = C_{1000}^{2} 0.01^2 0.99^{9998} \approx 0.00220$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Центральная предельная теорема

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, ...$ с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- На практике эта теорема позволяет предположить, что при соблюдении соответствующих условий и достаточно большом n окажется точной аппроксимация $\sum_{i=1}^{n} X_i \dot{\sim} \mathcal{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, ...$ с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- На практике эта теорема позволяет предположить, что при соблюдении соответствующих условий и достаточно большом n окажется точной аппроксимация $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \dot{\sim} \mathcal{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.

Примеры:

- В аудитории 100 студентов независимо друг от друга пишут контрольную работу. Время (в часах), затрачиваемое на написание контрольной, для каждого студента является равномерной случайной величиной $X_i \sim U(1, 2)$, где $i \in \{1, ..., 100\}$. Рассчитайте вероятность, с которой суммарное время на написание контрольной работы не превысит 152 часа.

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- На практике эта теорема позволяет предположить, что при соблюдении соответствующих условий и достаточно большом n окажется точной аппроксимация $\sum_{i=1}^{n} X_i \dot{\sim} \mathcal{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.

Примеры:

- В аудитории 100 студентов независимо друг от друга пишут контрольную работу. Время (в часах), затрачиваемое на написание контрольной, для каждого студента является равномерной случайной величиной $X_i \sim U(1, 2)$, где $i \in \{1, \ldots, 100\}$. Рассчитайте вероятность, с которой суммарное время на написание контрольной работы не превысит 152 часа.
  Решение: поскольку достаточно много $n = 100$ студентов пишут контрольную независимо друг от друга и время на ее написание у них распределено одинаково, то можно применить ЦПТ:

$$\mu = E(X_i) = (1 + 2)/2 = 1.5 \quad \sigma^2 = (2 - 1)^2/12 = 1/12$$

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, ...$ с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- На практике эта теорема позволяет предположить, что при соблюдении соответствующих условий и достаточно большом n окажется точной аппроксимация $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \dot{\sim} \mathcal{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.

Примеры:

- В аудитории 100 студентов независимо друг от друга пишут контрольную работу. Время (в часах), затрачиваемое на написание контрольной, для каждого студента является равномерной случайной величиной $X_i \sim U(1,2)$, где $i \in \{1, ..., 100\}$. Рассчитайте вероятность, с которой суммарное время на написание контрольной работы не превысит 152 часа.
  Решение: поскольку достаточно много $n = 100$ студентов пишут контрольную независимо друг от друга и время на ее написание у них распределено одинаково, то можно применить ЦПТ:

$$\mu = E(X_i) = (1+2)/2 = 1.5 \quad \sigma^2 = (2-1)^2/12 = 1/12$$

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \dot{\sim} \mathcal{N}\left(100 \times 1.5, 100 \times (1/12)\right) = \mathcal{N}\left(150, 25/3\right)$$

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- На практике эта теорема позволяет предположить, что при соблюдении соответствующих условий и достаточно большом n окажется точной аппроксимация $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \dot{\sim} \mathcal{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.

Примеры:

- В аудитории 100 студентов независимо друг от друга пишут контрольную работу. Время (в часах), затрачиваемое на написание контрольной, для каждого студента является равномерной случайной величиной $X_i \sim U(1, 2)$, где $i \in \{1, \ldots, 100\}$. Рассчитайте вероятность, с которой суммарное время на написание контрольной работы не превысит 152 часа.
Решение: поскольку достаточно много $n = 100$ студентов пишут контрольную независимо друг от друга и время на ее написание у них распределено одинаково, то можно применить ЦПТ:

$$\mu = E(X_i) = (1+2)/2 = 1.5 \quad \sigma^2 = (2-1)^2/12 = 1/12$$

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \dot{\sim} \mathcal{N}\left(100 \times 1.5, 100 \times (1/12)\right) = \mathcal{N}\left(150, 25/3\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 152\right) \approx \Phi\left(\frac{152-150}{\sqrt{25/3}}\right) =$$

$$= \Phi\left(0.693\right) \approx 0.7557888$$

- Поскольку биномиальное распределение $X \sim B(n, p)$ можно представить как сумму независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $X_i \sim Ber(p)$, то вследствие ЦПТ:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, p(1-p)\right)$$

- Поскольку биномиальное распределение $X \sim B(n, p)$ можно представить как сумму независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $X_i \sim Ber(p)$, то вследствие ЦПТ:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, p(1-p)\right)$$

- На практике при достаточно большом n можно допустить $X \dot{\sim} \mathcal{N}\left(np, np(1-p)\right)$.

- Поскольку биномиальное распределение $X \sim B(n, p)$ можно представить как сумму независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $X_i \sim Ber(p)$, то вследствие ЦПТ:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - p\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, p(1-p)\right)$$

- На практике при достаточно большом n можно допустить $X \dot{\sim} \mathcal{N}\left(np, np(1-p)\right)$.

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите вероятность, с которой у него выпало от 510 до 520 орлов включительно.

- Поскольку биномиальное распределение $X \sim B(n, p)$ можно представить как сумму независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $X_i \sim Ber(p)$, то вследствие ЦПТ:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, p(1-p)\right)$$

- На практике при достаточно большом n можно допустить $X \dot{\sim} \mathcal{N}\left(np, np(1-p)\right)$.

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите вероятность, с которой у него выпало от 510 до 520 орлов включительно.
  Решение: число выпавших орлов обозначим как $X \sim B(1000, 0.5)$, откуда по теореме Муавра-Лапласа:

$$X \dot{\sim} \mathcal{N}\left(1000 \times 0.5, 1000 \times 0.5 \times (1 - 0.5)\right) = \mathcal{N}(500, 250)$$

- Поскольку биномиальное распределение $X \sim B(n, p)$ можно представить как сумму независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $X_i \sim Ber(p)$, то вследствие ЦПТ:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, p(1-p)\right)$$

- На практике при достаточно большом n можно допустить $X \dot{\sim} \mathcal{N}\left(np, np(1-p)\right)$.

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите вероятность, с которой у него выпало от 510 до 520 орлов включительно.
  Решение: число выпавших орлов обозначим как $X \sim B(1000, 0.5)$, откуда по теореме Муавра-Лапласа:

$$X \dot{\sim} \mathcal{N}\left(1000 \times 0.5, 1000 \times 0.5 \times (1-0.5)\right) = \mathcal{N}(500, 250)$$

Применяя приблизительное распределение получаем:

$$P(510 \leq X \leq 520) \approx \Phi\left(\frac{520-500}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\frac{510-500}{\sqrt{250}}\right) \approx 0.8970484 - 0.7364554 = 0.160593$$

- Пусть для последовательности $X_1, X_2, \ldots$ соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i-\mu)^3|) = \tau < \infty$, тогда:

$$|P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x)| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

Погрешность аппроксимации

Неравенство Берри-Эссеена

- Пусть для последовательности $X_1, X_2, \dots$ соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i - \mu)^3|) = \tau < \infty$, тогда:

$$|P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x)| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

- Максимальная погрешность снижается вместо с числом элементов суммы n.

Погрешность аппроксимации

Неравенство Берри-Эссеена

- Пусть для последовательности $X_1, X_2, ...$ соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i - \mu)^3|) = \tau < \infty$, тогда:

$$|P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x)| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

- Максимальная погрешность снижается вместо с числом элементов суммы n.

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите максимальную погрешность, которую вы можете получить, используя ЦПТ для расчета вероятности того, что выпадет не более 510 орлов.

- Пусть для последовательности $X_1, X_2, \ldots$ соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i-\mu)^3|)=\tau<\infty$, тогда:

$$|P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x)| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

- Максимальная погрешность снижается вместо с числом элементов суммы n.

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите максимальную погрешность, которую вы можете получить, используя ЦПТ для расчета вероятности того, что выпадет не более 510 орлов.
  Решение: число выпавших орлов обозначим как $X \sim B(1000, 0.5)$, откуда:

$$\mu = 0.5 \qquad \sigma^2 = 0.25 \qquad \tau = 0.5 \times (|1-0.5|)^3 + 0.5 \times (|0-0.5|)^3 = 0.125$$

Погрешность аппроксимации

Неравенство Берри-Эссеена

- Пусть для последовательности $X_1, X_2, \dots$ соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i - \mu)^3|) = \tau < \infty$, тогда:

$$|P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x)| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

- Максимальная погрешность снижается вместо с числом элементов суммы n.

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите максимальную погрешность, которую вы можете получить, используя ЦПТ для расчета вероятности того, что выпадет не более 510 орлов.
  Решение: число выпавших орлов обозначим как $X \sim B(1000, 0.5)$, откуда:

$$\mu = 0.5 \qquad \sigma^2 = 0.25 \qquad \tau = 0.5 \times (|1 - 0.5|)^3 + 0.5 \times (|0 - 0.5|)^3 = 0.125$$

В соответствии с неравенством Берри-Эссеена погрешность не превысит:

$$\frac{0.4784 \times 0.125}{\sqrt{0.25}^3\sqrt{1000}} = 0.0151283$$

Погрешность аппроксимации

Неравенство Берри-Эссеена

- Пусть для последовательности $X_1, X_2, \ldots$ соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i - \mu)^3|) = \tau < \infty$, тогда:

$$|P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x)| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

- Максимальная погрешность снижается вместо с числом элементов суммы n.

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите максимальную погрешность, которую вы можете получить, используя ЦПТ для расчета вероятности того, что выпадет не более 510 орлов.
  Решение: число выпавших орлов обозначим как $X \sim B(1000, 0.5)$, откуда:

$$\mu = 0.5 \qquad \sigma^2 = 0.25 \qquad \tau = 0.5 \times (|1 - 0.5|)^3 + 0.5 \times (|0 - 0.5|)^3 = 0.125$$

В соответствии с неравенством Берри-Эссеена погрешность не превысит:

$$\frac{0.4784 \times 0.125}{\sqrt{0.25}^3\sqrt{1000}} = 0.0151283$$

Обратите внимание, что для любого числа орлов максимальная погрешность, получаемая из данного неравенства, останется прежней.