

# Теория Вероятностей и Статистика

## Гипотезы о среднем, дисперсии и доле

Потанин Богдан Станиславович

доцент, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2023-2024

# Тестирование гипотез

## Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из некоторого распределения  $D_X$  с вектором параметров  $\theta$ .

# Тестирование гипотез

## Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из некоторого распределения  $D_X$  с вектором параметров  $\theta$ .
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы:  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  и  $H_1 : \theta \in \Theta_1$ , где  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .

# Тестирование гипотез

## Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из некоторого распределения  $D_X$  с вектором параметров  $\theta$ .
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы:  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  и  $H_1 : \theta \in \Theta_1$ , где  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .
- Задается уровень значимости теста  $\alpha$  (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика  $T(X)$ , исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область  $\mathcal{T}_\alpha$ , то есть  $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$ .

# Тестирование гипотез

## Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из некоторого распределения  $D_X$  с вектором параметров  $\theta$ .
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы:  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  и  $H_1 : \theta \in \Theta_1$ , где  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .
- Задается уровень значимости теста  $\alpha$  (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика  $T(X)$ , исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область  $\mathcal{T}_\alpha$ , то есть  $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$ .
- Как правило критическая область  $\mathcal{T}_\alpha$  подбирается таким образом, чтобы в нее входили экстремальные (наибольшие и наименьшие) реализации тестовой статистики.

# Тестирование гипотез

## Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из некоторого распределения  $D_X$  с вектором параметров  $\theta$ .
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы:  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  и  $H_1 : \theta \in \Theta_1$ , где  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .
- Задается уровень значимости теста  $\alpha$  (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика  $T(X)$ , исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область  $\mathcal{T}_\alpha$ , то есть  $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$ .
- Как правило критическая область  $\mathcal{T}_\alpha$  подбирается таким образом, чтобы в нее входили экстремальные (наибольшие и наименьшие) реализации тестовой статистики.
- Например, если по выборке из нормального распределения тестируется гипотеза  $H_0 : \mu = \mu_0$  с помощью статистики  $T(X) = \bar{X}_n$ , то интуиция подсказывает целесообразность отклонения нулевой гипотезы когда выборочное среднее  $\bar{X}_n$  окажется намного больше или намного меньше предполагаемого математического ожидания  $\mu_0$ .

# Тестирование гипотез

## Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из некоторого распределения  $D_X$  с вектором параметров  $\theta$ .
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы:  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  и  $H_1 : \theta \in \Theta_1$ , где  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .
- Задается уровень значимости теста  $\alpha$  (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика  $T(X)$ , исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область  $\mathcal{T}_\alpha$ , то есть  $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$ .
- Как правило критическая область  $\mathcal{T}_\alpha$  подбирается таким образом, чтобы в нее входили экстремальные (наибольшие и наименьшие) реализации тестовой статистики.
- Например, если по выборке из нормального распределения тестируется гипотеза  $H_0 : \mu = \mu_0$  с помощью статистики  $T(X) = \bar{X}_n$ , то интуиция подсказывает целесообразность отклонения нулевой гипотезы когда выборочное среднее  $\bar{X}_n$  окажется намного больше или намного меньше предполагаемого математического ожидания  $\mu_0$ .
- Если мы, например, тестируем гипотезу о математическом ожидании зарплаты случайно взятого индивида, то нулевая гипотеза будет отклоняться, если наблюдаемая по результатам опроса средняя зарплата намного больше или меньше предполагаемой.

# Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через  $c_q$  квантиль уровня  $q$  тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть  $T(X)|H_0$ .



# Тестирование гипотез

## Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через  $c_q$  квантиль уровня  $q$  тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть  $T(X)|H_0$ .
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) < c_\alpha$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$  именуется **левосторонней**.

# Тестирование гипотез

## Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через  $c_q$  квантиль уровня  $q$  тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть  $T(X)|H_0$ .
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) < c_\alpha$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$  именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) > c_{1-\alpha}$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty)$  именуется **правосторонней**.

# Тестирование гипотез

## Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через  $c_q$  квантиль уровня  $q$  тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть  $T(X)|H_0$ .
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) < c_\alpha$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$  именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) > c_{1-\alpha}$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty)$  именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) < c_{\alpha/2}$  и  $T(X) > c_{1-\alpha/2}$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_{\alpha/2}) \cup (c_{1-\alpha/2}, \infty)$  именуется **двухсторонней**.

# Тестирование гипотез

## Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через  $c_q$  квантиль уровня  $q$  тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть  $T(X)|H_0$ .
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) < c_\alpha$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$  именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) > c_{1-\alpha}$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty)$  именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) < c_{\alpha/2}$  и  $T(X) > c_{1-\alpha/2}$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_{\alpha/2}) \cup (c_{1-\alpha/2}, \infty)$  именуется **двухсторонней**.
- Для соответствующих критических областей довольно просто считать p-value:

$$\text{Левосторонняя: } p\text{-value} = F_{T(X)|H_0}(T(x))$$

# Тестирование гипотез

## Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через  $c_q$  квантиль уровня  $q$  тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть  $T(X)|_{H_0}$ .
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) < c_\alpha$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$  именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) > c_{1-\alpha}$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty)$  именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) < c_{\alpha/2}$  и  $T(X) > c_{1-\alpha/2}$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_{\alpha/2}) \cup (c_{1-\alpha/2}, \infty)$  именуется **двухсторонней**.
- Для соответствующих критических областей довольно просто считать p-value:

**Левосторонняя:**  $p\text{-value} = F_{T(X)|H_0}(T(x))$

**Правосторонняя:**  $p\text{-value} = 1 - F_{T(X)|H_0}(T(x))$

# Тестирование гипотез

## Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через  $c_q$  квантиль уровня  $q$  тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть  $T(X)|H_0$ .
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) < c_\alpha$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$  именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) > c_{1-\alpha}$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty)$  именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости  $\alpha$  при  $T(X) < c_{\alpha/2}$  и  $T(X) > c_{1-\alpha/2}$ , то критическая область  $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_{\alpha/2}) \cup (c_{1-\alpha/2}, \infty)$  именуется **двухсторонней**.
- Для соответствующих критических областей довольно просто считать p-value:

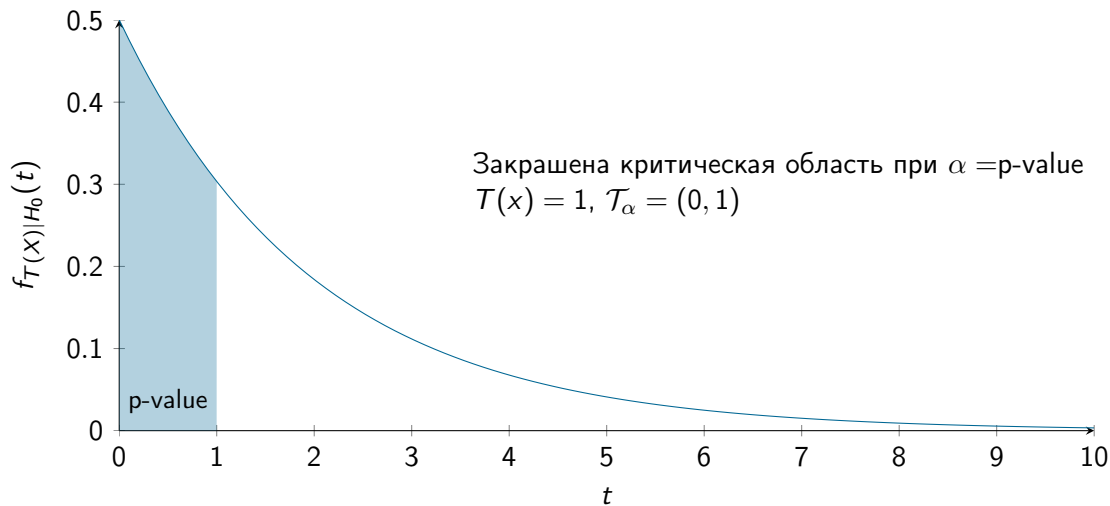
**Левосторонняя:**  $p\text{-value} = F_{T(X)|H_0}(T(x))$

**Правосторонняя:**  $p\text{-value} = 1 - F_{T(X)|H_0}(T(x))$

**Двухсторонняя:**  $p\text{-value} = 2 \min(F_{T(X)|H_0}(T(x)), 1 - F_{T(X)|H_0}(T(x)))$

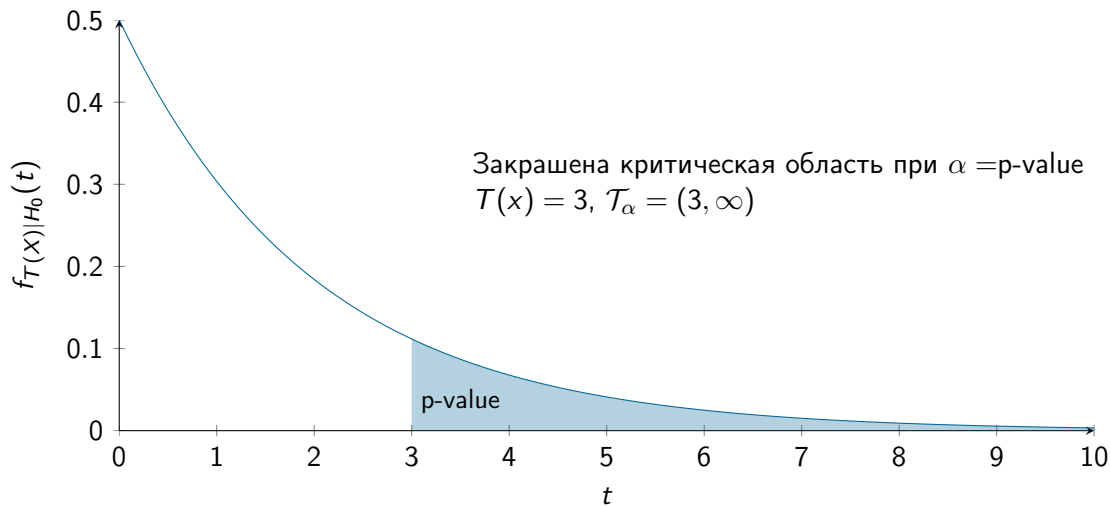
# Тестирование гипотез

Левосторонняя критическая область, графическая иллюстрация



# Тестирование гипотез

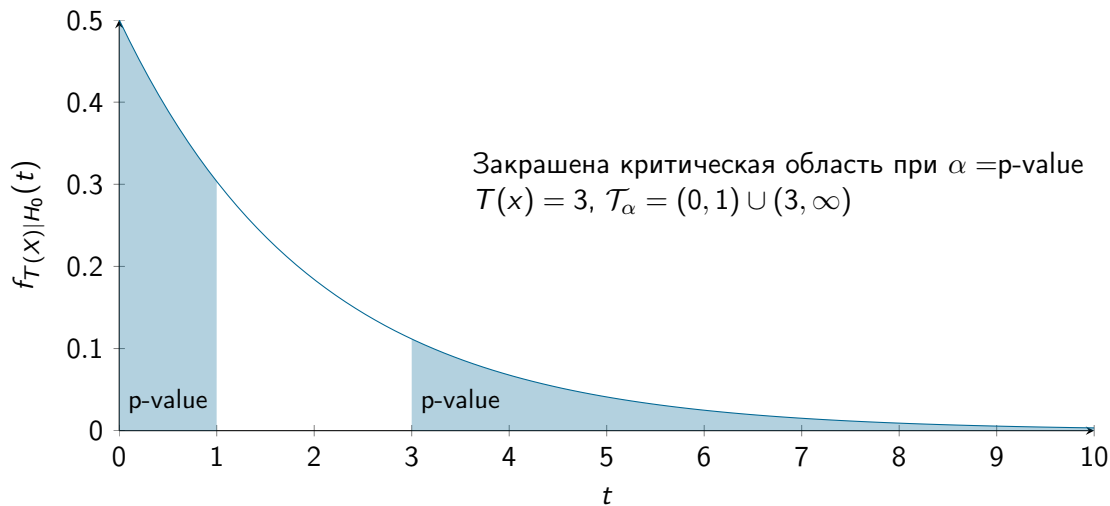
## Правосторонняя критическая область, графическая иллюстрация





# Тестирование гипотез

Двухсторонняя критическая область, графическая иллюстрация



# Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  с неизвестными параметрами.

# Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \mu = \mu_0$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}}, \quad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

# Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \mu = \mu_0$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}}, \quad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через  $t_{n-1,q}$  обозначая квантиль уровня  $q$  распределения  $t(n-1)$ :

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha})$	$(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha/2}) \cup (t_{n-1,1-\alpha/2}, \infty)$	$(t_{n-1,1-\alpha}, \infty)$
p-value	$F_{t(n-1)}(T(x))$	$2 \min(F_{t(n-1)}(T(x)), 1 - F_{t(n-1)}(T(x)))$	$1 - F_{t(n-1)}(T(x))$

# Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

## Пример

Объем овса, съедаемого лошастью за день (в сотнях килограммов), хорошо описывается нормальным распределением. За три дня лошадь съела 5, 7 и 3 килограмм овса соответственно. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание объема съедаемого за день лошастью овса равняется 6-ти сотням килограммов, против альтернативы о том, что математическое ожидание меньше. Также, посчитаем  $p$ -value теста.

# Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

## Пример

Объем овса, съедаемого лошастью за день (в сотнях килограммов), хорошо описывается нормальным распределением. За три дня лошадь съела 5, 7 и 3 килограмм овса соответственно. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание объема съедаемого за день лошастью овса равняется 6-ти сотням килограммов, против альтернативы о том, что математическое ожидание меньше. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu = 6$  и  $H_1 : \mu < 6$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

# Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

## Пример

Объем овса, съедаемого лошастью за день (в сотнях килограммов), хорошо описывается нормальным распределением. За три дня лошадь съела 5, 7 и 3 килограмм овса соответственно. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание объема съедаемого за день лошастью овса равняется 6-ти сотням килограммов, против альтернативы о том, что математическое ожидание меньше. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu = 6$  и  $H_1 : \mu < 6$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{3-1, 0.95} = t_{2, 0.95} \approx 2.92$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$ .

# Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

## Пример

Объем овса, съедаемого лошастью за день (в сотнях килограммов), хорошо описывается нормальным распределением. За три дня лошадь съела 5, 7 и 3 килограмм овса соответственно. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание объема съедаемого за день лошастью овса равняется 6-ти сотням килограммов, против альтернативы о том, что математическое ожидание меньше. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu = 6$  и  $H_1 : \mu < 6$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{3-1, 0.95} = t_{2, 0.95} \approx 2.92$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$ .
- Так как  $\bar{x}_3 = 5$  и  $\hat{\sigma}_3^2(x) = 4$ , то  $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{4/3}} \approx -0.866$ .



# Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

## Пример

Объем овса, съедаемого лошастью за день (в сотнях килограммов), хорошо описывается нормальным распределением. За три дня лошадь съела 5, 7 и 3 килограмм овса соответственно. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание объема съедаемого за день лошастью овса равняется 6-ти сотням килограммов, против альтернативы о том, что математическое ожидание меньше. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu = 6$  и  $H_1 : \mu < 6$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{3-1, 0.95} = t_{2, 0.95} \approx 2.92$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$ .
- Так как  $\bar{x}_3 = 5$  и  $\hat{\sigma}_3^2(x) = 4$ , то  $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{4/3}} \approx -0.866$ .
- В силу того, что  $-0.866 \notin (-\infty, -2.92)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.

# Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

## Пример

Объем овса, съедаемого лошастью за день (в сотнях килограммов), хорошо описывается нормальным распределением. За три дня лошадь съела 5, 7 и 3 килограмм овса соответственно. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание объема съедаемого за день лошастью овса равняется 6-ти сотням килограммов, против альтернативы о том, что математическое ожидание меньше. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu = 6$  и  $H_1 : \mu < 6$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{3-1, 0.95} = t_{2, 0.95} \approx 2.92$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$ .
- Так как  $\bar{x}_3 = 5$  и  $\hat{\sigma}_3^2(x) = 4$ , то  $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{4/3}} \approx -0.866$ .
- В силу того, что  $-0.866 \notin (-\infty, -2.92)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.
- Наконец,  $p\text{-value} = F_{t(2)}(-0.866) \approx 0.239$ , а значит нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 23.9%, например, на 30%-м (10%-м).

# Гипотеза о математическом ожидании

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с конечными математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ .

# Гипотеза о математическом ожидании

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с конечными математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ .
- При большом  $n \geq 30$  на уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \mu = \mu_0$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

# Гипотеза о математическом ожидании

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с конечными математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ .
- При большом  $n \geq 30$  на уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \mu = \mu_0$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через  $z_q$  обозначая квантиль уровня  $q$  стандартного нормального распределения:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -z_{1-\alpha})$	$(-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$\Phi(T(x))$	$2 \min(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x)))$	$1 - \Phi(T(x))$

# Гипотеза о математическом ожидании

## Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

# Гипотеза о математическом ожидании

## Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu = 8$  и  $H_1 : \mu > 8$ , где  $E(X_1) = \mu$ .

# Гипотеза о математическом ожидании

## Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu = 8$  и  $H_1 : \mu > 8$ , где  $E(X_1) = \mu$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.9} \approx 1.28$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$ .



# Гипотеза о математическом ожидании

## Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu = 8$  и  $H_1 : \mu > 8$ , где  $E(X_1) = \mu$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.9} \approx 1.28$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$ .
- Так как  $\bar{x}_{30} = 300/30 = 10$  и  $\hat{\sigma}_{30}^2(x) = 50$ , то  $T(x) = \frac{(10-8)}{\sqrt{50/30}} \approx 1.55$ .

# Гипотеза о математическом ожидании

## Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu = 8$  и  $H_1 : \mu > 8$ , где  $E(X_1) = \mu$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.9} \approx 1.28$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$ .
- Так как  $\bar{x}_{30} = 300/30 = 10$  и  $\hat{\sigma}_{30}^2(x) = 50$ , то  $T(x) = \frac{(10-8)}{\sqrt{50/30}} \approx 1.55$ .
- В силу того, что  $1.55 \in (1.28, \infty)$ , нулевая гипотеза отвергается на 10%-м уровне значимости.

# Гипотеза о математическом ожидании

## Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu = 8$  и  $H_1 : \mu > 8$ , где  $E(X_1) = \mu$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.9} \approx 1.28$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$ .
- Так как  $\bar{x}_{30} = 300/30 = 10$  и  $\hat{\sigma}_{30}^2(x) = 50$ , то  $T(x) = \frac{(10-8)}{\sqrt{50/30}} \approx 1.55$ .
- В силу того, что  $1.55 \in (1.28, \infty)$ , нулевая гипотеза отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец,  $p\text{-value} = 1 - \Phi(1.55) \approx 0.06$ , а значит нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 6%, например, на 15%-м (5%-м).

# Гипотеза о разнице математических ожиданий

## Формулировка

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений с конечными математическими ожиданиями  $\mu_X, \mu_Y$  и дисперсиями  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ .

# Гипотеза о разнице математических ожиданий

## Формулировка

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений с конечными математическими ожиданиями  $\mu_X, \mu_Y$  и дисперсиями  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ .
- При больших  $n \geq 30$  и  $m \geq 30$  на уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}_X^2/n + \hat{\sigma}_Y^2/m}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

# Гипотеза о разнице математических ожиданий

## Формулировка

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений с конечными математическими ожиданиями  $\mu_X, \mu_Y$  и дисперсиями  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ .
- При больших  $n \geq 30$  и  $m \geq 30$  на уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}_X^2/n + \hat{\sigma}_Y^2/m}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через  $z_q$  обозначая квантиль уровня  $q$  стандартного нормального распределения:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \mu_X < \mu_Y$	$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$	$H_1 : \mu_X > \mu_Y$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -z_{1-\alpha})$	$(-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$\Phi(T(x))$	$2 \min(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x)))$	$1 - \Phi(T(x))$

# Гипотеза о разнице математических ожиданий

## Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

# Гипотеза о разнице математических ожиданий

## Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ , где  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .



# Гипотеза о разнице математических ожиданий

## Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ , где  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и  $\alpha = 0.01$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.995} \approx 2.58$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$ .

# Гипотеза о разнице математических ожиданий

## Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ , где  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и  $\alpha = 0.01$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.995} \approx 2.58$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$ .
- Так как  $n = m = 100$ ,  $\bar{x}_{100} = 5$ ,  $\bar{y}_{100} = 6$ ,  $\hat{\sigma}_X^2(x) = 9$  и  $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 7$ , то  $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{9/100+7/100}} = -2.5$ .

# Гипотеза о разнице математических ожиданий

## Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ , где  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и  $\alpha = 0.01$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.995} \approx 2.58$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$ .
- Так как  $n = m = 100$ ,  $\bar{x}_{100} = 5$ ,  $\bar{y}_{100} = 6$ ,  $\hat{\sigma}_X^2(x) = 9$  и  $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 7$ , то  $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{9/100+7/100}} = -2.5$ .
- В силу того, что  $-2.5 \notin (-\infty, -2.58)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 1%-м уровне значимости.

# Гипотеза о разнице математических ожиданий

## Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ , где  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и  $\alpha = 0.01$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.995} \approx 2.58$ , откуда получаем критическую область  $T_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$ .
- Так как  $n = m = 100$ ,  $\bar{x}_{100} = 5$ ,  $\bar{y}_{100} = 6$ ,  $\hat{\sigma}_X^2(x) = 9$  и  $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 7$ , то  $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{9/100+7/100}} = -2.5$ .
- В силу того, что  $-2.5 \notin (-\infty, -2.58)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 1%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = 2 \min(\Phi(-2.5), 1 - \Phi(-2.5)) \approx 2 \min(0.0062, 0.9938) = 2 \times 0.0062 = 0.0124$$

Поскольку p-value = 0.0124, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 1.24%, например, на 5%-м (1%-м).

# Гипотеза о доле

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0, 1)$ .

# Гипотеза о доле

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0, 1)$ .
- При  $n \geq 30$  на уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : p = p_0$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

# Гипотеза о доле

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0, 1)$ .
- При  $n \geq 30$  на уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : p = p_0$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через  $z_q$  обозначая квантиль уровня  $q$  стандартного нормального распределения:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p \neq p_0$	$H_1 : p > p_0$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -z_{1-\alpha})$	$(-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$\Phi(T(x))$	$2 \min(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x)))$	$1 - \Phi(T(x))$

# Гипотеза о доле

## Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите  $p$ -value теста.



# Гипотеза о доле

## Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : p = 0.5$  и  $H_1 : p > 0.5$ , где  $X_1 \sim Ber(p)$ .

# Гипотеза о доле

## Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : p = 0.5$  и  $H_1 : p > 0.5$ , где  $X_1 \sim Ber(p)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.2$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.8} \approx 0.84$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$ .

# Гипотеза о доле

## Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : p = 0.5$  и  $H_1 : p > 0.5$ , где  $X_1 \sim Ber(p)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.2$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.8} \approx 0.84$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$ .
- Так как  $\bar{x}_{100} = 60/100 = 0.6$  то  $T(x) = \frac{(0.6-0.5)}{\sqrt{0.5(1-0.5)/100}} = 2$ .

# Гипотеза о доле

## Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : p = 0.5$  и  $H_1 : p > 0.5$ , где  $X_1 \sim Ber(p)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.2$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.8} \approx 0.84$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$ .
- Так как  $\bar{x}_{100} = 60/100 = 0.6$  то  $T(x) = \frac{(0.6-0.5)}{\sqrt{0.5(1-0.5)/100}} = 2$ .
- В силу того, что  $2 \in (0.84, \infty)$ , нулевая гипотеза отвергается на 20%-м уровне значимости.

# Гипотеза о доле

## Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : p = 0.5$  и  $H_1 : p > 0.5$ , где  $X_1 \sim Ber(p)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.2$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.8} \approx 0.84$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$ .
- Так как  $\bar{x}_{100} = 60/100 = 0.6$  то  $T(x) = \frac{(0.6-0.5)}{\sqrt{0.5(1-0.5)/100}} = 2$ .
- В силу того, что  $2 \in (0.84, \infty)$ , нулевая гипотеза отвергается на 20%-м уровне значимости.
- Наконец,  $p\text{-value} = 1 - \Phi(2) \approx 0.023$ , а значит нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 2.3%, например, на 25%-м (1%-м).

# Гипотеза о разности долей

## Формулировка

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений Бернулли с параметрами  $p_X, p_Y \in (0, 1)$ .

# Гипотеза о разности долей

## Формулировка

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений Бернулли с параметрами  $p_X, p_Y \in (0, 1)$ .
- При  $n \geq 30$  и  $m \geq 30$  на уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : p_X = p_Y$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{Z_{n,m}(1 - Z_{n,m})(1/n + 1/m)}}, \quad Z_{n,m} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{j=1}^m Y_j}{n + m}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

# Гипотеза о разности долей

## Формулировка

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений Бернулли с параметрами  $p_X, p_Y \in (0, 1)$ .
- При  $n \geq 30$  и  $m \geq 30$  на уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : p_X = p_Y$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{Z_{n,m}(1 - Z_{n,m})(1/n + 1/m)}}, \quad Z_{n,m} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{j=1}^m Y_j}{n + m}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через  $z_q$  обозначая квантиль уровня  $q$  стандартного нормального распределения:

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : p_X < p_Y$	$H_1 : p_X \neq p_Y$	$H_1 : p_X > p_Y$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -z_{1-\alpha})$	$(-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$\Phi(T(x))$	$2 \min(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x)))$	$1 - \Phi(T(x))$



# Гипотеза о разности долей

## Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

# Гипотеза о разности долей

## Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : p_X = p_Y$  и  $H_1 : p_X < p_Y$ , где  $X_1 \sim Ber(p_X)$  и  $Y_1 \sim Ber(p_Y)$ .

# Гипотеза о разности долей

## Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : p_X = p_Y$  и  $H_1 : p_X < p_Y$ , где  $X_1 \sim Ber(p_X)$  и  $Y_1 \sim Ber(p_Y)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.95} \approx 1.65$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$ .

# Гипотеза о разности долей

## Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : p_X = p_Y$  и  $H_1 : p_X < p_Y$ , где  $X_1 \sim Ber(p_X)$  и  $Y_1 \sim Ber(p_Y)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.95} \approx 1.65$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$ .
- Так как  $\bar{x}_{100} = 70/100 = 0.7$ ,  $\bar{y}_{225} = 180/225 = 0.8$  и  $z_{100,225} = (70 + 180)/(100 + 225) \approx 0.77$ , то  $T(x) = \frac{(0.7-0.8)}{\sqrt{0.77(1-0.77)(1/100+1/225)}} \approx -1.98$ .

# Гипотеза о разности долей

## Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : p_X = p_Y$  и  $H_1 : p_X < p_Y$ , где  $X_1 \sim Ber(p_X)$  и  $Y_1 \sim Ber(p_Y)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.95} \approx 1.65$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$ .
- Так как  $\bar{x}_{100} = 70/100 = 0.7$ ,  $\bar{y}_{225} = 180/225 = 0.8$  и  $z_{100,225} = (70 + 180)/(100 + 225) \approx 0.77$ , то  $T(x) = \frac{(0.7-0.8)}{\sqrt{0.77(1-0.77)(1/100+1/225)}} \approx -1.98$ .
- В силу того, что  $-1.98 \in (-\infty, -1.65)$ , нулевая гипотеза отвергается на 5%-м уровне значимости.

# Гипотеза о разности долей

## Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : p_X = p_Y$  и  $H_1 : p_X < p_Y$ , где  $X_1 \sim \text{Ber}(p_X)$  и  $Y_1 \sim \text{Ber}(p_Y)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $z_{0.95} \approx 1.65$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$ .
- Так как  $\bar{x}_{100} = 70/100 = 0.7$ ,  $\bar{y}_{225} = 180/225 = 0.8$  и  $z_{100,225} = (70 + 180)/(100 + 225) \approx 0.77$ , то  $T(x) = \frac{(0.7-0.8)}{\sqrt{0.77(1-0.77)(1/100+1/225)}} \approx -1.98$ .
- В силу того, что  $-1.98 \in (-\infty, -1.65)$ , нулевая гипотеза отвергается на 5%-м уровне значимости.
- Наконец,  $p\text{-value} = \Phi(-1.98) \approx 0.024$ , а значит нулевая гипотеза на любом уровне значимости, больше (меньше) 2.4%, например, на 5%-м (1%-м).

# Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  с неизвестными параметрами.

# Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2}, \quad T(X)|H_0 \sim \chi^2(n-1)$$



# Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

## Формулировка

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2}, \quad T(X)|H_0 \sim \chi^2(n-1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через  $\chi_{n-1,q}^2$  обозначая квантиль уровня  $q$  распределения  $\chi^2(n-1)$ :

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(0, \chi_{n-1,\alpha}^2)$	$(0, \chi_{n-1,\alpha/2}^2) \cup (\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2, \infty)$	$(\chi_{n-1,1-\alpha}^2, \infty)$
p-value	$F_{\chi^2(n-1)}(T(x))$	$2 \min(F_{\chi^2(n-1)}(T(x)), 1 - F_{\chi^2(n-1)}(T(x)))$	$1 - F_{\chi^2(n-1)}(T(x))$

# Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

## Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

# Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

## Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \sigma^2 = 20$  и  $H_1 : \sigma^2 \neq 20$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

# Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

## Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \sigma^2 = 20$  и  $H_1 : \sigma^2 \neq 20$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантили  $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$  и  $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$ .

# Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

## Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \sigma^2 = 20$  и  $H_1 : \sigma^2 \neq 20$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантили  $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$  и  $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$ , откуда получаем критическую область  $T_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$ .
- Так как  $\hat{\sigma}_3^2(x) = 21$ , то  $T(x) = \frac{(3-1) \times 21}{20} \approx 2.1$ .

# Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

## Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \sigma^2 = 20$  и  $H_1 : \sigma^2 \neq 20$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантили  $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$  и  $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$ .
- Так как  $\hat{\sigma}_3^2(x) = 21$ , то  $T(x) = \frac{(3-1) \times 21}{20} \approx 2.1$ .
- В силу того, что  $2.1 \notin (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.

# Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

## Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \sigma^2 = 20$  и  $H_1 : \sigma^2 \neq 20$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантили  $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$  и  $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$ , откуда получаем критическую область  $T_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$ .
- Так как  $\hat{\sigma}_3^2(x) = 21$ , то  $T(x) = \frac{(3-1) \times 21}{20} \approx 2.1$ .
- В силу того, что  $2.1 \notin (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = 2 \min(F_{\chi^2(2)}(2.1), 1 - F_{\chi^2(2)}(2.1)) \approx 2 \min(0.65, 0.35) = 0.7$$

Поскольку p-value = 0.7, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 70%, например, на 80%-м (50%-м).

# Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

## Формулировка

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  с неизвестными параметрами.



# Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

## Формулировка

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}, \quad T(X)|H_0 \sim F(n-1, m-1)$$

# Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

## Формулировка

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}, \quad T(X)|H_0 \sim F(n-1, m-1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через  $F_{n-1, m-1}^q$  обозначая квантиль уровня  $q$  распределения  $F(n-1, m-1)$ :

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$	$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$	$H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(0, F_{n-1, m-1}^\alpha)$	$(0, F_{n-1, m-1}^{\alpha/2}) \cup (F_{n-1, m-1}^{1-\alpha/2}, \infty)$	$(F_{n-1, m-1}^{1-\alpha}, \infty)$
p-value	$F_{F(n-1, m-1)}(T(x))$	$2 \min(F_{F(n-1, m-1)}(T(x)), 1 - F_{F(n-1, m-1)}(T(x)))$	$1 - F_{F(n-1, m-1)}(T(x))$

# Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

## Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

# Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

## Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  и  $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ .

# Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

## Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  и  $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $F_{6-1, 11-1}^{0.9} \approx 2.52$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.9} = (2.52, \infty)$ .

# Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

## Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  и  $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $F_{6-1, 11-1}^{0.9} \approx 2.52$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.9} = (2.52, \infty)$ .
- Так как  $\hat{\sigma}_X^2(x) = 20$ , и  $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 10$ , то  $T(x) = 20/10 = 2$ .

# Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

## Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  и  $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $F_{6-1, 11-1}^{0.9} \approx 2.52$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.9} = (2.52, \infty)$ .
- Так как  $\hat{\sigma}_X^2(x) = 20$ , и  $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 10$ , то  $T(x) = 20/10 = 2$ .
- В силу того, что  $2 \notin (2.52, \infty)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.

# Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

## Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  и  $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $F_{6-1, 11-1}^{0.9} \approx 2.52$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.9} = (2.52, \infty)$ .
- Так как  $\hat{\sigma}_X^2(x) = 20$ , и  $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 10$ , то  $T(x) = 20/10 = 2$ .
- В силу того, что  $2 \notin (2.52, \infty)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, поскольку  $p\text{-value} = 1 - F_{F(5,10)}(2) = 0.164$ , то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 16.4%, например, на 20%-м (5%-м).



# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений с математическими ожиданиями  $\mu_X, \mu_Y$  и равными дисперсиями  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ .

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений с математическими ожиданиями  $\mu_X, \mu_Y$  и равными дисперсиями  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ .
- На уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 (1/n + 1/m)}}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_X^2 + (m-1)\hat{\sigma}_Y^2}{n+m-2}, \quad T(X)|H_0 \sim t(n+m-2)$$

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений с математическими ожиданиями  $\mu_X, \mu_Y$  и равными дисперсиями  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ .
- На уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 (1/n + 1/m)}}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_X^2 + (m-1)\hat{\sigma}_Y^2}{n+m-2}, \quad T(X)|H_0 \sim t(n+m-2)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через  $t_{n+m-2,q}$  обозначая квантиль уровня  $q$  распределения  $t(n+m-2)$ :

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \mu_X < \mu_Y$	$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$	$H_1 : \mu_X > \mu_Y$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -t_{n+m-2,1-\alpha})$	$(-\infty, -t_{n+m-2,1-\alpha/2}) \cup (t_{n+m-2,1-\alpha/2}, \infty)$	$(t_{n+m-2,1-\alpha}, \infty)$
p-value	$F_{t(n+m-2)}(T(x))$	$2 \min(F_{t(n+m-2)}(T(x)), 1 - F_{t(n+m-2)}(T(x)))$	$1 - F_{t(n+m-2)}(T(x))$

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  и  $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ .

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  и  $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{3+2-2, 0.95} \approx 2.35$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$ .

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  и  $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{3+2-2, 0.95} \approx 2.35$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$ .
- Так как  $\bar{x}_3 = 3$ ,  $\bar{y}_2 = 3.5$ ,  $\hat{\sigma}_X^2(x) = 1$ ,  $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 4.5$  и  $\hat{\sigma}^2 = 13/6$ , то  $T(x) = \frac{(3-3.5)}{\sqrt{(13/6) \times (1/3 + 1/2)}} \approx -0.372$ .

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  и  $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{3+2-2, 0.95} \approx 2.35$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$ .
- Так как  $\bar{x}_3 = 3$ ,  $\bar{y}_2 = 3.5$ ,  $\hat{\sigma}_X^2(x) = 1$ ,  $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 4.5$  и  $\hat{\sigma}^2 = 13/6$ , то  $T(x) = \frac{(3-3.5)}{\sqrt{(13/6) \times (1/3 + 1/2)}} \approx -0.372$ .
- В силу того, что  $-0.372 \notin (2.35, \infty)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.



# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ , где  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  и  $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ .
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и  $\alpha = 0.05$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{3+2-2, 0.95} \approx 2.35$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$ .
- Так как  $\bar{x}_3 = 3$ ,  $\bar{y}_2 = 3.5$ ,  $\hat{\sigma}_X^2(x) = 1$ ,  $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 4.5$  и  $\hat{\sigma}^2 = 13/6$ , то  $T(x) = \frac{(3-3.5)}{\sqrt{(13/6) \times (1/3 + 1/2)}} \approx -0.372$ .
- В силу того, что  $-0.372 \notin (2.35, \infty)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = 1 - F_{t(3)}(-0.372) \approx 0.633$$

Поскольку p-value = 0.633, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 63.3%, например, на 80%-м (60%-м).

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных объемах

## Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , такие, что  $X - Y$  является выборкой из нормального распределения. Обозначим  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных объемах

## Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , такие, что  $X - Y$  является выборкой из нормального распределения. Обозначим  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .
- На уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_n}{\sqrt{\hat{\sigma}_{X-Y}^2/n}}, \quad \hat{\sigma}_{X-Y}^2 \text{ считается по выборке } X - Y, \quad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных объемах

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , такие, что  $X - Y$  является выборкой из нормального распределения. Обозначим  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .
- На уровне значимости  $\alpha$  гипотезу  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью  $\mathcal{T}_\alpha$ :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_n}{\sqrt{\hat{\sigma}_{X-Y}^2/n}}, \quad \hat{\sigma}_{X-Y}^2 \text{ считается по выборке } X - Y, \quad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через  $t_{n-1,q}$  обозначая квантиль уровня  $q$  распределения  $t(n-1)$ :

Тип	Левосторонняя	Двухсторонняя	Правосторонняя
Гипотеза	$H_1 : \mu_X < \mu_Y$	$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$	$H_1 : \mu_X > \mu_Y$
$\mathcal{T}_\alpha$	$(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha})$	$(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha/2}) \cup (t_{n-1,1-\alpha/2}, \infty)$	$(t_{n-1,1-\alpha}, \infty)$
p-value	$F_{t(n-1)}(T(x))$	$2 \min(F_{t(n-1)}(T(x)), 1 - F_{t(n-1)}(T(x)))$	$1 - F_{t(n-1)}(T(x))$

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ , где  $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_{X-Y}^2)$ .

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ , где  $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_{X-Y}^2)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{2-1,0.9} \approx 3.08$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$ .

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ , где  $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_{X-Y}^2)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{2-1, 0.9} \approx 3.08$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$ .
- Так как  $x - y = (-60, 10)$ ,  $\bar{x}_2 - \bar{y}_2 = -25$  и  $\hat{\sigma}_{X-Y}^2 = 2450$ , то  $T(x) = \frac{-25}{\sqrt{2450/2}} \approx -0.71$ .



# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ , где  $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_{X-Y}^2)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{2-1, 0.9} \approx 3.08$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$ .
- Так как  $x - y = (-60, 10)$ ,  $\bar{x}_2 - \bar{y}_2 = -25$  и  $\hat{\sigma}_{X-Y}^2 = 2450$ , то  $T(x) = \frac{-25}{\sqrt{2450/2}} \approx -0.71$ .
- В силу того, что  $-0.71 \notin (-\infty, -3.08)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.

# Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

## Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы:  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  и  $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ , где  $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_{X-Y}^2)$ .
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и  $\alpha = 0.1$ , то необходимо рассмотреть квантиль  $t_{2-1, 0.9} \approx 3.08$ , откуда получаем критическую область  $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$ .
- Так как  $x - y = (-60, 10)$ ,  $\bar{x}_2 - \bar{y}_2 = -25$  и  $\hat{\sigma}_{X-Y}^2 = 2450$ , то  $T(x) = \frac{-25}{\sqrt{2450/2}} \approx -0.71$ .
- В силу того, что  $-0.71 \notin (-\infty, -3.08)$ , нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = F_{t(1)}(-0.71) \approx 0.3$$

Поскольку p-value = 0.3, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 30%, например, на 90%-м (20%-м).