

# Теория Вероятностей и Статистика

## Асимптотические доверительные интервалы

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021-2022

# Асимптотические доверительные интервалы

## Мотивация

- Для построения доверительных интервалов мы брали за основу некоторые статистики.

# Асимптотические доверительные интервалы

## Мотивация

- Для построения доверительных интервалов мы брали за основу некоторые статистики.
- Зачастую, найти распределение этих статистик может оказаться весьма затруднительным.

# Асимптотические доверительные интервалы

## Мотивация

- Для построения доверительных интервалов мы брали за основу некоторые статистики.
- Зачастую, найти распределение этих статистик может оказаться весьма затруднительным.
- Однако, асимптотическое распределение этих статистик может иметь достаточно простой вид.

# Асимптотические доверительные интервалы

## Мотивация

- Для построения доверительных интервалов мы брали за основу некоторые статистики.
- Зачастую, найти распределение этих статистик может оказаться весьма затруднительным.
- Однако, асимптотическое распределение этих статистик может иметь достаточно простой вид.
- Рассмотрим асимптотические доверительные интервалы, то есть построенные с помощью асимптотического распределения статистик.

# Асимптотические доверительные интервалы

## Мотивация

- Для построения доверительных интервалов мы брали за основу некоторые статистики.
- Зачастую, найти распределение этих статистик может оказаться весьма затруднительным.
- Однако, асимптотическое распределение этих статистик может иметь достаточно простой вид.
- Рассмотрим асимптотические доверительные интервалы, то есть построенные с помощью асимптотического распределения статистик.
- Применение асимптотических доверительных интервалов, как правило, требует выборок больших объемов  $n \geq 100$ . Однако, для простоты учебных расчетов мы будем строить асимптотические доверительные интервалы и по малым выборкам.

# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с конечными математическим ожиданием  $E(X_1) = \mu$  и дисперсией  $Var(X_1) = \sigma^2$ .

# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с конечными математическим ожиданием  $E(X_1) = \mu$  и дисперсией  $Var(X_1) = \sigma^2$ .
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$



# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с конечными математическим ожиданием  $E(X_1) = \mu$  и дисперсией  $Var(X_1) = \sigma^2$ .
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Поскольку  $\hat{\sigma} \xrightarrow{d} \sigma$ , то  $\sigma/\hat{\sigma} \xrightarrow{d} 1$ , а значит, используя теорему Slutsky, имеем:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \times 1 \implies \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с конечными математическим ожиданием  $E(X_1) = \mu$  и дисперсией  $Var(X_1) = \sigma^2$ .
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Поскольку  $\hat{\sigma} \xrightarrow{d} \sigma$ , то  $\sigma/\hat{\sigma} \xrightarrow{d} 1$ , а значит, используя теорему Slutsky, имеем:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \times 1 \implies \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Используя асимптотическое распределение соответствующей статистики получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\mu$ :

$$\left[ \bar{X}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \right]$$

# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с конечными математическим ожиданием  $E(X_1) = \mu$  и дисперсией  $Var(X_1) = \sigma^2$ .
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Поскольку  $\hat{\sigma} \xrightarrow{d} \sigma$ , то  $\sigma/\hat{\sigma} \xrightarrow{d} 1$ , а значит, используя теорему Slutsky, имеем:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \times 1 \implies \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Используя асимптотическое распределение соответствующей статистики получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\mu$ :

$$\left[ \bar{X}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \right]$$

**Пример:** имеется выборка из равномерного распределения и с реализацией  $x = (0, 1, 5)$ . Найдём реализацию асимптотического 95%-го доверительного интервала для математического ожидания наблюдения.

# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с конечными математическим ожиданием  $E(X_1) = \mu$  и дисперсией  $Var(X_1) = \sigma^2$ .
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Поскольку  $\hat{\sigma} \xrightarrow{d} \sigma$ , то  $\sigma/\hat{\sigma} \xrightarrow{d} 1$ , а значит, используя теорему Slutsky, имеем:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \times 1 \implies \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Используя асимптотическое распределение соответствующей статистики получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\mu$ :

$$\left[ \bar{X}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \right]$$

**Пример:** имеется выборка из равномерного распределения и с реализацией  $x = (0, 1, 5)$ . Найдем реализацию асимптотического 95%-го доверительного интервала для математического ожидания наблюдения. Поскольку  $\bar{x}_3 = (0 + 1 + 5)/3 = 2$ ,  $\hat{\sigma}_3^2(x) = ((0 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (5 - 2)^2) / (3 - 1) = 7$  и  $z_{0.975} \approx 1.96$ , то:

# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с конечными математическим ожиданием  $E(X_1) = \mu$  и дисперсией  $Var(X_1) = \sigma^2$ .
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Поскольку  $\hat{\sigma} \xrightarrow{d} \sigma$ , то  $\sigma/\hat{\sigma} \xrightarrow{d} 1$ , а значит, используя теорему Slutsky, имеем:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \times 1 \implies \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Используя асимптотическое распределение соответствующей статистики получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\mu$ :

$$\left[ \bar{X}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \right]$$

**Пример:** имеется выборка из равномерного распределения и с реализацией  $x = (0, 1, 5)$ . Найдем реализацию асимптотического 95%-го доверительного интервала для математического ожидания наблюдения. Поскольку  $\bar{x}_3 = (0 + 1 + 5)/3 = 2$ ,  $\hat{\sigma}_3^2(x) = ((0 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (5 - 2)^2) / (3 - 1) = 7$  и  $z_{0.975} \approx 1.96$ , то:

$$\left[ 2 - 1.96\sqrt{7/3}, 2 + 1.96\sqrt{7/3} \right] \approx [-1, 5]$$

# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Разница математических ожиданий

- Рассмотрим независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений с конечными математическими ожиданиями  $\mu_X, \mu_Y$  и дисперсиями  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ .

# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Разница математических ожиданий

- Рассмотрим независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений с конечными математическими ожиданиями  $\mu_X, \mu_Y$  и дисперсиями  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ .
- Действуя по аналогии с предыдущим случаем получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$ :

$$\left[ \bar{X}_n - \bar{Y}_m - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}, \bar{X}_n - \bar{Y}_m + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}} \right]$$

# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Разница математических ожиданий

- Рассмотрим независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений с конечными математическими ожиданиями  $\mu_X, \mu_Y$  и дисперсиями  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ .
- Действуя по аналогии с предыдущим случаем получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$ :

$$\left[ \bar{X}_n - \bar{Y}_m - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}, \bar{X}_n - \bar{Y}_m + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}} \right]$$

**Пример:** имеются две независимые выборки: одна из равномерного распределения, а другая – из некоторого распределения с конечными математическими ожиданием и дисперсией. Реализации данных выборок  $x = (0, 1, 5)$  и  $y = (1, 3)$  соответственно. Найдём реализацию 95%-го доверительного интервала для разницы математических ожиданий.



# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Разница математических ожиданий

- Рассмотрим независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений с конечными математическими ожиданиями  $\mu_X, \mu_Y$  и дисперсиями  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ .
- Действуя по аналогии с предыдущим случаем получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$ :

$$\left[ \bar{X}_n - \bar{Y}_m - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}, \bar{X}_n - \bar{Y}_m + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}} \right]$$

**Пример:** имеются две независимые выборки: одна из равномерного распределения, а другая – из некоторого распределения с конечными математическими ожиданием и дисперсией. Реализации данных выборок  $x = (0, 1, 5)$  и  $y = (1, 3)$  соответственно. Найдём реализацию 95%-го доверительного интервала для разницы математических ожиданий. Поскольку  $\bar{x}_3 = 2$ ,  $\hat{\sigma}_3^2(x) = 7$ ,  $\bar{y}_2 = 2$ ,  $\hat{\sigma}_2^2(y) = 2$  и  $z_{0.975} \approx 1.96$ , то искомая реализация:

# Асимптотические доверительные интервалы для среднего

## Разница математических ожиданий

- Рассмотрим независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений с конечными математическими ожиданиями  $\mu_X, \mu_Y$  и дисперсиями  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ .
- Действуя по аналогии с предыдущим случаем получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$ :

$$\left[ \bar{X}_n - \bar{Y}_m - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}, \bar{X}_n - \bar{Y}_m + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}} \right]$$

**Пример:** имеются две независимые выборки: одна из равномерного распределения, а другая – из некоторого распределения с конечными математическими ожиданием и дисперсией. Реализации данных выборок  $x = (0, 1, 5)$  и  $y = (1, 3)$  соответственно. Найдём реализацию 95%-го доверительного интервала для разницы математических ожиданий. Поскольку  $\bar{x}_3 = 2$ ,  $\hat{\sigma}_3^2(x) = 7$ ,  $\bar{y}_2 = 2$ ,  $\hat{\sigma}_2^2(y) = 2$  и  $z_{0.975} \approx 1.96$ , то искомая реализация:

$$\left[ 2 - 2 - 1.96 \sqrt{7/3 + 2/2}, 2 - 2 + 1.96 \sqrt{7/3 + 2/2} \right] \approx [-3.58, 3.58]$$

# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Параметр

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .

# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Параметр

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .
- Вследствие асимптотической нормальности ММП оценок и теоремы Слуцкого получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Параметр

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .
- Вследствие асимптотической нормальности ММП оценок и теоремы Слущкого получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Действуя стандартным образом получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\theta$ :

$$\left[ \hat{\theta}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}}, \hat{\theta}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}} \right]$$

# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Параметр

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .
- Вследствие асимптотической нормальности ММП оценок и теоремы Слуцкого получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Действуя стандартным образом получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\theta$ :

$$\left[ \hat{\theta}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}}, \hat{\theta}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}} \right]$$

**Пример:** имеется выборка объемом в  $n = 100$  наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего  $\bar{x}_{100} = 0.2$ . Построим 99%-й доверительный интервал для  $\lambda$ .

# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Параметр

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .
- Вследствие асимптотической нормальности ММП оценок и теоремы Слуцкого получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Действуя стандартным образом получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\theta$ :

$$\left[ \hat{\theta}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}}, \hat{\theta}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}} \right]$$

**Пример:** имеется выборка объемом в  $n = 100$  наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего  $\bar{x}_{100} = 0.2$ . Построим 99%-й доверительный интервал для  $\lambda$ . Поскольку  $\hat{\lambda}_{100}(x) = 1/\bar{x}_{100} = 1/0.2 = 5$ ,  $i(\lambda) = 1/\lambda^2$ ,  $i(\hat{\lambda}_{100}(x)) = 1/5^2 = 0.04$ ,  $z_{0.995} \approx 2.58$ , то искомая реализация имеет вид:

# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Параметр

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .
- Вследствие асимптотической нормальности ММП оценок и теоремы Слуцкого получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Действуя стандартным образом получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\theta$ :

$$\left[ \hat{\theta}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}}, \hat{\theta}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}} \right]$$

**Пример:** имеется выборка объемом в  $n = 100$  наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего  $\bar{x}_{100} = 0.2$ . Построим 99%-й доверительный интервал для  $\lambda$ . Поскольку  $\hat{\lambda}_{100}(x) = 1/\bar{x}_{100} = 1/0.2 = 5$ ,  $i(\lambda) = 1/\lambda^2$ ,  $i(\hat{\lambda}_{100}(x)) = 1/5^2 = 0.04$ ,  $z_{0.995} \approx 2.58$ , то искомая реализация имеет вид:

$$\left[ 5 - 2.58 \sqrt{1/(100 \times 0.04)}, 5 + 2.58 \sqrt{1/(100 \times 0.04)} \right] = [3.71, 6.29]$$



# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Функция от параметра

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .

# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Функция от параметра

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .
- При монотонной дифференцируемой функции  $g(\cdot)$ , применяя дельта метод, получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)/g'(\hat{\theta}_n)^2} \left( g(\hat{\theta}_n) - g(\theta) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Функция от параметра

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .
- При монотонной дифференцируемой функции  $g(\cdot)$ , применяя дельта метод, получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)/g'(\hat{\theta}_n)^2} \left( g(\hat{\theta}_n) - g(\theta) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\theta$ :

$$\left[ g(\hat{\theta}_n) - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}}, g(\hat{\theta}_n) + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}} \right]$$

# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Функция от параметра

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .
- При монотонной дифференцируемой функции  $g(\cdot)$ , применяя дельта метод, получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)/g'(\hat{\theta}_n)^2} \left( g(\hat{\theta}_n) - g(\theta) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\theta$ :

$$\left[ g(\hat{\theta}_n) - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}}, g(\hat{\theta}_n) + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}} \right]$$

**Пример:** имеется выборка объемом в  $n = 100$  наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего  $\bar{x}_{100} = 0.2$ . Построим 99%-й доверительный интервал для дисперсии  $Var(X_1) = 1/\lambda^2$ .

# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Функция от параметра

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .
- При монотонной дифференцируемой функции  $g(\cdot)$ , применяя дельта метод, получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)/g'(\hat{\theta}_n)^2} \left( g(\hat{\theta}_n) - g(\theta) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\theta$ :

$$\left[ g(\hat{\theta}_n) - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}}, g(\hat{\theta}_n) + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}} \right]$$

**Пример:** имеется выборка объемом в  $n = 100$  наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего  $\bar{x}_{100} = 0.2$ . Построим 99%-й доверительный интервал для дисперсии  $Var(X_1) = 1/\lambda^2$ . Поскольку  $g(\lambda) = Var(X_1) = 1/\lambda^2$ ,  $\hat{\lambda}_{100}(x) = 5$ ,  $i(\hat{\lambda}_{100}(x)) = 0.04$ ,  $g(\hat{\lambda}_{100}) = 1/5^2 = 0.04$ ,  $g'(\lambda) = -2/\lambda^3$ ,  $g'(\hat{\lambda}_{100}(x)) = -2/5^3 = -0.016$  и  $z_{0.995} \approx 2.58$ , то искомая реализация имеет вид:

# Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

## Функция от параметра

- Имеется ММП оценка  $\hat{\theta}_n$  параметр  $\theta$ , а также определена информация Фишера  $i(\theta)$ .
- При монотонной дифференцируемой функции  $g(\cdot)$ , применяя дельта метод, получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)/g'(\hat{\theta}_n)^2} \left( g(\hat{\theta}_n) - g(\theta) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $\theta$ :

$$\left[ g(\hat{\theta}_n) - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}}, g(\hat{\theta}_n) + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}} \right]$$

**Пример:** имеется выборка объемом в  $n = 100$  наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего  $\bar{x}_{100} = 0.2$ . Построим 99%-й доверительный интервал для дисперсии  $Var(X_1) = 1/\lambda^2$ . Поскольку  $g(\lambda) = Var(X_1) = 1/\lambda^2$ ,  $\hat{\lambda}_{100}(x) = 5$ ,  $i(\hat{\lambda}_{100}(x)) = 0.04$ ,  $g(\hat{\lambda}_{100}) = 1/5^2 = 0.04$ ,  $g'(\lambda) = -2/\lambda^3$ ,  $g'(\hat{\lambda}_{100}(x)) = -2/5^3 = -0.016$  и  $z_{0.995} \approx 2.58$ , то искомая реализация имеет вид:

$$\left[ 0.04 - 2.58 \sqrt{\frac{(-0.016)^2}{100 \times 0.04}}, 0.04 + 2.58 \sqrt{\frac{(-0.016)^2}{100 \times 0.04}} \right] \approx [0.019, 0.061]$$

# Асимптотические доверительные интервалы

## Дополнительный пример

Каждый день кот ученый мяукает до тех пор, пока его не покормят. Вероятность того, что кота покормят после очередного 'мяу', не зависит от числа изданных ранее 'мяу' и всегда равняется  $p \in (0, 1)$ . Ученый кот собрал выборку объема  $n = 2500$  из количества мяуканий, которые ему пришлось произвести прежде, чем его покормили. Реализации выборочного среднего и исправленной выборочной дисперсии оказались равны 1.25 и 0.3 соответственно. Помогите ученому коту найти реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала:

# Асимптотические доверительные интервалы

## Дополнительный пример

Каждый день кот ученый мяукает до тех пор, пока его не покормят. Вероятность того, что кота покормят после очередного 'мяу', не зависит от числа изданных ранее 'мяу' и всегда равняется  $p \in (0, 1)$ . Ученый кот собрал выборку объема  $n = 2500$  из количества мяуканий, которые ему пришлось произвести прежде, чем его покормили. Реализации выборочного среднего и исправленной выборочной дисперсии оказались равны 1.25 и 0.3 соответственно. Помогите ученому коту найти реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала:

- Математического ожидания числа мяуканий, предшествующих получению питания.
- Вероятности того, что после очередного мяуканья ученый кот получит питание.
- Вероятности того, что кота покормят раньше, чем он успеет мяукнуть трижды.



# Асимптотические доверительные интервалы

## Дополнительный пример

Каждый день кот ученый мяукает до тех пор, пока его не покормят. Вероятность того, что кота покормят после очередного 'мяу', не зависит от числа изданных ранее 'мяу' и всегда равняется  $p \in (0, 1)$ . Ученый кот собрал выборку объема  $n = 2500$  из количества мяуканий, которые ему пришлось произвести прежде, чем его покормили. Реализации выборочного среднего и исправленной выборочной дисперсии оказались равны 1.25 и 0.3 соответственно. Помогите ученому коту найти реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала:

- Математического ожидания числа мяуканий, предшествующих получению питания.
- Вероятности того, что после очередного мяуканья ученый кот получит питание.
- Вероятности того, что кота покормят раньше, чем он успеет мяукнуть трижды.

**Решение:**

- $\left[ 1.25 - 1.645\sqrt{0.3/2500}, 1.25 + 1.645\sqrt{0.3/2500} \right] \approx [1.23, 1.27]$

# Асимптотические доверительные интервалы

## Дополнительный пример

Каждый день кот ученый мяукает до тех пор, пока его не покормят. Вероятность того, что кота покормят после очередного 'мяу', не зависит от числа изданных ранее 'мяу' и всегда равняется  $p \in (0, 1)$ . Ученый кот собрал выборку объема  $n = 2500$  из количества мяуканий, которые ему пришлось произвести прежде, чем его покормили. Реализации выборочного среднего и исправленной выборочной дисперсии оказались равны 1.25 и 0.3 соответственно. Помогите ученому коту найти реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала:

- Математического ожидания числа мяуканий, предшествующих получению питания.
- Вероятности того, что после очередного мяуканья ученый кот получит питание.
- Вероятности того, что кота покормят раньше, чем он успеет мяукнуть трижды.

**Решение:**

- $\left[ 1.25 - 1.645\sqrt{0.3/2500}, 1.25 + 1.645\sqrt{0.3/2500} \right] \approx [1.23, 1.27]$
- Используя ММП получаем  $\hat{p}_n(x) = 1/1.25 = 0.8$  и  $i(\hat{p}_n(x)) = 1/((1 - 0.8)0.8^2) = 7.8125$ , откуда:

$$\left[ 0.8 - 1.645/\sqrt{2500 \times 7.8125}, 0.8 + 1.645/\sqrt{2500 \times 7.8125} \right] = [0.788, 0.812]$$

# Асимптотические доверительные интервалы

## Дополнительный пример

Каждый день кот ученый мяукает до тех пор, пока его не покормят. Вероятность того, что кота покормят после очередного 'мяу', не зависит от числа изданных ранее 'мяу' и всегда равняется  $p \in (0, 1)$ . Ученый кот собрал выборку объема  $n = 2500$  из количества мяуканий, которые ему пришлось произвести прежде, чем его покормили. Реализации выборочного среднего и исправленной выборочной дисперсии оказались равны 1.25 и 0.3 соответственно. Помогите ученому коту найти реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала:

- Математического ожидания числа мяуканий, предшествующих получению питания.
- Вероятности того, что после очередного мяуканья ученый кот получит питание.
- Вероятности того, что кота покормят раньше, чем он успеет мяукнуть трижды.

### Решение:

- $\left[1.25 - 1.645\sqrt{0.3/2500}, 1.25 + 1.645\sqrt{0.3/2500}\right] \approx [1.23, 1.27]$
- Используя ММП получаем  $\hat{p}_n(x) = 1/1.25 = 0.8$  и  $i(\hat{p}_n(x)) = 1/((1 - 0.8)0.8^2) = 7.8125$ , откуда:

$$\left[0.8 - 1.645/\sqrt{2500 \times 7.8125}, 0.8 + 1.645/\sqrt{2500 \times 7.8125}\right] = [0.788, 0.812]$$

- Поскольку  $P(X_1 < 3) = 1 - (1 - p)^2$  и  $P'(X_1 < 3) = 2(1 - p)$ , то:

$$\left[1 - (1 - 0.8)^2 - 1.645\sqrt{\frac{(2(1 - 0.8))^2}{2500 \times 7.8125}}, 1 - (1 - 0.8)^2 + 1.645\sqrt{\frac{(2(1 - 0.8))^2}{2500 \times 7.8125}}\right] = [0.955, 0.965]$$

# Асимптотические доверительные интервалы для доли

## Доля

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0, 1)$ .

# Асимптотические доверительные интервалы для доли

## Доля

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0, 1)$ .
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слущкого получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $p$ :

$$\left[ \bar{X}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}{n}} \right]$$

# Асимптотические доверительные интервалы для доли

Доля

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0, 1)$ .
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слущкого получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $p$ :

$$\left[ \bar{X}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}{n}} \right]$$

**Пример:** по результатам опроса 100 жителей очень большого города оказалось, что половина из них готова поддержать на выборах председателя академии наук кандидатуру ученого кота. Найдем реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для вероятности того, что случайно выбранный житель проголосует за ученого кота (исходя из ЗБЧ она будет приблизительно равняться доле людей, которые за него проголосуют).

# Асимптотические доверительные интервалы для доли

## Доля

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0, 1)$ .
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слущкого получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $p$ :

$$\left[ \bar{X}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}{n}} \right]$$

**Пример:** по результатам опроса 100 жителей очень большого города оказалось, что половина из них готова поддержать на выборах председателя академии наук кандидатуру ученого кота. Найдем реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для вероятности того, что случайно выбранный житель проголосует за ученого кота (исходя из ЗБЧ она будет приблизительно равняться доле людей, которые за него проголосуют). Поскольку  $\bar{x}_{100} = 50/100 = 0.5$  и  $z_{0.975} \approx 1.96$ , то:

# Асимптотические доверительные интервалы для доли

Доля

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения Бернулли с параметром  $p \in (0, 1)$ .
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слущкого получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $p$ :

$$\left[ \bar{X}_n - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}{n}} \right]$$

**Пример:** по результатам опроса 100 жителей очень большого города оказалось, что половина из них готова поддержать на выборах председателя академии наук кандидатуру ученого кота. Найдем реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для вероятности того, что случайно выбранный житель проголосует за ученого кота (исходя из ЗБЧ она будет приблизительно равняться доле людей, которые за него проголосуют).

Поскольку  $\bar{x}_{100} = 50/100 = 0.5$  и  $z_{0.975} \approx 1.96$ , то:

$$\left[ 0.5 - 1.96 \sqrt{\frac{0.5(1 - 0.5)}{100}}, 0.5 + 1.96 \sqrt{\frac{0.5(1 - 0.5)}{100}} \right] = [0.402, 0.598]$$



# Асимптотические доверительные интервалы для доли

## Разница долей

- Рассмотрим независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений Бернулли с параметрами  $p_X \in (0, 1)$  и  $p_Y \in (0, 1)$  соответственно.

# Асимптотические доверительные интервалы для доли

## Разница долей

- Рассмотрим независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений Бернулли с параметрами  $p_X \in (0, 1)$  и  $p_Y \in (0, 1)$  соответственно.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слущкого получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $p_X - p_Y$ :

$$\left[ \bar{X}_n - \bar{Y}_m - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_m(1-\bar{Y}_m)}{m}}, \bar{X}_n - \bar{Y}_m + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_m(1-\bar{Y}_m)}{m}} \right]$$

# Асимптотические доверительные интервалы для доли

## Разница долей

- Рассмотрим независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений Бернулли с параметрами  $p_X \in (0, 1)$  и  $p_Y \in (0, 1)$  соответственно.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слущкого получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $p_X - p_Y$ :

$$\left[ \bar{X}_n - \bar{Y}_m - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_m(1-\bar{Y}_m)}{m}}, \bar{X}_n - \bar{Y}_m + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_m(1-\bar{Y}_m)}{m}} \right]$$

**Пример:** ученый кот и Лаврентий независимо друг от друга изобрели лекарство от лени. Ученый кот испытал свое лекарство на 225 добровольцах, а Лаврентий – на 100. Среди добровольцев ученого кота лениться меньше стали 180 испытуемых, а у Лаврентия – 60%. Найдите реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для разницы в вероятностях успешного действия лекарства ученого кота и Лаврентия.

# Асимптотические доверительные интервалы для доли

## Разница долей

- Рассмотрим независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений Бернулли с параметрами  $p_X \in (0, 1)$  и  $p_Y \in (0, 1)$  соответственно.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Служкого получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $p_X - p_Y$ :

$$\left[ \bar{X}_n - \bar{Y}_m - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_m(1-\bar{Y}_m)}{m}}, \bar{X}_n - \bar{Y}_m + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_m(1-\bar{Y}_m)}{m}} \right]$$

**Пример:** ученый кот и Лаврентий независимо друг от друга изобрели лекарство от лени. Ученый кот испытал свое лекарство на 225 добровольцах, а Лаврентий – на 100. Среди добровольцев ученого кота лениться меньше стали 180 испытуемых, а у Лаврентия – 60%. Найдите реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для разницы в вероятностях успешного действия лекарства ученого кота и Лаврентия. Обратите внимание, что  $\bar{x}_{225} = 180/225 = 0.8$ ,  $\bar{y}_{100} = 0.6$  и  $z_{0.975} \approx 1.96$ , поэтому:

# Асимптотические доверительные интервалы для доли

## Разница долей

- Рассмотрим независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из распределений Бернулли с параметрами  $p_X \in (0, 1)$  и  $p_Y \in (0, 1)$  соответственно.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Служского получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный асимптотический доверительный интервал для  $p_X - p_Y$ :

$$\left[ \bar{X}_n - \bar{Y}_m - z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_m(1-\bar{Y}_m)}{m}}, \bar{X}_n - \bar{Y}_m + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_m(1-\bar{Y}_m)}{m}} \right]$$

**Пример:** ученый кот и Лаврентий независимо друг от друга изобрели лекарство от лени. Ученый кот испытал свое лекарство на 225 добровольцах, а Лаврентий – на 100. Среди добровольцев ученого кота лениться меньше стали 180 испытуемых, а у Лаврентия – 60%. Найдите реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для разницы в вероятностях успешного действия лекарства ученого кота и Лаврентия. Обратим внимание, что  $\bar{x}_{225} = 180/225 = 0.8$ ,  $\bar{y}_{100} = 0.6$  и  $z_{0.975} \approx 1.96$ , поэтому:

$$\left[ 0.8 - 0.6 - 1.96 \sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{225} + \frac{0.6(1-0.6)}{100}}, 0.8 - 0.6 + 1.96 \sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{225} + \frac{0.6(1-0.6)}{100}} \right] \approx [0.09, 0.31]$$