Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2023-2024

Дедлайн: решение домашнего задания загружается в виде единого файла, имеющего pdf-формат, в систему SmartLMS в разделе с соответствующим размещенным заданием до **10-го марта включитьельно**. При наличии сбоев в работе системы файл необходимо направить на почту mirectvis@gmail.com. Тема письма должна иметь следующий формат: "МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ", например, "МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 3".

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №3

Задание №1. Замаскированное распределение (50 баллов)

Имеется выборка $X_1, ..., X_n$, где X_i отражает объем покупок (в тысячах рублей), совершенных i-м клиентом. Функция распределения этой случайной величины имеет вид:

$$F_{X_i}(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < 1 \\ 1 - t^{-\lambda}, \text{ если } t \geq 1 \end{cases}, \qquad \text{где } \lambda > 1$$

Известно, что $n = 100$, $\overline{x}_n = e^{0.1}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 10$, где $e \approx 2.718$ – экспонента. Помогите руководству компании изучить поведение клиентов.

1. Оцените параметр λ при помощи метода моментов и посчитайте реализацию данной оценки. **(10 баллов)**

2. Оцените параметр λ методом максимального правдоподобия и посчитайте реализацию данной оценки. **(10 баллов)**

3. Оцените асимптотическую дисперсию ММП оценки параметра λ и посчитайте реализацию данной оценки. **(10 баллов)**

4. Найдите реализацию 88% доверительного интервала параметра λ. **(10 баллов)**

5. На уровне значимости $\alpha = 0.2$ протестируйте гипотезу $H_0 : E(X_1) = 1.1$ против альтернативы $H_1 : E(X_1) \neq 1.1$. **(10 баллов)**

Решение:

1. Сперва найдем функцию плотности:

$$f_{X_1}(t) = \frac{dF_{X_1}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, \text{ если } t < 1 \\ \lambda t^{-(1+\lambda)}, \text{ если } t \geq 1 \end{cases}$$

Воспользуемся первым начальным моментом

$$E(X_1) = \int\limits_1^{\infty} t \times \lambda t^{-(1+\lambda)} dt = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

Отсюда получаем, что:

$$\lambda = \frac{E(X_1)}{E(X_1) - 1}$$

Следовательно:

$$\hat{\lambda} = \frac{\overline{X}_n}{\overline{X}_n - 1}$$

Найдем реализацию данной оценки:

$$\hat{\lambda}(x) = \frac{e^{0.1}}{e^{0.1} - 1} \approx 10.51$$

2. Запишем функцию правдоподобия:

$$L(\lambda; X) = \prod_{i=1}^{n} \lambda X_i^{-(1+\lambda)}$$

Рассмотрим ее логарифм:

$$\ln L(\lambda; X) = n \ln(\lambda) - (1+\lambda) \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)$$

Запишем условия первого порядка:

$$\frac{d \ln L(\lambda; X)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) = 0$$

Отсюда получаем ММП оценку:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln(X_i)}$$

Убедимся, что мы нашли максимум функции правдоподобия, проверив условия второго порядка:

$$\frac{d^2 \ln L(\lambda; X)}{d^2\lambda} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$

Рассчитаем реализацию оценки:

$$\hat{\lambda}(x) = \frac{100}{10} = 10$$

3. Найдем информацию Фишера:

$$I(\lambda) = -E\left(-\frac{n}{\lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda^2}$$

Используя информацию Фишера запишем асимптотическую дисперси ММП оценки:

$$As.Var(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n}$$

Оценка найденной асимптотической дисперсии будет иметь вид:

$$\widehat{As.V}ar(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda}^2}{n}$$

Рассчитаем реализацию данной оценки:

$$\widehat{As.V}ar(\hat{\lambda})(x) = \frac{10^2}{100} = 1$$

4. Воспользуемся доверительным интервалом для параметра, оцененного с помощью метода максимального правдоподобия.

   Поскольку $1-\gamma = 0.88$, то $1-\gamma/2 = 0.94$, откуда получаем квантиль $z_{0.94} \approx 1.55$, а значит реализация доверительного интервала будет иметь вид:

$$[10 - 1.55 \times \sqrt{1}, 10 + 1.55 \times \sqrt{1}] = [8.45, 11.55]$$

5. Воспользуемся тестированием гипотезы о функции от параметра, оцененного с помощью метода максимального правдоподобия.

   Рассмотрим ММП оценку математического ожидания и ее реализацию:

$$\hat{E}(X_1) = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} - 1} \qquad \hat{E}(X_1)(x) = \frac{10}{10-1} = \frac{10}{9}$$

   Воспользуемся дельта методом:

$$As.Var\left(\hat{E}(X_1)\right) = \frac{1}{(\lambda-1)^4} \times \frac{\lambda^2}{n} = \frac{\lambda^2}{n(\lambda-1)^4}$$

   Найдем реализацию оценки этой асимптотической дисперсии:

$$\widehat{As.Var}\left(\hat{E}(X_1)\right)(x) = \frac{10^2}{100(10-1)^4} = \frac{1}{6561} \approx 0.00015$$

   Рассчитаем тестовую статистику:

$$T(X) = \frac{\frac{10}{9} - 1.1}{\sqrt{\frac{1}{6561}}} = 0.9$$

   Поскольку $\alpha = 0.2$ и при верной нулевой гипотезе асимптотическое распределение тестовой статистики является стандартным нормальным, то критическая область теста имеет вид $\mathcal{T}_{0.2} = (-\infty, -1.28) \cup (1.28, \infty)$. Так как $0.9 \notin \mathcal{T}_{0.2}$, то нулевая гипотеза не отвергается на уровне значимости $\alpha = 0.2$.

Задание №2. AB-тестирование (20 баллов)

У вас заказали исследование, призванное изучить реакцию пользователей на новый дизайн сайта компании. В вашем исследовании независимо друг от друга участвуют 200 индивидов. Они были случайным образом разделены на две равные группы, первая из которых пользовалась сайтом со старым дизайном, а вторая – с новым. В первой группе дизайн сайта понравился 40 участникам эксперимента, а во второй – 70.

1. На уровне значимости $\alpha = 0.01$ протестируйте гипотезу о том, что половине пользователей понравится новый дизайн сайта, против альтернативы о том, что более, чем половине. **(10 баллов)**

2. Самостоятельно выберите тест, который позволит определить, позволил ли новый дизайн сайта повысить удобство его использования. Рассчитайте p-value данного теста и сделайте вывод. **(10 баллов)**

Решение:

1. Обозначим через $Z_i \sim Ber(p)$ случайную величину, принимающую значение 1, если индивиду понравился сайт и 0 – в противном случае. Тестируется гипотеза $H_0 : p = 0.5$ против альтернативы $H_0 : p > 0.5$.

   Рассчитаем тестовую статистику:

   $$T(X) = \frac{(70)/100 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{100}}} = 4$$

   Так как $\alpha = 0.01$ и критическая область является правосторонней, то $\mathcal{T}_{0.01} = (2.23, \infty)$. Поскольку $4 \in (2.23, \infty)$, то нулевая гипотеза не отвергается на 1%-м уровне значимости.

2. Через $X_i \sim Ber(p_1)$ и $Y_i \sim Ber(p_2)$ обозначим наблюдения выборок первой и второй групп. Тестируется гипотеза $H_0 : p_1 = p_2$. Выберем левостороннюю альтернативу $H_1 : p_1 < p_2$.

   Рассчитаем тестовую статистику:

   $$T(X) = \frac{40/100 - 70/100}{\sqrt{0.55(1-0.55)(1/100 + 1/100)}} \approx -4.26$$

   Вычислим p-value данного теста:

   $$\text{p-value} = \Phi(-4.26) \approx 0$$

   Результаты говорят о том, что нулевая гипотеза отвергается на любом разумном уровне значимости. Таким образом были получены статистические свидетельства в пользу того, что новый дизайн сайта понравился пользователям больше, чем старый.

Задание №3. Изобретение теста (30 баллов)

Имеется выборка $(X_1, ..., X_n)$ из нормального распределения $\mathrm{N}(\mu, \mu)$, про которое известно, что математическое ожидание совпадает с дисперсией и $\mu > 0$. Тестируется гипотеза $H_0 : \mu = 1$ против альтернативы $H_1 : \mu \neq 1$.

1. Предложите тестовую статистику $T(X)$ и критическую область $\mathcal{T}_\alpha$, позволяющие тестировать нулевую гиоптезу на уровне значимости α. **(5 баллов)**

2. Рассчитайте мощность вашего теста при $n = 25$, $\alpha = 0.1$ и $\mu = 2$. **(5 баллов)**

3. Проверьте, является ли ваш тест состоятельным. Если ваш тест не является состоятельным, то преобразуйте его таким образом, чтобы он стал состоятельным. **(10 баллов)**

4. С помощью леммы Неймана-Пирсона найдите тестовую статистику равномерно наиболее мощного теста, если $n = 1$ и альтернативная гипотеза сформулирована как $H_1 : \mu = 2$. Затем рассчитайте p-value данного теста, если $x_1 = 2$. **(5 баллов)**

5. Проверьте, является ли при $n = 1$ и $H_1 : \mu = 2$ предложенный вами в первом пункте задачи тест равномерно наиболее мощным. **(5 баллов)**

Решение:

1. Рассмотрим следующую тестовую статистику:

$$T(X) = \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - 1\right)$$

Нетрудно показать, что если верна нулевая гипотеза, то эта статистика имеет стандартное нормальное распределение:

$$T(X)|H_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Отсюда получаем, что $\mathcal{T}_\alpha = R - \left(-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}\right)$.

2. Если $\mu = 2$ и $n = 25$, то:

$$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(2, 0.08) \implies 5\left(\overline{X}_n - 1\right) \sim \mathcal{N}(5, 2)$$

Рассчитаем мощность теста:

$$\begin{gathered} 1 - \beta = 1 - P(T(X) \notin \mathcal{T}_\alpha | \mu = 2) = \\ = 1 - P(-z_{0.95} \leq 5\left(\overline{X}_n - 1\right) \leq z_{0.95} | \mu = 2) \approx \\ \approx 1 - P(-1.645 \leq 5\left(\overline{X}_n - 1\right) \leq 1.645 | \mu = 2) = \\ = 1 - \left(\Phi\left(\frac{1.645 - 5}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-1.645 - 5}{\sqrt{2}}\right)\right) \approx 0.991 \end{gathered}$$

3. Обратим внимание, что:

$$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \mu/n) \implies \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - 1\right) \sim \mathcal{N}\left(\sqrt{n}(\mu - 1), \mu\right)$$

Тест является состоятельным, поскольку вероятность ошибки второго рода стремится к нулю по мере увеличения объема выборки:

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \beta = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{z_{1-\alpha/2} - \sqrt{n}(\mu - 1)}{\sqrt{\mu}}\right) - \Phi\left(\frac{-z_{1-\alpha/2} - \sqrt{n}(\mu - 1)}{\sqrt{\mu}}\right) = \\ = \begin{cases} 1 - 1, \text{ если } \mu < 1 \\ 0 - 0, \text{ если } \mu > 1 \end{cases} = 0 \end{gathered}$$

4. Запишем функцию правдоподобия при $\mu = 1$ и при $\mu = 2$ в случае $n = 1$:

$$L(1; X_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_1-1)^2}{2}} \qquad L(2; X_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(X_1-2)^2}{4}}$$

В соответствии с леммой Неймана-Пирсона тестовая статистика равномерно наиболее мощного теста будет иметь вид:

$$T_1(X) = \frac{L(2; X_1)}{L(1; X_1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{2(X_1-1)^2-(X_i-2)^2}{4}}$$

После ряда очевидных преобразований, включающих взятие логарифма и домножение на положительные константы, получаем:

$$T_2(X) = X_1^2$$

Поскольку $x_1 = 2$ и критическая область теста является правосторонней, то:

$$\text{p-value} = 1 - F_{T_2(X)|H_0}(T_2(x)) = 1 - P\left(X_1^2 \leq 2^2 | H_0\right) =$$
$$= 1 - P(-2 \leq X_1 \leq 2 | H_0) = 1 - \Phi\left(\frac{2-1}{\sqrt{1}}\right) + \Phi\left(\frac{-2-1}{\sqrt{1}}\right) \approx 0.16$$

5. Наш тест не является равномерное наиболее мощным, поскольку не совпадает с равномерное наиболее мощным тестом, сформулированном в предыдущем пункте. Действительно, если бы тесты были эквиваленты, то во всех случаях выдавали бы одинаковое значение p-value. Однако, применяя наш тест к реализации $x_1 = 2$ из предыдущего пункта получаем:

$$\text{p-value} = 2\min\left(1 - \Phi(2-1), \Phi(2-1)\right) \approx 0.317 \neq 0.16$$