

# Теория Вероятностей и Статистика

## Доверительные интервалы

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2022-2023

- Ранее мы оценивали параметры распределения и получали так называемые **точечные оценки**.

- Ранее мы оценивали параметры распределения и получали так называемые **точечные оценки**.
- Однако, на практике, нас зачастую может интересовать не только истинное значение параметра, но и некоторый диапазон значений, которому соответствующий параметр может принадлежать с высокой вероятностью. Процедуру нахождения такого диапазона часто именуют **интервальным оцениванием**.

- Ранее мы оценивали параметры распределения и получали так называемые **точечные оценки**.
- Однако, на практике, нас зачастую может интересовать не только истинное значение параметра, но и некоторый диапазон значений, которому соответствующий параметр может принадлежать с высокой вероятностью. Процедуру нахождения такого диапазона часто именуют **интервальным оцениванием**.
- Например, нам может быть интересно оценить не только средний доход по стране, но и диапазон значений, в который средний доход попадает с вероятностью 0.99.

# Доверительные интервалы

## Определение

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с параметром  $\theta$ .

# Доверительные интервалы

## Определение

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с параметром  $\theta$ .
- **Доверительным интервалом** с уровнем доверия  $(1 - \gamma)$ , где  $\gamma \in (0, 1)$ , называется интервал  $[T_1(X), T_2(X)]$ , такой, что при любом допустимом значении параметра  $\theta$ :

$$P(\theta \in [T_1(X), T_2(X)]) = P(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) = 1 - \gamma$$

# Доверительные интервалы

## Определение

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с параметром  $\theta$ .
- **Доверительным интервалом** с уровнем доверия  $(1 - \gamma)$ , где  $\gamma \in (0, 1)$ , называется интервал  $[T_1(X), T_2(X)]$ , такой, что при любом допустимом значении параметра  $\theta$ :

$$P(\theta \in [T_1(X), T_2(X)]) = P(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) = 1 - \gamma$$

- Статистики  $T_1(X)$  и  $T_2(X)$  именуются левой (нижней) и правой (верхней) границами доверительного интервала. Причем  $P(T_2(X) \geq T_1(X)) = 1$ .

# Доверительные интервалы

## Определение

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с параметром  $\theta$ .
- **Доверительным интервалом** с уровнем доверия  $(1 - \gamma)$ , где  $\gamma \in (0, 1)$ , называется интервал  $[T_1(X), T_2(X)]$ , такой, что при любом допустимом значении параметра  $\theta$ :

$$P(\theta \in [T_1(X), T_2(X)]) = P(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) = 1 - \gamma$$

- Статистики  $T_1(X)$  и  $T_2(X)$  именуются левой (нижней) и правой (верхней) границами доверительного интервала. Причем  $P(T_2(X) \geq T_1(X)) = 1$ .
- Иногда говорят о  $100(1 - \gamma)$  процентном доверительном интервале, подразумевая уровень доверия  $(1 - \gamma)$ .



# Доверительные интервалы

## Определение

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с параметром  $\theta$ .
- **Доверительным интервалом** с уровнем доверия  $(1 - \gamma)$ , где  $\gamma \in (0, 1)$ , называется интервал  $[T_1(X), T_2(X)]$ , такой, что при любом допустимом значении параметра  $\theta$ :

$$P(\theta \in [T_1(X), T_2(X)]) = P(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) = 1 - \gamma$$

- Статистики  $T_1(X)$  и  $T_2(X)$  именуются левой (нижней) и правой (верхней) границами доверительного интервала. Причем  $P(T_2(X) \geq T_1(X)) = 1$ .
- Иногда говорят о  $100(1 - \gamma)$  процентном доверительном интервале, подразумевая уровень доверия  $(1 - \gamma)$ .

**Пример:** имеется выборка объема  $n = 1$  из равномерного распределения  $X_1 \sim U(0, \alpha)$ . Рассмотрим доверительный интервал с границами  $T_1(X) = 2X_1$  и  $T_2(X) = 5X_1$ . Обратим внимание, что  $X_1/\alpha \sim U(0, 1)$  и рассчитаем уровень доверия:

# Доверительные интервалы

## Определение

- Рассмотрим выборку  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из распределения с параметром  $\theta$ .
- Доверительным интервалом** с уровнем доверия  $(1 - \gamma)$ , где  $\gamma \in (0, 1)$ , называется интервал  $[T_1(X), T_2(X)]$ , такой, что при любом допустимом значении параметра  $\theta$ :

$$P(\theta \in [T_1(X), T_2(X)]) = P(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) = 1 - \gamma$$

- Статистики  $T_1(X)$  и  $T_2(X)$  именуются левой (нижней) и правой (верхней) границами доверительного интервала. Причем  $P(T_2(X) \geq T_1(X)) = 1$ .
- Иногда говорят о  $100(1 - \gamma)$  процентном доверительном интервале, подразумевая уровень доверия  $(1 - \gamma)$ .

**Пример:** имеется выборка объема  $n = 1$  из равномерного распределения  $X_1 \sim U(0, \alpha)$ . Рассмотрим доверительный интервал с границами  $T_1(X) = 2X_1$  и  $T_2(X) = 5X_1$ . Обратим внимание, что  $X_1/\alpha \sim U(0, 1)$  и рассчитаем уровень доверия:

$$P(2X_1 \leq \alpha \leq 5X_1) = P\left(2 \leq \frac{\alpha}{X_1} \leq 5\right) = P\left(0.2 \leq \frac{X_1}{\alpha} \leq 0.5\right) = 0.5 - 0.2 = 0.3$$

# Доверительные интервалы

## Симметричные и односторонние доверительные интервалы

- Доверительный интервал является **симметричным**, если:

$$P(T_2 < \theta) = P(T_1 > \theta)$$

# Доверительные интервалы

## Симметричные и односторонние доверительные интервалы

- Доверительный интервал является **симметричным**, если:

$$P(T_2 < \theta) = P(T_1 > \theta)$$

- Доверительный интервал является **левосторонним** (верхним) если  $T_1(X) = -\infty$ .

# Доверительные интервалы

## Симметричные и односторонние доверительные интервалы

- Доверительный интервал является **симметричным**, если:

$$P(T_2 < \theta) = P(T_1 > \theta)$$

- Доверительный интервал является **левосторонним** (верхним) если  $T_1(X) = -\infty$ .
- Доверительный интервал является **правосторонним** (нижним) если  $T_2(X) = \infty$ .

# Доверительные интервалы

## Симметричные и односторонние доверительные интервалы

- Доверительный интервал является **симметричным**, если:

$$P(T_2 < \theta) = P(T_1 > \theta)$$

- Доверительный интервал является **левосторонним** (верхним) если  $T_1(X) = -\infty$ .
- Доверительный интервал является **правосторонним** (нижним) если  $T_2(X) = \infty$ .

**Пример:** имеется выборка объема  $n = 1$  из равномерного распределения  $X_1 \sim U(0, \alpha)$ . Построим несколько доверительных интервалов с уровнем доверия 0.2.

# Доверительные интервалы

## Симметричные и односторонние доверительные интервалы

- Доверительный интервал является **симметричным**, если:

$$P(T_2 < \theta) = P(T_1 > \theta)$$

- Доверительный интервал является **левосторонним** (верхним) если  $T_1(X) = -\infty$ .
- Доверительный интервал является **правосторонним** (нижним) если  $T_2(X) = \infty$ .

**Пример:** имеется выборка объема  $n = 1$  из равномерного распределения  $X_1 \sim U(0, \alpha)$ . Построим несколько доверительных интервалов с уровнем доверия 0.2.

**Симметричный:** достаточно положить  $T_1(X) = 5X_1/3$  и  $T_2(X) = 2.5X_1$ , поскольку:

# Доверительные интервалы

## Симметричные и односторонние доверительные интервалы

- Доверительный интервал является **симметричным**, если:

$$P(T_2 < \theta) = P(T_1 > \theta)$$

- Доверительный интервал является **левосторонним** (верхним) если  $T_1(X) = -\infty$ .
- Доверительный интервал является **правосторонним** (нижним) если  $T_2(X) = \infty$ .

**Пример:** имеется выборка объема  $n = 1$  из равномерного распределения  $X_1 \sim U(0, \alpha)$ . Построим несколько доверительных интервалов с уровнем доверия 0.2.

**Симметричный:** достаточно положить  $T_1(X) = 5X_1/3$  и  $T_2(X) = 2.5X_1$ , поскольку:

$$P(5X_1/3 \leq \alpha \leq 2.5X_1) = P\left(0.4 \leq \frac{X_1}{\alpha} \leq 0.6\right) = 0.2$$



# Доверительные интервалы

## Симметричные и односторонние доверительные интервалы

- Доверительный интервал является **симметричным**, если:

$$P(T_2 < \theta) = P(T_1 > \theta)$$

- Доверительный интервал является **левосторонним** (верхним) если  $T_1(X) = -\infty$ .
- Доверительный интервал является **правосторонним** (нижним) если  $T_2(X) = \infty$ .

**Пример:** имеется выборка объема  $n = 1$  из равномерного распределения  $X_1 \sim U(0, \alpha)$ . Построим несколько доверительных интервалов с уровнем доверия 0.2.

**Симметричный:** достаточно положить  $T_1(X) = 5X_1/3$  и  $T_2(X) = 2.5X_1$ , поскольку:

$$P(5X_1/3 \leq \alpha \leq 2.5X_1) = P\left(0.4 \leq \frac{X_1}{\alpha} \leq 0.6\right) = 0.2$$

**Правосторонний:** достаточно положить  $T_1(X) = 5X_1/3$  и  $T_2(X) = \infty$ , поскольку:

# Доверительные интервалы

## Симметричные и односторонние доверительные интервалы

- Доверительный интервал является **симметричным**, если:

$$P(T_2 < \theta) = P(T_1 > \theta)$$

- Доверительный интервал является **левосторонним** (верхним) если  $T_1(X) = -\infty$ .
- Доверительный интервал является **правосторонним** (нижним) если  $T_2(X) = \infty$ .

**Пример:** имеется выборка объема  $n = 1$  из равномерного распределения  $X_1 \sim U(0, \alpha)$ . Построим несколько доверительных интервалов с уровнем доверия 0.2.

**Симметричный:** достаточно положить  $T_1(X) = 5X_1/3$  и  $T_2(X) = 2.5X_1$ , поскольку:

$$P(5X_1/3 \leq \alpha \leq 2.5X_1) = P\left(0.4 \leq \frac{X_1}{\alpha} \leq 0.6\right) = 0.2$$

**Правосторонний:** достаточно положить  $T_1(X) = 5X_1/3$  и  $T_2(X) = \infty$ , поскольку:

$$P(5X_1/3 > \alpha) = P\left(\frac{X_1}{\alpha} > 0.6\right) = 0.4 = P\left(\frac{X_1}{\alpha} < 0.4\right) = P(2.5X_1 < \alpha)$$

# Доверительные интервалы

## Симметричные и односторонние доверительные интервалы

- Доверительный интервал является **симметричным**, если:

$$P(T_2 < \theta) = P(T_1 > \theta)$$

- Доверительный интервал является **левосторонним** (верхним) если  $T_1(X) = -\infty$ .
- Доверительный интервал является **правосторонним** (нижним) если  $T_2(X) = \infty$ .

**Пример:** имеется выборка объема  $n = 1$  из равномерного распределения  $X_1 \sim U(0, \alpha)$ . Построим несколько доверительных интервалов с уровнем доверия 0.2.

**Симметричный:** достаточно положить  $T_1(X) = 5X_1/3$  и  $T_2(X) = 2.5X_1$ , поскольку:

$$P(5X_1/3 \leq \alpha \leq 2.5X_1) = P\left(0.4 \leq \frac{X_1}{\alpha} \leq 0.6\right) = 0.2$$

**Правосторонний:** достаточно положить  $T_1(X) = 5X_1/3$  и  $T_2(X) = \infty$ , поскольку:

$$P(5X_1/3 > \alpha) = P\left(\frac{X_1}{\alpha} > 0.6\right) = 0.4 = P\left(\frac{X_1}{\alpha} < 0.4\right) = P(2.5X_1 < \alpha)$$

**Левосторонний:** достаточно положить  $T_1(X) = -\infty$  и  $T_2(X) = 1.25$ , поскольку:

# Доверительные интервалы

## Симметричные и односторонние доверительные интервалы

- Доверительный интервал является **симметричным**, если:

$$P(T_2 < \theta) = P(T_1 > \theta)$$

- Доверительный интервал является **левосторонним** (верхним) если  $T_1(X) = -\infty$ .
- Доверительный интервал является **правосторонним** (нижним) если  $T_2(X) = \infty$ .

**Пример:** имеется выборка объема  $n = 1$  из равномерного распределения  $X_1 \sim U(0, \alpha)$ . Построим несколько доверительных интервалов с уровнем доверия 0.2.

**Симметричный:** достаточно положить  $T_1(X) = 5X_1/3$  и  $T_2(X) = 2.5X_1$ , поскольку:

$$P(5X_1/3 \leq \alpha \leq 2.5X_1) = P\left(0.4 \leq \frac{X_1}{\alpha} \leq 0.6\right) = 0.2$$

**Правосторонний:** достаточно положить  $T_1(X) = 5X_1/3$  и  $T_2(X) = \infty$ , поскольку:

$$P(5X_1/3 > \alpha) = P\left(\frac{X_1}{\alpha} > 0.6\right) = 0.4 = P\left(\frac{X_1}{\alpha} < 0.4\right) = P(2.5X_1 < \alpha)$$

**Левосторонний:** достаточно положить  $T_1(X) = -\infty$  и  $T_2(X) = 1.25$ , поскольку:

$$P(\alpha \leq 1.25X_1) = P\left(0.8 \leq \frac{X_1}{\alpha}\right) = 0.2$$

# Доверительные интервалы

Алгоритм построения доверительного интервала с помощью центральной статистики

- Статистика  $G(X, \theta)$  именуется **центральной**, если:

# Доверительные интервалы

Алгоритм построения доверительного интервала с помощью центральной статистики

- Статистика  $G(X, \theta)$  именуется **центральной**, если:
  - Распределение  $G(X, \theta)$  остается неизменным при любом допустимом  $\theta$ .

# Доверительные интервалы

Алгоритм построения доверительного интервала с помощью центральной статистики

- Статистика  $G(X, \theta)$  именуется **центральной**, если:
  - Распределение  $G(X, \theta)$  остается неизменным при любом допустимом  $\theta$ .
  - При любой реализации  $x$  функция  $G(x, \theta)$  непрерывна и строго монотонна по  $\theta$ .

# Доверительные интервалы

## Алгоритм построения доверительного интервала с помощью центральной статистики

- Статистика  $G(X, \theta)$  именуется **центральной**, если:
  - Распределение  $G(X, \theta)$  остается неизменным при любом допустимом  $\theta$ .
  - При любой реализации  $x$  функция  $G(x, \theta)$  непрерывна и строго монотонна по  $\theta$ .
- Через  $q_G$  обозначим квантиль уровня  $q$  центральной статистики  $G(X, \theta)$  и для простоты предположим, что она имеет непрерывное распределение.



# Доверительные интервалы

## Алгоритм построения доверительного интервала с помощью центральной статистики

- Статистика  $G(X, \theta)$  именуется **центральной**, если:
  - Распределение  $G(X, \theta)$  остается неизменным при любом допустимом  $\theta$ .
  - При любой реализации  $x$  функция  $G(x, \theta)$  непрерывна и строго монотонна по  $\theta$ .
- Через  $q_G$  обозначим квантиль уровня  $q$  центральной статистики  $G(X, \theta)$  и для простоты предположим, что она имеет непрерывное распределение.
- Для построения симметричного доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$  достаточно найти любую центральную статистику  $G(X, \theta)$  и ее распределение, исходя из которого следует вычислить квантили  $(\gamma/2)_G$  и  $(1 - \gamma/2)_G$ .

# Доверительные интервалы

## Алгоритм построения доверительного интервала с помощью центральной статистики

- Статистика  $G(X, \theta)$  именуется **центральной**, если:
  - Распределение  $G(X, \theta)$  остается неизменным при любом допустимом  $\theta$ .
  - При любой реализации  $x$  функция  $G(x, \theta)$  непрерывна и строго монотонна по  $\theta$ .
- Через  $q_G$  обозначим квантиль уровня  $q$  центральной статистики  $G(X, \theta)$  и для простоты предположим, что она имеет непрерывное распределение.
- Для построения симметричного доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$  достаточно найти любую центральную статистику  $G(X, \theta)$  и ее распределение, исходя из которого следует вычислить квантили  $(\gamma/2)_G$  и  $(1 - \gamma/2)_G$ . Поскольку распределение  $G(X, \theta)$  не зависит от  $\theta$ , то от параметра также не будут зависеть и квантили. Поэтому, пользуясь непрерывностью и строгой монотонностью  $G(X, \theta)$  можно найти такие  $T_1(X)$  и  $T_2(X)$ , что:

# Доверительные интервалы

## Алгоритм построения доверительного интервала с помощью центральной статистики

- Статистика  $G(X, \theta)$  именуется **центральной**, если:
  - Распределение  $G(X, \theta)$  остается неизменным при любом допустимом  $\theta$ .
  - При любой реализации  $x$  функция  $G(x, \theta)$  непрерывна и строго монотонна по  $\theta$ .
- Через  $q_G$  обозначим квантиль уровня  $q$  центральной статистики  $G(X, \theta)$  и для простоты предположим, что она имеет непрерывное распределение.
- Для построения симметричного доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$  достаточно найти любую центральную статистику  $G(X, \theta)$  и ее распределение, исходя из которого следует вычислить квантили  $(\gamma/2)_G$  и  $(1 - \gamma/2)_G$ . Поскольку распределение  $G(X, \theta)$  не зависит от  $\theta$ , то от параметра также не будут зависеть и квантили. Поэтому, пользуясь непрерывностью и строгой монотонностью  $G(X, \theta)$  можно найти такие  $T_1(X)$  и  $T_2(X)$ , что:

$$P\left(\frac{\gamma}{2}_G \leq G(X, \theta) \leq \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)_G\right) = P(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) = 1 - \gamma$$

# Доверительные интервалы

## Алгоритм построения доверительного интервала с помощью центральной статистики

- Статистика  $G(X, \theta)$  именуется **центральной**, если:
  - Распределение  $G(X, \theta)$  остается неизменным при любом допустимом  $\theta$ .
  - При любой реализации  $x$  функция  $G(x, \theta)$  непрерывна и строго монотонна по  $\theta$ .
- Через  $q_G$  обозначим квантиль уровня  $q$  центральной статистики  $G(X, \theta)$  и для простоты предположим, что она имеет непрерывное распределение.
- Для построения симметричного доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$  достаточно найти любую центральную статистику  $G(X, \theta)$  и ее распределение, исходя из которого следует вычислить квантили  $(\gamma/2)_G$  и  $(1 - \gamma/2)_G$ . Поскольку распределение  $G(X, \theta)$  не зависит от  $\theta$ , то от параметра также не будут зависеть и квантили. Поэтому, пользуясь непрерывностью и строгой монотонностью  $G(X, \theta)$  можно найти такие  $T_1(X)$  и  $T_2(X)$ , что:

$$P\left(\frac{\gamma}{2}_G \leq G(X, \theta) \leq \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)_G\right) = P(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) = 1 - \gamma$$

**Пример:** имеется выборка из равномерного распределения  $U(0, \alpha)$ . Статистика  $G(X, \alpha) = \left(\frac{X_{(n)}}{\alpha}\right)^n \sim U(0, 1)$ , где  $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ , является центральной, поскольку ее распределение не зависит от  $\alpha$  (всегда стандартное равномерное) и функция  $\left(\frac{\max(x_1, \dots, x_n)}{\alpha}\right)^n$  непрерывна и строго монотонна по  $\alpha$ .

# Доверительные интервалы

## Алгоритм построения доверительного интервала с помощью центральной статистики

- Статистика  $G(X, \theta)$  именуется **центральной**, если:
  - Распределение  $G(X, \theta)$  остается неизменным при любом допустимом  $\theta$ .
  - При любой реализации  $x$  функция  $G(x, \theta)$  непрерывна и строго монотонна по  $\theta$ .
- Через  $q_G$  обозначим квантиль уровня  $q$  центральной статистики  $G(X, \theta)$  и для простоты предположим, что она имеет непрерывное распределение.
- Для построения симметричного доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$  достаточно найти любую центральную статистику  $G(X, \theta)$  и ее распределение, исходя из которого следует вычислить квантили  $(\gamma/2)_G$  и  $(1 - \gamma/2)_G$ . Поскольку распределение  $G(X, \theta)$  не зависит от  $\theta$ , то от параметра также не будут зависеть и квантили. Поэтому, пользуясь непрерывностью и строгой монотонностью  $G(X, \theta)$  можно найти такие  $T_1(X)$  и  $T_2(X)$ , что:

$$P\left(\frac{\gamma}{2}_G \leq G(X, \theta) \leq \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)_G\right) = P(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) = 1 - \gamma$$

**Пример:** имеется выборка из равномерного распределения  $U(0, \alpha)$ . Статистика  $G(X, \alpha) = \left(\frac{X_{(n)}}{\alpha}\right)^n \sim U(0, 1)$ , где  $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ , является центральной, поскольку ее распределение не зависит от  $\alpha$  (всегда стандартное равномерное) и функция  $\left(\frac{\max(x_1, \dots, x_n)}{\alpha}\right)^n$  непрерывна и строго монотонна по  $\alpha$ . Для построения симметричного доверительного интервала уровня 0.2 рассмотрим квантили  $0.1_G = 0.1$  и  $0.9_G = 0.9$ :

# Доверительные интервалы

## Алгоритм построения доверительного интервала с помощью центральной статистики

- Статистика  $G(X, \theta)$  именуется **центральной**, если:
  - Распределение  $G(X, \theta)$  остается неизменным при любом допустимом  $\theta$ .
  - При любой реализации  $x$  функция  $G(x, \theta)$  непрерывна и строго монотонна по  $\theta$ .
- Через  $q_G$  обозначим квантиль уровня  $q$  центральной статистики  $G(X, \theta)$  и для простоты предположим, что она имеет непрерывное распределение.
- Для построения симметричного доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$  достаточно найти любую центральную статистику  $G(X, \theta)$  и ее распределение, исходя из которого следует вычислить квантили  $(\gamma/2)_G$  и  $(1 - \gamma/2)_G$ . Поскольку распределение  $G(X, \theta)$  не зависит от  $\theta$ , то от параметра также не будут зависеть и квантили. Поэтому, пользуясь непрерывностью и строгой монотонностью  $G(X, \theta)$  можно найти такие  $T_1(X)$  и  $T_2(X)$ , что:

$$P\left(\frac{\gamma}{2}_G \leq G(X, \theta) \leq \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)_G\right) = P(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) = 1 - \gamma$$

**Пример:** имеется выборка из равномерного распределения  $U(0, \alpha)$ . Статистика  $G(X, \alpha) = \left(\frac{X_{(n)}}{\alpha}\right)^n \sim U(0, 1)$ , где  $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ , является центральной, поскольку ее распределение не зависит от  $\alpha$  (всегда стандартное равномерное) и функция  $\left(\frac{\max(x_1, \dots, x_n)}{\alpha}\right)^n$  непрерывна и строго монотонна по  $\alpha$ . Для построения симметричного доверительного интервала уровня 0.2 рассмотрим квантили  $0.1_G = 0.1$  и  $0.9_G = 0.9$ :

$$P\left(0.1 \leq \left(\frac{X_{(n)}}{\alpha}\right)^n \leq 0.9\right) = P\left(\frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{0.9}} \leq \alpha \leq \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{0.1}}\right) = 0.2$$

# Доверительные интервалы

## Проблема интерпретации

- Через  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  обозначим реализации границ доверительного интервала с уровнем доверия  $(1 - \gamma)$ . Через  $[T_1(x), T_2(x)]$  обозначим реализацию доверительного интервала.

# Доверительные интервалы

## Проблема интерпретации

- Через  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  обозначим реализации границ доверительного интервала с уровнем доверия  $(1 - \gamma)$ . Через  $[T_1(x), T_2(x)]$  обозначим реализацию доверительного интервала.
- Часто, получив реализации границ доверительного интервала для параметра  $\theta$  исследователи утверждают, что параметр  $\theta$  находится между  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  с вероятностью  $1 - \gamma$ .



# Доверительные интервалы

## Проблема интерпретации

- Через  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  обозначим реализации границ доверительного интервала с уровнем доверия  $(1 - \gamma)$ . Через  $[T_1(x), T_2(x)]$  обозначим реализацию доверительного интервала.
- Часто, получив реализации границ доверительного интервала для параметра  $\theta$  исследователи утверждают, что параметр  $\theta$  находится между  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  с вероятностью  $1 - \gamma$ . Однако, такой подход к интерпретации является ошибочным, поскольку  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  не являются случайными величинами и нет никакой гарантии, что при повторении эксперимента параметр  $\theta$  будет оказываться между  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  с вероятностью  $1 - \gamma$ .

# Доверительные интервалы

## Проблема интерпретации

- Через  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  обозначим реализации границ доверительного интервала с уровнем доверия  $(1 - \gamma)$ . Через  $[T_1(x), T_2(x)]$  обозначим реализацию доверительного интервала.
- Часто, получив реализации границ доверительного интервала для параметра  $\theta$  исследователи утверждают, что параметр  $\theta$  находится между  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  с вероятностью  $1 - \gamma$ . Однако, такой подход к интерпретации является ошибочным, поскольку  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  не являются случайными величинами и нет никакой гарантии, что при повторении эксперимента параметр  $\theta$  будет оказываться между  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  с вероятностью  $1 - \gamma$ .
- Фактически,  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  это реализации случайных величин, между которыми параметр  $\theta$  мог оказаться с вероятностью  $1 - \gamma$ .

# Доверительные интервалы

## Проблема интерпретации

- Через  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  обозначим реализации границ доверительного интервала с уровнем доверия  $(1 - \gamma)$ . Через  $[T_1(x), T_2(x)]$  обозначим реализацию доверительного интервала.
- Часто, получив реализации границ доверительного интервала для параметра  $\theta$  исследователи утверждают, что параметр  $\theta$  находится между  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  с вероятностью  $1 - \gamma$ . Однако, такой подход к интерпретации является ошибочным, поскольку  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  не являются случайными величинами и нет никакой гарантии, что при повторении эксперимента параметр  $\theta$  будет оказываться между  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  с вероятностью  $1 - \gamma$ .
- Фактически,  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  это реализации случайных величин, между которыми параметр  $\theta$  мог оказаться с вероятностью  $1 - \gamma$ .
- С практической точки зрения мы можем принять  $[T_1(x), T_2(x)]$  как интервальную оценку (аппроксимацию) интервала, в котором истинное значение параметра лежит с вероятностью  $1 - \gamma$ .

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при известной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$  предполагая, что параметр  $\sigma^2$  известен.

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при известной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$  предполагая, что параметр  $\sigma^2$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при известной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$  предполагая, что параметр  $\sigma^2$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Обозначим через  $z_\gamma$  квантиль стандартного нормального распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ . При этом воспользуемся тем, что  $z_{1-\gamma/2} = -z_{\gamma/2}$ :

$$P\left(z_{\gamma/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\gamma/2}\right) = P\left(\bar{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = (1 - \gamma)$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при известной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$  предполагая, что параметр  $\sigma^2$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Обозначим через  $z_\gamma$  квантиль стандартного нормального распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ . При этом воспользуемся тем, что  $z_{1-\gamma/2} = -z_{\gamma/2}$ :

$$P\left(z_{\gamma/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\gamma/2}\right) = P\left(\bar{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = (1 - \gamma)$$

**Пример:** по выборке из распределения  $\mathcal{N}(\mu, 25)$  и с реализацией  $x = (0, 2, 0, 6)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.9.

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при известной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$  предполагая, что параметр  $\sigma^2$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Обозначим через  $z_\gamma$  квантиль стандартного нормального распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ . При этом воспользуемся тем, что  $z_{1-\gamma/2} = -z_{\gamma/2}$ :

$$P\left(z_{\gamma/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\gamma/2}\right) = P\left(\bar{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = (1 - \gamma)$$

**Пример:** по выборке из распределения  $\mathcal{N}(\mu, 25)$  и с реализацией  $x = (0, 2, 0, 6)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.9. Поскольку  $(1 - \gamma) = 0.9$ , то  $\gamma = 0.1$ , откуда по таблице стандартного нормального распределения находим  $z_{1-0.1/2} = z_{0.95} \approx 1.645$ . Кроме того  $\bar{x}_4 = (0 + 2 + 0 + 6)/4 = 2$ .



# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при известной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$  предполагая, что параметр  $\sigma^2$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Обозначим через  $z_\gamma$  квантиль стандартного нормального распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ . При этом воспользуемся тем, что  $z_{1-\gamma/2} = -z_{\gamma/2}$ :

$$P\left(z_{\gamma/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\gamma/2}\right) = P\left(\bar{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = (1 - \gamma)$$

**Пример:** по выборке из распределения  $\mathcal{N}(\mu, 25)$  и с реализацией  $x = (0, 2, 0, 6)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.9. Поскольку  $(1 - \gamma) = 0.9$ , то  $\gamma = 0.1$ , откуда по таблице стандартного нормального распределения находим  $z_{1-0.1/2} = z_{0.95} \approx 1.645$ . Кроме того  $\bar{x}_4 = (0 + 2 + 0 + 6)/4 = 2$ .

$$\text{Реализация границ: } T_1(x) = 2 - 1.645\sqrt{\frac{25}{4}} \approx -2.1 \quad T_2(x) = 2 + 1.645\sqrt{\frac{25}{4}} \approx 6.1$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при известной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$  предполагая, что параметр  $\sigma^2$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Обозначим через  $z_\gamma$  квантиль стандартного нормального распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ . При этом воспользуемся тем, что  $z_{1-\gamma/2} = -z_{\gamma/2}$ :

$$P\left(z_{\gamma/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\gamma/2}\right) = P\left(\bar{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = (1 - \gamma)$$

**Пример:** по выборке из распределения  $\mathcal{N}(\mu, 25)$  и с реализацией  $x = (0, 2, 0, 6)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.9. Поскольку  $(1 - \gamma) = 0.9$ , то  $\gamma = 0.1$ , откуда по таблице стандартного нормального распределения находим  $z_{1-0.1/2} = z_{0.95} \approx 1.645$ . Кроме того  $\bar{x}_4 = (0 + 2 + 0 + 6)/4 = 2$ .

$$\text{Реализация границ: } T_1(x) = 2 - 1.645\sqrt{\frac{25}{4}} \approx -2.1 \quad T_2(x) = 2 + 1.645\sqrt{\frac{25}{4}} \approx 6.1$$

**Реализация доверительного интервала:**  $[-2.1, 6.1]$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при известном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$  предполагая, что параметр  $\mu$  известен.

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при известном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$  предполагая, что параметр  $\mu$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при известном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$  предполагая, что параметр  $\mu$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

- Обозначим через  $\chi_{n,\gamma}^2$  квантиль Хи-квадрат распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ :

$$P \left( \chi_{n,\gamma/2}^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n,1-\gamma/2}^2 \right) = P \left( \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n,1-\gamma/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n,\gamma/2}^2} \right) = (1 - \gamma)$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при известном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$  предполагая, что параметр  $\mu$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

- Обозначим через  $\chi_{n,\gamma}^2$  квантиль Хи-квадрат распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ :

$$P \left( \chi_{n,\gamma/2}^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n,1-\gamma/2}^2 \right) = P \left( \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n,1-\gamma/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n,\gamma/2}^2} \right) = (1 - \gamma)$$

**Пример:** по выборке из распределения  $\mathcal{N}(1, \sigma^2)$  и с реализацией  $x = (0, 1, 5)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.95.

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при известном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$  предполагая, что параметр  $\mu$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

- Обозначим через  $\chi_{n,\gamma}^2$  квантиль Хи-квадрат распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ :

$$P \left( \chi_{n,\gamma/2}^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n,1-\gamma/2}^2 \right) = P \left( \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n,1-\gamma/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n,\gamma/2}^2} \right) = (1 - \gamma)$$

**Пример:** по выборке из распределения  $\mathcal{N}(1, \sigma^2)$  и с реализацией  $x = (0, 1, 5)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.95. Поскольку  $(1 - \gamma) = 0.95$ , то  $\gamma = 0.05$ , откуда по таблице хи-квадрат распределения с  $n = 3$  степенями свободы находим  $\chi_{3,0.05/2}^2 \approx 0.216$  и  $\chi_{3,1-0.05/2}^2 \approx 9.348$ . Отсюда получаем:

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при известном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$  предполагая, что параметр  $\mu$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

- Обозначим через  $\chi_{n,\gamma}^2$  квантиль Хи-квадрат распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ :

$$P \left( \chi_{n,\gamma/2}^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n,1-\gamma/2}^2 \right) = P \left( \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n,1-\gamma/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n,\gamma/2}^2} \right) = (1 - \gamma)$$

**Пример:** по выборке из распределения  $\mathcal{N}(1, \sigma^2)$  и с реализацией  $x = (0, 1, 5)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.95. Поскольку  $(1 - \gamma) = 0.95$ , то  $\gamma = 0.05$ , откуда по таблице хи-квадрат распределения с  $n = 3$  степенями свободы находим  $\chi_{3,0.05/2}^2 \approx 0.216$  и  $\chi_{3,1-0.05/2}^2 \approx 9.348$ . Отсюда получаем:

**Реализация границ:**  $T_1(x) = \frac{(0-1)^2 + (1-1)^2 + (5-1)^2}{9.348} \approx 1.82$      $T_2(x) = \frac{(0-1)^2 + (1-1)^2 + (5-1)^2}{0.216} \approx 78.7$



# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при известном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$  предполагая, что параметр  $\mu$  известен.
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

- Обозначим через  $\chi_{n,\gamma}^2$  квантиль Хи-квадрат распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ :

$$P \left( \chi_{n,\gamma/2}^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n,1-\gamma/2}^2 \right) = P \left( \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n,1-\gamma/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n,\gamma/2}^2} \right) = (1 - \gamma)$$

**Пример:** по выборке из распределения  $\mathcal{N}(1, \sigma^2)$  и с реализацией  $x = (0, 1, 5)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.95. Поскольку  $(1 - \gamma) = 0.95$ , то  $\gamma = 0.05$ , откуда по таблице хи-квадрат распределения с  $n = 3$  степенями свободы находим  $\chi_{3,0.05/2}^2 \approx 0.216$  и  $\chi_{3,1-0.05/2}^2 \approx 9.348$ . Отсюда получаем:

**Реализация границ:**  $T_1(x) = \frac{(0-1)^2 + (1-1)^2 + (5-1)^2}{9.348} \approx 1.82$      $T_2(x) = \frac{(0-1)^2 + (1-1)^2 + (5-1)^2}{0.216} \approx 78.7$

**Реализация доверительного интервала:** [1.82, 78.7]

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при известных дисперсиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\sigma_X^2$  и  $\sigma_Y^2$  известны. Построим доверительный интервал для разницы математических ожиданий  $\mu_X - \mu_Y$ .

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при известных дисперсиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\sigma_X^2$  и  $\sigma_Y^2$  известны. Построим доверительный интервал для разницы математических ожиданий  $\mu_X - \mu_Y$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при известных дисперсиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\sigma_X^2$  и  $\sigma_Y^2$  известны. Построим доверительный интервал для разницы математических ожиданий  $\mu_X - \mu_Y$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Нетрудно показать, что  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$  будет иметь вид:

$$\left[ (\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}, (\bar{X}_n - \bar{Y}_m) + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \right]$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при известных дисперсиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\sigma_X^2$  и  $\sigma_Y^2$  известны. Построим доверительный интервал для разницы математических ожиданий  $\mu_X - \mu_Y$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Нетрудно показать, что  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$  будет иметь вид:

$$\left[ (\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}, (\bar{X}_n - \bar{Y}_m) + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \right]$$

**Пример:** имеются независимые выборки из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, 1)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, 9)$ . Реализации выборок имеют вид  $x = (1, 3)$  и  $y = (1, 0, 2)$ . Найдем реализацию 99%-го доверительного интервала.

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при известных дисперсиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\sigma_X^2$  и  $\sigma_Y^2$  известны. Построим доверительный интервал для разницы математических ожиданий  $\mu_X - \mu_Y$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Нетрудно показать, что  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$  будет иметь вид:

$$\left[ (\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}, (\bar{X}_n - \bar{Y}_m) + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \right]$$

**Пример:** имеются независимые выборки из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, 1)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, 9)$ . Реализации выборок имеют вид  $x = (1, 3)$  и  $y = (1, 0, 2)$ . Найдём реализацию 99%-го доверительного интервала. Поскольку  $n = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\bar{x}_2 = 2$ ,  $\bar{y}_3 = 1$ ,  $\sigma_X^2 = 1$ ,  $\sigma_Y^2 = 9$  и  $z_{0.995} \approx 2.58$ , то искомая реализация равняется:

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при известных дисперсиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\sigma_X^2$  и  $\sigma_Y^2$  известны. Построим доверительный интервал для разницы математических ожиданий  $\mu_X - \mu_Y$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Нетрудно показать, что  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$  будет иметь вид:

$$\left[ (\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}, (\bar{X}_n - \bar{Y}_m) + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \right]$$

**Пример:** имеются независимые выборки из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, 1)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, 9)$ . Реализации выборок имеют вид  $x = (1, 3)$  и  $y = (1, 0, 2)$ . Найдём реализацию 99%-го доверительного интервала. Поскольку  $n = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\bar{x}_2 = 2$ ,  $\bar{y}_3 = 1$ ,  $\sigma_X^2 = 1$ ,  $\sigma_Y^2 = 9$  и  $z_{0.995} \approx 2.58$ , то искомая реализация равняется:

$$\left[ (2 - 1) - 2.58 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{9}{3}}, (2 - 1) + 2.58 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{9}{3}} \right] \approx [-3.83, 5.83]$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при известных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\mu_X$  и  $\mu_Y$  известны. Построим доверительный интервал для отношения дисперсий  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .



# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при известных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\mu_X$  и  $\mu_Y$  известны. Построим доверительный интервал для отношения дисперсий  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2} \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \frac{m}{n} \sim F(n, m)$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при известных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\mu_X$  и  $\mu_Y$  известны. Построим доверительный интервал для отношения дисперсий  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2} \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \frac{m}{n} \sim F(n, m)$$

- Обозначим через  $F_{n,m}^{(\gamma)}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Фишера с  $n$  и  $m$  степенями свободы, откуда получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2} \frac{n}{m} F_{n,m}^{(\gamma/2)}, \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2} \frac{n}{m} F_{n,m}^{(1-\gamma/2)} \right]$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при известных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\mu_X$  и  $\mu_Y$  известны. Построим доверительный интервал для отношения дисперсий  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2} \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \frac{m}{n} \sim F(n, m)$$

- Обозначим через  $F_{n,m}^{(\gamma)}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Фишера с  $n$  и  $m$  степенями свободы, откуда получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2} \frac{n}{m} F_{n,m}^{(\gamma/2)}, \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2} \frac{n}{m} F_{n,m}^{(1-\gamma/2)} \right]$$

**Пример:** имеются независимые выборки из нормальных распределений  $\mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(1, \sigma_Y^2)$ .

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при известных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\mu_X$  и  $\mu_Y$  известны. Построим доверительный интервал для отношения дисперсий  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2} \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \frac{m}{n} \sim F(n, m)$$

- Обозначим через  $F_{n,m}^{(\gamma)}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Фишера с  $n$  и  $m$  степенями свободы, откуда получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2} \frac{n}{m} F_{n,m}^{(\gamma/2)}, \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2} \frac{n}{m} F_{n,m}^{(1-\gamma/2)} \right]$$

**Пример:** имеются независимые выборки из нормальных распределений  $\mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(1, \sigma_Y^2)$ . Реализации выборок имеют вид  $x = (1, 3)$  и  $y = (1, 0, 2)$ . Найдем реализацию 90%-го доверительного интервала для  $\sigma_X^2/\sigma_Y^2$ :

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при известных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, где  $\mu_X$  и  $\mu_Y$  известны. Построим доверительный интервал для отношения дисперсий  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2} \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \frac{m}{n} \sim F(n, m)$$

- Обозначим через  $F_{n,m}^{(\gamma)}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Фишера с  $n$  и  $m$  степенями свободы, откуда получаем  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2} \frac{n}{m} F_{n,m}^{(\gamma/2)}, \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2} \frac{n}{m} F_{n,m}^{(1-\gamma/2)} \right]$$

**Пример:** имеются независимые выборки из нормальных распределений  $\mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(1, \sigma_Y^2)$ . Реализации выборок имеют вид  $x = (1, 3)$  и  $y = (1, 0, 2)$ . Найдем реализацию 90%-го доверительного интервала для  $\sigma_X^2/\sigma_Y^2$ :

$$\left[ \frac{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2}{(1-0)^2 + (3-0)^2} \frac{2}{3} 0.052, \frac{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2}{(1-0)^2 + (3-0)^2} \frac{2}{3} 9.55 \right] \approx [0.007, 1.273]$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дополнительный пример

Доходы программистов и аналитиков (в тысячах рублей) хорошо описываются нормальным распределением. Вы случайным образом опросили 3 программиста и 2 аналитика. Доходы программистов оказались равны 100, 80 и 120, а аналитиков – 90 и 130. Считая доходы опрошенных индивидов независимыми постройте 90% доверительный интервал для:

- Ожидаемого дохода случайно взятого программиста, если дисперсия его дохода равняется 225.
- Дисперсии дохода случайно взятого программиста, если его ожидаемый доход равен 120.
- Ожидаемой разницы в доходах случайно взятых программиста и аналитика, если их дисперсии равны и составляют 225.
- Отношения дисперсий доходов случайно взятого программиста к дисперсии дохода случайного взятого аналитика, если их ожидаемые доходы равны и составляют 100.

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дополнительный пример

Доходы программистов и аналитиков (в тысячах рублей) хорошо описываются нормальным распределением. Вы случайным образом опросили 3 программиста и 2 аналитика. Доходы программистов оказались равны 100, 80 и 120, а аналитиков – 90 и 130. Считая доходы опрошенных индивидов независимыми постройте 90% доверительный интервал для:

- Ожидаемого дохода случайно взятого программиста, если дисперсия его дохода равняется 225.
- Дисперсии дохода случайно взятого программиста, если его ожидаемый доход равен 120.
- Ожидаемой разницы в доходах случайно взятых программиста и аналитика, если их дисперсии равны и составляют 225.
- Отношения дисперсий доходов случайно взятого программиста к дисперсии дохода случайного взятого аналитика, если их ожидаемые доходы равны и составляют 100.

**Решение:**

- $[(100 + 80 + 120)/3 - 1.645 \times \sqrt{225/3}, (100 + 80 + 120)/3 + 1.645 \times \sqrt{225/3}] \approx [85.75, 114.25]$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дополнительный пример

Доходы программистов и аналитиков (в тысячах рублей) хорошо описываются нормальным распределением. Вы случайным образом опросили 3 программиста и 2 аналитика. Доходы программистов оказались равны 100, 80 и 120, а аналитиков – 90 и 130. Считая доходы опрошенных индивидов независимыми постройте 90% доверительный интервал для:

- Ожидаемого дохода случайно взятого программиста, если дисперсия его дохода равняется 225.
- Дисперсии дохода случайно взятого программиста, если его ожидаемый доход равен 120.
- Ожидаемой разницы в доходах случайно взятых программиста и аналитика, если их дисперсии равны и составляют 225.
- Отношения дисперсий доходов случайно взятого программиста к дисперсии дохода случайного взятого аналитика, если их ожидаемые доходы равны и составляют 100.

**Решение:**

- $[(100 + 80 + 120)/3 - 1.645 \times \sqrt{225/3}, (100 + 80 + 120)/3 + 1.645 \times \sqrt{225/3}] \approx [85.75, 114.25]$
- $\left[ \frac{(100-120)^2 + (80-120)^2 + (120-120)^2}{7.81}, \frac{(100-120)^2 + (80-120)^2 + (120-120)^2}{0.35} \right] \approx [256.08, 5714.29]$



# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дополнительный пример

Доходы программистов и аналитиков (в тысячах рублей) хорошо описываются нормальным распределением. Вы случайным образом опросили 3 программиста и 2 аналитика. Доходы программистов оказались равны 100, 80 и 120, а аналитиков – 90 и 130. Считая доходы опрошенных индивидов независимыми постройте 90% доверительный интервал для:

- Ожидаемого дохода случайно взятого программиста, если дисперсия его дохода равняется 225.
- Дисперсии дохода случайно взятого программиста, если его ожидаемый доход равен 120.
- Ожидаемой разницы в доходах случайно взятых программиста и аналитика, если их дисперсии равны и составляют 225.
- Отношения дисперсий доходов случайно взятого программиста к дисперсии дохода случайного взятого аналитика, если их ожидаемые доходы равны и составляют 100.

**Решение:**

- $[(100 + 80 + 120)/3 - 1.645 \times \sqrt{225/3}, (100 + 80 + 120)/3 + 1.645 \times \sqrt{225/3}] \approx [85.75, 114.25]$
- $\left[ \frac{(100-120)^2 + (80-120)^2 + (120-120)^2}{7.81}, \frac{(100-120)^2 + (80-120)^2 + (120-120)^2}{0.35} \right] \approx [256.08, 5714.29]$
- $[((100 + 80 + 120)/3 - (90 + 130)/2) - 1.645 \sqrt{\frac{225}{3} + \frac{225}{2}}, \dots + \dots] \approx [-32.5, 12.5]$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дополнительный пример

Доходы программистов и аналитиков (в тысячах рублей) хорошо описываются нормальным распределением. Вы случайным образом опросили 3 программиста и 2 аналитика. Доходы программистов оказались равны 100, 80 и 120, а аналитиков – 90 и 130. Считая доходы опрошенных индивидов независимыми постройте 90% доверительный интервал для:

- Ожидаемого дохода случайно взятого программиста, если дисперсия его дохода равняется 225.
- Дисперсии дохода случайно взятого программиста, если его ожидаемый доход равен 120.
- Ожидаемой разницы в доходах случайно взятых программиста и аналитика, если их дисперсии равны и составляют 225.
- Отношения дисперсий доходов случайно взятого программиста к дисперсии дохода случайного взятого аналитика, если их ожидаемые доходы равны и составляют 100.

**Решение:**

- $[(100 + 80 + 120)/3 - 1.645 \times \sqrt{225/3}, (100 + 80 + 120)/3 + 1.645 \times \sqrt{225/3}] \approx [85.75, 114.25]$
- $\left[ \frac{(100-120)^2 + (80-120)^2 + (120-120)^2}{7.81}, \frac{(100-120)^2 + (80-120)^2 + (120-120)^2}{0.35} \right] \approx [256.08, 5714.29]$
- $[((100 + 80 + 120)/3 - (90 + 130)/2) - 1.645 \sqrt{\frac{225}{3} + \frac{225}{2}}, \dots + \dots] \approx [-32.5, 12.5]$
- $\left[ \frac{(100-100)^2 + (80-100)^2 + (120-100)^2}{(90-100)^2 + (130-100)^2} \frac{2}{3} 0.052, \frac{(100-100)^2 + (80-100)^2 + (120-100)^2}{(90-100)^2 + (130-100)^2} \frac{2}{3} 9.55 \right] \approx [0.028, 5.093]$

# Теорема Фишера

## Формулировка и применение

- Вспомним формулу исправленной выборочной дисперсии:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

# Теорема Фишера

## Формулировка и применение

- Вспомним формулу исправленной выборочной дисперсии:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

- Согласно теореме Фишера:

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Кроме того,  $\hat{\sigma}_n^2$  и  $\bar{X}_n$  независимы.

# Теорема Фишера

## Формулировка и применение

- Вспомним формулу исправленной выборочной дисперсии:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

- Согласно теореме Фишера:

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Кроме того,  $\hat{\sigma}_n^2$  и  $\bar{X}_n$  независимы.

- При помощи теоремы Фишера покажем следующий результат:

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}} * \frac{\left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sigma}\right)}{\left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sigma}\right)} = \frac{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n-1}}{\frac{\hat{\sigma}_n \sqrt{n-1}}{\sigma \sqrt{n}}} = \frac{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{\hat{\sigma}_n \sqrt{n-1}}{\sigma}} = \frac{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{\hat{\sigma}_n^2 (n-1)}{\sigma^2}}} \sim t(n-1)$$

Мы получили распределение Стьюдента, поскольку, в силу теоремы Фишера, в последнем выражении числитель и знаменатель независимы, причем числитель имеет стандартное нормальное распределение, а выражение под корнем в знаменателе, делимое на  $n-1$ , – Хи-квадрат распределение с  $(n-1)$ -й степенью свободы.

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при неизвестной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$ .

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при неизвестной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при неизвестной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

- Обозначим через  $t_{n,\gamma}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Стюдента с  $n$  степенями свободы и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ . При этом воспользуемся тем, что  $t_{n,1-\gamma/2} = -t_{n,\gamma/2}$ :

$$\left[ \bar{X}_n - t_{n-1,1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \bar{X}_n + t_{n-1,1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \right]$$



# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при неизвестной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

- Обозначим через  $t_{n,\gamma}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Стьюдента с  $n$  степенями свободы и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ . При этом воспользуемся тем, что  $t_{n,1-\gamma/2} = -t_{n,\gamma/2}$ :

$$\left[ \bar{X}_n - t_{n-1,1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \bar{X}_n + t_{n-1,1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \right]$$

**Пример:** по выборке из нормального распределения и с реализацией  $x = (0, 2, 0, 6)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.9.

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при неизвестной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

- Обозначим через  $t_{n,\gamma}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Стьюдента с  $n$  степенями свободы и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ . При этом воспользуемся тем, что  $t_{n,1-\gamma/2} = -t_{n,\gamma/2}$ :

$$\left[ \bar{X}_n - t_{n-1,1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \bar{X}_n + t_{n-1,1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \right]$$

**Пример:** по выборке из нормального распределения и с реализацией  $x = (0, 2, 0, 6)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.9. По таблице распределения Стьюдента находим  $t_{4-1,0.95} \approx 2.35$ . Кроме того  $\bar{x}_4 = (0 + 2 + 0 + 6)/4 = 2$  и  $\hat{\sigma}_4^2(x) = ((0 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (0 - 2)^2 + (6 - 2)^2) / (4 - 1) = 8$ .

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Математическое ожидание при неизвестной дисперсии

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\mu$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

- Обозначим через  $t_{n,\gamma}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Стьюдента с  $n$  степенями свободы и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ . При этом воспользуемся тем, что  $t_{n,1-\gamma/2} = -t_{n,\gamma/2}$ :

$$\left[ \bar{X}_n - t_{n-1,1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \bar{X}_n + t_{n-1,1-\gamma/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \right]$$

**Пример:** по выборке из нормального распределения и с реализацией  $x = (0, 2, 0, 6)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.9. По таблице распределения Стьюдента находим  $t_{4-1,0.95} \approx 2.35$ . Кроме того  $\bar{x}_4 = (0 + 2 + 0 + 6)/4 = 2$  и  $\hat{\sigma}_4^2(x) = ((0 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (0 - 2)^2 + (6 - 2)^2) / (4 - 1) = 8$ .

$$\left[ 2 - 2.35 \sqrt{\frac{8}{4}}, 2 + 2.35 \sqrt{\frac{8}{4}} \right] \approx [-1.32, 5.32]$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при неизвестном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$ .

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при неизвестном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \sigma^2) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при неизвестном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \sigma^2) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- Обозначим через  $\chi_{n,\gamma}^2$  квантиль Хи-квадрат распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi_{n-1, 1-\gamma/2}^2}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi_{n-1, \gamma/2}^2} \right] = \left[ \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1, 1-\gamma/2}^2}, \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1, \gamma/2}^2} \right]$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при неизвестном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \sigma^2) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- Обозначим через  $\chi_{n,\gamma}^2$  квантиль Хи-квадрат распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi_{n-1, 1-\gamma/2}^2}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi_{n-1, \gamma/2}^2} \right] = \left[ \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1, 1-\gamma/2}^2}, \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1, \gamma/2}^2} \right]$$

**Пример:** по выборке из нормального распределения и с реализацией  $x = (0, 1, 5)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.95.

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при неизвестном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \sigma^2) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- Обозначим через  $\chi_{n,\gamma}^2$  квантиль Хи-квадрат распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi_{n-1, 1-\gamma/2}^2}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi_{n-1, \gamma/2}^2} \right] = \left[ \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1, 1-\gamma/2}^2}, \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1, \gamma/2}^2} \right]$$

**Пример:** по выборке из нормального распределения и с реализацией  $x = (0, 1, 5)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.95. Поскольку  $(1 - \gamma) = 0.95$ , то  $\gamma = 0.05$ , откуда по таблице хи-квадрат распределения с  $n = 3 - 1 = 2$  степенями свободы находим  $\chi_{2, 0.05/2}^2 \approx 0.05$  и  $\chi_{2, 1-0.05/2}^2 \approx 7.38$ . Кроме того,  $\bar{x}_3 = (0 + 1 + 5)/3 = 2$ . Отсюда получаем искомую реализацию:



# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Дисперсия при неизвестном математическом ожидании

- По выборке из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  найдем симметричный доверительный интервал для  $\sigma^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$G(X, \sigma^2) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- Обозначим через  $\chi_{n,\gamma}^2$  квантиль Хи-квадрат распределения уровня  $\gamma$  и запишем выражение для доверительного интервала уровня  $(1 - \gamma)$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi_{n-1, 1-\gamma/2}^2}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\chi_{n-1, \gamma/2}^2} \right] = \left[ \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1, 1-\gamma/2}^2}, \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\chi_{n-1, \gamma/2}^2} \right]$$

**Пример:** по выборке из нормального распределения и с реализацией  $x = (0, 1, 5)$  найдем реализацию доверительного интервала с уровнем доверия 0.95. Поскольку  $(1 - \gamma) = 0.95$ , то  $\gamma = 0.05$ , откуда по таблице хи-квадрат распределения с  $n = 3 - 1 = 2$  степенями свободы находим  $\chi_{2, 0.05/2}^2 \approx 0.05$  и  $\chi_{2, 1-0.05/2}^2 \approx 7.38$ . Кроме того,  $\bar{x}_3 = (0 + 1 + 5)/3 = 2$ . Отсюда получаем искомую реализацию:

$$\left[ \frac{(0-2)^2 + (1-2)^2 + (5-2)^2}{7.38}, \frac{(0-2)^2 + (1-2)^2 + (5-2)^2}{0.05} \right] \approx [1.9, 280]$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при равных по объему выборках

- Имеются две равные по объему выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , такие, что  $X - Y$  является выборкой из нормального распределения. Построим доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$ , где  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при равных по объему выборках

- Имеются две равные по объему выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , такие, что  $X - Y$  является выборкой из нормального распределения. Построим доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$ , где  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}}} \sim t(n-1), \text{ где } \hat{\sigma}_{X-Y}^2 \text{ считается по выборке } (X - Y)$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при равных по объему выборках

- Имеются две равные по объему выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , такие, что  $X - Y$  является выборкой из нормального распределения. Построим доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$ , где  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}}} \sim t(n-1), \text{ где } \hat{\sigma}_{X-Y}^2 \text{ считается по выборке } (X - Y)$$

- Нетрудно показать, что  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$  будет иметь вид:

$$\left[ (\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - t_{n-1, 1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}}, (\bar{X}_n - \bar{Y}_n) + t_{n-1, 1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}} \right]$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при равных по объему выборках

- Имеются две равные по объему выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , такие, что  $X - Y$  является выборкой из нормального распределения. Построим доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$ , где  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}}} \sim t(n-1), \text{ где } \hat{\sigma}_{X-Y}^2 \text{ считается по выборке } (X - Y)$$

- Нетрудно показать, что  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$  будет иметь вид:

$$\left[ (\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - t_{n-1, 1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}}, (\bar{X}_n - \bar{Y}_n) + t_{n-1, 1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}} \right]$$

**Пример:** имеются выборки  $X$  и  $Y$ , такие, что  $(X - Y)$  имеет нормальное распределение, причем  $x = (0, 6)$  и  $y = (0, 2)$ . Найдём реализацию 99%-го доверительного интервала для разницы математических ожиданий.

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при равных по объему выборках

- Имеются две равные по объему выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , такие, что  $X - Y$  является выборкой из нормального распределения. Построим доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$ , где  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}}} \sim t(n-1), \text{ где } \hat{\sigma}_{X-Y}^2 \text{ считается по выборке } (X - Y)$$

- Нетрудно показать, что  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$  будет иметь вид:

$$\left[ (\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - t_{n-1, 1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}}, (\bar{X}_n - \bar{Y}_n) + t_{n-1, 1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}} \right]$$

**Пример:** имеются выборки  $X$  и  $Y$ , такие, что  $(X - Y)$  имеет нормальное распределение, причем  $x = (0, 6)$  и  $y = (0, 2)$ . Найдём реализацию 99%-го доверительного интервала для разницы математических ожиданий.

Поскольку  $\bar{x}_2 = 3$ ,  $\bar{y}_2 = 1$ ,  $x - y = (0, 4)$ ,  $\overline{(x - y)}_2 = 2$ ,  $\hat{\sigma}_2^2 = ((0 - 2)^2 + (4 - 2)^2) / (2 - 1) = 8$ ,  $t_{5-1, 0.995} \approx 4.6$ , то:

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Разница математических ожиданий при равных по объему выборках

- Имеются две равные по объему выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , такие, что  $X - Y$  является выборкой из нормального распределения. Построим доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$ , где  $E(X_1) = \mu_X$  и  $E(Y_1) = \mu_Y$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}}} \sim t(n-1), \text{ где } \hat{\sigma}_{X-Y}^2 \text{ считается по выборке } (X - Y)$$

- Нетрудно показать, что  $100(1 - \gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\mu_X - \mu_Y$  будет иметь вид:

$$\left[ (\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - t_{n-1, 1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}}, (\bar{X}_n - \bar{Y}_n) + t_{n-1, 1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{X-Y}^2}{n}} \right]$$

**Пример:** имеются выборки  $X$  и  $Y$ , такие, что  $(X - Y)$  имеет нормальное распределение, причем  $x = (0, 6)$  и  $y = (0, 2)$ . Найдем реализацию 99%-го доверительного интервала для разницы математических ожиданий.

Поскольку  $\bar{x}_2 = 3$ ,  $\bar{y}_2 = 1$ ,  $x - y = (0, 4)$ ,  $(\bar{x} - \bar{y})_2 = 2$ ,  $\hat{\sigma}_2^2 = ((0 - 2)^2 + (4 - 2)^2) / (2 - 1) = 8$ ,  $t_{5-1, 0.995} \approx 4.6$ , то:

$$\left[ 2 - 4.6 \sqrt{\frac{8}{2}}, 2 + 4.6 \sqrt{\frac{8}{2}} \right] \approx [-7.2, 11.2]$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при неизвестных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Построим доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .



# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при неизвестных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Построим доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2} \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \frac{m}{n} \sim F(n-1, m-1)$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при неизвестных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Построим доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2} \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \frac{m}{n} \sim F(n-1, m-1)$$

- Обозначим через  $F_{n,m}^{(\gamma)}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Фишера с  $n$  и  $m$  степенями свободы, откуда получаем  $100(1-\gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \frac{n-1}{m-1} F_{n-1, m-1}^{(\gamma/2)}, \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \frac{n-1}{m-1} F_{n-1, m-1}^{(1-\gamma/2)} \right] = \left[ \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{\hat{\sigma}_X^2} F_{n-1, m-1}^{(\gamma/2)}, \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{\hat{\sigma}_X^2} F_{n-1, m-1}^{(1-\gamma/2)} \right]$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при неизвестных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Построим доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2} \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \frac{m}{n} \sim F(n-1, m-1)$$

- Обозначим через  $F_{n,m}^{(\gamma)}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Фишера с  $n$  и  $m$  степенями свободы, откуда получаем  $100(1-\gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \frac{n-1}{m-1} F_{n-1, m-1}^{(\gamma/2)}, \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \frac{n-1}{m-1} F_{n-1, m-1}^{(1-\gamma/2)} \right] = \left[ \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{\hat{\sigma}_X^2} F_{n-1, m-1}^{(\gamma/2)}, \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{\hat{\sigma}_X^2} F_{n-1, m-1}^{(1-\gamma/2)} \right]$$

**Пример:** имеются независимые выборки из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ . Реализации выборок имеют вид  $x = (1, 3)$  и  $y = (1, 0, 2)$ . Найдем реализацию 90%-го доверительного интервала для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при неизвестных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Построим доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2} \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \frac{m}{n} \sim F(n-1, m-1)$$

- Обозначим через  $F_{n,m}^{(\gamma)}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Фишера с  $n$  и  $m$  степенями свободы, откуда получаем  $100(1-\gamma)\%$  процентный доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \frac{n-1}{m-1} F_{n-1, m-1}^{(\gamma/2)}, \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \frac{n-1}{m-1} F_{n-1, m-1}^{(1-\gamma/2)} \right] = \left[ \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{\hat{\sigma}_X^2} F_{n-1, m-1}^{(\gamma/2)}, \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{\hat{\sigma}_X^2} F_{n-1, m-1}^{(1-\gamma/2)} \right]$$

**Пример:** имеются независимые выборки из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ . Реализации выборок имеют вид  $x = (1, 3)$  и  $y = (1, 0, 2)$ . Найдем реализацию 90%-го доверительного интервала для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ . Учитывая, что  $\bar{x}_2 = (1+3)/2 = 2$  и  $\bar{y}_3 = (1+0+2)/3 = 1$ , получаем:

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

## Отношение дисперсий при неизвестных математических ожиданиях

- Имеются две независимые выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Построим доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ .
- Центральная статистика будет иметь вид:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2} \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \frac{m}{n} \sim F(n-1, m-1)$$

- Обозначим через  $F_{n,m}^{(\gamma)}$  квантиль уровня  $\gamma$  распределения Фишера с  $n$  и  $m$  степенями свободы, откуда получаем  $100(1-\gamma)$  процентный доверительный интервал для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \frac{n-1}{m-1} F_{n-1, m-1}^{(\gamma/2)}, \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \frac{n-1}{m-1} F_{n-1, m-1}^{(1-\gamma/2)} \right] = \left[ \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{\hat{\sigma}_X^2} F_{n-1, m-1}^{(\gamma/2)}, \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{\hat{\sigma}_X^2} F_{n-1, m-1}^{(1-\gamma/2)} \right]$$

**Пример:** имеются независимые выборки из нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ . Реализации выборок имеют вид  $x = (1, 3)$  и  $y = (1, 0, 2)$ . Найдем реализацию 90%-го доверительного интервала для  $\sigma_Y^2/\sigma_X^2$ . Учитывая, что  $\bar{x}_2 = (1+3)/2 = 2$  и  $\bar{y}_3 = (1+0+2)/3 = 1$ , получаем:

$$\left[ \frac{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2}{(1-2)^2 + (3-2)^2} \frac{2-1}{3-1} 0.005, \frac{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2}{(1-2)^2 + (3-2)^2} \frac{2-1}{3-1} 18.5 \right] \approx [0.0025, 9.25]$$

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Замечание по поводу алгоритма выбора формулы

- Если в задаче идет речь о построении доверительного интервала с использованием выборки из нормального распределения, то для выбора нужной формулы достаточно ответить на несколько простых вопросов.

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Замечание по поводу алгоритма выбора формулы

- Если в задаче идет речь о построении доверительного интервала с использованием выборки из нормального распределения, то для выбора нужной формулы достаточно ответить на несколько простых вопросов.
- Известен ли один из двух параметров нормального распределения:  $\mu$  или  $\sigma^2$ ?

# Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Замечание по поводу алгоритма выбора формулы

- Если в задаче идет речь о построении доверительного интервала с использованием выборки из нормального распределения, то для выбора нужной формулы достаточно ответить на несколько простых вопросов.
- Известен ли один из двух параметров нормального распределения:  $\mu$  или  $\sigma^2$ ?
- Доверительный интервал касается математического ожидания, дисперсии, разницы математических ожиданий или отношения дисперсий?