

Теория Вероятностей и Статистика

Основные дискретные распределения

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от параметра θ . Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ .

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от параметра θ . Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ .

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [0, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ . Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ .
- Фиксируя параметр θ на конкретном значении мы получаем конкретное распределение из этого семейства Θ .

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [0, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ . Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ .
- Фиксируя параметр θ на конкретном значении мы получаем конкретное распределение из этого семейства Θ .
- Если случайная величина X имеет распределение Θ с конкретным значением параметра θ , то это записывается как $X \sim \Theta(\theta)$.

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [0, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от параметра θ . Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ .
- Фиксируя параметр θ на конкретном значении мы получаем конкретное распределение из этого семейства Θ .
- Если случайная величина X имеет распределение Θ с конкретным значением параметра θ , то это записывается как $X \sim \Theta(\theta)$.

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [0, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

Обозначим семейство этих распределений как Θ . Тогда, фиксируя $\theta = 0.2$ мы получаем распределение из семейства Θ с параметром $\theta = 0.2$. Если случайная величина X имеет соответствующее распределение, что записывается как $X \sim \Theta(0.2)$, то оно будет иметь вид:

x	1	2	3
$P(X = x)$	0.4	0.5	0.1

Распределение Бернулли

Определение распределения Бернулли

- Случайная величина $X \sim \text{Ber}(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{если } x = 1 \\ 1 - p, & \text{если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

Распределение Бернулли

Определение распределения Бернулли

- Случайная величина $X \sim \text{Ber}(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{если } x = 1 \\ 1 - p, & \text{если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Распределение Бернулли

Определение распределения Бернулли

- Случайная величина $X \sim \text{Ber}(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{если } x = 1 \\ 1 - p, & \text{если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.

Распределение Бернулли

Определение распределения Бернулли

- Случайная величина $X \sim \text{Ber}(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{если } x = 1 \\ 1 - p, & \text{если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.

Решение:

Введем случайную величину X , которая принимает значение 1 – если Юрий получит зачет, и значение 0 – в противном случае. Обратим внимание, что $P(X = 1) = 0.8$ и $P(X = 0) = 0.2$. Следовательно, случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.8$, то есть $X \sim \text{Ber}(0.8)$.

Распределение Бернулли

Определение распределения Бернулли

- Случайная величина $X \sim \text{Ber}(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{если } x = 1 \\ 1 - p, & \text{если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.

Решение:

Введем случайную величину X , которая принимает значение 1 – если Юрий получит зачет, и значение 0 – в противном случае. Обратим внимание, что $P(X = 1) = 0.8$ и $P(X = 0) = 0.2$. Следовательно, случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.8$, то есть $X \sim \text{Ber}(0.8)$.

- Вася бьет по воротам **один раз** и может забить либо один, либо ноль голов. Число забитых Васей голов является Бернуллиевской случайной величиной X с параметром $p = 0.3$. Найдите вероятность того, что Вася **не забьет** гол.

Распределение Бернулли

Определение распределения Бернулли

- Случайная величина $X \sim \text{Ber}(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{если } x = 1 \\ 1 - p, & \text{если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.

Решение:

Введем случайную величину X , которая принимает значение 1 – если Юрий получит зачет, и значение 0 – в противном случае. Обратим внимание, что $P(X = 1) = 0.8$ и $P(X = 0) = 0.2$. Следовательно, случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.8$, то есть $X \sim \text{Ber}(0.8)$.

- Вася бьет по воротам **один раз** и может забить либо один, либо ноль голов. Число забитых Васей голов является Бернуллиевской случайной величиной X с параметром $p = 0.3$. Найдите вероятность того, что Вася **не забьет** гол.

Решение:

Поскольку $p = 0.3$, то $P(X = 1) = 0.3$, а значит $P(X = 0) = 1 - 0.3 = 0.7$.

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

- $Var(X) = p(1 - p)$

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

- $Var(X) = p(1 - p)$

Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

- $Var(X) = p(1 - p)$

Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- $E(X^k) = p$

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

- $Var(X) = p(1 - p)$

Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- $E(X^k) = p$

Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

- $Var(X) = p(1 - p)$

Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- $E(X^k) = p$

Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

- $Var(X) = p(1 - p)$

Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- $E(X^k) = p$

Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

- $Var(X) = p(1 - p)$

Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- $E(X^k) = p$

Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.

- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p .

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

- $Var(X) = p(1 - p)$

Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- $E(X^k) = p$

Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.

- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p .

Решение: $Var(X) = 0.16 \implies p(1 - p) = 0.16 \implies p^2 - p + 0.16 = 0 \implies p \in \{0.2, 0.8\}$

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

- $Var(X) = p(1 - p)$

Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- $E(X^k) = p$

Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.

- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p .

Решение: $Var(X) = 0.16 \implies p(1 - p) = 0.16 \implies p^2 - p + 0.16 = 0 \implies p \in \{0.2, 0.8\}$

- Сумма первых 10-ти начальных моментов Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 1. Найдите $P(X = 0)$.

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

- $Var(X) = p(1 - p)$

Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- $E(X^k) = p$

Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.

- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p .

Решение: $Var(X) = 0.16 \implies p(1 - p) = 0.16 \implies p^2 - p + 0.16 = 0 \implies p \in \{0.2, 0.8\}$

- Сумма первых 10-ти начальных моментов Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 1. Найдите $P(X = 0)$.

Решение: $E(X^1) + E(X^2) + \dots + E(X^{10}) = 10p = 1 \implies p = 0.1 \implies P(X = 0) = 1 - 0.1 = 0.9$.

Распределение Пуассона

Определение распределения Пуассона

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Распределение Пуассона

Определение распределения Пуассона

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.

Распределение Пуассона

Определение распределения Пуассона

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.

Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} \approx 0.22$.

Распределение Пуассона

Определение распределения Пуассона

- Случайная величина $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim \text{Pois}(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.

Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} \approx 0.22$.

- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.

Распределение Пуассона

Определение распределения Пуассона

- Случайная величина $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim \text{Pois}(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.

Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} \approx 0.22$.

- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.

Решение: $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2} \approx 0.68$.

Распределение Пуассона

Определение распределения Пуассона

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.

Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} \approx 0.22$.

- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.

Решение: $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2} \approx 0.68$.

- В предыдущей задаче найдите вероятность того, что кафе посетит хотя бы один человек, если известно, что число посетителей меньше трех.

Распределение Пуассона

Определение распределения Пуассона

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.

Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} \approx 0.22$.

- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.

Решение: $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2} \approx 0.68$.

- В предыдущей задаче найдите вероятность того, что кафе посетит хотя бы один человек, если известно, что число посетителей меньше трех.

Решение: $P(X \geq 1 | X < 3) = \frac{P(1 \leq X < 3)}{P(X < 3)} = \frac{P(X=1) + P(X=2)}{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)} = \frac{\frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2}}{\frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2}} = 0.6$.

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

Доказательство:
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

Доказательство:
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

Доказательство:
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

Доказательство:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \times (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$$

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

Доказательство:
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

Доказательство:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \times (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$$

- $Var(X) = \lambda$

Доказательство:
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

Доказательство:
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

Доказательство:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \times (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$$

- $Var(X) = \lambda$

Доказательство:
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

Доказательство:
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

Доказательство:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \times (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$$

- $Var(X) = \lambda$

Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.

Решение: $Var(X) = E(X) = 5 \implies \lambda = 5 \implies P(X = 6) = \frac{5^6}{6!} e^{-5} \approx 0.146.$

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

Доказательство:
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

Доказательство:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \times (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$$

- $Var(X) = \lambda$

Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.

Решение: $Var(X) = E(X) = 5 \implies \lambda = 5 \implies P(X = 6) = \frac{5^6}{6!} e^{-5} \approx 0.146.$

- Число привлеченных клиентов является Пуассоновской случайной с математическим ожиданием 5. Найдите математическое ожидание X , если известно, что удалось привлечь менее двух клиентов.

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

Доказательство:
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

Доказательство:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) k^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \times (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$$

- $Var(X) = \lambda$

Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.

Решение: $Var(X) = E(X) = 5 \implies \lambda = 5 \implies P(X = 6) = \frac{5^6}{6!} e^{-5} \approx 0.146.$

- Число привлеченных клиентов является Пуассоновской случайной с математическим ожиданием 5. Найдите математическое ожидание X , если известно, что удалось привлечь менее двух клиентов.

Решение: $E(X|X < 2) = P(X = 0|X < 2) \times 0 + P(X = 1|X < 2) \times 1 = P(X = 1|X < 2) = \frac{5e^{-5}}{5e^{-5} + e^{-5}} = \frac{5}{6}$

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i), i \in \{1, \dots, n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)$.

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i), i \in \{1, \dots, n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i), i \in \{1, \dots, n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров

Решение:

Через $X_1 \sim \text{Pois}(1)$, $X_2 \sim \text{Pois}(2)$, $X_3 \sim \text{Pois}(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости $X_1 + X_2 + X_3 \sim \text{Pois}(1 + 2 + 5) = \text{Pois}(8)$.

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i), i \in \{1, \dots, n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров

Решение:

Через $X_1 \sim \text{Pois}(1)$, $X_2 \sim \text{Pois}(2)$, $X_3 \sim \text{Pois}(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости

$X_1 + X_2 + X_3 \sim \text{Pois}(1 + 2 + 5) = \text{Pois}(8)$. Отсюда получаем:

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!} e^{-8} \approx 0.1$$

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i), i \in \{1, \dots, n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров

Решение:

Через $X_1 \sim \text{Pois}(1)$, $X_2 \sim \text{Pois}(2)$, $X_3 \sim \text{Pois}(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости

$X_1 + X_2 + X_3 \sim \text{Pois}(1 + 2 + 5) = \text{Pois}(8)$. Отсюда получаем:

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!} e^{-8} \approx 0.1$$

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = \text{Var}(X_1 + X_2 + X_3) = 8$$

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i), i \in \{1, \dots, n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров

Решение:

Через $X_1 \sim \text{Pois}(1)$, $X_2 \sim \text{Pois}(2)$, $X_3 \sim \text{Pois}(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости

$X_1 + X_2 + X_3 \sim \text{Pois}(1 + 2 + 5) = \text{Pois}(8)$. Отсюда получаем:

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!} e^{-8} \approx 0.1$$

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = \text{Var}(X_1 + X_2 + X_3) = 8$$

- Имеются шесть идентичных, работающих независимо роботов. Число попыток захватить человечество для каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 0.5$. Найдите вероятность того, хотя бы один из роботов попытается захватить человечество.

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i), i \in \{1, \dots, n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров

Решение:

Через $X_1 \sim \text{Pois}(1)$, $X_2 \sim \text{Pois}(2)$, $X_3 \sim \text{Pois}(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости

$X_1 + X_2 + X_3 \sim \text{Pois}(1 + 2 + 5) = \text{Pois}(8)$. Отсюда получаем:

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!} e^{-8} \approx 0.1$$

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = \text{Var}(X_1 + X_2 + X_3) = 8$$

- Имеются шесть идентичных, работающих независимо роботов. Число попыток захватить человечество для каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 0.5$. Найдите вероятность того, хотя бы один из роботов попытается захватить человечество.

Решение: $P(X_1 + \dots + X_6 \geq 1) = 1 - P(X_1 + \dots + X_6 = 0) = 1 - \frac{(6 \times 0.5)^0}{0!} e^{-6 \times 0.5} \approx 0.95$

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1 - p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1 - p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n = 3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1, 1, 0)$.

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1 - p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n = 3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1, 1, 0)$.
- Пусть X_1, X_2, \dots, X_n – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p . Тогда вероятность элементарного события $(1, 1, 0)$ можно записать как:

$$P(\{(1, 1, 0)\}) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times P(X_3 = 0) = p \times p \times (1 - p) = p^2(1 - p)$$

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1 - p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n = 3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1, 1, 0)$.
- Пусть X_1, X_2, \dots, X_n – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p . Тогда вероятность элементарного события $(1, 1, 0)$ можно записать как:

$$P(\{(1, 1, 0)\}) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times P(X_3 = 0) = p \times p \times (1 - p) = p^2(1 - p)$$

- Вероятность того, что в серии из $n = 3$ испытаний Бернулли ровно два закончатся успехом равняется:

$$P(\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}) = p^2(1 - p) + p^2(1 - p) + p^2(1 - p) = 3p^2(1 - p) = C_3^2 p^2(1 - p)$$

Для получения искомой вероятности мы сложили все элементарные события с двумя успехами. Эти элементарные события **равновероятны** и их число совпадает с **количеством способов** выбрать $x = 2$ позиции из $n = 3$ под единицы – C_3^2 .

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1 - p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n = 3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1, 1, 0)$.
- Пусть X_1, X_2, \dots, X_n – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p . Тогда вероятность элементарного события $(1, 1, 0)$ можно записать как:

$$P(\{(1, 1, 0)\}) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times P(X_3 = 0) = p \times p \times (1 - p) = p^2(1 - p)$$

- Вероятность того, что в серии из $n = 3$ испытаний Бернулли ровно два закончатся успехом равняется:

$$P(\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}) = p^2(1 - p) + p^2(1 - p) + p^2(1 - p) = 3p^2(1 - p) = C_3^2 p^2(1 - p)$$

Для получения искомой вероятности мы сложили все элементарные события с двумя успехами. Эти элементарные события **равновероятны** и их число совпадает с **количеством способов** выбрать $x = 2$ позиции из $n = 3$ под единицы – C_3^2 .

- Приведенная логика справедлива и для произвольных x и n , откуда:

$$P(x \text{ успехов в серии из } n \text{ испытаний Бернулли}) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}$$

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1 - p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n = 3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1, 1, 0)$.
- Пусть X_1, X_2, \dots, X_n – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p . Тогда вероятность элементарного события $(1, 1, 0)$ можно записать как:

$$P(\{(1, 1, 0)\}) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times P(X_3 = 0) = p \times p \times (1 - p) = p^2(1 - p)$$

- Вероятность того, что в серии из $n = 3$ испытаний Бернулли ровно два закончатся успехом равняется:

$$P(\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}) = p^2(1 - p) + p^2(1 - p) + p^2(1 - p) = 3p^2(1 - p) = C_3^2 p^2(1 - p)$$

Для получения искомой вероятности мы сложили все элементарные события с двумя успехами. Эти элементарные события **равновероятны** и их число совпадает с **количеством способов** выбрать $x = 2$ позиции из $n = 3$ под единицы – C_3^2 .

- Приведенная логика справедлива и для произвольных x и n , откуда:

$$P(x \text{ успехов в серии из } n \text{ испытаний Бернулли}) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}$$

- Дискретное вероятностное пространство, порождаемое серией испытаний Бернулли, именуется **схемой Бернулли**.

Биномиальное распределение

Определение биномиального распределения

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

Биномиальное распределение

Определение биномиального распределения

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.

Биномиальное распределение

Определение биномиального распределения

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин X_1, \dots, X_n с параметром p , имеет биномиальное распределение $\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$.

Биномиальное распределение

Определение биномиального распределения

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин X_1, \dots, X_n с параметром p , имеет биномиальное распределение $\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$.

Пример:

- Каждый раз, независимо от результатов предыдущих попыток, Арсений забивает гол в ворота с вероятностью 0.8. Найдите вероятность того, что за пять ударов он забьет ровно три гола.

Биномиальное распределение

Определение биномиального распределения

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин X_1, \dots, X_n с параметром p , имеет биномиальное распределение $\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$.

Пример:

- Каждый раз, независимо от результатов предыдущих попыток, Арсений забивает гол в ворота с вероятностью 0.8. Найдите вероятность того, что за пять ударов он забьет ровно три гола.

Решение:

Число голов, которые Арсений забивает за **одну** попытку, является Бернуллиевской случайной величиной с параметром $p = 0.8$, поскольку за один раз он может забить либо 0 голов, либо 1 гол. Из условия следует, что эти Бернуллиевские случайных величины независимы, а значит их сумма, отражающая общее число голов, будет иметь Биномиальное распределение $X \sim B(5, 0.8)$

Биномиальное распределение

Определение биномиального распределения

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин X_1, \dots, X_n с параметром p , имеет биномиальное распределение $\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$.

Пример:

- Каждый раз, независимо от результатов предыдущих попыток, Арсений забивает гол в ворота с вероятностью 0.8. Найдите вероятность того, что за пять ударов он забьет ровно три гола.

Решение:

Число голов, которые Арсений забивает за **одну** попытку, является Бернуллиевской случайной величиной с параметром $p = 0.8$, поскольку за один раз он может забить либо 0 голов, либо 1 гол. Из условия следует, что эти Бернуллиевские случайных величины независимы, а значит их сумма, отражающая общее число голов, будет иметь Биномиальное распределение $X \sim B(5, 0.8)$, откуда:

$$P(X = 3) = C_5^3 0.8^3 (1 - 0.8)^{5-3} \approx 0.2$$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, где X_1, \dots, X_n i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, где X_1, \dots, X_n i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, где X_1, \dots, X_n i.i.d. и $X_1 \sim \text{Ber}(p)$.

- $E(X) = np$

Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ раз}} = np$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, где X_1, \dots, X_n i.i.d. и $X_1 \sim \text{Ber}(p)$.

- $E(X) = np$

Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ раз}} = np$

- $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, где X_1, \dots, X_n i.i.d. и $X_1 \sim \text{Ber}(p)$.

- $E(X) = np$

Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ раз}} = np$

- $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Доказательство: $\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = \underbrace{p(1 - p) + \dots + p(1 - p)}_{n \text{ раз}} = np(1 - p)$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, где X_1, \dots, X_n i.i.d. и $X_1 \sim \text{Ber}(p)$.

- $E(X) = np$

Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ раз}} = np$

- $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Доказательство: $\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = \underbrace{p(1 - p) + \dots + p(1 - p)}_{n \text{ раз}} = np(1 - p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, где X_1, \dots, X_n i.i.d. и $X_1 \sim \text{Ber}(p)$.

- $E(X) = np$

Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ раз}} = np$

- $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Доказательство: $\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = \underbrace{p(1 - p) + \dots + p(1 - p)}_{n \text{ раз}} = np(1 - p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.

Решение:

$$X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, \text{Var}(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X = 7) = C_{10}^7 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, где X_1, \dots, X_n i.i.d. и $X_1 \sim \text{Ber}(p)$.

- $E(X) = np$

Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ раз}} = np$

- $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Доказательство: $\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = \underbrace{p(1 - p) + \dots + p(1 - p)}_{n \text{ раз}} = np(1 - p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.

Решение:

$$X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, \text{Var}(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X = 7) = C_{10}^7 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$$

- В выборах начальника отдела участвуют 8 сотрудников. Число голосов за Ивана (из 8 возможных) описывается биномиальным распределением с дисперсией 2. Найдите математическое ожидание числа голосов за Ивана, если за него проголосовало не менее 6 участников.

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, где X_1, \dots, X_n i.i.d. и $X_1 \sim \text{Ber}(p)$.

- $E(X) = np$

Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ раз}} = np$

- $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Доказательство: $\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = \underbrace{p(1 - p) + \dots + p(1 - p)}_{n \text{ раз}} = np(1 - p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.

Решение:

$$X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, \text{Var}(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X = 7) = C_{10}^7 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$$

- В выборах начальника отдела участвуют 8 сотрудников. Число голосов за Ивана (из 8 возможных) описывается биномиальным распределением с дисперсией 2. Найдите математическое ожидание числа голосов за Ивана, если за него проголосовало не менее 6 участников.

Решение:

$$X \sim B(8, p) \implies \text{Var}(X) = 8 \times p(1 - p) = 2 \implies p^2 - p + 0.25 = 0 \implies p = 0.5$$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, где X_1, \dots, X_n i.i.d. и $X_1 \sim \text{Ber}(p)$.

- $E(X) = np$

Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ раз}} = np$

- $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Доказательство: $\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = \underbrace{p(1 - p) + \dots + p(1 - p)}_{n \text{ раз}} = np(1 - p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.

Решение:

$$X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, \text{Var}(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X = 7) = C_{10}^7 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$$

- В выборах начальника отдела участвуют 8 сотрудников. Число голосов за Ивана (из 8 возможных) описывается биномиальным распределением с дисперсией 2. Найдите математическое ожидание числа голосов за Ивана, если за него проголосовало не менее 6 участников.

Решение:

$$X \sim B(8, p) \implies \text{Var}(X) = 8 \times p(1 - p) = 2 \implies p^2 - p + 0.25 = 0 \implies p = 0.5$$

$$E(X|X \geq 6) = P(X = 6|X \geq 6) \times 6 + P(X = 7|X \geq 6) \times 7 + P(X = 8|X \geq 6) \times 8 = \frac{P(X=6) \times 6 + P(X=7) \times 7 + P(X=8) \times 8}{P(X=6) + P(X=7) + P(X=8)} \approx \\ \approx (0.109 \times 6 + 0.031 \times 7 + 0.004 \times 8) / (0.109 + 0.031 + 0.004) \approx 6.27$$

Геометрическое распределение

Определение геометрического распределения

- Случайная величина $X \sim \text{Geom}(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1]$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} (1 - p)^x p, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Геометрическое распределение

Определение геометрического распределения

- Случайная величина $X \sim \text{Geom}(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1]$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} (1 - p)^x p, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- Геометрическая случайная величина отражает число неудач до первого успеха в бесконечной серии испытаний Бернулли. Пусть X_1, X_2, \dots – бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин, где $X_i = 1$, если успех наступил в i -м испытании, тогда:

$$P(X = x) = P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0) \times P(X_{x+1} = 1) = \underbrace{(1 - p) \times \dots \times (1 - p)}_{x \text{ раз}} \times p = (1 - p)^x p$$

Геометрическое распределение

Определение геометрического распределения

- Случайная величина $X \sim \text{Geom}(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1]$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} (1 - p)^x p, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- Геометрическая случайная величина отражает число неудач до первого успеха в бесконечной серии испытаний Бернулли. Пусть X_1, X_2, \dots – бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин, где $X_i = 1$, если успех наступил в i -м испытании, тогда:

$$P(X = x) = P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0) \times P(X_{x+1} = 1) = \underbrace{(1 - p) \times \dots \times (1 - p)}_{x \text{ раз}} \times p = (1 - p)^x p$$

Пример:

- София кидает кубик до тех пор, пока на нем не выпадет число меньше 3. Найдите вероятность того, София сделает 6 бросков.

Геометрическое распределение

Определение геометрического распределения

- Случайная величина $X \sim \text{Geom}(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1]$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} (1 - p)^x p, & \text{если } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- Геометрическая случайная величина отражает число неудач до первого успеха в бесконечной серии испытаний Бернулли. Пусть X_1, X_2, \dots – бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин, где $X_i = 1$, если успех наступил в i -м испытании, тогда:

$$P(X = x) = P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0) \times P(X_{x+1} = 1) = \underbrace{(1 - p) \times \dots \times (1 - p)}_{x \text{ раз}} \times p = (1 - p)^x p$$

Пример:

- София кидает кубик до тех пор, пока на нем не выпадет число меньше 3. Найдите вероятность того, София сделает 6 бросков.

Решение: Число бросков **до того**, как выпадет число меньше 3, является геометрической случайной величиной X с параметром $p = \frac{1}{3}$. Общее число бросков является случайной величиной $X + 1$, а значит:

$$P(X + 1 = 6) = P(X = 5) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^5 \times \frac{1}{3} = \frac{32}{729}$$

Геометрическое распределение

Моменты геометрического распределения

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.

Геометрическое распределение

Моменты геометрического распределения

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$

Геометрическое распределение

Моменты геометрического распределения

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Геометрическое распределение

Моменты геометрического распределения

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Примеры:

- Джек грабит банки до тех пор, пока его не поймают. Каждый раз вероятность того, что ограбление пройдет успешно, составляет 0.8. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа успешных ограблений и числа попыток ограблений.

Геометрическое распределение

Моменты геометрического распределения

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Примеры:

- Джек грабит банки до тех пор, пока его не поймают. Каждый раз вероятность того, что ограбление пройдет успешно, составляет 0.8. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа успешных ограблений и числа попыток ограблений.

Решение:

$X \sim Geom(0.1)$ – число успешных ограблений:

$$E(X) = \frac{1-0.1}{0.1} = 9$$

$$Var(X) = \frac{1-0.1}{0.1^2} = 90$$

Геометрическое распределение

Моменты геометрического распределения

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Примеры:

- Джек грабит банки до тех пор, пока его не поймают. Каждый раз вероятность того, что ограбление пройдет успешно, составляет 0.8. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа успешных ограблений и числа попыток ограблений.

Решение:

$X \sim Geom(0.1)$ – число успешных ограблений:

$$E(X) = \frac{1-0.1}{0.1} = 9$$

$$Var(X) = \frac{1-0.1}{0.1^2} = 90$$

$X + 1$ – число попыток ограблений:

$$E(X + 1) = E(X) + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$Var(X + 1) = Var(X) = 90$$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$

Доказательство:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x + 1) = 1 - (1 - p)^{x+1}$$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$

Доказательство:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x + 1) = 1 - (1 - p)^{x+1}$$

- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$

Доказательство:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x + 1) = 1 - (1 - p)^{x+1}$$

- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$

Доказательство:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x + 1) = 1 - (1 - p)^{x+1}$$

- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$

Доказательство:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x + 1) = 1 - (1 - p)^{x+1}$$

- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.

Решение: $P(X \leq 5) = F_X(5) = 1 - (1 - 0.3)^{5+1} \approx 0.88$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$

Доказательство:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x + 1) = 1 - (1 - p)^{x+1}$$

- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.
Решение: $P(X \leq 5) = F_X(5) = 1 - (1 - 0.3)^{5+1} \approx 0.88$
- Вероятность устроиться на работу по результатам очередного собеседования для Никиты неизменно составляет 0.2. Рассчитайте вероятность того, что Никите придется пройти не менее 8 собеседований, если известно, что он уже провалил 2.

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$

Доказательство:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x + 1) = 1 - (1 - p)^{x+1}$$

- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.

Решение: $P(X \leq 5) = F_X(5) = 1 - (1 - 0.3)^{5+1} \approx 0.88$

- Вероятность устроиться на работу по результатам очередного собеседования для Никиты неизменно составляет 0.2. Рассчитайте вероятность того, что Никите придется пройти не менее 8 собеседований, если известно, что он уже провалил 2.

Решение:

Воспользуемся свойством отсутствия памяти:

$$P(X \geq 8 | X \geq 2) = P(X \geq 2 + 6 | X \geq 2) = P(X \geq 6) = (1 - 0.2)^6 \approx 0.26$$

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \dots, p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p_1, \dots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}, & \text{если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \dots, p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p_1, \dots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}, & \text{если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \dots, p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p_1, \dots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}, & \text{если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маргинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \dots, p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p_1, \dots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}, & \text{если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маргинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Пример:

- В выборах принимают участие 3 кандидата и 10 независимо голосующих избирателей. За первого из кандидатов случайно выбранный избиратель голосует с вероятностью 0.2, за второго – с вероятностью 0.3, а за третьего – с вероятностью 0.5. Найдите вероятность того, что первый кандидат получит 1 голос, второй – 2 голоса, а третий – 7 голосов. Также вычислите вероятность, с которой второй кандидат наберет 6 голосов.

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \dots, p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p_1, \dots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}, & \text{если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маргинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Пример:

- В выборах принимают участие 3 кандидата и 10 независимо голосующих избирателей. За первого из кандидатов случайно выбранный избиратель голосует с вероятностью 0.2, за второго – с вероятностью 0.3, а за третьего – с вероятностью 0.5. Найдите вероятность того, что первый кандидат получит 1 голос, второй – 2 голоса, а третий – 7 голосов. Также вычислите вероятность, с которой второй кандидат наберет 6 голосов.

Решение:

$$X \sim M(10, 0.2, 0.3, 0.5) \implies P(X = (1, 2, 7)) = \frac{10!}{1!2!7!} 0.2^1 0.3^2 0.5^7 \approx 0.05$$

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \dots, p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p_1, \dots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}, & \text{если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маргинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Пример:

- В выборах принимают участие 3 кандидата и 10 независимо голосующих избирателей. За первого из кандидатов случайно выбранный избиратель голосует с вероятностью 0.2, за второго – с вероятностью 0.3, а за третьего – с вероятностью 0.5. Найдите вероятность того, что первый кандидат получит 1 голос, второй – 2 голоса, а третий – 7 голосов. Также вычислите вероятность, с которой второй кандидат наберет 6 голосов.

Решение:

$$X \sim M(10, 0.2, 0.3, 0.5) \implies P(X = (1, 2, 7)) = \frac{10!}{1!2!7!} 0.2^1 0.3^2 0.5^7 \approx 0.05$$

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \dots, p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $p_1, \dots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}, & \text{если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маргинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Пример:

- В выборах принимают участие 3 кандидата и 10 независимо голосующих избирателей. За первого из кандидатов случайно выбранный избиратель голосует с вероятностью 0.2, за второго – с вероятностью 0.3, а за третьего – с вероятностью 0.5. Найдите вероятность того, что первый кандидат получит 1 голос, второй – 2 голоса, а третий – 7 голосов. Также вычислите вероятность, с которой второй кандидат наберет 6 голосов.

Решение:

$$X \sim M(10, 0.2, 0.3, 0.5) \implies P(X = (1, 2, 7)) = \frac{10!}{1!2!7!} 0.2^1 0.3^2 0.5^7 \approx 0.05$$

$$X_2 \sim B(10, 0.3) \implies P(X_2 = 6) = C_{10}^6 0.3^6 (1 - 0.3)^{10-6} \approx 0.037$$

Мультиномиальное распределение

Логика формирования мультиномиального распределения

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от компании A , B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.

Мультиномиальное распределение

Логика формирования мультиномиального распределения

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от компании A , B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.
- Вероятность того, что первые три покупателя приобретут телефон компании A , следующие четыре покупателя отдадут предпочтение телефону компании B , а последние два выберут телефон компании C составит:

$$P(\{(A, A, A, B, B, B, B, C, C)\}) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.1 \times 0.1 = 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

Мультиномиальное распределение

Логика формирования мультиномиального распределения

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от компании A , B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.
- Вероятность того, что первые три покупателя приобретут телефон компании A , следующие четыре покупателя отдадут предпочтение телефону компании B , а последние два выберут телефон компании C составит:

$$P(\{(A, A, A, B, B, B, B, C, C)\}) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.1 \times 0.1 = 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

- Вероятность события \mathcal{D} , в соответствии с которым три покупателя выберут A , четверо B и двое C окажется больше в число раз, которым можно поменять местами элементы последовательности $A, A, A, B, B, B, B, C, C$, что можно сделать следующим числом способов:

$$C_9^3 C_{(9-3)}^4 C_{(9-3-4)}^2 = C_9^3 C_6^4 C_2^2 = \frac{9!}{6!3!} \frac{6!}{2!4!} \frac{2!}{0!2!} = \frac{9!}{3!4!2!}$$

Мультиномиальное распределение

Логика формирования мультиномиального распределения

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от компании A , B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.
- Вероятность того, что первые три покупателя приобретут телефон компании A , следующие четыре покупателя отдадут предпочтение телефону компании B , а последние два выберут телефон компании C составит:

$$P(\{(A, A, A, B, B, B, B, C, C)\}) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.1 \times 0.1 = 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

- Вероятность события \mathcal{D} , в соответствии с которым три покупателя выберут A , четверо B и двое C окажется больше в число раз, которым можно поменять местами элементы последовательности $A, A, A, B, B, B, B, C, C$, что можно сделать следующим числом способов:

$$C_9^3 C_{(9-3)}^4 C_{(9-3-4)}^2 = C_9^3 C_6^4 C_2^2 = \frac{9!}{6!3!} \frac{6!}{2!4!} \frac{2!}{0!2!} = \frac{9!}{3!4!2!}$$

- В результате вероятность события \mathcal{D} рассчитывается в соответствии с мультиномиальным распределением $X \sim M(9, 0.4, 0.5, 0.1)$:

$$P(\mathcal{D}) = P(X = (3, 4, 2)) = \frac{9!}{3!4!2!} 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \dots, np_m)$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \dots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \dots, m\}$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \dots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \dots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \dots, m\}$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \dots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \dots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \dots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \dots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \dots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \dots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.

Решение:

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0.2 - 0.7 = 0.1$$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \dots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \dots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \dots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.

Решение:

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0.2 - 0.7 = 0.1$$

$$E(X) = (0.2 \times 100, 0.7 \times 100, 0.1 \times 100) = (20, 70, 10)$$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \dots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \dots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \dots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.

Решение:

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0.2 - 0.7 = 0.1$$

$$E(X) = (0.2 \times 100, 0.7 \times 100, 0.1 \times 100) = (20, 70, 10)$$

$$Cov(X) = \begin{bmatrix} 100 \times 0.2 \times (1 - 0.2) & -100 \times 0.2 \times 0.7 & -100 \times 0.2 \times 0.1 \\ -100 \times 0.2 \times 0.7 & 100 \times 0.7 \times (1 - 0.7) & -100 \times 0.7 \times 0.1 \\ -100 \times 0.2 \times 0.1 & -100 \times 0.7 \times 0.1 & 100 \times 0.1 \times (1 - 0.1) \end{bmatrix}$$