Теория Вероятностей и Статистика

Основные дискретные распределения

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ. Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ.

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ. Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ.

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [0, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ. Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ.
- Фиксируя параметр θ на конкретном значении мы получаем конкретное распределение из этого семейства Θ.

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [0, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ. Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ.
- Фиксируя параметр θ на конкретном значении мы получаем конкретное распределение из этого семейства Θ.
- Если случайная величина X имеет распределение Θ с конкретным значением параметра θ, то это записывается как $X \sim \Theta(\theta)$.

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [0, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ. Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ.
- Фиксируя параметр θ на конкретном значении мы получаем конкретное распределение из этого семейства Θ.
- Если случайная величина X имеет распределение Θ с конкретным значением параметра θ, то это записывается как $X \sim \Theta(\theta)$.

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [0, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

Обозначим семейство этих распределений как Θ. Тогда, фиксируя $\theta = 0.2$ мы получаем распределение из семейства Θ с параметром $\theta = 0.2$. Если случайная величина X имеет соответствующее распределение, что записывается как $X \sim \Theta(0.2)$, то оно будет иметь вид:

x	1	2	3
$P(X = x)$	0.4	0.5	0.1

Распределение Бернулли

Определение распределения Бернулли

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0,1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1 - p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

Определение распределения Бернулли

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1 - p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1 - p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0,1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1 - p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.
  Решение:
  Введем случайную величину X, которая принимает значение 1 – если Юрий получит зачет, и значение 0 – в противном случае. Обратим внимание, что $P(X = 1) = 0.8$ и $P(X = 0) = 0.2$. Следовательно, случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.8$, то есть $X \sim Ber(0.8)$.

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0,1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1 - p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.
  Решение:
  Введем случайную величину X, которая принимает значение 1 – если Юрий получит зачет, и значение 0 – в противном случае. Обратим внимание, что $P(X = 1) = 0.8$ и $P(X = 0) = 0.2$. Следовательно, случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.8$, то есть $X \sim Ber(0.8)$.
- Вася бьет по воротам **один раз** и может забить либо один, либо ноль голов. Число забитых Васей голов является Бернуллиевской случайной величиной X с параметром $p = 0.3$. Найдите вероятность того, что Вася **не забьет** гол.

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1 - p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.
  Решение:
  Введем случайную величину X, которая принимает значение 1 – если Юрий получит зачет, и значение 0 – в противном случае. Обратим внимание, что $P(X = 1) = 0.8$ и $P(X = 0) = 0.2$. Следовательно, случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.8$, то есть $X \sim Ber(0.8)$.
- Вася бьет по воротам **один раз** и может забить либо один, либо ноль голов. Число забитых Васей голов является Бернуллиевской случайной величиной X с параметром $p = 0.3$. Найдите вероятность того, что Вася **не забьет** гол.
  Решение:
  Поскольку $p = 0.3$, то $P(X = 1) = 0.3$, а значит $P(X = 0) = 1 - 0.3 = 0.7$.

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

Распределение Бернулли
Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
  Решение: $E(X) = 0.7, \ Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21.$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
  Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.
- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p.

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
  Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.
- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p.
  Решение: $Var(X) = 0.16 \implies p(1 - p) = 0.16 \implies p^2 - p + 0.16 = 0 \implies p \in \{0.2, 0.8\}$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X=1) \times 1 + P(X=0) \times 0 = p \times 1 + (1-p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1-p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
  Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.
- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p.
  Решение: $Var(X) = 0.16 \implies p(1-p) = 0.16 \implies p^2 - p + 0.16 = 0 \implies p \in \{0.2, 0.8\}$
- Сумма первых 10-ти начальных моментов Бернуллиевской сулчайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 1. Найдите $P(X = 0)$.

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
  Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.
- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p.
  Решение: $Var(X) = 0.16 \implies p(1 - p) = 0.16 \implies p^2 - p + 0.16 = 0 \implies p \in \{0.2, 0.8\}$
- Сумма первых 10-ти начальных моментов Бернуллиевской сулчайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 1. Найдите $P(X = 0)$.
  Решение: $E(X^1) + E(X^2) + \cdots + E(X^{10}) = 10p = 1 \implies p = 0.1 \implies P(X = 0) = 1 - 0.1 = 0.9$.

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \text{ supp}(X) = \{0, 1, 2\cdots\}$$

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \text{ supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1, 2\cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.
  Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!}e^{-3} \approx 0.22.$

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \mathrm{supp}(X) = \{0, 1, 2\cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.
  Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!}e^{-3} \approx 0.22$.
- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1, 2\cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.
Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!}e^{-3} \approx 0.22$.
- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.
Решение: $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} \approx 0.68$.

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0,1,2,\cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0,1,2\cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.
  Решение: $P(X=2) = \frac{3^2}{2!}e^{-3} \approx 0.22$.
- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.
  Решение: $P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} \approx 0.68$.
- В предыдущей задаче найдите вероятность того, что кафе посетит хотя бы один человек, если известно, что число посетителей меньше трех.

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} \quad , \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.
  Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} \approx 0.22.$
- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.
  Решение: $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2} \approx 0.68.$
- В предыдущей задаче найдите вероятность того, что кафе посетит хотя бы один человек, если известно, что число посетителей меньше трех.
  Решение: $P(X \geq 1 | X < 3) = \frac{P(1 \leq X < 3)}{P(X < 3)} = \frac{P(X=1)+P(X=2)}{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)} = \frac{\frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2}}{\frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2}} = 0.6.$

- $E(X) = \lambda$

- $E(X)=\lambda$

Доказательство: $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k=e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X)=\lambda$

  Доказательство: $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k=e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$
- $E(X^2)=\lambda^2+\lambda$

- $E(X)=\lambda$
  Доказательство: $E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$
- $E(X^2)=\lambda^2+\lambda$
  Доказательство:
  $E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda})=\lambda^2+\lambda$

Распределение Пуассона
Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

  Доказательство: $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

  Доказательство:

  $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$

- $Var(X) = \lambda$

  Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

  Доказательство: $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

  Доказательство:

  $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$

- $Var(X) = \lambda$

  Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.

- $E(X)=\lambda$
  Доказательство: $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k=e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$
- $E(X^2)=\lambda^2+\lambda$
  Доказательство:
  $E(X^2)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2=\lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda})=\lambda^2+\lambda$
- $Var(X)=\lambda$
  Доказательство: $Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.
  Решение: $Var(X)=E(X)=5\implies\lambda=5\implies P(X=6)=\frac{5^6}{6!}e^{-5}\approx 0.146.$

- $E(X) = \lambda$

  Доказательство: $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$
- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

  Доказательство:

  $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$
- $Var(X) = \lambda$

  Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.

  Решение: $Var(X) = E(X) = 5 \implies \lambda = 5 \implies P(X = 6) = \frac{5^6}{6!}e^{-5} \approx 0.146.$
- Число привлеченных клиентов является Пуассоновской случайной с математическим ожиданием 5. Найдите математическое ожидание X, если известно, что удалось привлечь менее двух клиентов.

- $E(X) = \lambda$

  Доказательство: $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

  Доказательство:

  $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$

- $Var(X) = \lambda$

  Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.

  Решение: $Var(X) = E(X) = 5 \implies \lambda = 5 \implies P(X = 6) = \frac{5^6}{6!}e^{-5} \approx 0.146.$

- Число привлеченных клиентов является Пуассоновской случайной с математическим ожиданием 5. Найдите математическое ожидание X, если известно, что удалось привлечь менее двух клиентов.

  Решение: $E(X|X<2) = P(X=0|X<2)\times 0 + P(X=1|X<2)\times 1 = P(X=1|X<2) = \frac{5e^{-5}}{5e^{-5}+e^{-5}} = \frac{5}{6}$

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров

Распределение Пуассона
Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров
  Решение:
  Через $X_1 \sim Pois(1)$, $X_2 \sim Pois(2)$, $X_2 \sim Pois(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости
  $X_1 + X_2 + X_3 \sim Pois(1 + 2 + 5) = Pois(8)$.

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров
  Решение:
  Через $X_1 \sim Pois(1)$, $X_2 \sim Pois(2)$, $X_2 \sim Pois(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости
  $X_1 + X_2 + X_3 \sim Pois(1 + 2 + 5) = Pois(8)$. Отсюда получаем:
  $P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!}e^{-8} \approx 0.1$

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров
  Решение:
  Через $X_1 \sim Pois(1)$, $X_2 \sim Pois(2)$, $X_2 \sim Pois(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости
  $X_1 + X_2 + X_3 \sim Pois(1 + 2 + 5) = Pois(8)$. Отсюда получаем:
  $P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!}e^{-8} \approx 0.1$
  $E(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1 + X_2 + X_3) = 8$

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров
  Решение:
  Через $X_1 \sim Pois(1)$, $X_2 \sim Pois(2)$, $X_2 \sim Pois(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости
  $X_1 + X_2 + X_3 \sim Pois(1 + 2 + 5) = Pois(8)$. Отсюда получаем:
  $P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!}e^{-8} \approx 0.1$
  $E(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1 + X_2 + X_3) = 8$
- Имеются шесть идентичных, работающих независимо роботов. Число попыток захватить человечество для каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 0.5$. Найдите вероятность того, хотя бы один из роботов попытается захватить человечество.

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров
  Решение:
  Через $X_1 \sim Pois(1)$, $X_2 \sim Pois(2)$, $X_2 \sim Pois(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости $X_1 + X_2 + X_3 \sim Pois(1 + 2 + 5) = Pois(8)$. Отсюда получаем:
  $P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!}e^{-8} \approx 0.1$
  $E(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1 + X_2 + X_3) = 8$
- Имеются шесть идентичных, работающих независимо роботов. Число попыток захватить человечество для каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 0.5$. Найдите вероятность того, хотя бы один из роботов попытается захватить человечество.
  Решение: $P(X_1 + \cdots + X_6 \geq 1) = 1 - P(X_1 + \cdots + X_6 = 0) = 1 - \frac{(6\times 0.5)^0}{0!}e^{-6\times 0.5} \approx 0.95$

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1-p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1-p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n=3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1,1,0)$.

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1-p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n=3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1,1,0)$.
- Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p. Тогда вероятность элементарного события $(1,1,0)$ можно записать как:

$$P(\{(1,1,0)\}) = P(X_1=1)\times P(X_2=1)\times P(X_3=0) = p\times p\times(1-p) = p^2(1-p)$$

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1-p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n=3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1,1,0)$.
- Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p. Тогда вероятность элементарного события $(1,1,0)$ можно записать как:

$$P(\{(1,1,0)\}) = P(X_1=1)\times P(X_2=1)\times P(X_3=0) = p\times p\times(1-p) = p^2(1-p)$$

- Вероятность того, что в серии из $n=3$ испытаний Бернулли ровно два закончатся успехом равняется:

$$P(\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}) = p^2(1-p)+p^2(1-p)+p^2(1-p) = 3p^2(1-p) = C_3^2p^2(1-p)$$

  Для получения искомой вероятности мы сложили все элементарные события с двумя успехами. Эти элементарные события **равновероятны** и их число совпадает с **количеством способов** выбрать $x=2$ позиции из $n=3$ под единицы – C_3^2.

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1-p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n=3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1,1,0)$.
- Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p. Тогда вероятность элементарного события $(1,1,0)$ можно записать как:

$$P(\{(1,1,0)\}) = P(X_1=1)\times P(X_2=1)\times P(X_3=0) = p\times p\times(1-p) = p^2(1-p)$$

- Вероятность того, что в серии из $n=3$ испытаний Бернулли ровно два закончатся успехом равняется:

$$P(\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}) = p^2(1-p)+p^2(1-p)+p^2(1-p) = 3p^2(1-p) = C_3^2p^2(1-p)$$

  Для получения искомой вероятности мы сложили все элементарные события с двумя успехами. Эти элементарные события **равновероятны** и их число совпадает с **количеством способов** выбрать $x=2$ позиции из $n=3$ под единицы – C_3^2.
- Приведенная логика справедлива и для произвольных x и n, откуда:

$$P(x \text{ успехов в серии из } n \text{ испытаний Бернулли}) = P(X_1+X_2+\cdots+X_n=x) = C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$$

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1-p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n=3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1,1,0)$.
- Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p. Тогда вероятность элементарного события $(1,1,0)$ можно записать как:

$$P(\{(1,1,0)\}) = P(X_1=1)\times P(X_2=1)\times P(X_3=0) = p\times p\times(1-p) = p^2(1-p)$$

- Вероятность того, что в серии из $n=3$ испытаний Бернулли ровно два закончатся успехом равняется:

$$P(\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}) = p^2(1-p)+p^2(1-p)+p^2(1-p) = 3p^2(1-p) = C_3^2p^2(1-p)$$

  Для получения искомой вероятности мы сложили все элементарные события с двумя успехами. Эти элементарные события **равновероятны** и их число совпадает с **количеством способов** выбрать $x=2$ позиции из $n=3$ под единицы – C_3^2.
- Приведенная логика справедлива и для произвольных x и n, откуда:

$$P(x \text{ успехов в серии из } n \text{ испытаний Бернулли}) = P(X_1+X_2+\cdots+X_n=x) = C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$$

- Дискретное вероятностное пространство, порождаемое серией испытаний Бернулли, именуется **схемой Бернулли**.

- Случайная величина $X \sim B(n,p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1,2,\cdots\}$ и $p \in (0,1)$, если:

$$P(X=x)=\begin{cases}C_n^x p^x(1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0,1,2,\cdots,n\} \\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}, \quad \text{supp}(X)=\{0,1,2\cdots,n\}$$

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \mathrm{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.

Биномиальное распределение

Определение биномиального распределения

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин $X_1, \cdots X_n$ с параметром p, имеет биномиальное распределение $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$.

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \mathrm{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин $X_1, \cdots X_n$ с параметром p, имеет биномиальное распределение $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$.

Пример:

- Каждый раз, независимо от результатов предыдущих попыток, Арсений забивает гол в ворота с вероятностью 0.8. Найдите вероятность того, что за пять ударов он забьет ровно три гола.

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин $X_1, \cdots X_n$ с параметром p, имеет биномиальное распределение $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$.

Пример:

- Каждый раз, независимо от результатов предыдущих попыток, Арсений забивает гол в ворота с вероятностью 0.8. Найдите вероятность того, что за пять ударов он забьет ровно три гола.
  Решение:
  Число голов, которые Арсений забивает за **одну** попытку, является Бернуллиевской случайной величиной с параметром $p = 0.8$, поскольку за один раз он может забить либо 0 голов, либо 1 гол. Из условия следует, что эти Бернуллиевские случайных величины независимы, а значит их сумма, отражающая общее число голов, будет иметь Биномиальное распределение $X \sim B(5, 0.8)$

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \operatorname{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин $X_1, \cdots X_n$ с параметром p, имеет биномиальное распределение $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$.

Пример:

- Каждый раз, независимо от результатов предыдущих попыток, Арсений забивает гол в ворота с вероятностью 0.8. Найдите вероятность того, что за пять ударов он забьет ровно три гола.

  Решение:

  Число голов, которые Арсений забивает за **одну** попытку, является Бернуллиевской случайной величиной с параметром $p = 0.8$, поскольку за один раз он может забить либо 0 голов, либо 1 гол. Из условия следует, что эти Бернуллиевские случайных величины независимы, а значит их сумма, отражающая общее число голов, будет иметь Биномиальное распределение $X \sim B(5, 0.8)$, откуда:

$$P(X = 3) = C_5^3 0.8^3 (1 - 0.8)^{5-3} \approx 0.2$$

- Пусть $X=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p)$, где $X_1,...,X_n$ i.i.d. и $X_1\sim Ber(p)$.

- Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$

- Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$

- Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1 - p)$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n \text{ раз}} = np(1-p)$

- Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n \text{ раз}} = np(1-p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.

- Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n \text{ раз}} = np(1-p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.
  Решение:
  $X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, Var(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X = 7) = C_{10}^{7} 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$

- Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n \text{ раз}} = np(1-p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.
  Решение:
  $X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, Var(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X = 7) = C_{10}^{7} 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$
- В выборах начальника отдела участвуют 8 сотрудников. Число голосов за Ивана (из 8 возможных) описывается биномиальным распределением с дисперсией 2. Найдите математическое ожидание числа голосов за Ивана, если за него проголосовало не менее 6 участников.

- Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n \text{ раз}} = np(1-p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.
  Решение:
  $X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, Var(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X = 7) = C_{10}^{7} 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$
- В выборах начальника отдела участвуют 8 сотрудников. Число голосов за Ивана (из 8 возможных) описывается биномиальным распределением с дисперсией 2. Найдите математическое ожидание числа голосов за Ивана, если за него проголосовало не менее 6 участников.
  Решение:
  $X \sim B(8, p) \implies Var(X) = 8 \times p(1-p) = 2 \implies p^2 - p + 0.25 = 0 \implies p = 0.5$

- Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n\text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n\text{ раз}} = np(1-p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.
  Решение:
  $X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, Var(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X=7) = C_{10}^{7} 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$
- В выборах начальника отдела участвуют 8 сотрудников. Число голосов за Ивана (из 8 возможных) описывается биномиальным распределением с дисперсией 2. Найдите математическое ожидание числа голосов за Ивана, если за него проголосовало не менее 6 участников.
  Решение:
  $X \sim B(8,p) \implies Var(X) = 8 \times p(1-p) = 2 \implies p^2 - p + 0.25 = 0 \implies p = 0.5$
  $E(X|X \geq 6) = P(X=6|X \geq 6)\times 6 + P(X=7|X \geq 6)\times 7 + P(X=8|X \geq 6)\times 8 = \frac{P(X=6)\times 6 + P(X=7)\times 7 + P(X=8)\times 8}{P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)} \approx$
  $\approx (0.109 \times 6 + 0.031 \times 7 + 0.004 \times 8) / (0.109 + 0.031 + 0.004) \approx 6.27$

Биномиальное распределение

Свойство воспроизводимости

- Пусть имеются независимые Биномиальные случайные величины $X_1, X_2, \cdots X_m$ с одинаковым параметром p и параметрами $n_1, n_2, \cdots n_m$, то есть $X_i \sim B(n_i, p)$, тогда:

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) \sim B(n_1 + n_2 + \cdots n_m, p)$$

  Доказательство: Биномиальная случайная величина X_i, по определению, может быть представлена как сумма n_i Бернуллиевских случайных величин с параметром p. Поскольку $X_1, \cdots X_m$ независимы, то по аналогии сумма $X_1 + \cdots + X_m$ может быть представлена как сумма $n_1 + \cdots + n_m$ независимых Бернуллиевских случайных величин с параметром p. Данная сумма, по определению, будет иметь Биномиальное распределение с параметрами $n_1 + \cdots + n_m$ и p.

Пример:

- Трое спортсменов независимо друг от друга и с равной вероятностью забрасывают баскетбольный мяч в корзину. При каждом броске вероятность попадания для каждого из них равняется 0.9. Первый спортсмен совершает 2 попытки, второй – 3, а третий – 5. Найдите вероятность того, что общее число попаданий в корзину окажется равно 8.

  Решение: обозначим через $X_1 \sim B(2, 0.9)$, $X_2 \sim B(3, 0.9)$ и $X_3 \sim B(5, 0.9)$ случайные величины, отражающие число попаданий первого, второго и третьего спортсменов соответственно. В силу независимости по свойству воспроизводимости получаем, что:

$$(X_1 + X_2 + X_3) \sim B(2 + 3 + 5, 0.9) = B(10, 0.9)$$

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = 8) = C_{10}^{8} 0.9^8 (1 - 0.9)^2 \approx 0.19371$$

Геометрическое распределение

Определение геометрического распределения

- Случайная величина $X \sim Geom(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1]$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1, 2\cdots\}$$

Геометрическое распределение
Определение геометрического распределения

- Случайная величина $X \sim Geom(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1]$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

- Геометрическая случайная величина отражает число неудач до первого успеха в бесконечной серии испытаний Бернулли. Пусть $X_1, X_2, \cdots$ – бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин, где $X_i = 1$, если успех наступил в i-м испытании, тогда:

$$P(X = x) = P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0) \times P(X_{x+1} = 1) = \underbrace{(1-p) \times \cdots \times (1-p)}_{x \text{ раз}} \times p = (1-p)^x p$$

- Случайная величина $X \sim Geom(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1]$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} \quad , \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

- Геометрическая случайная величина отражает число неудач до первого успеха в бесконечной серии испытаний Бернулли. Пусть $X_1, X_2, \cdots$ – бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин, где $X_i = 1$, если успех наступил в i-м испытании, тогда:

$$P(X = x) = P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0) \times P(X_{x+1} = 1) = \underbrace{(1-p) \times \cdots \times (1-p)}_{x \text{ раз}} \times p = (1-p)^x p$$

Пример:

- София кидает кубик до тех пор, пока на нем не выпадет число меньше 3. Найдите вероятность того, София сделает 6 бросков.

- Случайная величина $X \sim Geom(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0,1]$, если:

$$P(X=x)=\begin{cases}(1-p)^x p, \text{ если } x \in \{0,1,2,\cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}, \ \mathrm{supp}(X)=\{0,1,2\cdots\}$$

- Геометрическая случайная величина отражает число неудач до первого успеха в бесконечной серии испытаний Бернулли. Пусть $X_1, X_2, \cdots$ – бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин, где $X_i = 1$, если успех наступил в i-м испытании, тогда:

$$P(X=x)=P(X_1=0)\times\cdots\times P(X_x=0)\times P(X_{x+1}=1)=\underbrace{(1-p)\times\cdots\times(1-p)}_{x \text{ раз}}\times p=(1-p)^x p$$

Пример:

- София кидает кубик до тех пор, пока на нем не выпадет число меньше 3. Найдите вероятность того, София сделает 6 бросков.
Решение: Число бросков **до того**, как выпадет число меньше 3, является геометрической случайной величиной X с параметром $p=\frac{1}{3}$. Общее число бросков является случайной величиной $X+1$, а значит:

$$P(X+1=6)=P(X=5)=\left(1-\frac{1}{3}\right)^5\times\frac{1}{3}=\frac{32}{729}$$

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Примеры:

- Джек грабит банки до тех пор, пока его не поймают. Каждый раз вероятность того, что ограбление пройдет успешно, составляет 0.8. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа успешных ограблений и числа попыток ограблений.

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Примеры:

- Джек грабит банки до тех пор, пока его не поймают. Каждый раз вероятность того, что ограбление пройдет успешно, составляет 0.8. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа успешных ограблений и числа попыток ограблений.

  Решение:

  $X \sim Geom(0.1)$ – число успешных ограблений:

$$E(X) = \frac{1-0.1}{0.1} = 9$$
$$Var(X) = \frac{1-0.1}{0.1^2} = 90$$

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Примеры:

- Джек грабит банки до тех пор, пока его не поймают. Каждый раз вероятность того, что ограбление пройдет успешно, составляет 0.8. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа успешных ограблений и числа попыток ограблений.

  Решение:

  $X \sim Geom(0.1)$ – число успешных ограблений:

  $$E(X) = \frac{1-0.1}{0.1} = 9$$
  $$Var(X) = \frac{1-0.1}{0.1^2} = 90$$

  $X + 1$ – число попыток ограблений:

  $$E(X+1) = E(X) + 1 = 9 + 1 = 10$$
  $$Var(X+1) = Var(X) = 90$$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$

  Доказательство:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$

  Доказательство:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x + 1) = 1 - (1 - p)^{x+1}$$

- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$

  Доказательство:
  $$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$

- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

  Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$
  Доказательство:
  $$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$
- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**
  Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$

  Доказательство:

  $$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$

- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

  Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.

  Решение: $P(X \leq 5) = F_X(8) = 1 - (1-0.3)^{5+1} \approx 0.88$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$

  Доказательство:

  $$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x + 1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$

- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

  Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.

  Решение: $P(X \leq 5) = F_X(8) = 1 - (1-0.3)^{5+1} \approx 0.88$
- Вероятность устроиться на работу по результатам очередного собеседования для Никиты неизменно составляет 0.2. Рассчитайте вероятность того, что Никите придется пройти не менее 8 собеседований, если известно, что он уже провалил 2.

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$
  Доказательство:
  $$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$
- $P(X \geq x + a|X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**
  Доказательство: $P(X \geq x + a|X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.
  Решение: $P(X \leq 5) = F_X(8) = 1 - (1-0.3)^{5+1} \approx 0.88$
- Вероятность устроиться на работу по результатам очередного собеседования для Никиты неизменно составляет 0.2. Рассчитайте вероятность того, что Никите придется пройти не менее 8 собеседований, если известно, что он уже провалил 2.
  Решение:
  Воспользуемся свойством отсутствия памяти:
  $$P(X \geq 8|X \geq 2) = P(X \geq 2 + 6|X \geq 2) = P(X \geq 6) = (1-0.2)^6 \approx 0.26$$

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \ldots x_m!} p_1^{x_1} \ldots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \ \mathrm{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \ldots x_m!} p_1^{x_1} \ldots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маржинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маржинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Пример:

- В выборах принимают участие 3 кандидата и 10 независимо голосующих избирателей. За первого из кандидатов случайно выбранный избиратель голосует с вероятностью 0.2, за второго – с вероятностью 0.3, а за третьего – с вероятностью 0.5. Найдите вероятность того, что первый кандидат получит 1 голос, второй – 2 голоса, а третий – 7 голосов. Также вычислите вероятность, с которой второй кандидат наберет 6 голосов.

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \ldots x_m!} p_1^{x_1} \ldots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0,1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0,1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маржинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Пример:

- В выборах принимают участие 3 кандидата и 10 независимо голосующих избирателей. За первого из кандидатов случайно выбранный избиратель голосует с вероятностью 0.2, за второго – с вероятностью 0.3, а за третьего – с вероятностью 0.5. Найдите вероятность того, что первый кандидат получит 1 голос, второй – 2 голоса, а третий – 7 голосов. Также вычислите вероятность, с которой второй кандидат наберет 6 голосов.
  Решение:

$$X \sim M(10, 0.2, 0.3, 0.5) \implies P(X = (1, 2, 7)) = \frac{10!}{1!2!7!} 0.2^1 0.3^2 0.5^7 \approx 0.05$$

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0,1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \ \operatorname{supp}(X) = \{0,1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маржинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Пример:

- В выборах принимают участие 3 кандидата и 10 независимо голосующих избирателей. За первого из кандидатов случайно выбранный избиратель голосует с вероятностью 0.2, за второго – с вероятностью 0.3, а за третьего – с вероятностью 0.5. Найдите вероятность того, что первый кандидат получит 1 голос, второй – 2 голоса, а третий – 7 голосов. Также вычислите вероятность, с которой второй кандидат наберет 6 голосов.
  Решение:

$$X \sim M(10, 0.2, 0.3, 0.5) \implies P(X = (1, 2, 7)) = \frac{10!}{1!2!7!} 0.2^1 0.3^2 0.5^7 \approx 0.05$$

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0,1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0,1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маржинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Пример:

- В выборах принимают участие 3 кандидата и 10 независимо голосующих избирателей. За первого из кандидатов случайно выбранный избиратель голосует с вероятностью 0.2, за второго – с вероятностью 0.3, а за третьего – с вероятностью 0.5. Найдите вероятность того, что первый кандидат получит 1 голос, второй – 2 голоса, а третий – 7 голосов. Также вычислите вероятность, с которой второй кандидат наберет 6 голосов.
  Решение:

$$X \sim M(10, 0.2, 0.3, 0.5) \implies P(X = (1, 2, 7)) = \frac{10!}{1!2!7!} 0.2^1 0.3^2 0.5^7 \approx 0.05$$

$$X_2 \sim B(10, 0.3) \implies P(X_2 = 6) = C_{10}^{6} 0.3^6 (1 - 0.3)^{10-4} \approx 0.037$$

Мультиномиальное распределение

Логика формирования мультиномиального распределения

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от кампании A, B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.

Мультиномиальное распределение

Логика формирования мультиномиального распределения

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от кампании A, B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.
- Вероятность того, что первые три покупателя приобретут телефон кампании A, следующие четыре покупателя отдадут предпочтение телефону кампании B, а последние два выберут телефон кампании C составит:

$$P(\{(A, A, A, B, B, B, B, C, C)\}) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.1 \times 0.1 = 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

Мультиномиальное распределение

Логика формирования мультиномиального распределения

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от кампании A, B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.
- Вероятность того, что первые три покупателя приобретут телефон кампании A, следующие четыре покупателя отдадут предпочтение телефону кампании B, а последние два выберут телефон кампании C составит:

$$P(\{(A, A, A, B, B, B, B, C, C)\}) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.1 \times 0.1 = 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

- Вероятность события $\mathcal{D}$, в соответствии с которым три покупателя выберут A, четверо B и двое C окажется больше в число раз, которым можно поменять местами элементы последовательности A,A,A,B,B,B,B,C, C, что можно сделать следующим числом способов:

$$C_9^3 C_{(9-3)}^4 C_{(9-3-4)}^2 = C_9^3 C_6^4 C_2^2 = \frac{9!}{6!3!} \frac{6!}{2!4!} \frac{2!}{0!2!} = \frac{9!}{3!4!2!}$$

Мультиномиальное распределение

Логика формирования мультиномиального распределения

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от кампании A, B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.
- Вероятность того, что первые три покупателя приобретут телефон кампании A, следующие четыре покупателя отдадут предпочтение телефону кампании B, а последние два выберут телефон кампании C составит:

$$P(\{(A,A,A,B,B,B,B,C,C)\}) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.1 \times 0.1 = 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

- Вероятность события $\mathcal{D}$, в соответствии с которым три покупателя выберут A, четверо B и двое C окажется больше в число раз, которым можно поменять местами элементы последовательности A,A,A,B,B,B,B,C, C, что можно сделать следующим числом способов:

$$C_9^3 C_{(9-3)}^4 C_{(9-3-4)}^2 = C_9^3 C_6^4 C_2^2 = \frac{9!}{6!3!}\frac{6!}{2!4!}\frac{2!}{0!2!} = \frac{9!}{3!4!2!}$$

- В результате вероятность события $\mathcal{D}$ рассчитывается в соответствии с мультиномиальным распределением $X \sim M(9, 0.4, 0.5, 0.1)$:

$$P(\mathcal{D}) = P(X = (3,4,2)) = \frac{9!}{3!4!2!} 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \cdots, m\}$

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \cdots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \cdots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.

  Решение:

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0.2 - 0.7 = 0.1$$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \cdots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.

  Решение:

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0.2 - 0.7 = 0.1$$

$$E(X) = (0.2 \times 100, 0.7 \times 100, 0.1 \times 100) = (20, 70, 10)$$

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_ip_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \cdots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.

  Решение:

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0.2 - 0.7 = 0.1$$

$$E(X) = (0.2 \times 100, 0.7 \times 100, 0.1 \times 100) = (20, 70, 10)$$

$$Cov(X) = \begin{bmatrix} 100 \times 0.2 \times (1 - 0.2) & -100 \times 0.2 \times 0.7 & -100 \times 0.2 \times 0.1 \\ -100 \times 0.2 \times 0.7 & 100 \times 0.7 \times (1 - 0.7) & -100 \times 0.7 \times 0.1 \\ -100 \times 0.2 \times 0.1 & -100 \times 0.7 \times 0.1 & 100 \times 0.1 \times (1 - 0.1) \end{bmatrix}$$