Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2022-2023

Дедлайн: домашнее задание отправляется в **pdf** формате на почту семинариста. В копию письма необходимо поставить ассистента группы.

Почты, на которые следует отправлять домашние задания, в зависимости от вашего семинариста:

1. Погорелова Полина Вячеславовна – tvis.we.2021@gmail.com
2. Потанин Богдан Станиславович – tvismirec@gmail.com
3. Слаболицкий Илья Сергеевич – tvis.fweia.hse@gmail.com

Домашнее задание должно быть отправлено на указанные почты в **pdf** формате до конца дня **12.02.2023** включительно (по московскому времени). Тема письма должна иметь следующий формат: “МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ”, например, “МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 3”.

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №3

Задание №1. Снеговики в холодильниках. (60 баллов)

До наступления очередной зимы снеговики ложатся спать в специальные холодильники. Температура в каждом холодильнике является случайной величиной и не зависит от температур в других холодильниках. Имеется выборка $X_1, ..., X_n$ из замеров температур в холодильниках. При этом известно, что:

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} \ln(\theta)\theta^t, \text{ если } t < 0 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \text{ где } \theta > 1.$$

По результатам замеров температур в 100 холодильниках оказалось, что их суммарная (не средняя) температура равна -62.1335. Помогите снеговикам разобраться в распределении температур в холодильниках.

1. Оцените параметр θ при помощи метода моментов (используйте любой начальный момент). Посчитайте реализацию найденной вами оценки. (**5 баллов**)
   Примечания: Для взятия интеграла можете воспользоваться программными средствами, например, wolframalpha. Реализацию оценки округлите до целой части.

2. Оцените параметр θ при помощи метода максимального правдоподобия (в данном пункте проверять соблюдение условий второго порядка не обязательно[1]). (**5 баллов**)

3. Убедитесь, что вы действительно нашли оценку метода максимального правдоподобия, проверив соблюдение условий второго порядка. (**5 баллов**)
   Подсказка: $\frac{d\left(\frac{1}{t\ln(t)}\right)}{dt} = -\frac{\frac{1}{\ln(t)}+\left(\frac{1}{\ln(t)}\right)^2}{t^2}$.

4. Найдите информацию Фишера о параметре θ, содержащуюся во всей выборке. (**5 баллов**)

5. Найдите асимптотическую дисперсию ММП оценки. (**5 баллов**)

6. Найдите оценку асимптотической дисперсии ММП оценки. Посчитайте реализацию этой оценки. (**5 баллов**)

7. Посчитайте, приблизительно, вероятность, с которой ММП оценка отклонится от истинного значения параметра не более, чем на 1.2. (**10 баллов**)

8. При помощи дельта метода найдите асимптотическую дисперсию ММП оценки первого начального момента X_1. (**5 баллов**)

9. Оцените полученную в предыдущем пункте асимптотическую дисперсию. Посчитайте реализацию этой оценки. (**5 баллов**)

10. Посчитайте, приблизительно, вероятность, с которой ММП оценка первого начального момента отклонится от истинного значения параметра не более, чем на 0.1. (**10 баллов**)

[1] Но если в задаче или пункте задачи непосредственно не сказано, что проверять условия второго порядка не обязательно, то их следует проверить. В противном случае решение не будет засчитано. В данном случае проверка условий второго порядка достаточно затруднительна, вследствие чего вынесена в отдельный пункт в качестве задачи повышенной сложности.

Задание №2. Эксперимент Лаврентия. (40 баллов)

В компьютерной игре Лаврентий сражается с противником, который с равной вероятностью совершает прыжок вперед или назад. При этом длина прыжка является равномерно распределенной случайной величиной от 0 до θ, где $\theta > 0$. Для того, чтобы всегда держаться от противника на безопасном расстоянии, но при этом не отходить слишком далеко, Лаврентий хочет оценить максимальную длину прыжка противника θ. Для этого он собрал выборку $X_1, ..., X_n$ из равномерного распределения $U(-\theta, \theta)$, наблюдения которой соответствуют расстоянию между исходным положением противника и тем, в котором он оказался после прыжка (положительное расстояние соответствует прыжку вперед, а отрицательное – прыжку назад). Лаврентий хочет использовать следующую оценку параметра θ:

$$\hat{\theta}_n = 0.5(\max(X_1, ...X_n) - \min(X_1, ...X_n)) = 0.5(X_{(n)} - X_{(1)})$$

1. Найдите функцию распределения и функцию плотности экстремальных статистик $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$. (**5 баллов**)

2. Проверьте, является ли оценка $\hat{\theta}_n$ несмещенной. (**5 баллов**)

3. Проверьте, является ли последовательность оценок $\hat{\theta}_n$ состоятельной. (**5 баллов**)

4. Оцените параметр θ при помощи метода максимального правдоподобия. Обозначьте полученную оценку как $\hat{\theta}^*_n$ (**10 баллов**)

5. Определите, какая из оценок $\hat{\theta}_n$ и $\hat{\theta}^*_n$ является более эффективной. (**10 баллов**)

6. Преобразуйте оценку $\hat{\theta}^*_n$ таким образом, чтобы она стала несмещенной и обозначьте полученную оценку как $\hat{\theta}^a_n$. Определите, при каких объемах выборки n оценка $\hat{\theta}^a_n$ окажется более эффективной, чем $\hat{\theta}^*_n$. (**5 баллов**)