Фамилия:..

Имя:..

Группа:..

Задача №1

На устном экзамене преподаватель задает Лаврентию вопросы. Лаврентий с равной вероятностью может попасть как к злому, так и к доброму преподавателю. Добрый преподаватель задает ровно 10 вопросов. Злой преподаватель задает вопросы лишь до тех пор, пока студент не даст неправильный ответ (может задать и более 10 вопросов). На каждый вопрос Лаврентий отвечает правильно с вероятностью 0.9 независимо от того, как он ответил на предыдущие вопросы и к какому преподавателю он попал.

1. Найдите вероятность того, что Лаврентий ответит верно на 8 вопросов, если он попал к доброму преподавателю. **(2 балла)**

2. Вычислите вероятность того, что Лаврентий даст правильный ответ ровно на 8 вопросов. **(2 балла)**

3. Посчитайте вероятность, с которой Лаврентий попал к доброму преподавателю, если он правильно ответил на 8 вопросов. **(2 балла)**

4. Найдите математическое ожидание числа верных ответов Лаврентия. **(2 балла)**

5. Посчитайте дисперсию числа верных ответов Лаврентия. **(5 баллов)**

6. Предположим **в этом пункте и далее**, что оценка Лаврентия равняется числу верных ответов на заданные вопросы и что злой преподаватель не задает более 10 вопросов. Вычислите вероятность того, что Лаврентий будет сдавать экзамен злому преподавателю и получит 10 баллов (необходимо посчитать совместную вероятность этих событий, не условную). **(2 балла)**

7. Найдите математическое ожидание оценки Лаврентия, при условии, что он попал к злому преподавателю. **(2 балла)**

8. Добрый и злой преподаватели заболели, поэтому вместо них принимать экзамен пришел странный преподаватель, который задает 10 вопросов и добавляет по 1-му баллу за правильный ответ лишь в случае, если студент также дал правильный ответ и на предыдущий вопрос[1]. Найдите математическое ожидание оценки Лаврентия в случае сдачи экзамена странному преподавателю. **(3 балла)**

Подсказка: $0.9^8 = 0.43046721 \approx 0.43$.

[1]Например, студент получит балл за верный ответ на восьмой вопрос лишь в случае, если он также верно ответит на седьмой вопрос (независимо от того, как он ответит на вопросы с первого по шестой). Обратим внимание, что при соответствующей системе за правильный ответ на первый вопрос студент не сможет получить балл. За счет верного ответа на первый вопрос студент сможет лишь сделать возможным получение балла за верный ответ на второй вопрос.

Решение

1. Обозначим через D событие, при котором Лаврентий попадает к доброму преподавателю. Через V обозначим случайную величину, отражающую число верных ответов. Обратим внимание, что $V|D \sim B(10, 0.9)$ и $V|\overline{D} \sim Geom(0.1)$.

   Поскольку $V|D \sim B(10, 0.9)$, то:

$$P(V = 8|D) = C_{10}^{8} 0.9^8 (1 - 0.9)^2 = 0.19371$$

2. Применим формулу полной вероятности:

$$P(V = 8) = P(V = 8|D)P(D) + P(V = 8|\overline{D})P(\overline{D}) =$$
$$= 0.19371 \times 0.5 + \left((0.9)^8 \times 0.1\right) \times 0.5 = 0.1183783605$$

3. Воспользуемся формулой условной вероятности:

$$P(D|V = 8) = \frac{P(V = 8|D)P(D)}{P(V = 8)} = \frac{0.19371 \times 0.5}{0.1183783605} \approx 0.818$$

4. Обратим внимание, что $E(V|D) = 10 \times 0.9 = 9$ и $E(V|\overline{D}) = \frac{1-0.1}{0.1} = 9$. По свойствам математического ожидания получаем:

$$E(V) = E(V|D)P(D) + E(V|D)P(\overline{D}) = 9 \times 0.5 + 9 \times 0.5 = 9$$

5. Посчитаем условные дисперсии:

$$Var(V|D) = 10 \times 0.9 \times (1 - 0.9) = 0.9$$
$$Var(V|\overline{D}) = \frac{1 - 0.1}{0.1^2} = 90$$

   Отсюда находим условные вторые начальные моменты:

$$E(V^2|D) = E(V|D)^2 + Var(V|D) = 9^2 + 0.9 = 81.9$$
$$E(V^2|\overline{D}) = E(V|\overline{D})^2 + Var(V|\overline{D}) = 9^2 + 90 = 171$$

   В результате получаем:

$$Var(V) = E(V^2) + E(V)^2 = E(V^2|D)P(D) + E(V^2|\overline{D})P(\overline{D}) + E(V)^2 =$$
$$= 81.9 \times 0.5 + 171 \times 0.5 + 9^2 = 207.45$$

6. Лаврентий получит 10 баллов в случае, если он может дать не менее 10 правильных ответов подряд. Вычислим соответствующую вероятность:

$$P(V \geq 10 \cap \overline{D}) = P(V \geq 10|\overline{D})P(\overline{D}) =$$
$$= 0.9^{10} \times 0.5 = 0.17433922005$$

7. Воспользуемся формулой математического ожидания для геометрического распределения с ограничением на число испытаний:

$$E(\min(V, 10)|\overline{D}) = \frac{(1 - 0.1) - (1 - 0.1)^{10+1}}{0.1} \approx 5.862$$

8. Оценка Лаврентия у странного преподавателя может быть представлена в следующем виде:

$$V_1V_2 + V_2V_3 + ... + V_9V_{10}$$

Пользуясь независимостью данных случайных величин получаем:

$$E(V_1V_2 + V_2V_3 + ... + V_9V_{10}) = E(V_1)E(V_2) + ... + E(V_9)E(V_{10}) =$$
$$= \underbrace{0.9 \times 0.9 + ... + 0.9 \times 0.9}_{9 \text{ раз}} = 0.9^2 \times 9 = 7.29$$

Фамилия:...

Имя:...

Группа:..

Задача №2

Лаврентий и ученый кот живут вместе. На выходных Лаврентий может поехать в лес, в город или остаться дома с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Если Лаврентий поедет в лес, то ученый кот отправится с ним с вероятностью 0.9. Если же Лаврентий поедет в город, то ученый кот поедет вместе с Лаврентием с вероятностью 0.6. В противном случае ученый кот останется дома. Найдите:

1. Вероятность того, что ученый кот останется дома. **(2 балла)**
2. Вероятность того, что Лаврентий остался дома, если ученый кот остался дома. **(3 балла)**
3. Вероятность того, что по крайней мере кто-то (ученый кот или Лаврентий) останется дома. **(2 балла)**
4. Функцию распределения числа тех, кто останется дома. **(3 балла)**
5. Предположим, что данная ситуация повторяется на протяжении двух выходных, при этом решения, принимаемые ученым котом и Лаврентием в первый день, никак не влияют на вероятности решений, принимаемых ими во второй день. Рассчитайте ковариацию между тем, сколько раз за эти два дня дома останется ученый кот и тем, сколько раз дома останется Лаврентий. **(5 баллов)**

Решение:

1. Через F_c, C_c и H_c обозначим события, при которых ученый кот едет в лес, едет в город или остается дома соответственно. По аналогии через F_l, C_l и H_l обозначим события для Лаврентия. Рассчитаем искомую вероятность при помощи формулы полной вероятности:

$$P(H_c) = P(H_c|H_l)P(H_l) + P(F_c|F_l)P(F_l) + P(C_c|C_l)P(C_l) =$$
$$= (1 - 0.9) \times 0.5 + (1 - 0.6) \times 0.3 + 1 \times 0.2 = 0.37$$

2. Применим формулу условной вероятности:

$$P(H_l|H_c) = \frac{P(H_c|H_l)P(H_l)}{P(H_c)} = \frac{1 \times 0.2}{0.37} \approx 0.54$$

3. Воспользуемся формулой объединения событий:

$$P(H_l \cup H_c) = P(H_l) + P(H_c) - P(H_c|H_l)P(H_l) =$$
$$= 0.2 + 0.37 - 1 \times 0.2 = 0.37$$

4. Через X обозначим случайную величину, отражающую число тех, кто остался дома. Найдем распределение соответствующей случайной величины, записав функцию вероятностей:

$$P(X = x) = \begin{cases} P(H_c \cap H_l), \text{ если } x = 2 \\ P(H_c \cap \overline{H}_l), \text{ если } x = 1 \\ 1 - P(H_c \cup H_l), \text{ если } x = 0 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} = \begin{cases} 0.2, \text{ если } x = 2 \\ 0.17, \text{ если } x = 1 \\ 0.63, \text{ если } x = 0 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Запишем функцию распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если} x < 0 \\ 0.63, \text{ если } 0 \leq x < 1 \\ 0.8, \text{ если } 1 \leq x < 2 \\ 1, \text{ если } x \geq 2 \end{cases}$$

5. Обозначим через $X_1 \sim Ber(0.2)$ и $Y_1 \sim Ber(0.37)$ случайные величины, отражающие число раз, которые Лаврентий и ученый кот соответственно остались дома в первый день. Обратим внимание, что $X_1 Y_1 = X_1$, поскольку ученый кот всегда остается дома, если дома остается Лаврентий, откуда:

$$Cov(X_1, Y_1) = E(X_1 Y_1) - E(X_1)E(Y_1) =$$
$$= E(X_1) - E(X_1)E(Y_1) = 0.2 - 0.2 \times 0.37 = 0.126$$

По аналогии введем случайные величины X_2 и Y_2 для второго дня. Обратим внимание, что зависимыми являются лишь пары случайных величин 1) X_1, Y_1 и 2) X_2, Y_2, откуда:

$$Cov(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = Cov(X_1, Y_1) + Cov(X_1, Y_2) + Cov(X_2, Y_1) + Cov(X_2, Y_2) =$$
$$= 0.126 + 0 + 0 + 0.126 = 0.252$$

Фамилия:...

Имя:...

Группа:..

Задача №3

Рост Алисы составляет 1.5 метра. После того, как Алиса выпивает магическое зелье, ее рост с равной вероятностью увеличивается или уменьшается ровно в 2 раза[2]. Алиса выпила 10 зелий. Найдите:

1. Математическое ожидание роста Алисы после выпитых зелий. **(5 баллов)**
2. Дисперсию роста Алисы после выпитых зелий. **(5 баллов)**
3. Ковариацию между ростом Алисы (после выпитых зелий) и числом выпитых зелий, после которых рост Алисы увеличился. **(5 баллов)**

Подсказка: представьте рост Алисы как произведение независимых случайных величин.

[2]Например, если Алиса выпила пять зелий, три из которых привели к увеличению ее роста, а два – к уменьшению, то ее рост составит $1.5 * 2^3/2^2 = 3$ метра.

Решение:

1. Обозначим через X_i случайную величину, отражающую то, во сколько раз увеличивается рост Алисы после приема i-го зелья, где $i \in \{1, 2, ..., 10\}$. Найдем математическое ожидание этой случайной величины:

$$E(X_i) = P(X_i = 0.5) \times 0.5 + P(X_i = 2) \times 2 = 0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 2 = 1.25$$

Обратим внимание, что случайную величину X, отражающую рост Алисы после 10 выпитых зелий, можно записать как:

$$X = 1.5 \times X_1 \times X_2 \times ... \times X_{10}$$

Вычислим математическое ожидание этой случайной величины, учитывая, что X_i независимы:

$$E(X) = E(1.5 \times X_1 \times X_2 \times ... \times X_{10}) = 1.5 \times E(X_1) \times ... \times E(X_{10}) =$$
$$= 1.5 \times \underbrace{1.25 \times 1.25 \times ... \times 1.25}_{\text{10 раз}} = 1.5 \times 1.25^{10} \approx 13.97$$

2. По аналогии найдем второй начальный момент:

$$E(X_i^2) = P(X_i = 0.5) \times 0.5^2 + P(X_i = 2) \times 2^2 = 0.5 \times 0.5^2 + 0.5 \times 2^2 = 2.125$$
$$E((1.5 \times X_1 \times X_2 \times ... \times X_{10})^2) = E(1.5^2 \times X_1^2 \times X_2^2 \times ... \times X_{10}^2) =$$
$$= 1.5^2 \times E(X_1^2) \times ... \times E(X_{10}^2) = 1.5^2 \times 2.125^{10} \approx 4224.47$$

В итоге найдем дисперсию:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4224.47 - 13.97^2 \approx 4029.31$$

3. Обратим внимание, что случайная величина $\frac{2}{3}X_i - \frac{1}{3}$ принимает значение 1, если после приема i-го зелья рост Алисы увеличился и значение 0 – в противном случае. В результате число зелий, после приема которых рост Алисы увеличился, может быть представлено как:

$$\left(\frac{2}{3}X_1 - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{2}{3}X_{10} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(X_1 + ... + X_{10}\right) + \frac{10}{3}$$

Рассчитаем ковариацию:

$$Cov\left(1.5 \times X_1 \times X_2 \times ... \times X_{10}, \frac{2}{3}\left(X_1 + ... + X_{10}\right) + \frac{10}{3}\right) =$$
$$= \left(1.5 \times \frac{2}{3}\right) Cov(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{10}, X_1 + ... + X_{10}) =$$
$$= Cov(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{10}, X_1 + ... + X_{10}) =$$
$$= Cov(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{10}, X_1) + ... + Cov(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{10}, X_{10}) =$$
$$= \underbrace{10 Cov(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{10}, X_1)}_{\text{поскольку очевидно, что все суммируемые ковариации одинаковы}} =$$
$$= \underbrace{10\left(E(X_1^2 \times X_2 \times ... \times X_{10}) - E(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{10})E(X_1)\right)}_{\text{по формуле } Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)} =$$
$$= 10\left(E(X_1^2)E(X_2) \times ... \times E(X_{10}) - E(X_1)^2 \times E(X_2) \times ... \times E(X_{10})\right) =$$
$$= 10 \times \left(2.125 \times 1.25^9 - 1.25^{11}\right) \approx 41.91$$