Теория Вероятностей и Статистика

Дельта метод и инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Потанин Богдан Станиславович

доцент, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2023-2024

- Вспомним, что характеристики распределения (вероятности, математическое ожидание, медиана и т.д.) являются функциями от параметров распределений. Ранее мы использовали это для того, чтобы оценивать характеристики распределений при помощи оценок параметров распределений.

Инвариантность

Мотивация

- Вспомним, что характеристики распределения (вероятности, математическое ожидание, медиана и т.д.) являются функциями от параметров распределений. Ранее мы использовали это для того, чтобы оценивать характеристики распределений при помощи оценок параметров распределений.
- Если при этом мы использовали состоятельную оценку параметра распределения, то, при соблюдении некоторых условий, получали состоятельную оценку характеристики распределения. Например, в случае с экспоненциальным распределением полученная при помощи метода моментов состоятельная оценка $\hat{\lambda}_n = 1/\overline{X}_n$ использовалась для получения состоятельной оценки дисперсии $Var(X_1) = 1/\hat{\lambda}_n^2 = \overline{X}_n^2$.

Инвариантность

Мотивация

- Вспомним, что характеристики распределения (вероятности, математическое ожидание, медиана и т.д.) являются функциями от параметров распределений. Ранее мы использовали это для того, чтобы оценивать характеристики распределений при помощи оценок параметров распределений.
- Если при этом мы использовали состоятельную оценку параметра распределения, то, при соблюдении некоторых условий, получали состоятельную оценку характеристики распределения. Например, в случае с экспоненциальным распределением полученная при помощи метода моментов состоятельная оценка $\hat{\lambda}_n = 1/\overline{X}_n$ использовалась для получения состоятельной оценки дисперсии $Var(X_1) = 1/\hat{\lambda}_n^2 = \overline{X}_n^2$.
- Ранее мы показали, что оценки, полученные с помощью метода максимального правдоподобия, обладают рядом хороших свойств: состоятельность, асимптотическая эффективность и асимптотическая нормальность.

Инвариантность

Мотивация

- Вспомним, что характеристики распределения (вероятности, математическое ожидание, медиана и т.д.) являются функциями от параметров распределений. Ранее мы использовали это для того, чтобы оценивать характеристики распределений при помощи оценок параметров распределений.
- Если при этом мы использовали состоятельную оценку параметра распределения, то, при соблюдении некоторых условий, получали состоятельную оценку характеристики распределения. Например, в случае с экспоненциальным распределением полученная при помощи метода моментов состоятельная оценка $\hat{\lambda}_n = 1/\overline{X}_n$ использовалась для получения состоятельной оценки дисперсии $Var(X_1) = 1/\hat{\lambda}_n^2 = \overline{X}_n^2$.
- Ранее мы показали, что оценки, полученные с помощью метода максимального правдоподобия, обладают рядом хороших свойств: состоятельность, асимптотическая эффективность и асимптотическая нормальность.
- Будут ли сохраняться эти благоприятные свойства для оценок характеристик распределения, если для построения этих оценок мы воспользуемся ММП оценками? Свойство инвариантности гарантирует, при определенных условиях, положительный ответ на данный вопрос. Например, поскольку $\hat{\lambda}_n = 1/\overline{X}_n$ является также ММП оценкой, то оценка $\widehat{Var}(X_1) = 1/\hat{\lambda}_n^2 = \left(\overline{X}_n^2\right)$ будет не только состоятельной, но и асимптотически нормальной и асимптотически эффективной.

Дельта метод

Формулировка

- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, ...$ такую, что:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

Дельта метод

Формулировка

- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, ...$ такую, что:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- Тогда для функции $g(.)$ с ненулевой производной $g'(\mu) \neq 0$ справедливо:

$$\sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ такую, что:

$$\sqrt{n}\,(X_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- Тогда для функции $g(.)$ с ненулевой производной $g'(\mu) \neq 0$ справедливо:

$$\sqrt{n}\,(g\,(X_n) - g\,(\mu)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- На практике при достаточно большом $n \geq 100$ можно предположить, что при соблюдении обозначенных условий:

$$X_n \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right) \implies g(X_n) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(g\,(\mu)\,, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2/n\right)$$

- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ такую, что:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- Тогда для функции $g(.)$ с ненулевой производной $g'(\mu) \neq 0$ справедливо:

$$\sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- На практике при достаточно большом $n \geq 100$ можно предположить, что при соблюдении обозначенных условий:

$$X_n \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right) \implies g(X_n) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(g\left(\mu\right), \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2/n\right)$$

Пример: имеется последовательность $X_1, X_2, \ldots$, где $X_i \sim U(2, 8)$ независимы. При помощи дельта метода найдем асимптотическое распределение $g\left(\overline{X}_n\right) = \left(\overline{X}_n\right)^3$.

Дельта метод

Формулировка

- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, ...$ такую, что:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- Тогда для функции $g(.)$ с ненулевой производной $g'(\mu) \neq 0$ справедливо:

$$\sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- На практике при достаточно большом $n \geq 100$ можно предположить, что при соблюдении обозначенных условий:

$$X_n \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right) \implies g(X_n) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(g\left(\mu\right), \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2/n\right)$$

Пример: имеется последовательность $X_1, X_2, ...$, где $X_i \sim U(2, 8)$ независимы. При помощи дельта метода найдем асимптотическое распределение $g\left(\overline{X}_n\right) = \left(\overline{X}_n\right)^3$. Используя ЦПТ, нетрудно показать, что $\overline{X}_n \dot{\sim} \mathcal{N}\left(5, 3/n\right)$, где $\mu = 5$ и $\sigma^2 = 3$.

Дельта метод

Формулировка

- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, ...$ такую, что:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- Тогда для функции $g(.)$ с ненулевой производной $g'(\mu) \neq 0$ справедливо:

$$\sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- На практике при достаточно большом $n \geq 100$ можно предположить, что при соблюдении обозначенных условий:

$$X_n \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right) \implies g(X_n) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(g\left(\mu\right), \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2/n\right)$$

Пример: имеется последовательность $X_1, X_2, ...$, где $X_i \sim U(2, 8)$ независимы. При помощи дельта метода найдем асимптотическое распределение $g\left(\overline{X}_n\right) = \left(\overline{X}_n\right)^3$. Используя ЦПТ, нетрудно показать, что $\overline{X}_n \dot{\sim} \mathcal{N}\left(5, 3/n\right)$, где $\mu = 5$ и $\sigma^2 = 3$. Поскольку $g'(5) = 3 \times 5^2 = 75 \neq 0$, то вследствие дельта метода:

$$\left(\overline{X}_n\right)^3 \dot{\sim} \mathcal{N}\left(5^3, 3 \times 75^2/n\right) = \mathcal{N}\left(125, 16875/n\right)$$

- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ такую, что:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- Тогда для функции $g(.)$ с ненулевой производной $g'(\mu) \neq 0$ справедливо:

$$\sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- На практике при достаточно большом $n \geq 100$ можно предположить, что при соблюдении обозначенных условий:

$$X_n \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right) \implies g(X_n) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(g\left(\mu\right), \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2/n\right)$$

Пример: имеется последовательность $X_1, X_2, \ldots$, где $X_i \sim U(2, 8)$ независимы. При помощи дельта метода найдем асимптотическое распределение $g\left(\overline{X}_n\right) = \left(\overline{X}_n\right)^3$. Используя ЦПТ, нетрудно показать, что $\overline{X}_n \dot{\sim} \mathcal{N}\left(5, 3/n\right)$, где $\mu = 5$ и $\sigma^2 = 3$. Поскольку $g'(5) = 3 \times 5^2 = 75 \neq 0$, то вследствие дельта метода:

$$\left(\overline{X}_n\right)^3 \dot{\sim} \mathcal{N}\left(5^3, 3 \times 75^2/n\right) = \mathcal{N}\left(125, 16875/n\right)$$

Для примера рассчитаем следующую вероятность:

$$P\left(\left(\overline{X}_{1000}\right)^3 \leq 130\right) \approx \Phi\left(\frac{130 - 125}{\sqrt{16875/1000}}\right) \approx \Phi(1.217) \approx 0.888$$

Дельта метод

Дополнительные примеры

- Имеется последовательность Хи-квадрат случайных величин $\chi_1^2, \chi_2^2, ...$, где $\chi_i^2 \sim \chi^2(i)$.

- Имеется последовательность Хи-квадрат случайных величин $\chi_1^2, \chi_2^2, ...$, где $\chi_i^2 \sim \chi^2(i)$. Используя ЦПТ, нетрудно показать, что $X_n = \left(\chi_n^2/n\right) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(1, 2/n\right)$, где $\mu = 1$ и $\sigma^2 = 2$.

- Имеется последовательность Хи-квадрат случайных величин $\chi^2_1, \chi^2_2, ...$, где $\chi^2_i \sim \chi^2(i)$. Используя ЦПТ, нетрудно показать, что $X_n = \left(\chi^2_n/n\right) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(1, 2/n\right)$, где $\mu = 1$ и $\sigma^2 = 2$. С помощью дельта метода найдем приблизительное распределение для $g(\chi^2_n) = \sqrt{\chi^2_n}$.

- Имеется последовательность Хи-квадрат случайных величин $\chi_1^2, \chi_2^2, ...$, где $\chi_i^2 \sim \chi^2(i)$. Используя ЦПТ, нетрудно показать, что $X_n = \left(\chi_n^2/n\right) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(1, 2/n\right)$, где $\mu = 1$ и $\sigma^2 = 2$. С помощью дельта метода найдем приблизительное распределение для $g(\chi_n^2) = \sqrt{\chi_n^2}$. Сперва рассмотрим $g(X_n)$ и, учитывая что $g'(1) = 1/(2\sqrt{1}) = 0.5 \neq 0$, получаем:

$$\sqrt{X_n} \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\sqrt{1}, (2/n) \times 0.5^2\right) = \mathcal{N}\left(1, 0.5/n\right) \implies \sqrt{\chi_n^2} = \sqrt{nX_n} = \sqrt{n}\sqrt{X_n} \dot{\sim} \sqrt{n}\mathcal{N}\left(1, 0.5/n\right) = \mathcal{N}\left(\sqrt{n}, 0.5\right)$$

Дельта метод

Дополнительные примеры

- Имеется последовательность Хи-квадрат случайных величин $\chi^2_1, \chi^2_2, ...$, где $\chi^2_i \sim \chi^2(i)$. Используя ЦПТ, нетрудно показать, что $X_n = \left(\chi^2_n/n\right) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(1, 2/n\right)$, где $\mu = 1$ и $\sigma^2 = 2$. С помощью дельта метода найдем приблизительное распределение для $g(\chi^2_n) = \sqrt{\chi^2_n}$. Сперва рассмотрим $g(X_n)$ и, учитывая что $g'(1) = 1/(2\sqrt{1}) = 0.5 \neq 0$, получаем:

$$\sqrt{X_n} \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\sqrt{1}, (2/n) \times 0.5^2\right) = \mathcal{N}\left(1, 0.5/n\right) \implies \sqrt{\chi^2_n} = \sqrt{nX_n} = \sqrt{n}\sqrt{X_n} \dot{\sim} \sqrt{n}\mathcal{N}\left(1, 0.5/n\right) = \mathcal{N}\left(\sqrt{n}, 0.5\right)$$

Для примера рассчитаем вероятность:

$$P(\sqrt{\chi^2_{100}} \leq 10.5) \approx \Phi\left(\frac{10.5 - \sqrt{100}}{\sqrt{0.5}}\right) = \Phi\left(\sqrt{0.5}\right) \approx 0.76$$

- Имеется последовательность Хи-квадрат случайных величин $\chi_1^2, \chi_2^2, ...$, где $\chi_i^2 \sim \chi^2(i)$. Используя ЦПТ, нетрудно показать, что $X_n = \left(\chi_n^2/n\right) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(1, 2/n\right)$, где $\mu = 1$ и $\sigma^2 = 2$. С помощью дельта метода найдем приблизительное распределение для $g(\chi_n^2) = \sqrt{\chi_n^2}$. Сперва рассмотрим $g(X_n)$ и, учитывая что $g'(1) = 1/(2\sqrt{1}) = 0.5 \neq 0$, получаем:

$$\sqrt{X_n} \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\sqrt{1}, (2/n) \times 0.5^2\right) = \mathcal{N}\left(1, 0.5/n\right) \implies \sqrt{\chi_n^2} = \sqrt{nX_n} = \sqrt{n}\sqrt{X_n} \dot{\sim} \sqrt{n}\mathcal{N}\left(1, 0.5/n\right) = \mathcal{N}\left(\sqrt{n}, 0.5\right)$$

Для примера рассчитаем вероятность:

$$P(\sqrt{\chi_{100}^2} \leq 10.5) \approx \Phi\left(\frac{10.5 - \sqrt{100}}{\sqrt{0.5}}\right) = \Phi\left(\sqrt{0.5}\right) \approx 0.76$$

Дельта метод

Дополнительные примеры

- Имеется последовательность Хи-квадрат случайных величин $\chi_1^2, \chi_2^2, ...$, где $\chi_i^2 \sim \chi^2(i)$. Используя ЦПТ, нетрудно показать, что $X_n = \left(\chi_n^2/n\right) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(1, 2/n\right)$, где $\mu = 1$ и $\sigma^2 = 2$. С помощью дельта метода найдем приблизительное распределение для $g(\chi_n^2) = \sqrt{\chi_n^2}$. Сперва рассмотрим $g(X_n)$ и, учитывая что $g'(1) = 1/(2\sqrt{1}) = 0.5 \neq 0$, получаем:

$$\sqrt{X_n} \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\sqrt{1}, (2/n) \times 0.5^2\right) = \mathcal{N}\left(1, 0.5/n\right) \implies \sqrt{\chi_n^2} = \sqrt{nX_n} = \sqrt{n}\sqrt{X_n} \dot{\sim} \sqrt{n}\mathcal{N}\left(1, 0.5/n\right) = \mathcal{N}\left(\sqrt{n}, 0.5\right)$$

Для примера рассчитаем вероятность:

$$P(\sqrt{\chi_{100}^2} \leq 10.5) \approx \Phi\left(\frac{10.5 - \sqrt{100}}{\sqrt{0.5}}\right) = \Phi\left(\sqrt{0.5}\right) \approx 0.76$$

- Найдем асимптотическое распределение оценки параметра экспоненциального распределения $\hat{\lambda}_n = 1/\overline{X}_n$.

- Имеется последовательность Хи-квадрат случайных величин $\chi_1^2, \chi_2^2, ...$, где $\chi_i^2 \sim \chi^2(i)$. Используя ЦПТ, нетрудно показать, что $X_n = \left(\chi_n^2/n\right) \dot\sim \mathcal{N}\left(1, 2/n\right)$, где $\mu = 1$ и $\sigma^2 = 2$. С помощью дельта метода найдем приблизительное распределение для $g(\chi_n^2) = \sqrt{\chi_n^2}$. Сперва рассмотрим $g(X_n)$ и, учитывая что $g'(1) = 1/(2\sqrt{1}) = 0.5 \neq 0$, получаем:

$$\sqrt{X_n} \dot\sim \mathcal{N}\left(\sqrt{1}, (2/n) \times 0.5^2\right) = \mathcal{N}\left(1, 0.5/n\right) \implies \sqrt{\chi_n^2} = \sqrt{nX_n} = \sqrt{n}\sqrt{X_n} \dot\sim \sqrt{n}\mathcal{N}\left(1, 0.5/n\right) = \mathcal{N}\left(\sqrt{n}, 0.5\right)$$

Для примера рассчитаем вероятность:

$$P(\sqrt{\chi_{100}^2} \leq 10.5) \approx \Phi\left(\frac{10.5 - \sqrt{100}}{\sqrt{0.5}}\right) = \Phi\left(\sqrt{0.5}\right) \approx 0.76$$

- Найдем асимптотическое распределение оценки параметра экспоненциального распределения $\hat\lambda_n = 1/\overline{X}_n$. В силу ЦПТ $\overline{X}_n \dot\sim \mathcal{N}\left(1/\lambda, (1/\lambda^2)/n\right)$, а значит, полагая $g\left(\overline{X}_n\right) = \hat\lambda_n$ и применяя дельта метод, имеем $g'(1/\lambda) = d(1/(1/\lambda))/d(1/\lambda) = \lambda^2 \neq 0$, откуда:

$$\hat\lambda_n \dot\sim \mathcal{N}\left(1/(1/\lambda), \left(\left(\lambda^2\right)^2/\lambda^2\right)/n\right) = \mathcal{N}\left(\lambda, \lambda^2/n\right)$$

Доказательство дельта метода

Подготовка к доказательству

- Если функция $g(x)$ непрерывна и дифференцируема в точке μ, то согласно **теореме Тейлора** существует функция $h(x)$, такая, что $\lim\limits_{x\to\mu} h(x) = 0$ и:

$$g(x) = \underbrace{g(\mu) + g'(\mu)\,(x-\mu)}_{\text{линейная аппроксимация}} + \underbrace{h(x)\,(x-\mu)}_{\text{ошибка}}$$

Важно – приближая x к μ мы можем сколько угодно сильно снизить погрешность (ошибку) линейной аппроксимации .

Доказательство дельта метода

Подготовка к доказательству

- Если функция $g(x)$ непрерывна и дифференцируема в точке μ, то согласно **теореме Тейлора** существует функция $h(x)$, такая, что $\lim\limits_{x \to \mu} h(x) = 0$ и:

$$g(x) = \underbrace{g(\mu) + g'(\mu)(x-\mu)}_{\text{линейная аппроксимация}} + \underbrace{h(x)(x-\mu)}_{\text{ошибка}}$$

  Важно – приближая x к μ мы можем сколько угодно сильно снизить погрешность (ошибку) линейной аппроксимации .

- **Лемма**: пусть дана последовательность $X_1, X_2, \ldots$, такая, что:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

  Тогда $X_n \xrightarrow{p} \mu$, то есть из асимптотической нормальности следует сходимость по вероятности.

Доказательство дельта метода

Подготовка к доказательству

- Если функция $g(x)$ непрерывна и дифференцируема в точке μ, то согласно **теореме Тейлора** существует функция $h(x)$, такая, что $\lim\limits_{x \to \mu} h(x) = 0$ и:

$$g(x) = \underbrace{g(\mu) + g'(\mu)(x-\mu)}_{\text{линейная аппроксимация}} + \underbrace{h(x)(x-\mu)}_{\text{ошибка}}$$

  Важно – приближая x к μ мы можем сколько угодно сильно снизить погрешность (ошибку) линейной аппроксимации .

- **Лемма**: пусть дана последовательность $X_1, X_2, ...$, такая, что:

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

  Тогда $X_n \xrightarrow{p} \mu$, то есть из асимптотической нормальности следует сходимость по вероятности.
  Доказательство: поскольку $1/\sqrt{n} \xrightarrow{p} 0$, то по теореме Слуцкого:

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \times 1/\sqrt{n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \times 0 = 0 \implies X_n - \mu \xrightarrow{p} 0 \implies X_n \xrightarrow{p} \mu$$

Доказательство дельта метода

Доказательство

- Необходимо доказать, что если $g'(\mu) \neq 0$, то:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \implies \sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

Доказательство дельта метода

Доказательство

- Необходимо доказать, что если $g'(\mu) \neq 0$, то:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \implies \sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- Применим теорему Тейлора для раскладывания $g(X_n)$ в точке μ:

$$g(X_n) = g(\mu) + g'(\mu)\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\left(X_n - \mu\right), \text{ где } \lim_{x \to \mu} h(x) = 0$$

Доказательство дельта метода

Доказательство

- Необходимо доказать, что если $g'(\mu) \neq 0$, то:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \implies \sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- Применим теорему Тейлора для раскладывания $g(X_n)$ в точке μ:

$$g(X_n) = g(\mu) + g'(\mu)\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\left(X_n - \mu\right), \text{ где } \lim_{x \to \mu} h(x) = 0$$

- Перенесем $g(\mu)$ в левую сторону и домножим обе части равенства на $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}\left(g(X_n) - g(\mu)\right) = g'(\mu)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right)$$

Доказательство дельта метода

Доказательство

- Необходимо доказать, что если $g'(\mu) \neq 0$, то:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \implies \sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- Применим теорему Тейлора для раскладывания $g(X_n)$ в точке μ:

$$g(X_n) = g(\mu) + g'(\mu)\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\left(X_n - \mu\right), \text{ где } \lim_{x \to \mu} h(x) = 0$$

- Перенесем $g(\mu)$ в левую сторону и домножим обе части равенства на $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}\left(g(X_n) - g(\mu)\right) = g'(\mu)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right)$$

- **Идея** – поочередно найти, к чему сходится по распределению каждое из слагаемых правой части равенства и, применив теорему Слуцкого определить, к чему по распределению сходится их сумма (левая часть).

Доказательство дельта метода

Доказательство

- Необходимо доказать, что если $g'(\mu) \neq 0$, то:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \implies \sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- Применим теорему Тейлора для раскладывания $g(X_n)$ в точке μ:

$$g(X_n) = g(\mu) + g'(\mu)\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\left(X_n - \mu\right), \text{ где } \lim_{x \to \mu} h(x) = 0$$

- Перенесем $g(\mu)$ в левую сторону и домножим обе части равенства на $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}\left(g(X_n) - g(\mu)\right) = g'(\mu)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right)$$

- **Идея** – поочередно найти, к чему сходится по распределению каждое из слагаемых правой части равенства и, применив теорему Слуцкого определить, к чему по распределению сходится их сумма (левая часть).
- **Первое слагаемое**. Поскольку функция $g(x)$ дифференцируема в точке μ, то она и непрерывна в этой точке, откуда $h(\mu) = \lim_{x \to \mu} h(x) = 0$. По лемме $X_n \xrightarrow{p} \mu$, а значит по теореме Манна-Вальда $h(X_n) \xrightarrow{p} h(\mu) = 0$.

  Следовательно по теореме Слуцкого получаем $h(X_n)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} 0 \times \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) = 0$.

Доказательство дельта метода

Доказательство

- Необходимо доказать, что если $g'(\mu) \neq 0$, то:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \implies \sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- Применим теорему Тейлора для раскладывания $g(X_n)$ в точке μ:

$$g(X_n) = g(\mu) + g'(\mu)\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\left(X_n - \mu\right), \text{ где } \lim_{x \to \mu} h(x) = 0$$

- Перенесем $g(\mu)$ в левую сторону и домножим обе части равенства на $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}\left(g(X_n) - g(\mu)\right) = g'(\mu)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right)$$

- **Идея** – поочередно найти, к чему сходится по распределению каждое из слагаемых правой части равенства и, применив теорему Слуцкого определить, к чему по распределению сходится их сумма (левая часть).
- **Первое слагаемое**. Поскольку функция $g(x)$ дифференцируема в точке μ, то она и непрерывна в этой точке, откуда $h(\mu) = \lim\limits_{x \to \mu} h(x) = 0$. По лемме $X_n \xrightarrow{p} \mu$, а значит по теореме Манна-Вальда $h(X_n) \xrightarrow{p} h(\mu) = 0$.

  Следовательно по теореме Слуцкого получаем $h(X_n)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} 0 \times \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) = 0$.
- **Второе слагаемое**. По предпосылке теоремы $\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$, а значит по теореме Слуцкого:

$$g'(\mu)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} g'(\mu)\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) = \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- Необходимо доказать, что если $g'(\mu) \neq 0$, то:

$$\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \implies \sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- Применим теорему Тейлора для раскладывания $g(X_n)$ в точке μ:

$$g(X_n) = g(\mu) + g'(\mu)\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\left(X_n - \mu\right), \text{ где } \lim_{x \to \mu} h(x) = 0$$

- Перенесем $g(\mu)$ в левую сторону и домножим обе части равенства на $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}\left(g(X_n) - g(\mu)\right) = g'(\mu)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right)$$

- **Идея** – поочередно найти, к чему сходится по распределению каждое из слагаемых правой части равенства и, применив теорему Слуцкого определить, к чему по распределению сходится их сумма (левая часть).
- **Первое слагаемое**. Поскольку функция $g(x)$ дифференцируема в точке μ, то она и непрерывна в этой точке, откуда $h(\mu) = \lim_{x \to \mu} h(x) = 0$. По лемме $X_n \xrightarrow{p} \mu$, а значит по теореме Манна-Вальда $h(X_n) \xrightarrow{p} h(\mu) = 0$.

  Следовательно по теореме Слуцкого получаем $h(X_n)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} 0 \times \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) = 0$.
- **Второе слагаемое**. По предпосылке теоремы $\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$, а значит по теореме Слуцкого:

$$g'(\mu)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} g'(\mu)\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) = \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

- Применяя теорему Слуцкого в отношении суммы рассматриваемых слагаемых получаем:

$$\sqrt{n}\left(g(X_n) - g(\mu)\right) = g'(\mu)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) + h(X_n)\sqrt{n}\left(X_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 g'(\mu)^2\right) + 0 = \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(g'(\mu)^2\right)\right)$$

Инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Формулировка

- Рассмотрим ММП оценку $\hat{\theta}_n$ параметра θ.

Инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Формулировка

- Рассмотрим ММП оценку $\hat{\theta}_n$ параметра θ.
- Если функция $g(.)$ монотонна (часто это условие можно ослабить), то $g(\hat{\theta}_n)$ также является ММП оценкой, а значит обладает присущими ММП оценкам привлекательными свойствами: состоятельность, асимптотическая нормальность и асимптотическая эффективность.

Инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Формулировка

- Рассмотрим ММП оценку $\hat{\theta}_n$ параметра θ.
- Если функция $g(.)$ монотонна (часто это условие можно ослабить), то $g(\hat{\theta}_n)$ также является ММП оценкой, а значит обладает присущими ММП оценкам привлекательными свойствами: состоятельность, асимптотическая нормальность и асимптотическая эффективность.
- Пользуясь асимптотической нормальностью ММП оценок и дельта методом можно найти асимптотическое распределение функций от ММП оценок:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{i(\theta)}\right)\implies\sqrt{n}\left(g(\hat{\theta}_n)-g(\theta)\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{(g'(\theta))^2}{i(\theta)}\right)$$

Инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Формулировка

- Рассмотрим ММП оценку $\hat{\theta}_n$ параметра θ.
- Если функция $g(.)$ монотонна (часто это условие можно ослабить), то $g(\hat{\theta}_n)$ также является ММП оценкой, а значит обладает присущими ММП оценкам привлекательными свойствами: состоятельность, асимптотическая нормальность и асимптотическая эффективность.
- Пользуясь асимптотической нормальностью ММП оценок и дельта методом можно найти асимптотическое распределение функций от ММП оценок:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{i(\theta)}\right) \implies \sqrt{n}\left(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{(g'(\theta))^2}{i(\theta)}\right)$$

- На практике предполагается, что $g(\hat{\theta}_n)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(g(\theta), \frac{(g'(\theta))^2}{ni(\theta)}\right)$ или $g(\hat{\theta}_n)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(g(\hat{\theta}_n), \frac{(g'(\hat{\theta}_n))^2}{ni(\hat{\theta}_n)}\right)$.

Инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Формулировка

- Рассмотрим ММП оценку $\hat{\theta}_n$ параметра θ.
- Если функция $g(.)$ монотонна (часто это условие можно ослабить), то $g(\hat{\theta}_n)$ также является ММП оценкой, а значит обладает присущими ММП оценкам привлекательными свойствами: состоятельность, асимптотическая нормальность и асимптотическая эффективность.
- Пользуясь асимптотической нормальностью ММП оценок и дельта методом можно найти асимптотическое распределение функций от ММП оценок:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{i(\theta)}\right)\implies\sqrt{n}\left(g(\hat{\theta}_n)-g(\theta)\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{(g'(\theta))^2}{i(\theta)}\right)$$

- На практике предполагается, что $g(\hat{\theta}_n)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(g(\theta),\frac{(g'(\theta))^2}{ni(\theta)}\right)$ или $g(\hat{\theta}_n)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(g(\hat{\theta}_n),\frac{(g'(\hat{\theta}_n))^2}{ni(\hat{\theta}_n)}\right)$.
- Асимптотическая дисперсия и ее оценка имеют вид $As.Var(g(\hat{\theta}_n))=\frac{(g'(\theta))^2}{ni(\theta)}$ и $\widehat{As.Var}(g(\hat{\theta}_n))=\frac{(g'(\hat{\theta}_n))^2}{ni(\hat{\theta}_n)}$.

Инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Формулировка

- Рассмотрим ММП оценку $\hat{\theta}_n$ параметра θ.
- Если функция $g(.)$ монотонна (часто это условие можно ослабить), то $g(\hat{\theta}_n)$ также является ММП оценкой, а значит обладает присущими ММП оценкам привлекательными свойствами: состоятельность, асимптотическая нормальность и асимптотическая эффективность.
- Пользуясь асимптотической нормальностью ММП оценок и дельта методом можно найти асимптотическое распределение функций от ММП оценок:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{i(\theta)}\right) \implies \sqrt{n}\left(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{(g'(\theta))^2}{i(\theta)}\right)$$

- На практике предполагается, что $g(\hat{\theta}_n) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(g(\theta), \frac{(g'(\theta))^2}{ni(\theta)}\right)$ или $g(\hat{\theta}_n) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(g(\hat{\theta}_n), \frac{(g'(\hat{\theta}_n))^2}{ni(\hat{\theta}_n)}\right)$.
- Асимптотическая дисперсия и ее оценка имеют вид $As.Var(g(\hat{\theta}_n)) = \frac{(g'(\theta))^2}{ni(\theta)}$ и $\widehat{As.Var}(g(\hat{\theta}_n)) = \frac{(g'(\hat{\theta}_n))^2}{ni(\hat{\theta}_n)}$.

  Пример: по выборке из распределения Пуассона с помощью метода максимального правдоподобия была найдена оценка $\hat{\lambda}_n = \overline{X}_n$. Найдем асимптотическое распределение и оценку асимптотической дисперсии оценки вероятности того, что наблюдение примет нулевое значение.

Инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Формулировка

- Рассмотрим ММП оценку $\hat{\theta}_n$ параметра θ.
- Если функция $g(.)$ монотонна (часто это условие можно ослабить), то $g(\hat{\theta}_n)$ также является ММП оценкой, а значит обладает присущими ММП оценкам привлекательными свойствами: состоятельность, асимптотическая нормальность и асимптотическая эффективность.
- Пользуясь асимптотической нормальностью ММП оценок и дельта методом можно найти асимптотическое распределение функций от ММП оценок:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{i(\theta)}\right)\implies\sqrt{n}\left(g(\hat{\theta}_n)-g(\theta)\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{(g'(\theta))^2}{i(\theta)}\right)$$

- На практике предполагается, что $g(\hat{\theta}_n)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(g(\theta),\frac{(g'(\theta))^2}{ni(\theta)}\right)$ или $g(\hat{\theta}_n)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(g(\hat{\theta}_n),\frac{(g'(\hat{\theta}_n))^2}{ni(\hat{\theta}_n)}\right)$.
- Асимптотическая дисперсия и ее оценка имеют вид $As.Var(g(\hat{\theta}_n))=\frac{(g'(\theta))^2}{ni(\theta)}$ и $\widehat{As.Var}(g(\hat{\theta}_n))=\frac{(g'(\hat{\theta}_n))^2}{ni(\hat{\theta}_n)}$.

  Пример: по выборке из распределения Пуассона с помощью метода максимального правдоподобия была найдена оценка $\hat{\lambda}_n=\overline{X}_n$. Найдем асимптотическое распределение и оценку асимптотической дисперсии оценки вероятности того, что наблюдение примет нулевое значение. В силу монотонности экспоненциальной функции применима инвариантность, вследствие которой ММП оценкой $P(X_1=0)=e^{-\lambda}$ будет $\hat{P}(X_1=0)=e^{-\hat{\lambda}_n}$.

Инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Формулировка

- Рассмотрим ММП оценку $\hat{\theta}_n$ параметра θ.
- Если функция $g(.)$ монотонна (часто это условие можно ослабить), то $g(\hat{\theta}_n)$ также является ММП оценкой, а значит обладает присущими ММП оценкам привлекательными свойствами: состоятельность, асимптотическая нормальность и асимптотическая эффективность.
- Пользуясь асимптотической нормальностью ММП оценок и дельта методом можно найти асимптотическое распределение функций от ММП оценок:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{i(\theta)}\right)\implies\sqrt{n}\left(g(\hat{\theta}_n)-g(\theta)\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{\left(g'(\theta)\right)^2}{i(\theta)}\right)$$

- На практике предполагается, что $g(\hat{\theta}_n)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(g(\theta),\frac{\left(g'(\theta)\right)^2}{ni(\theta)}\right)$ или $g(\hat{\theta}_n)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(g(\hat{\theta}_n),\frac{\left(g'(\hat{\theta}_n)\right)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}\right)$.
- Асимптотическая дисперсия и ее оценка имеют вид $As.Var(g(\hat{\theta}_n))=\frac{\left(g'(\theta)\right)^2}{ni(\theta)}$ и $\widehat{As.Var}(g(\hat{\theta}_n))=\frac{\left(g'(\hat{\theta}_n)\right)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}$.

  Пример: по выборке из распределения Пуассона с помощью метода максимального правдоподобия была найдена оценка $\hat{\lambda}_n=\overline{X}_n$. Найдем асимптотическое распределение и оценку асимптотической дисперсии оценки вероятности того, что наблюдение примет нулевое значение. В силу монотонности экспоненциальной функции применима инвариантность, вследствие которой ММП оценкой $P(X_1=0)=e^{-\lambda}$ будет $\hat{P}(X_1=0)=e^{-\hat{\lambda}_n}$. Напомним, что $i(\lambda)=1/\lambda$ и вычислим $g'(\lambda)=P'(X_1=0)=-e^{-\lambda}$, откуда:

$$e^{-\hat{\lambda}_n}\dot{\sim}\mathcal{N}\left(e^{-\lambda},\lambda e^{-2\lambda}/n\right)\qquad\widehat{As.Var}\left(e^{-\hat{\lambda}_n}\right)=\overline{X}_n e^{-2\overline{X}_n}/n$$

Время (в часах) на прохождение миссии в игре случайно взятым игроком является экспоненциальной случайной величиной с параметром λ. По выборке из времени, затраченного игроками на прохождение миссии, найдите ММП оценку дисперсии времени, затрачиваемого игроками на прохождение миссии, а также асимптотическую дисперсию данной оценки и ее оценку. По выборке из $n = 1000$ наблюдений с реализацией выборочного среднего $\overline{x}_n = 0.5$ приблизительно рассчитайте вероятность того, что ММП оценка дисперсии наблюдений превысит 0.26.

Дополнительный пример

Время (в часах) на прохождение миссии в игре случайно взятым игроком является экспоненциальной случайной величиной с параметром λ. По выборке из времени, затраченного игроками на прохождение миссии, найдите ММП оценку дисперсии времени, затрачиваемого игроками на прохождение миссии, а также асимптотическую дисперсию данной оценки и ее оценку. По выборке из $n = 1000$ наблюдений с реализацией выборочного среднего $\overline{x}_n = 0.5$ приблизительно рассчитайте вероятность того, что ММП оценка дисперсии наблюдений превысит 0.26.

Решение: поскольку ММП оценка имеет вид $\hat{\lambda}_n = 1/\overline{X}_n$ и оцениваемая дисперсия является монотонной функцией $Var(X_1) = 1/\lambda^2$, то в силу инвариантности $\widehat{Var}(X_1) = 1/\hat{\lambda}_n^2 = \left(\overline{X}_n\right)^2$.

Инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Дополнительный пример

Время (в часах) на прохождение миссии в игре случайно взятым игроком является экспоненциальной случайной величиной с параметром λ. По выборке из времени, затраченного игроками на прохождение миссии, найдите ММП оценку дисперсии времени, затрачиваемого игроками на прохождение миссии, а также асимптотическую дисперсию данной оценки и ее оценку. По выборке из $n = 1000$ наблюдений с реализацией выборочного среднего $\overline{x}_n = 0.5$ приблизительно рассчитайте вероятность того, что ММП оценка дисперсии наблюдений превысит 0.26.

Решение: поскольку ММП оценка имеет вид $\hat{\lambda}_n = 1/\overline{X}_n$ и оцениваемая дисперсия является монотонной функцией $Var(X_1) = 1/\lambda^2$, то в силу инвариантности $\widehat{Var}(X_1) = 1/\hat{\lambda}_n^2 = \left(\overline{X}_n\right)^2$. Поскольку $i(\lambda) = 1/\lambda^2$ и $g'(\lambda) = Var'(X_1) = -2\lambda^{-3}$, то:

$$\widehat{Var}(X_1)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(1/\lambda^2, (-2\lambda^{-3})^2/\left(n\left(1/\lambda^2\right)\right)\right) = \mathcal{N}\left(\lambda^{-2}, 4\lambda^{-4}/n\right)$$

$$As.Var(\widehat{Var}(X_1)) = 4\lambda^{-4}/n \implies \widehat{As.Var}(\widehat{Var}(X_1)) = 4\overline{X}_n^4/n$$

Инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Дополнительный пример

Время (в часах) на прохождение миссии в игре случайно взятым игроком является экспоненциальной случайной величиной с параметром λ. По выборке из времени, затраченного игроками на прохождение миссии, найдите ММП оценку дисперсии времени, затрачиваемого игроками на прохождение миссии, а также асимптотическую дисперсию данной оценки и ее оценку. По выборке из $n = 1000$ наблюдений с реализацией выборочного среднего $\overline{x}_n = 0.5$ приблизительно рассчитайте вероятность того, что ММП оценка дисперсии наблюдений превысит 0.26.

Решение: поскольку ММП оценка имеет вид $\hat{\lambda}_n = 1/\overline{X}_n$ и оцениваемая дисперсия является монотонной функцией $Var(X_1) = 1/\lambda^2$, то в силу инвариантности $\widehat{Var}(X_1) = 1/\hat{\lambda}_n^2 = \left(\overline{X}_n\right)^2$. Поскольку $i(\lambda) = 1/\lambda^2$ и $g'(\lambda) = Var'(X_1) = -2\lambda^{-3}$, то:

$$\widehat{Var}(X_1)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(1/\lambda^2, (-2\lambda^{-3})^2/\left(n\left(1/\lambda^2\right)\right)\right) = \mathcal{N}\left(\lambda^{-2}, 4\lambda^{-4}/n\right)$$

$$As.Var(\widehat{Var}(X_1)) = 4\lambda^{-4}/n \implies \widehat{As.Var}(\widehat{Var}(X_1)) = 4\overline{X}_n^4/n$$

Поскольку $\overline{x}_n = 0.5$, то $\hat{\lambda}_n(x) = 1/0.5 = 2$, откуда:

$$\widehat{Var}(X_1)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(1/2^2, 4\times 2^{-4}/1000\right) = \mathcal{N}\left(0.25, 0.00025\right)$$

Инвариантность оценок метода максимального правдоподобия

Дополнительный пример

Время (в часах) на прохождение миссии в игре случайно взятым игроком является экспоненциальной случайной величиной с параметром λ. По выборке из времени, затраченного игроками на прохождение миссии, найдите ММП оценку дисперсии времени, затрачиваемого игроками на прохождение миссии, а также асимптотическую дисперсию данной оценки и ее оценку. По выборке из $n = 1000$ наблюдений с реализацией выборочного среднего $\overline{x}_n = 0.5$ приблизительно рассчитайте вероятность того, что ММП оценка дисперсии наблюдений превысит 0.26.

Решение: поскольку ММП оценка имеет вид $\hat{\lambda}_n = 1/\overline{X}_n$ и оцениваемая дисперсия является монотонной функцией $Var(X_1) = 1/\lambda^2$, то в силу инвариантности $\widehat{Var}(X_1) = 1/\hat{\lambda}_n^2 = \left(\overline{X}_n\right)^2$. Поскольку $i(\lambda) = 1/\lambda^2$ и $g'(\lambda) = Var'(X_1) = -2\lambda^{-3}$, то:

$$\widehat{Var}(X_1) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(1/\lambda^2, (-2\lambda^{-3})^2/\left(n\left(1/\lambda^2\right)\right)\right) = \mathcal{N}\left(\lambda^{-2}, 4\lambda^{-4}/n\right)$$

$$As.Var(\widehat{Var}(X_1)) = 4\lambda^{-4}/n \implies \widehat{As.Var}(\widehat{Var}(X_1)) = 4\overline{X}_n^4/n$$

Поскольку $\overline{x}_n = 0.5$, то $\hat{\lambda}_n(x) = 1/0.5 = 2$, откуда:

$$\widehat{Var}(X_1) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(1/2^2, 4 \times 2^{-4}/1000\right) = \mathcal{N}(0.25, 0.00025)$$

Используя полученную информацию приблизительно рассчитаем искомую вероятность:

$$P(\widehat{Var}(X_1) > 0.26) \approx 1 - \Phi\left(\frac{0.26 - 0.25}{\sqrt{0.00025}}\right) \approx 0.263545$$

Дополнительный комментарий

Сходимость по вероятности в интересном случае

- В ходе одного из этапов доказательства дельта метода мы показали, что из $\lim\limits_{x \to \mu} h(x) = 0$ и $X_n \xrightarrow{p} \mu$ по теореме Манна-Вальда следует $h(X_n) \xrightarrow{p} 0$. Докажем справедливость этого перехода не предполагая непрерывность $h(x)$ используя $\epsilon - \delta$ определение предела.

Дополнительный комментарий

Сходимость по вероятности в интересном случае

- В ходе одного из этапов доказательства дельта метода мы показали, что из $\lim\limits_{x\to\mu} h(x) = 0$ и $X_n \xrightarrow{p} \mu$ по теореме Манна-Вальда следует $h(X_n) \xrightarrow{p} 0$. Докажем справедливость этого перехода не предполагая непрерывность $h(x)$ используя $\epsilon - \delta$ определение предела.
- Поскольку $\lim\limits_{x\to\mu} h(x) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такая, что из $|x - \mu| < \delta$ следует $|h(x) - 0| < \varepsilon$.

Дополнительный комментарий

Сходимость по вероятности в интересном случае

- В ходе одного из этапов доказательства дельта метода мы показали, что из $\lim\limits_{x \to \mu} h(x) = 0$ и $X_n \xrightarrow{p} \mu$ по теореме Манна-Вальда следует $h(X_n) \xrightarrow{p} 0$. Докажем справедливость этого перехода не предполагая непрерывность $h(x)$ используя $\epsilon - \delta$ определение предела.
- Поскольку $\lim\limits_{x \to \mu} h(x) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такая, что из $|x - \mu| < \delta$ следует $|h(x) - 0| < \varepsilon$.
- Следовательно, из события $|X_n - \mu| < \delta$ всегда следует событие $|h(X_n) - 0| < \varepsilon$, а значит:
$$P\left(|h(X_n) - 0| < \varepsilon\right) \geq P\left(|X_n - \mu| < \delta\right)$$

Дополнительный комментарий

Сходимость по вероятности в интересном случае

- В ходе одного из этапов доказательства дельта метода мы показали, что из $\lim\limits_{x \to \mu} h(x) = 0$ и $X_n \xrightarrow{p} \mu$ по теореме Манна-Вальда следует $h(X_n) \xrightarrow{p} 0$. Докажем справедливость этого перехода не предполагая непрерывность $h(x)$ используя $\epsilon - \delta$ определение предела.
- Поскольку $\lim\limits_{x \to \mu} h(x) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такая, что из $|x - \mu| < \delta$ следует $|h(x) - 0| < \varepsilon$.
- Следовательно, из события $|X_n - \mu| < \delta$ всегда следует событие $|h(X_n) - 0| < \varepsilon$, а значит:

$$P\left(|h(X_n) - 0| < \varepsilon\right) \geq P\left(|X_n - \mu| < \delta\right)$$

- Поскольку $X_n \xrightarrow{p} \mu$, то при любом $\delta > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|X_n - \mu| < \delta\right) = 1$$

- В ходе одного из этапов доказательства дельта метода мы показали, что из $\lim_{x\to\mu} h(x) = 0$ и $X_n \xrightarrow{p} \mu$ по теореме Манна-Вальда следует $h(X_n) \xrightarrow{p} 0$. Докажем справедливость этого перехода не предполагая непрерывность $h(x)$ используя $\epsilon - \delta$ определение предела.
- Поскольку $\lim_{x\to\mu} h(x) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такая, что из $|x - \mu| < \delta$ следует $|h(x) - 0| < \varepsilon$.
- Следовательно, из события $|X_n - \mu| < \delta$ всегда следует событие $|h(X_n) - 0| < \varepsilon$, а значит:

$$P\left(|h(X_n) - 0| < \varepsilon\right) \geq P\left(|X_n - \mu| < \delta\right)$$

- Поскольку $X_n \xrightarrow{p} \mu$, то при любом $\delta > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - \mu| < \delta\right) = 1$$

- Отсюда получаем, что $h(X_n) \xrightarrow{p} 0$, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta > 0$, что:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|h(X_n) - 0| < \varepsilon\right) \geq \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - \mu| < \delta\right) = 1$$