

Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2023-2024

Дедлайн: решение домашнего задания загружается в виде единого файла, имеющего pdf-формат, в систему SmartLMS в разделе с соответствующим размещенным заданием до **3-го декабря включительно**. При наличии сбоев в работе системы файл необходимо направить на почту mirectvis@gmail.com. Тема письма должна иметь следующий формат: “МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ”, например, “МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 1”.

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №2

Задание №1. Выручка (60 баллов)

Вследствие падения метеорита на дороге длиной 10 километров между 2 и 5 километрами образовалась яма длиной 3 километра. Километр дороги, на котором случайно взятый автомобилист останавливается (он может ехать с любого конца дороги), является случайной величиной со следующей функцией плотности:

$$f_X(t) = \begin{cases} (0.05\alpha)t, & \text{если } t \in [0, 2] \\ 0, & \text{в противном случае} \\ 0.04(t - \alpha), & \text{если } t \in [5, 10] \end{cases}$$

1. Найдите параметр α и запишите функцию плотности с учетом его значения. (5 баллов)
2. Посчитайте, с какой вероятностью автомобиль остановится ранее, чем за 500 метров до ямы. (5 баллов)
3. Вычислите дисперсию километра, на котором автомобилист остановится. (10 баллов)
4. Определите вероятность, с которой автомобилист остановится ранее, чем за 500 метров до ямы, если он уже находится не далее, чем в 1 километре от нее. (10 баллов)
5. Найдите функцию распределения километра, на котором автомобилист остановится. (10 баллов)
6. Запишите функцию распределения случайной величины, отражающей число километров от автомобиля до ямы в момент, когда автомобилист остановится. **Подсказка:** рассмотрите два случая, когда расстояние до ямы меньше 2 километров, и когда – больше. При этом возможные значения функции распределения расстояния до ямы в момент остановки рассчитайте через вероятности случайной величины, отражающей километр остановки. (10 баллов)
7. Вычислите математическое ожидание случайной величины из предыдущего пункта. (5 баллов)
8. Найдите условное математическое ожидание случайной величины из предыдущего пункта, если известно, что расстояние до ямы составляет более 4 километров. (5 баллов)

Решение:

1. Поскольку интеграл функции плотности на носителе должен равняться единице, получаем:

$$\int_0^2 0.05\alpha t dt + \int_5^{10} 0.04(t - \alpha) t dt = 1$$

После взятия интегралов получаем:

$$1.5 - 0.1\alpha = 1$$

Отсюда следует, что $\alpha = 5$, а значит функция плотности имеет вид:

$$f_X(t) = \begin{cases} 0.25t, & \text{если } t \in [0, 2] \\ 0, & \text{в противном случае} \\ 0.04(t - 5), & \text{если } t \in [5, 10] \end{cases}$$

2. Рассчитаем соответствующую вероятность:

$$\begin{aligned} P(X < 1.5 \cup X > 5.5) &= P(X < 1.5) + P(X > 5.5) = \\ &= \int_0^{1.5} 0.25t dt + \int_{5.5}^{10} 0.04(t - 5) dt \approx 0.77625 \end{aligned}$$

3. Посчитаем первый и второй начальные моменты:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 0.25t \times t dt + \int_5^{10} 0.04(t - 5) \times t dt \approx 4.8333 \\ E(X^2) &= \int_0^2 0.25t \times t^2 dt + \int_5^{10} 0.04(t - 5) \times t^2 dt \approx 36.4167 \end{aligned}$$

Отсюда получаем дисперсию:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \approx 36.4167 - 4.8333^2 \approx 13.06$$

4. Посчитаем условную вероятность:

$$\begin{aligned} &P(X < 1.5 \cup X > 5.5 | X > 1 \cap X < 6) = \\ &= P(X < 1.5 | X > 1 \cap X < 6) + P(X > 5.5 | X > 1 \cap X < 6) = \\ &= \frac{P(1 < X < 1.5) + P(5.5 < X < 6)}{P(X \in [1, 2]) + P(X \in [5, 6])} \end{aligned}$$

Вычислим соответствующие вероятности:

$$\begin{aligned} P(1 < X < 1.5) &= \int_1^{1.5} 0.25t dt = 0.15625 \\ P(5.5 < X < 6) &= \int_{5.5}^6 0.04(t - 5) dt = 0.015 \\ P(X \in [1, 2]) &= \int_1^2 0.25t dt = 0.375 \\ P(X \in [5, 6]) &= \int_5^6 0.04(t - 5) dt = 0.02 \end{aligned}$$

В результате имеем:

$$P(X < 1.5 \cup X > 5.5 | X > 1 \cap X < 6) = \frac{0.15625 + 0.015}{0.375 + 0.02} \approx 0.4335$$

5. Найдем функцию распределения:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^t f_X(x) dx = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ \int_0^t 0.25x dx, & \text{если } t \in [0, 2] \\ \int_0^2 0.25x dx + \int_2^t 0.04(x-5) dx, & \text{если } t \in (2, 5) \\ \int_0^2 0.25x dx + \int_2^5 0.04(x-5) dx + \int_5^t 0.04(x-5) dx, & \text{если } t \in [5, 10] \\ 1, & \text{если } t > 10 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ 0.125t^2, & \text{если } t \in [0, 2] \\ 0.5, & \text{если } t \in (2, 5) \\ 0.02t^2 - 0.2t + 1, & \text{если } t \in [5, 10] \\ 1, & \text{если } t > 10 \end{cases} \end{aligned}$$

6. Обозначим рассматриваемую случайную величину как Y . Поскольку $\text{supp}(Y) = (0, 5)$, то рассмотрим несколько случаев.

Во-первых, если $t \in [0, 2]$, тогда:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(X \in [0, t]) + P(X \in [5, 5+t]) = \\ &= \int_0^t 0.25x dx + \int_5^{5+t} 0.04(x-5) dx = 0.145t^2 \end{aligned}$$

Во-вторых, при $t \in [2, 5]$, получаем:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq 2) + P(2 \leq Y \leq t) = \\ &= 0.145 \times 2^2 + P(X \in [7, 5+t]) = 0.58 + \int_7^{5+t} 0.04(x-5) dx = 0.02t^2 + 0.5 \end{aligned}$$

В результате получаем:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ 0.145t^2, & \text{если } t \in [0, 2] \\ 0.02t^2 + 0.5, & \text{если } t \in (2, 5] \\ 1, & \text{если } t > 5 \end{cases}$$

7. Найдём функцию плотности рассматриваемой случайной величины:

$$f_Y(t) = \frac{dF_Y(t)}{dt} = \begin{cases} 0.29t, & \text{если } t \in [0, 2] \\ 0.04t, & \text{если } t \in (2, 5] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пользуясь найденной функцией плотности рассчитаем математическое ожидание:

$$E(Y) = \int_0^2 0.29t^2 dt + \int_2^5 0.04t^2 dt \approx 2.33$$

8. Поскольку $\text{supp}(Y|Y \geq 4)$, рассмотрим случай $t \in [4, 5]$:

$$\begin{aligned} F_{Y|Y \geq 4}(t) &= P(Y \leq t | Y \geq 4) = \frac{P(Y \in [4, t])}{P(Y \geq 4)} = \\ &= \frac{F_Y(t) - F_Y(4)}{1 - F_Y(4)} = \frac{0.02t^2 + 0.5 - 0.02 \times 4^2 - 0.5}{1 - 0.02 \times 4^2 - 0.5} = \frac{t^2 - 16}{9} \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что при $t \in [4, 5]$:

$$f_Y(t) = \frac{2t}{9}$$

Пользуясь условной функцией плотности рассчитаем условное математическое ожидание:

$$E(Y|Y \geq 4) = \int_4^5 \frac{2t^2}{9} dt \approx 4.52$$

Задание №2. Последовательность Пуассоновских случайных величин (20 баллов)

Имеется последовательность Пуассоновских случайных величин X_1, \dots, X_n таких, что $X_n \sim \text{Pois}(\lambda_n)$, причем $\lambda_n = e^{-n}$.

1. Определите, к чему сходится по вероятности эта последовательность и формально докажете соответствующую сходимость при $\lambda_n = e^{-n}$. (5 баллов)
2. Докажите, что данная последовательность сходится по вероятности к 0 тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$. (5 баллов)

Подсказка: сперва покажите, что из $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ следует сходимость рассматриваемой последовательности к нулю, а затем, что из сходимости этой последовательности к 0 следует $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

3. Определите, к чему сходится по вероятности последовательность $Y_n = \Phi\left(\frac{n - \sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)$, если $\lambda_n = 1$ и X_i независимы. Ответ формально обоснуйте. (5 баллов)

4. При условиях, оговоренных в предыдущем пункте предположим, что $Z_n = X_n Y_n$. Запишите функцию вероятности распределения, к которому Z_n сходится по распределению. **(5 баллов)**

Решение:

1. Поскольку $E(X_n) = Var(X_n) = e^{-n}$, то очевидно, что соответствующая последовательность сходится по вероятности к 0. Покажем этот результат формально. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда согласно неравенству Маркова:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(X_n)}{\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n}}{\varepsilon} = 0$$

Результат можно доказать и альтернативным образом:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} Var(X_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0 \end{aligned}$$

2. Предположим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$, тогда последовательность сходится по вероятности к 0, поскольку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = \lambda_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Var(X_n) = \lambda_n = 0$$

Предположим, что последовательность сходится по вероятности к 0, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} Var(X_n) = 0$. Тогда из $E(X_n) = \lambda_n$ следует $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

3. Обратим внимание, что:

$$Y_n = \Phi \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

Поскольку $\lambda_n = 1$, то X_n одинаково распределены, а так как элементы последовательности по условию являются независимыми, то применим закон больших чисел, вследствие которого:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} 1$$

Отсюда, по теореме Манна-Вальда получаем, что:

$$Y_n \xrightarrow{p} \Phi(1 - 1) = 0.5$$

4. Поскольку $\lambda_n = 1$, то $X_n \sim \text{Pois}(1)$, а значит $X_n \xrightarrow{d} \text{Pois}(1)$. Следовательно, по теореме Slutsky получаем:

$$Z_n = X_n Y_n \xrightarrow{p} Z, \text{ где } Z \sim 0.5 \text{Pois}(1)$$

В результате имеем:

$$P(Z = x) = P(0.5X_1 = x) = P(X_1 = 2x) = \begin{cases} e^{-1} \frac{1^{2x}}{(2x)!}, & \text{если } x \in \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, \dots\} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Задание №3. Игра с кубиком и монеткой (20 баллов)

Лаврентий играет в следующую игру. Он бросает обычный кубик и затем, если монетка выпадает орлом, записывает себе число очков, выпавших на кубике. Если же выпадает решка, то он не добавляет себе ни единого очка. Лаврентий сыграл в эту игру 96 раз.

1. Посчитайте математическое ожидание и дисперсию суммарного числа очков, полученных Лаврентием. **(2 балла)**
2. С помощью центральной предельной теоремы найдите приблизительную вероятность того, что суммарно Лаврентий заработает от 160 до 180 очков. **(5 баллов)**
3. Определите, к чему сходится по вероятности разница между средним числом выпавших очков и средним количеством выпавших орлов. **(3 балла)**
4. Посчитайте вероятность того, что суммарное число выпавших очков превысит суммарное количество выпавших орлов более, чем в 3 раза. **(10 баллов)**

Решение:

1. Обозначим через X_i число заработанных Лаврентием очков по результатам i -го броска, где $i \in \{1, \dots, 100\}$. Нетрудно показать, что:

$$P(X_i = 0) = 0.5 \quad P(X_i = 1) = \dots = P(X_i = 6) = \frac{1}{12}$$

Отсюда получаем математическое ожидание и дисперсию:

$$\begin{aligned} E(X_i) &= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{12} = 1.75 \\ E(X_i^2) &= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{12} = \frac{91}{12} \\ \text{Var}(X_i) &= \frac{91}{12} - 1.75^2 = \frac{217}{48} \end{aligned}$$

Посчитаем эти характеристики для суммарного числа очков, пользуясь их независимостью:

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \sum_{i=1}^n E(X_i) = nE(X_1) = 96 \times 1.75 = 168 \\ \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n\text{Var}(X_1) = 96 \times \frac{217}{48} = 434 \end{aligned}$$

2. Поскольку число очков, полученных при том или ином броске можно рассматривать как независимые и одинаково распределенные случайные величины, можно положить:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(96 * 1.75, 96 * \frac{217}{48}\right) = N(168, 434)$$

Рассчитаем искомую вероятность:

$$P\left(160 \leq \sum_{i=1}^n X_i \leq 180\right) = \Phi\left(\frac{180 - 168}{\sqrt{434}}\right) - \Phi\left(\frac{160 - 168}{\sqrt{434}}\right) \approx 0.367$$

3. Обозначим через $Y_i \sim Ber(0.5)$ число орлов, выпавших при i -м броске. Найдем математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины:

$$E(Y_i) = 0.5 \quad Var(Y_i) = 0.5 \times (1 - 0.5) = 0.25$$

Поскольку случайные величины $X_i - Y_i$ независимы, то можно воспользоваться законом больших чисел:

$$E(X_i - Y_i) = 1.75 - 0.5 = 1.25$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i) \xrightarrow{p} 1.25$$

4. Рассмотрим случайную величину $X_i - 3Y_i$. Найдем ее математическое ожидание и дисперсию:

$$E(X_i - 3Y_i) = 1.75 - 3 \times 0.5 = 0.25$$

$$E(X_i Y_i) = E(X_i Y_i | Y_i = 1)P(Y_i = 1) + E(X_i Y_i | Y_i = 0)P(Y_i = 0) =$$

$$= 3.5 \times 0.5 + 0 \times 0.5 = 1.75$$

$$Cov(X_i, Y_i) = Cov(X_i, Y_i) = 1.75 - 1.75 \times 0.5 = 0.875$$

$$Var(X_i - 3Y_i) = Var(X_i) + 9Var(Y_i) - 6Cov(X_i, Y_i) =$$

$$= \frac{217}{48} + 9 \times 0.25 - 6 \times 0.875 = \frac{73}{48}$$

Применяя ЦПТ получаем, что:

$$\sum_{i=1}^n X_i - 3Y_i \sim N\left(0.25 \times 96, \frac{73}{48} \times 96\right) = N(24, 146)$$

Рассчитаем искомую вероятность:

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq \sum_{i=1}^n 3Y_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^n X_i - 3Y_i \geq 0\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - 24}{\sqrt{146}}\right) \approx 0.9765$$