# Теория Вероятностей и Статистика

## Теория проверки статистичских гипотез

Потанин Богдан Станиславович

доцент, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2023-2024

# Статистический тест
## Мотивация

- Часто у исследователей возникает мотивация проверить некоторую гипотезу, например, о том, что математическое ожидание зарплаты случайно взятого жителя составляет пятьдесят тысяч рублей.

# Статистический тест
## Мотивация

- Часто у исследователей возникает мотивация проверить некоторую гипотезу, например, о том, что математическое ожидание зарплаты случайно взятого жителя составляет пятьдесят тысяч рублей.
- Интуиция подсказывает, что мы должны отвергать гипотезу, если наши данные плохо с ней согласуются.

- Часто у исследователей возникает мотивация проверить некоторую гипотезу, например, о том, что математическое ожидание зарплаты случайно взятого жителя составляет пятьдесят тысяч рублей.
- Интуиция подсказывает, что мы должны отвергать гипотезу, если наши данные плохо с ней согласуются.
- Например, если наша гипотеза заключается в том, что средняя зарплата по стране равняется пятидесяти тысячам рублей, но по результатам опроса большого числа респондентов их средняя зарплата оказалась равна ста тысячам рублей, то у нас может возникнуть сомнение в верности изначального предположения.

# Статистический тест

## Мотивация

- Часто у исследователей возникает мотивация проверить некоторую гипотезу, например, о том, что математическое ожидание зарплаты случайно взятого жителя составляет пятьдесят тысяч рублей.
- Интуиция подсказывает, что мы должны отвергать гипотезу, если наши данные плохо с ней согласуются.
- Например, если наша гипотеза заключается в том, что средняя зарплата по стране равняется пятидесяти тысячам рублей, но по результатам опроса большого числа респондентов их средняя зарплата оказалась равна ста тысячам рублей, то у нас может возникнуть сомнение в верности изначального предположения.
- Рассмотрим формальный статистический аппарат, унифицирующий принцип тестирования различного вида гипотез.

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$, из распределения $\mathcal{D}_X$.

# Статистический тест

## Нулевая и альтернативная гипотезы

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$, из распределения $\mathcal{D}_X$.
- Рассмотрим множество распределений $\mathcal{D}$ такое, что $\mathcal{D}_X \in \mathcal{D}$.

# Статистический тест

## Нулевая и альтернативная гипотезы

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$, из распределения $\mathcal{D}_X$.
- Рассмотрим множество распределений $\mathcal{D}$ такое, что $\mathcal{D}_X \in \mathcal{D}$.
- Требуется проверить соблюдение **нулевой гипотезы** о том, что $H_0 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$.

# Статистический тест
## Нулевая и альтернативная гипотезы

- Имеется выборка $X=(X_1,...,X_n)$, из распределения $\mathcal{D}_X$.
- Рассмотрим множество распределений $\mathcal{D}$ такое, что $\mathcal{D}_X\in\mathcal{D}$.
- Требуется проверить соблюдение **нулевой гипотезы** о том, что $H_0:\mathcal{D}_X\in\mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}$.
- В качестве **альтернативной гипотезы** предполагают, что $H_1:\mathcal{D}_X\in\mathcal{D}_1$, где $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}-\mathcal{D}_0$.

# Статистический тест

## Нулевая и альтернативная гипотезы

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$, из распределения $\mathcal{D}_X$.
- Рассмотрим множество распределений $\mathcal{D}$ такое, что $\mathcal{D}_X \in \mathcal{D}$.
- Требуется проверить соблюдение **нулевой гипотезы** о том, что $H_0 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$.
- В качестве **альтернативной гипотезы** предполагают, что $H_1 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_1$, где $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} - \mathcal{D}_0$.
- Если $\mathcal{D}_0$ состоит из одного элемента, то гипотеза $H_0$ называется **простой**, а в противном случае - **сложной**. По аналогии для альтернативной гипотезы $H_1$.

# Статистический тест

## Нулевая и альтернативная гипотезы

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$, из распределения $\mathcal{D}_X$.
- Рассмотрим множество распределений $\mathcal{D}$ такое, что $\mathcal{D}_X \in \mathcal{D}$.
- Требуется проверить соблюдение **нулевой гипотезы** о том, что $H_0 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$.
- В качестве **альтернативной гипотезы** предполагают, что $H_1 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_1$, где $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} - \mathcal{D}_0$.
- Если $\mathcal{D}_0$ состоит из одного элемента, то гипотеза $H_0$ называется **простой**, а в противном случае - **сложной**. По аналогии для альтернативной гипотезы $H_1$.
- Для наглядности гипотезы $H_0$ и $H_1$ можно задать через ограничения на параметры распределений $D$, задающие множества $D_0$ и $D_1$. Такие гипотезы называются **параметрическими**.

# Статистический тест

## Нулевая и альтернативная гипотезы

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$, из распределения $\mathcal{D}_X$.
- Рассмотрим множество распределений $\mathcal{D}$ такое, что $\mathcal{D}_X \in \mathcal{D}$.
- Требуется проверить соблюдение **нулевой гипотезы** о том, что $H_0 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$.
- В качестве **альтернативной гипотезы** предполагают, что $H_1 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_1$, где $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} - \mathcal{D}_0$.
- Если $\mathcal{D}_0$ состоит из одного элемента, то гипотеза $H_0$ называется **простой**, а в противном случае - **сложной**. По аналогии для альтернативной гипотезы $H_1$.
- Для наглядности гипотезы $H_0$ и $H_1$ можно задать через ограничения на параметры распределений $D$, задающие множества $D_0$ и $D_1$. Такие гипотезы называются **параметрическими**.
  **Пример**:
- Пусть $D$ состоит из всех нормальных распределений, что, пользуясь одинаковой распределенностью элементов выборки, можно сформулировать как $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

# Статистический тест

## Нулевая и альтернативная гипотезы

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$, из распределения $\mathcal{D}_X$.
- Рассмотрим множество распределений $\mathcal{D}$ такое, что $\mathcal{D}_X \in \mathcal{D}$.
- Требуется проверить соблюдение **нулевой гипотезы** о том, что $H_0 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$.
- В качестве **альтернативной гипотезы** предполагают, что $H_1 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_1$, где $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} - \mathcal{D}_0$.
- Если $\mathcal{D}_0$ состоит из одного элемента, то гипотеза $H_0$ называется **простой**, а в противном случае - **сложной**. По аналогии для альтернативной гипотезы $H_1$.
- Для наглядности гипотезы $H_0$ и $H_1$ можно задать через ограничения на параметры распределений $D$, задающие множества $D_0$ и $D_1$. Такие гипотезы называются **параметрическими**.
  **Пример**:
- Пусть $D$ состоит из всех нормальных распределений, что, пользуясь одинаковой распределенностью элементов выборки, можно сформулировать как $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Если $D_0 = \{N(0,1)\}$, то нулевая гипотеза является простой, что можно сформулировать как $H_0 : X_1 \sim N(0,1)$ или параметрически $H_0 : \mu = 0 \wedge \sigma^2 = 1$.

# Статистический тест

## Нулевая и альтернативная гипотезы

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$, из распределения $\mathcal{D}_X$.
- Рассмотрим множество распределений $\mathcal{D}$ такое, что $\mathcal{D}_X \in \mathcal{D}$.
- Требуется проверить соблюдение **нулевой гипотезы** о том, что $H_0 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$.
- В качестве **альтернативной гипотезы** предполагают, что $H_1 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_1$, где $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} - \mathcal{D}_0$.
- Если $\mathcal{D}_0$ состоит из одного элемента, то гипотеза $H_0$ называется **простой**, а в противном случае - **сложной**. По аналогии для альтернативной гипотезы $H_1$.
- Для наглядности гипотезы $H_0$ и $H_1$ можно задать через ограничения на параметры распределений $D$, задающие множества $D_0$ и $D_1$. Такие гипотезы называются **параметрическими**.
  **Пример**:
- Пусть $D$ состоит из всех нормальных распределений, что, пользуясь одинаковой распределенностью элементов выборки, можно сформулировать как $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Если $D_0 = \{N(0, 1)\}$, то нулевая гипотеза является простой, что можно сформулировать как $H_0 : X_1 \sim N(0, 1)$ или параметрически $H_0 : \mu = 0 \wedge \sigma^2 = 1$.
- Альтернативная гипотеза в таком случае будет сложной, поскольку $D_1$ включает все нормальные распределения, кроме стандартного нормального, что удобно сформулировать как параметрическую гипотезу $H_1 : \mu \neq 0 \vee \sigma^2 \neq 1$.

# Статистический тест

## Нулевая и альтернативная гипотезы

- Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$, из распределения $\mathcal{D}_X$.
- Рассмотрим множество распределений $\mathcal{D}$ такое, что $\mathcal{D}_X \in \mathcal{D}$.
- Требуется проверить соблюдение **нулевой гипотезы** о том, что $H_0 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$.
- В качестве **альтернативной гипотезы** предполагают, что $H_1 : \mathcal{D}_X \in \mathcal{D}_1$, где $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} - \mathcal{D}_0$.
- Если $\mathcal{D}_0$ состоит из одного элемента, то гипотеза $H_0$ называется **простой**, а в противном случае - **сложной**. По аналогии для альтернативной гипотезы $H_1$.
- Для наглядности гипотезы $H_0$ и $H_1$ можно задать через ограничения на параметры распределений $D$, задающие множества $D_0$ и $D_1$. Такие гипотезы называются **параметрическими**.
  **Пример**:
- Пусть $D$ состоит из всех нормальных распределений, что, пользуясь одинаковой распределенностью элементов выборки, можно сформулировать как $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Если $D_0 = \{N(0,1)\}$, то нулевая гипотеза является простой, что можно сформулировать как $H_0 : X_1 \sim N(0,1)$ или параметрически $H_0 : \mu = 0 \wedge \sigma^2 = 1$.
- Альтернативная гипотеза в таком случае будет сложной, поскольку $D_1$ включает все нормальные распределения, кроме стандартного нормального, что удобно сформулировать как параметрическую гипотезу $H_1 : \mu \neq 0 \vee \sigma^2 \neq 1$.
- Если $D_0$ состоит из всех нормальных распределений, у которых математическое ожидание равно дисперсии, то нулевая гипотеза является сложной и может быть сформулирована как $H_0 : X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \mu)$, или $H_0 : \mu = \sigma^2$, где $\mu > 0$. Альтернативная гипотеза в данном случае также будет сложной $H_1 : \mu \neq \sigma^2$.

# Статистический тест

## Статистический критерий

- Принятие и отвержение нулевой гипотезы $H_0$ осуществляется в соответствии с правилом, именуемым **статистическим критерием**.

- Принятие и отвержение нулевой гипотезы $H_0$ осуществляется в соответствии с правилом, именуемым **статистическим критерием**.
- Через $x^s$ обозначим **выборочное пространство** – множество $n$-мерных векторов, состоящее из всех возможных реализаций выборки.

# Статистический тест

## Статистический критерий

- Принятие и отвержение нулевой гипотезы $H_0$ осуществляется в соответствии с правилом, именуемым **статистическим критерием**.
- Через $x^s$ обозначим **выборочное пространство** – множество $n$-мерных векторов, состоящее из всех возможных реализаций выборки.
- Обозначим через $x^{(1)}$ **критическую область** – подмножество выборочного пространства, при попадании реализации выборки в которое нулевая гипотеза отвергается. То есть $x^{(1)} \in x^s$ и из $x \in x^{(1)}$ следует, что $H_0$ отвергается.

## Статистический критерий

- Принятие и отвержение нулевой гипотезы $H_0$ осуществляется в соответствии с правилом, именуемым **статистическим критерием**.
- Через $x^s$ обозначим **выборочное пространство** – множество $n$-мерных векторов, состоящее из всех возможных реализаций выборки.
- Обозначим через $x^{(1)}$ **критическую область** – подмножество выборочного пространства, при попадании реализации выборки в которое нулевая гипотеза отвергается. То есть $x^{(1)} \in x^s$ и из $x \in x^{(1)}$ следует, что $H_0$ отвергается.
- Через $x^{(0)} = x^s - x^{(1)}$ обозначим **область принятия** нулевой гипотезы.

- Принятие и отвержение нулевой гипотезы $H_0$ осуществляется в соответствии с правилом, именуемым **статистическим критерием**.
- Через $x^s$ обозначим **выборочное пространство** – множество $n$-мерных векторов, состоящее из всех возможных реализаций выборки.
- Обозначим через $x^{(1)}$ **критическую область** – подмножество выборочного пространства, при попадании реализации выборки в которое нулевая гипотеза отвергается. То есть $x^{(1)} \in x^s$ и из $x \in x^{(1)}$ следует, что $H_0$ отвергается.
- Через $x^{(0)} = x^s - x^{(1)}$ обозначим **область принятия** нулевой гипотезы.
  **Пример**:
- Лаврентий подкидывает монетку три раза и проверяет простую гипотезу о том, что вероятности выпадения орла (обозначим как 1) и решки (обозначим как 0) совпадают. Лаврентий отвергает нулевую гипотезу, если все три раза монетка падает одной и той же стороной.

# Статистический тест

## Статистический критерий

- Принятие и отвержение нулевой гипотезы $H_0$ осуществляется в соответствии с правилом, именуемым **статистическим критерием**.
- Через $x^s$ обозначим **выборочное пространство** – множество $n$-мерных векторов, состоящее из всех возможных реализаций выборки.
- Обозначим через $x^{(1)}$ **критическую область** – подмножество выборочного пространства, при попадании реализации выборки в которое нулевая гипотеза отвергается. То есть $x^{(1)} \in x^s$ и из $x \in x^{(1)}$ следует, что $H_0$ отвергается.
- Через $x^{(0)} = x^s - x^{(1)}$ обозначим **область принятия** нулевой гипотезы.
  **Пример**:
- Лаврентий подкидывает монетку три раза и проверяет простую гипотезу о том, что вероятности выпадения орла (обозначим как 1) и решки (обозначим как 0) совпадают. Лаврентий отвергает нулевую гипотезу, если все три раза монетка падает одной и той же стороной.
- У Лаврентия есть выборка $X = (X_1, X_2, X_3)$ из биномиального распределения $D = \{Ber(p) : p \in (0,1)\}$, то есть $X_1 \sim Ber(p)$. Нулевая гипотеза является простой и ее удобно сформулировать параметрически $H_0 : p = 0.5$. Альтернативна гипотеза является сложной $H_1 : p \neq 0.5$.

# Статистический тест

## Статистический критерий

- Принятие и отвержение нулевой гипотезы $H_0$ осуществляется в соответствии с правилом, именуемым **статистическим критерием**.
- Через $x^s$ обозначим **выборочное пространство** – множество $n$-мерных векторов, состоящее из всех возможных реализаций выборки.
- Обозначим через $x^{(1)}$ **критическую область** – подмножество выборочного пространства, при попадании реализации выборки в которое нулевая гипотеза отвергается. То есть $x^{(1)} \in x^s$ и из $x \in x^{(1)}$ следует, что $H_0$ отвергается.
- Через $x^{(0)} = x^s - x^{(1)}$ обозначим **область принятия** нулевой гипотезы.
**Пример**:
- Лаврентий подкидывает монетку три раза и проверяет простую гипотезу о том, что вероятности выпадения орла (обозначим как 1) и решки (обозначим как 0) совпадают. Лаврентий отвергает нулевую гипотезу, если все три раза монетка падает одной и той же стороной.
- У Лаврентия есть выборка $X = (X_1, X_2, X_3)$ из биномиального распределения $D = \{Ber(p) : p \in (0, 1)\}$, то есть $X_1 \sim Ber(p)$. Нулевая гипотеза является простой и ее удобно сформулировать параметрически $H_0 : p = 0.5$. Альтернативна гипотеза является сложной $H_1 : p \neq 0.5$.
- Критическая область имеет вид $x^{(1)} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$. В результате, например, если у Лаврентия выпадают три решки, то есть $x = (0, 0, 0)$, то реализация попадает в критическую область, вследствие чего нулевая гипотеза отвергается. Если же, например, сперва выпадают две решки, а затем – орел, то $x = (0, 0, 1)$ и нулевая гипотеза не отвергается.

- Часто формулировать $x^{(1)}$ в явном виде бывает неудобно, поскольку критическая область состоит из $n$-мерных векторов.

# Статистический тест

## Тестовая статистика

- Часто формулировать $x^{(1)}$ в явном виде бывает неудобно, поскольку критическая область состоит из $n$-мерных векторов.
- В качестве альтернативы можно найти такую статистику $T(X)$ и такое подмножество ее носителя $\mathcal{T}$, что для любого $x \in x^{(s)}$ выполняется $x \in x^{(1)}$ тогда и только тогда, когда $T(x) \in \mathcal{T}$.

# Статистический тест

## Тестовая статистика

- Часто формулировать $x^{(1)}$ в явном виде бывает неудобно, поскольку критическая область состоит из $n$-мерных векторов.
- В качестве альтернативы можно найти такую статистику $T(X)$ и такое подмножество ее носителя $\mathcal{T}$, что для любого $x \in x^{(s)}$ выполняется $x \in x^{(1)}$ тогда и только тогда, когда $T(x) \in \mathcal{T}$.
- Статистика $T(X)$ именуется **статистикой критерия**, а $\mathcal{T}$ **– ее критической областью**.

# Статистический тест

## Тестовая статистика

- Часто формулировать $x^{(1)}$ в явном виде бывает неудобно, поскольку критическая область состоит из $n$-мерных векторов.
- В качестве альтернативы можно найти такую статистику $T(X)$ и такое подмножество ее носителя $\mathcal{T}$, что для любого $x \in x^{(s)}$ выполняется $x \in x^{(1)}$ тогда и только тогда, когда $T(x) \in \mathcal{T}$.
- Статистика $T(X)$ именуется **статистикой критерия**, а $\mathcal{T}$ **– ее критической областью**.

**Пример**:

- Вернемся к примеру с Лаврентием, трижды подбрасывающим монетку и проверяющим, что она является правильной.

# Статистический тест

## Тестовая статистика

- Часто формулировать $x^{(1)}$ в явном виде бывает неудобно, поскольку критическая область состоит из $n$-мерных векторов.
- В качестве альтернативы можно найти такую статистику $T(X)$ и такое подмножество ее носителя $\mathcal{T}$, что для любого $x \in x^{(s)}$ выполняется $x \in x^{(1)}$ тогда и только тогда, когда $T(x) \in \mathcal{T}$.
- Статистика $T(X)$ именуется **статистикой критерия**, а $\mathcal{T}$ **– ее критической областью**.
**Пример**:
- Вернемся к примеру с Лаврентием, трижды подбрасывающим монетку и проверяющим, что она является правильной.
- Зададим тот же самый статистический критерий через тестовую статистику $T(X) = X_1 + X_2 + X_3$. Для того, чтобы гарантировать $x^{(1)} = \{(0,0,0),(1,1,1)\}$ будем отвергать нулевую гипотезу, если $T(x) = 3$ или $T(x) = 0$, откуда $\mathcal{T} = \{0, 3\}$.

- Часто формулировать $x^{(1)}$ в явном виде бывает неудобно, поскольку критическая область состоит из $n$-мерных векторов.
- В качестве альтернативы можно найти такую статистику $T(X)$ и такое подмножество ее носителя $\mathcal{T}$, что для любого $x \in x^{(s)}$ выполняется $x \in x^{(1)}$ тогда и только тогда, когда $T(x) \in \mathcal{T}$.
- Статистика $T(X)$ именуется **статистикой критерия**, а $\mathcal{T}$ **– ее критической областью**.

**Пример**:

- Вернемся к примеру с Лаврентием, трижды подбрасывающим монетку и проверяющим, что она является правильной.
- Зададим тот же самый статистический критерий через тестовую статистику $T(X) = X_1 + X_2 + X_3$. Для того, чтобы гарантировать $x^{(1)} = \{(0,0,0),(1,1,1)\}$ будем отвергать нулевую гипотезу, если $T(x) = 3$ или $T(x) = 0$, откуда $\mathcal{T} = \{0,3\}$.
- Например, если у Лаврентия выпало три орла, то $T(x) = 1 + 1 + 1 = 3$ и нулевая гипотеза отвергается. Если же выпал ровно один орел, то $T(x) = 1$ и нулевая гипотеза не отвергается.

- **Ошибка первого рода** возникает, когда (ошибочно) отвергается верная нулевая гипотеза. Ее вероятность рассчитывается как:

$$\alpha = P(X \in x^{(1)}|H_0) = P(T(X) \in \mathcal{T}|H_0)$$

# Статистический тест

## Ошибки первого и второго рода

- **Ошибка первого рода** возникает, когда (ошибочно) отвергается верная нулевая гипотеза. Ее вероятность рассчитывается как:
$$\alpha = P(X \in x^{(1)}|H_0) = P(T(X) \in \mathcal{T}|H_0)$$
- **Ошибка второго рода** возникает, когда (ошибочно) отвергается верная альтернативная гипотеза. Ее вероятность рассчитывается как:
$$\beta = P(X \notin x^{(1)}|H_1) = P(T(X) \notin \mathcal{T}|H_1)$$

# Статистический тест

## Ошибки первого и второго рода

- **Ошибка первого рода** возникает, когда (ошибочно) отвергается верная нулевая гипотеза. Ее вероятность рассчитывается как:
$$\alpha = P(X \in x^{(1)}|H_0) = P(T(X) \in \mathcal{T}|H_0)$$
- **Ошибка второго рода** возникает, когда (ошибочно) отвергается верная альтернативная гипотеза. Ее вероятность рассчитывается как:
$$\beta = P(X \notin x^{(1)}|H_1) = P(T(X) \notin \mathcal{T}|H_1)$$

**Пример**:

- Лаврентий трижды подкидывает монетку и тестирует простую гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против простой альтернативы $H_1 : p = 0.6$, где $p$ – вероятность выпадения орла.

# Статистический тест

## Ошибки первого и второго рода

- **Ошибка первого рода** возникает, когда (ошибочно) отвергается верная нулевая гипотеза. Ее вероятность рассчитывается как:
$$\alpha = P(X \in x^{(1)}|H_0) = P(T(X) \in \mathcal{T}|H_0)$$
- **Ошибка второго рода** возникает, когда (ошибочно) отвергается верная альтернативная гипотеза. Ее вероятность рассчитывается как:
$$\beta = P(X \notin x^{(1)}|H_1) = P(T(X) \notin \mathcal{T}|H_1)$$
**Пример**:
- Лаврентий трижды подкидывает монетку и тестирует простую гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против простой альтернативы $H_1 : p = 0.6$, где $p$ – вероятность выпадения орла.
- Будем использовать ту же тестовую статистику, обращая внимание, что $T(X)|H_0 \sim B(3, 0.5)$ и $T(X)|H_1 \sim B(3, 0.6)$.

- **Ошибка первого рода** возникает, когда (ошибочно) отвергается верная нулевая гипотеза. Ее вероятность рассчитывается как:
$$\alpha = P(X \in x^{(1)}|H_0) = P(T(X) \in \mathcal{T}|H_0)$$
- **Ошибка второго рода** возникает, когда (ошибочно) отвергается верная альтернативная гипотеза. Ее вероятность рассчитывается как:
$$\beta = P(X \notin x^{(1)}|H_1) = P(T(X) \notin \mathcal{T}|H_1)$$

**Пример**:

- Лаврентий трижды подкидывает монетку и тестирует простую гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против простой альтернативы $H_1 : p = 0.6$, где $p$ – вероятность выпадения орла.
- Будем использовать ту же тестовую статистику, обращая внимание, что $T(X)|H_0 \sim B(3, 0.5)$ и $T(X)|H_1 \sim B(3, 0.6)$.
- Ошибка первого рода произойдет, если монетка правильная, то есть $p = 0.5$, но она трижды выпадет одной стороной, вероятность чего составляет:
$$\alpha = P(T(X) \in \{0, 3\}|H_0) = P(T(X) = 0|H_0) + P(T(X) = 3|H_0) = 0.5^3 + 0.5^3 = 0.25$$

- **Ошибка первого рода** возникает, когда (ошибочно) отвергается верная нулевая гипотеза. Ее вероятность рассчитывается как:
$$\alpha = P(X \in x^{(1)}|H_0) = P(T(X) \in \mathcal{T}|H_0)$$
- **Ошибка второго рода** возникает, когда (ошибочно) отвергается верная альтернативная гипотеза. Ее вероятность рассчитывается как:
$$\beta = P(X \notin x^{(1)}|H_1) = P(T(X) \notin \mathcal{T}|H_1)$$

**Пример**:

- Лаврентий трижды подкидывает монетку и тестирует простую гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против простой альтернативы $H_1 : p = 0.6$, где $p$ – вероятность выпадения орла.
- Будем использовать ту же тестовую статистику, обращая внимание, что $T(X)|H_0 \sim B(3, 0.5)$ и $T(X)|H_1 \sim B(3, 0.6)$.
- Ошибка первого рода произойдет, если монетка правильная, то есть $p = 0.5$, но она трижды выпадет одной стороной, вероятность чего составляет:
$$\alpha = P(T(X) \in \{0, 3\}|H_0) = P(T(X) = 0|H_0) + P(T(X) = 3|H_0) = 0.5^3 + 0.5^3 = 0.25$$
- Ошибка второго рода произойдет, если монетка неправильная, то есть $p = 0.6$, но она хоть раз выпадет другой стороной, что произойдет со следующей вероятностью:
$$\beta = P(T(X) \notin \{0, 3\}|H_1) = 1 - P(T(X) = 0|H_1) - P(T(X) = 3|H_1) = 1 - (1 - 0.6)^3 - 0.6^3 = 0.72$$

- **Мощность критерия** равняется вероятности не совершить ошибку второго рода $1 - \beta$.

# Статистический тест

## Мощность и уровень значимости критерия

- **Мощность критерия** равняется вероятности не совершить ошибку второго рода $1 - \beta$.
- **Уровень значимости** критерия совпадает с вероятностью ошибки первого рода $\alpha$.

- **Мощность критерия** равняется вероятности не совершить ошибку второго рода $1-\beta$.
- **Уровень значимости** критерия совпадает с вероятностью ошибки первого рода $\alpha$.
- Как правило, уменьшать вероятность ошибки одного рода приходится за счет увеличения вероятности ошибки второго рода. Поэтому, исследователи пытаются найти такой критерий, что при фиксированном уровне значимости его мощность будет максимальной.

- **Мощность критерия** равняется вероятности не совершить ошибку второго рода $1-\beta$.
- **Уровень значимости** критерия совпадает с вероятностью ошибки первого рода $\alpha$.
- Как правило, уменьшать вероятность ошибки одного рода приходится за счет увеличения вероятности ошибки второго рода. Поэтому, исследователи пытаются найти такой критерий, что при фиксированном уровне значимости его мощность будет максимальной.
  **Пример**:
- Лаврентий трижды подкидывает монетку и тестирует простую гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против простой альтернативы $H_1 : p = 0.6$, где $p$ – вероятность выпадения орла.

- **Мощность критерия** равняется вероятности не совершить ошибку второго рода $1 - \beta$.
- **Уровень значимости** критерия совпадает с вероятностью ошибки первого рода $\alpha$.
- Как правило, уменьшать вероятность ошибки одного рода приходится за счет увеличения вероятности ошибки второго рода. Поэтому, исследователи пытаются найти такой критерий, что при фиксированном уровне значимости его мощность будет максимальной.

**Пример**:

- Лаврентий трижды подкидывает монетку и тестирует простую гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против простой альтернативы $H_1 : p = 0.6$, где $p$ – вероятность выпадения орла.
- Уровень значимости критерия совпадает с посчитанной ранее вероятностью ошибки первого рода $\alpha = 0.25$

# Статистический тест

## Мощность и уровень значимости критерия

- **Мощность критерия** равняется вероятности не совершить ошибку второго рода $1-\beta$.
- **Уровень значимости** критерия совпадает с вероятностью ошибки первого рода $\alpha$.
- Как правило, уменьшать вероятность ошибки одного рода приходится за счет увеличения вероятности ошибки второго рода. Поэтому, исследователи пытаются найти такой критерий, что при фиксированном уровне значимости его мощность будет максимальной.
**Пример**:
- Лаврентий трижды подкидывает монетку и тестирует простую гипотезу $H_0 : p = 0.5$ против простой альтернативы $H_1 : p = 0.6$, где $p$ – вероятность выпадения орла.
- Уровень значимости критерия совпадает с посчитанной ранее вероятностью ошибки первого рода $\alpha = 0.25$
- Мощность критерия нетрудно вычислить используя посчитанную ранее вероятность ошибки второго рода $1-\beta = 1-0.72 = 0.28$.

# Статистический тест

## Дополнительный пример

Время прочтения книги (в минутах) ученым котом является экспоненциальной случайной величиной. Ученый кот тестирует гипотезу о том, что математическое ожидание соответствующего времени равняется 10 минутам, против альтернативы о том, что оно равно 20 минутам. Ученый кот замерил время, понадобившееся ему для прочтения каждой из 10 книг. Он отвергает нулевую гипотезу, если чтение по крайней мере одной из книг заняло более получаса.

# Статистический тест
## Дополнительный пример

Время прочтения книги (в минутах) ученым котом является экспоненциальной случайной величиной. Ученый кот тестирует гипотезу о том, что математическое ожидание соответствующего времени равняется 10 минутам, против альтернативы о том, что оно равно 20 минутам. Ученый кот замерил время, понадобившееся ему для прочтения каждой из 10 книг. Он отвергает нулевую гипотезу, если чтение по крайней мере одной из книг заняло более получаса.

- Дайте параметрическую формулировку нулевой и альтернативной гипотез.
- Формализуйте статистический критерий ученого кота (вспомните экстремальные порядковые статистики).
- Найдите уровень значимости критерия ученого кота.
- Рассчитайте мощность критерия ученого кота.

Время прочтения книги (в минутах) ученым котом является экспоненциальной случайной величиной. Ученый кот тестирует гипотезу о том, что математическое ожидание соответствующего времени равняется 10 минутам, против альтернативы о том, что оно равно 20 минутам. Ученый кот замерил время, понадобившееся ему для прочтения каждой из 10 книг. Он отвергает нулевую гипотезу, если чтение по крайней мере одной из книг заняло более получаса.

- Дайте параметрическую формулировку нулевой и альтернативной гипотез.
- Формализуйте статистический критерий ученого кота (вспомните экстремальные порядковые статистики).
- Найдите уровень значимости критерия ученого кота.
- Рассчитайте мощность критерия ученого кота.

**Решение**:

- Поскольку $E(X_1) = 1/\lambda$, то при верной нулевой гипотезе $E(X_1) = 10$, откуда $\lambda = 1/10 = 0.1$, то есть $H_0 : \lambda = 1/10 = 0.1$. По аналогии $H_1 : \lambda = 1/20 = 0.05$. Обе гипотезы – простые.

# Статистический тест
## Дополнительный пример

Время прочтения книги (в минутах) ученым котом является экспоненциальной случайной величиной. Ученый кот тестирует гипотезу о том, что математическое ожидание соответствующего времени равняется 10 минутам, против альтернативы о том, что оно равно 20 минутам. Ученый кот замерил время, понадобившееся ему для прочтения каждой из 10 книг. Он отвергает нулевую гипотезу, если чтение по крайней мере одной из книг заняло более получаса.

- Дайте параметрическую формулировку нулевой и альтернативной гипотез.
- Формализуйте статистический критерий ученого кота (вспомните экстремальные порядковые статистики).
- Найдите уровень значимости критерия ученого кота.
- Рассчитайте мощность критерия ученого кота.

**Решение**:

- Поскольку $E(X_1) = 1/\lambda$, то при верной нулевой гипотезе $E(X_1) = 10$, откуда $\lambda = 1/10 = 0.1$, то есть $H_0 : \lambda = 1/10 = 0.1$. По аналогии $H_1 : \lambda = 1/20 = 0.05$. Обе гипотезы – простые.
- Используется тестовая статистика $T(X) = \max(X_1, ..., X_n)$ с критической областью $\mathcal{T} = (30, \infty)$.

Время прочтения книги (в минутах) ученым котом является экспоненциальной случайной величиной. Ученый кот тестирует гипотезу о том, что математическое ожидание соответствующего времени равняется 10 минутам, против альтернативы о том, что оно равно 20 минутам. Ученый кот замерил время, понадобившееся ему для прочтения каждой из 10 книг. Он отвергает нулевую гипотезу, если чтение по крайней мере одной из книг заняло более получаса.

- Дайте параметрическую формулировку нулевой и альтернативной гипотез.
- Формализуйте статистический критерий ученого кота (вспомните экстремальные порядковые статистики).
- Найдите уровень значимости критерия ученого кота.
- Рассчитайте мощность критерия ученого кота.

**Решение**:

- Поскольку $E(X_1) = 1/\lambda$, то при верной нулевой гипотезе $E(X_1) = 10$, откуда $\lambda = 1/10 = 0.1$, то есть $H_0 : \lambda = 1/10 = 0.1$. По аналогии $H_1 : \lambda = 1/20 = 0.05$. Обе гипотезы – простые.
- Используется тестовая статистика $T(X) = \max(X_1, ..., X_n)$ с критической областью $\mathcal{T} = (30, \infty)$.
- Уровень значимости совпадает с вероятностью ошибки первого рода:

$$\alpha = P(\max(X_1, ..., X_{10}) > 30|H_0) = 1 - P(\max(X_1, ..., X_{10}) \leq 30|H_0) = 1 - \left(1 - e^{-0.1\times 30}\right)^{10} \approx 0.4$$

Время прочтения книги (в минутах) ученым котом является экспоненциальной случайной величиной. Ученый кот тестирует гипотезу о том, что математическое ожидание соответствующего времени равняется 10 минутам, против альтернативы о том, что оно равно 20 минутам. Ученый кот замерил время, понадобившееся ему для прочтения каждой из 10 книг. Он отвергает нулевую гипотезу, если чтение по крайней мере одной из книг заняло более получаса.

- Дайте параметрическую формулировку нулевой и альтернативной гипотез.
- Формализуйте статистический критерий ученого кота (вспомните экстремальные порядковые статистики).
- Найдите уровень значимости критерия ученого кота.
- Рассчитайте мощность критерия ученого кота.

**Решение**:

- Поскольку $E(X_1) = 1/\lambda$, то при верной нулевой гипотезе $E(X_1) = 10$, откуда $\lambda = 1/10 = 0.1$, то есть $H_0 : \lambda = 1/10 = 0.1$. По аналогии $H_1 : \lambda = 1/20 = 0.05$. Обе гипотезы – простые.
- Используется тестовая статистика $T(X) = \max(X_1, ..., X_n)$ с критической областью $\mathcal{T} = (30, \infty)$.
- Уровень значимости совпадает с вероятностью ошибки первого рода:

$$\alpha = P(\max(X_1, ..., X_{10}) > 30|H_0) = 1 - P(\max(X_1, ..., X_{10}) \leq 30|H_0) = 1 - \left(1 - e^{-0.1\times 30}\right)^{10} \approx 0.4$$

- Вычислим мощность критерия с помощью вероятности ошибки второго рода:

$$1 - \beta = 1 - P(\max(X_1, ..., X_{10}) \leq 30|H_1) = 1 - \left(1 - e^{-0.05\times 30}\right)^{10} \approx 0.92$$

- Будем называть **p-value** наименьший уровень значимости, при котором нулевая гипотеза отвергается с учетом того, что реализация тестовой статистики оказалась равна $T(x)$.

- Будем называть **p-value** наименьший уровень значимости, при котором нулевая гипотеза отвергается с учетом того, что реализация тестовой статистики оказалась равна $T(x)$.
- Обозначим через $\mathcal{T}_\alpha$ критическую область тестовой статистики, при которой уровень значимости теста равняется $\alpha$, откуда:

$$\text{p-value} = \min_{\alpha: T(x)\in\mathcal{T}_\alpha} \alpha$$

# p-value

## Формулировка

- Будем называть **p-value** наименьший уровень значимости, при котором нулевая гипотеза отвергается с учетом того, что реализация тестовой статистики оказалась равна $T(x)$.
- Обозначим через $\mathcal{T}_\alpha$ критическую область тестовой статистики, при которой уровень значимости теста равняется $\alpha$, откуда:
$$\text{p-value} = \min_{\alpha: T(x)\in\mathcal{T}_\alpha} \alpha$$
- Чем меньше p-value, тем уверенней можно отвергать нулевую гипотезу.

- Будем называть **p-value** наименьший уровень значимости, при котором нулевая гипотеза отвергается с учетом того, что реализация тестовой статистики оказалась равна $T(x)$.
- Обозначим через $\mathcal{T}_\alpha$ критическую область тестовой статистики, при которой уровень значимости теста равняется $\alpha$, откуда:

$$\text{p-value} = \min_{\alpha: T(x) \in \mathcal{T}_\alpha} \alpha$$

- Чем меньше p-value, тем уверенней можно отвергать нулевую гипотезу.

**Пример**:

- Имеется выборка $X = (X_1, X_2)$ из Хи-квадрат распределения. Тестируется гипотеза $H_0 : X_1 \sim \chi^2(10)$. Тестовая статистика имеет вид $T(X) = X_1 + X_2$. Нулевая гипотеза отвергается, если $T(X) \leq k_\alpha$, то есть $\mathcal{T}_\alpha = (0, k_\alpha)$, где $k_\alpha$ зависит от уровня значимости $\alpha$, который равняется:

$$\alpha = P(T(X) < k_\alpha | H_0) = P(X_1 + X_2 < k_\alpha | H_0) = F_{\chi^2(10 \times 2)}(k_\alpha) = F_{\chi^2(20)}(k_\alpha)$$

- Будем называть **p-value** наименьший уровень значимости, при котором нулевая гипотеза отвергается с учетом того, что реализация тестовой статистики оказалась равна $T(x)$.
- Обозначим через $\mathcal{T}_\alpha$ критическую область тестовой статистики, при которой уровень значимости теста равняется $\alpha$, откуда:

$$\text{p-value} = \min_{\alpha:T(x)\in\mathcal{T}_\alpha}\alpha$$

- Чем меньше p-value, тем уверенней можно отвергать нулевую гипотезу.

**Пример**:

- Имеется выборка $X = (X_1, X_2)$ из Хи-квадрат распределения. Тестируется гипотеза $H_0 : X_1 \sim \chi^2(10)$. Тестовая статистика имеет вид $T(X) = X_1 + X_2$. Нулевая гипотеза отвергается, если $T(X) \leq k_\alpha$, то есть $\mathcal{T}_\alpha = (0, k_\alpha)$, где $k_\alpha$ зависит от уровня значимости $\alpha$, который равняется:

$$\alpha = P(T(X) < k_\alpha|H_0) = P(X_1 + X_2 < k_\alpha|H_0) = F_{\chi^2(10\times 2)}(k_\alpha) = F_{\chi^2(20)}(k_\alpha)$$

Из полученного выражения следует, что $k_\alpha$ является квантилью уровня $\alpha$ Хи-квадрат случайной величины с 20-ю степенями свободы.

# p-value
## Формулировка

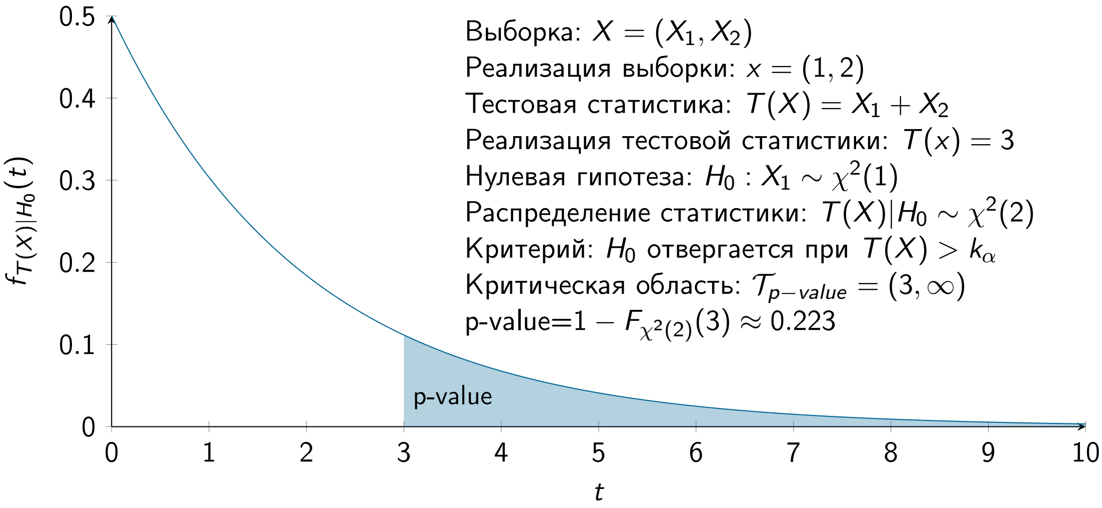
- Будем называть **p-value** наименьший уровень значимости, при котором нулевая гипотеза отвергается с учетом того, что реализация тестовой статистики оказалась равна $T(x)$.
- Обозначим через $\mathcal{T}_\alpha$ критическую область тестовой статистики, при которой уровень значимости теста равняется $\alpha$, откуда:
$$\text{p-value} = \min_{\alpha: T(x)\in\mathcal{T}_\alpha} \alpha$$
- Чем меньше p-value, тем уверенней можно отвергать нулевую гипотезу.

**Пример**:

- Имеется выборка $X = (X_1, X_2)$ из Хи-квадрат распределения. Тестируется гипотеза $H_0 : X_1 \sim \chi^2(10)$. Тестовая статистика имеет вид $T(X) = X_1 + X_2$. Нулевая гипотеза отвергается, если $T(X) \leq k_\alpha$, то есть $\mathcal{T}_\alpha = (0, k_\alpha)$, где $k_\alpha$ зависит от уровня значимости $\alpha$, который равняется:
$$\alpha = P(T(X) < k_\alpha|H_0) = P(X_1 + X_2 < k_\alpha|H_0) = F_{\chi^2(10\times 2)}(k_\alpha) = F_{\chi^2(20)}(k_\alpha)$$
Из полученного выражения следует, что $k_\alpha$ является квантилью уровня $\alpha$ Хи-квадрат случайной величины с 20-ю степенями свободы. Пусть сумма наблюдений в выборке оказалась равна 15, то есть $T(x) = 15$. Тогда, учитывая, что $k_\alpha$ строго возрастает по $\alpha$, получаем:
$$\text{p-value} = \min_{\alpha:15\in(0,k_\alpha]} \alpha = \min_{k_\alpha:15\in(0,k_\alpha]} F_{\chi^2(20)}(k_\alpha) = F_{\chi^2(20)}(15) \approx 0.22$$

# p-value

## Графическая иллюстрация




Выборка: $X = (X_1, X_2)$

Реализация выборки: $x = (1, 2)$

Тестовая статистика: $T(X) = X_1 + X_2$

Реализация тестовой статистики: $T(x) = 3$

Нулевая гипотеза: $H_0 : X_1 \sim \chi^2(1)$

Распределение статистики: $T(X)|H_0 \sim \chi^2(2)$

Критерий: $H_0$ отвергается при $T(X) > k_\alpha$

Критическая область: $\mathcal{T}_{p-value} = (3, \infty)$

p-value$=1 - F_{\chi^2(2)}(3) \approx 0.223$

# p-value

## Интерпретация

- Если $T(X) \in \mathcal{T}_{\alpha}$, где $\alpha$ – уровень значимости теста (вероятность ошибки первого рода), то говорят, что **нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости** $\alpha$.

# p-value

## Интерпретация

- Если $T(X) \in \mathcal{T}_\alpha$, где $\alpha$ – уровень значимости теста (вероятность ошибки первого рода), то говорят, что **нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости** $\alpha$.
- Исходя из определения p-value сформулируем **три важных правила тестирования гипотез**:
  - Если p-value$\leq \alpha$, то нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости $\alpha$.

- Если $T(X) \in \mathcal{T}_\alpha$, где $\alpha$ – уровень значимости теста (вероятность ошибки первого рода), то говорят, что **нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости** $\alpha$.
- Исходя из определения p-value сформулируем **три важных правила тестирования гипотез**:
  - Если p-value$\leq \alpha$, то нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости $\alpha$.
  - Если p-value$> \alpha$, то нулевая гипотеза не отвергается на уровне значимости $\alpha$.

# p-value

## Интерпретация

- Если $T(X) \in \mathcal{T}_\alpha$, где $\alpha$ – уровень значимости теста (вероятность ошибки первого рода), то говорят, что **нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости** $\alpha$.
- Исходя из определения p-value сформулируем **три важных правила тестирования гипотез**:
  - Если p-value$\leq \alpha$, то нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости $\alpha$.
  - Если p-value$> \alpha$, то нулевая гипотеза не отвергается на уровне значимости $\alpha$.
  - При заданной реализации тестовой статистики мы можем отвергнуть нулевую гипотезу на уровне значимости, совпадающем с p-value.

# p-value

## Интерпретация

- Если $T(X) \in \mathcal{T}_{\alpha}$, где $\alpha$ – уровень значимости теста (вероятность ошибки первого рода), то говорят, что **нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости** $\alpha$.
- Исходя из определения p-value сформулируем **три важных правила тестирования гипотез**:
  - Если p-value$\leq \alpha$, то нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости $\alpha$.
  - Если p-value$> \alpha$, то нулевая гипотеза не отвергается на уровне значимости $\alpha$.
  - При заданной реализации тестовой статистики мы можем отвергнуть нулевую гипотезу на уровне значимости, совпадающем с p-value.
- Обычно гипотезы тестируют на уровнях значимости 0.1, 0.05 и 0.01.

# p-value

## Интерпретация

- Если $T(X) \in \mathcal{T}_\alpha$, где $\alpha$ – уровень значимости теста (вероятность ошибки первого рода), то говорят, что **нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости** $\alpha$.
- Исходя из определения p-value сформулируем **три важных правила тестирования гипотез**:
  - Если p-value$\leq \alpha$, то нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости $\alpha$.
  - Если p-value$> \alpha$, то нулевая гипотеза не отвергается на уровне значимости $\alpha$.
  - При заданной реализации тестовой статистики мы можем отвергнуть нулевую гипотезу на уровне значимости, совпадающем с p-value.
- Обычно гипотезы тестируют на уровнях значимости 0.1, 0.05 и 0.01.
  **Пример**:
  На уровне значимости $\alpha = 0.1$ была протестирована гипотеза $H_0 : X_1 \sim t(10)$. По результатам расчетов оказалось, что p-value$= 0.02$. Поскольку $0.02 < 0.1$, то есть p-value$<\alpha$, то нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости 0.1. Если бы уровень значимости составлял $\alpha = 0.01$, то нулевая гипотеза на соответствующем уровне значимости при p-value$= 0.02$ не отвергалась.

- Тест является **состоятельным**, если при любом уровне значимости $\alpha \in (0,1)$ вероятность ошибки второго рода стремится к нулю по мере увеличения объема выборки:

$$\lim_{n\to\infty} P(\mathrm{T}(X) \notin \mathcal{T}_{\alpha}|H_1) = 0$$

- Тест является **состоятельным**, если при любом уровне значимости $\alpha \in (0,1)$ вероятность ошибки второго рода стремится к нулю по мере увеличения объема выборки:

$$\lim_{n\to\infty} P(\mathrm{T}(X) \notin \mathcal{T}_\alpha | H_1) = 0$$

**Пример**:

- Имеется выборка объема $n$ из равномерного распределения $U(0,\theta)$. Тестируется гипотеза $H_0 : \theta = 1$ против альтернативы $H_1 : \theta < 1$. $T(X) = \max(X_1, ..., X_n)$ и нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости $\alpha$, если $\max(X_1, ..., X_n) \leq \alpha^{1/n}$. Обратим внимание, что $F_{T(X)}(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$ при $x \in (0,\theta]$ и $F_{T(X)}(x) = 1$ при $x > \theta$. Рассматриваемый тест состоятельный, поскольку при любых $\alpha \in (0,1)$ и $\theta \in (0,1)$ выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} P(\mathrm{T}(X) \notin \mathcal{T}_\alpha | H_1) = \lim_{n\to\infty} P(\mathrm{T}(X) > \alpha^{1/n} | H_1) = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha^{1/n} > \theta \\ 1 - \left(\frac{\alpha^{1/n}}{\theta}\right)^n, \text{ иначе} \end{cases} = 0$$

Итоговое равенство нулю следует из того, что поскольку $\theta \in (0,1)$ и $\alpha \in (0,1)$, то всегда существует достаточно большой $n$, при котором соблюдается $\alpha^{1/n} > \theta$.