Фамилия:..

Имя:..

Группа:..

Задача №1

На соревнованиях по скоростной лепке снеговиков время (в часах), затрачиваемое участником соревнования на то, чтобы слепить снеговика, не зависит от времени, затраченного другими участниками и описывается случайной величиной со следующей функцией плотности:

$$f_X(t) = \begin{cases} \alpha t^{-2}, \text{ если } t \in [1, \alpha] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Подсказки: $\int t^{-1} dt = \ln(t)$, $\ln(2) \approx 0.6931$, $\ln(4) \approx 1.3863$, $\ln(6) \approx 1.7918$.

1. Найдите параметр α и запишите функцию плотности с учетом его значения. **(1 балл)**

2. Определите, к чему бы сходилось по распределению среднее время, затраченное участниками соревнования на лепку снеговиков, если бы количество участников стремилось к бесконечности. Ответ аргументируйте соответствующими математическими законами и теоремами. **(5 баллов)**

3. С помощью центральной предельной теоремы рассчитайте, приблизительно, вероятность, с которой среднее время на лепку снеговиков 100 участниками не превысит 1.35 часа. **(5 баллов)**

4. С помощью центральной предельной теоремы рассчитайте, приблизительно, какое среднее время на лепку снеговика не превысят 100 участников соревнований с вероятностью 0.8. **(5 баллов)**

5. Найдите функцию распределения времени, затрачиваемого на лепку снеговика участником соревнования. **(3 балла)**

6. Мастерство участника соревнований описывается функцией $\frac{1}{X}$, где X – время, потраченное на лепку снеговика. Запишите функцию плотности мастерства участника соревнования. Исходя из полученной функции плотности определите, как называется найденное вами распределение и укажите его параметры. **(6 баллов)**

Решение:

1. Найдем значение параметра из решения соответствующего равенства:

$$\int_1^\alpha \alpha t^{-2} dt = \alpha - 1 = 1 \implies \alpha = 2$$

Отсюда получаем выражение для функции плотности:

$$f_X(t) = \begin{cases} 2t^{-2}, \text{ если } t \in [1,2] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

2. Поскольку часы, затрачиваемые участниками на лепку снеговиков, являются независимыми случайныи величинами, можно воспользоваться законом больших чисел.

Обозначим через X_i время, затрачиваемое на лепку снеговика одним участником и рассчитаем математическое ожидание соответствующей случайной величины:

$$E(X_i) = \int\limits_1^2 t \times 2t^{-2} dt = \ln(4) \approx 1.3863$$

Применяя закон больших чисел получаем:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \ln(4) \approx 1.3863$$

Поскольку из сходимости по распределению следует сходимость по вероятности имеем:

$$\frac{1}{n}\overline{X}_n \xrightarrow{d} \ln(4) \approx 1.3863$$

3. Рассчитаем дисперсию времени, затрачиваемого одним участником соревнования:

$$E(X_i^2) = \int\limits_1^2 t^2 \times 2t^{-2} dt = 2$$

$$Var(X_i) \approx 2 - 1.3863^2 \approx 0.07817$$

Отсюда получаем асимптотическое распределение общего времени:

$$\sum_{i=1}^n X_i \dot{\sim} N\left(100 \times 1.3863, 100 \times 0.07817\right) = N\left(138.63, 7.817\right)$$

Рассчитаем искомую вероятность:

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 1.35\right) = P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 135\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{138.63 - 135}{\sqrt{7.817}}\right) \approx \Phi(-1.3) = 1 - \Phi(1.3) \approx 0.0968$$

4. Искомое значение можно найти из равенства:

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \le x\right) = 0.8$$

Распишем соответствующую вероятность:

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \le x\right) = P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \le 100x\right) \approx \Phi\left(\frac{100x - 138.63}{\sqrt{7.817}}\right) = 0.8$$

Применяя квантильную функцию находим искомое значение:

$$\frac{100x - 138.63}{\sqrt{7.817}} = \Phi^{-1}(0.8) \approx 0.8416212 \implies x \approx 1.41$$

5. Найдем функцию распределения на носителе $t \in [1, 2]$:

$$F_X(x) = \int\limits_1^x 2t^{-2} dt = 2 - \frac{2}{x}$$

Отсюда получаем, что:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ 2 - \frac{2}{x}, \text{ если } x \in [1, 2] \\ 1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

6. Запишем искомую функцию распределения на носителе $x \in [0.5, 1]$:

$$F_{\frac{1}{X}}(x) = P\left(\frac{1}{X} \le x\right) = P(X \ge \frac{1}{x}) = 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right) =$$
$$= 1 - (2 - 2x) = 2x - 1$$

Отсюда получаем функцию плотности:

$$f_{\frac{1}{X}}(x) = \frac{dF_{\frac{1}{X}}(x)}{dx} = \begin{cases} 2, \text{ если } x \in [0.5, 1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Полученное распределение именуется равномерным $U(0.5, 1)$.

Фамилия:...

Имя:...

Группа:..

Задача №2

Время на доставку подарка Дедом Морозом (в минутах) хорошо описывается экспоненциальным распределением с параметром λ. Известно, что если Дед Мороз доставит подарок быстрее, чем за 2 минуты, то условная вероятность того, что он доставит его не быстрее, чем за 1 минуту, равняется 0.25.

1. Найдите дисперсию времени доставки подарка. **(5 баллов)**
   Подсказка: при решении равенства сделайте замену $t = e^{-\lambda}$ и $t^2 = e^{-2\lambda}$. Кроме того, $ln(1) = 0$, $\ln(2) \approx 0.693$ и $\ln(3) \approx 1.0986$.

2. Найдите условную функцию распределения времени доставки подарка, если известно, что подарок был доставлен позже, чем через 2 минуты. **(5 баллов)**
   Подсказка: удобно воспользоваться свойством отсутствия памяти.

3. Найдите квантиль уровня 0.7 условного распределения времени доставки подарка, если известно, что подарок был доставлен позже, чем через 2 минуты. **(5 баллов)**
   Подсказка: $\ln(3) \approx 1.0986$ и $\ln(0.7) \approx -0.3567$.

4. Дед Мороз везет подарки 144 детям. С помощью теоремы Муавра-Лаппласа посчитайте вероятность, с которой не менее половины подарков будет доставлена быстрее, чем за 2 минуты. Предполагается, что время на доставку одного подарка никак не влияет на время доставки других подарков. **(5 баллов)**
   Подсказка: перейдите от экспоненциальных к бернуллиевским случайным величинам.

Решение

1. Воспользуемся формулой условной вероятности:

$$P(X \geq 1|X \leq 2) = \frac{P(1 \leq X \leq 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{F_X(2) - F_X(1)}{F_X(2)} =$$
$$= \frac{\left(1 - e^{-2\lambda}\right) - \left(1 - e^{-\lambda}\right)}{\left(1 - e^{-2\lambda}\right)} = \frac{e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}} = 0.25$$

Сделаем замену $t = e^{-\lambda}$ и $t^2 = e^{-2\lambda}$, окуда получаем:

$$\frac{t - t^2}{1 - t^2} = 0.25 \implies t - t^2 = 0.25 - 0.25t^2 \implies t - 0.25 - 0.75t^2 = 0$$

Отсюда получаем, два возможных решения $t = \frac{1}{3}$ и $t = 1$.

Пусть $t = 1$, тогда $e^{-\lambda} \approx 1$, откуда $\lambda = \ln(1) = 0$, что противоречит условию $\lambda > 0$.

Если $t = \frac{1}{3}$, то $e^{-\lambda} \approx \frac{1}{3}$, откуда $\lambda = \ln(3) \approx 1.0986$.

Отсюда получаем, что:

$$Var(X) = \frac{1}{\ln(3)^2} \approx \frac{1}{1.0986^2} \approx 0.829$$

2. Функция распределения условной случайной величины $(X|X \geq 2)$, в силу свойства отсутствия памяти, на носителе $[2, \infty)$ имеет вид:

$$F_{X|X\geq 2}(x) = P(X \leq x|X \geq 2) = 1 - P(X \geq x|X \geq 2) = 1 - P(X \geq x - 2) =$$
$$= 1 - (1 - P(X \leq x - 2)) = F_X(x - 2) = 1 - e^{-\ln(3)(x-2)}$$

В итоге получаем:

$$F_{X|X\geq 2}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\ln(3)(x-2)}, \text{ если } x \geq 2 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

3. Обозначим искомую квантиль как $x_{0.7}$. Найдем ее из решения равенства:

$$1 - e^{-\ln(3)(x_{0.7}-2)} = 0.7$$

Отсюда получаем:

$$e^{-\ln(3)(x_{0.7}-2)} = 0.3 \implies -\ln(3)(x_{0.7} - 2) = \ln(0.3) \implies$$
$$\implies (x_{0.7} - 2) = \frac{0.3567}{1.0986} \implies x_{0.7} \approx 3.1$$

4. Через $X_i \sim EXP(\ln(3))$ обозначим случайную величину, отражающую время на доставку подарка одному ребенку. Введем случайную величину Y_i, принимающую значение 1, если

подарок был доставлен менее, чем за 2 минуты и 0 – в противном случае. Данная величина имеет распределение Бернулли с параметром:

$$P(Y_i = 1) = P(X_i \leq 2) = 1 - e^{-2\ln(3)} = \frac{8}{9}$$

По теореме Муавра-Лапласа общее время доставки будет иметь следующее асимптотическое распределение:

$$\sum_{i=1}^{144} Y_i \dot{\sim} N(144 \times \frac{8}{9}, 144 \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{9}) = N(128, \frac{128}{9})$$

Отсюда получаем искомую вероятность:

$$P\left(\sum_{i=1}^{144} Y_i \geq \frac{144}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{128 - 72}{\sqrt{\frac{128}{9}}}\right) = 1 - \Phi(14.85) \approx 0$$

Фамилия:...

Имя:...

Группа:..

Задача №3

Дед Мороз нанимает эльфов для работы на новогодней фабрике. Индивидуальные производительности эльфов являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами из равномерного распределения $X_i \sim U(0,1)$. Определите, к чему сходится по вероятности общая производительность эльфов при $n \to \infty$, если она имеет вид:

1. $Y_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}{2n}$. **(2 балла)**
2. $Y_n = \left(\prod_{i=1}^{n} e^{X_i}\right)^{\frac{1}{n}}$. **(3 балла)**
   Подсказка: $e \approx 2.718$.
3. $Y_n = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} e^{X_i}\right)^{\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j^2}{2n}$. **(5 баллов)**

Важно: при решении обязательно указывать применяемые теоремы.

Решение:

1. Воспользуемся законом больших чисел. Для этого, сперва, рассчитаем второй начальный момент:

$$E(X_j^2) = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Отсюда получаем, в силу закона больших чисел, что:

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2}{n} \xrightarrow{p} \frac{1}{3}$$

Применяя теорему Манна-Вальда имеем:

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2}{2n} \xrightarrow{p} \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

2. Обратим внимание, что в силу закона больших чисел:

$$\ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} e^{X_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} 0.5$$

Отсюда по теореме Манна-Вальда получаем, что:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} e^{X_i}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{p} e^{0.5} \approx 1.6487$$

3. Воспользуемся теоремой Слуцкого:

$$\frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} e^{X_i}\right)^{\frac{1}{n}} \sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2}{2n} = \left(\prod_{i=1}^{n} e^{X_i}\right)^{\frac{1}{n}} \times \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2}{2n} \xrightarrow{p} e^{0.5} \times \frac{1}{6} \approx 0.275$$

Проверка в R:

```
n <- 1000000
x <- runif(n)
# пункт 1
c(true = 1 / 6, est = mean(x ^ 2) / 2)
# пункт 2
c(true = exp(0.5), est = exp(mean(log(exp(x)))))
# пункт 3
c(true = exp(0.5) * 1 / 6,
  est = mean(x ^ 2) / 2 * exp(mean(log(exp(x)))))
```