

Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2023-2024

Дедлайн: решение домашнего задания загружается в виде единого файла, имеющего pdf-формат, в систему SmartLMS в разделе с соответствующим размещенным заданием до **10-го марта включительно**. При наличии сбоев в работе системы файл необходимо направить на почту mirectvis@gmail.com. Тема письма должна иметь следующий формат: “МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ”, например, “МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 3”.

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №3

Задание №1. Замаскированное распределение (50 баллов)

Имеется выборка X_1, \dots, X_n , где X_i отражает объем покупок (в тысячах рублей), совершенных i -м клиентом. Функция распределения этой случайной величины имеет вид:

$$F_{X_i}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 1 \\ 1 - t^{-\lambda}, & \text{если } t \geq 1 \end{cases}, \quad \text{где } \lambda > 1$$

Известно, что $n = 100$, $\bar{x}_n = e^{0.1}$ и $\sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 10$, где $e \approx 2.718$ – экспонента. Помогите руководству компании изучить поведение клиентов.

1. Оцените параметр λ при помощи метода моментов и посчитайте реализацию данной оценки. **(10 баллов)**
2. Оцените параметр λ методом максимального правдоподобия и посчитайте реализацию данной оценки. **(10 баллов)**
3. Оцените асимптотическую дисперсию ММП оценки параметра λ и посчитайте реализацию данной оценки. **(10 баллов)**
4. Найдите реализацию 88% доверительного интервала параметра λ . **(10 баллов)**
5. На уровне значимости $\alpha = 0.2$ протестируйте гипотезу $H_0 : E(X_1) = 1.1$ против альтернативы $H_1 : E(X_1) \neq 1.1$. **(10 баллов)**

Задание №2. АВ-тестирование (20 баллов)

У вас заказали исследование, призванное изучить реакцию пользователей на новый дизайн сайта компании. В вашем исследовании независимо друг от друга участвуют 200 индивидов. Они были случайным образом разделены на две равные группы, первая из которых пользовалась сайтом со старым дизайном, а вторая – с новым. В первой группе дизайн сайта понравился 40 участникам эксперимента, а во второй – 70.

1. На уровне значимости $\alpha = 0.01$ протестируйте гипотезу о том, что половине пользователей понравится новый дизайн сайта, против альтернативы о том, что более, чем половине. **(10 баллов)**
2. Самостоятельно выберите тест, который позволит определить, позволил ли новый дизайн сайта повысить удобство его использования. Рассчитайте p-value данного теста и сделайте вывод. **(10 баллов)**

Задание №3. Изобретение теста (30 баллов)

Имеется выборка (X_1, \dots, X_n) из нормального распределения $N(\mu, \mu)$, про которое известно, что математическое ожидание совпадает с дисперсией и $\mu > 0$. Тестируется гипотеза $H_0 : \mu = 1$ против альтернативы $H_1 : \mu \neq 1$.

1. Предложите тестовую статистику $T(X)$ и критическую область \mathcal{T}_α , позволяющие тестировать нулевую гипотезу на уровне значимости α . **(5 баллов)**

2. Рассчитайте мощность вашего теста при $n = 25$, $\alpha = 0.1$ и $\mu = 2$. **(5 баллов)**
3. Проверьте, является ли ваш тест состоятельным. Если ваш тест не является состоятельным, то преобразуйте его таким образом, чтобы он стал состоятельным. **(10 баллов)**
4. С помощью леммы Неймана-Пирсона найдите тестовую статистику равномерно наиболее мощного теста, если $n = 1$ и альтернативная гипотеза сформулирована как $H_1 : \mu = 2$. Затем рассчитайте p-value данного теста, если $x_1 = 2$. **(5 баллов)**
5. Проверьте, является ли при $n = 1$ и $H_1 : \mu = 2$ предложенный вами в первом пункте задачи тест равномерно наиболее мощным. **(5 баллов)**