Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2023-2024

Дедлайн: решение домашнего задания загружается в виде единого файла, имеющего pdf-формат, в систему SmartLMS в разделе с соответствующим размещенным заданием до **3-го декабря включитьельно**. При наличии сбоев в работе системы файл необходимо направить на почту mirectvis@gmail.com. Тема письма должна иметь следующий формат: "МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ", например, "МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 1".

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №2

Задание №1. Яма (60 баллов)

Вследствие падения метеорита на дороге длиной 10 километров между 2 и 5 километрами образовалась яма длиной 3 километра. Километр дороги, на котором случайно взятый автомобилист останавливается (он может ехать с любого конца дороги), является случайной величиной со следующей функцией плотности:

$$f_X(t) = \begin{cases} (0.05\alpha)t, \text{ если } t \in [0, 2] \\ 0, \text{ в противном случае} \\ 0.04(t - \alpha), \text{ если } t \in [5, 10] \end{cases}$$

1. Найдите параметр α и запишите функцию плотности с учетом его значения. **(5 баллов)**

2. Посчитайте, с какой вероятностью автомобиль остановится ранее, чем за 500 метров до ямы. **(5 баллов)**

3. Вычислите дисперсию километра, на котором автомобилист остановится. **(10 баллов)**

4. Определите вероятность, с которой автомобилист остановится ранее, чем за 500 метров до ямы, если он уже находится не далее, чем в 1 километре от нее. **(10 баллов)**

5. Найдите функцию распределения километра, на котором автомобилист остановится. **(10 баллов)**

6. Запишите функцию распределения случайной величины, отражающей число километров от автомобиля до ямы в момент, когда автомобилист остановится. **Подсказка:** рассмотрите два случая, когда расстояние до ямы меньше 2 километров, и когда – больше. При этом возможные значения функции распределения расстояния до ямы в момент остановики рассчитайте через вероятности случайной величины, отражающей километр остановки. **(10 баллов)**

7. Вычислите математическое ожидание случайной величины из предыдущего пункта. **(5 баллов)**

8. Найдите условное математическое оджидание случайной величины из предыдушего пункта, если известно, что расстояние до ямы составляет более 4 километров. **(5 баллов)**

Задание №2. Последовательность Пуассоновских случайных величин (20 баллов)

Имеется последовательность Пуассоновских случайных величин $X_1, ..., X_n$ таких, что $X_n \sim \text{Pois}(\lambda_n)$, причем $\lambda_n = e^{-n}$.

1. Определите, к чему сходится по вероятности эта последовательность и формально докажите соответствующую сходимость при $\lambda_n = e^{-n}$. **(5 баллов)**

2. Докажите, что данная последовательность сходится по вероятности к 0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. **(5 баллов)**

   Подсказка:: сперва покажите, что из $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ следует сходимость рассматриваемой последовательности к нулю, а затем, что из сходимости этой последовательности к 0 следует $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

3. Определите, к чему сходится по вероятности последовательность $Y_n = \Phi\left(\frac{n - \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)$, если $\lambda_n = 1$ и X_i независимы. Ответ формально обоснуйте. **(5 баллов)**

4. При условиях, оговоренных в предыщем пункте предположим, что $Z_n = X_n Y_n$. Запишите функцию вероятности распределения, к которому Z_n сходится по распределению. **(5 баллов)**

Задание №3. Игра с кубиком и монеткой (20 баллов)

Лаврентий играет в следующую игру. Он бросает обычный кубик и затем, если монетка выпадает орлом, записывает себе число очков, выпавших на кубике. Если же выпадает решка, то он не добавляет себе ни единого очка. Лаврентий сыграл в эту игру 96 раз.

1. Посчитайте математическое ожидание и дисперсию суммарного числа очков, полученных Лаврентием. **(2 балла)**

2. С помощью центральной предельной теоремы найдите приблизительную вероятность того, что суммарно Лаврентий заработает от 160 до 180 очков. **(5 баллов)**

3. Определите, к чему сходится по вероятности разница между средним числом выпавших очков и средним количеством выпавших орлов. **(3 балла)**

4. Посчитайте вероятность того, что суммарное число выпавших очков превысит суммарное количество выпавших орлов более, чем в 3 раза. **(10 баллов)**