

Теория Вероятностей и Статистика

Моменты дискретных случайных величин

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2022

Математическое ожидание

Определение математического ожидания

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Математическое ожидание

Определение математического ожидания

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.

Математическое ожидание

Определение математического ожидания

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.

Решение: $E(X) = P(X = 2) \times 2 + P(X = 5) \times 5 + P(X = 10) \times 10 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 5 + 0.2 \times 10 = 5.1$

Математическое ожидание

Определение математического ожидания

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.
Решение: $E(X) = P(X = 2) \times 2 + P(X = 5) \times 5 + P(X = 10) \times 10 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 5 + 0.2 \times 10 = 5.1$
- Найдите математическое ожидание числа очков, выпавших на правильном кубике.

Математическое ожидание

Определение математического ожидания

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.
Решение: $E(X) = P(X = 2) \times 2 + P(X = 5) \times 5 + P(X = 10) \times 10 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 5 + 0.2 \times 10 = 5.1$
- Найдите математическое ожидание числа очков, выпавших на правильном кубике.
Решение: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 2) \times 2 + \dots + P(X = 6) \times 6 = \frac{1}{6} (1 + \dots + 6) = 3.5$

Математическое ожидание

Определение математического ожидания

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.
Решение: $E(X) = P(X = 2) \times 2 + P(X = 5) \times 5 + P(X = 10) \times 10 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 5 + 0.2 \times 10 = 5.1$
- Найдите математическое ожидание числа очков, выпавших на правильном кубике.
Решение: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 2) \times 2 + \dots + P(X = 6) \times 6 = \frac{1}{6} (1 + \dots + 6) = 3.5$
- Число звезд, которое получит ресторан, является случайной величиной X с распределением, заданным следующей таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

Найдите математическое ожидание числа звезд, которое получит ресторан.

Математическое ожидание

Определение математического ожидания

- **Математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x$$

Примеры:

- Каждый день София пробегает дистанцию в 2, 5 или 10 километров с вероятностями 0.3, 0.5 и 0.2 соответственно. Найдите математическое ожидание длины ежедневной пробежки Софии.
Решение: $E(X) = P(X = 2) \times 2 + P(X = 5) \times 5 + P(X = 10) \times 10 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 5 + 0.2 \times 10 = 5.1$
- Найдите математическое ожидание числа очков, выпавших на правильном кубике.
Решение: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 2) \times 2 + \dots + P(X = 6) \times 6 = \frac{1}{6} (1 + \dots + 6) = 3.5$
- Число звезд, которое получит ресторан, является случайной величиной X с распределением, заданным следующей таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

Найдите математическое ожидание числа звезд, которое получит ресторан.

Решение: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + \dots + P(X = 5) \times 5 = 0.1 \times 1 + \dots + 0.2 \times 5 = 3$

Математическое ожидание

Условие существования математического ожидания

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

Математическое ожидание

Условие существования математического ожидания

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

Санкт-Петербургский парадокс:

- Игрок подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка.

Математическое ожидание

Условие существования математического ожидания

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

Санкт-Петербургский парадокс:

- Игрок подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка.
- Выигрыш игрока является случайной величиной X , равняющейся 2^Y , где Y – число выпавших орлов.

Математическое ожидание

Условие существования математического ожидания

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

Санкт-Петербургский парадокс:

- Игрок подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка.
- Выигрыш игрока является случайной величиной X , равняющейся 2^Y , где Y – число выпавших орлов.
- Например, если выпало три орла, то это значит, что первые три броска выпал орел, а при последнем броске – выпала решка. Игрок получит выигрыш $2^3 = 8$. Учитывая, что результаты бросков независимы, вероятность получить соответствующий выигрыш составит:

$$P(X = 2^3) = P(O_1) \times P(O_2) \times P(O_3) \times P(\bar{O}_4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+1}$$

где O_i – событие, в соответствии с которым орел выпал при i -м броске.

Математическое ожидание

Условие существования математического ожидания

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

Санкт-Петербургский парадокс:

- Игрок подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка.
- Выигрыш игрока является случайной величиной X , равняющейся 2^Y , где Y – число выпавших орлов.
- Например, если выпало три орла, то это значит, что первые три броска выпал орел, а при последнем броске – выпала решка. Игрок получит выигрыш $2^3 = 8$. Учитывая, что результаты бросков независимы, вероятность получить соответствующий выигрыш составит:

$$P(X = 2^3) = P(O_1) \times P(O_2) \times P(O_3) \times P(\overline{O}_4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+1}$$

где O_i – событие, в соответствии с которым орел выпал при i -м броске.

- Распределение случайной величины X задается функцией $P(X = 2^y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1}$, где $y \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Математическое ожидание

Условие существования математического ожидания

- Математическое ожидание дискретной случайной величины X существует, если сходится следующий ряд:

$$\sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times |x|$$

Санкт-Петербургский парадокс:

- Игрок подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка.
- Выигрыш игрока является случайной величиной X , равняющейся 2^Y , где Y – число выпавших орлов.
- Например, если выпало три орла, то это значит, что первые три броска выпал орел, а при последнем броске – выпала решка. Игрок получит выигрыш $2^3 = 8$. Учитывая, что результаты бросков независимы, вероятность получить соответствующий выигрыш составит:

$$P(X = 2^3) = P(O_1) \times P(O_2) \times P(O_3) \times P(\overline{O}_4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+1}$$

где O_i – событие, в соответствии с которым орел выпал при i -м броске.

- Распределение случайной величины X задается функцией $P(X = 2^y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1}$, где $y \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
- Математическое ожидание не существует, поскольку ряд не сходится (проверьте критерием Даламбера):

$$P(Y = 2^0) \times |2^0| + P(Y = 2^1) \times |2^1| + \dots = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

Математическое ожидание

Начальные моменты

- **Начальный момент порядка** $k \in \mathbb{N}$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Математическое ожидание

Начальные моменты

- Начальный момент порядка $k \in \mathbb{N}$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X . Маша получает выигрыш в размере X^2 . Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.

Математическое ожидание

Начальные моменты

- Начальный момент порядка $k \in \mathbb{N}$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X . Маша получает выигрыш в размере X^2 . Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.

Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + P(X = 2) \times 2^2 + \dots + P(X = 6) \times 6^2 = \frac{1}{6} (1^2 + \dots + 6^2) = \frac{91}{6}$

Математическое ожидание

Начальные моменты

- Начальный момент порядка $k \in \mathbb{N}$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X . Маша получает выигрыш в размере X^2 . Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.
Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + P(X = 2) \times 2^2 + \dots + P(X = 6) \times 6^2 = \frac{1}{6} (1^2 + \dots + 6^2) = \frac{91}{6}$
- Длина стороны куба является случайной величиной X , принимающей значения 1, 2 и 3 с вероятностями 0.2, 0.1 и 0.7 соответственно. Найдите математическое ожидание объема куба.

Математическое ожидание

Начальные моменты

- Начальный момент порядка $k \in \mathbb{N}$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X . Маша получает выигрыш в размере X^2 . Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.
Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + P(X = 2) \times 2^2 + \dots + P(X = 6) \times 6^2 = \frac{1}{6} (1^2 + \dots + 6^2) = \frac{91}{6}$
- Длина стороны куба является случайной величиной X , принимающей значения 1, 2 и 3 с вероятностями 0.2, 0.1 и 0.7 соответственно. Найдите математическое ожидание объема куба.
Решение: $E(X^3) = P(X = 1) \times 1^3 + P(X = 2) \times 2^3 + P(X = 3) \times 3^3 = 0.2 \times 1 + 0.1 \times 8 + 0.7 \times 27 = 19.9$

Математическое ожидание

Начальные моменты

- Начальный момент порядка $k \in \mathbb{N}$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X . Маша получает выигрыш в размере X^2 . Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.
Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + P(X = 2) \times 2^2 + \dots + P(X = 6) \times 6^2 = \frac{1}{6} (1^2 + \dots + 6^2) = \frac{91}{6}$
- Длина стороны куба является случайной величиной X , принимающей значения 1, 2 и 3 с вероятностями 0.2, 0.1 и 0.7 соответственно. Найдите математическое ожидание объема куба.
Решение: $E(X^3) = P(X = 1) \times 1^3 + P(X = 2) \times 2^3 + P(X = 3) \times 3^3 = 0.2 \times 1 + 0.1 \times 8 + 0.7 \times 27 = 19.9$
- Каждый раз приходя в магазин Алексей покупает один новый пиджак и одни новые брюки. Число походов в магазин является случайной величиной X со следующим распределением:

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

Каждая комбинация пиджака и брюк создает Алексею новый образ. Найдите математическое ожидание числа различных образов, которые сможет создать Алексей.

Математическое ожидание

Начальные моменты

- Начальный момент порядка $k \in \mathbb{N}$ дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X^k) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times x^k$$

Примеры:

- Маша бросает кубик. Число, выпавшее на кубике, является случайной величиной X . Маша получает выигрыш в размере X^2 . Найдите математическое ожидание выигрыша Маши.
Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + P(X = 2) \times 2^2 + \dots + P(X = 6) \times 6^2 = \frac{1}{6} (1^2 + \dots + 6^2) = \frac{91}{6}$
- Длина стороны куба является случайной величиной X , принимающей значения 1, 2 и 3 с вероятностями 0.2, 0.1 и 0.7 соответственно. Найдите математическое ожидание объема куба.
Решение: $E(X^3) = P(X = 1) \times 1^3 + P(X = 2) \times 2^3 + P(X = 3) \times 3^3 = 0.2 \times 1 + 0.1 \times 8 + 0.7 \times 27 = 19.9$
- Каждый раз приходя в магазин Алексей покупает один новый пиджак и одни новые брюки. Число походов в магазин является случайной величиной X со следующим распределением:

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

Каждая комбинация пиджака и брюк создает Алексею новый образ. Найдите математическое ожидание числа различных образов, которые сможет создать Алексей.

Решение: $E(X^2) = P(X = 1) \times 1^2 + \dots + P(X = 5) \times 5^2 = 0.1 \times 1 + \dots + 0.2 \times 25 = 10.6$

Математическое ожидание

Математическое ожидание функции от случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times g(x)$$

Математическое ожидание

Математическое ожидание функции от случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha) = \alpha \text{ и } E(\alpha X^k + \beta) = \alpha E(X^k) + \beta, \text{ где } \alpha, \beta, k \in R$$

Математическое ожидание

Математическое ожидание функции от случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha) = \alpha \text{ и } E(\alpha X^k + \beta) = \alpha E(X^k) + \beta, \text{ где } \alpha, \beta, k \in R$$
$$E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X)), \text{ где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) - \text{функции}$$

Математическое ожидание

Математическое ожидание функции от случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha) = \alpha \text{ и } E(\alpha X^k + \beta) = \alpha E(X^k) + \beta, \text{ где } \alpha, \beta, k \in R$$
$$E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X)), \text{ где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) - \text{функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X) = \ln(X + 1)$, где X – объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.

Математическое ожидание

Математическое ожидание функции от случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha) = \alpha \text{ и } E(\alpha X^k + \beta) = \alpha E(X^k) + \beta, \text{ где } \alpha, \beta, k \in R$$
$$E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X)), \text{ где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) - \text{функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X) = \ln(X + 1)$, где X – объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.

Решение: $E(\ln(X + 1)) = 0.3 \times \ln(1 + 1) + 0.6 \times \ln(3 + 1) + 0.1 \times \ln(5 + 1) \approx 1.22$

Математическое ожидание

Математическое ожидание функции от случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha) = \alpha \text{ и } E(\alpha X^k + \beta) = \alpha E(X^k) + \beta, \text{ где } \alpha, \beta, k \in R$$
$$E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X)), \text{ где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) - \text{функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X) = \ln(X + 1)$, где X – объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.
Решение: $E(\ln(X + 1)) = 0.3 \times \ln(1 + 1) + 0.6 \times \ln(3 + 1) + 0.1 \times \ln(5 + 1) \approx 1.22$
- Андрей пользуется сервисом облачного гейминга. Каждый месяц Андрей платит 100 рублей за доступ к сервису и еще по 20 рублей за каждый час игры. Количество часов, которые Андрей проводит каждый месяц в играх, является случайной величиной X , с равной вероятностью принимающей значения от 1 до 10 включительно. Найдите математическое ожидание ежемесячных затрат Андрея на облачный гейминг.

Математическое ожидание

Математическое ожидание функции от случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha) = \alpha \text{ и } E(\alpha X^k + \beta) = \alpha E(X^k) + \beta, \text{ где } \alpha, \beta, k \in R$$
$$E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X)), \text{ где } g_1(\cdot) \text{ и } g_2(\cdot) - \text{функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X) = \ln(X + 1)$, где X – объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.
Решение: $E(\ln(X + 1)) = 0.3 \times \ln(1 + 1) + 0.6 \times \ln(3 + 1) + 0.1 \times \ln(5 + 1) \approx 1.22$
- Андрей пользуется сервисом облачного гейминга. Каждый месяц Андрей платит 100 рублей за доступ к сервису и еще по 20 рублей за каждый час игры. Количество часов, которые Андрей проводит каждый месяц в играх, является случайной величиной X , с равной вероятностью принимающей значения от 1 до 10 включительно. Найдите математическое ожидание ежемесячных затрат Андрея на облачный гейминг.
Решение: $E(X) = 0.1 \times (1 + \dots + 10) = 5.5 \implies E(20X + 100) = 20E(X) + 100 = 20 \times 5.5 + 100 = 210$

Математическое ожидание

Математическое ожидание функции от случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha) = \alpha \text{ и } E(\alpha X^k + \beta) = \alpha E(X^k) + \beta, \text{ где } \alpha, \beta, k \in R$$
$$E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X)), \text{ где } g_1(\cdot) \text{ и } g_2(\cdot) - \text{функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X) = \ln(X + 1)$, где X – объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.
Решение: $E(\ln(X + 1)) = 0.3 \times \ln(1 + 1) + 0.6 \times \ln(3 + 1) + 0.1 \times \ln(5 + 1) \approx 1.22$
- Андрей пользуется сервисом облачного гейминга. Каждый месяц Андрей платит 100 рублей за доступ к сервису и еще по 20 рублей за каждый час игры. Количество часов, которые Андрей проводит каждый месяц в играх, является случайной величиной X , с равной вероятностью принимающей значения от 1 до 10 включительно. Найдите математическое ожидание ежемесячных затрат Андрея на облачный гейминг.
Решение: $E(X) = 0.1 \times (1 + \dots + 10) = 5.5 \implies E(20X + 100) = 20E(X) + 100 = 20 \times 5.5 + 100 = 210$
- Пусть $E(X^2) = 7$ и $E(\cos(X)) = 1$, найдите $E(2X^2 - \cos(X) + 5)$.

Математическое ожидание

Математическое ожидание функции от случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times g(x)$$

- Отсюда, в частности, следуют следующие свойства:

$$E(\alpha) = \alpha \text{ и } E(\alpha X^k + \beta) = \alpha E(X^k) + \beta, \text{ где } \alpha, \beta, k \in R$$
$$E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X)), \text{ где } g_1(.) \text{ и } g_2(.) \text{ — функции}$$

Примеры:

- Объем выпуска фирмы составляет 1, 3 или 5 единиц продукции с вероятностями 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Функция издержек имеет вид $g(X) = \ln(X + 1)$, где X — объем выпуска фирмы. Найдите математическое ожидание издержек фирмы.
Решение: $E(\ln(X + 1)) = 0.3 \times \ln(1 + 1) + 0.6 \times \ln(3 + 1) + 0.1 \times \ln(5 + 1) \approx 1.22$
- Андрей пользуется сервисом облачного гейминга. Каждый месяц Андрей платит 100 рублей за доступ к сервису и еще по 20 рублей за каждый час игры. Количество часов, которые Андрей проводит каждый месяц в играх, является случайной величиной X , с равной вероятностью принимающей значения от 1 до 10 включительно. Найдите математическое ожидание ежемесячных затрат Андрея на облачный гейминг.
Решение: $E(X) = 0.1 \times (1 + \dots + 10) = 5.5 \implies E(20X + 100) = 20E(X) + 100 = 20 \times 5.5 + 100 = 210$
- Пусть $E(X^2) = 7$ и $E(\cos(X)) = 1$, найдите $E(2X^2 - \cos(X) + 5)$.
Решение: $E(2X^2 - \cos(X) + 5) = 2E(X^2) - E(\cos(X)) + E(5) = 2 \times 7 - 1 + 5 = 18$

Дисперсия

Определение дисперсии

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$\text{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Дисперсия

Определение дисперсии

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$\text{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:

Пользуясь тем, что $E(X)$ – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Дисперсия

Определение дисперсии

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$\text{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:

Пользуясь тем, что $E(X)$ – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Дисперсия

Определение дисперсии

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$\text{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:

Пользуясь тем, что $E(X)$ – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.

Дисперсия

Определение дисперсии

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$\text{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:

Пользуясь тем, что $E(X)$ – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.

Решение:

$$E(X) = 0.5 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.2 \times 3 = 1.7$$

Дисперсия

Определение дисперсии

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$\text{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:

Пользуясь тем, что $E(X)$ – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.

Решение:

$$E(X) = 0.5 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.2 \times 3 = 1.7$$

$$E(X^2) = 0.5 \times 1^2 + 0.3 \times 2^2 + 0.2 \times 3^2 = 3.5$$

Дисперсия

Определение дисперсии

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$\text{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:

Пользуясь тем, что $E(X)$ – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.

Решение:

$$E(X) = 0.5 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.2 \times 3 = 1.7$$

$$E(X^2) = 0.5 \times 1^2 + 0.3 \times 2^2 + 0.2 \times 3^2 = 3.5$$

$$\text{Var}(X) = 3.5 - 1.7^2 = 0.61$$

Дисперсия

Определение дисперсии

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$\text{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:

Пользуясь тем, что $E(X)$ – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.

Решение:

$$E(X) = 0.5 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.2 \times 3 = 1.7$$

$$E(X^2) = 0.5 \times 1^2 + 0.3 \times 2^2 + 0.2 \times 3^2 = 3.5$$

$$\text{Var}(X) = 3.5 - 1.7^2 = 0.61$$

- Математическое ожидание длины стороны квадрата равняется 3, а дисперсия – 1. Найдите математическое ожидание площади этого квадрата.

Дисперсия

Определение дисперсии

- Дисперсия случайной величины X определяется как:

$$\text{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Доказательство:

Пользуясь тем, что $E(X)$ – константа, а также свойствами математического ожидания функции, получаем:

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Дисперсия отражает меру **неопределенности**, поскольку, чем больше дисперсия, тем больше ожидаемое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

Примеры:

- Борис выпивает одну, две или три чашки кофе с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Найдите дисперсию числа чашек кофе, которые выпивает Борис.

Решение:

$$E(X) = 0.5 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.2 \times 3 = 1.7$$

$$E(X^2) = 0.5 \times 1^2 + 0.3 \times 2^2 + 0.2 \times 3^2 = 3.5$$

$$\text{Var}(X) = 3.5 - 1.7^2 = 0.61$$

- Математическое ожидание длины стороны квадрата равняется 3, а дисперсия – 1. Найдите математическое ожидание площади этого квадрата.

Решение: $E(X^2) = \text{Var}(X) + E(X)^2 = 1 + 3^2 = 10$

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Примеры:

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(\cdot)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?

Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(\cdot)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?
Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.
- Дед Иван мастерит и продает аккордеоны по 50 рублей за штуку и получает аккордную субсидию от государства в размере 100 рублей. Он продает все созданные аккордеоны, число которых является случайной величиной X с дисперсией $Var(X) = 3$. Найдите дисперсию дохода Деда Ивана.

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(\cdot)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?
Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.
- Дед Иван мастерит и продает аккордеоны по 50 рублей за штуку и получает аккордную субсидию от государства в размере 100 рублей. Он продает все созданные аккордеоны, число которых является случайной величиной X с дисперсией $Var(X) = 3$. Найдите дисперсию дохода Деда Ивана.
Решение: $Var(50X + 100) = 50^2 Var(X) = 2500 \times 3 = 7500$

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(\cdot)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?
Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.
- Дед Иван мастерит и продает аккордеоны по 50 рублей за штуку и получает аккордную субсидию от государства в размере 100 рублей. Он продает все созданные аккордеоны, число которых является случайной величиной X с дисперсией $Var(X) = 3$. Найдите дисперсию дохода Деда Ивана.
Решение: $Var(50X + 100) = 50^2 Var(X) = 2500 \times 3 = 7500$
- Первый, второй, третий и четвертый начальные моменты случайной величины X равняются 1, 2, 4 и 10 соответственно. Найдите дисперсию случайной величины $(X^2 - X)$.

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(.)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?
Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.
- Дед Иван мастерит и продает аккордеоны по 50 рублей за штуку и получает аккордную субсидию от государства в размере 100 рублей. Он продает все созданные аккордеоны, число которых является случайной величиной X с дисперсией $Var(X) = 3$. Найдите дисперсию дохода Деда Ивана.
Решение: $Var(50X + 100) = 50^2 Var(X) = 2500 \times 3 = 7500$
- Первый, второй, третий и четвертый начальные моменты случайной величины X равняются 1, 2, 4 и 10 соответственно. Найдите дисперсию случайной величины $(X^2 - X)$.
Решение:
$$Var(X^2 - X) = E((X^2 - X)^2) - E(X^2 - X)^2 = E(X^4 - 2X^3 + X^2) - (E(X^2) - E(X))^2 =$$

Дисперсия

Свойства дисперсии

Основные свойства дисперсии:

- Если $\alpha \in R$, то $Var(\alpha) = 0$.
- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$, где $\alpha, \beta \in R$.
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$, где $g(\cdot)$ – функция.

Примеры:

- Существует ли случайная величина, у которой квадрат математического ожидания больше второго начального момента?
Решение: нет, поскольку из $E(X)^2 > E(X^2)$ следует $Var(X) < 0$, что противоречит $Var(X) \geq 0$.
- Дед Иван мастерит и продает аккордеоны по 50 рублей за штуку и получает аккордную субсидию от государства в размере 100 рублей. Он продает все созданные аккордеоны, число которых является случайной величиной X с дисперсией $Var(X) = 3$. Найдите дисперсию дохода Деда Ивана.
Решение: $Var(50X + 100) = 50^2 Var(X) = 2500 \times 3 = 7500$
- Первый, второй, третий и четвертый начальные моменты случайной величины X равняются 1, 2, 4 и 10 соответственно. Найдите дисперсию случайной величины $(X^2 - X)$.

Решение:

$$\begin{aligned} Var(X^2 - X) &= E((X^2 - X)^2) - E(X^2 - X)^2 = E(X^4 - 2X^3 + X^2) - (E(X^2) - E(X))^2 = \\ &= E(X^4) - 2E(X^3) + E(X^2) - [E(X^2)^2 - 2E(X^2)E(X) + E(X)^2] = 10 - 2 \times 4 + 2 - [2^2 - 2 \times 2 \times 1 + 1^2] = 3 \end{aligned}$$

- **Стандартное отклонение** определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

- **Стандартное отклонение** определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Примеры:

- Стоимость акции является случайной величиной с дисперсией 25. Найдите стандартное отклонение цены акции.

- **Стандартное отклонение** определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Примеры:

- Стоимость акции является случайной величиной с дисперсией 25. Найдите стандартное отклонение цены акции.

Решение: $sd(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{25} = 5$

- **Стандартное отклонение** определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Примеры:

- Стоимость акции является случайной величиной с дисперсией 25. Найдите стандартное отклонение цены акции.

Решение: $sd(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{25} = 5$

- Второй начальный момент числа подписанных министром за день документов равняется 65, а стандартное отклонение равно 1. Найдите математическое ожидание числа подписанных документов.

- **Стандартное отклонение** определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Примеры:

- Стоимость акции является случайной величиной с дисперсией 25. Найдите стандартное отклонение цены акции.

Решение: $sd(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{25} = 5$

- Второй начальный момент числа подписанных министром за день документов равняется 65, а стандартное отклонение равно 1. Найдите математическое ожидание числа подписанных документов.

Решение: $E(X) = \sqrt{E(X^2) - Var(X)} = \sqrt{E(X^2) - sd(X)^2} = \sqrt{65 - 1} = 8$

- **Центральный момент** k -го порядка случайной величины X определяется как:

$$E((X - E(X))^k)$$

- **Центральный момент** k -го порядка случайной величины X определяется как:

$$E((X - E(X))^k)$$

- Дисперсия является центральным моментом 2-го порядка.

- **Центральный момент** k -го порядка случайной величины X определяется как:

$$E((X - E(X))^k)$$

- Дисперсия является центральным моментом 2-го порядка.

Пример:

- Известно, что первый, второй и третий начальные моменты случайной величины X равняются 2, 5 и 14 соответственно. Найдите третий центральный момент этой случайной величины.

- Центральный момент k -го порядка случайной величины X определяется как:

$$E((X - E(X))^k)$$

- Дисперсия является центральным моментом 2-го порядка.

Пример:

- Известно, что первый, второй и третий начальные моменты случайной величины X равняются 2, 5 и 14 соответственно. Найдите третий центральный момент этой случайной величины.

Решение :

$$E((X - E(X))^3) = E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 3E(X)E(X)^2 - E(X)^3 =$$

- Центральный момент k -го порядка случайной величины X определяется как:

$$E((X - E(X))^k)$$

- Дисперсия является центральным моментом 2-го порядка.

Пример:

- Известно, что первый, второй и третий начальные моменты случайной величины X равняются 2, 5 и 14 соответственно. Найдите третий центральный момент этой случайной величины.

Решение :

$$\begin{aligned} E((X - E(X))^3) &= E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 3E(X)E(X)^2 - E(X)^3 = \\ &= 14 - 3 \times 5 \times 2 + 3 \times 2 \times 2^2 - 2^3 = 0 \end{aligned}$$

Условное математическое ожидание

Определение условного математического ожидания

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Условное математическое ожидание

Определение условного математического ожидания

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).

Условное математическое ожидание

Определение условного математического ожидания

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).

Решение:

$$E(X|A) = P(X = 1|A) \times 1 + P(X = 2|A) \times 2 + \dots + P(X = 6|A) \times 6 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 \times 2 + \dots + 0 \times 6 = \frac{1}{3} (1 + 3 + 5) = 3$$

Условное математическое ожидание

Определение условного математического ожидания

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).

Решение:

$$E(X|A) = P(X = 1|A) \times 1 + P(X = 2|A) \times 2 + \dots + P(X = 6|A) \times 6 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 \times 2 + \dots + 0 \times 6 = \frac{1}{3} (1 + 3 + 5) = 3$$

- Распределение числа просматриваемых за месяц Иваном серий задано таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

Найдите математическое ожидание и дисперсию числа просмотренных Иваном серий, учитывая, что он посмотрел меньше трех серий.

Условное математическое ожидание

Определение условного математического ожидания

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).

Решение:

$$E(X|A) = P(X = 1|A) \times 1 + P(X = 2|A) \times 2 + \dots + P(X = 6|A) \times 6 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 \times 2 + \dots + 0 \times 6 = \frac{1}{3} (1 + 3 + 5) = 3$$

- Распределение числа просматриваемых за месяц Иваном серий задано таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

Найдите математическое ожидание и дисперсию числа просмотренных Иваном серий, учитывая, что он посмотрел меньше трех серий.

Решение:

$$E(X|X < 3) = P(X = 1|X < 3) \times 1 + P(X = 2|X < 3) \times 2 = \frac{P((X=1) \cap (X < 3))}{P(X < 3)} \times 1 + \frac{P((X=2) \cap (X < 3))}{P(X < 3)} \times 2 =$$

Условное математическое ожидание

Определение условного математического ожидания

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).

Решение:

$$E(X|A) = P(X = 1|A) \times 1 + P(X = 2|A) \times 2 + \dots + P(X = 6|A) \times 6 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 \times 2 + \dots + 0 \times 6 = \frac{1}{3} (1 + 3 + 5) = 3$$

- Распределение числа просматриваемых за месяц Иваном серий задано таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

Найдите математическое ожидание и дисперсию числа просмотренных Иваном серий, учитывая, что он посмотрел меньше трех серий.

Решение:

$$\begin{aligned} E(X|X < 3) &= P(X = 1|X < 3) \times 1 + P(X = 2|X < 3) \times 2 = \frac{P((X=1) \cap (X < 3))}{P(X < 3)} \times 1 + \frac{P((X=2) \cap (X < 3))}{P(X < 3)} \times 2 = \\ &= \frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=2)} \times 1 + \frac{P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)} \times 2 = \frac{0.1}{0.1+0.3} \times 1 + \frac{0.3}{0.1+0.3} \times 2 = 1.75 \end{aligned}$$

Условное математическое ожидание

Определение условного математического ожидания

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).

Решение:

$$E(X|A) = P(X = 1|A) \times 1 + P(X = 2|A) \times 2 + \dots + P(X = 6|A) \times 6 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 \times 2 + \dots + 0 \times 6 = \frac{1}{3} (1 + 3 + 5) = 3$$

- Распределение числа просматриваемых за месяц Иваном серий задано таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

Найдите математическое ожидание и дисперсию числа просмотренных Иваном серий, учитывая, что он посмотрел меньше трех серий.

Решение:

$$E(X|X < 3) = P(X = 1|X < 3) \times 1 + P(X = 2|X < 3) \times 2 = \frac{P((X=1) \cap (X < 3))}{P(X < 3)} \times 1 + \frac{P((X=2) \cap (X < 3))}{P(X < 3)} \times 2 =$$

$$= \frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=2)} \times 1 + \frac{P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)} \times 2 = \frac{0.1}{0.1+0.3} \times 1 + \frac{0.3}{0.1+0.3} \times 2 = 1.75$$

$$E(X^2|X < 3) = \frac{0.1}{0.1+0.3} \times 1^2 + \frac{0.3}{0.1+0.3} \times 2^2 = 3.25$$

Условное математическое ожидание

Определение условного математического ожидания

- **Условное математическое ожидание** дискретной случайной величины X определяется как:

$$E(X|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times x, \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Примеры:

- Найдите математическое ожидание числа, выпавшего на кубике (случайная величина X), если известно, что выпало нечетное число (событие A).

Решение:

$$E(X|A) = P(X = 1|A) \times 1 + P(X = 2|A) \times 2 + \dots + P(X = 6|A) \times 6 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 \times 2 + \dots + 0 \times 6 = \frac{1}{3} (1 + 3 + 5) = 3$$

- Распределение числа просматриваемых за месяц Иваном серий задано таблицей:

x	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

Найдите математическое ожидание и дисперсию числа просмотренных Иваном серий, учитывая, что он посмотрел меньше трех серий.

Решение:

$$E(X|X < 3) = P(X = 1|X < 3) \times 1 + P(X = 2|X < 3) \times 2 = \frac{P((X=1) \cap (X < 3))}{P(X < 3)} \times 1 + \frac{P((X=2) \cap (X < 3))}{P(X < 3)} \times 2 =$$

$$= \frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=2)} \times 1 + \frac{P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)} \times 2 = \frac{0.1}{0.1+0.3} \times 1 + \frac{0.3}{0.1+0.3} \times 2 = 1.75$$

$$E(X^2|X < 3) = \frac{0.1}{0.1+0.3} \times 1^2 + \frac{0.3}{0.1+0.3} \times 2^2 = 3.25$$

$$\text{Var}(X|X < 3) = E(X^2|X < 3) - E(X|X < 3)^2 = 3.25 - 1.75^2 = 0.1875$$

Условное математическое ожидание

Свойства условного математического ожидания

- **Условное математическое ожидание функции** $g(X)$ от дискретной случайной величины X считается как:

$$E(g(X)|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times g(x), \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

Условное математическое ожидание

Свойства условного математического ожидания

- **Условное математическое ожидание функции** $g(X)$ от дискретной случайной величины X считается как:

$$E(g(X)|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times g(x), \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

- Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий A_1, A_2, \dots со множеством индексов I , тогда:

$$E(X) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times E(X|A_i)$$

Условное математическое ожидание

Свойства условного математического ожидания

- Условное математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X считается как:

$$E(g(X)|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times g(x), \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

- Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий A_1, A_2, \dots со множеством индексов I , тогда:

$$E(X) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times E(X|A_i)$$

Пример:

- Антон учил билеты к экзамену. Первые три билета он выучил отлично, поэтому, если ему попадется один из них (событие A_1), то математическое ожидание его оценки составит 8. Следующие пять билетов он учил менее внимательно, поэтому достав один из них (событие A_2) он с равной вероятностью получит одну из оценок в диапазоне от 2 до 8 включительно. Наконец, последние два билета Антон не выучил, поэтому сдаст экзамен на 0, если ему попадется один из них (событие A_3). Каждый из билетов может попасться Антону с равной вероятностью. Найдите математическое ожидание его оценки (случайная величина X).

Условное математическое ожидание

Свойства условного математического ожидания

- Условное математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X считается как:

$$E(g(X)|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times g(x), \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

- Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий A_1, A_2, \dots со множеством индексов I , тогда:

$$E(X) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times E(X|A_i)$$

Пример:

- Антон учил билеты к экзамену. Первые три билета он выучил отлично, поэтому, если ему попадется один из них (событие A_1), то математическое ожидание его оценки составит 8. Следующие пять билетов он учил менее внимательно, поэтому достав один из них (событие A_2) он с равной вероятностью получит одну из оценок в диапазоне от 2 до 8 включительно. Наконец, последние два билета Антон не выучил, поэтому сдаст экзамен на 0, если ему попадется один из них (событие A_3). Каждый из билетов может попасться Антону с равной вероятностью. Найдите математическое ожидание его оценки (случайная величина X).

Решение:

$$E(X|A_2) = \frac{1}{7} (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 5$$

Условное математическое ожидание

Свойства условного математического ожидания

- Условное математическое ожидание функции $g(X)$ от дискретной случайной величины X считается как:

$$E(g(X)|A) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x|A) \times g(x), \text{ где } A \in \mathcal{F}$$

- Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий A_1, A_2, \dots со множеством индексов I , тогда:

$$E(X) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times E(X|A_i)$$

Пример:

- Антон учил билеты к экзамену. Первые три билета он выучил отлично, поэтому, если ему попадется один из них (событие A_1), то математическое ожидание его оценки составит 8. Следующие пять билетов он учил менее внимательно, поэтому достав один из них (событие A_2) он с равной вероятностью получит одну из оценок в диапазоне от 2 до 8 включительно. Наконец, последние два билета Антон не выучил, поэтому сдаст экзамен на 0, если ему попадется один из них (событие A_3). Каждый из билетов может попасться Антону с равной вероятностью. Найдите математическое ожидание его оценки (случайная величина X).

Решение:

$$E(X|A_2) = \frac{1}{7} (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 5$$

Воспользуемся тем, что A_1, A_2, A_3 являются полной группой попарно несовместных событий:

$$E(X) = P(A_1)E(X|A_1) + P(A_2)E(X|A_2) + P(A_3)E(X|A_3) = \frac{3}{10} \times 8 + \frac{5}{10} \times 5 + \frac{2}{10} \times 0 = 4.9$$

Условное математическое ожидание

Метод первого шага

Продemonстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет на землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдём математическое ожидание X .

Условное математическое ожидание

Метод первого шага

Продemonстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет на землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдём математическое ожидание X .
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберём альтернативный способ решения.

Условное математическое ожидание

Метод первого шага

Продemonстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет на землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдём математическое ожидание X .
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберем альтернативный способ решения.
- Рассмотрим событие A – мяч упал после первого же удара и событие \bar{A} – мяч не упал после первого удара.

Условное математическое ожидание

Метод первого шага

Продemonстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет на землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдём математическое ожидание X .
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберем альтернативный способ решения.
- Рассмотрим событие A – мяч упал после первого же удара и событие \bar{A} – мяч не упал после первого удара.
- $E(X|\bar{A}) = E(X) + 1$, поскольку если мяч не упал после первого удара, то значит вы уже один раз его ударили и набьете его в среднем столько же раз, сколько набили бы до этого.

Условное математическое ожидание

Метод первого шага

Продemonстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет на землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдем математическое ожидание X .
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберем альтернативный способ решения.
- Рассмотрим событие A – мяч упал после первого же удара и событие \bar{A} – мяч не упал после первого удара.
- $E(X|\bar{A}) = E(X) + 1$, поскольку если мяч не упал после первого удара, то значит вы уже один раз его ударили и набьете его в среднем столько же раз, сколько набили бы до этого.
- $E(X|A) = 1$, поскольку в таком случае вы всего раз ударили мяч и он сразу же упал на землю

Условное математическое ожидание

Метод первого шага

Продemonстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет на землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдём математическое ожидание X .
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберем альтернативный способ решения.
- Рассмотрим событие A – мяч упал после первого же удара и событие \bar{A} – мяч не упал после первого удара.
- $E(X|\bar{A}) = E(X) + 1$, поскольку если мяч не упал после первого удара, то значит вы уже один раз его ударили и набьете его в среднем столько же раз, сколько набили бы до этого.
- $E(X|A) = 1$, поскольку в таком случае вы всего раз ударили мяч и он сразу же упал на землю
- Пользуясь полученными результатами и тем, что события A и \bar{A} несовместные и формируют полную группу, зададим рекуррентное соотношение:

$$E(X) = E(X|A) \times P(A) + E(X|\bar{A}) \times P(\bar{A}) = 1 \times \frac{1}{5} + (E(X) + 1) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

Условное математическое ожидание

Метод первого шага

Продemonстрируем применение **метода первого шага** на примере:

- Вы набиваете ногой мяч до тех пор, пока он не упадет на землю. После каждого удара, с вероятностью 0.2, мяч падает на землю. Рассмотрим случайную величину X – число раз, которое вы ударили по мячу, прежде, чем он упал на землю. Найдем математическое ожидание X .
- Искать $E(X)$ по определению весьма затруднительно, поскольку придется посчитать сумму достаточно сложного ряда. Поэтому разберем альтернативный способ решения.
- Рассмотрим событие A – мяч упал после первого же удара и событие \bar{A} – мяч не упал после первого удара.
- $E(X|\bar{A}) = E(X) + 1$, поскольку если мяч не упал после первого удара, то значит вы уже один раз его ударили и набьете его в среднем столько же раз, сколько набили бы до этого.
- $E(X|A) = 1$, поскольку в таком случае вы всего раз ударили мяч и он сразу же упал на землю
- Пользуясь полученными результатами и тем, что события A и \bar{A} несовместные и формируют полную группу, зададим рекуррентное соотношение:

$$E(X) = E(X|A) \times P(A) + E(X|\bar{A}) \times P(\bar{A}) = 1 \times \frac{1}{5} + (E(X) + 1) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

- Решая соответствующее равенство для $E(X)$ получаем $E(X) = 5$.

Дополнительные материалы

Производящая функция моментов

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

Дополнительные материалы

Производящая функция моментов

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

Дополнительные материалы

Производящая функция моментов

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots$$

Дополнительные материалы

Производящая функция моментов

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots$$
$$E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2 E(X^2)}{2!} + \frac{t^3 E(X^3)}{3!} + \dots$$

Дополнительные материалы

Производящая функция моментов

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots$$
$$E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2 E(X^2)}{2!} + \frac{t^3 E(X^3)}{3!} + \dots$$

- Следовательно, дифференцируя производящую функцию моментов можно получать начальные моменты:

$$E(X^k) = \frac{d^k M_X(t)}{d^k t} \Big|_{t=0}, \text{ где } k \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

Дополнительные материалы

Производящая функция моментов

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots$$
$$E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2 E(X^2)}{2!} + \frac{t^3 E(X^3)}{3!} + \dots$$

- Следовательно, дифференцируя производящую функцию моментов можно получать начальные моменты:

$$E(X^k) = \frac{d^k M_X(t)}{d^k t} \Big|_{t=0}, \text{ где } k \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

- Например, для случайной величины X , такой, что $P(X = 1) = P(X = 2) = 0.5$, производящая функция моментов $M_X(t)$ и начальные моменты $E(X^k)$ будут иметь вид:

Дополнительные материалы

Производящая функция моментов

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots$$
$$E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2 E(X^2)}{2!} + \frac{t^3 E(X^3)}{3!} + \dots$$

- Следовательно, дифференцируя производящую функцию моментов можно получать начальные моменты:

$$E(X^k) = \frac{d^k M_X(t)}{d^k t} \Big|_{t=0}, \text{ где } k \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

- Например, для случайной величины X , такой, что $P(X = 1) = P(X = 2) = 0.5$, производящая функция моментов $M_X(t)$ и начальные моменты $E(X^k)$ будут иметь вид:

$$M_X(t) = 0.5 \times e^{t \times 1} + 0.5 \times e^{t \times 2} = 0.5 \times (e^t + e^{2t})$$

Дополнительные материалы

Производящая функция моментов

Производящей функцией моментов дискретной случайной величины X называется следующая функция:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x) \times e^{tx}, \text{ где } t \in R$$

- Раскладывая экспоненту в точке ноль через ряд Тейлора получаем:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots$$
$$E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2 E(X^2)}{2!} + \frac{t^3 E(X^3)}{3!} + \dots$$

- Следовательно, дифференцируя производящую функцию моментов можно получать начальные моменты:

$$E(X^k) = \frac{d^k M_X(t)}{d^k t} \Big|_{t=0}, \text{ где } k \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

- Например, для случайной величины X , такой, что $P(X = 1) = P(X = 2) = 0.5$, производящая функция моментов $M_X(t)$ и начальные моменты $E(X^k)$ будут иметь вид:

$$M_X(t) = 0.5 \times e^{t \times 1} + 0.5 \times e^{t \times 2} = 0.5 \times (e^t + e^{2t})$$

$$E(X^k) = d^k (0.5 \times (e^t + e^{2t})) / dt^k \Big|_{t=0} = 0.5 \times (1 + 2^k)$$