Информация о минимуме

1. Минимум включает базовые задачи по теории вероятностей и статистике, для решения которых достаточно применить некоторый типичный алгоритм.

2. Каждая контрольная работа и экзамен состоят из основной части и минимума. В минимум входят задачи, схожие с теми, что представлены далее. За полностью верное решение этих задач можно получить до 5 баллов из 10.

3. Задачи решаются в тестовой форме: необходимо выбрать единственный верный вариант из нескольких доступных.

4. Минимум включает как простые задачи, так и задачи повышенной сложности. За правильное решение всех простых задач выставляется 4 балла, а за решение сложной – 1 балл.

5. Задачи повышенной сложности отмечаются пометкой (**доп.**) в конце условия. Эти задачи в контрольной работе могут в заметно большей степени отличаться от своих аналогов в данном файле.

6. Оценка за минимум не нормируется.

Минимум к первой контрольной работе

1. Имеются события A, B и C.

   а) Найдите $P(A)$, если $P(\overline{A}) = 0.2$.

   б) Найдите $P(A \cap B)$, если $P(A|B) = 0.5$ и $P(B) = 0.6$.

   в) Найдите $P(A|B)$, если $P(A \cap B) = 0.3$ и $P(B) = 0.5$.

   г) Найдите $P(A \cup B)$, если $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ и $P(B|A) = 0.2$.

   д) Найдите $P(A - B)$, если $P(B) = 0.2$ и $P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.1$

   е) Найдите $P(\overline{A \cup B})$, если $P(B) = 0.3$ и $P(A|\overline{B}) = 0.8$.

   ж) Найдите $P(A \cap B \cap C)$, если $P(C) = 0.5$, $P(\overline{A}|C) = 0.4$ и $P(B|A \cap C) = 0.8$.

   з) Найдите $P(A \cup B \cup C)$, если $P(C) = 0.6$, $P(A|\overline{C}) = 0.2$ и $P(B|\overline{A \cup C}) = 0.8$. **(доп.)**

   и) Найдите $P(A|C \cap B)$ если $P(A \cap B \cap C) = 0.125$, $P(B) = 0.5$ и $P(C|B) = 0.5$.

   к) Найдите $P\left((A \cup B) \cap C\right)$, если $P(A \cap C) = 0.25$, $P(B) = 0.5$, $P(C|B) = 0.5$ и $P(A|B \cap C) = 0.5$. **(доп.)**

   л) Найдите $P\left((A \cap B) \cup C\right)$, если $P(A|B \cup C) = 0.5$, $P(C|B \cup C) = 0.5$, $P(A \cap C|B \cup C) = 0.3$ и $P(B \cup C) = 0.75$. **(доп.)**

Решение:

а) Воспользуемся формулой вероятности обратного события:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.2 = 0.8$$

б) По формуле вероятности пересечения событий получаем:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$$

в) По формуле условной вероятности получаем:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

г) Применяя формулу объединения событий получаем:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.3 - P(B|A)P(A) = \\ = 0.5 + 0.3 - 0.2 \times 0.5 = 0.7$$

д) Событие $A - B$ происходит тогда и только тогда, когда наступает событие A и не наступает событие B, а значит:

$$P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B})P(A|\overline{B}) = (1 - P(B))\left(1 - P(\overline{A}|\overline{B})\right) = \\ = (1 - 0.2) \times (1 - 0.1) = 0.72$$

е) Применяя формулу Моргана и формулу пересечения событий получаем:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B})P(\overline{A}|\overline{B}) = (1 - P(B))\left(1 - P(A|\overline{B})\right) = \\ = (1 - 0.3)(1 - 0.8) = 0.14$$

ж) По формуле пересечения событий получаем:

$$P(A\cap B\cap C)=P(C)P(A|C)P(B|A\cap C)=P(C)\left(1-P(\overline{A}|C)\right)P(B|A\cap C)=$$
$$=0.5\times(1-0.4)\times 0.8=0.24$$

з) Используя формулу Моргана и формулу обратного события получаем:

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=$$
$$=1-P(\overline{C})P(\overline{A}|\overline{C})P(\overline{B}|\overline{A}\cap\overline{C})=1-(1-P(C))\left(1-P(A|\overline{C})\right)\left(1-P(B|\overline{A\cup C})\right)=$$
$$=1-(1-0.6)(1-0.2)(1-0.8)=0.936$$

и) По формуле условной вероятности получаем:

$$P(A|C\cap B)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C\cap B)}=\frac{0.125}{P(C|B)P(B)}=\frac{0.125}{0.5\times 0.5}=0.5$$

к) Пользуясь свойством дистрибутивности получаем:

$$P\left((A\cup B)\cap C\right)=P((A\cap C)\cup(B\cap C))=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P((A\cap C)\cap(B\cap C))=$$
$$=P(A\cap C)+P(B|C)P(C)-P(A\cap B\cap C)=$$
$$=P(A\cap C)+P(B|C)P(C)-P(A|B\cap C)P(B|C)P(C)=$$
$$=0.25+0.5\times 0.5-0.5\times 0.5\times 0.5=0.375$$

л) Применяя свойство дистрибутивности имеем:

$$P\left((A\cap B)\cup C\right)=P\left((A\cup C)\cap(B\cup C)\right)=P(A\cup C|B\cup C)P(B\cup C)=$$
$$=\left(P(A|B\cup C)+P(C|B\cup C)-P(A\cap C|B\cup C)\right)P(B\cup C)=$$
$$=(0.5+0.5-0.3)\times 0.75=0.525$$

2. Имеется пространство элементарных событий $\Omega=\{\omega_1,...,\omega_5\}$ и события $A_1=\{\omega_1,\omega_2\}$, $A_2=\{\omega_2,\omega_3\}$, $A_3=\{\omega_3,\omega_4\}$, $A_4=\{\omega_5\}$ и $A_5=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$. Укажите, какие из этих событий составляют полную группу попарно несовместных событий. Достаточно найти одну любую такую группу.

   Решение: Поскольку события A_1, A_3 и A_4 не имеют общих элементов, а объединение этих событий совпадает с пространством элементарных событий, то они составляют полную группу попарно несовместных событий. Действительно, эти события попарно несовместные, поскольку:

$$A_1\cap A_3=\{\omega_1,\omega_2\}\cap\{\omega_3,\omega_4\}=\emptyset$$
$$A_1\cap A_4=\{\omega_1,\omega_2\}\cap\{\omega_5\}=\emptyset$$
$$A_3\cap A_4=\{\omega_3,\omega_4\}\cap\{\omega_5\}=\emptyset$$

   Кроме того, эти события составляют полную группу, потому что:

$$A_1\cup A_3\cup A_4=\{\omega_1,\omega_2\}\cup\{\omega_3,\omega_4\}\cup\{\omega_5\}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}=\Omega$$

3. Имеются три урны и обычный шестигранный кубик. В первой урне лежат 8 черных и 2 белых шариков. Во второй урне находятся 6 белых и 14 черных шариков. В третью урну положили 24 белых и 6 черных шариков. Если на кубике выпадает четное число, то Лаврентий наугад достает шарик из первой урны. Если выпадает нечетное число меньше 5, то Лаврентий наугад берет шарик из второй урны. В противном случае Лаврентий достает наугад шарик из третьей урны. Найдите вероятность того, что:

а) Лаврентий достанет белый шарик.

б) Была выбрана третья урна, если Лаврентий достал белый шарик.

в) На кубике выпало менее 3-х очков, если Лаврентий достал белый шарик. (**доп.**)

Решение:

а) Обозначим через U_i событие, при котором Лаврентий берет шарик из i-й урны, где $i \in \{1, 2, 3\}$. Рассчитаем вероятности данных событий:

$$P(U_1) = P(\text{на кубике выпало 2, 4 или 6 очков}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(U_2) = P(\text{на кубике выпало 1 или 3 очка}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$P(U_3) = P(\text{на кубике выпало 5 очков}) = \frac{1}{6}$$

Обратим внимание, что события U_1, U_2 и U_3 составляют полную группу попарно несовместных событий. При этом вероятности вида $P(W|U_i)$ считаются достаточно просто. Например, вероятность события $W|U_2$ это вероятность достать белый шарик из второй урны и, поскольку во второй урне из $6 + 14 = 20$ шариков 6 являются белыми, то вероятность этого события составит $\frac{6}{20}$. Следовательно, для нахождения вероятности события W, в соответствии с которым Лаврентий достает белый шарик, удобно воспользоваться формулой полной вероятности:

$$P(W) = P(W|U_1)P(U_1) + P(W|U_2)P(U_2) + P(W|U_3)P(U_3) =$$
$$\frac{2}{2+8} \times \frac{1}{2} + \frac{6}{6+14} \times \frac{1}{3} + \frac{24}{24+6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

б) Воспользуемся формулой условной вероятности:

$$P(U_3|W) = \frac{P(W|U_3)P(U_3)}{P(W)} = \frac{\frac{24}{24+6} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

в) Обозначим через G событие, при котором на кубике выпало менее 3-х очков. Найдем условные вероятности урн:

$$P(U_1|G) = P(\text{на кубике выпало 2, 4 или 6 очков}|\text{выпало менее 3-х очков}) =$$
$$= P(\text{выпало 2 очка}|\text{выпало 1 или 2 очка}) = \frac{1}{2}$$
$$P(U_2|G) = P(\text{на кубике выпало 1 или 3 очка}|\text{выпало менее 3-х очков}) =$$
$$= P(\text{выпало 1 очко}|\text{выпало 1 или 2 очка}) = \frac{1}{2}$$
$$P(U_3|G) = P(\text{на кубике выпало 5 очков}|\text{выпало менее 3-х очков}) =$$
$$= P(\emptyset|\text{выпало 1 или 2 очка}) = 0$$

Применяя формулу полной вероятности рассчитаем условную вероятность достать белый шарик. При этом учтем, что при условии наступления события G событие U_3 является невозможным:

$$P(W|G) = P(W|U_1 \cap G)P(U_1|G) + P(W|U_2 \cap G)P(U_2|G) =$$
$$= P(W|U_1)P(U_1|G) + P(W|U_2)P(U_2|G) =$$
$$\frac{2}{2+8} \times \frac{1}{2} + \frac{6}{6+14} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

С помощью формулы условной вероятности получаем ответ:

$$P(G|W) = \frac{P(W|G)P(G)}{P(W)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{2}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

4. Имеется колода из 36-ти карт 4-х мастей и 9-ти рангов (от 6-ки до туза). Лаврентий наугад достает 3 карты. Найдите вероятность того, что Лаврентий достанет:

   а) Три туза
   б) Ни одного туза
   в) Хотя бы одного туза
   г) Два туза и одну даму
   д) Второй картой туза, чья масть отличается от масти первой карты.
   е) Туза первой картой, если известно[1], что второй картой он достанет Туза
   ж) Карты, не совпадающие ни по рангу, ни по масти. **(доп.)**

   Решение:

   а) Обозначим через T_i событие, при котором при i-й попытке, где $i \in \{1, 2, 3\}$, Лаврентий достал туза. Используя формулу для вероятности пересечения событий получаем:

   $$P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1)P(T_2|T_1)P(T_3|T_2 \cap T_1) = \frac{4}{36} \times \frac{4-1}{36-1} \times \frac{4-2}{36-2} = \frac{1}{1785} \approx 0.00056$$

   б) Воспользуемся формулой пересечения событий:

   $$P(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \cap \overline{T}_3) = P(\overline{T}_1)P(\overline{T}_2|\overline{T}_1)P(\overline{T}_3|\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2) =$$
   $$= \frac{36-4}{36} \times \frac{(36-4)-1}{36-1} \times \frac{(36-4)-2}{36-2} = \frac{248}{357} \approx 0.695$$

   в) Обратим внимание, что событие, при котором выпадает хотя бы один туз, является обратным событию, при котором не выпадает ни одного туза, откуда:

   $$P(\overline{T_1 \cap T_2 \cap T_3}) = 1 - P(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \cap \overline{T}_3) = 1 - \frac{248}{357} = \frac{109}{357} \approx 0.305$$

   г) Обозначим через D_i событие, при котором при i-й попытке, где $i \in \{1, 2, 3\}$, Лаврентий достал даму. Искомое событие можно представить как объединение трех несовместных событий, в каждом из которых Лаврентий достает двух тузов, а дама оказывается первой,

[1] Путем гадания на тех же картах.

второй или третьей из выбранных карт соответственно. По аналогии введем событие T_i^*, при котором достается туз с мастью, ранее не встречавшейся у других выбранных карт.

$$\begin{gathered}P(D_1 \cap T_2 \cap T_3) + P(T_1 \cap D_2 \cap T_3) + P(T_1 \cap T_2 \cap D_3) = \\ = P(D_1)P(T_2|D_1)P(T_3|D_1 \cap T_2) + P(T_1)P(D_2|T_1)P(T_3|T_1 \cap D_2) + \\ + P(T_1)P(T_2|T_1)P(D_3|T_1 \cap T_2) = \\ = \frac{4}{36}\frac{4}{36-1}\frac{4-1}{36-2} + \frac{4}{36}\frac{4}{36-1}\frac{4-1}{36-2} + \frac{4}{36}\frac{4-1}{36-1}\frac{4}{36-2} = \frac{2}{595} \approx 0.00336\end{gathered}$$

д) Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\begin{gathered}P(T_2^*) = P(T_2^*|T_1)P(T_1) + P(T_2^*|\overline{T}_1)\left(1 - P(T_1)\right) = \\ = \frac{4-1}{36-1}\frac{4}{36} + \frac{3}{36-1}\left(1 - \frac{4}{36}\right) = \frac{3}{35} \approx 0.0857\end{gathered}$$

Отметим, что в числителе вероятности $P(T_2^*|\overline{T}_1)$ стоит 3 потому, что лишь у трех из четырех тузов масть не будет совпадать с мастью вытянутой карты.

е) Применим формулу полной вероятности:

$$P(T_2) = P(T_2|T_1)P(T_1) + P(T_2|\overline{T}_1)P(\overline{T}_1) = \frac{3}{35}\frac{4}{36} + \frac{4}{35}\left(1 - \frac{4}{36}\right) = \frac{4}{36}$$

По формуле условной вероятности получаем:

$$P(T_1|T_2) = \frac{P(T_2|T_1)P(T_1)}{P(T_2)} = \frac{\frac{4-1}{35}\frac{4}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{3}{35} \approx 0.0857$$

ж) Первая карта может быть любой, поэтому достаточно найти вероятность события $R_2 \cap R_3$, где R_i это событие, при котором i-я из выбранных карт не совпадает с предыдущими ни по рангу, ни по масти. Вторая карта не должна совпадать по рангу с первой, на что приходится $(36-4)$ вариантов. При этом из этих вариантов подходят лишь $3/4$, которые имеют другую масть. Размышляя по аналогии над вариантами, подходящими для третьей карты, в итоге получаем:

$$P(R_2 \cap R_3) = P(R_2)P(R_3|R_2) = \frac{(36-4)*(3/4)}{35} \times \frac{(36-8)*(2/4)}{34} = \frac{24}{85} \approx 0.28$$

5. События A, B и C составляют полную группу попарно несовместных событий. Найдите $P(C)$, если известно, что:

   а) $P(A \cup B) = P(C)$

   б) $P(A \cap B) + 0.2 = P(C)$

   в) $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(C \cup B)$ и $P(B) = 0.5P(C \cup B)$ **(доп.)**

Решение:

а) Поскольку события A, B и C составляют полную группу, то $P(A \cup B \cup C) = 1$. Из несовместности этих событий следует, что $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ и $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Отсюда возникает система, решая которую для $P(C)$ получаем ответ:

$$\begin{cases} \underbrace{P(A)+P(B)}_{\text{заменим на } P(C)} + P(C) = 1 \\ \underbrace{P(A)+P(B) = P(C)}_{\text{подставляем в первое равенство}} \end{cases} \implies P(C)+P(C) = 1 \implies P(C) = 0.5$$

б) В силу несовместности событий A и B получаем $P(A \cap B) = 0$, а значит $P(C) = 0.2$.

в) Пользуясь несовместностью данных событий из первого равенства получаем:

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(C \cup B) \implies$$
$$\implies P(A) + P(B) + 0 = P(C) + P(B) \implies P(A) = P(C)$$

По аналогии преобразуем и второе равенство:

$$P(B) = 0.5P(C \cup B) \implies P(B) = 0.5P(C) + 0.5P(B) \implies P(C) = P(B)$$

В результате $P(A) = P(B) = P(C)$ и, поскольку эти события формируют полную группу, то:

$$P(A)+P(B)+P(C) = P(C)+P(C)+P(C) = 1 \implies P(C) = \frac{1}{3}$$

6. Лаврентий кинул два кубика с 6-ю равновероятно выпадающими гранями. Укажите, являются ли независимыми в совокупности следующие события:

а) Q_1 – на первом кубике выпало нечетное число очков.
Q_2 – на первом кубике выпало более 1-го очка.

б) W_1 – на первом кубике выпало нечетное число очков.
W_2 – выпало больше 2-х очков.
W_3 – выпало менее 5-ти очков.

в) C_1 – на первом кубике выпало четное число.
C_2 – на втором кубике выпало четное число.

г) C_1 и C_2, при условии, что наступило событие A – четности очков на кубиках совпали (на обоих выпало четное или на обоих выпало нечетное число очков). **(доп.)**

д) C_1 и C_2, при условии, что наступило событие B – на первом кубике выпало больше очков, чем на втором. **(доп.)**

Решение:

а) Данные события не являются независимыми, поскольку:

$$P(Q_1) = P(\{1,3,5\}) = \frac{3}{6} \qquad P(Q_2) = P(\{2,3,4,5,6\}) = \frac{5}{6}$$
$$P(Q_1)P(Q_2) = \frac{3}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{36} \approx 0.42$$
$$P(Q_1 \cap Q_2) = P(\{1,3,5\} \cap \{2,3,4,5,6\}) = P(\{3,5\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$
$$P(Q_1)P(Q_2) \neq P(Q_1 \cap Q_2)$$

б) Рассматриваемые события не являются независимыми в совокупности, поскольку нарушается независимость между W_2 и W_3:

$$P(W_1) = \frac{1}{2} \qquad P(W_2) = \frac{2}{3} \qquad P(W_3) = \frac{2}{3}$$
$$P(W_2 \cap W_3) = P(\{3, 4\}) = \frac{1}{3} \neq P(W_2)P(W_3) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

в) Количество способов, которыми могут выпасть два кубика, равняется $6 \times 6 = 36$. Из них $3 \times 3 = 9$ соответствуют событию, при котором на обоих кубиках выпадают четные числа. В результате получаем:

$$P(C_1 \cap C_2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Рассматриваемые события являются независимыми, поскольку:

$$P(C_1)P(C_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(C_1 \cap C_2)$$

г) Событию A соответствует $36/2 = 18$ возможных равновероятных элементарных исходов, поскольку в половине случаев четности кубиков совпадают, а в половине – нет. Из них событию $C_1 \cap C_2$ удовлетворяет также половина, то есть $18/2 = 9$, а значит:

$$P(C_1 \cap C_2 | A) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Покажем, что в данном случае события C_1 и C_2 не являются условно независимыми. Для этого обратим внимание, что события $C_1|A$ и $C_2|A$ совпадают с событием $C_1 \cap C_2|A$, поскольку при наступлении события A событие C_1 подразумевает наступление события C_2 и наоборот. Поскольку если выпавшие на кубиках числа совпадают, то из честности одного из выпавших чисел будет следовать четность другого, а значит:

$$P(C_1|A) = P(C_2|A) = P(C_1 \cap C_2|A) = \frac{1}{2}$$

Пользуясь найденными вероятностями покажем нарушение независимости:

$$P(C_1|A)P(C_2|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq P(C_1 \cap C_2|A)$$

д) Сперва найдем вероятность события B. Существуют 6 способов, при которых на обоих кубиках выпадает одинаковое количество очков. Из оставшихся $36 - 6 = 30$ способов подходит лишь половина, то есть $30/2 = 15$, при которых на первом кубике выпадает больше очков, чем на втором, а значит $P(B) = \frac{15}{36}$. Если наступает событие B, то событию $C_1 \cap C_2$ удовлетворяют лишь элементарные события $(6, 2)$, $(4, 2)$ и $(6, 4)$, а значит, пользуясь равновероятностью элементарных исходов, соответствующих событию B, получаем:

$$P(C_1 \cap C_2|B) = \frac{3}{15} = 0.2$$

Рассматриваемые события не являются условно независимыми, поскольку:

$$P(C_1|B) = \frac{1+3+5}{15} = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad P(C_2|B) = \frac{4+2}{15} = \frac{2}{5} = 0.4$$
$$P(C_1|B)P(C_2|B) = 0.6 \times 0.4 = 0.24 \neq P(C_1 \cap C_2|B)$$

7. Распределение случайной величины X задано таблицей:

x	0	-2	2	1	3
$P(X=x)$	0.2	c	0.3	0.4	0

Найдите:

а) $P(X=2)$.
б) Константу c.
в) Носитель X, то есть $\text{supp}(X)$.
г) $P(X>0)$.
д) $P(-1<X\leq 1)$.
е) $E(X)$.
ж) $E(2X-5)$.
з) $E(X^2)$.
и) $Var(X)$.
к) $Var(2X-5)$.
л) $P(X<1.5|X>0)$
м) $E(X|X>0)$.
н) $Var(X|X>0)$.
о) $P(X=X^2)$. **(доп.)**
п) $Var(X^2)$. **(доп.)**
р) Функцию распределения $F_X(x)$
с) Функцию распределения $F_{X|X>0}(x)$

Решение:

а) Из таблицы известно, что $P(X=2)=0.3$.
б) Поскольку вероятности в сумме должны давать единицу, то:

$$P(X=0)+P(X=-2)+P(X=2)+P(X=1)+P(X=3)=$$
$$=0.2+c+0.3+0.4+0=1$$

Решая соответствующее равенство для c получаем, что $c=0.1$.

в) В носитель дискретной случайной величины входят лишь те значения, которые случайная величина принимает с ненулевой вероятностью, то есть:

$$\text{supp}(X)=\{0,-2,1,2\}$$

г) Рассчитаем соответствующую вероятность:

$$P(X>0)=P(X=1)+P(X=2)=0.4+0.3=0.7$$

д) По аналогии с предыдущим пунктом получаем:

$$P(-1<X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=0.2+0.4=0.6$$

е) Рассчитаем математическое ожидание:

$$E(X) = 0 \times 0.2 + (-2) \times 0.1 + 2 \times 0.3 + 1 \times 0.4 = 0.8$$

ж) Пользуясь свойстом линейности математического ожидания получаем:

$$E(2X - 5) = 2E(X) - 5 = 2 \times 0.8 - 5 = -3.4$$

з) По свойству математического ожидания функции от случайной величины имеем:

$$E(X^2) = 0^2 \times 0.2 + (-2)^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.3 + 1^2 \times 0.4 = 2$$

и) Найдем дисперсию:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - 0.8^2 = 1.36$$

к) По свойствам дисперсии имеем:

$$Var(2X - 5) = 4Var(X) = 4 \times 1.36 = 5.44$$

л) По формуле условной вероятности получаем:

$$P(X < 1.5|X > 0) = \frac{P(0 < X < 1.5)}{P(X > 0)} =$$
$$= \frac{P(X = 1)}{P(X = 1) + P(X = 2)} = \frac{0.4}{0.4 + 0.3} = \frac{4}{7}$$

м) Рассчитаем условные вероятности:

$$P(X = -2|X > 0) = 0$$
$$P(X = 0|X > 0) = 0$$
$$P(X = 1|X > 0) = \frac{P(X = 1)}{P(X = 1) + P(X = 2)} = \frac{0.4}{0.3 + 0.4} = \frac{4}{7}$$
$$P(X = 2|X > 0) = \frac{P(X = 2)}{P(X = 1) + P(X = 2)} = \frac{0.3}{0.3 + 0.4} = \frac{3}{7}$$

Для удобства построим таблицу условного распределения:

x	2	1
$P(X = x\|X > 0)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

Пользуясь найденными условными вероятностями рассчитаем условное математическое ожидание:

$$E(X|X > 0) = \frac{3}{7} \times 2 + \frac{4}{7} \times 1 = \frac{10}{7} \approx 1.43$$

н) Пользуясь полученной ранее таблицей получаем:

$$E(X^2|X > 0) = \frac{3}{7} \times 2^2 + \frac{4}{7} \times 1^2 = \frac{16}{7} \approx 2.29$$
$$Var(X|X > 0) = E(X^2|X > 0) - E(X|X > 0)^2 \approx \frac{16}{7} - \left(\frac{10}{7}\right)^2 = \frac{12}{49} \approx 0.245$$

о) Событию $X = X^2$ удовлетворяют лишь значения 0 и 1, откуда:

$$P(X = X^2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.2 + 0.4 = 0.6$$

п) Найдем соответствующую дисперсию:

$$Var(X^2) = E((X^2)^2) - E(X^2)^2 = E(X^4) - E(X^2)^2 =$$
$$= \left[0^4 \times 0.2 + (-2)^4 \times 0.1 + 2^4 \times 0.3 + 1^4 \times 0.4\right] - 2^2 = 2.8$$

р) Найдем функцию распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < -2 \\ 0.1, \text{ если } -2 \leq x < 0 \\ 0.1 + 0.2, \text{ если } 0 \leq x < 1 \\ 0.1 + 0.2 + 0.4, \text{ если } 1 \leq x < 2 \\ 0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.3, \text{ если } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{ если } x < -2 \\ 0.1, \text{ если } -2 \leq x < 0 \\ 0.3, \text{ если } 0 \leq x < 1 \\ 0.7, \text{ если } 1 \leq x < 2 \\ 1, \text{ если } x \geq 2 \end{cases}$$

с) Воспользуемся найденными ранее условными вероятностями:

$$F_{X|X>0} = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ P(X = 1|X > 0), \text{ если } 1 \leq x < 2 \\ P(X = 1|X > 0) + P(X = 2|X > 0), \text{ если } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ \frac{4}{7}, \text{ если } 1 \leq x < 2 \\ 1, \text{ если } x \geq 2 \end{cases}$$

8. Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром p и про нее известно, что $P(X = 1) = 4P(X = 0)$. Найдите:

а) Параметр p.

б) $\text{supp}(X)$.

в) $E(5X + 1)$.

г) $Var(5(X + 1))$.

д) $Var(X^5)$.

е) $P((X + 1)^{100} = 1)$.

ж) $E((X + 1)^3)$.

з) Функцию распределения $F_X(x)$.

Решение:

а) Найдем параметр распределения:

$$P(X = 1) + P(X = 0) = 1 \implies 4P(X = 0) + P(X = 0) = 1 \implies$$
$$\implies P(X = 0) = 0.2 \implies 1 - p = 0.2 \implies p = 0.8$$

б) Поскольку при $p \in (0, 1)$ Бернуллиевские случайные величины с ненулевой вероятностью принимают значения 0 и 1, то $\text{supp}(X) = \{0, 1\}$

в) Пользуясь свойствами математического ожидания получаем:

$$E(X) = 0.8 \implies E(5X + 1) = 5 \times 0.8 + 1 = 5$$

г) Применяя свойства дисперсии имеем:

$$Var(X) = 0.8 \times (1 - 0.8) = 0.16 \implies$$
$$\implies Var(5(X+1)) = Var(5X+5) = 25Var(X) = 25 \times 0.16 = 4$$

д) Обратим внимание, что $P(X^k = 0) = P(X = 0)$ и $P(X^k = 1) = P(X = 1)$ для любого $k > 0$. Пользуясь тем, что возведение в положительную не меняет распределения Бернуллиевской случайной величины, получаем:

$$Var(X^5) = Var(X) = 0.16$$

е) Рассчитаем соответствующую вероятность:

$$P((X+1)^{100} = 1) = P(X = 0) = 0.2$$

ж) По формуле математического ожидания функции от случайной величины:

$$E((X+1)^3) = 0.2 \times (0+1)^3 + 0.8 \times (1+1)^3 = 6.6$$

з) Запишем функцию распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ P(X=0), \text{ если } 0 \leq x < 1 \\ P(X=0) + P(X=1), \text{ если } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ 0.2, \text{ если } 0 \leq x < 1 \\ 1, \text{ если } x \geq 1 \end{cases}$$

9. Случайная величина X имеет Биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ и $p = 0.2$. Найдите:

а) $\text{supp}(X)$.
б) $E(2 + 3X)$.
в) $Var(2 + 3X)$.
г) $P(X = 2)$.
д) $P(X > 1)$.
е) $P(X < 3.5 | X > 1)$.
ж) Функцию распределения $F_X(x)$.

Решение:

а) $\text{supp}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

б) По свойствам математического ожидания получаем:

$$E(X) = 5 \times 0.2 = 1 \implies E(2+3X) = 2 + 3E(X) = 2 + 3 \times 1 = 5$$

в) По свойствам дисперсии имеем:

$$Var(X) = 5 \times 0.2(1 - 0.2) = 0.8 \implies Var(2+3X) = 9Var(X) = 9 \times 0.8 = 7.2$$

г) Используя функцию вероятностей Биномиального распределения получаем:

$$P(X = 2) = C_5^2 0.2^2 \times (1 - 0.2)^3 \approx 0.205$$

д) Воспользуемся формулой вероятности обратного события:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$
$$= 1 - (1 - 0.2)^5 - 5 \times 0.2 \times (1 - 0.2)^4 = 0.26272$$

е) По формуле условной вероятности получаем:

$$P(X < 3.5|X > 1) = \frac{P(1 < X < 3.5)}{P(X > 1)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X = 0) - P(X = 1)} =$$
$$= \frac{10 \times 0.2^2 \times (1 - 0.2)^3 + 10 \times 0.2^3 \times (1 - 0.2)^2}{1 - (1 - 0.2)^5 - 5 \times 0.2 \times (1 - 0.2)^4} \approx 0.974$$

ж) Для удобства сперва составим таблицу распределения. Для этого достаточно использовать функцию вероятностей Биномиального распределения, с помощью которой получаем:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.32768	0.4096	0.2048	0.0512	0.0064	0.00032

Запишем функцию распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ 0.32768, \text{ если } 0 \leq x < 1 \\ 0.32768 + 0.4096, \text{ если } 1 \leq x < 2 \\ 0.32768 + 0.4096 + 0.2048, \text{ если } 2 \leq x < 3 \\ 0.32768 + 0.4096 + 0.2048 + 0.0512, \text{ если } 3 \leq x < 4 \\ 0.32768 + 0.4096 + 0.2048 + 0.0512 + 0.0064, \text{ если } 4 \leq x < 5 \\ 0.32768 + 0.4096 + 0.2048 + 0.0512 + 0.0064 + 0.00032, \text{ если } x \geq 5 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ 0.32768, \text{ если } 0 \leq x < 1 \\ 0.73728, \text{ если } 1 \leq x < 2 \\ 0.94208, \text{ если } 2 \leq x < 3 \\ 0.99328, \text{ если } 3 \leq x < 4 \\ 0.99968, \text{ если } 4 \leq x < 5 \\ 1, \text{ если } x \geq 5 \end{cases}$$

10. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 2$. Найдите:

а) $\text{supp}(X)$.

б) $Var(E(X)X)$.

в) $P(X = 3)$.

г) $P(X > 1)$.

д) $P(X \leq 3|X > 1)$.

Решение:

а) $\text{supp}(X) = \{0, 1, 2, ...\}$.

б) Поскольку $E(X) = 2$ и $Var(X) = 2$, то:

$$Var(E(X)X) = E(X)^2 Var(X) = 2^2 \times 2 = 8$$

в) Воспользуемся функцией вероятностей распределения Пуассона:

$$P(X = 3) = e^{-2}\frac{2^3}{3!} \approx 0.18$$

г) Применим формулу вероятности обратного события:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-2}\frac{2^0}{0!} - e^{-2}\frac{2^1}{1!} \approx 0.594$$

д) Воспользуемся формулой условной вероятности:

$$P(X \leq 3|X > 1) = \frac{P(1 < X \leq 3)}{P(X > 1)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X = 0) - P(X = 1)} = \frac{e^{-2}\frac{2^2}{2!} + e^{-2}\frac{2^3}{3!}}{1 - e^{-2}\frac{2^0}{0!} - e^{-2}\frac{2^1}{1!}} \approx 0.76$$

11. Случайная величина X имеет Геометрическое распределение с параметром $p = 0.2$. Геометрическое распределение определяется как число неудач до первого успеха в бесконечной серии испытаний Бернулли. Найдите:

а) E(Var(X)+E(X)X).

б) $P(X = 2)$.

в) $P(X^2 \geq 4)$.

г) $P(X \geq 100|X \geq 98)$.

д) $P(X < 4|X \geq 2)$.

е) $F_X(5.5)$.

Решение:

а) Сперва найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$E(X) = \frac{1 - 0.2}{0.2} = 4 \qquad Var(X) = \frac{1 - 0.2}{0.2^2} = 20$$

Отсюда получаем, что:

$$E(Var(X) + E(X)X) = Var(X) + E(X) \times E(X) = 20 + 4 \times 4 = 36$$

б) По формуле функции вероятностей Геометрической случайной величины получаем:

$$P(X = 2) = (1 - 0.2)^2 \times 0.2 = 0.128$$

в) Поскольку Геометрическая случайная величина не принимает отрицательных значений, получаем:

$$P(X^2 \geq 4) = P(X \geq 2) + P(X \leq -2) = P(X \geq 2) + 0 = 1 - P(X < 2) =$$
$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (1 - 0.2)^0 \times 0.2 - (1 - 0.2)^1 \times 0.2 = 0.64$$

г) Воспользуемся свойством отсутствия памяти:

$$P(X \geq 100|X \geq 98) = P(X \geq 2 + 98|X \geq 98) = P(X \geq 2) = 0.64$$

Этот пункт можно также решить при помощи формулы условной вероятности, однако, для вычисления знаменателя придется проделать крайне громоздкие вычисления.

д) Применим формулу условной вероятности:

$$P(X < 4|X \geq 2) = \frac{P(2 \leq X < 4)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X = 0) - P(X = 1)} =$$
$$= \frac{(1 - 0.2)^2 \times 0.2 + (1 - 0.2)^3 \times 0.2}{1 - (1 - 0.2)^0 \times 0.2 - (1 - 0.2)^1 \times 0.2} = 0.36$$

е) Найдем значение функции распределения в соответствующей точке:

$$F_X(5.5) = P(X \leq 5.5) = P(X \leq 5) = F_X(5) = 1 - (1 - 0.2)^{5+1} \approx 0.738$$

12. Совместное распределение случайных величин X и Y задается следующей таблицей:

Y \ X	-1	0	2
0	0.1	0.2	0.3
5	0.05	c	0.25

Найдите:

а) $P(X = 2 \cap Y = 5)$

б) Значение константы c.

в) $P(Y = 0)$.

г) $E(X)$ и $E(Y)$.

д) $Var(X)$ и $Var(Y)$.

е) $Cov(X, Y)$ и $Corr(X, Y)$.

ж) $Cov(2X + 1, -5Y)$ и $Corr(2X + 1, -5Y)$.

з) $Var(2X - 5Y + 8)$.

и) $Cov(2X + Y, 3Y - 5)$

к) $P(Y = 0|X \geq 0)$.

л) $E(Y|X \geq 0)$ и $Var(Y|X \geq 0)$

м) $F_{(X,Y)}(0, 0)$.

н) $P(X > -0.5 \cap Y < 3)$ и $P(X > -0.5 \cup Y < 3)$.

о) $P(Y - X < 0|Y + X > 0)$. **(доп.)**.

п) Проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Решение:

а) Из таблицы следует, что $P(X = 2 \cap Y = 5) = 0.25$.

б) Воспользуемся тем, что в сумме совместные вероятности должны давать единицу:

$$\begin{gathered} P(X = -1 \cap Y = 0) + P(X = -1 \cap Y = 5) + \\ + P(X = 0 \cap Y = 0) + P(X = 0 \cap Y = 5) + \\ + P(X = 2 \cap Y = 0) + P(X = 2 \cap Y = 5) = \\ = 0.1 + 0.05 + 0.2 + c + 0.3 + 0.25 = 1 \end{gathered}$$

Решая соответствующее равенство получаем, что $c = 0.1$.

в) Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\begin{gathered} P(Y = 0) = P(Y = 0 \cap X = -1) + P(Y = 0 \cap X = 0) + P(Y = 0 \cap X = 2) = \\ = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6 \end{gathered}$$

г) Рассчитаем соответствующие математические ожидания:

$$\begin{gathered} E(X) = P(X = -1) \times (-1) + P(X = 0) \times 0 + P(X = 2) \times 2 = \\ = (0.1 + 0.05) \times (-1) + (0.2 + 0.1) \times 0 + (0.3 + 0.25) \times 2 = 0.95 \\ E(Y) = P(Y = 0) \times 0 + P(Y = 5) \times 5 = 0.6 \times 0 + 0.4 \times 5 = 2 \end{gathered}$$

д) Сперва найдем вторые начальные моменты:

$$\begin{gathered} E(X^2) = (0.1 + 0.05) \times (-1)^2 + (0.2 + 0.1) \times 0^2 + (0.3 + 0.25) \times 2^2 = 2.35 \\ E(Y^2) = 0.6 \times 0^2 + 0.4 \times 5^2 = 10 \end{gathered}$$

Найдем дисперсии:

$$\begin{gathered} Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2.35 - 0.95^2 = 1.4475 \\ Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 10 - 2^2 = 6 \end{gathered}$$

е) Рассчитаем ковариацию:

$$\begin{gathered} E(XY) = 0.1 \times (-1 \times 0) + 0.2 \times (0 \times 0) + 0.3 \times (2 \times 0) + \\ + 0.05 \times (-1 \times 5) + 0.1 \times (0 \times 5) + 0.25 \times (2 \times 5) = 2.25 \\ Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2.25 - 0.95 \times 2 = 0.35 \end{gathered}$$

Пользуясь рассчитанной ковариацией и дисперсиями вычислим корреляцию:

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{0.35}{\sqrt{1.4475 \times 6}} \approx 0.11876$$

ж) По свойствам ковариации получаем:

$$Cov(2X + 1, -5Y) = (2 \times -5)Cov(X, Y) = -10 \times 0.35 = -3.5$$

Применяя свойства корреляции имеем:

$$Corr(2X + 1, -5Y) = \text{sgn}(2 \times -5)Corr(X, Y) = -1 \times 0.11876 = -0.11876$$

з) Воспользуемся свойствами дисперсии суммы:

$$\begin{gathered}Var(2X-5Y+8)=Var(2X-5Y)=Var(2X)+Var(5Y)-2Cov(2X,5Y)=\\=4Var(X)+25Var(Y)-2\times(2\times5)\times Cov(X,Y)=\\=4\times1.4475+25\times6-2\times10\times0.35=148.79\end{gathered}$$

и) Применим свойства ковариации:

$$Cov(2X+Y,3Y-5)=2\times3Cov(X,Y)+3Var(Y)=6\times0.35+3\times6=20.1$$

к) Воспользуемся формулой условной вероятности:

$$\begin{gathered}P(Y=0|X\geq0)=\frac{P(Y=0\cap X\geq0)}{P(X\geq0)}=\frac{P(Y=0\cap X=0)+P(Y=0\cap X=2)}{P(X=0)+P(X=2)}=\\=\frac{0.2+0.3}{(0.2+0.1)+(0.3+0.25)}\approx0.588\end{gathered}$$

л) Рассчитаем условное математические ожидания:

$$\begin{gathered}E(Y|X\geq0)=P(Y=0|X\geq0)\times0+P(Y=5|X\geq0)\times5\approx\\\approx0.588\times0+(1-0.588)\times5=2.06\end{gathered}$$

Вычислим условный второй начальный момент:

$$\begin{gathered}E(Y^2|X\geq0)=P(Y=0|X\geq0)\times0^2+P(Y=5|X\geq0)\times5^2\approx\\\approx0.588\times0^2+(1-0.588)\times5^2=10.3\end{gathered}$$

Пользуясь полученными результатами посчитаем дисперсию:

$$Var(Y|X\geq0)=E(Y^2|X\geq0)-E(Y|X\geq0)^2\approx10.3-2.06^2=6.0564$$

м) Рассчитаем значение совместной функции распределения в соответствующей точке:

$$\begin{gathered}F_{(X,Y)}(0,0)=P(X\leq0\cap Y\leq0)=P(X=-1\cap Y=0)+P(X=0\cap Y=0)=\\=0.1+0.2=0.3\end{gathered}$$

н) Вычислим вероятность пересечения:

$$P(X>-0.5\cap Y<3)=P(X=0\cap Y=0)+P(X=2\cap Y=0)=0.2+0.3=0.5$$

Используя рассчитанную вероятность посчитаем вероятность объединения:

$$\begin{gathered}P(X>-0.5\cup Y<3)=P(X>-0.5)+P(Y<3)-P(X>-0.5\cap Y<3)=\\=(0.2+0.1+0.3+0.25)+(0.1+0.2+0.3)-0.5=0.95\end{gathered}$$

о) Применим формулу условной вероятности:

$$\begin{gathered}P(Y-X<0|Y+X>0)=\frac{P(Y-X<0\cap Y+X>0)}{P(X+Y>0)}=\\=\frac{0.3}{0.3+0.05+0.1+0.25}\approx0.429\end{gathered}$$

п) Поскольку $Cov(X,Y) \neq 0$, то данные случайные величины являются зависимыми.

13. Имеются независимые случайные величины X, Y и Z. Рассчитайте $P(X+Y+Z=5)$, если:

а) $X \sim Ber(0.9)$, $Y \sim B(2, 0.9)$ и $Z \sim B(3, 0.9)$.

б) $X \sim Pois(3)$, $Y \sim Pois(2)$ и $Z \sim Pois(3)$.

Решение:

а) Обратим внимание, что $X \sim Ber(0.9) = Bin(1, 0.9)$. Пользуясь независимостью рассматриваемых случайных величин и тем, что вероятность успеха в каждом из соответствующих биномиальных распределений одинакова, по свойству воспроизводимости получаем, что:

$$(X+Y+Z) \sim B(1+2+3, 0.9) = B(6, 0.9)$$

Пользуясь полученым результатом рассчитаем искомую вероятность:

$$P(X+Y+Z=5) = C_6^5 0.9^5 (1-0.9)^{6-5} \approx 0.35$$

б) Воспользуемся свойством воспроизводимости Пуассоновских случайных величин:

$$(X+Y+Z) \sim Pois(3+2+3) = Pois(8)$$

В результате получаем:

$$P(X+Y+Z=5) = e^{-8}\frac{8^5}{5!} \approx 0.0916$$

14. У Лаврентия имеются две монетки. Одна из них падает орлом с вероятностью 0.5 (правильная), а вторая – с вероятностью 0.8 (неправильная). Лаврентий сперва подкинул одну из этих монеток (неизвестно какую, с равной вероятностью он мог взять как правильную, так и неправильную), а затем – другую. Найдите вероятность того, что:

а) Первая монетка выпадет орлом.

б) Обе монетки выпадут орлом.

в) Вторая монетка выпадет орлом, при условии, что первая выпала орлом.

г) Первая монетка правильная, при условии, что при втором броске выпал орел.

д) Обе монетки выпадут орлом, при условии, что по крайней мере одна из монеток выпала орлом.

е) Вероятность того, что первая монетка правильная, если Лаврентий совершил дополнительный, третий бросок, второй из брошенных монет и она упала на ту же сторону (оба раза выпал орел или оба раза выпала решка). **(доп.)**

Решение:

а) Обозначим через O_i событие, при котором i-я из подброшенных монеток выпала орлом, где $i \in \{1, 2\}$. Через A обозначим событие, при котором правильной является первая из подброшенных монеток.

Применим формулу полной вероятности:

$$P(O_1) = P(O_1|A)P(A) + P(O_1|\overline{A})P(\overline{A}) = 0.5 \times 0.5 + 0.8 \times (1-0.5) = 0.65$$

б) Вновь применим формулу полной вероятности:

$$
\begin{gathered}
P(O_1 \cap O_2) = P(O_1 \cap O_2|A)P(A) + P(O_1 \cap O_2|\overline{A})P(\overline{A}) = \\
= P(O_1|A \cap O_2)P(O_2|A)P(A) + P(O_1|\overline{A} \cap O_2)P(O_2|\overline{A})P(\overline{A}) = \\
= 0.5 \times 0.8 \times 0.5 + 0.8 \times 0.5 \times 0.5 = 0.4
\end{gathered}
$$

Решение можно также сократить, обратив внимание, что события O_1 и O_2 независимы при условии события A, поскольку при наступлении A однозначно ясно, какая из монеток является правильной, а какая неправильной, откуда $P(O_1 \cap O_2|A) = P(O_1|A)P(O_2|A)$ и $P(O_1 \cap O_2|\overline{A}) = P(O_1|\overline{A})P(O_2|\overline{A})$.

в) Применим формулу условной вероятности:

$$
P(O_2|O_1) = \frac{P(O_2 \cap O_1)}{P(O_1)} = \frac{0.4}{0.65} = \frac{8}{13} \approx 0.615
$$

г) Вновь воспользуемся формулой условной вероятности:

$$
\begin{gathered}
P(A|O_2) = \frac{P(A \cap O_2)}{P(O_2)} = \frac{P(O_2|A)P(A)}{P(O_2|A)P(A) + P(O_2|\overline{A})P(\overline{A})} = \\
= \frac{0.8 \times 0.5}{0.8 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5} \approx 0.615
\end{gathered}
$$

д) Сперва найдем вероятность того, что по крайней мере одна монетка выпадет орлом:

$$
P(O_1 \cup O_2) = P(O_1) + P(O_2) - P(O_1 \cap O_2) = 0.65 + 0.65 - 0.4 = 0.9
$$

Применим формулу условной вероятности:

$$
P(O_1 \cap O_2|O_1 \cup O_2) = \frac{P((O_1 \cap O_2) \cap (O_1 \cup O_2))}{P(O_1 \cup O_2)} = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_1 \cup O_2)} = \frac{0.4}{0.9} = \frac{4}{9} \approx 0.44
$$

е) Через O_3 обозначим событие, при котором вторая монетка при третьем броске выпала орлом.

$$
\begin{gathered}
P(A|(O_3 \cap O_2) \cup (\overline{O}_3 \cap \overline{O}_2)) = \frac{\left(P(O_3 \cap O_2|A) + P(\overline{O}_3 \cap \overline{O}_2|A)\right) P(A)}{P(O_3 \cap O_2) + P(\overline{O}_3 \cap \overline{O}_2)} = \\
= \frac{\left(P(O_3|A)P(O_2|A) + P(\overline{O}_3|A)P(\overline{O}_2|A)\right) P(A)}{\left(P(O_3 \cap O_2|A)P(A) + P(O_3 \cap O_2|\overline{A})P(\overline{A})\right) + \left(P(\overline{O}_3 \cap \overline{O}_2|A)P(A) + P(\overline{O}_3 \cap \overline{O}_2|\overline{A})P(\overline{A})\right)} \\
= \frac{(0.8 \times 0.8 + 0.2 \times 0.2) \times 0.5}{(0.8 \times 0.8 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5 \times 0.5) + (0.2 \times 0.2 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5 \times 0.5)} \approx 0.576
\end{gathered}
$$

Проверка в R:

```
# пункт е
n <- 100000
A <- rep(NA, n)
B <- rep(NA, n)
p <- c(0.5, 0.8)
```

```
for (i in 1:n)
{
  c <- sample(1:2, 2)
  x <- c(rbinom(1, 1, p[c[1]]),
        rbinom(1, 1, p[c[2]]),
        rbinom(1, 1, p[c[2]]))
  A[i] <- (c[1] == 1)
  B[i] <- (x[2] == x[3])
}
mean(A[B])
```