Теория Вероятностей и Статистика

Непрерывные случайные величины

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
    - ВВП страны

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
    - ВВП страны
    - Цена квартиры
    - Прибыль фирмы

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции
  - Температура

Мотивация введения непрерывных случайных величин
Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции
  - Температура
  - Время в очереди

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции
  - Температура
  - Время в очереди
  - Вес кота

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции
  - Температура
  - Время в очереди
  - Вес кота
  - Число осадков

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
    - ВВП страны
    - Цена квартиры
    - Прибыль фирмы
    - Время на дорогу
    - Цена акции
    - Температура
    - Время в очереди
    - Вес кота
    - Число осадков
- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связно с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
    - ВВП страны
    - Цена квартиры
    - Прибыль фирмы
    - Время на дорогу
    - Цена акции
    - Температура
    - Время в очереди
    - Вес кота
    - Число осадков
- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связно с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.
  Пример: имеется отрезок $[0, 1]$. Точка случайным образом и **с равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину X. Например, $P(X = 0.3) = p$, где p - вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества [0,1] больше мощности множества натуральных чисел):

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции
  - Температура
  - Время в очереди
  - Вес кота
  - Число осадков
- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связно с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.
Пример: имеется отрезок $[0,1]$. Точка случайным образом и **с равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину X. Например, $P(X=0.3)=p$, где p - вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества [0,1] больше мощности множества натуральных чисел):

$$\sum_{x\in[0,1]} P(X=x)=\sum_{x\in[0,1]} p>\sum_{x\in N} p=\infty$$

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:
    - ВВП страны
    - Цена квартиры
    - Прибыль фирмы
    - Время на дорогу
    - Цена акции
    - Температура
    - Время в очереди
    - Вес кота
    - Число осадков
- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связно с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно.
  Пример: имеется отрезок $[0, 1]$. Точка случайным образом и **с равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину X. Например, $P(X = 0.3) = p$, где p - вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества [0,1] больше мощности множества натуральных чисел):
  $$\sum_{x\in[0,1]} P(X = x) = \sum_{x\in[0,1]} p > \sum_{x\in N} p = \infty$$
- **Решение** – предположим, что вероятность того, что случайная величина примет **конкретное** значение, равняется нулю, но отличной от нуля может быть вероятность попадания случайной величины в некоторый **интервал**.

Мотивация введения непрерывных случайных величин

Постановка проблемы и интуитивное описание ее решения

- Многие случайные величины могут принять одно из значений, принадлежащих некоторому вещественному интервалу или даже всей вещественной прямой:

  - ВВП страны
  - Цена квартиры
  - Прибыль фирмы
  - Время на дорогу
  - Цена акции
  - Температура
  - Время в очереди
  - Вес кота
  - Число осадков

- **Проблема** – если мы присвоим каждому из возможных значений такой случайной величины конкретную вероятность, то сумма вероятностей не будет равняться единице и неизбежно устремится в бесконечность. Это связно с тем, что множество значений, принимаемых такими случайными величинами, не счетно. **Пример:** имеется отрезок $[0, 1]$. Точка случайным образом и **с равной вероятностью** оказывается в любом месте отрезка. Положение точки обозначим как случайную величину X. Например, $P(X = 0.3) = p$, где p - вероятность, с которой точка оказывается в том или ином месте отрезка. Однако, в таком случае сумма вероятностей не будет равняться единице, поскольку (учитывая, что мощность множества [0,1] больше мощности множества натуральных чисел):

$$\sum_{x\in[0,1]} P(X = x) = \sum_{x\in[0,1]} p > \sum_{x\in N} p = \infty$$

- **Решение** – предположим, что вероятность того, что случайная величина примет **конкретное** значение, равняется нулю, но отличной от нуля может быть вероятность попадания случайной величины в некоторый **интервал**. Возвращаясь к примеру положим $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$ и $P(X \in [a, b]) = (b - a)$ при $[a, b] \in (0, 1)$, где $b \geq a$, откуда, например, $P(X = 0.3) = 0$, но $P(X \in [0.2, 0.7]) = 0.7 - 0.2 = 0.5$.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.

Функция распределения непрерывной случайной величины
Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$P(X \leq a) = P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a)$$

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$P(X \leq a) = P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a)$$
$$P(a \leq X \leq b) = [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) =$$

Функция распределения непрерывной случайной величины
Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:
$$P(X \leq a) = P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a)$$
$$P(a \leq X \leq b) = [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) =$$
$$= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$P(X \leq a) = P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a)$$
$$P(a \leq X \leq b) = [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) =$$
$$= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Пример: доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 3 \\ (x^2 - 9)/16, \text{ если } x \in [3, 5] \\ 1, \text{ если } x > 5 \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

Функция распределения непрерывной случайной величины
Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X=x)=0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x)=P(X\leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a\leq X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$$

Доказательство:

$$P(X\leq a)=P(X<a\cup X=a)=P(X<a)+P(X=a)=P(X<a)+0=P(X<a)$$
$$P(a\leq X\leq b)=[P(X<a)+P(a\leq X\leq b)]-P(X<a)=P(X<a\cup a\leq X\leq b)-P(X\leq a)=$$
$$=P(X\leq b)-P(X\leq a)=F_X(b)-F_X(a)$$

Пример: доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x)=\begin{cases}0\text{, если } x<3\\(x^2-9)/16\text{, если } x\in[3,5]\\1\text{, если } x>5\end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

$$P(X\leq 3.5)=F_X(3.5)=(3.5^2-9)/16=13/63$$

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$P(X \leq a) = P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a)$$
$$P(a \leq X \leq b) = [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) =$$
$$= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Пример: доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 3 \\ (x^2 - 9)/16, \text{ если } x \in [3, 5] \\ 1, \text{ если } x > 5 \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

$$P(X \leq 3.5) = F_X(3.5) = (3.5^2 - 9)/16 = 13/63$$

$$P(X \in [3.5, 4.2]) = P(3.5 \leq X \leq 4.2) = F_X(4.2) - F_X(3.5) = (4.2^2 - 9)/16 - (3.5^2 - 9)/16 = 539/1600$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение

- Вероятность любого конкретного значения является нулевой: $P(X = x) = 0$ для любого $x \in R$.
- **Распределение непрерывной случайной величины** удобно задавать через **функцию распределения**:
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал можно рассчитать как:
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Доказательство:

$$P(X \leq a) = P(X < a \cup X = a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a)$$
$$P(a \leq X \leq b) = [P(X < a) + P(a \leq X \leq b)] - P(X < a) = P(X < a \cup a \leq X \leq b) - P(X \leq a) =$$
$$= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Пример: доход фрилансера Бориса является случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 3 \\ (x^2 - 9)/16, \text{ если } x \in [3, 5] \\ 1, \text{ если } x > 5 \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что доход Бориса не превысит 3.5, а затем того, что он будет находиться в интервале от 3.5 до 4.2 и, наконец, того, что он будет больше 4.2, но меньше 8.

$$P(X \leq 3.5) = F_X(3.5) = (3.5^2 - 9)/16 = 13/63$$
$$P(X \in [3.5, 4.2]) = P(3.5 \leq X \leq 4.2) = F_X(4.2) - F_X(3.5) = (4.2^2 - 9)/16 - (3.5^2 - 9)/16 = 539/1600$$
$$P(4.2 < X < 8) = P(4.2 \leq X \leq 8) = F_X(8) - F_X(4.2) = 1 - (4.2^2 - 9)/16 = 0.465$$

Функция распределения непрерывной случайной величины
Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.
- Не убывает: $F_X(x) \leq F_X(y)$ при $x \leq y$, где $x, y \in R$.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.
- Не убывает: $F_X(x) \leq F_X(y)$ при $x \leq y$, где $x, y \in R$.
- Непрерывна: $\lim\limits_{x \to a} F_X(x) = F_X(a)$ для любого $a \in R$.

Функция распределения непрерывной случайной величины
Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.
- Не убывает: $F_X(x) \leq F_X(y)$ при $x \leq y$, где $x, y \in R$.
- Непрерывна: $\lim\limits_{x \to a} F_X(x) = F_X(a)$ для любого $a \in R$.

Пример:
Объем поглощаемой котом Аркадием пищи является случайной величиной с функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} c, \text{ если } x < 2 \\ (x-a)/b, \text{ если } x \in [2,6] \\ d, \text{ если } x > 6 \end{cases}$$

Найдите константы a, b, c и d.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.
- Не убывает: $F_X(x) \leq F_X(y)$ при $x \leq y$, где $x, y \in R$.
- Непрерывна: $\lim\limits_{x \to a} F_X(x) = F_X(a)$ для любого $a \in R$.

Пример:
Объем поглощаемой котом Аркадием пищи является случайной величиной с функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} c, \text{ если } x < 2 \\ (x-a)/b, \text{ если } x \in [2, 6] \\ d, \text{ если } x > 6 \end{cases}$$

Найдите константы a, b, c и d.
Решение:
Так как функция распределения не убывает и принимает значения от 0 до 1, то $c = 0$ и $d = 1$.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Свойства

Функция $F_X(x)$ является функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X тогда и только тогда, когда:

- Принимает значения от нуля до единицы: $0 \leq F_X(x) \leq 1$ при любом $x \in R$.
- Не убывает: $F_X(x) \leq F_X(y)$ при $x \leq y$, где $x, y \in R$.
- Непрерывна: $\lim\limits_{x \to a} F_X(x) = F_X(a)$ для любого $a \in R$.

Пример:
Объем поглощаемой котом Аркадием пищи является случайной величиной с функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} c, \text{ если } x < 2 \\ (x-a)/b, \text{ если } x \in [2, 6] \\ d, \text{ если } x > 6 \end{cases}$$

Найдите константы a, b, c и d.
Решение:
Так как функция распределения не убывает и принимает значения от 0 до 1, то $c = 0$ и $d = 1$.
Поскольку функция распределения непрерывна, то $F_X(2) = 0$ и $F_X(6) = 1$, откуда:

$$\begin{cases} (2-a)/b = 0 \\ (6-a)/b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ (6-2)/b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$
- При помощи функции плотности можно считать вероятности:
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X. Найдите функцию плотности X, а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ x^3/1000, \text{ если } x \in [0, 10] \\ 1, \text{ если } x > 10 \end{cases}$$

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X. Найдите функцию плотности X, а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ x^3/1000, \text{ если } x \in [0, 10] \\ 1, \text{ если } x > 10 \end{cases}$$

Решение:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, \text{ если } x < 0 \\ d\left(x^3/1000\right)/dx, \text{ если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, \text{ если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2/1000, \text{ если } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X. Найдите функцию плотности X, а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ x^3/1000, \text{ если } x \in [0, 10] \\ 1, \text{ если } x > 10 \end{cases}$$

Решение:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, \text{ если } x < 0 \\ d\left(x^3/1000\right)/dx, \text{ если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, \text{ если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2/1000, \text{ если } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 3x^2/1000dx = 0.098$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$
- При помощи функции плотности можно считать вероятности:
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X. Найдите функцию плотности X, а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ x^3/1000, \text{ если } x \in [0, 10] \\ 1, \text{ если } x > 10 \end{cases}$$

Решение:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, \text{ если } x < 0 \\ d\left(x^3/1000\right)/dx, \text{ если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, \text{ если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2/1000, \text{ если } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 3x^2/1000dx = 0.098$$
$$P(X \geq 7) = \int_7^{10} 3x^2/1000dx + \int_{10}^{\infty} 0dx = 0.657$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X. Найдите функцию плотности X, а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ x^3/1000, \text{ если } x \in [0, 10] \\ 1, \text{ если } x > 10 \end{cases}$$

Решение:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, \text{ если } x < 0 \\ d\left(x^3/1000\right)/dx, \text{ если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, \text{ если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2/1000, \text{ если } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 3x^2/1000dx = 0.098$$

$$P(X \geq 7) = \int_7^{10} 3x^2/1000dx + \int_{10}^{\infty} 0dx = 0.657$$

$$P(X \in [3, 5] \cup (-\infty, 2]) = P(3 \leq X \leq 5) + P(X < 2) =$$

Функция плотности

Расчет вероятностей

- Производная функции распределения непрерывной случайной величины именуется **функцией плотности**:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- При помощи функции плотности можно считать вероятности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Пример:

Количество часов, затрачиваемых Евгением на подготовку к семинару, является случайной величиной X. Найдите функцию плотности X, а также вероятность того, что на подготовку к семинару Евгений потратит 1) от 3 до 5 часов, 2) не менее 7 часов, 3) от 3 до 5 часов или мене 2 часов.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ x^3/1000, \text{ если } x \in [0, 10] \\ 1, \text{ если } x > 10 \end{cases}$$

Решение:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} d0/dx, \text{ если } x < 0 \\ d\left(x^3/1000\right)/dx, \text{ если } x \in [0, 10] \\ d1/dx, \text{ если } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2/1000, \text{ если } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ если } x \notin [0, 10] \end{cases}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 3x^2/1000dx = 0.098$$

$$P(X \geq 7) = \int_7^{10} 3x^2/1000dx + \int_{10}^{\infty} 0dx = 0.657$$

$$P(X \in [3, 5] \cup (-\infty, 2]) = P(3 \leq X \leq 5) + P(X < 2) =$$
$$= \int_3^5 3x^2/1000dx + \left(\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^2 3x^2/1000dx\right) = 0.106$$

Функция плотности

Связь с функцией распределения

- С помощью функции плотности можно восстановить функцию распределения:

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

- С помощью функции плотности можно восстановить функцию распределения:

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей объем импорта некоторого государства, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sin(x), \text{ если } x \in [0, \pi/2] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

- С помощью функции плотности можно восстановить функцию распределения:

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей объем импорта некоторого государства, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sin(x), \text{ если } x \in [0, \pi/2] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Решение:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt, \text{ если } x \in (-\infty, 0) \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} \sin(t)dt, \text{ если } x \in [0, \pi/2] \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin(t)dt + \int\limits_{\pi/2}^{x} 0dt, \text{ если } x \in (\pi/2, \infty) \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in (-\infty, 0) \\ 1 - cos(x), \text{ если } x \in [0, \pi/2] \\ 1, \text{ если } x \in (\pi/2, \infty) \end{cases}$$

Функция плотности
Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in R$.

Функция плотности

Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in R$.
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

Функция плотности

Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in R$.
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

Пример:

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:
$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, \text{ если } x \in [2, 10] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$
Найдите константу $c \in R$ и функцию распределения времени поездки.

Функция плотности

Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in R$.
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

Пример:

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, \text{ если } x \in [2, 10] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Найдите константу $c \in R$ и функцию распределения времени поездки.

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int\limits_{2}^{10} c/xdx = c\ln(5) = 1 \implies c = 1/\ln(5)$$

Функция плотности

Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in R$.
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

Пример:

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, \text{ если } x \in [2, 10] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Найдите константу $c \in R$ и функцию распределения времени поездки.

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int\limits_{2}^{10} c/xdx = c\ln(5) = 1 \implies c = 1/\ln(5)$$

Обратим внимание, что при $x \in [2, 10]$:

$$F_X(x) = \int\limits_{2}^{x} 1/\left(\ln(5) \times t\right) dt = \ln(x/2)/\ln(5)$$

Функция плотности

Дополнительные свойства

- $f_X(x) \geq 0$ для любого $x \in R$.
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

Пример:

- Время поездки является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c/x, \text{ если } x \in [2, 10] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Найдите константу $c \in R$ и функцию распределения времени поездки.

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int\limits_{2}^{10} c/xdx = c\ln(5) = 1 \implies c = 1/\ln(5)$$

Обратим внимание, что при $x \in [2, 10]$:

$$F_X(x) = \int\limits_{2}^{x} 1/\left(\ln(5) \times t\right) dt = \ln(x/2)/\ln(5)$$

Отсюда получаем:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 2 \\ \ln(x/2)/\ln(5), \text{ если } x \in [2, 10] \\ 1, \text{ если } x > 10 \end{cases}$$

Функция плотности

Носитель непрерывной случайной величины

- **Носителем** непрерывной случайной величины X является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:
$$\operatorname{supp}(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

Функция плотности

Носитель непрерывной случайной величины

- **Носителем** непрерывной случайной величины X является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:

$$\operatorname{supp}(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

Пример:

- Случайная величина X имеет функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} (x-2)/1.5, \text{ если } x \in [2,3) \\ (2.5-0.5x)/1.5, \text{ если } x \in [3,5] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Найдите носитель этой случайной величины и вероятность того, что она примет значение от 2.5 до 3.5.

- **Носителем** непрерывной случайной величины X является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:

$$\text{supp}\,(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

Пример:

- Случайная величина X имеет функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} (x-2)/1.5, \text{ если } x \in [2,3) \\ (2.5-0.5x)/1.5, \text{ если } x \in [3,5] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Найдите носитель этой случайной величины и вероятность того, что она примет значение от 2.5 до 3.5.

Решение:

$$\text{supp}(X) = (2,3) \cup [3,5] = (2,5)$$

Функция плотности

Носитель непрерывной случайной величины

- **Носителем** непрерывной случайной величины X является множество значений, в которых функция плотности этой случайной величины превышает ноль:

$$\text{supp}\,(X) = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$$

Пример:

- Случайная величина X имеет функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} (x-2)/1.5, \text{ если } x \in [2,3) \\ (2.5-0.5x)/1.5, \text{ если } x \in [3,5] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Найдите носитель этой случайной величины и вероятность того, что она примет значение от 2.5 до 3.5.

Решение:

$$\text{supp}(X) = (2,3) \cup [3,5] = (2,5)$$

$$P(2.5 \leq X \leq 3.5) = \int_{2.5}^{3}(x-2)/1.5dx + \int_{3}^{3.5}(2.5-0.5x)/1.5dx \approx 0.542$$

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x) dx$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x)dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx, \text{ где } k \in N$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x)dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx, \text{ где } k \in N$$

Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей доходность акции, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \ln(x), \text{ если } x \in [1, e] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и третий начальный момент доходности акции.

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \times f_X(x)dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx, \text{ где } k \in N$$

Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей доходность акции, имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \ln(x), \text{ если } x \in [1, e] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и третий начальный момент доходности акции.
Решение:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{1} (x \times 0)\, dx + \int\limits_{1}^{e} x \ln(x)dx + \int\limits_{e}^{\infty} (x \times 0)\, dx \approx 0 + 0.21 + 0 = 0.21$$

- Математическое ожидание рассчитывается как:

$$E(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\times f_X(x)dx$$

- Начальные моменты вычисляются по аналогии:

$$E(X^k)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx, \text{ где } k\in N$$

Пример:

- Функция плотности случайной величины, отражающей доходность акции, имеет вид:

$$f_X(x)=\begin{cases}\ln(x), \text{ если } x\in[1,e]\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и третий начальный момент доходности акции.
Решение:

$$E(X)=\int\limits_{-\infty}^{1}(x\times 0)\,dx+\int\limits_{1}^{e}x\ln(x)dx+\int\limits_{e}^{\infty}(x\times 0)\,dx\approx 0+0.21+0=0.21$$

$$E(X^3)=\int\limits_{-\infty}^{1}(x^3\times 0)\,dx+\int\limits_{1}^{e}x^3\ln(x)dx+\int\limits_{e}^{\infty}(x^3\times 0)\,dx\approx 0+10.3+0=10.3$$

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- В частности, при $\alpha, \beta \in R$:

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- В частности, при $\alpha, \beta \in R$:

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ если } x \in [0, 1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид $y(X) = \sin(X)$. Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- В частности, при $\alpha, \beta \in R$:

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ если } x \in [0,1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид $y(X) = \sin(X)$. Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

Решение:

$$E(X) = \int_{0}^{1} x \times 3x^2 dx = 0.75$$

Моменты непрерывной случайной величины

Математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- В частности, при $\alpha, \beta \in R$:

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ если } x \in [0, 1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид $y(X) = \sin(X)$. Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

Решение:

$$E(X) = \int\limits_{0}^{1} x \times 3x^2 dx = 0.75$$

$$E(5X + 10) = 5E(X) + 10 = 5 \times 0.75 + 10 = 13.75$$

- Математическое ожидание функции $g(x)$ рассчитывается как:

$$E(g(X))=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)dx$$

- В частности, при $\alpha,\beta\in R$:

$$E(\alpha X+\beta)=\alpha E(X)+\beta$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2,\text{ если } x\in[0,1]\\ 0,\text{ в противном случае}\end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Производственная функция фирмы имеет вид $y(X)=\sin(X)$. Найдите математическое ожидание затрат фирмы и объема произведенной продукции.

Решение:

$$E(X)=\int\limits_0^1 x\times 3x^2dx=0.75$$

$$E(5X+10)=5E(X)+10=5\times 0.75+10=13.75$$

$$E\left(\sin\left(X\right)\right)=\int\limits_0^1\sin(x)\times 3x^2dx\approx 0.67$$

Моменты непрерывной случайной величины

Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Моменты непрерывной случайной величины
Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:
$$Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$$

Моменты непрерывной случайной величины

Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:
$$Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:
$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ если } x \in [0, 1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

Моменты непрерывной случайной величины
Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:
$$Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:
$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ если } x \in [0, 1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.
Решение:
$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$

Моменты непрерывной случайной величины
Дисперсия

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:
$$Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:
$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ если } x \in [0, 1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$
$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times 3x^2 dx = 0.6$$

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:
$$Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:
$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ если } x \in [0, 1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.

Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$
$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times 3x^2 dx = 0.6$$
$$Var(X) = 0.75 - 0.6^2 = 0.39$$

- Дисперсия рассчитывается по аналогии с дискретным случаем:
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
- Как и в дискретном случае при $\alpha, \beta \in R$:
$$Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$$

Пример:

- Объем закупленного фирмой сырья является случайной величиной с функцией плотности:
$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ если } x \in [0, 1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Фирма тратит 10 рублей на аренду склада и по 5 рублей на каждую единицу сырья. Найдите дисперсию объема приобретенного фирмой сырья и затрат на его закупку.
Решение:

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = 0.75$$
$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times 3x^2 dx = 0.6$$
$$Var(X) = 0.75 - 0.6^2 = 0.39$$
$$Var(5X + 10) = 25 Var(X) = 25 \times 0.39 = 9.75$$

Квантили

Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.
- **Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.

Квантили

Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.
- **Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.
- Квантиль уровня $q = 0.5$ именуется **медианой**, то есть $x_{med} = x_{0.5}$.

Квантили

Квантиль, медиана и квантильная функция

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.
- **Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.
- Квантиль уровня $q = 0.5$ именуется **медианой**, то есть $x_{med} = x_{0.5}$.
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:
$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.
- **Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.
- Квантиль уровня $q = 0.5$ именуется **медианой**, то есть $x_{med} = x_{0.5}$.
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:

$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

Пример:

- Функция распределения добытых компанией баррелей нефти имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ (x^2 - 1)/99, \text{ если } x \in [1, 10] \\ 1, \text{ если } x > 10 \end{cases}$$

Определите, не более скольких баррелей нефти вышка добудет с вероятностью 0.9, а также медиану добываемых баррелей нефти.

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе $\text{supp}(X)$.
- **Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.
- Квантиль уровня $q = 0.5$ именуется **медианой**, то есть $x_{med} = x_{0.5}$.
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:
$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

Пример:

- Функция распределения добытых компанией баррелей нефти имеет вид:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ (x^2 - 1)/99, \text{ если } x \in [1, 10] \\ 1, \text{ если } x > 10 \end{cases}$$

Определите, не более скольких баррелей нефти вышка добудет с вероятностью 0.9, а также медиану добываемых баррелей нефти.

Решение:

$$F_X(x_{0.9}) = (x_{0.9}^2 - 1)/99 = 0.9 \implies x_{0.9} \approx 9.49$$

- Пусть функция распределения непрерывной случайной величины X строго возрастает на носителе supp(X).
- **Квантиль** уровня $q \in (0, 1)$ случайной величины X это такое число $x_q \in R$, что $F_X(x_q) = q$.
- Квантиль уровня $q = 0.5$ именуется **медианой**, то есть $x_{med} = x_{0.5}$.
- Функция, обратная функции распределения, называется **квантильной функцией**:

$$Q(x) = F_X^{-1}(x)$$

Пример:

- Функция распределения добытых компанией баррелей нефти имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ (x^2 - 1)/99, \text{ если } x \in [1, 10] \\ 1, \text{ если } x > 10 \end{cases}$$

Определите, не более скольких баррелей нефти вышка добудет с вероятностью 0.9, а также медиану добываемых баррелей нефти.

Решение:

$$F_X(x_{0.9}) = (x_{0.9}^2 - 1)/99 = 0.9 \implies x_{0.9} \approx 9.49$$

$$F_X(x_{med}) = F_X(x_{0.5}) = (x_{0.5}^2 - 1)/99 = 0.5 \implies x_{med} \approx 7.1$$

- Модами распределения случайной величины X именуются локальные максимумы функции плотности $f_X(x)$.

- Модами распределения случайной величины X именуются локальные максимумы функции плотности $f_X(x)$.
  Пример:
- Функция плотности продолжительности собрания имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin [0,3] \\ (10-(1-x)^2)/27, \text{ если } x \in [0,3] \end{cases}$$

Найдите моду (в данном случае единственная) продолжительности собрания.

- Модами распределения случайной величины X именуются локальные максимумы функции плотности $f_X(x)$.
  Пример:
- Функция плотности продолжительности собрания имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin [0,3] \\ (10-(1-x)^2)/27, \text{ если } x \in [0,3] \end{cases}$$

Найдите моду (в данном случае единственная) продолжительности собрания.
Решение:
Рассмотрим условия первого порядка при $x \in [0,3]$:

$$df_X(x)/dx = d((10-(1-x)^2)/27)/dx = 2(1-x)/27 = 0 \implies x = 1$$

- Модами распределения случайной величины X именуются локальные максимумы функции плотности $f_X(x)$.
  Пример:
- Функция плотности продолжительности собрания имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0\text{, если } x \notin [0,3] \\ (10-(1-x)^2)/27\text{, если } x \in [0,3] \end{cases}$$

Найдите моду (в данном случае единственная) продолжительности собрания.
Решение:
Рассмотрим условия первого порядка при $x \in [0,3]$:

$$df_X(x)/dx = d((10-(1-x)^2)/27)/dx = 2(1-x)/27 = 0 \implies x = 1$$

Проверка условий второго порядка позволяет утверждать, что найден локальный максимум (он же в данном случае и глобальный, но в контексте решаемой задачи это не имеет значения), откуда получаем моду $x_{mode} = 1$.

Распределение функции от непрерывной случайной величины
Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.
  Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов). С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты. Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ x - 1, \text{ если } x \in [1, 2] \\ 1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.
  Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов). С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты. Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ x - 1, \text{ если } x \in [1, 2] \\ 1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.
  Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов). С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты. Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ x - 1, \text{ если } x \in [1, 2] \\ 1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.
  Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов). С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты. Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ x - 1, \text{ если } x \in [1, 2] \\ 1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.
  Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов). С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты. Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ x - 1, \text{ если } x \in [1, 2] \\ 1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

Распределение функции от непрерывной случайной величины

Поиск распределения

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.
  Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов). С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты. Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ x - 1, \text{ если } x \in [1, 2] \\ 1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

$$F_{\sqrt{X}}(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = x^2 - 1, \text{ при } x \in [\sqrt{1}, \sqrt{2}]$$

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.
  Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов). С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты. Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ x - 1, \text{ если } x \in [1, 2] \\ 1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

$$F_{\sqrt{X}}(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = x^2 - 1, \text{ при } x \in [\sqrt{1}, \sqrt{2}]$$

$$f_{\sqrt{X}}(1.3) = \left(dF_{\sqrt{X}}(x)/dx\right)|_{x=1.3} = \left(d\left(x^2 - 1\right)/dx\right)/d|_{x=1.3} = 2x|_{x=1.3} = 2 \times 1.3 = 2.6$$

- Обычно для того, чтобы считать вероятности и моменты для случайной величины $g(X)$, удобно выразить ее функцию распределения $F_{g(X)}(x) = P(g(X) \leq x)$ через $F_X(x)$.
  Пример:

- Дана функция распределения зарплаты Алексея (в **тысячах** долларов). С каждой зарплаты Алексей отдает $g(X) = \sqrt{X}$ **тысяч** долларов на благотворительность. Найдите вероятность того, что он потратит на благотворительность 1) более 1100 долларов 2) от 1100 до 1300 долларов 3) всю зарплату 4) не менее 80% процентов от зарплаты. Вычислите функцию плотности благотворительности в точках 1.3 и 1.5.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ x - 1, \text{ если } x \in [1, 2] \\ 1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

Решение:

$$P(\sqrt{X} > 1.1) = P(X > 1.1^2) = 1 - P(X \leq 1.21) = 1 - F_X(1.21) = 1 - (1.21 - 1) = 0.79$$

$$P(\sqrt{X} \in [1.1, 1.3]) = P(X \in [1.1^2, 1.3^2]) = F_X(1.69) - F_X(1.21) = (1.69 - 1) - (1.21 - 1) = 0.48$$

$$P(\sqrt{X} = X) = P(X = 1) = 0$$

$$P(\sqrt{X} \geq 0.8X) = P(X \leq 1.5625) = F_X(1.5625) = 1.5625 - 1 = 0.5625$$

$$F_{\sqrt{X}}(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = x^2 - 1, \text{ при } x \in [\sqrt{1}, \sqrt{2}]$$

$$f_{\sqrt{X}}(1.3) = \left(dF_{\sqrt{X}}(x)/dx\right)|_{x=1.3} = \left(d\left(x^2 - 1\right)/dx\right)/d|_{x=1.3} = 2x|_{x=1.3} = 2 \times 1.3 = 2.6$$

$$f_{\sqrt{X}}(1.5) = \left(dF_{\sqrt{X}}(x)/dx\right)|_{x=1.5} = d1/dx|_{x=1.5} = 0, \text{ поскольку } F_{\sqrt{X}}(1.5) = F_X(1.5^2) = F_X(2.25) = 1$$

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2, такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2, такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2, такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:
$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$
- По формуле объединения событий:
$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2, такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то события $X \in B_1$ и $x \in B_2$ несовместные, а значит $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$.

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2, такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то события $X \in B_1$ и $x \in B_2$ несовместные, а значит $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$.

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, \text{ при } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.

- Рассмотрим множества B_1 и B_2, такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:
$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$
- По формуле объединения событий:
$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$
- Если $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то события $X \in B_1$ и $x \in B_2$ несовместные, а значит $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$.

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:
$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, \text{ при } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$
Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.
Решение:
В данном случае $B_1 = (5, \infty)$ и $B_2 = [1, 6] \cup [8, 10]$, откуда:
$$P(X \in (5, \infty) | X \in [1, 6] \cup [8, 10]) = \frac{P(X \in [5, \infty] \cap ([1, 6] \cup [8, 10]))}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} =$$

- Рассмотрим множества B_1 и B_2, такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то события $X \in B_1$ и $x \in B_2$ несовместные, а значит $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$.

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, \text{ при } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.

Решение:

В данном случае $B_1 = (5, \infty)$ и $B_2 = [1, 6] \cup [8, 10]$, откуда:

$$P(X \in (5, \infty) | X \in [1, 6] \cup [8, 10]) = \frac{P(X \in [5, \infty] \cap ([1, 6] \cup [8, 10]))}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} =$$

$$= \frac{P(X \in [5, 6] \cup [8, 10])}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} = \frac{P(X \in [5, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [5, 6] \cap [8, 10])}{P(X \in [1, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [1, 6] \cap [8, 10])} =$$

Условное распределение

Расчет условных вероятностей

- Рассмотрим множества B_1 и B_2, такие, что $P(X \in B_1) > 0$ и $P(X \in B_2) > 0$.
- По формуле условной вероятности:

$$P(X \in B_1 | X \in B_2) = \frac{P(X \in (B_1 \cap B_2))}{P(X \in B_2)}$$

- По формуле объединения событий:

$$P(X \in B_1 \cup B_2) = P(X \in B_1) + P(X \in B_2) - P(X \in B_1 \cap B_2)$$

- Если $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то события $X \in B_1$ и $x \in B_2$ несовместные, а значит $P(X \in B_1 \cap B_2) = P(\{\emptyset\}) = 0$.

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, \text{ при } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что гномы добудут более 5 тонн золота, если они добыли от 1 до 6 или от 8 до 10 тонн золота.

Решение:

В данном случае $B_1 = (5, \infty)$ и $B_2 = [1, 6] \cup [8, 10]$, откуда:

$$P(X \in (5, \infty) | X \in [1, 6] \cup [8, 10]) = \frac{P(X \in [5, \infty] \cap ([1, 6] \cup [8, 10]))}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} =$$

$$= \frac{P(X \in [5, 6] \cup [8, 10])}{P(X \in [1, 6] \cup [8, 10])} = \frac{P(X \in [5, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [5, 6] \cap [8, 10])}{P(X \in [1, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(X \in [1, 6] \cap [8, 10])} =$$

$$= \frac{P(X \in [5, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(\{\emptyset\})}{P(X \in [1, 6]) + P(X \in [8, 10]) - P(\{\emptyset\})} = \frac{\int_5^6 0.02x dx + \int_8^{10} 0.02x dx}{\int_1^6 0.02x dx + \int_8^{10} 0.02x dx} = \frac{47}{71}$$

Условное распределение
Условная плотность

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X\in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), \text{ если } x \in B \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Условное распределение
Условная плотность

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:
$$f_{X|X\in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), \text{ если } x \in B \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$
- Условное математическое ожидание:
$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|X\in B}(x)$$

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X\in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), \text{ если } x \in B \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|X\in B}(x)$$

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, \text{ при } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X\in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), \text{ если } x \in B \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|X\in B}(x)$$

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, \text{ при } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

Решение:

$$P(X < 7) = \int_0^7 0.02x dx = 0.49$$

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X\in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), \text{ если } x \in B \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|X\in B}(x)$$

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, \text{ при } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

Решение:

$$P(X < 7) = \int_0^7 0.02x dx = 0.49$$

$$f_{X|X<7}(x) = \begin{cases} 0.02x/0.49, \text{ если } x \in [0, 7] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Условное распределение

Условная плотность

- Пусть B такое множество, что $P(X \in B) > 0$.
- Условная функция плотности считается как:

$$f_{X|X\in B}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P(X \in B), \text{ если } x \in B \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

- Условное математическое ожидание:

$$E(g(X)|X \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|X\in B}(x)$$

Пример:

- Тонны добытого гномами золота являются случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.02x, \text{ при } x \in [0, 10] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Найдите условную функцию плотности добытого золота и условное математическое ожидание, если известно, что было добыто менее 7 тонн золота.

Решение:

$$P(X < 7) = \int_0^7 0.02x dx = 0.49$$

$$f_{X|X<7}(x) = \begin{cases} 0.02x/0.49, \text{ если } x \in [0, 7] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$E(X|X < 7) = \int_0^7 x \times (0.02x)/0.49 dx \approx 4.67$$

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha\leq X\leq\beta}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < \alpha \\ \left(F_X(x) - F_X(\alpha)\right) / \left(F_X(\beta) - F_X(\alpha)\right), \text{ если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, \text{ если } x > \beta \end{cases}$$

Условное распределение

Усеченное распределение

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < \alpha \\ \left(F_X(x) - F_X(\alpha)\right) / \left(F_X(\beta) - F_X(\alpha)\right), \text{ если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, \text{ если } x > \beta \end{cases}$$

Доказательство: рассмотрим случай, когда $x \in [\alpha, \beta]$, другие случаи рассматриваются по аналогии:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = P\left(X \leq x|\alpha \leq X \leq \beta\right) = P(\alpha \leq X \leq x)/P(\alpha \leq X \leq \beta) = \left(F_X(x) - F_X(\alpha)\right) / \left(F_X(\beta) - F_X(\alpha)\right)$$

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha\leq X\leq\beta}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < \alpha \\ \left(F_X(x) - F_X(\alpha)\right) / \left(F_X(\beta) - F_X(\alpha)\right), \text{ если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, \text{ если } x > \beta \end{cases}$$

  Доказательство: рассмотрим случай, когда $x \in [\alpha, \beta]$, другие случаи рассматриваются по аналогии:

$$F_{X|\alpha\leq X\leq\beta}(x) = P\left(X \leq x|\alpha \leq X \leq \beta\right) = P(\alpha \leq X \leq x)/P(\alpha \leq X \leq \beta) = \left(F_X(x) - F_X(\alpha)\right) / \left(F_X(\beta) - F_X(\alpha)\right)$$

- Функция плотности и моменты находятся обычным образом:

$$f_{X|\alpha\leq X\leq\beta}(x) = dF_{X|\alpha\leq X\leq\beta}(x)/dx \qquad E(g(X)|\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta g(x) f_{X|\alpha\leq X\leq\beta}(x)$$

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:
$$F_{X|\alpha\leq X\leq\beta}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < \alpha \\ \left(F_X(x) - F_X(\alpha)\right) / \left(F_X(\beta) - F_X(\alpha)\right), \text{ если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, \text{ если } x > \beta \end{cases}$$
Доказательство: рассмотрим случай, когда $x \in [\alpha, \beta]$, другие случаи рассматриваются по аналогии:
$$F_{X|\alpha\leq X\leq\beta}(x) = P\left(X \leq x|\alpha \leq X \leq \beta\right) = P(\alpha \leq X \leq x)/P(\alpha \leq X \leq \beta) = \left(F_X(x) - F_X(\alpha)\right) / \left(F_X(\beta) - F_X(\alpha)\right)$$
- Функция плотности и моменты находятся обычным образом:
$$f_{X|\alpha\leq X\leq\beta}(x) = dF_{X|\alpha\leq X\leq\beta}(x)/dx \qquad E(g(X)|\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) f_{X|\alpha\leq X\leq\beta}(x)$$
Пример:
- Доход ресторана является случайной величиной, функция распределения которой при $x \in [5, 20]$ имеет вид:
$$F_X(x) = (x^2 - 25)/375$$
Найдите вероятность того, что доход ресторана не превысит 15, если известно, что он оказался больше 10, но меньше 18.

Условное распределение

Усеченное распределение

- Условное распределение $(X|\alpha \leq X \leq \beta)$ именуется **усеченным распределением** случайной величины X с верхней и нижней границами усечения, равными α и β соответственно, причем:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < \alpha \\ \left(F_X(x) - F_X(\alpha)\right) / \left(F_X(\beta) - F_X(\alpha)\right), \text{ если } x \in [\alpha, \beta] \\ 1, \text{ если } x > \beta \end{cases}$$

Доказательство: рассмотрим случай, когда $x \in [\alpha, \beta]$, другие случаи рассматриваются по аналогии:

$$F_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = P\left(X \leq x|\alpha \leq X \leq \beta\right) = P(\alpha \leq X \leq x)/P(\alpha \leq X \leq \beta) = \left(F_X(x) - F_X(\alpha)\right) / \left(F_X(\beta) - F_X(\alpha)\right)$$

- Функция плотности и моменты находятся обычным образом:

$$f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x) = dF_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x)/dx \qquad E(g(X)|\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) f_{X|\alpha \leq X \leq \beta}(x)$$

Пример:

- Доход ресторана является случайной величиной, функция распределения которой при $x \in [5, 20]$ имеет вид:

$$F_X(x) = (x^2 - 25)/375$$

Найдите вероятность того, что доход ресторана не превысит 15, если известно, что он оказался больше 10, но меньше 18.

Решение:

$$P(X \leq 15|10 \leq X \leq 18) = F_{X|10 \leq X \leq 18}(15) = \left(F_X(15) - F_X(10)\right) / \left(F_X(18) - F_X(10)\right) =$$
$$= (8/15 - 1/5)/(299/375 - 1/5) = 125/224$$

- Рассмотрим множество U. Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):

- Рассмотрим множество U. Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
  1. $U \in \Sigma$.

- Рассмотрим множество U. Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
  1. $U \in \Sigma$.
  2. $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$.

- Рассмотрим множество U. Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
    1. $U \in \Sigma$.
    2. $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$.
    3. Для любой счетной последовательности подмножеств $A_1, A_2, \cdots$ множества Σ соблюдается $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \in \Sigma$.

- Рассмотрим множество U. Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
  1. $U \in \Sigma$.
  2. $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$.
  3. Для любой счетной последовательности подмножеств $A_1, A_2, \cdots$ множества Σ соблюдается $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \in \Sigma$.
- Дополнительная информация о сигма-алгебрах
  - В последнем условии объединение можно заменить на пересечение, то есть $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots) \in \Sigma$.

- Рассмотрим множество U. Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
  1. $U \in \Sigma$.
  2. $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$.
  3. Для любой счетной последовательности подмножеств $A_1, A_2, \cdots$ множества Σ соблюдается $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \in \Sigma$.
- Дополнительная информация о сигма-алгебрах
  - В последнем условии объединение можно заменить на пересечение, то есть $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots) \in \Sigma$.
  - Пересечение сигма алгебр является сигма-алгеброй.

- Рассмотрим множество U. Система подмножеств Σ множества U является **сигма-алгеброй**, если соблюдено каждое из следующих условий (свойств):
  1. $U \in \Sigma$.
  2. $(U - A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$.
  3. Для любой счетной последовательности подмножеств $A_1, A_2, \cdots$ множества Σ соблюдается $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \in \Sigma$.
- Дополнительная информация о сигма-алгебрах
  - В последнем условии объединение можно заменить на пересечение, то есть $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots) \in \Sigma$.
  - Пересечение сигма алгебр является сигма-алгеброй.
  - Множество $\{\emptyset, \mathrm{U}\}$ и булеан множества U являются сигма-алгебрами множества U.

Продвинутый дополнительный материал

Пример Сигма-алберы

Проверим, является ли $\Sigma = \{\emptyset, \{1,2,3,4\}, \{1,2\}, \{3,4\}\}$ сигма-алгеброй множества $U = \{1,2,3,4\}$. Для удобства обозначим $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1,2,3,4\}, A_3 = \{1,2\}, A_4 = \{3,4\}$. Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

Проверим, является ли $\Sigma = \{\emptyset, \{1,2,3,4\}, \{1,2\}, \{3,4\}\}$ сигма-алгеброй множества $U = \{1,2,3,4\}$. Для удобства обозначим $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1,2,3,4\}, A_3 = \{1,2\}, A_4 = \{3,4\}$. Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

1. $U = \{1,2,3,4\} \subset \Sigma$.

Проверим, является ли $\Sigma = \{\emptyset, \{1,2,3,4\}, \{1,2\}, \{3,4\}\}$ сигма-алгеброй множества $U = \{1,2,3,4\}$. Для удобства обозначим $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1,2,3,4\}, A_3 = \{1,2\}, A_4 = \{3,4\}$. Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

1. $U = \{1,2,3,4\} \subset \Sigma$.
2. Сделаем несколько проверок, перебирая все подмножества $A \in \Sigma$:

$$\Omega - \emptyset = \{1,2,3,4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{1,2,3,4\} = \emptyset \in \Sigma$$
$$\Omega - \{1,2\} = \{3,4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{3,4\} = \{1,2\} \in \Sigma$$

Проверим, является ли $\Sigma = \{\emptyset, \{1,2,3,4\}, \{1,2\}, \{3,4\}\}$ сигма-алгеброй множества $U = \{1,2,3,4\}$. Для удобства обозначим $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1,2,3,4\}, A_3 = \{1,2\}, A_4 = \{3,4\}$. Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

1. $U = \{1,2,3,4\} \subset \Sigma$.
2. Сделаем несколько проверок, перебирая все подмножества $A \in \Sigma$:
$$\Omega - \emptyset = \{1,2,3,4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{1,2,3,4\} = \emptyset \in \Sigma$$
$$\Omega - \{1,2\} = \{3,4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{3,4\} = \{1,2\} \in \Sigma$$
3. Рассмотрим все возможные случаи объединения этих множеств:
$$A_1 \cup A_2 = \emptyset \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma \qquad A_1 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1,2\} = \{1,2\} \in \Sigma$$
$$A_1 \cup A_4 = \emptyset \cup \{3,4\} = \{3,4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_2 \cup A_4 = \{1,2,3,4\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_4 = \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1,2,3,4\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1,2,3,4\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_1 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{1,2,3,4\} \cup \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1,2,3,4\} \cup \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$

Проверим, является ли $\Sigma = \{\emptyset, \{1,2,3,4\}, \{1,2\}, \{3,4\}\}$ сигма-алгеброй множества $U = \{1,2,3,4\}$. Для удобства обозначим $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1,2,3,4\}, A_3 = \{1,2\}, A_4 = \{3,4\}$. Поочередно проверим соблюдение каждого из условий.

1. $U = \{1,2,3,4\} \subset \Sigma$.
2. Сделаем несколько проверок, перебирая все подмножества $A \in \Sigma$:
$$\Omega - \emptyset = \{1,2,3,4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{1,2,3,4\} = \emptyset \in \Sigma$$
$$\Omega - \{1,2\} = \{3,4\} \in \Sigma \qquad \Omega - \{3,4\} = \{1,2\} \in \Sigma$$
3. Рассмотрим все возможные случаи объединения этих множеств:
$$A_1 \cup A_2 = \emptyset \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma \qquad A_1 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1,2\} = \{1,2\} \in \Sigma$$
$$A_1 \cup A_4 = \emptyset \cup \{3,4\} = \{3,4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_2 \cup A_4 = \{1,2,3,4\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma \qquad A_2 \cup A_4 = \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1,2,3,4\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1,2,3,4\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_1 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{1,2,3,4\} \cup \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1,2,3,4\} \cup \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \Sigma$$

Поскольку все три условия соблюдены, то Σ является сигма-алгеброй множества U.

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U, для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U, содержащей S.

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-албера

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U, для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U, содержащей S.
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1,2) \in S$, $(3,\infty) \in S$ и т.д.

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-албера

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U, для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U, содержащей S.
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** $\mathcal{B}$ является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R, содержащей S. Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U, для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U, содержащей S.
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** $\mathcal{B}$ является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R, содержащей S. Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0, 1)$, $\{1\}$, $(0, 1]$, $(0, 1] \cup (3, 5.5)$ и множество иррациональных чисел $\overline{Q}$ принадлежат $\mathcal{B}$.

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U, для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U, содержащей S.
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** $\mathcal{B}$ является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R, содержащей S. Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0, 1)$, $\{1\}$, $(0, 1]$, $(0, 1] \cup (3, 5.5)$ и множество иррациональных чисел $\overline{Q}$ принадлежат $\mathcal{B}$.
Решение:
Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку $\mathcal{B}$ является минимальной сигма алгеброй R, содержащей S, то $S \subset \mathcal{B}$. Поэтому, из того, что $(0, 1) \in S$, следует $(0, 1) \in \mathcal{B}$.

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U, для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U, содержащей S.
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** $\mathcal{B}$ является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R, содержащей S. Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0, 1)$, $\{1\}$, $(0, 1]$, $(0, 1] \cup (3, 5.5)$ и множество иррациональных чисел $\overline{Q}$ принадлежат $\mathcal{B}$.
Решение:
Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку $\mathcal{B}$ является минимальной сигма алгеброй R, содержащей S, то $S \subset \mathcal{B}$. Поэтому, из того, что $(0, 1) \in S$, следует $(0, 1) \in \mathcal{B}$.
- По аналогии нетрудно показать, что $(-\infty, 1), (1, \infty) \in \mathcal{B}$. По свойству (3) имеем $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) \in \mathcal{B}$. Из свойства (1) следует $R \subset \mathcal{B}$. Применяя свойство (2) получаем $R - ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$.

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U, для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U, содержащей S.
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1,2) \in S$, $(3,\infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** $\mathcal{B}$ является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R, содержащей S. Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0,5] \in \mathcal{B}$, $(-3,8) \in \mathcal{B}$, $[0,5] \cup (6.5,9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0,1)$, $\{1\}$, $(0,1]$, $(0,1] \cup (3,5.5)$ и множество иррациональных чисел $\overline{Q}$ принадлежат $\mathcal{B}$.

Решение:

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку $\mathcal{B}$ является минимальной сигма алгеброй R, содержащей S, то $S \subset \mathcal{B}$. Поэтому, из того, что $(0,1) \in S$, следует $(0,1) \in \mathcal{B}$.
- По аналогии нетрудно показать, что $(-\infty,1),(1,\infty) \in \mathcal{B}$. По свойству (3) имеем $(-\infty,1) \cup (1,\infty) \in \mathcal{B}$. Из свойства (1) следует $R \subset \mathcal{B}$. Применяя свойство (2) получаем $R - ((-\infty,1) \cup (1,\infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$.
- Поскольку $\{1\} \in \mathcal{B}$ и $(0,1) \in \mathcal{B}$, то по свойству (3) получаем $(0,1) \cup \{1\} = (0,1] \in \mathcal{B}$

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U, для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U, содержащей S.
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1,2) \in S$, $(3,\infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** $\mathcal{B}$ является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R, содержащей S. Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0,5] \in \mathcal{B}$, $(-3,8) \in \mathcal{B}$, $[0,5] \cup (6.5,9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0,1)$, $\{1\}$, $(0,1]$, $(0,1] \cup (3,5.5)$ и множество иррациональных чисел $\overline{Q}$ принадлежат $\mathcal{B}$.
Решение:
Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку $\mathcal{B}$ является минимальной сигма алгеброй R, содержащей S, то $S \subset \mathcal{B}$. Поэтому, из того, что $(0,1) \in S$, следует $(0,1) \in \mathcal{B}$.
- По аналогии нетрудно показать, что $(-\infty,1),(1,\infty) \in \mathcal{B}$. По свойству (3) имеем $(-\infty,1) \cup (1,\infty) \in \mathcal{B}$. Из свойства (1) следует $R \subset \mathcal{B}$. Применяя свойство (2) получаем $R - ((-\infty,1) \cup (1,\infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$.
- Поскольку $\{1\} \in \mathcal{B}$ и $(0,1) \in \mathcal{B}$, то по свойству (3) получаем $(0,1) \cup \{1\} = (0,1] \in \mathcal{B}$
- Пользуясь полученным ранее результатом и свойством (3) имеем $(0,1] \cup (3,5.5) \in \mathcal{B}$.

Продвинутый дополнительный материал

Борелевская сигма-албера

- Рассмотрим все сигма-алгебры множества U, для которых множество $S \subset U$ является подмножеством. Пересечение этих сигма алгебр является **минимальной сигма-алгеброй** множества U, содержащей S.
- Обозначим через S множество, включающее все открытые интервалы, то есть $(1, 2) \in S$, $(3, \infty) \in S$ и т.д.
- **Борелевская сигма-алгебра** $\mathcal{B}$ является минимальной сигма-алгеброй множества вещественных чисел R, содержащей S. Она состоит из всех счетных объединений и пересечений открытых и закрытых интервалов. То есть $[0, 5] \in \mathcal{B}$, $(-3, 8) \in \mathcal{B}$, $[0, 5] \cup (6.5, 9) \in \mathcal{B}$ и т.д.

Пример: покажите, что $(0, 1)$, $\{1\}$, $(0, 1]$, $(0, 1] \cup (3, 5.5)$ и множество иррациональных чисел $\overline{Q}$ принадлежат $\mathcal{B}$.

Решение:

Будем использовать свойства сигма-алгебры.

- Поскольку $\mathcal{B}$ является минимальной сигма алгеброй R, содержащей S, то $S \subset \mathcal{B}$. Поэтому, из того, что $(0, 1) \in S$, следует $(0, 1) \in \mathcal{B}$.
- По аналогии нетрудно показать, что $(-\infty, 1), (1, \infty) \in \mathcal{B}$. По свойству (3) имеем $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) \in \mathcal{B}$. Из свойства (1) следует $R \subset \mathcal{B}$. Применяя свойство (2) получаем $R - ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\} \subset \mathcal{B}$.
- Поскольку $\{1\} \in \mathcal{B}$ и $(0, 1) \in \mathcal{B}$, то по свойству (3) получаем $(0, 1) \cup \{1\} = (0, 1] \in \mathcal{B}$
- Пользуясь полученным ранее результатом и свойством (3) имеем $(0, 1] \cup (3, 5.5) \in \mathcal{B}$.
- По аналогии с $\{1\} \in \mathcal{B}$ можно показать, что $\{x\} \in \mathcal{B}, \forall x \in R$. Поскольку множество рациональных чисел Q счетно, то по свойству (3) получаем $Q = \left(\bigcup\limits_{x,y\in\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}} \{x/y\}\right) \in \mathcal{B}$. Применяя свойство (2) имеем $\overline{Q} = (R - Q) \in \mathcal{B}$.

Продвинутый дополнительный материал

Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.

Продвинутый дополнительный материал

Определение непрерывных случайных величин

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X : \Omega \to R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B \in \mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X : \Omega \rightarrow R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B \in \mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда $\Omega = [1, 10]$.

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X : \Omega \to R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B \in \mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда $\Omega = [1, 10]$.
- Предположим, что пространство событий $\mathcal{F}$ состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \Omega\} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset [0, 10]\}$. Например, $A_1 = [2, 3]$ и $A_2 = (2, 5) \cup (7.5, 8]$ являются событиями, а $A_3 = [-3, 2]$ – нет, поскольку $A_3 \not\subset \Omega$.

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X:\Omega\to R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B\in\mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$.

Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда $\Omega=[1,10]$.
- Предположим, что пространство событий $\mathcal{F}$ состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть $\mathcal{F}=\{A\in\mathcal{B}:A\subset\Omega\}=\{A\in\mathcal{B}:A\subset[0,10]\}$. Например, $A_1=[2,3]$ и $A_2=(2,5)\cup(7.5,8]$ являются событиями, а $A_3=[-3,2]$ – нет, поскольку $A_3\not\subset\Omega$.
- Пусть завод продает весь произведенный металл по цене 3 рубля за тонну. Рассмотрим функцию $X(\omega)=3\omega$, отражающую выручку фирмы. Обратим внимание, что, например, $X^{-1}([6,15])$ является событием, поскольку:

$$X^{-1}([6,15])=\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in[6,15]\}=\{\omega\in[1,10] : 3\omega\in[6,15]\}=[6/3,15/3]=[2,5]\in\mathcal{F}$$

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X : \Omega \to R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B \in \mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда $\Omega = [1, 10]$.
- Предположим, что пространство событий $\mathcal{F}$ состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \Omega\} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset [0, 10]\}$. Например, $A_1 = [2, 3]$ и $A_2 = (2, 5) \cup (7.5, 8]$ являются событиями, а $A_3 = [-3, 2]$ – нет, поскольку $A_3 \not\subset \Omega$.
- Пусть завод продает весь произведенный металл по цене 3 рубля за тонну. Рассмотрим функцию $X(\omega) = 3\omega$, отражающую выручку фирмы. Обратим внимание, что, например, $X^{-1}([6, 15])$ является событием, поскольку:
$$X^{-1}([6, 15]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [6, 15]\} = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [6, 15]\} = [6/3, 15/3] = [2, 5] \in \mathcal{F}$$
- В более общем случае получаем:
$$X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [a, b]\} = [\max(a/3, 1), \min(b/3, 10)] \in \mathcal{F}$$

- Предположим, что пространство элементарных событий Ω бесконечно и не счетно.
- Рассмотрим функцию $X : \Omega \rightarrow R$. Она будет являться **непрерывной случайной величиной**, если для любого подмножества $B \in \mathcal{B}$ множество $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ является событием, то есть $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Пример:

- Случайный эксперимент заключается в том, что завод производит металл. Число тонн произведенного металла выступает в качестве результата этого случайного эксперимента. Завод может произвести любой объем металла в диапазоне от 1 до 10 тонн, откуда $\Omega = [1, 10]$.
- Предположим, что пространство событий $\mathcal{F}$ состоит из таких элементов борелевской сигма алгебры, что они принадлежат пространству элементарных событий, то есть $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \Omega\} = \{A \in \mathcal{B} : A \subset [0, 10]\}$. Например, $A_1 = [2, 3]$ и $A_2 = (2, 5) \cup (7.5, 8]$ являются событиями, а $A_3 = [-3, 2]$ – нет, поскольку $A_3 \not\subset \Omega$.
- Пусть завод продает весь произведенный металл по цене 3 рубля за тонну. Рассмотрим функцию $X(\omega) = 3\omega$, отражающую выручку фирмы. Обратим внимание, что, например, $X^{-1}([6, 15])$ является событием, поскольку:
$$X^{-1}([6, 15]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [6, 15]\} = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [6, 15]\} = [6/3, 15/3] = [2, 5] \in \mathcal{F}$$
- В более общем случае получаем:
$$X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in [1, 10] : 3\omega \in [a, b]\} = [\max(a/3, 1), \min(b/3, 10)] \in \mathcal{F}$$
- Далее остается показать, что продемонстрированный результат справедлив для любого счетного объединение и пересечение интервалов. Но в силу громоздкости этот шаг мы опустим.