

| | | | | | | |
|--|--------|---|---|---|---|---|
| Фамилия, имя и номер группы (печатными буквами): | Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | Балл | | | | | |

Информация о контрольной работе

1. Эту работу (листы) нельзя открывать до объявления преподавателем о начале контрольной работы. В противном случае оценка за работу будет обнулена.
2. На контрольной работе можно пользоваться простым калькулятором, ручками, линейкой и карандашом. Кроме того, можно использовать один лист А4, содержащий (по обеим сторонам) любую информацию, написанную от руки (самим студентом).
3. Контрольная выполняется индивидуально. Общение или взаимодействие с кем-либо или чем-либо (за исключением обозначенных выше разрешенных предметов) помимо преподавателей и ассистентов по курсу приведет к обнулению оценки за работу. Кроме того, нельзя иметь при себе электронные средства коммуникации, включая телефон, электронные часы и наушники.
4. Продолжительность контрольной работы составляет 150 минут (2 часа, 30 минут). После объявления об окончании времени контрольной работы необходимо прекратить вносить какие-либо правки в работу. В противном случае оценка за работу будет обнулена.
5. Досрочно покидать аудиторию можно лишь в течение первых 135 минут контрольной.
6. По окончании работы необходимо дождаться, пока преподаватели соберут **все** работы в аудитории и пересчитают их количество, сопоставив с числом находящихся в аудитории студентов.
7. Необходимо иметь с собой студенческий пропуск, который позволит преподавателям и ассистентам идентифицировать вашу личность.
8. Условия из предыдущих пунктов не распространяются на условия из последующих, если в тексте задачи или пункта непосредственно не указано иное.
9. Таблица стандартного нормального распределения расположена на странице, следующей за текстом задания.
10. Писать ответы можно как на передней, так и на задней частях листа.

1. Дана выборка $X = (X_1, \dots, X_5)$ и ее реализация $x = (2, 1, 1, 0, 1)$. Используя статистику, включающую все наблюдения в выборке¹, найдите реализацию:
- а) Пятого выборочного начального момента. **(2 балла)**
 - б) Скорректированной (исправленной) выборочной дисперсии. **(2 балла)**
 - в) Выборочной функции распределения. **(3 балла)**
 - г) Несмещенной оценки вероятности $P(2 > X_2 > 0)$. Предварительно покажите, что используемая вами оценка будет несмещенной. **(3 балла)**
 - д) Несмещенной оценки вероятности $P((X_1 - 1)X_2 > 0)$. Предварительно покажите, что используемая вами оценка будет несмещенной. **(5 баллов)**
2. Имеется последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots , такая, что:

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} (1 - k_n)e^{-(1-k_n)x}, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Определите:

- а) К чему сходится по распределению данная последовательность, если $k_n = \frac{1}{n}$. **(5 баллов)**
- б) К чему сходится по распределению данная последовательность, если $k_n = 1 - n$. **(5 баллов)**
- в) К чему сходится по распределению последовательность $X_1\sqrt{(X_2 + 1)}, X_3\sqrt{(X_4 + 1)}, \dots$, если **(5 баллов)**:

$$k_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } n \text{ нечетное} \\ 1 - n, & \text{если } n \text{ четное} \end{cases}$$

3. Каждый день Лаврентий и ученый кот играют в баскетбол. Каждый из них бросает мяч в корзину до первого (своего) промаха. При каждом броске независимо ни от каких факторов Лаврентий забрасывает мяч в корзину с вероятностью 0.6, а ученый кот – с вероятностью 0.8. При помощи центральной предельной теоремы рассчитайте, приблизительно, вероятность, с которой по результатам 100 игр:
- а) Лаврентий забросит более 130 мячей. **(10 баллов)**
 - б) Ученый кот забросит хотя бы на 200 мячей больше, чем Лаврентий. **(10 баллов)**
 - в) Число заброшенных Лаврентием мячей окажется по крайней мере в 2.48 раз больше, чем число игр, в которых он забросил хотя бы один мяч. **(10 баллов)**
4. Имеется выборка из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(t)-\mu)^2}{2}}, \text{ где } t \in R$$

Известно, что $E(X_1) = e^{\mu+0.5}$.

- а) Оцените параметр μ при помощи метода максимального правдоподобия. **(5 баллов)**

¹Например, для получения несмещенной оценки некоторой вероятности может быть достаточно одного наблюдения. Однако, по условию задачи требуется задействовать все наблюдения в выборке (по аналогии с тем, как это делалось на лекциях и семинарах), что повысит эффективность соответствующих оценок.

- б) Запишите асимптотическую дисперсию найденной в предыдущем пункте ММП оценки. **(5 баллов)**
- в) Найдите асимптотическую дисперсию ММП оценки математического ожидания наблюдения. **(5 баллов)**
- г) По выборке из $n = 100$ наблюдений рассчитайте, приблизительно, вероятность, с которой найденная вами ММП оценка математического ожидания отклонится (по абсолютному значению) от истинного значения более, чем на 0.1, если известно, что $\mu = 0.5$. **(5 баллов)**

5. Имеется выборка из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} \frac{3t^2}{2\theta^3}, & \text{при } t \in [-\theta, \theta] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \text{ где } \theta > 0$$

- а) Найдите функцию плотности и математическое ожидание $|X_1|$. **(2 балла)**
- б) Найдите оценку параметра θ при помощи метода моментов. **(2 балла)**
- в) Рассчитайте эффективность любой оценки, найденной при помощи метода моментов. **(3 балла)**
Подсказка: рассмотрите новую выборку, состоящую из модулей наблюдений изначальной выборки.
- г) Найдите оценку параметра θ при помощи метода максимального правдоподобия. **(3 балла)**
- д) Рассчитайте информацию Фишера или обоснуйте, почему в данном случае она не определена. **(1 балл)**
- е) Проверьте, является ли найденная вами оценка несмещенной. Если нет, то попытайтесь скорректировать ее таким образом, чтобы она стала несмещенной. **(3 балла)**
- ж) Вычислите эффективность ММП оценки. **(3 балла)**
- з) Найдите оценку, которая будет более эффективна, чем ММП оценка. Покажите, что она действительно является более эффективной. **(3 балла)**

Таблица стандартного нормального распределения

| x | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.67 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |

