

# Теория Вероятностей и Статистика

## Условная вероятность

Потанин Богдан Станиславович

доцент, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2023-2024

# Условная вероятность

## Формула условной вероятности

- Пусть имеется пространство элементарных событий  $\Omega$  и пространство событий  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , а также события  $A, B \in \mathcal{F}$ .

# Условная вероятность

## Формула условной вероятности

- Пусть имеется пространство элементарных событий  $\Omega$  и пространство событий  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , а также события  $A, B \in \mathcal{F}$ .
- Условная вероятность позволяет ответить на вопрос о том, какова вероятность события  $A$ , если событие  $B$  уже произошло.

# Условная вероятность

## Формула условной вероятности

- Пусть имеется пространство элементарных событий  $\Omega$  и пространство событий  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , а также события  $A, B \in \mathcal{F}$ .
- Условная вероятность позволяет ответить на вопрос о том, какова вероятность события  $A$ , если событие  $B$  уже произошло.
- Рассчитать вероятность события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ , можно при помощи **формулы условной вероятности**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ где } P(B) > 0$$

# Условная вероятность

## Формула условной вероятности

- Пусть имеется пространство элементарных событий  $\Omega$  и пространство событий  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , а также события  $A, B \in \mathcal{F}$ .
- Условная вероятность позволяет ответить на вопрос о том, какова вероятность события  $A$ , если событие  $B$  уже произошло.
- Рассчитать вероятность события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ , можно при помощи **формулы условной вероятности**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ где } P(B) > 0$$

### Пример:

- Бросается шестигранный кубик. Событие  $A = \{2, 4, 6\}$  - выпало четное число, событие  $B = \{4, 5, 6\}$  - выпало число больше трех. Пространство элементарных событий  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

# Условная вероятность

## Формула условной вероятности

- Пусть имеется пространство элементарных событий  $\Omega$  и пространство событий  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , а также события  $A, B \in \mathcal{F}$ .
- Условная вероятность позволяет ответить на вопрос о том, какова вероятность события  $A$ , если событие  $B$  уже произошло.
- Рассчитать вероятность события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ , можно при помощи **формулы условной вероятности**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ где } P(B) > 0$$

### Пример:

- Бросается шестигранный кубик. Событие  $A = \{2, 4, 6\}$  - выпало четное число, событие  $B = \{4, 5, 6\}$  - выпало число больше трех. Пространство элементарных событий  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- Вероятность того, что выпадет четное число, при условии, что выпало число больше трех, составляет:

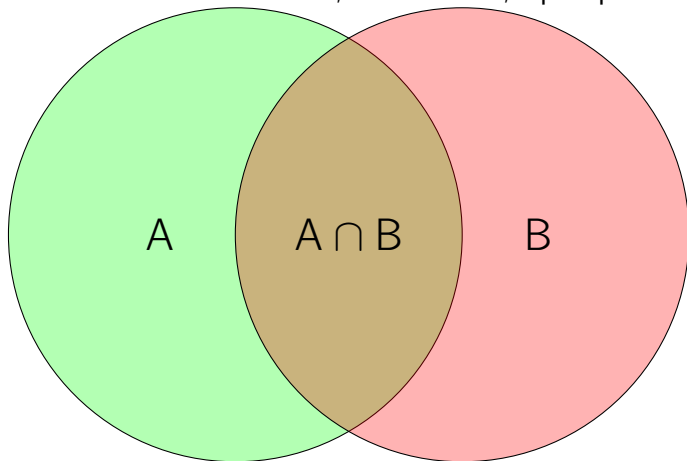
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{4, 6\})}{P(\{4, 5, 6\})} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

# Условная вероятность

## Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий  $\Omega$ .

**Обозначения:** Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый

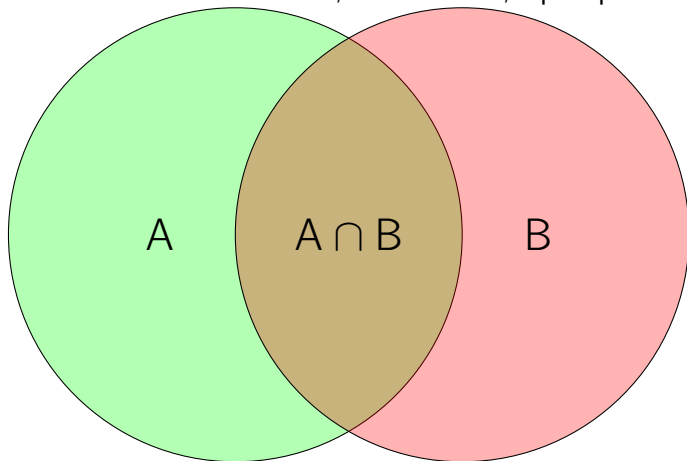


# Условная вероятность

## Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий  $\Omega$ .

**Обозначения:** Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$$P(A) = (\text{З и Ко}) / \text{Б}$$

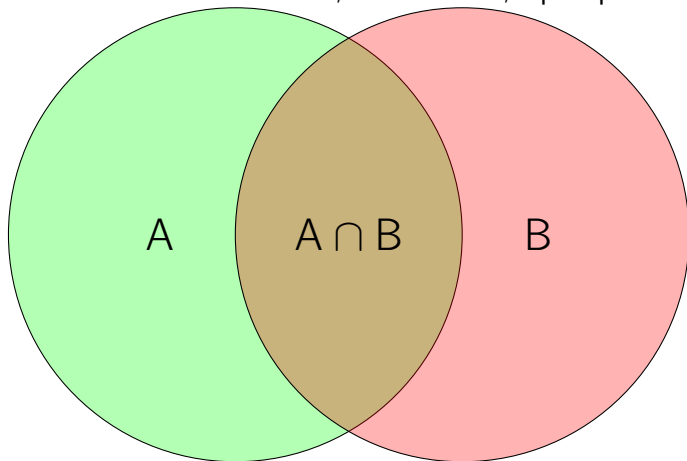


# Условная вероятность

## Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий  $\Omega$ .

**Обозначения:** Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$$P(A) = (\text{З и Ко}) / \text{Б}$$

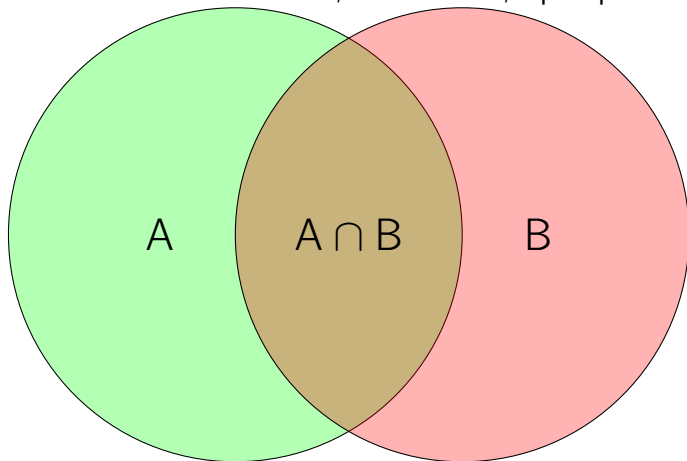
$$P(B) = (\text{Кр и Ко}) / \text{Б}$$

# Условная вероятность

## Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий  $\Omega$ .

**Обозначения:** Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$$P(A) = (\text{З и Ко}) / \text{Б}$$

$$P(B) = (\text{Кр и Ко}) / \text{Б}$$

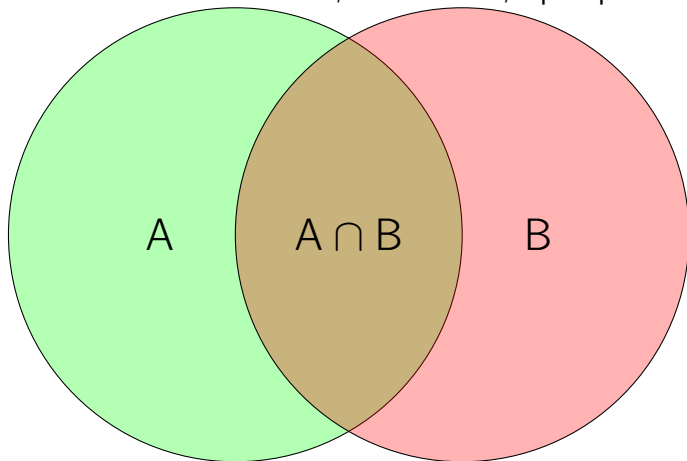
$$P(A \cap B) = \text{Ко} / \text{Б}$$

# Условная вероятность

## Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий  $\Omega$ .

**Обозначения:** Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$$P(A) = (\text{З и Ко}) / \text{Б}$$

$$P(B) = (\text{Кр и Ко}) / \text{Б}$$

$$P(A \cap B) = \text{Ко} / \text{Б}$$

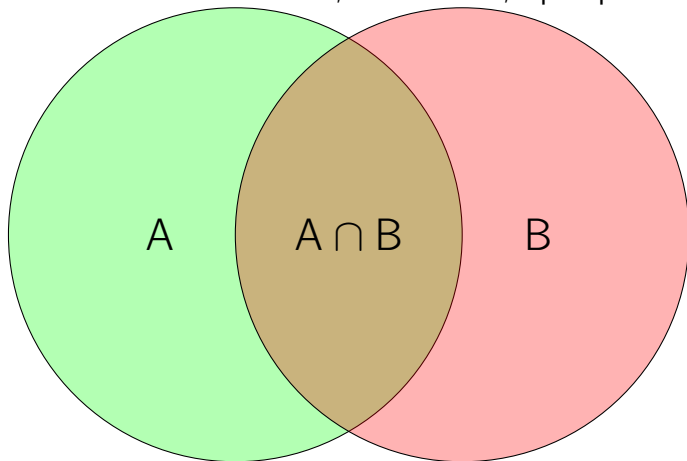
$$P(A|B) = \text{Ко} / (\text{Кр и Ко})$$

# Условная вероятность

## Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий  $\Omega$ .

**Обозначения:** Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$$P(A) = (\text{З и Ко}) / \text{Б}$$

$$P(B) = (\text{Кр и Ко}) / \text{Б}$$

$$P(A \cap B) = \text{Ко} / \text{Б}$$

$$P(A|B) = \text{Ко} / (\text{Кр и Ко})$$

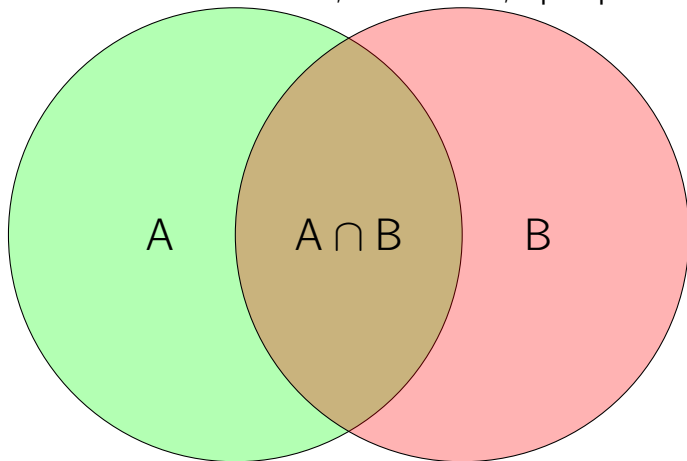
$$P(B|A) = \text{Ко} / (\text{З и Ко})$$

# Условная вероятность

## Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий  $\Omega$ .

**Обозначения:** Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$$P(A) = (\text{З и Ко}) / \text{Б}$$

$$P(B) = (\text{Кр и Ко}) / \text{Б}$$

$$P(A \cap B) = \text{Ко} / \text{Б}$$

$$P(A|B) = \text{Ко} / (\text{Кр и Ко})$$

$$P(B|A) = \text{Ко} / (\text{З и Ко})$$

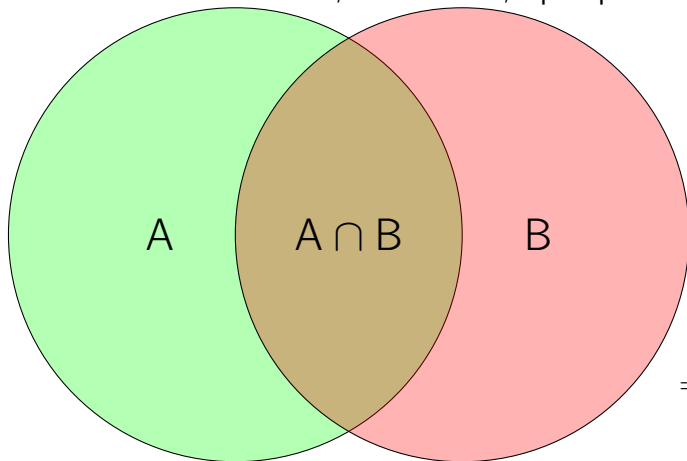
$$P(A|B) = \text{Ко} / (\text{Кр и Ко}) =$$

# Условная вероятность

## Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий  $\Omega$ .

**Обозначения:** Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$$P(A) = (\text{З и Ко}) / \text{Б}$$

$$P(B) = (\text{Кр и Ко}) / \text{Б}$$

$$P(A \cap B) = \text{Ко} / \text{Б}$$

$$P(A|B) = \text{Ко} / (\text{Кр и Ко})$$

$$P(B|A) = \text{Ко} / (\text{З и Ко})$$

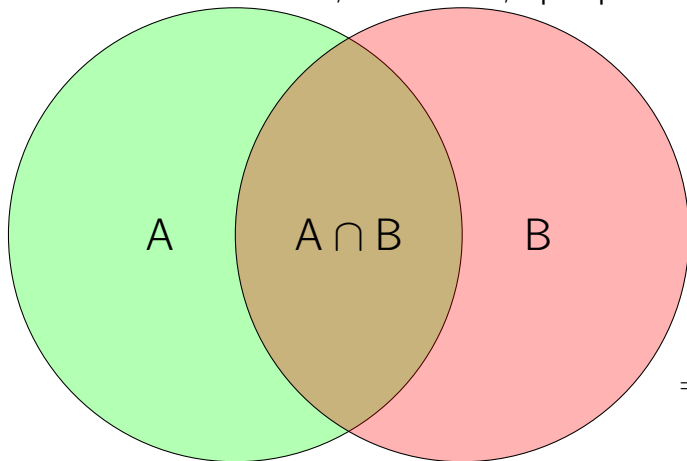
$$\begin{aligned} P(A|B) &= \text{Ко} / (\text{Кр и Ко}) = \\ &= (\text{Ко} / \text{Б}) / ((\text{Кр и Ко}) / \text{Б}) = \end{aligned}$$

# Условная вероятность

## Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий  $\Omega$ .

**Обозначения:** Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$$P(A) = (\text{З и Ко}) / \text{Б}$$

$$P(B) = (\text{Кр и Ко}) / \text{Б}$$

$$P(A \cap B) = \text{Ко} / \text{Б}$$

$$P(A|B) = \text{Ко} / (\text{Кр и Ко})$$

$$P(B|A) = \text{Ко} / (\text{З и Ко})$$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \text{Ко} / (\text{Кр и Ко}) = \\ &= (\text{Ко} / \text{Б}) / ((\text{Кр и Ко}) / \text{Б}) = \\ &= P(A \cap B) / P(B) \end{aligned}$$

# Условная вероятность

## Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности:  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ , где  $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие  $A$ ) и вовремя (событие  $B$ ) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.



# Условная вероятность

## Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности:  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ , где  $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие  $A$ ) и вовремя (событие  $B$ ) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.

**Решение:**  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$

# Условная вероятность

## Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности:  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ , где  $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие  $A$ ) и вовремя (событие  $B$ ) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.

**Решение:**  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$

- Если Маша готовится к экзамену (событие  $B$ ), то она сдает его (событие  $A$ ) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.

# Условная вероятность

## Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности:  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ , где  $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие  $A$ ) и вовремя (событие  $B$ ) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.

**Решение:**  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$

- Если Маша готовится к экзамену (событие  $B$ ), то она сдает его (событие  $A$ ) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.

**Решение:**  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$

# Условная вероятность

## Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности:  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ , где  $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие  $A$ ) и вовремя (событие  $B$ ) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.

**Решение:**  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$

- Если Маша готовится к экзамену (событие  $B$ ), то она сдает его (событие  $A$ ) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.

**Решение:**  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$

- Геннадий с некоторой постоянной вероятностью посещает пары по Математике (событие  $A$ ) и Экономике (событие  $B$ ). Вероятность того, что он посетит оба занятия, составляет 0.6. Вероятность того, что он посетит занятие по математике, при условии, что он был на паре по экономике, равняется 0.7. Найдите вероятность, с которой Геннадий посетит занятие по экономике.

# Условная вероятность

## Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности:  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ , где  $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие  $A$ ) и вовремя (событие  $B$ ) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.

**Решение:**  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$

- Если Маша готовится к экзамену (событие  $B$ ), то она сдает его (событие  $A$ ) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.

**Решение:**  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$

- Геннадий с некоторой постоянной вероятностью посещает пары по Математике (событие  $A$ ) и Экономике (событие  $B$ ). Вероятность того, что он посетит оба занятия, составляет 0.6. Вероятность того, что он посетит занятие по математике, при условии, что он был на паре по экономике, равняется 0.7. Найдите вероятность, с которой Геннадий посетит занятие по экономике.

**Решение:**  $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}$ .

# Условная вероятность

## Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности:  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ , где  $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие  $A$ ) и вовремя (событие  $B$ ) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.

**Решение:**  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$

- Если Маша готовится к экзамену (событие  $B$ ), то она сдает его (событие  $A$ ) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.

**Решение:**  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$

- Геннадий с некоторой постоянной вероятностью посещает пары по Математике (событие  $A$ ) и Экономике (событие  $B$ ). Вероятность того, что он посетит оба занятия, составляет 0.6. Вероятность того, что он посетит занятие по математике, при условии, что он был на паре по экономике, равняется 0.7. Найдите вероятность, с которой Геннадий посетит занятие по экономике.

**Решение:**  $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}$ .

- Ванесса добавляет в салат огурцы (событие  $A$ ) с вероятностью 0.2, а помидоры (событие  $B$ ) - с вероятностью 0.3. При этом она готовит салат без огурцов и помидоров с вероятностью 0.6. Найдите вероятность того, что Ванесса добавила в салат огурцы, при условии, что в нем оказались помидоры.

# Условная вероятность

## Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности:  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ , где  $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие  $A$ ) и вовремя (событие  $B$ ) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.

**Решение:**  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$

- Если Маша готовится к экзамену (событие  $B$ ), то она сдает его (событие  $A$ ) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.

**Решение:**  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$

- Геннадий с некоторой постоянной вероятностью посещает пары по Математике (событие  $A$ ) и Экономике (событие  $B$ ). Вероятность того, что он посетит оба занятия, составляет 0.6. Вероятность того, что он посетит занятие по математике, при условии, что он был на паре по экономике, равняется 0.7. Найдите вероятность, с которой Геннадий посетит занятие по экономике.

**Решение:**  $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}$ .

- Ванесса добавляет в салат огурцы (событие  $A$ ) с вероятностью 0.2, а помидоры (событие  $B$ ) - с вероятностью 0.3. При этом она готовит салат без огурцов и помидоров с вероятностью 0.6. Найдите вероятность того, что Ванесса добавила в салат огурцы, при условии, что в нем оказались помидоры.

**Решение:**  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (1 - P(\overline{A \cup B})) = 0.2 + 0.3 - (1 - 0.6) = 0.1$

# Условная вероятность

## Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности:  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ , где  $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие  $A$ ) и вовремя (событие  $B$ ) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.

**Решение:**  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$

- Если Маша готовится к экзамену (событие  $B$ ), то она сдает его (событие  $A$ ) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.

**Решение:**  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$

- Геннадий с некоторой постоянной вероятностью посещает пары по Математике (событие  $A$ ) и Экономике (событие  $B$ ). Вероятность того, что он посетит оба занятия, составляет 0.6. Вероятность того, что он посетит занятие по математике, при условии, что он был на паре по экономике, равняется 0.7. Найдите вероятность, с которой Геннадий посетит занятие по экономике.

**Решение:**  $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}$ .

- Ванесса добавляет в салат огурцы (событие  $A$ ) с вероятностью 0.2, а помидоры (событие  $B$ ) - с вероятностью 0.3. При этом она готовит салат без огурцов и помидоров с вероятностью 0.6. Найдите вероятность того, что Ванесса добавила в салат огурцы, при условии, что в нем оказались помидоры.

**Решение:**  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (1 - P(\overline{A \cup B})) = 0.2 + 0.3 - (1 - 0.6) = 0.1$   
 $\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$



- Последовательность условий можно представить в форме пересечения соответствующих условий:

$$P((A|B)|C) = P(A|B \cap C)$$

# Условная вероятность

## Последовательность условий

- Последовательность условий можно представить в форме пересечения соответствующих условий:

$$P((A|B)|C) = P(A|B \cap C)$$

### Пример:

- Бросается правильный шестигранный кубик. Событие  $A$  - выпало четное число, событие  $B$  - выпало число, кратное трем, событие  $C$  - выпало число больше двух. Найдите вероятность того, что выпало четное число, при условии, что выпало число кратное трем, если известно, что выпавшее число оказалось больше двух.

# Условная вероятность

## Последовательность условий

- Последовательность условий можно представить в форме пересечения соответствующих условий:

$$P((A|B)|C) = P(A|B \cap C)$$

### Пример:

- Бросается правильный шестигранный кубик. Событие  $A$  - выпало четное число, событие  $B$  - выпало число, кратное трем, событие  $C$  - выпало число больше двух. Найдите вероятность того, что выпало четное число, при условии, что выпало число кратное трем, если известно, что выпавшее число оказалось больше двух.

**Решение:**  $P((A|B)|C) = P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(\{6\})}{P(\{3,6\})} = \frac{1}{2}$

# Условная вероятность

## Формула пересечения событий

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

# Условная вероятность

## Формула пересечения событий

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Из нее получаем **формулу для вероятности пересечения трех событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

# Условная вероятность

## Формула пересечения событий

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Из нее получаем **формулу для вероятности пересечения трех событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2 \cap A_3|A_1) = \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P((A_3|A_1)|A_2)) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

# Условная вероятность

## Формула пересечения событий

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Из нее получаем **формулу для вероятности пересечения трех событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2 \cap A_3|A_1) = \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P((A_3|A_1)|A_2)) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

По аналогии выводится **формула вероятности пересечения произвольного числа событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

# Условная вероятность

## Формула пересечения событий

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Из нее получаем **формулу для вероятности пересечения трех событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2 \cap A_3|A_1) = \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P((A_3|A_1)|A_2)) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

По аналогии выводится **формула вероятности пересечения произвольного числа событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

**Пример:**

- Лаврентий сытно завтракает (событие  $A$ ) с вероятностью 0.5. Если он сытно позавтракает, то сдаст экзамен (событие  $B$ ) с вероятностью 0.8. Если он сдаст экзамен и сытно позавтракает, то будет счастлив (событие  $C$ ) с вероятностью 0.9. Найдите вероятность того, что Лаврентий сытно позавтракает, сдаст экзамен и будет счастлив.



# Условная вероятность

## Формула пересечения событий

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Из нее получаем **формулу для вероятности пересечения трех событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2 \cap A_3|A_1) = \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P((A_3|A_1)|A_2)) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

По аналогии выводится **формула вероятности пересечения произвольного числа событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

**Пример:**

- Лаврентий сытно завтракает (событие  $A$ ) с вероятностью 0.5. Если он сытно позавтракает, то сдаст экзамен (событие  $B$ ) с вероятностью 0.8. Если он сдаст экзамен и сытно позавтракает, то будет счастлив (событие  $C$ ) с вероятностью 0.9. Найдите вероятность того, что Лаврентий сытно позавтракает, сдаст экзамен и будет счастлив.

**Решение:**  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) = 0.5 \times 0.8 \times 0.9 = 0.36$

# Условная вероятность

## Формула полной вероятности

Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ) таких, что:

# Условная вероятность

## Формула полной вероятности

Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ) таких, что:

- они являются **попарно несовместными**, то есть  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , где  $i, j \in I$ .

# Условная вероятность

## Формула полной вероятности

Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ) таких, что:

- они являются **попарно несовместными**, то есть  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , где  $i, j \in I$ .
- они формируют **полную группу событий**, то есть их объединение дает все пространство элементарных событий:  $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \Omega$ .

# Условная вероятность

## Формула полной вероятности

Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ) таких, что:

- они являются **попарно несовместными**, то есть  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , где  $i, j \in I$ .
- они формируют **полную группу событий**, то есть их объединение дает все пространство элементарных событий:  $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \Omega$ .

При соблюдении этих условий справедлива **формула полной вероятности**:

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)$$

# Условная вероятность

## Формула полной вероятности

Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ) таких, что:

- они являются **попарно несовместными**, то есть  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , где  $i, j \in I$ .
- они формируют **полную группу событий**, то есть их объединение дает все пространство элементарных событий:  $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \Omega$ .

При соблюдении этих условий справедлива **формула полной вероятности**:

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)$$

### Пример:

- Хомяк Мульч пытается попасть в амбар с зерном. Если сторож уснет (событие  $A_1$ ), то хомяку удастся пробраться в амбар (событие  $B$ ) с вероятностью 0.9. Если сторож будет смотреть сериал (событие  $A_2$ ), то вероятность попасть в амбар составит 0.7. В противном случае сторож будет бдителен (событие  $A_3$ ), поэтому в заветную долину лакомств хомяк попадет лишь с вероятностью 0.6. Вероятность того, что сторож заснет, составляет 0.3, а того, что он будет смотреть сериал 0.5. Найдем вероятность того, что хомяк попадет в амбар.

# Условная вероятность

## Формула полной вероятности

Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ) таких, что:

- они являются **попарно несовместными**, то есть  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , где  $i, j \in I$ .
- они формируют **полную группу событий**, то есть их объединение дает все пространство элементарных событий:  $(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \Omega$ .

При соблюдении этих условий справедлива **формула полной вероятности**:

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)$$

### Пример:

- Хомяк Мульч пытается попасть в амбар с зерном. Если сторож уснет (событие  $A_1$ ), то хомяку удастся пробраться в амбар (событие  $B$ ) с вероятностью 0.9. Если сторож будет смотреть сериал (событие  $A_2$ ), то вероятность попасть в амбар составит 0.7. В противном случае сторож будет бдителен (событие  $A_3$ ), поэтому в заветную долину лакомств хомяк попадет лишь с вероятностью 0.6. Вероятность того, что сторож заснет, составляет 0.3, а того, что он будет смотреть сериал 0.5. Найдем вероятность того, что хомяк попадет в амбар.

**Решение:**  $P(B) = P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2) \times P(A_2) + P(B|A_3) \times P(A_3) =$   
 $= 0.9 \times 0.3 + 0.7 \times 0.5 + 0.6 \times (1 - 0.3 - 0.5) = 0.74$

# Условная вероятность

## Формула Байеса

Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Тогда комбинируя формулу условной вероятности и формулу полной вероятности можно получить **формулу Байеса**:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)}, \forall k \in I$$



# Условная вероятность

## Формула Байеса

Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Тогда комбинируя формулу условной вероятности и формулу полной вероятности можно получить **формулу Байеса**:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)}, \forall k \in I$$

### Пример:

- Хомяк Мульч пытается попасть в амбар с зерном. Если сторож уснет (событие  $A_1$ ), то хомяку удастся пробраться в амбар (событие  $B$ ) с вероятностью 0.9. Если сторож будет смотреть сериал (событие  $A_2$ ), то вероятность попасть в амбар составит 0.7. В противном случае сторож будет бдителен (событие  $A_3$ ), поэтому в заветную долину лакомств хомяк попадет лишь с вероятностью 0.6. Вероятность того, что сторож заснет, составляет 0.3, а того, что он будет смотреть сериал 0.5. Найдём вероятность того, что сторож спит, если Хомяку удалось проникнуть в амбар.

# Условная вероятность

## Формула Байеса

Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Тогда комбинируя формулу условной вероятности и формулу полной вероятности можно получить **формулу Байеса**:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)}, \forall k \in I$$

### Пример:

- Хомяк Мульч пытается попасть в амбар с зерном. Если сторож уснет (событие  $A_1$ ), то хомяку удастся пробраться в амбар (событие  $B$ ) с вероятностью 0.9. Если сторож будет смотреть сериал (событие  $A_2$ ), то вероятность попасть в амбар составит 0.7. В противном случае сторож будет бдителен (событие  $A_3$ ), поэтому в заветную долину лакомств хомяк попадет лишь с вероятностью 0.6. Вероятность того, что сторож заснет, составляет 0.3, а того, что он будет смотреть сериал 0.5. Найдем вероятность того, что сторож спит, если Хомяку удалось проникнуть в амбар.

**Решение:**

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2) \times P(A_2) + P(B|A_3) \times P(A_3)} = \\ &= \frac{0.9 \times 0.3}{0.9 \times 0.3 + 0.7 \times 0.5 + 0.6 \times (1 - 0.3 - 0.5)} = \frac{27}{74} \approx 0.365 \end{aligned}$$

# Условная вероятность

## Дополнительные примеры

### Примеры:

- В урне лежат 5 белых и 10 черных шариков. Вы достаете 3 шарика. Вычислите вероятность с которой вы достанете сперва черный (событие  $B_1$ ), затем белый (событие  $W_2$ ), а потом вновь черный шарик (событие  $B_3$ ).

# Условная вероятность

## Дополнительные примеры

### Примеры:

- В урне лежат 5 белых и 10 черных шариков. Вы достаете 3 шарика. Вычислите вероятность с которой вы достанете сперва черный (событие  $B_1$ ), затем белый (событие  $W_2$ ), а потом вновь черный шарик (событие  $B_3$ ).

Решение:

$$P(B_1 \cap W_2 \cap B_3) = P(B_1)P(W_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap W_2) = \frac{10}{15} \times \frac{5}{15-1} \times \frac{10-1}{15-2} \approx 0.165$$

# Условная вероятность

## Дополнительные примеры

### Примеры:

- В урне лежат 5 белых и 10 черных шариков. Вы достаете 3 шарика. Вычислите вероятность с которой вы достанете сперва черный (событие  $B_1$ ), затем белый (событие  $W_2$ ), а потом вновь черный шарик (событие  $B_3$ ).

Решение:

$$P(B_1 \cap W_2 \cap B_3) = P(B_1)P(W_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap W_2) = \frac{10}{15} \times \frac{5}{15-1} \times \frac{10-1}{15-2} \approx 0.165$$

- В первой урне лежат 2 белых и 3 черных шарика. Во второй – 2 черных и 3 белых шарика. В третьей урне лежат 5 белых шариков. Вам с равной вероятностью дают одну из урн и вы вытаскиваете из нее шарик. Определите, с какой вероятностью вам дали первую урну (событие  $U_1$ ), если известно, что вы достали белый шарик (событие  $B$ ).

# Условная вероятность

## Дополнительные примеры

### Примеры:

- В урне лежат 5 белых и 10 черных шариков. Вы достаете 3 шарика. Вычислите вероятность с которой вы достанете сперва черный (событие  $B_1$ ), затем белый (событие  $W_2$ ), а потом вновь черный шарик (событие  $B_3$ ).

Решение:

$$P(B_1 \cap W_2 \cap B_3) = P(B_1)P(W_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap W_2) = \frac{10}{15} \times \frac{5}{15-1} \times \frac{10-1}{15-2} \approx 0.165$$

- В первой урне лежат 2 белых и 3 черных шарика. Во второй – 2 черных и 3 белых шарика. В третьей урне лежат 5 белых шариков. Вам с равной вероятностью дают одну из урн и вы вытаскиваете из нее шарик. Определите, с какой вероятностью вам дали первую урну (событие  $U_1$ ), если известно, что вы достали белый шарик (событие  $B$ ).

Решение:

$$P(B) = P(B|U_1)P(U_1) + P(B|U_2)P(U_2) + P(B|U_3)P(U_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(U_1|B) = \frac{P(B|U_1)P(U_1)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

# Независимость событий

## Попарная независимость

- События  $A$  и  $B$  **независимы** тогда и только тогда, когда  $P(A|B) = P(A)$  и  $P(B|A) = P(B)$ , что эквивалентно  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

# Независимость событий

## Попарная независимость

- События  $A$  и  $B$  **независимы** тогда и только тогда, когда  $P(A|B) = P(A)$  и  $P(B|A) = P(B)$ , что эквивалентно  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .
- Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Эти события являются **попарно независимыми**, тогда и только тогда, когда любые два события являются независимыми, то есть  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \forall i \neq j$ , где  $i, j \in I$ .



# Независимость событий

## Попарная независимость

- События  $A$  и  $B$  **независимы** тогда и только тогда, когда  $P(A|B) = P(A)$  и  $P(B|A) = P(B)$ , что эквивалентно  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .
- Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Эти события являются **попарно независимыми**, тогда и только тогда, когда любые два события являются независимыми, то есть  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \forall i \neq j$ , где  $i, j \in I$ .

### Пример:

Вы бросили кубик. Событие  $A$  - выпало четно число, событие  $B$  - выпало число больше двух, событие  $C$  - выпало число больше трех. Проверьте, являются ли эти события попарно независимыми.

**Подсказка:** поочередно проверьте независимость событий 1)  $A$  и  $B$ , 2)  $A$  и  $C$ , 3)  $B$  и  $C$ .

# Независимость событий

## Попарная независимость

- События  $A$  и  $B$  **независимы** тогда и только тогда, когда  $P(A|B) = P(A)$  и  $P(B|A) = P(B)$ , что эквивалентно  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .
- Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Эти события являются **попарно независимыми**, тогда и только тогда, когда любые два события являются независимыми, то есть  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \forall i \neq j$ , где  $i, j \in I$ .

### Пример:

Вы бросили кубик. Событие  $A$  - выпало четно число, событие  $B$  - выпало число больше двух, событие  $C$  - выпало число больше трех. Проверьте, являются ли эти события попарно независимыми.

**Подсказка:** поочередно проверьте независимость событий 1)  $A$  и  $B$ , 2)  $A$  и  $C$ , 3)  $B$  и  $C$ .

- События  $A$  и  $B$  независимы, поскольку  $P(A \cap B) = P(\{4, 6\}) = \frac{1}{3}$  и  $P(A) \times P(B) = P(\{2, 4, 6\}) \times P(\{3, 4, 5, 6\}) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$ , а значит  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

# Независимость событий

## Попарная независимость

- События  $A$  и  $B$  **независимы** тогда и только тогда, когда  $P(A|B) = P(A)$  и  $P(B|A) = P(B)$ , что эквивалентно  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .
- Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Эти события являются **попарно независимыми**, тогда и только тогда, когда любые два события являются независимыми, то есть  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \forall i \neq j$ , где  $i, j \in I$ .

### Пример:

Вы бросили кубик. Событие  $A$  - выпало четно число, событие  $B$  - выпало число больше двух, событие  $C$  - выпало число больше трех. Проверьте, являются ли эти события попарно независимыми.

**Подсказка:** поочередно проверьте независимость событий 1)  $A$  и  $B$ , 2)  $A$  и  $C$ , 3)  $B$  и  $C$ .

- События  $A$  и  $B$  независимы, поскольку  $P(A \cap B) = P(\{4, 6\}) = \frac{1}{3}$  и  $P(A) \times P(B) = P(\{2, 4, 6\}) \times P(\{3, 4, 5, 6\}) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$ , а значит  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .
- События  $A$  и  $C$  **не** являются независимыми, поскольку  $P(A \cap C) = P(\{4, 6\}) = \frac{2}{6}$  и  $P(A) \times P(C) = P(\{2, 4, 6\}) \times P(\{4, 5, 6\}) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$ , а значит  $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$ .

# Независимость событий

## Попарная независимость

- События  $A$  и  $B$  **независимы** тогда и только тогда, когда  $P(A|B) = P(A)$  и  $P(B|A) = P(B)$ , что эквивалентно  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .
- Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Эти события являются **попарно независимыми**, тогда и только тогда, когда любые два события являются независимыми, то есть  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \forall i \neq j$ , где  $i, j \in I$ .

### Пример:

Вы бросили кубик. Событие  $A$  - выпало четно число, событие  $B$  - выпало число больше двух, событие  $C$  - выпало число больше трех. Проверьте, являются ли эти события попарно независимыми.

**Подсказка:** поочередно проверьте независимость событий 1)  $A$  и  $B$ , 2)  $A$  и  $C$ , 3)  $B$  и  $C$ .

- События  $A$  и  $B$  независимы, поскольку  $P(A \cap B) = P(\{4, 6\}) = \frac{1}{3}$  и  $P(A) \times P(B) = P(\{2, 4, 6\}) \times P(\{3, 4, 5, 6\}) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$ , а значит  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .
- События  $A$  и  $C$  **не** являются независимыми, поскольку  $P(A \cap C) = P(\{4, 6\}) = \frac{2}{6}$  и  $P(A) \times P(C) = P(\{2, 4, 6\}) \times P(\{4, 5, 6\}) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$ , а значит  $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$ .
- Поскольку события  $A$  и  $C$  **не** являются независимыми, то события  $A$ ,  $B$  и  $C$  **не** являются попарно независимыми.

# Независимость событий

## Независимость в совокупности

- Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда  $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \dots$  для любой подпоследовательности **различающихся** индексов  $j_1, j_2, \dots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \dots$ .

# Независимость событий

## Независимость в совокупности

- Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда  $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \dots$  для любой подпоследовательности **различающихся** индексов  $j_1, j_2, \dots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \dots$ .

**Пример:** Борис с равной вероятностью посмотрит от одной до четырех серий сериала. Рассмотрим события  $A$  - Борис посмотрел менее трех серий,  $B$  - Борис посмотрел нечетное число серий,  $C$  - Борис посмотрел одну или четыре серии. Проверьте, являются ли эти события независимыми попарно и в совокупности.

# Независимость событий

## Независимость в совокупности

- Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда  $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \dots$  для любой подпоследовательности **различающихся** индексов  $j_1, j_2, \dots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \dots$ .

**Пример:** Борис с равной вероятностью посмотрит от одной до четырех серий сериала. Рассмотрим события  $A$  - Борис посмотрел менее трех серий,  $B$  - Борис посмотрел нечетное число серий,  $C$  - Борис посмотрел одну или четыре серии. Проверьте, являются ли эти события независимыми попарно и в совокупности.

- События  $A$  и  $B$  независимы, поскольку  $P(A \cap B) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 3\}) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$  и  $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ , а значит  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

# Независимость событий

## Независимость в совокупности

- Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда  $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \dots$  для любой подпоследовательности **различающихся** индексов  $j_1, j_2, \dots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \dots$ .

**Пример:** Борис с равной вероятностью посмотрит от одной до четырех серий сериала. Рассмотрим события  $A$  - Борис посмотрел менее трех серий,  $B$  - Борис посмотрел нечетное число серий,  $C$  - Борис посмотрел одну или четыре серии. Проверьте, являются ли эти события независимыми попарно и в совокупности.

- События  $A$  и  $B$  независимы, поскольку  $P(A \cap B) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 3\}) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$  и  $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ , а значит  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .
- Независимость событий 1)  $A$  и  $C$ , 2)  $B$  и  $C$  - показывается по аналогии, из чего будет следовать, что события  $A, B, C$  - попарно независимы.



# Независимость событий

## Независимость в совокупности

- Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда  $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \dots$  для любой подпоследовательности **различающихся** индексов  $j_1, j_2, \dots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \dots$ .

**Пример:** Борис с равной вероятностью посмотрит от одной до четырех серий сериала. Рассмотрим события  $A$  - Борис посмотрел менее трех серий,  $B$  - Борис посмотрел нечетное число серий,  $C$  - Борис посмотрел одну или четыре серии. Проверьте, являются ли эти события независимыми попарно и в совокупности.

- События  $A$  и  $B$  независимы, поскольку  $P(A \cap B) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 3\}) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$  и  $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ , а значит  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .
- Независимость событий 1)  $A$  и  $C$ , 2)  $B$  и  $C$  - показывается по аналогии, из чего будет следовать, что события  $A, B, C$  - попарно независимы.
- События  $A, B$  и  $C$  **не являются** независимыми в совокупности, поскольку  $P(A \cap B \cap C) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 3\} \cap \{1, 4\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}$  и  $P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ , откуда следует, что  $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$ .

# Независимость событий

## Независимость в совокупности

- Пусть имеется последовательность событий  $A_1, A_2, \dots$  (со множеством индексов  $I$ ). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда  $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \dots$  для любой подпоследовательности **различающихся** индексов  $j_1, j_2, \dots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \dots$ .

**Пример:** Борис с равной вероятностью посмотрит от одной до четырех серий сериала. Рассмотрим события  $A$  - Борис посмотрел менее трех серий,  $B$  - Борис посмотрел нечетное число серий,  $C$  - Борис посмотрел одну или четыре серии. Проверьте, являются ли эти события независимыми попарно и в совокупности.

- События  $A$  и  $B$  независимы, поскольку  $P(A \cap B) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 3\}) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$  и  $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ , а значит  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .
- Независимость событий 1)  $A$  и  $C$ , 2)  $B$  и  $C$  - показывается по аналогии, из чего будет следовать, что события  $A, B, C$  - попарно независимы.
- События  $A, B$  и  $C$  **не являются** независимыми в совокупности, поскольку  $P(A \cap B \cap C) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 3\} \cap \{1, 4\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}$  и  $P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ , откуда следует, что  $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$ .
- Вывод** - из попарной независимости, не следует независимость в совокупности. Но нетрудно догадаться, что из независимости в совокупности следует попарная независимость.

# Независимость событий

## Условная независимость

- Пусть имеются события  $A$ ,  $B$  и  $C$ . События  $A$  и  $B$  являются **условно независимыми при условии наступления события  $C$** , если  $P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C)$ .

# Независимость событий

## Условная независимость

- Пусть имеются события  $A$ ,  $B$  и  $C$ . События  $A$  и  $B$  являются **условно независимыми при условии наступления события  $C$** , если  $P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C)$ .

**Пример:** бросается обычный кубик. Пространство элементарных событий имеет вид  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Рассмотрим события  $A = \{2, 4\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  и  $C = \{1, 2, 3, 4\}$ . Определите, являются ли события  $A$  и  $B$  независимыми, а также будут ли они условно независимыми при условии наступления события  $C$ .

# Независимость событий

## Условная независимость

- Пусть имеются события  $A$ ,  $B$  и  $C$ . События  $A$  и  $B$  являются **условно независимыми при условии наступления события  $C$** , если  $P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C)$ .

**Пример:** бросается обычный кубик. Пространство элементарных событий имеет вид  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Рассмотрим события  $A = \{2, 4\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  и  $C = \{1, 2, 3, 4\}$ . Определите, являются ли события  $A$  и  $B$  независимыми, а также будут ли они условно независимыми при условии наступления события  $C$ .

**Решение:**

- События  $A$  и  $B$  не являются независимыми, поскольку  $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$ , но  $P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ .

# Независимость событий

## Условная независимость

- Пусть имеются события  $A$ ,  $B$  и  $C$ . События  $A$  и  $B$  являются **условно независимыми при условии наступления события  $C$** , если  $P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C)$ .

**Пример:** бросается обычный кубик. Пространство элементарных событий имеет вид  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Рассмотрим события  $A = \{2, 4\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  и  $C = \{1, 2, 3, 4\}$ . Определите, являются ли события  $A$  и  $B$  независимыми, а также будут ли они условно независимыми при условии наступления события  $C$ .

**Решение:**

- События  $A$  и  $B$  не являются независимыми, поскольку  $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$ , но  $P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ .
- Условная независимость следует из равенства следующих вероятностей:

$$P(A \cap B | C) = \frac{P(\{2\})}{P(\{1, 2, 3, 4\})} = \frac{1}{4}$$

# Независимость событий

## Условная независимость

- Пусть имеются события  $A$ ,  $B$  и  $C$ . События  $A$  и  $B$  являются **условно независимыми при условии наступления события  $C$** , если  $P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C)$ .

**Пример:** бросается обычный кубик. Пространство элементарных событий имеет вид  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Рассмотрим события  $A = \{2, 4\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  и  $C = \{1, 2, 3, 4\}$ . Определите, являются ли события  $A$  и  $B$  независимыми, а также будут ли они условно независимыми при условии наступления события  $C$ .

**Решение:**

- События  $A$  и  $B$  не являются независимыми, поскольку  $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$ , но  $P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ .
- Условная независимость следует из равенства следующих вероятностей:

$$P(A \cap B | C) = \frac{P(\{2\})}{P(\{1, 2, 3, 4\})} = \frac{1}{4}$$

$$P(A | C)P(B | C) = \frac{P(\{2, 4\})}{P(\{1, 2, 3, 4\})} \times \frac{P(\{1, 2\})}{P(\{1, 2, 3, 4\})} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

# Парадоксы

## Парадокс Монти Холла

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз



# Парадоксы

## Парадокс Монти Холла

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза

# Парадоксы

## Парадокс Монти Холла

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза
- вам предлагают открыть либо ту коробку, которую вы выбрали изначально, либо другую не открытую коробку

# Парадоксы

## Парадокс Монти Холла

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза
- вам предлагают открыть либо ту коробку, которую вы выбрали изначально, либо другую не открытую коробку
- с точки зрения максимизации вероятности выигрыша имеет ли смысл сменить коробку?

# Парадоксы

## Парадокс Монти Холла

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза
- вам предлагают открыть либо ту коробку, которую вы выбрали изначально, либо другую не открытую коробку
- с точки зрения максимизации вероятности выигрыша имеет ли смысл сменить коробку?

**Решение:**

- Без потери общности представим, что вы выбрали первую коробку. Через  $(x, y)$  обозначим элементарное событие, в соответствии с которым приз лежит в коробке  $x$ , а ведущий открыл коробку  $y$ , откуда  $\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ .

# Парадоксы

## Парадокс Монти Холла

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза
- вам предлагают открыть либо ту коробку, которую вы выбрали изначально, либо другую не открытую коробку
- с точки зрения максимизации вероятности выигрыша имеет ли смысл сменить коробку?

**Решение:**

- Без потери общности представим, что вы выбрали первую коробку. Через  $(x, y)$  обозначим элементарное событие, в соответствии с которым приз лежит в коробке  $x$ , а ведущий открыл коробку  $y$ , откуда  $\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ .
- Поскольку неизвестно, в какой коробке лежит приз,  $P(\{(1, 2)\}) = P(\{(1, 3)\})$ . Так как изначально приз с равной вероятностью оказывается в любой из коробок, то  $P(\{(2, 3)\}) = P(\{(3, 2)\}) = P(\{(1, 2)\}) + P(\{(1, 3)\}) = 1/3$ , а значит  $P(\{(1, 2)\}) = P(\{(1, 3)\}) = 1/6$ .

# Парадоксы

## Парадокс Монти Холла

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза
- вам предлагают открыть либо ту коробку, которую вы выбрали изначально, либо другую не открытую коробку
- с точки зрения максимизации вероятности выигрыша имеет ли смысл сменить коробку?

**Решение:**

- Без потери общности представим, что вы выбрали первую коробку. Через  $(x, y)$  обозначим элементарное событие, в соответствии с которым приз лежит в коробке  $x$ , а ведущий открыл коробку  $y$ , откуда  $\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ .
- Поскольку неизвестно, в какой коробке лежит приз,  $P(\{(1, 2)\}) = P(\{(1, 3)\})$ . Так как изначально приз с равной вероятностью оказывается в любой из коробок, то  $P(\{(2, 3)\}) = P(\{(3, 2)\}) = P(\{(1, 2)\}) + P(\{(1, 3)\}) = 1/3$ , а значит  $P(\{(1, 2)\}) = P(\{(1, 3)\}) = 1/6$ .
- Рассмотрим событие  $B_2 = \{(1, 2), (3, 2)\}$  - ведущий открыл вторую коробку, событие  $A_1 = \{(1, 2), (1, 3)\}$  - приз оказался в первой коробке, и событие  $A_3 = \{(3, 2)\}$  - приз оказался в третьей коробке.

$$\begin{cases} P(A_1|B_2) = \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(\{(1, 2)\})}{P(\{(1, 2), (3, 2)\})} = \frac{1/6}{1/6+2/6} = \frac{1}{3} \\ P(A_3|B_2) = \frac{P(A_3 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(\{(3, 2)\})}{P(\{(1, 2), (3, 2)\})} = \frac{2/6}{1/6+2/6} = \frac{2}{3} \end{cases} \implies \text{выгодно сменить коробку на третью.}$$

# Парадоксы

## Парадокс девочек и мальчиков, часть 1

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. Младший ребенок - девочка. Какова вероятность того, что старший ребенок - мальчик?

# Парадоксы

## Парадокс девочек и мальчиков, часть 1

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. Младший ребенок - девочка. Какова вероятность того, что старший ребенок - мальчик?

**Решение:**

- Обозначим через  $B_2$  событие - старший ребенок мальчик, а через  $G_2$  событие - старший ребенок девочка. По аналогии введем события  $B_1$  и  $G_1$  означающие, что младший ребенок является мальчиком или девочкой соответственно.



# Парадоксы

## Парадокс девочек и мальчиков, часть 1

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. Младший ребенок - девочка. Какова вероятность того, что старший ребенок - мальчик?

**Решение:**

- Обозначим через  $B_2$  событие - старший ребенок мальчик, а через  $G_2$  событие - старший ребенок девочка. По аналогии введем события  $B_1$  и  $G_1$  означающие, что младший ребенок является мальчиком или девочкой соответственно.
- Пространство элементарных событий состоит из следующих упорядоченных пар, в которых первый элемент соответствует полу младшего ребенка, а второй элемент - полу старшего ребенка:  $\Omega = \{(B, B), (B, G), (G, B), (G, G)\}$ .

# Парадоксы

## Парадокс девочек и мальчиков, часть 1

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. Младший ребенок - девочка. Какова вероятность того, что старший ребенок - мальчик?

**Решение:**

- Обозначим через  $B_2$  событие - старший ребенок мальчик, а через  $G_2$  событие - старший ребенок девочка. По аналогии введем события  $B_1$  и  $G_1$  означающие, что младший ребенок является мальчиком или девочкой соответственно.
- Пространство элементарных событий состоит из следующих упорядоченных пар, в которых первый элемент соответствует полу младшего ребенка, а второй элемент - полу старшего ребенка:  $\Omega = \{(B, B), (B, G), (G, B), (G, G)\}$ .
- По формула условной вероятности:

$$P(B_2|G_1) = \frac{P(B_2 \cap G_1)}{P(G_1)} = \frac{P(\{(G, B)\})}{P(\{(G, B), (G, G)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик?

# Парадоксы

## Парадокс девочек и мальчиков, часть 2

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик?

**Решение:**

- Обозначим через  $M_1$  событие - по крайней мере один ребенок мальчик. Заметим, что  $M_1 = \{(B, B), (G, B), (B, G)\}$ , а значит  $P(M_1) = \frac{3}{4}$ .

# Парадоксы

## Парадокс девочек и мальчиков, часть 2

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик?

**Решение:**

- Обозначим через  $M_1$  событие - по крайней мере один ребенок мальчик. Заметим, что  $M_1 = \{(B, B), (G, B), (B, G)\}$ , а значит  $P(M_1) = \frac{3}{4}$ .
- По формуле Байеса:

$$P(\{(B, B)\} | M_1) = \frac{P((B, B) \cap M_1)}{P(M_1)} = \frac{P(\{(B, B)\})}{P(\{(B, B), (G, B), (B, G)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

# Парадоксы

## Парадокс девочек и мальчиков, часть 3

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что в каждый из дней недели дети рождаются с равной вероятностью.

# Парадоксы

## Парадокс девочек и мальчиков, часть 3

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что в каждый из дней недели дети рождаются с равной вероятностью.

**Примечание:** обозначим через  $B_j^i$  событие -  $j$ -й по старшинству (чем больше  $j$  - тем старше) мальчик родился в  $i$ -й день недели, где  $i \in \{1, \dots, 7\}$  и  $j \in \{1, 2\}$ . Через  $M_1^i = B_1^1 \cup B_2^1$  обозначим событие - по крайней мере один из детей мальчик, родившийся в  $i$ -й день недели, где  $i \in \{1, \dots, 7\}$ .

# Парадоксы

## Парадокс девочек и мальчиков, часть 3

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что в каждый из дней недели дети рождаются с равной вероятностью.

**Примечание:** обозначим через  $B_j^i$  событие -  $j$ -й по старшинству (чем больше  $j$  - тем старше) мальчик родился в  $i$ -й день недели, где  $i \in \{1, \dots, 7\}$  и  $j \in \{1, 2\}$ . Через  $M_1^i = B_1^1 \cup B_2^1$  обозначим событие - по крайней мере один из детей мальчик, родившийся в  $i$ -й день недели, где  $i \in \{1, \dots, 7\}$ .

**Решение:**

- Количество упорядоченных пар, из которых состоит пространство элементарных событий, составляет  $|\Omega| = (2 \times 7)^2 = 14^2$ .



# Парадоксы

## Парадокс девочек и мальчиков, часть 3

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что в каждый из дней недели дети рождаются с равной вероятностью.

**Примечание:** обозначим через  $B_j^i$  событие -  $j$ -й по старшинству (чем больше  $j$  - тем старше) мальчик родился в  $i$ -й день недели, где  $i \in \{1, \dots, 7\}$  и  $j \in \{1, 2\}$ . Через  $M_1^i = B_1^1 \cup B_2^1$  обозначим событие - по крайней мере один из детей мальчик, родившийся в  $i$ -й день недели, где  $i \in \{1, \dots, 7\}$ .

**Решение:**

- Количество упорядоченных пар, из которых состоит пространство элементарных событий, составляет  $|\Omega| = (2 \times 7)^2 = 14^2$ .
- По формуле объединения событий с учетом независимости событий  $B_1^1$  и  $B_2^1$  имеем:

$$P(M_1^1) = P(B_1^1 \cup B_2^1) = P(B_1^1) + P(B_2^1) - P(B_1^1)P(B_2^1) = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{14} \times \frac{1}{14} = \frac{27}{14^2}$$

# Парадоксы

## Парадокс девочек и мальчиков, часть 3

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что в каждый из дней недели дети рождаются с равной вероятностью.

**Примечание:** обозначим через  $B_j^i$  событие -  $j$ -й по старшинству (чем больше  $j$  - тем старше) мальчик родился в  $i$ -й день недели, где  $i \in \{1, \dots, 7\}$  и  $j \in \{1, 2\}$ . Через  $M_1^i = B_1^1 \cup B_2^1$  обозначим событие - по крайней мере один из детей мальчик, родившийся в  $i$ -й день недели, где  $i \in \{1, \dots, 7\}$ .

**Решение:**

- Количество упорядоченных пар, из которых состоит пространство элементарных событий, составляет  $|\Omega| = (2 \times 7)^2 = 14^2$ .
- По формуле объединения событий с учетом независимости событий  $B_1^1$  и  $B_2^1$  имеем:

$$P(M_1^1) = P(B_1^1 \cup B_2^1) = P(B_1^1) + P(B_2^1) - P(B_1^1)P(B_2^1) = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{14} \times \frac{1}{14} = \frac{27}{14^2}$$

- По формуле условной вероятности получаем:

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 | M_1^1) &= \frac{P(M_1^1 \cap B_1 \cap B_2)}{P(M_1^1)} = \frac{P([B_1^1 \cap B_2] \cup [B_1 \cap B_2^1])}{P(M_1^1)} = \\ &= \frac{P(B_1^1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2^1) - P(B_1^1 \cap B_2 \cap B_1 \cap B_2^1)}{P(M_1^1)} = \frac{\frac{7}{14^2} + \frac{7}{14^2} - P(B_1^1 \cap B_2^1)}{P(M_1^1)} = \frac{2 \times \frac{7}{14^2} - \frac{1}{14^2}}{\frac{27}{14^2}} = \frac{13}{27} \end{aligned}$$