Теория Вероятностей и Статистика

Условная вероятность

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2022-2023

Условная вероятность

Формула условной вероятности

- Пусть имеется пространство элементарных событий Ω и пространство событий $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, а также события $A, B \in \mathcal{F}$.

Условная вероятность

Формула условной вероятности

- Пусть имеется пространство элементарных событий Ω и пространство событий $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, а также события $A, B \in \mathcal{F}$.
- Условная вероятность позволяет ответить на вопрос о том, какова вероятность события A, если событие B уже произошло.

Условная вероятность

Формула условной вероятности

- Пусть имеется пространство элементарных событий Ω и пространство событий $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, а также события $A, B \in \mathcal{F}$.
- Условная вероятность позволяет ответить на вопрос о том, какова вероятность события A, если событие B уже произошло.
- Рассчитать вероятность события A при условии, что произошло событие B, можно при помощи **формулы условной вероятности**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{где } P(B) > 0$$

- Пусть имеется пространство элементарных событий Ω и пространство событий $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, а также события $A, B \in \mathcal{F}$.
- Условная вероятность позволяет ответить на вопрос о том, какова вероятность события A, если событие B уже произошло.
- Рассчитать вероятность события A при условии, что произошло событие B, можно при помощи **формулы условной вероятности**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{где } P(B) > 0$$

Пример:

- Бросается шестигранный кубик. Событие $A = \{2, 4, 6\}$ - выпало четное число, событие $B = \{4, 5, 6\}$ - выпало число больше трех. Пространство элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Условная вероятность

Формула условной вероятности

- Пусть имеется пространство элементарных событий Ω и пространство событий $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, а также события $A, B \in \mathcal{F}$.
- Условная вероятность позволяет ответить на вопрос о том, какова вероятность события A, если событие B уже произошло.
- Рассчитать вероятность события A при условии, что произошло событие B, можно при помощи **формулы условной вероятности**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{где } P(B) > 0$$

Пример:

- Бросается шестигранный кубик. Событие $A = \{2, 4, 6\}$ - выпало четное число, событие $B = \{4, 5, 6\}$ - выпало число больше трех. Пространство элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Вероятность того, что выпадет четное число, при условии, что выпало число больше трех, составляет:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{4, 6\})}{P(\{4, 5, 6\})} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

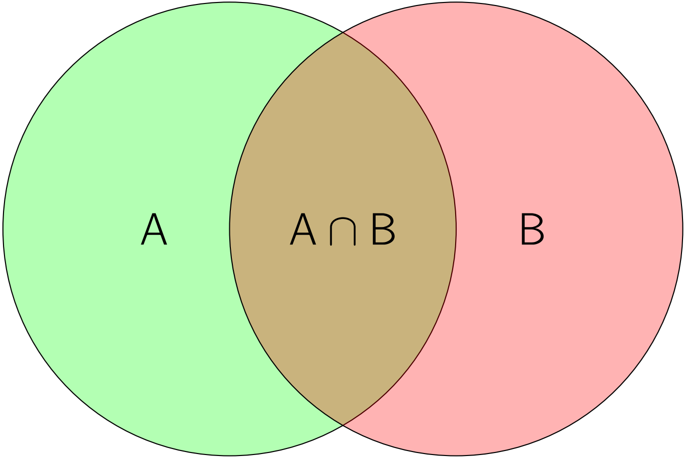
.

Условная вероятность

Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий Ω.

Обозначения: Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый

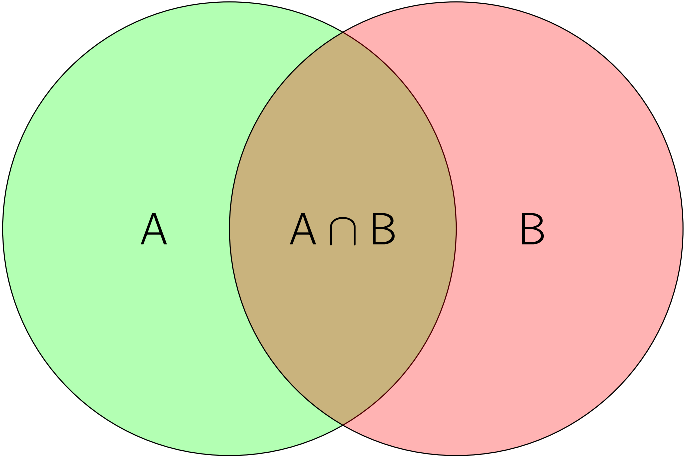


Условная вероятность

Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий Ω.

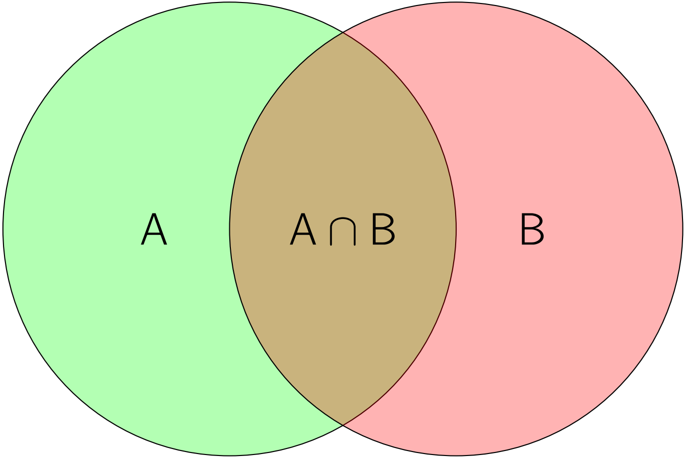
Обозначения: Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



P(A) = (З и Ко) / Б

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий Ω.

Обозначения: Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



P(A) = (З и Ко) / Б

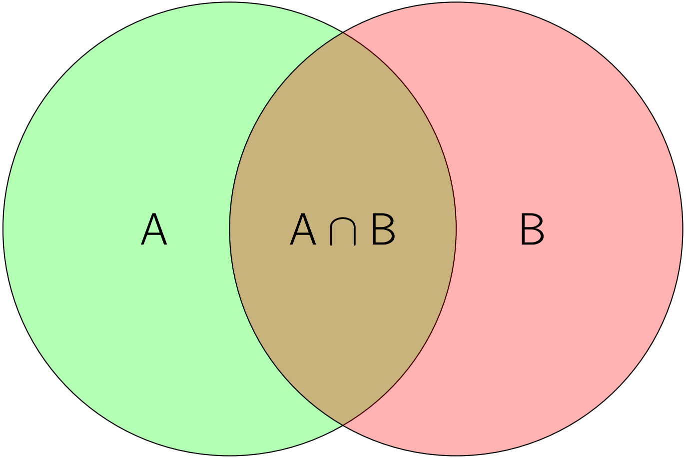
P(B) = (Кр и Ко) / Б

Условная вероятность

Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий Ω.

Обозначения: Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



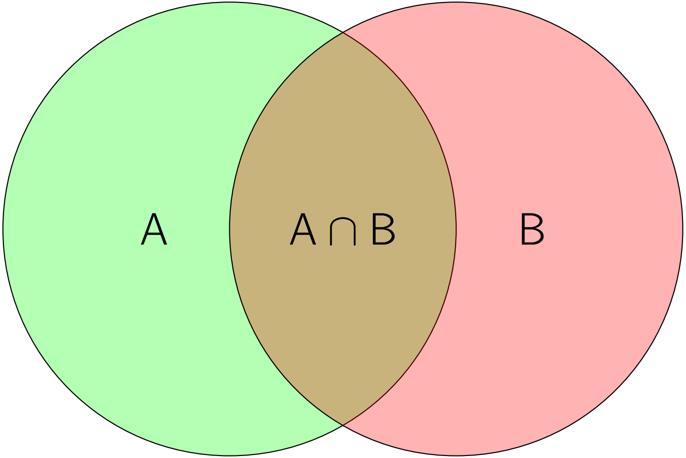
$P(A) = (\text{З и Ко}) \ / \ \text{Б}$

$P(B) = (\text{Кр и Ко}) \ / \ \text{Б}$

$P(A \cap B) = \text{Ко} \ / \ \text{Б}$

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий Ω.

Обозначения: Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$P(A) = $ (З и Ко) / Б

$P(B) = $ (Кр и Ко) / Б

$P(A \cap B) = $ Ко / Б

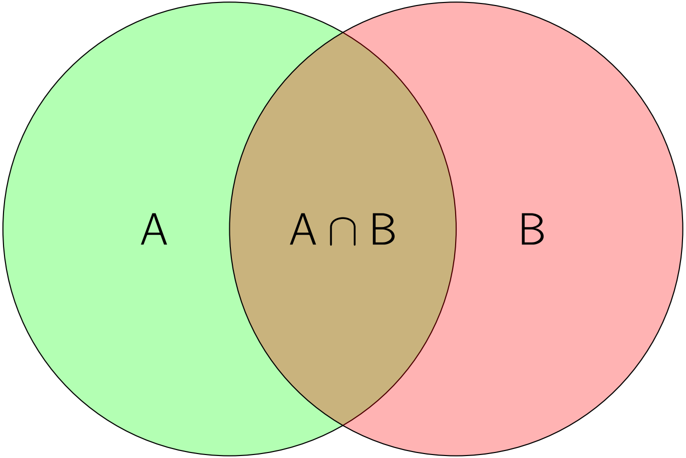
$P(A|B) = $ Ко / (Кр и Ко)

Условная вероятность

Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий Ω.

Обозначения: Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$P(A) =$ (З и Ко) / Б

$P(B) =$ (Кр и Ко) / Б

$P(A \cap B) =$ Ко / Б

$P(A|B) =$ Ко / (Кр и Ко)

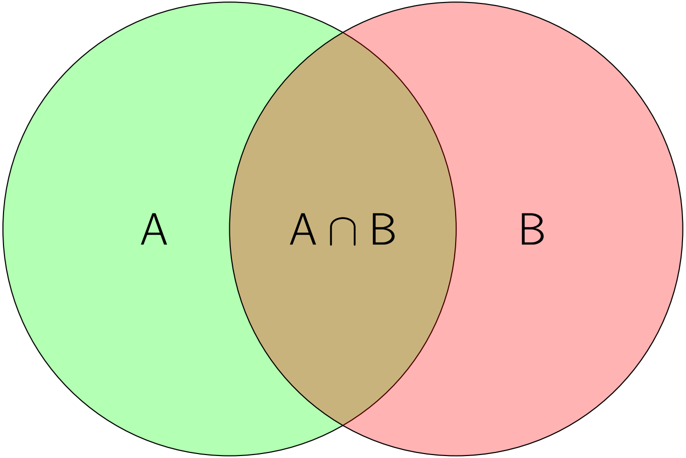
$P(B|A) =$ Ко / (З и Ко)

Условная вероятность

Геометрическая интерпретация

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий Ω.

Обозначения: Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$P(A) =$ (З и Ко) / Б

$P(B) =$ (Кр и Ко) / Б

$P(A \cap B) =$ Ко / Б

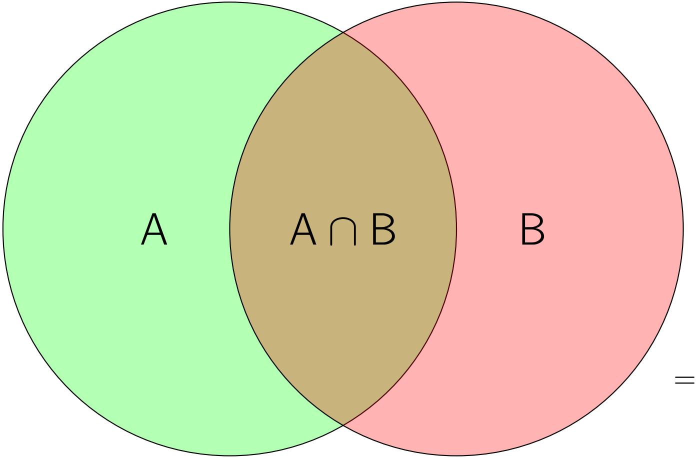
$P(A|B) =$ Ко / (Кр и Ко)

$P(B|A) =$ Ко / (З и Ко)

$P(A|B) =$ Ко / (Кр и Ко) $=$

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий Ω.

Обозначения: Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$$P(A) = (\text{З и Ко}) \ / \ \text{Б}$$

$$P(B) = (\text{Кр и Ко}) \ / \ \text{Б}$$

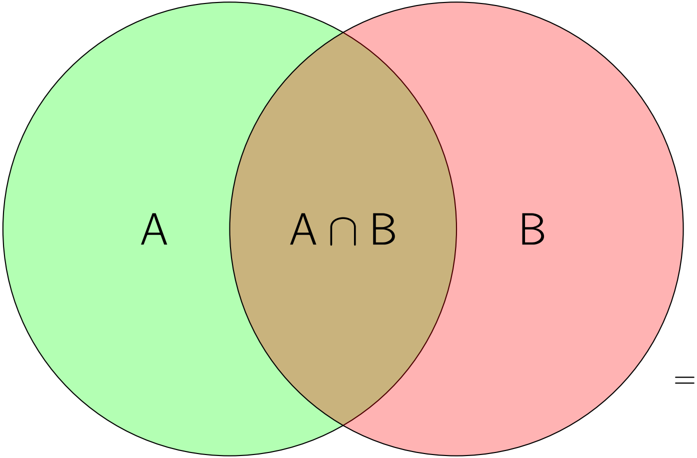
$$P(A \cap B) = \text{Ко} \ / \ \text{Б}$$

$$P(A|B) = \text{Ко} \ / \ (\text{Кр и Ко})$$

$$P(B|A) = \text{Ко} \ / \ (\text{З и Ко})$$

$$P(A|B) = \text{Ко} \ / \ (\text{Кр и Ко}) =$$
$$= (\text{Ко} \ / \ \text{Б}) / ((\text{Кр и Ко}) \ / \ \text{Б}) =$$

Белым цветом обозначает все пространство элементарных событий Ω.
Обозначения: Б - белый, З - зеленый, Кр - красный, Ко - коричневый



$$P(A) = (\text{З и Ко}) \ / \ \text{Б}$$

$$P(B) = (\text{Кр и Ко}) \ / \ \text{Б}$$

$$P(A \cap B) = \text{Ко} \ / \ \text{Б}$$

$$P(A|B) = \text{Ко} \ / \ (\text{Кр и Ко})$$

$$P(B|A) = \text{Ко} \ / \ (\text{З и Ко})$$

$$P(A|B) = \text{Ко} \ / \ (\text{Кр и Ко}) = \\ = (\text{Ко} \ / \ \text{Б}) / ((\text{Кр и Ко}) \ / \ \text{Б}) = \\ = P(A \cap B)/P(B)$$

Условная вероятность

Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B),$ где $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие A) и вовремя (событие B) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.

Формула условной вероятности: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, где $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие A) и вовремя (событие B) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.
  Решение: $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{0.5}} = 0.6$

Условная вероятность

Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, где $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие A) и вовремя (событие B) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.
  Решение: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{0.5}} = 0.6$
- Если Маша готовится к экзамену (событие B), то она сдает его (событие A) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.

Формула условной вероятности: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, где $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие A) и вовремя (событие B) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.
  Решение: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$
- Если Маша готовится к экзамену (событие B), то она сдает его (событие A) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.
  Решение: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$

Формула условной вероятности: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, где $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие A) и вовремя (событие B) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.
  Решение: $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{0.5}} = 0.6$
- Если Маша готовится к экзамену (событие B), то она сдает его (событие A) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.
  Решение: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$
- Геннадий с некоторой постоянной вероятностью посещает пары по Математике (событие A) и Экономике (событие B). Вероятность того, что он посетит оба занятия, составляет 0.6. Вероятность того, что он посетит занятие по математике, при условии, что он был на паре по экономике, равняется 0.7. Найдите вероятность, с которой Геннадий посетит занятие по экономике.

Формула условной вероятности: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, где $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие A) и вовремя (событие B) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.
  Решение: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$
- Если Маша готовится к экзамену (событие B), то она сдает его (событие A) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.
  Решение: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$
- Геннадий с некоторой постоянной вероятностью посещает пары по Математике (событие A) и Экономике (событие B). Вероятность того, что он посетит оба занятия, составляет 0.6. Вероятность того, что он посетит занятие по математике, при условии, что он был на паре по экономике, равняется 0.7. Найдите вероятность, с которой Геннадий посетит занятие по экономике.
  Решение: $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}$.

Формула условной вероятности: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, где $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие A) и вовремя (событие B) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.
  Решение: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$
- Если Маша готовится к экзамену (событие B), то она сдает его (событие A) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.
  Решение: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$
- Геннадий с некоторой постоянной вероятностью посещает пары по Математике (событие A) и Экономике (событие B). Вероятность того, что он посетит оба занятия, составляет 0.6. Вероятность того, что он посетит занятие по математике, при условии, что он был на паре по экономике, равняется 0.7. Найдите вероятность, с которой Геннадий посетит занятие по экономике.
  Решение: $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}$.
- Ванесса добавляет в салат огурцы (событие A) с вероятностью 0.2, а помидоры (событие B) - с вероятностью 0.3. При этом она готовит салат без огурцов и помидоров с вероятностью 0.6. Найдите вероятность того, что Ванесса добавила в салат огурцы, при условии, что в нем оказались помидоры.

Условная вероятность

Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, где $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие A) и вовремя (событие B) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.
  Решение: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$
- Если Маша готовится к экзамену (событие B), то она сдает его (событие A) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.
  Решение: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$
- Геннадий с некоторой постоянной вероятностью посещает пары по Математике (событие A) и Экономике (событие B). Вероятность того, что он посетит оба занятия, составляет 0.6. Вероятность того, что он посетит занятие по математике, при условии, что он был на паре по экономике, равняется 0.7. Найдите вероятность, с которой Геннадий посетит занятие по экономике.
  Решение: $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}$.
- Ванесса добавляет в салат огурцы (событие A) с вероятностью 0.2, а помидоры (событие B) - с вероятностью 0.3. При этом она готовит салат без огурцов и помидоров с вероятностью 0.6. Найдите вероятность того, что Ванесса добавила в салат огурцы, при условии, что в нем оказались помидоры.
  Решение: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (1 - P(\overline{A \cup B})) = 0.2 + 0.3 - (1 - 0.6) = 0.1$

Условная вероятность

Примеры применения формулы условной вероятности

Формула условной вероятности: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, где $P(B) > 0$

- Почтальон доставляет посылку без повреждений (событие A) и вовремя (событие B) с вероятностью 0.3. Без повреждений он привозит посылку в половине случаев. Рассчитайте условную вероятность, с которой почтальон привез посылку вовремя, если известно, что она оказалась без повреждений.
  Решение: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$
- Если Маша готовится к экзамену (событие B), то она сдает его (событие A) с вероятностью 0.9. Вероятность того, что Маша будет готовиться к экзамену, составляет 0.1. Рассчитайте вероятность, с которой Маша будет готовиться к экзамену и сдаст его.
  Решение: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$
- Геннадий с некоторой постоянной вероятностью посещает пары по Математике (событие A) и Экономике (событие B). Вероятность того, что он посетит оба занятия, составляет 0.6. Вероятность того, что он посетит занятие по математике, при условии, что он был на паре по экономике, равняется 0.7. Найдите вероятность, с которой Геннадий посетит занятие по экономике.
  Решение: $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}$.
- Ванесса добавляет в салат огурцы (событие A) с вероятностью 0.2, а помидоры (событие B) - с вероятностью 0.3. При этом она готовит салат без огурцов и помидоров с вероятностью 0.6. Найдите вероятность того, что Ванесса добавила в салат огурцы, при условии, что в нем оказались помидоры.
  Решение: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (1 - P(\overline{A \cup B})) = 0.2 + 0.3 - (1 - 0.6) = 0.1$
  $\implies P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$

- Последовательность условий можно представить в форме пересечения соответствующих условий:

$$P((A|B)|C) = P(A|B \cap C)$$

- Последовательность условий можно представить в форме пересечения соответствующих условий:

$$P((A|B)|C) = P(A|B \cap C)$$

Пример:

- Бросается правильный шестигранный кубик. Событие A - выпало четное число, событие B - выпало число, кратное трем, событие C - выпало число больше двух. Найдите вероятность того, что выпало четное число, при условии, что выпало число кратное трем, если известно, что выпавшее число оказалось больше двух.

- Последовательность условий можно представить в форме пересечения соответствующих условий:

$$P((A|B)|C) = P(A|B \cap C)$$

Пример:

- Бросается правильный шестигранный кубик. Событие A - выпало четное число, событие B - выпало число, кратное трем, событие C - выпало число больше двух. Найдите вероятность того, что выпало четное число, при условии, что выпало число кратное трем, если известно, что выпавшее число оказалось больше двух.
  Решение: $P((A|B)|C) = P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(\{6\})}{P(\{3,6\})} = \frac{1}{2}$

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Условная вероятность

Формула пересечения событий

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Из нее получаем **формулу для вероятности пересечения трех событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Из нее получаем **формулу для вероятности пересечения трех событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Доказательство:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 \cap A_3|A_1) =$$
$$P(A_1)P(A_2|A_1)P((A_3|A_1)|A_2)) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Из нее получаем **формулу для вероятности пересечения трех событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Доказательство:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 \cap A_3|A_1) =$$
$$P(A_1)P(A_2|A_1)P((A_3|A_1)|A_2)) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

По аналогии выводится **формула вероятности пересечения произвольного числа событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times ... \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Из нее получаем **формулу для вероятности пересечения трех событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Доказательство:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 \cap A_3|A_1) =$$
$$P(A_1)P(A_2|A_1)P((A_3|A_1)|A_2)) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

По аналогии выводится **формула вероятности пересечения произвольного числа событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times ... \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

Пример:

- Лаврентий сытно завтракает (событие A) с вероятностью 0.5. Если он сытно позавтракает, то сдаст экзамен (событие B) с вероятностью 0.8. Если он сдаст экзамен и сытно позавтракает, то будет счастлив (событие C) с вероятностью 0.9. Найдите вероятность того, что Лаврентий сытно позавтракает, сдаст экзамен и будет счастлив.

Условная вероятность

Формула пересечения событий

- Из формулы условной вероятности следует **формула вероятности пересечения двух событий**:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Из нее получаем **формулу для вероятности пересечения трех событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Доказательство:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 \cap A_3|A_1) =$$
$$P(A_1)P(A_2|A_1)P((A_3|A_1)|A_2)) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

По аналогии выводится **формула вероятности пересечения произвольного числа событий**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times ... \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

Пример:

- Лаврентий сытно завтракает (событие A) с вероятностью 0.5. Если он сытно позавтракает, то сдаст экзамен (событие B) с вероятностью 0.8. Если он сдаст экзамен и сытно позавтракает, то будет счастлив (событие C) с вероятностью 0.9. Найдите вероятность того, что Лаврентий сытно позавтракает, сдаст экзамен и будет счастлив.
  Решение: $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) = 0.5 * 0.8 * 0.9 = 0.36$

Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I) таких, что:

Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I) таких, что:

- они являются **попарно несовместными**, то есть $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, где $i, j \in I$.

Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I) таких, что:

- они являются **попарно несовместными**, то есть $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, где $i, j \in I$.
- они формируют **полную группу событий**, то есть их объединение дает все пространство элементарных событий: $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \Omega$.

Условная вероятность

Формула полной вероятности

Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I) таких, что:

- они являются **попарно несовместными**, то есть $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, где $i, j \in I$.
- они формируют **полную группу событий**, то есть их объединение дает все пространство элементарных событий: $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \Omega$.

При соблюдении этих условий справедлива **формула полной вероятности**:

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)$$

Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I) таких, что:

- они являются **попарно несовместными**, то есть $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, где $i, j \in I$.
- они формируют **полную группу событий**, то есть их объединение дает все пространство элементарных событий: $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \Omega$.

При соблюдении этих условий справедлива **формула полной вероятности**:

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)$$

Пример:

- Хомяк Мульч пытается попасть в амбар с зерном. Если сторож уснет (событие A_1), то хомяку удастся пробраться в амбар (событие B) с вероятностью 0.9. Если сторож будет смотреть сериал (событие A_2), то вероятность попасть в амбар составит 0.7. В противном случае сторож будет бдителен (событие A_3), поэтому в заветную долину лакомств хомяк попадет лишь с вероятностью 0.6. Вероятность того, что сторож заснет, составляет 0.3, а того, что он будет смотреть сериал 0.5. Найдем вероятность того, что хомяк попадет в амбар.

Условная вероятность

Формула полной вероятности

Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I) таких, что:

- они являются **попарно несовместными**, то есть $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, где $i, j \in I$.
- они формируют **полную группу событий**, то есть их объединение дает все пространство элементарных событий: $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \Omega$.

При соблюдении этих условий справедлива **формула полной вероятности**:

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)$$

Пример:

- Хомяк Мульч пытается попасть в амбар с зерном. Если сторож уснет (событие A_1), то хомяку удастся пробраться в амбар (событие B) с вероятностью 0.9. Если сторож будет смотреть сериал (событие A_2), то вероятность попасть в амбар составит 0.7. В противном случае сторож будет бдителен (событие A_3), поэтому в заветную долину лакомств хомяк попадет лишь с вероятностью 0.6. Вероятность того, что сторож заснет, составляет 0.3, а того, что он будет смотреть сериал 0.5. Найдем вероятность того, что хомяк попадет в амбар.
  Решение: $P(B) = P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2) \times P(A_2) + P(B|A_3) \times P(A_3) =$
  $= 0.9 \times 0.3 + 0.7 \times 0.5 + 0.6 \times (1 - 0.3 - 0.5) = 0.74$

Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Тогда комбинируя формулу условной вероятности и формулу полной вероятности можно получить **формулу Байеса**:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)}, \forall k \in I$$

Условная вероятность

Формула Байеса

Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Тогда комбинируя формулу условной вероятности и формулу полной вероятности можно получить **формулу Байеса**:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)}, \forall k \in I$$

Пример:

- Хомяк Мульч пытается попасть в амбар с зерном. Если сторож уснет (событие A_1), то хомяку удастся пробраться в амбар (событие B) с вероятностью 0.9. Если сторож будет смотреть сериал (событие A_2), то вероятность попасть в амбар составит 0.7. В противном случае сторож будет бдителен (событие A_3), поэтому в заветную долину лакомств хомяк попадет лишь с вероятностью 0.6. Вероятность того, что сторож заснет, составляет 0.3, а того, что он будет смотреть сериал 0.5. Найдем вероятность того, что сторож спит, если Хомяку удалось проникнуть в амбар.

Пусть имеется полная группа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Тогда комбинируя формулу условной вероятности и формулу полной вероятности можно получить **формулу Байеса**:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)}, \forall k \in I$$

Пример:

- Хомяк Мульч пытается попасть в амбар с зерном. Если сторож уснет (событие A_1), то хомяку удастся пробраться в амбар (событие B) с вероятностью 0.9. Если сторож будет смотреть сериал (событие A_2), то вероятность попасть в амбар составит 0.7. В противном случае сторож будет бдителен (событие A_3), поэтому в заветную долину лакомств хомяк попадет лишь с вероятностью 0.6. Вероятность того, что сторож заснет, составляет 0.3, а того, что он будет смотреть сериал 0.5. Найдем вероятность того, что сторож спит, если Хомяку удалось проникнуть в амбар.
  Решение:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2) \times P(A_2) + P(B|A_3) \times P(A_3)} =$$
$$= \frac{0.9 \times 0.3}{0.9 \times 0.3 + 0.7 \times 0.5 + 0.6 \times (1 - 0.3 - 0.5)} = \frac{27}{74} \approx 0.365$$

Примеры:

- В урне лежат 5 белых и 10 черных шариков. Вы достаете 3 шарика. Вычислите вероятность с которой вы достанете сперва черный (событие B_1), затем белый (событие W_2), а потом вновь черный шарик (событие B_3).

Примеры:

- В урне лежат 5 белых и 10 черных шариков. Вы достаете 3 шарика. Вычислите вероятность с которой вы достанете сперва черный (событие B_1), затем белый (событие W_2), а потом вновь черный шарик (событие B_3).
  Решение:
  $$P(B_1 \cap W_2 \cap B_3) = P(B_1)P(W_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap W_2) = \frac{10}{15} \times \frac{5}{15-1} \times \frac{10-1}{15-2} \approx 0.165$$

Примеры:

- В урне лежат 5 белых и 10 черных шариков. Вы достаете 3 шарика. Вычислите вероятность с которой вы достанете сперва черный (событие B_1), затем белый (событие W_2), а потом вновь черный шарик (событие B_3).
  Решение:
  $$P(B_1 \cap W_2 \cap B_3) = P(B_1)P(W_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap W_2) = \frac{10}{15} \times \frac{5}{15-1} \times \frac{10-1}{15-2} \approx 0.165$$

- В первой урне лежат 2 белых и 3 черных шарика. Во второй – 2 черных и 3 белых шарика. В третьей урне лежат 5 белых шариков. Вам с равной вероятностью дают одну из урн и вы вытаскиваете из нее шарик. Определите, с какой вероятностью вам дали первую урну (событие U_1), если известно, что вы достали белый шарик (событие B):

Примеры:

- В урне лежат 5 белых и 10 черных шариков. Вы достаете 3 шарика. Вычислите вероятность с которой вы достанете сперва черный (событие B_1), затем белый (событие W_2), а потом вновь черный шарик (событие B_3).
  Решение:
$$P(B_1 \cap W_2 \cap B_3) = P(B_1)P(W_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap W_2) = \frac{10}{15} \times \frac{5}{15-1} \times \frac{10-1}{15-2} \approx 0.165$$

- В первой урне лежат 2 белых и 3 черных шарика. Во второй – 2 черных и 3 белых шарика. В третьей урне лежат 5 белых шариков. Вам с равной вероятностью дают одну из урн и вы вытаскиваете из нее шарик. Определите, с какой вероятностью вам дали первую урну (событие U_1), если известно, что вы достали белый шарик (событие B):
  Решение:
$$P(B) = P(B|U_1)P(U_1) + P(B|U_2)P(U_2) + P(B|U_3)P(U_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$P(U_1|B) = \frac{P(B|U_1)P(U_1)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

Независимость событий

Попарная независимость

- События A и B **независимы** тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$, что эквивалентно $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Попарная независимость

- События A и B **независимы** тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$, что эквивалентно $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Эти события являются **попарно независимыми**, тогда и только тогда, когда любые два события являются независимыми, то есть $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \forall i \neq j$, где $i, j \in I$.

Независимость событий

Попарная независимость

- События A и B **независимы** тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$, что эквивалентно $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Эти события являются **попарно независимыми**, тогда и только тогда, когда любые два события являются независимыми, то есть $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \forall i \neq j$, где $i, j \in I$.

Пример:
Вы бросили кубик. Событие A - выпало четно число, событие B - выпало число больше двух, событие C - выпало число больше трех. Проверьте, являются ли эти события попарно независимыми.
Подсказка: поочередно проверьте независимость событий 1) A и B, 2) A и C, 3) B и C.

- События A и B **независимы** тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$, что эквивалентно $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Эти события являются **попарно независимыми**, тогда и только тогда, когда любые два события являются независимыми, то есть $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \forall i \neq j$, где $i, j \in I$.

Пример:
Вы бросили кубик. Событие A - выпало четно число, событие B - выпало число больше двух, событие C - выпало число больше трех. Проверьте, являются ли эти события попарно независимыми.
Подсказка: поочередно проверьте независимость событий 1) A и B, 2) A и C, 3) B и C.

- События A и B независимы, поскольку $P(A \cap B) = P(\{4, 6\}) = \frac{1}{3}$ и $P(A) \times P(B) = P(\{2, 4, 6\}) \times P(\{3, 4, 5, 6\}) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$, а значит $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- События A и B **независимы** тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$, что эквивалентно $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Эти события являются **попарно независимыми**, тогда и только тогда, когда любые два события являются независимыми, то есть $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \forall i \neq j$, где $i, j \in I$.

Пример:
Вы бросили кубик. Событие A - выпало четно число, событие B - выпало число больше двух, событие C - выпало число больше трех. Проверьте, являются ли эти события попарно независимыми.
Подсказка: поочередно проверьте независимость событий 1) A и B, 2) A и C, 3) B и C.

- События A и B независимы, поскольку $P(A \cap B) = P(\{4, 6\}) = \frac{1}{3}$ и $P(A) \times P(B) = P(\{2, 4, 6\}) \times P(\{3, 4, 5, 6\}) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$, а значит $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- События A и C **не** являются независимыми, поскольку $P(A \cap C) = P(\{4, 6\}) = \frac{2}{6}$ и $P(A) \times P(C) = P(\{2, 4, 6\}) \times P(\{4, 5, 6\}) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$, а значит $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$.

- События A и B **независимы** тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$, что эквивалентно $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Эти события являются **попарно независимыми**, тогда и только тогда, когда любые два события являются независимыми, то есть $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \forall i \neq j$, где $i, j \in I$.

Пример:
Вы бросили кубик. Событие A - выпало четно число, событие B - выпало число больше двух, событие C - выпало число больше трех. Проверьте, являются ли эти события попарно независимыми.
Подсказка: поочередно проверьте независимость событий 1) A и B, 2) A и C, 3) B и C.

- События A и B независимы, поскольку $P(A \cap B) = P(\{4, 6\}) = \frac{1}{3}$ и $P(A) \times P(B) = P(\{2, 4, 6\}) \times P(\{3, 4, 5, 6\}) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$, а значит $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- События A и C **не** являются независимыми, поскольку $P(A \cap C) = P(\{4, 6\}) = \frac{2}{6}$ и $P(A) \times P(C) = P(\{2, 4, 6\}) \times P(\{4, 5, 6\}) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$, а значит $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$.
- Поскольку события A и C **не** являются независимыми, то события A, B и C **не** являются попарно независимыми.

- Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \cdots$ для любой подпоследовательности **различающихся** индексов $j_1, j_2, \cdots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \cdots$.

- Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \cdots$ для любой подпоследовательности **различающихся** индексов $j_1, j_2, \cdots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \cdots$.

Пример: Борис с равной вероятностью посмотрит от одной до четырех серий сериала. Рассмотрим события A - Борис посмотрел менее трех серий, B - Борис посмотрел нечетное число серий, C - Борис посмотрел одну или четыре серии. Проверьте, являются ли эти события независимыми попарно и в совокупности.

- Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \cdots$ для любой подпоследовательности **различающихся** индексов $j_1, j_2, \cdots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \cdots$.

Пример: Борис с равной вероятностью посмотрит от одной до четырех серий сериала. Рассмотрим события A - Борис посмотрел менее трех серий, B - Борис посмотрел нечетное число серий, C - Борис посмотрел одну или четыре серии. Проверьте, являются ли эти события независимыми попарно и в совокупности.

- События A и B независимы, поскольку $P(A \cap B) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 3\}) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$ и $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, а значит $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \cdots$ для любой подпоследовательности **различающихся** индексов $j_1, j_2, \cdots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \cdots$.

Пример: Борис с равной вероятностью посмотрит от одной до четырех серий сериала. Рассмотрим события A - Борис посмотрел менее трех серий, B - Борис посмотрел нечетное число серий, C - Борис посмотрел одну или четыре серии. Проверьте, являются ли эти события независимыми попарно и в совокупности.

- События A и B независимы, поскольку $P(A \cap B) = P(\{1,2\} \cap \{1,3\}) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$ и $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, а значит $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Независимость событий 1) A и C, 2) B и C - показывается по аналогии, из чего будет следовать, что события A, B, C - попарно независимы.

- Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \cdots$ для любой подпоследовательности **различающихся** индексов $j_1, j_2, \cdots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \cdots$.

Пример: Борис с равной вероятностью посмотрит от одной до четырех серий сериала. Рассмотрим события A - Борис посмотрел менее трех серий, B - Борис посмотрел нечетное число серий, C - Борис посмотрел одну или четыре серии. Проверьте, являются ли эти события независимыми попарно и в совокупности.

- События A и B независимы, поскольку $P(A \cap B) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 3\}) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$ и $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, а значит $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Независимость событий 1) A и C, 2) B и C - показывается по аналогии, из чего будет следовать, что события A, B, C - попарно независимы.
- События A, B и C **не являются** независимыми в совокупности, поскольку $P(A \cap B \cap C) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 3\} \cap \{1, 4\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}$ и $P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, откуда следует, что $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$.

Независимость событий

Независимость в совокупности

- Пусть имеется последовательность событий $A_1, A_2, \cdots$ (со множеством индексов I). Эти события являются **независимыми в совокупности**, тогда и только тогда, когда $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \cdots$ для любой подпоследовательности **различающихся** индексов $j_1, j_2, \cdots \in I : j_1 \neq j_2 \neq \cdots$.

Пример: Борис с равной вероятностью посмотрит от одной до четырех серий сериала. Рассмотрим события A - Борис посмотрел менее трех серий, B - Борис посмотрел нечетное число серий, C - Борис посмотрел одну или четыре серии. Проверьте, являются ли эти события независимыми попарно и в совокупности.

- События A и B независимы, поскольку $P(A \cap B) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 3\}) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$ и $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, а значит $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Независимость событий 1) A и C, 2) B и C - показывается по аналогии, из чего будет следовать, что события A, B, C - попарно независимы.
- События A, B и C **не являются** независимыми в совокупности, поскольку $P(A \cap B \cap C) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 3\} \cap \{1, 4\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}$ и $P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, откуда следует, что $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$.
- **Вывод** - из попарной независимости, не следует независимость в совокупности. Но нетрудно догадаться, что из независимости в совокупности следует попарная независимость.

Условная независимость

- Пусть имеются события A, B и C. События A и B являются **условно независимыми при условии наступления события** C, если $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.

- Пусть имеются события A, B и C. События A и B являются **условно независимыми при условии наступления события** C, если $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.

Пример: бросается обычный кубик. Пространство элементарных событий имеет вид $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Рассмотрим события $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 2\}$ и $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Определите, являются ли события A и B независимыми, а также будут ли они условно независимыми при условии наступления события C.

- Пусть имеются события A, B и C. События A и B являются **условно независимыми при условии наступления события** C, если $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.

Пример: бросается обычный кубик. Пространство элементарных событий имеет вид $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Рассмотрим события $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 2\}$ и $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Определите, являются ли события A и B независимыми, а также будут ли они условно независимыми при условии наступления события C.

Решение:

- События A и B не являются независимыми, поскольку $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$, но $P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

- Пусть имеются события A, B и C. События A и B являются **условно независимыми при условии наступления события** C, если $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.

Пример: бросается обычный кубик. Пространство элементарных событий имеет вид $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Рассмотрим события $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 2\}$ и $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Определите, являются ли события A и B независимыми, а также будут ли они условно независимыми при условии наступления события C.

Решение:

- События A и B не являются независимыми, поскольку $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$, но $P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.
- Условная независимость следует из равенства следующих вероятностей:

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(\{2\})}{P(\{1, 2, 3, 4\})} = \frac{1}{4}$$

- Пусть имеются события A, B и C. События A и B являются **условно независимыми при условии наступления события** C, если $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.

Пример: бросается обычный кубик. Пространство элементарных событий имеет вид $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Рассмотрим события $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 2\}$ и $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Определите, являются ли события A и B независимыми, а также будут ли они условно независимыми при условии наступления события C.

Решение:

- События A и B не являются независимыми, поскольку $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$, но $P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.
- Условная независимость следует из равенства следующих вероятностей:

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(\{2\})}{P(\{1, 2, 3, 4\})} = \frac{1}{4}$$

$$P(A|C)P(B|C) = \frac{P(\{2, 4\})}{P(\{1, 2, 3, 4\})} \times \frac{P(\{1, 2\})}{P(\{1, 2, 3, 4\})} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза

Парадокс Монти Холла

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза
- вам предлагают открыть либо ту коробку, которую вы выбрали изначально, либо другую не открытую коробку

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза
- вам предлагают открыть либо ту коробку, которую вы выбрали изначально, либо другую не открытую коробку
- с точки зрения максимизации вероятности выигрыша имеет ли смысл сменить коробку?

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза
- вам предлагают открыть либо ту коробку, которую вы выбрали изначально, либо другую не открытую коробку
- с точки зрения максимизации вероятности выигрыша имеет ли смысл сменить коробку?

Решение:

- Без потери общности представим, что вы выбрали первую коробку. Через (x, y) обозначим элементарное событие, в соответствии с которым приз лежит в коробке x, а ведущий открыл коробку y, откуда $\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,2)\}$.

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза
- вам предлагают открыть либо ту коробку, которую вы выбрали изначально, либо другую не открытую коробку
- с точки зрения максимизации вероятности выигрыша имеет ли смысл сменить коробку?

Решение:

- Без потери общности представим, что вы выбрали первую коробку. Через (x, y) обозначим элементарное событие, в соответствии с которым приз лежит в коробке x, а ведущий открыл коробку y, откуда $\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,2)\}$.
- Поскольку неизвестно, в какой коробке лежит приз, $P(\{(1,2)\}) = P(\{(1,3)\})$. Так как изначально приз с равной вероятностью оказывается в любой из коробок, то $P(\{(2,3)\}) = P(\{(3,2)\}) = P(\{(1,2)\}) + P(\{(1,3)\}) = 1/3$, а значит $P(\{(1,2)\}) = P(\{(1,3)\}) = 1/6$.

Вы играете в игру со следующими правилами:

- имеются три коробки, в одной из которых лежит приз
- вы выбираете одну из коробок, после чего ведущий открывает ту из оставшихся двух коробок, в которой нет приза
- вам предлагают открыть либо ту коробку, которую вы выбрали изначально, либо другую не открытую коробку
- с точки зрения максимизации вероятности выигрыша имеет ли смысл сменить коробку?

Решение:

- Без потери общности представим, что вы выбрали первую коробку. Через (x, y) обозначим элементарное событие, в соответствии с которым приз лежит в коробке x, а ведущий открыл коробку y, откуда $\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,2)\}$.
- Поскольку неизвестно, в какой коробке лежит приз, $P(\{(1,2)\}) = P(\{(1,3)\})$. Так как изначально приз с равной вероятностью оказывается в любой из коробок, то $P(\{(2,3)\}) = P(\{(3,2)\}) = P(\{(1,2)\}) + P(\{(1,3)\}) = 1/3$, а значит $P(\{(1,2)\}) = P(\{(1,3)\}) = 1/6$.
- Рассмотрим событие $B_2 = \{(1,2),(3,2)\}$ - ведущий открыл вторую коробку, событие $A_1 = \{(1,2),(1,3)\}$ - приз оказался в первой коробке, и событие $A_3 = \{(3,2)\}$ - приз оказался в третьей коробке.

$$\begin{cases} P(A_1|B_2) = \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(\{(1,2)\})}{P(\{(1,2),(3,2)\})} = \frac{1/6}{1/6+2/6} = \frac{1}{3} \\ P(A_3|B_2) = \frac{P(A_3 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(\{(3,2)\})}{P(\{(1,2),(3,2)\})} = \frac{2/6}{1/6+2/6} = \frac{2}{3} \end{cases} \implies \text{выгодно сменить коробку на третью.}$$

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. Младший ребенок - девочка. Какова вероятность того, что старший ребенок - мальчик?

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. Младший ребенок - девочка. Какова вероятность того, что старший ребенок - мальчик?

Решение:

- Обозначим через B_2 событие - старший ребенок мальчик, а через G_2 событие - старший ребенок девочка. По аналогии введем события B_1 и G_1 означающие, что младший ребенок является мальчиком или девочкой соответственно.

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. Младший ребенок - девочка. Какова вероятность того, что старший ребенок - мальчик?

Решение:

- Обозначим через B_2 событие - старший ребенок мальчик, а через G_2 событие - старший ребенок девочка. По аналогии введем события B_1 и G_1 означающие, что младший ребенок является мальчиком или девочкой соответственно.
- Пространство элементарных событий состоит их следующих упорядоченных пар, в которых первый элемент соответствует полу младшего ребенка, а второй элемент - полу старшего ребенка: $\Omega = \{(B, B), (B, G), (G, B), (G, G)\}$.

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. Младший ребенок - девочка. Какова вероятность того, что старший ребенок - мальчик?

Решение:

- Обозначим через B_2 событие - старший ребенок мальчик, а через G_2 событие - старший ребенок девочка. По аналогии введем события B_1 и G_1 означающие, что младший ребенок является мальчиком или девочкой соответственно.
- Пространство элементарных событий состоит их следующих упорядоченных пар, в которых первый элемент соответствует полу младшего ребенка, а второй элемент - полу старшего ребенка: $\Omega = \{(B,B),(B,G),(G,B),(G,G)\}$.
- По формула условной вероятности:

$$P(B_2|G_1) = \frac{P(B_2 \cap G_1)}{P(G_1)} = \frac{P(\{(G,B)\})}{P(\{(G,B),(G,G)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик?

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик?

Решение:

- Обозначим через M_1 событие - по крайней мере один ребенок мальчик. Заметим, что $M_1 = \{(B, B), (G, B), (B, G)\}$, а значит $P(M_1) = \frac{3}{4}$.

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик?

Решение:

- Обозначим через M_1 событие - по крайней мере один ребенок мальчик. Заметим, что $M_1 = \{(B,B),(G,B),(B,G)\}$, а значит $P(M_1) = \frac{3}{4}$.
- По формуле Байеса:

$$P(\{(B,B)\}|M_1) = \frac{P((B,B)\cap M_1)}{P(M_1)} = \frac{P(\{(B,B)\})}{P(\{(B,B),(G,B),(B,G)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что в каждый из дней недели дети рождаются с равной вероятностью.

Парадокс девочек и мальчиков, часть 3

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что в каждый из дней недели дети рождаются с равной вероятностью.

Примечание: обозначим через B_j^i событие - j-й по старшинству (чем больше j - тем старше) мальчик родился в i-й день недели, где $i \in \{1, ..., 7\}$ и $j \in \{1, 2\}$. Через $M_1^i = B_1^1 \cup B_2^1$ обозначим событие - по крайней мере один из детей мальчик, родившийся в i-й день недели, где $i \in \{1, ..., 7\}$.

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что в каждый из дней недели дети рождаются с равной вероятностью.

Примечание: обозначим через B_j^i событие - j-й по старшинству (чем больше j - тем старше) мальчик родился в i-й день недели, где $i \in \{1, ..., 7\}$ и $j \in \{1, 2\}$. Через $M_1^i = B_1^1 \cup B_2^1$ обозначим событие - по крайней мере один из детей мальчик, родившийся в i-й день недели, где $i \in \{1, ..., 7\}$.

Решение:

- Количество упорядоченных пар, из которых состоит пространство элементарных событий, составляет $|\Omega| = (2 \times 7)^2 = 14^2$.

Парадоксы

Парадокс девочек и мальчиков, часть 3

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что в каждый из дней недели дети рождаются с равной вероятностью.

Примечание: обозначим через B_j^i событие - j-й по старшинству (чем больше j - тем старше) мальчик родился в i-й день недели, где $i \in \{1, ..., 7\}$ и $j \in \{1, 2\}$. Через $M_1^i = B_1^1 \cup B_2^1$ обозначим событие - по крайней мере один из детей мальчик, родившийся в i-й день недели, где $i \in \{1, ..., 7\}$.

Решение:

- Количество упорядоченных пар, из которых состоит пространство элементарных событий, составляет $|\Omega| = (2 \times 7)^2 = 14^2$.
- По формуле объединения событий с учетом независимости событий B_1^1 и B_2^1 имеем:

$$P(M_1^1) = P(B_1^1 \cup B_2^1) = P(B_1^1) + P(B_2^1) - P(B_1^1)P(B_2^1) = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{14} * \frac{1}{14} = \frac{27}{14^2}$$

Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. В семье два ребенка. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что в каждый из дней недели дети рождаются с равной вероятностью.

Примечание: обозначим через B_j^i событие - j-й по старшинству (чем больше j - тем старше) мальчик родился в i-й день недели, где $i \in \{1,...,7\}$ и $j \in \{1,2\}$. Через $M_1^i = B_1^1 \cup B_2^1$ обозначим событие - по крайней мере один из детей мальчик, родившийся в i-й день недели, где $i \in \{1,...,7\}$.

Решение:

- Количество упорядоченных пар, из которых состоит пространство элементарных событий, составляет $|\Omega| = (2 \times 7)^2 = 14^2$.
- По формуле объединения событий с учетом независимости событий B_1^1 и B_2^1 имеем:

$$P(M_1^1) = P(B_1^1 \cup B_2^1) = P(B_1^1) + P(B_2^1) - P(B_1^1)P(B_2^1) = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{14} * \frac{1}{14} = \frac{27}{14^2}$$

- По формуле условной вероятности получаем:

$$P(B_1 \cap B_2 | M_1^1) = \frac{P(M_1^1 \cap B_1 \cap B_2)}{P(M_1^1)} = \frac{P([B_1^1 \cap B_2] \cup [B_1 \cap B_2^1])}{P(M_1^1)} =$$

$$= \frac{P(B_1^1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2^1) - P(B_1^1 \cap B_2 \cap B_1 \cap B_2^1)}{P(M_1^1)} = \frac{\frac{7}{14^2} + \frac{7}{14^2} - P(B_1^1 \cap B_2^1)}{P(M_1^1)} = \frac{2 \times \frac{7}{14^2} - \frac{1}{14^2}}{\frac{27}{14^2}} = \frac{13}{27}$$