

# Теория Вероятностей и Статистика

## Метод максимального правдоподобия и неравенство Рао-Крамера

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2022-2023

# Метод максимального правдоподобия

## Мотивация

- Продолжим изучать методы, позволяющие получать оценки, обладающие благоприятными свойствами.

# Метод максимального правдоподобия

## Мотивация

- Продолжим изучать методы, позволяющие получать оценки, обладающие благоприятными свойствами.
- Изученный ранее **метод моментов** хорош тем, что позволяет достаточно просто получить состоятельные оценки.

# Метод максимального правдоподобия

## Мотивация

- Продолжим изучать методы, позволяющие получать оценки, обладающие благоприятными свойствами.
- Изученный ранее **метод моментов** хорош тем, что позволяет достаточно просто получить состоятельные оценки.
- Недостаток данного метода заключается в том, что эффективность его оценок, даже при большом объеме выборки, может оказаться весьма низкой.

# Метод максимального правдоподобия

## Мотивация

- Продолжим изучать методы, позволяющие получать оценки, обладающие благоприятными свойствами.
- Изученный ранее **метод моментов** хорош тем, что позволяет достаточно просто получить состоятельные оценки.
- Недостаток данного метода заключается в том, что эффективность его оценок, даже при большом объеме выборки, может оказаться весьма низкой.
- В качестве альтернативы можно использовать **метод максимального правдоподобия**, оценки которого не только состоятельны, но и эффективны при достаточно больших объемах выборки (асимптотически эффективны).

# Функция правдоподобия

## Дискретный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из дискретного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией вероятностей  $P(t)$ . Также, дана реализация выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

# Функция правдоподобия

## Дискретный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из дискретного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией вероятностей  $P(t)$ . Также, дана реализация выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из дискретного распределения отражает вероятность получения соответствующей выборки при фиксированном значении параметра распределения:

# Функция правдоподобия

## Дискретный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из дискретного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией вероятностей  $P(t)$ . Также, дана реализация выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из дискретного распределения отражает вероятность получения соответствующей выборки при фиксированном значении параметра распределения:

$$L(\theta; x) = P(X_1 = x_1 \cap, \dots, \cap X_n = x_n) =$$



# Функция правдоподобия

## Дискретный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из дискретного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией вероятностей  $P(t)$ . Также, дана реализация выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из дискретного распределения отражает вероятность получения соответствующей выборки при фиксированном значении параметра распределения:

$$L(\theta; x) = P(X_1 = x_1 \cap, \dots, \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n) =$$

# Функция правдоподобия

## Дискретный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из дискретного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией вероятностей  $P(t)$ . Также, дана реализация выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из дискретного распределения отражает вероятность получения соответствующей выборки при фиксированном значении параметра распределения:

$$L(\theta; x) = P(X_1 = x_1 \cap, \dots, \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

# Функция правдоподобия

## Дискретный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из дискретного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией вероятностей  $P(t)$ . Также, дана реализация выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из дискретного распределения отражает вероятность получения соответствующей выборки при фиксированном значении параметра распределения:

$$L(\theta; x) = P(X_1 = x_1 \cap, \dots, \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

**Пример:** имеется выборка объема  $n$  из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ .  
Запишем выражение для функции правдоподобия:

# Функция правдоподобия

## Дискретный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из дискретного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией вероятностей  $P(t)$ . Также, дана реализация выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из дискретного распределения отражает вероятность получения соответствующей выборки при фиксированном значении параметра распределения:

$$L(\theta; x) = P(X_1 = x_1 \cap, \dots, \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

**Пример:** имеется выборка объема  $n$  из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ . Запишем выражение для функции правдоподобия:

$$L(\lambda; x) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} =$$

# Функция правдоподобия

## Дискретный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из дискретного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией вероятностей  $P(t)$ . Также, дана реализация выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из дискретного распределения отражает вероятность получения соответствующей выборки при фиксированном значении параметра распределения:

$$L(\theta; x) = P(X_1 = x_1 \cap, \dots, \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

**Пример:** имеется выборка объема  $n$  из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ . Запишем выражение для функции правдоподобия:

$$L(\lambda; x) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-n\lambda}$$

# Функция правдоподобия

## Непрерывный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из непрерывного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией плотности  $f(t)$  и реализацией  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

# Функция правдоподобия

## Непрерывный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из непрерывного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией плотности  $f(t)$  и реализацией  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из непрерывного распределения отражает совместную плотность выборки при фиксированном значении параметра:

# Функция правдоподобия

## Непрерывный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из непрерывного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией плотности  $f(t)$  и реализацией  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из непрерывного распределения отражает совместную плотность выборки при фиксированном значении параметра:

$$L(\theta; x) = f_X(x_1, \dots, x_n) =$$



# Функция правдоподобия

## Непрерывный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из непрерывного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией плотности  $f(t)$  и реализацией  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из непрерывного распределения отражает совместную плотность выборки при фиксированном значении параметра:

$$L(\theta; x) = f_X(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \times \dots \times f(x_n) =$$

# Функция правдоподобия

## Непрерывный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из непрерывного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией плотности  $f(t)$  и реализацией  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из непрерывного распределения отражает совместную плотность выборки при фиксированном значении параметра:

$$L(\theta; x) = f_X(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \times \dots \times f(x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

# Функция правдоподобия

## Непрерывный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из непрерывного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией плотности  $f(t)$  и реализацией  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из непрерывного распределения отражает совместную плотность выборки при фиксированном значении параметра:

$$L(\theta; x) = f_X(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \times \dots \times f(x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

**Пример:** имеется выборка объема  $n$  из экспоненциального распределения с параметром  $\lambda$ . Запишем выражение для функции правдоподобия:

# Функция правдоподобия

## Непрерывный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из непрерывного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией плотности  $f(t)$  и реализацией  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из непрерывного распределения отражает совместную плотность выборки при фиксированном значении параметра:

$$L(\theta; x) = f_X(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \times \dots \times f(x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

**Пример:** имеется выборка объема  $n$  из экспоненциального распределения с параметром  $\lambda$ . Запишем выражение для функции правдоподобия:

$$L(\lambda; x) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} =$$

# Функция правдоподобия

## Непрерывный случай

- Имеется выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из непрерывного распределения  $\Theta(\theta)$  с функцией плотности  $f(t)$  и реализацией  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- **Функция правдоподобия** выборки из непрерывного распределения отражает совместную плотность выборки при фиксированном значении параметра:

$$L(\theta; x) = f_X(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \times \dots \times f(x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

**Пример:** имеется выборка объема  $n$  из экспоненциального распределения с параметром  $\lambda$ . Запишем выражение для функции правдоподобия:

$$L(\lambda; x) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$$

# Функция правдоподобия

## Дополнительные примеры

- Имеется выборка объема  $n$  из геометрического распределения, то есть с функцией вероятностей  $P(t) = (1 - p)^{t-1}p$  при  $t \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Запишите функцию правдоподобия данной выборки.

# Функция правдоподобия

## Дополнительные примеры

- Имеется выборка объема  $n$  из геометрического распределения, то есть с функцией вероятностей  $P(t) = (1 - p)^{t-1}p$  при  $t \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Запишите функцию правдоподобия данной выборки.

$$L(p; x) = \prod_{i=1}^n (1 - p)^{x_i - 1} p =$$

# Функция правдоподобия

## Дополнительные примеры

- Имеется выборка объема  $n$  из геометрического распределения, то есть с функцией вероятностей  $P(t) = (1 - p)^{t-1}p$  при  $t \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Запишите функцию правдоподобия данной выборки.

$$L(p; x) = \prod_{i=1}^n (1 - p)^{x_i - 1} p = (1 - p)^{\sum_{i=1}^n (x_i - 1)} p^n$$



# Функция правдоподобия

## Дополнительные примеры

- Имеется выборка объема  $n$  из геометрического распределения, то есть с функцией вероятностей  $P(t) = (1 - p)^{t-1}p$  при  $t \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Запишите функцию правдоподобия данной выборки.

$$L(p; x) = \prod_{i=1}^n (1 - p)^{x_i-1} p = (1 - p)^{\sum_{i=1}^n (x_i-1)} p^n$$

- Имеется выборка объема  $n$  из равномерного распределения  $U(0, b)$ . Сперва для  $b \geq \max(x_1, \dots, x_n)$ , а затем для  $b < \max(x_1, \dots, x_n)$  запишите функция правдоподобия данной выборки:

# Функция правдоподобия

## Дополнительные примеры

- Имеется выборка объема  $n$  из геометрического распределения, то есть с функцией вероятностей  $P(t) = (1 - p)^{t-1}p$  при  $t \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Запишите функцию правдоподобия данной выборки.

$$L(p; x) = \prod_{i=1}^n (1 - p)^{x_i-1} p = (1 - p)^{\sum_{i=1}^n (x_i-1)} p^n$$

- Имеется выборка объема  $n$  из равномерного распределения  $U(0, b)$ . Сперва для  $b \geq \max(x_1, \dots, x_n)$ , а затем для  $b < \max(x_1, \dots, x_n)$  запишите функция правдоподобия данной выборки:

$$L(b; x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b} = \frac{1}{b^n}, \text{ при } b \geq \max(x_1, \dots, x_n)$$

# Функция правдоподобия

## Дополнительные примеры

- Имеется выборка объема  $n$  из геометрического распределения, то есть с функцией вероятностей  $P(t) = (1 - p)^{t-1}p$  при  $t \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Запишите функцию правдоподобия данной выборки.

$$L(p; x) = \prod_{i=1}^n (1 - p)^{x_i-1} p = (1 - p)^{\sum_{i=1}^n (x_i-1)} p^n$$

- Имеется выборка объема  $n$  из равномерного распределения  $U(0, b)$ . Сперва для  $b \geq \max(x_1, \dots, x_n)$ , а затем для  $b < \max(x_1, \dots, x_n)$  запишите функция правдоподобия данной выборки:

$$L(b; x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b} = \frac{1}{b^n}, \text{ при } b \geq \max(x_1, \dots, x_n)$$

Если по крайней мере в одной точке  $b < \max(x_1, \dots, x_n)$ , то существует  $x_i$ , такой, что  $f(x_i) = 0$ , откуда  $L(b; x) = 0$ .

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Формулировка

- Оценка параметра  $\theta$  может быть получена при помощи метода максимального правдоподобия (ММП оценка) за счет максимизации функции правдоподобия по  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_n = \operatorname{argmax}_{\theta} L(\theta; X)$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Формулировка

- Оценка параметра  $\theta$  может быть получена при помощи метода максимального правдоподобия (ММП оценка) за счет максимизации функции правдоподобия по  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_n = \operatorname{argmax}_{\theta} L(\theta; X)$$

- В случае, если на рассматриваемом множестве параметров функция правдоподобия не может обращаться в ноль (как в равномерном распределении), то для ее максимизации удобно взять логарифм:

$$\hat{\theta}_n = \operatorname{argmax}_{\theta} \ln (L(\theta; X)) = \operatorname{argmax}_{\theta} \ln L(\theta; X)$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Формулировка

- Оценка параметра  $\theta$  может быть получена при помощи метода максимального правдоподобия (ММП оценка) за счет максимизации функции правдоподобия по  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_n = \operatorname{argmax}_{\theta} L(\theta; X)$$

- В случае, если на рассматриваемом множестве параметров функция правдоподобия не может обращаться в ноль (как в равномерном распределении), то для ее максимизации удобно взять логарифм:

$$\hat{\theta}_n = \operatorname{argmax}_{\theta} \ln (L(\theta; X)) = \operatorname{argmax}_{\theta} \ln L(\theta; X)$$

- При соблюдении некоторых (достаточных) **условий регулярности** последовательность ММП оценок  $\hat{\theta}_n$  будет состоятельной.

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Формулировка

- Оценка параметра  $\theta$  может быть получена при помощи метода максимального правдоподобия (ММП оценка) за счет максимизации функции правдоподобия по  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_n = \operatorname{argmax}_{\theta} L(\theta; X)$$

- В случае, если на рассматриваемом множестве параметров функция правдоподобия не может обращаться в ноль (как в равномерном распределении), то для ее максимизации удобно взять логарифм:

$$\hat{\theta}_n = \operatorname{argmax}_{\theta} \ln (L(\theta; X)) = \operatorname{argmax}_{\theta} \ln L(\theta; X)$$

- При соблюдении некоторых (достаточных) **условий регулярности** последовательность ММП оценок  $\hat{\theta}_n$  будет состоятельной.
- Условия регулярности довольно сложны с технической точки зрения, поэтому мы их не оговариваем и предполагаем, что они всегда соблюдаются.

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с распределением Пуассона

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из распределения Пуассона. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:



# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с распределением Пуассона

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из распределения Пуассона. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\ln L(\lambda; x) = \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) =$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с распределением Пуассона

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из распределения Пуассона. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\ln L(\lambda; x) &= \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!) - \lambda) = \ln(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - n\lambda\end{aligned}$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с распределением Пуассона

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из распределения Пуассона. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\ln L(\lambda; x) &= \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!) - \lambda) = \ln(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - n\lambda\end{aligned}$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с распределением Пуассона

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из распределения Пуассона. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\ln L(\lambda; x) &= \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!) - \lambda) = \ln(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - n\lambda\end{aligned}$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

$$\frac{d(\ln L(\lambda; x))}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0 \implies$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с распределением Пуассона

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из распределения Пуассона. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\ln L(\lambda; x) &= \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!) - \lambda) = \ln(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - n\lambda\end{aligned}$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

$$\frac{d(\ln L(\lambda; x))}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0 \implies \lambda^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}_n \implies$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с распределением Пуассона

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из распределения Пуассона. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\ln L(\lambda; x) &= \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!) - \lambda) = \ln(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - n\lambda\end{aligned}$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

$$\frac{d(\ln L(\lambda; x))}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0 \implies \lambda^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}_n \implies \hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с распределением Пуассона

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из распределения Пуассона. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\ln L(\lambda; x) &= \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!) - \lambda) = \ln(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - n\lambda\end{aligned}$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

$$\frac{d(\ln L(\lambda; x))}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0 \implies \lambda^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}_n \implies \hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$$

- Чтобы досказать, что  $\hat{\lambda}_n$  является ММП оценкой, нужно убедиться, что мы нашли максимум, для чего покажем, что функция правдоподобия является вогнутой по оцениваемому параметру:

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с распределением Пуассона

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из распределения Пуассона. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\ln L(\lambda; x) &= \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!) - \lambda) = \ln(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - n\lambda\end{aligned}$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

$$\frac{d(\ln L(\lambda; x))}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0 \implies \lambda^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}_n \implies \hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$$

- Чтобы досказать, что  $\hat{\lambda}_n$  является ММП оценкой, нужно убедиться, что мы нашли максимум, для чего покажем, что функция правдоподобия является вогнутой по оцениваемому параметру:

$$\frac{d^2(\ln L(\lambda; x))}{d^2\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n x_i < 0$$



# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с распределением Пуассона

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из распределения Пуассона. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\ln L(\lambda; x) &= \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!) - \lambda) = \ln(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - n\lambda\end{aligned}$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

$$\frac{d(\ln L(\lambda; x))}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0 \implies \lambda^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}_n \implies \hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$$

- Чтобы досказать, что  $\hat{\lambda}_n$  является ММП оценкой, нужно убедиться, что мы нашли максимум, для чего покажем, что функция правдоподобия является вогнутой по оцениваемому параметру:

$$\frac{d^2(\ln L(\lambda; x))}{d^2\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n x_i < 0$$

**Примечание:** строго говоря случай  $x_1 = \dots = x_n = 0$  следует рассмотреть отдельно: в данной ситуации правдоподобие примет вид  $L(\lambda; x) = e^{-n\lambda}$ , а значит будет строго убывать по  $\lambda$ , поэтому вновь достигнет максимума в точке  $\lambda^* = 0 = \bar{x}_n$ .

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с экспоненциальным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из экспоненциального распределения. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с экспоненциальным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из экспоненциального распределения. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\ln L(\lambda; x) = \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda e^{-x_i \lambda} \right) =$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с экспоненциальным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из экспоненциального распределения. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\ln L(\lambda; x) = \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda e^{-x_i \lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln (\lambda e^{-\lambda x_i}) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с экспоненциальным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из экспоненциального распределения. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\ln L(\lambda; x) = \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda e^{-x_i \lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln (\lambda e^{-\lambda x_i}) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с экспоненциальным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из экспоненциального распределения. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\ln L(\lambda; x) = \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda e^{-x_i \lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln (\lambda e^{-\lambda x_i}) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

$$\frac{d(\ln L(\lambda; x))}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с экспоненциальным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из экспоненциального распределения. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\ln L(\lambda; x) = \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda e^{-x_i \lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln (\lambda e^{-\lambda x_i}) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

$$\frac{d(\ln L(\lambda; x))}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies \lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}_n} \implies$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с экспоненциальным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из экспоненциального распределения. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\ln L(\lambda; x) = \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda e^{-x_i \lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln (\lambda e^{-\lambda x_i}) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

$$\frac{d(\ln L(\lambda; x))}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies \lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}_n} \implies \hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$$



# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с экспоненциальным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из экспоненциального распределения. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\ln L(\lambda; x) = \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda e^{-x_i \lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln (\lambda e^{-\lambda x_i}) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

$$\frac{d(\ln L(\lambda; x))}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies \lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}_n} \implies \hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

- Чтобы досказать, что  $\hat{\lambda}_n$  является ММП оценкой, покажем, что функция правдоподобия является вогнутой по оцениваемому параметру, вследствие чего  $\lambda^*$  – точка максимума:

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с экспоненциальным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $\lambda$  по выборке из экспоненциального распределения. Логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\ln L(\lambda; x) = \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda e^{-x_i \lambda} \right) = \sum_{i=1}^n \ln (\lambda e^{-\lambda x_i}) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

- Максимизируем данную функцию, сперва рассмотрев условия первого порядка:

$$\frac{d(\ln L(\lambda; x))}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies \lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}_n} \implies \hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

- Чтобы досказать, что  $\hat{\lambda}_n$  является ММП оценкой, покажем, что функция правдоподобия является вогнутой по оцениваемому параметру, вследствие чего  $\lambda^*$  – точка максимума:

$$\frac{d^2(\ln L(\lambda; x))}{d^2\lambda} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с равномерным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $b$  по выборке из равномерного распределения  $U(0, b)$ , где  $b > 0$ .

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с равномерным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $b$  по выборке из равномерного распределения  $U(0, b)$ , где  $b > 0$ .
- Если  $b < \max(x_1, \dots, x_n)$ , то, как мы ранее показали, функция правдоподобия обращается в ноль, что мотивирует рассматривать лишь случай  $b \geq \max(x_1, \dots, x_n)$ .

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

Пример с равномерным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $b$  по выборке из равномерного распределения  $U(0, b)$ , где  $b > 0$ .
- Если  $b < \max(x_1, \dots, x_n)$ , то, как мы ранее показали, функция правдоподобия обращается в ноль, что мотивирует рассматривать лишь случай  $b \geq \max(x_1, \dots, x_n)$ .
- Тогда функция правдоподобия принимает вид:

$$L(b; x) = \frac{1}{b^n} = b^{-n}$$

# Метод максимального правдоподобия (ММП)

## Пример с равномерным распределением

- При помощи метода максимального правдоподобия найдем оценку параметра  $b$  по выборке из равномерного распределения  $U(0, b)$ , где  $b > 0$ .
- Если  $b < \max(x_1, \dots, x_n)$ , то, как мы ранее показали, функция правдоподобия обращается в ноль, что мотивирует рассматривать лишь случай  $b \geq \max(x_1, \dots, x_n)$ .
- Тогда функция правдоподобия принимает вид:

$$L(b; x) = \frac{1}{b^n} = b^{-n}$$

- Поскольку правдоподобие убывает по параметру  $b$ , то с учетом обозначенного ограничения функция достигает максимума при  $b^* = \max(x_1, \dots, x_n)$ , а значит ММП оценка примет вид:

$$\hat{b}_n = \max(X_1, \dots, X_n)$$

# Информация Фишера

## Определение

- **Информация Фишера** о параметре  $\theta$ , содержащаяся в одном наблюдении, может быть записана двумя эквивалентными способами:

$$i(\theta) = E \left( \left( \frac{d(\ln L(\theta; X_1))}{d\theta} \right)^2 \right) =$$

# Информация Фишера

## Определение

- **Информация Фишера** о параметре  $\theta$ , содержащаяся в одном наблюдении, может быть записана двумя эквивалентными способами:

$$i(\theta) = E \left( \left( \frac{d(\ln L(\theta; X_1))}{d\theta} \right)^2 \right) = - E \left( \frac{d^2(\ln L(\theta; X_1))}{d^2\theta} \right)$$



# Информация Фишера

## Определение

- **Информация Фишера** о параметре  $\theta$ , содержащаяся в одном наблюдении, может быть записана двумя эквивалентными способами:

$$i(\theta) = E \left( \left( \frac{d(\ln L(\theta; X_1))}{d\theta} \right)^2 \right) = - E \left( \frac{d^2(\ln L(\theta; X_1))}{d^2\theta} \right)$$

- Информация Фишера, содержащаяся во всей выборке, определяется как:

$$I_n(\theta) = n \times i(\theta)$$

# Информация Фишера

## Определение

- **Информация Фишера** о параметре  $\theta$ , содержащаяся в одном наблюдении, может быть записана двумя эквивалентными способами:

$$i(\theta) = E \left( \left( \frac{d(\ln L(\theta; X_1))}{d\theta} \right)^2 \right) = - E \left( \frac{d^2(\ln L(\theta; X_1))}{d^2\theta} \right)$$

- Информация Фишера, содержащаяся во всей выборке, определяется как:

$$I_n(\theta) = n \times i(\theta)$$

**Пример:** найдем информацию Фишера о параметре  $\lambda$ , содержащуюся в выборке из распределения Пуассона:

# Информация Фишера

## Определение

- **Информация Фишера** о параметре  $\theta$ , содержащаяся в одном наблюдении, может быть записана двумя эквивалентными способами:

$$i(\theta) = E \left( \left( \frac{d(\ln L(\theta; X_1))}{d\theta} \right)^2 \right) = - E \left( \frac{d^2(\ln L(\theta; X_1))}{d^2\theta} \right)$$

- Информация Фишера, содержащаяся во всей выборке, определяется как:

$$I_n(\theta) = n \times i(\theta)$$

**Пример:** найдем информацию Фишера о параметре  $\lambda$ , содержащуюся в выборке из распределения Пуассона:

$$\ln L(\lambda; X_1) = \ln \left( \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \right) = X_1 \ln(\lambda) - \ln(X_1!) - \lambda$$

# Информация Фишера

## Определение

- **Информация Фишера** о параметре  $\theta$ , содержащаяся в одном наблюдении, может быть записана двумя эквивалентными способами:

$$i(\theta) = E \left( \left( \frac{d(\ln L(\theta; X_1))}{d\theta} \right)^2 \right) = - E \left( \frac{d^2(\ln L(\theta; X_1))}{d^2\theta} \right)$$

- Информация Фишера, содержащаяся во всей выборке, определяется как:

$$I_n(\theta) = n \times i(\theta)$$

**Пример:** найдем информацию Фишера о параметре  $\lambda$ , содержащуюся в выборке из распределения Пуассона:

$$\begin{aligned} \ln L(\lambda; X_1) &= \ln \left( \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \right) = X_1 \ln(\lambda) - \ln(X_1!) - \lambda \\ \frac{d(\ln L(\lambda; X_1))}{d\lambda} &= \frac{X_1}{\lambda} - 1 \implies \frac{d^2(\ln L(\lambda; X_1))}{d^2\lambda} = -\frac{X_1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

# Информация Фишера

## Определение

- **Информация Фишера** о параметре  $\theta$ , содержащаяся в одном наблюдении, может быть записана двумя эквивалентными способами:

$$i(\theta) = E \left( \left( \frac{d(\ln L(\theta; X_1))}{d\theta} \right)^2 \right) = - E \left( \frac{d^2(\ln L(\theta; X_1))}{d^2\theta} \right)$$

- Информация Фишера, содержащаяся во всей выборке, определяется как:

$$I_n(\theta) = n \times i(\theta)$$

**Пример:** найдем информацию Фишера о параметре  $\lambda$ , содержащуюся в выборке из распределения Пуассона:

$$\begin{aligned} \ln L(\lambda; X_1) &= \ln \left( \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \right) = X_1 \ln(\lambda) - \ln(X_1!) - \lambda \\ \frac{d(\ln L(\lambda; X_1))}{d\lambda} &= \frac{X_1}{\lambda} - 1 \implies \frac{d^2(\ln L(\lambda; X_1))}{d^2\lambda} = -\frac{X_1}{\lambda^2} \\ i_n(\lambda) &= -E \left( -\frac{X_1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda^2} E(X_1) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \implies I_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda} \end{aligned}$$

# Информация Фишера

## Определение

- **Информация Фишера** о параметре  $\theta$ , содержащаяся в одном наблюдении, может быть записана двумя эквивалентными способами:

$$i(\theta) = E \left( \left( \frac{d(\ln L(\theta; X_1))}{d\theta} \right)^2 \right) = -E \left( \frac{d^2(\ln L(\theta; X_1))}{d^2\theta} \right)$$

- Информация Фишера, содержащаяся во всей выборке, определяется как:

$$I_n(\theta) = n \times i(\theta)$$

**Пример:** найдем информацию Фишера о параметре  $\lambda$ , содержащуюся в выборке из распределения Пуассона:

$$\begin{aligned} \ln L(\lambda; X_1) &= \ln \left( \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \right) = X_1 \ln(\lambda) - \ln(X_1!) - \lambda \\ \frac{d(\ln L(\lambda; X_1))}{d\lambda} &= \frac{X_1}{\lambda} - 1 \implies \frac{d^2(\ln L(\lambda; X_1))}{d^2\lambda} = -\frac{X_1}{\lambda^2} \\ i_n(\lambda) &= -E \left( -\frac{X_1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda^2} E(X_1) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \implies I_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda} \end{aligned}$$

**Примечание:** информация Фишера существует лишь для распределений, у которых носитель не зависит от параметров. Например, для равномерного распределения информация Фишера не определена.

# Неравенство Рао-Крамера

Формулировка для несмещенных оценок

- Для любой несмещенной оценки  $\hat{\theta}$  соблюдается **неравенство Рао-Крамера**:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

# Неравенство Рао-Крамера

Формулировка для несмещенных оценок

- Для любой несмещенной оценки  $\hat{\theta}$  соблюдается **неравенство Рао-Крамера**:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

- Если данное неравенство соблюдается как равенство, то соответствующая оценка является эффективной в классе несмещенных оценок (полученных по выборке объема  $n$ ).



# Неравенство Рао-Крамера

Формулировка для несмещенных оценок

- Для любой несмещенной оценки  $\hat{\theta}$  соблюдается **неравенство Рао-Крамера**:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

- Если данное неравенство соблюдается как равенство, то соответствующая оценка является эффективной в классе несмещенных оценок (полученных по выборке объема  $n$ ).

**Пример:** для выборки из распределения Пуассона рассмотрим несмещенную оценку  $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$  и рассчитаем ее дисперсию:

# Неравенство Рао-Крамера

Формулировка для несмещенных оценок

- Для любой несмещенной оценки  $\hat{\theta}$  соблюдается **неравенство Рао-Крамера**:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

- Если данное неравенство соблюдается как равенство, то соответствующая оценка является эффективной в классе несмещенных оценок (полученных по выборке объема  $n$ ).

**Пример:** для выборки из распределения Пуассона рассмотрим несмещенную оценку  $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$  и рассчитаем ее дисперсию:

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_n) = \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\text{Var}(X_1)}{n} =$$

# Неравенство Рао-Крамера

Формулировка для несмещенных оценок

- Для любой несмещенной оценки  $\hat{\theta}$  соблюдается **неравенство Рао-Крамера**:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

- Если данное неравенство соблюдается как равенство, то соответствующая оценка является эффективной в классе несмещенных оценок (полученных по выборке объема  $n$ ).

**Пример:** для выборки из распределения Пуассона рассмотрим несмещенную оценку  $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$  и рассчитаем ее дисперсию:

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_n) = \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\text{Var}(X_1)}{n} = \frac{\lambda}{n} = \frac{1}{I_n(\lambda)}$$

# Неравенство Рао-Крамера

Формулировка для несмещенных оценок

- Для любой несмещенной оценки  $\hat{\theta}$  соблюдается **неравенство Рао-Крамера**:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

- Если данное неравенство соблюдается как равенство, то соответствующая оценка является эффективной в классе несмещенных оценок (полученных по выборке объема  $n$ ).

**Пример:** для выборки из распределения Пуассона рассмотрим несмещенную оценку  $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$  и рассчитаем ее дисперсию:

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_n) = \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\text{Var}(X_1)}{n} = \frac{\lambda}{n} = \frac{1}{I_n(\lambda)}$$

Из полученного равенства следует, что оценка  $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$  является эффективной в классе несмещенных оценок.

# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Формулировка

- Если оценка  $\hat{\theta}_n$  была получена при помощи метода максимального правдоподобия, то ее асимптотическое распределение является нормальным (**асимптотическая нормальность**):

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{i(\theta)}\right)$$

# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Формулировка

- Если оценка  $\hat{\theta}_n$  была получена при помощи метода максимального правдоподобия, то ее асимптотическое распределение является нормальным (**асимптотическая нормальность**):

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{i(\theta)}\right)$$

- Поскольку на практике  $i(\theta)$  нам неизвестна, то, применив теорему Манна-Вальда, мы можем воспользоваться ее состоятельной оценкой  $i(\hat{\theta}_n)$ , откуда, в силу теоремы Slutsky получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Формулировка

- Если оценка  $\hat{\theta}_n$  была получена при помощи метода максимального правдоподобия, то ее асимптотическое распределение является нормальным (**асимптотическая нормальность**):

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{i(\theta)}\right)$$

- Поскольку на практике  $i(\theta)$  нам неизвестна, то, применив теорему Манна-Вальда, мы можем воспользоваться ее состоятельной оценкой  $i(\hat{\theta}_n)$ , откуда, в силу теоремы Slutsky получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- На практике, при больших  $n \geq 100$ , как правило предполагают, что:

$$\hat{\theta}_n \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{I_n(\theta)}\right) \quad \text{или} \quad \hat{\theta}_n \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{I_n(\hat{\theta}_n)}\right)$$

# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Формулировка

- Если оценка  $\hat{\theta}_n$  была получена при помощи метода максимального правдоподобия, то ее асимптотическое распределение является нормальным (**асимптотическая нормальность**):

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{i(\theta)}\right)$$

- Поскольку на практике  $i(\theta)$  нам неизвестна, то, применив теорему Манна-Вальда, мы можем воспользоваться ее состоятельной оценкой  $i(\hat{\theta}_n)$ , откуда, в силу теоремы Slutsky получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- На практике, при больших  $n \geq 100$ , как правило предполагают, что:

$$\hat{\theta}_n \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{I_n(\theta)}\right) \quad \text{или} \quad \hat{\theta}_n \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{I_n(\hat{\theta}_n)}\right)$$

- Асимптотическая дисперсия** ММП оценки записывается как  $As.Var(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{I_n(\theta)}$  и совпадает с границей неравенства Рао-Крамера, поэтому ММП оценки **асимптотически эффективны**.



# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Формулировка

- Если оценка  $\hat{\theta}_n$  была получена при помощи метода максимального правдоподобия, то ее асимптотическое распределение является нормальным (**асимптотическая нормальность**):

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{i(\theta)}\right)$$

- Поскольку на практике  $i(\theta)$  нам неизвестна, то, применив теорему Манна-Вальда, мы можем воспользоваться ее состоятельной оценкой  $i(\hat{\theta}_n)$ , откуда, в силу теоремы Slutsky получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- На практике, при больших  $n \geq 100$ , как правило предполагают, что:

$$\hat{\theta}_n \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{I_n(\theta)}\right) \quad \text{или} \quad \hat{\theta}_n \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{I_n(\hat{\theta}_n)}\right)$$

- Асимптотическая дисперсия** ММП оценки записывается как  $As.Var(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{I_n(\theta)}$  и совпадает с границей неравенства Рао-Крамера, поэтому ММП оценки **асимптотически эффективны**.
- Состоятельная оценка асимптотической дисперсии ММП оценки имеет вид  $\widehat{As.Var}(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}$ .

# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Пример с распределением Пуассона

- В случае с выборкой из распределения Пуассона получаем, что для ММП оценки параметра  $\lambda$  можно положить  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$  или  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\bar{X}_n}{n}\right)$ .

# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Пример с распределением Пуассона

- В случае с выборкой из распределения Пуассона получаем, что для ММП оценки параметра  $\lambda$  можно положить  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$  или  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\bar{X}_n}{n}\right)$ .
- Асимптотическая дисперсия ММП оценки будет иметь вид  $As.Var(\hat{\lambda}_n) = \frac{\lambda}{n}$ .

# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Пример с распределением Пуассона

- В случае с выборкой из распределения Пуассона получаем, что для ММП оценки параметра  $\lambda$  можно положить  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$  или  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\bar{X}_n}{n}\right)$ .
- Асимптотическая дисперсия ММП оценки будет иметь вид  $As.Var(\hat{\lambda}_n) = \frac{\lambda}{n}$ .
- Ее оценкой является  $\widehat{As.Var}(\hat{\lambda}_n) = \frac{\bar{X}_n}{n}$  с реализацией  $\frac{\bar{x}_n}{n}$ .

# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Пример с распределением Пуассона

- В случае с выборкой из распределения Пуассона получаем, что для ММП оценки параметра  $\lambda$  можно положить  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$  или  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\bar{X}_n}{n}\right)$ .
- Асимптотическая дисперсия ММП оценки будет иметь вид  $As.Var(\hat{\lambda}_n) = \frac{\lambda}{n}$ .
- Ее оценкой является  $\widehat{As.Var}(\hat{\lambda}_n) = \frac{\bar{X}_n}{n}$  с реализацией  $\frac{\bar{x}_n}{n}$ .
- Допустим, что  $n = 10000$  и  $\hat{\lambda}_{100}(x) = \bar{x}_{100} = 2500$ , откуда  $(\hat{\lambda}_n - \lambda) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2500}{10000}\right)$ . Тогда вероятность отклонения оценки от истинного значения более, чем на 1, можно приблизительно оценить как:

# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Пример с распределением Пуассона

- В случае с выборкой из распределения Пуассона получаем, что для ММП оценки параметра  $\lambda$  можно положить  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$  или  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\bar{X}_n}{n}\right)$ .
- Асимптотическая дисперсия ММП оценки будет иметь вид  $As.Var(\hat{\lambda}_n) = \frac{\lambda}{n}$ .
- Ее оценкой является  $\widehat{As.Var}(\hat{\lambda}_n) = \frac{\bar{X}_n}{n}$  с реализацией  $\frac{\bar{x}_n}{n}$ .
- Допустим, что  $n = 10000$  и  $\hat{\lambda}_{100}(x) = \bar{x}_{100} = 2500$ , откуда  $(\hat{\lambda}_n - \lambda) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2500}{10000}\right)$ . Тогда вероятность отклонения оценки от истинного значения более, чем на 1, можно приблизительно оценить как:

$$P(|\hat{\lambda}_n - \lambda| > 1) = P(\hat{\lambda}_n - \lambda > 1) + P(\hat{\lambda}_n - \lambda < -1) \approx$$

# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Пример с распределением Пуассона

- В случае с выборкой из распределения Пуассона получаем, что для ММП оценки параметра  $\lambda$  можно положить  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}(\lambda, \frac{\lambda}{n})$  или  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}(\lambda, \frac{\bar{X}_n}{n})$ .
- Асимптотическая дисперсия ММП оценки будет иметь вид  $As.Var(\hat{\lambda}_n) = \frac{\lambda}{n}$ .
- Ее оценкой является  $\widehat{As.Var}(\hat{\lambda}_n) = \frac{\bar{X}_n}{n}$  с реализацией  $\frac{\bar{x}_n}{n}$ .
- Допустим, что  $n = 10000$  и  $\hat{\lambda}_{100}(x) = \bar{x}_{100} = 2500$ , откуда  $(\hat{\lambda}_n - \lambda) \sim \mathcal{N}(0, \frac{2500}{10000})$ . Тогда вероятность отклонения оценки от истинного значения более, чем на 1, можно приблизительно оценить как:

$$\begin{aligned} P(|\hat{\lambda}_n - \lambda| > 1) &= P(\hat{\lambda}_n - \lambda > 1) + P(\hat{\lambda}_n - \lambda < -1) \approx \\ &\approx \left( 1 - \Phi \left( \frac{1 - 0}{\sqrt{2500/10000}} \right) \right) + \left( 1 - \Phi \left( \frac{1 - 0}{\sqrt{2500/10000}} \right) \right) \approx \end{aligned}$$

# Асимптотическая нормальность и эффективность ММП оценок

## Пример с распределением Пуассона

- В случае с выборкой из распределения Пуассона получаем, что для ММП оценки параметра  $\lambda$  можно положить  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}(\lambda, \frac{\lambda}{n})$  или  $\hat{\lambda}_n \sim \mathcal{N}(\lambda, \frac{\bar{X}_n}{n})$ .
- Асимптотическая дисперсия ММП оценки будет иметь вид  $As.Var(\hat{\lambda}_n) = \frac{\lambda}{n}$ .
- Ее оценкой является  $\widehat{As.Var}(\hat{\lambda}_n) = \frac{\bar{X}_n}{n}$  с реализацией  $\frac{\bar{x}_n}{n}$ .
- Допустим, что  $n = 10000$  и  $\hat{\lambda}_{100}(x) = \bar{x}_{100} = 2500$ , откуда  $(\hat{\lambda}_n - \lambda) \sim \mathcal{N}(0, \frac{2500}{10000})$ . Тогда вероятность отклонения оценки от истинного значения более, чем на 1, можно приблизительно оценить как:

$$\begin{aligned} P(|\hat{\lambda}_n - \lambda| > 1) &= P(\hat{\lambda}_n - \lambda > 1) + P(\hat{\lambda}_n - \lambda < -1) \approx \\ &\approx \left( 1 - \Phi \left( \frac{1 - 0}{\sqrt{2500/10000}} \right) \right) + \left( 1 - \Phi \left( \frac{1 - 0}{\sqrt{2500/10000}} \right) \right) \approx \\ &\approx 2 - 2\Phi \left( \frac{1 - 0}{\sqrt{2500/10000}} \right) = 2 - 2\Phi(2) \approx 0.046 \end{aligned}$$