Теория Вероятностей и Статистика

Асимптотические доверительные интервалы

Потанин Богдан Станиславович

доцент, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2023-2024

- Для построения доверительных интервалов мы брали за основу некоторые статистики.

- Для построения доверительных интервалов мы брали за основу некоторые статистики.
- Зачастую, найти распределение этих статистик может оказаться весьма затруднительным.

- Для построения доверительных интервалов мы брали за основу некоторые статистики.
- Зачастую, найти распределение этих статистик может оказаться весьма затруднительным.
- Однако, асимптотическое распределение этих статистик может иметь достаточно простой вид.

Асимптотические доверительные интервалы

Мотивация

- Для построения доверительных интервалов мы брали за основу некоторые статистики.
- Зачастую, найти распределение этих статистик может оказаться весьма затруднительным.
- Однако, асимптотическое распределение этих статистик может иметь достаточно простой вид.
- Рассмотрим асимптотические доверительные интервалы, то есть построенные с помощью асимптотического распределения статистик.

Асимптотические доверительные интервалы

Мотивация

- Для построения доверительных интервалов мы брали за основу некоторые статистики.
- Зачастую, найти распределение этих статистик может оказаться весьма затруднительным.
- Однако, асимптотическое распределение этих статистик может иметь достаточно простой вид.
- Рассмотрим асимптотические доверительные интервалы, то есть построенные с помощью асимптотического распределения статистик.
- Применение асимптотических доверительных интервалов, как правило, требует выборок больших объемов $n \geq 100$.

Асимптотические доверительные интервалы для среднего

Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием $E(X_1) = \mu$ и дисперсией $Var(X_1) = \sigma^2$.

Асимптотические доверительные интервалы для среднего

Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием $E(X_1) = \mu$ и дисперсией $Var(X_1) = \sigma^2$.
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 1\right)$$

Асимптотические доверительные интервалы для среднего

Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием $E(X_1) = \mu$ и дисперсией $Var(X_1) = \sigma^2$.
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Поскольку $\hat{\sigma} \xrightarrow{p} \sigma$, то $\sigma/\hat{\sigma} \xrightarrow{p} 1$, а значит, используя теорему Слуцкого, имеем:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \times 1 \implies \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Асимптотические доверительные интервалы для среднего

Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием $E(X_1) = \mu$ и дисперсией $Var(X_1) = \sigma^2$.
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Поскольку $\hat{\sigma} \xrightarrow{p} \sigma$, то $\sigma/\hat{\sigma} \xrightarrow{p} 1$, а значит, используя теорему Слуцкого, имеем:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \times 1 \implies \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Используя асимптотическое распределение соответствующей статистики получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для μ:

$$\left[\overline{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \overline{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}\right]$$

Асимптотические доверительные интервалы для среднего

Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием $E(X_1) = \mu$ и дисперсией $Var(X_1) = \sigma^2$.
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Поскольку $\hat{\sigma} \xrightarrow{p} \sigma$, то $\sigma/\hat{\sigma} \xrightarrow{p} 1$, а значит, используя теорему Слуцкого, имеем:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \times 1 \implies \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Используя асимптотическое распределение соответствующей статистики получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для μ:

$$\left[\overline{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \overline{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}\right]$$

Пример: имеется выборка объемом $n = 100$ наблюдений. Были посчитаны выборочное среднее $\overline{x}_{100} = 2$ и исправленная выборочная дисперсия $\hat{\sigma}_{100}^2 = 25$. Найдем реализацию асимптотического 95%-го доверительного интервала для математического ожидания наблюдения.

Асимптотические доверительные интервалы для среднего

Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием $E(X_1) = \mu$ и дисперсией $Var(X_1) = \sigma^2$.
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Поскольку $\hat{\sigma} \xrightarrow{p} \sigma$, то $\sigma/\hat{\sigma} \xrightarrow{p} 1$, а значит, используя теорему Слуцкого, имеем:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \times 1 \implies \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Используя асимптотическое распределение соответствующей статистики получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для μ:

$$\left[\overline{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \overline{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}\right]$$

Пример: имеется выборка объемом $n = 100$ наблюдений. Были посчитаны выборочное среднее $\overline{x}_{100} = 2$ и исправленная выборочная дисперсия $\hat{\sigma}^2_{100} = 25$. Найдем реализацию асимптотического 95%-го доверительного интервала для математического ожидания наблюдения. Поскольку $z_{0.975} \approx 1.96$, то:

Асимптотические доверительные интервалы для среднего

Математическое ожидание

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием $E(X_1) = \mu$ и дисперсией $Var(X_1) = \sigma^2$.
- Применяя ЦПТ, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Поскольку $\hat{\sigma} \xrightarrow{p} \sigma$, то $\sigma/\hat{\sigma} \xrightarrow{p} 1$, а значит, используя теорему Слуцкого, имеем:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \times 1 \implies \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Используя асимптотическое распределение соответствующей статистики получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для μ:

$$\left[\overline{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}, \overline{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}\right]$$

Пример: имеется выборка объемом $n = 100$ наблюдений. Были посчитаны выборочное среднее $\overline{x}_{100} = 2$ и исправленная выборочная дисперсия $\hat{\sigma}^2_{100} = 25$. Найдем реализацию асимптотического 95%-го доверительного интервала для математического ожидания наблюдения. Поскольку $z_{0.975} \approx 1.96$, то:

$$\left[2 - 1.96\sqrt{25/100}, 2 + 1.96\sqrt{25/100}\right] = [1.02, 2.98]$$

Асимптотические доверительные интервалы для среднего

Разница математических ожиданий

- Рассмотрим независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений с конечными математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и дисперсиями σ_X^2, σ_Y^2.

Асимптотические доверительные интервалы для среднего

Разница математических ожиданий

- Рассмотрим независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений с конечными математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и дисперсиями σ_X^2, σ_Y^2.
- Действуя по аналогии с предыдущим случаем получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $\mu_X - \mu_Y$:

$$\left[\overline{X}_n - \overline{Y}_m - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}, \overline{X}_n - \overline{Y}_m + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}\right]$$

Асимптотические доверительные интервалы для среднего

Разница математических ожиданий

- Рассмотрим независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений с конечными математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и дисперсиями σ^2_X, σ^2_Y.
- Действуя по аналогии с предыдущим случаем получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $\mu_X - \mu_Y$:

$$\left[\overline{X}_n - \overline{Y}_m - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_X}{n} + \frac{\hat{\sigma}^2_Y}{m}}, \overline{X}_n - \overline{Y}_m + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_X}{n} + \frac{\hat{\sigma}^2_Y}{m}}\right]$$

Пример: имеются две независимые выборки: одна из равномерного распределения, а другая – из некоторого распределения с конечными математическими ожиданием и дисперсией. Объемы этих выборок равняются $n_X = 100$ и $n_Y = 225$ соответственно. Кроме того, были посчитаны выборочные средние $\overline{x} = 5$ и $\overline{y} = 3$, а также исправленные выборочные дисперсии $\hat{\sigma}^2_X = 16$ и $\hat{\sigma}^2_Y = 25$. Найдем реализацию 99%-го доверительного интервала для разницы математических ожиданий.

Асимптотические доверительные интервалы для среднего
Разница математических ожиданий

- Рассмотрим независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений с конечными математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и дисперсиями σ_X^2, σ_Y^2.
- Действуя по аналогии с предыдущим случаем получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $\mu_X - \mu_Y$:

$$\left[\overline{X}_n - \overline{Y}_m - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}, \overline{X}_n - \overline{Y}_m + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}\right]$$

Пример: имеются две независимые выборки: одна из равномерного распределения, а другая – из некоторого распределения с конечными математическими ожиданием и дисперсией. Объемы этих выборок равняются $n_X = 100$ и $n_Y = 225$ соответственно. Кроме того, были посчитаны выборочные средние $\overline{x} = 5$ и $\overline{y} = 3$, а также исправленные выборочные дисперсии $\hat{\sigma}_X^2 = 16$ и $\hat{\sigma}_Y^2 = 25$. Найдем реализацию 99%-го доверительного интервала для разницы математических ожиданий. Поскольку $z_{0.995} \approx 2.58$, то искомая реализация:

Асимптотические доверительные интервалы для среднего

Разница математических ожиданий

- Рассмотрим независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений с конечными математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и дисперсиями σ_X^2, σ_Y^2.
- Действуя по аналогии с предыдущим случаем получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $\mu_X - \mu_Y$:

$$\left[\overline{X}_n - \overline{Y}_m - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}, \overline{X}_n - \overline{Y}_m + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}\right]$$

Пример: имеются две независимые выборки: одна из равномерного распределения, а другая – из некоторого распределения с конечными математическими ожиданием и дисперсией. Объемы этих выборок равняются $n_X = 100$ и $n_Y = 225$ соответственно. Кроме того, были посчитаны выборочные средние $\overline{x} = 5$ и $\overline{y} = 3$, а также исправленные выборочные дисперсии $\hat{\sigma}_X^2 = 16$ и $\hat{\sigma}_Y^2 = 25$. Найдем реализацию 99%-го доверительного интервала для разницы математических ожиданий. Поскольку $z_{0.995} \approx 2.58$, то искомая реализация:

$$\left[5 - 3 - 2.58\sqrt{16/100 + 25/225}, 5 - 3 + 2.58\sqrt{16/100 + 25/225}\right] \approx [0.66, 3.34]$$

Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

Параметр

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.

Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

Параметр

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.
- Вследствие асимптотической нормальности ММП оценок и теоремы Слуцкого получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

Параметр

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.
- Вследствие асимптотической нормальности ММП оценок и теоремы Слуцкого получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)$$

- Действуя стандартным образом получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для θ:

$$\left[\hat{\theta}_n-z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}},\hat{\theta}_n+z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}}\right]$$

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.
- Вследствие асимптотической нормальности ММП оценок и теоремы Слуцкого получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)$$

- Действуя стандартным образом получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для θ:

$$\left[\hat{\theta}_n-z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}},\hat{\theta}_n+z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}}\right]$$

Пример: имеется выборка объемом в $n=100$ наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего $\overline{x}_{100}=0.2$. Построим 99%-й доверительный интервал для λ.

Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

Параметр

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.
- Вследствие асимптотической нормальности ММП оценок и теоремы Слуцкого получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)$$

- Действуя стандартным образом получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для θ:

$$\left[\hat{\theta}_n-z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}},\hat{\theta}_n+z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}}\right]$$

Пример: имеется выборка объемом в $n=100$ наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего $\overline{x}_{100}=0.2$. Построим 99%-й доверительный интервал для λ. Поскольку $\hat{\lambda}_{100}(x)=1/\overline{x}_{100}=1/0.2=5$, $i(\lambda)=1/\lambda^2$, $i(\hat{\lambda}_{100}(x))=1/5^2=0.04$, $z_{0.995}\approx 2.58$, то искомая реализация имеет вид:

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.
- Вследствие асимптотической нормальности ММП оценок и теоремы Слуцкого получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)$$

- Действуя стандартным образом получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для θ:

$$\left[\hat{\theta}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}}, \hat{\theta}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{ni(\hat{\theta}_n)}}\right]$$

Пример: имеется выборка объемом в $n=100$ наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего $\overline{x}_{100}=0.2$. Построим 99%-й доверительный интервал для λ. Поскольку $\hat{\lambda}_{100}(x)=1/\overline{x}_{100}=1/0.2=5$, $i(\lambda)=1/\lambda^2$, $i(\hat{\lambda}_{100}(x))=1/5^2=0.04$, $z_{0.995}\approx 2.58$, то искомая реализация имеет вид:

$$\left[5-2.58\sqrt{1/\left(100\times 0.04\right)}, 5+2.58\sqrt{1/\left(100\times 0.04\right)}\right]=[3.71, 6.29]$$

Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

Функция от параметра

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.

Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

Функция от параметра

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.
- При монотонной дифференцируемой функции $g(.)$, применяя дельта метод, получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)/g'(\hat{\theta}_n)^2}\left(g(\hat{\theta}_n)-g(\theta)\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)$$

Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

Функция от параметра

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.
- При монотонной дифференцируемой функции $g(.)$, применяя дельта метод, получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)/g'(\hat{\theta}_n)^2}\left(g(\hat{\theta}_n)-g(\theta)\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)$$

- Получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $g(\theta)$:

$$\left[g(\hat{\theta}_n)-z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}},g(\hat{\theta}_n)+z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}}\right]$$

Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

Функция от параметра

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.
- При монотонной дифференцируемой функции $g(.)$, применяя дельта метод, получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)/g'(\hat{\theta}_n)^2}\left(g(\hat{\theta}_n)-g(\theta)\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)$$

- Получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $g(\theta)$:

$$\left[g(\hat{\theta}_n)-z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}},g(\hat{\theta}_n)+z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}}\right]$$

Пример: имеется выборка объемом в $n=100$ наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего $\overline{x}_{100}=0.2$. Построим 99%-й доверительный интервал для дисперсии $Var(X_1)=1/\lambda^2$.

Асимптотические доверительные интервалы на основе ММП оценок

Функция от параметра

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.
- При монотонной дифференцируемой функции $g(.)$, применяя дельта метод, получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)/g'(\hat{\theta}_n)^2}\left(g(\hat{\theta}_n)-g(\theta)\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)$$

- Получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $g(\theta)$:

$$\left[g(\hat{\theta}_n)-z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}},g(\hat{\theta}_n)+z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}}\right]$$

Пример: имеется выборка объемом в $n=100$ наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего $\overline{x}_{100}=0.2$. Построим 99%-й доверительный интервал для дисперсии $Var(X_1)=1/\lambda^2$. Поскольку $g(\lambda)=Var(X_1)=1/\lambda^2$, $\hat{\lambda}_{100}(x)=5$, $i(\hat{\lambda}_{100}(x))=0.04$, $g(\hat{\lambda}_{100})=1/5^2=0.04$, $g'(\lambda)=-2/\lambda^3$, $g'(\hat{\lambda}_{100}(x))=-2/5^3=-0.016$ и $z_{0.995}\approx 2.58$, то искомая реализация имеет вид:

- Имеется ММП оценка $\hat{\theta}_n$ параметр θ, а также определена информация Фишера $i(\theta)$.
- При монотонной дифференцируемой функции $g(.)$, применяя дельта метод, получаем:

$$\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)/g'(\hat{\theta}_n)^2}\left(g(\hat{\theta}_n)-g(\theta)\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)$$

- Получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $g(\theta)$:

$$\left[g(\hat{\theta}_n)-z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}},g(\hat{\theta}_n)+z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2}{ni(\hat{\theta}_n)}}\right]$$

Пример: имеется выборка объемом в $n=100$ наблюдений из экспоненциального распределения и с реализацией выборочного среднего $\overline{x}_{100}=0.2$. Построим 99%-й доверительный интервал для дисперсии $Var(X_1)=1/\lambda^2$. Поскольку $g(\lambda)=Var(X_1)=1/\lambda^2$, $\hat{\lambda}_{100}(x)=5$, $i(\hat{\lambda}_{100}(x))=0.04$, $g(\hat{\lambda}_{100})=1/5^2=0.04$, $g'(\lambda)=-2/\lambda^3$, $g'(\hat{\lambda}_{100}(x))=-2/5^3=-0.016$ и $z_{0.995}\approx 2.58$, то искомая реализация имеет вид:

$$\left[0.04-2.58\sqrt{\frac{(-0.016)^2}{100\times 0.04}},0.04+2.58\sqrt{\frac{(-0.016)^2}{100\times 0.04}}\right]\approx[0.019,0.061]$$

Асимптотические доверительные интервалы

Дополнительный пример

Каждый день кот ученый мяукает до тех пор, пока его не покормят. Вероятность того, что кота покормят после очередного 'мяу', не зависит от числа изданных ранее 'мяу' и всегда равняется $p \in (0, 1)$. Ученый кот собрал выборку объема $n = 2500$ из количества мяуканий, которые ему пришлось произвести прежде, чем его покормили. Реализации выборочного среднего и исправленной выборочной дисперсии оказались равны 1.25 и 0.3 соответственно. Помогите ученому коту найти реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала:

Асимптотические доверительные интервалы

Дополнительный пример

Каждый день кот ученый мяукает до тех пор, пока его не покормят. Вероятность того, что кота покормят после очередного 'мяу', не зависит от числа изданных ранее 'мяу' и всегда равняется $p \in (0, 1)$. Ученый кот собрал выборку объема $n = 2500$ из количества мяуканий, которые ему пришлось произвести прежде, чем его покормили. Реализации выборочного среднего и исправленной выборочной дисперсии оказались равны 1.25 и 0.3 соответственно. Помогите ученому коту найти реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала:

- Математического ожидания числа мяуканий, предшествующих получению питания.
- Вероятности того, что после очередного мяуканья ученый кот получит питание.
- Вероятности того, что кота покормят раньше, чем он успеет мяукнуть трижды.

Асимптотические доверительные интервалы

Дополнительный пример

Каждый день кот ученый мяукает до тех пор, пока его не покормят. Вероятность того, что кота покормят после очередного 'мяу', не зависит от числа изданных ранее 'мяу' и всегда равняется $p \in (0, 1)$. Ученый кот собрал выборку объема $n = 2500$ из количества мяуканий, которые ему пришлось произвести прежде, чем его покормили. Реализации выборочного среднего и исправленной выборочной дисперсии оказались равны 1.25 и 0.3 соответственно. Помогите ученому коту найти реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала:

- Математического ожидания числа мяуканий, предшествующих получению питания.
- Вероятности того, что после очередного мяуканья ученый кот получит питание.
- Вероятности того, что кота покормят раньше, чем он успеет мяукнуть трижды.

Решение:

- $\left[1.25 - 1.645\sqrt{0.3/2500}, 1.25 + 1.645\sqrt{0.3/2500}\right] \approx [1.23, 1.27]$

Асимптотические доверительные интервалы

Дополнительный пример

Каждый день кот ученый мяукает до тех пор, пока его не покормят. Вероятность того, что кота покормят после очередного 'мяу', не зависит от числа изданных ранее 'мяу' и всегда равняется $p \in (0, 1)$. Ученый кот собрал выборку объема $n = 2500$ из количества мяуканий, которые ему пришлось произвести прежде, чем его покормили. Реализации выборочного среднего и исправленной выборочной дисперсии оказались равны 1.25 и 0.3 соответственно. Помогите ученому коту найти реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала:

- Математического ожидания числа мяуканий, предшествующих получению питания.
- Вероятности того, что после очередного мяуканья ученый кот получит питание.
- Вероятности того, что кота покормят раньше, чем он успеет мяукнуть трижды.

Решение:

- $\left[1.25 - 1.645\sqrt{0.3/2500}, 1.25 + 1.645\sqrt{0.3/2500}\right] \approx [1.23, 1.27]$
- Используя ММП получаем $\hat{p}_n(x) = 1/1.25 = 0.8$ и $i(\hat{p}_n(x)) = 1/\left((1 - 0.8)0.8^2\right) = 7.8125$, откуда:

$$\left[0.8 - 1.645/\sqrt{2500 \times 7.8125}, 0.8 + 1.645/\sqrt{2500 \times 7.8125}\right] = [0.788, 0.812]$$

Асимптотические доверительные интервалы

Дополнительный пример

Каждый день кот ученый мяукает до тех пор, пока его не покормят. Вероятность того, что кота покормят после очередного 'мяу', не зависит от числа изданных ранее 'мяу' и всегда равняется $p \in (0,1)$. Ученый кот собрал выборку объема $n = 2500$ из количества мяуканий, которые ему пришлось произвести прежде, чем его покормили. Реализации выборочного среднего и исправленной выборочной дисперсии оказались равны 1.25 и 0.3 соответственно. Помогите ученому коту найти реализацию 90%-го асимптотического доверительного интервала:

- Математического ожидания числа мяуканий, предшествующих получению питания.
- Вероятности того, что после очередного мяуканья ученый кот получит питание.
- Вероятности того, что кота покормят раньше, чем он успеет мяукнуть трижды.

Решение:

- $\left[1.25 - 1.645\sqrt{0.3/2500}, 1.25 + 1.645\sqrt{0.3/2500}\right] \approx [1.23, 1.27]$
- Используя ММП получаем $\hat{p}_n(x) = 1/1.25 = 0.8$ и $i(\hat{p}_n(x)) = 1/\left((1-0.8)0.8^2\right) = 7.8125$, откуда:

$$\left[0.8 - 1.645/\sqrt{2500 \times 7.8125}, 0.8 + 1.645/\sqrt{2500 \times 7.8125}\right] = [0.788, 0.812]$$

- Поскольку $P(X_1 < 3) = 1 - (1-p)^2$ и $P'(X_1 < 3) = 2(1-p)$, то:

$$\left[1 - (1-0.8)^2 - 1.645\sqrt{\frac{(2(1-0.8))^2}{2500 \times 7.8125}}, 1 - (1-0.8)^2 + 1.645\sqrt{\frac{(2(1-0.8))^2}{2500 \times 7.8125}}\right] = [0.955, 0.965]$$

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слуцкого получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для p:

$$\left[\overline{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n}}, \overline{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n}}\right]$$

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слуцкого получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для p:

$$\left[\overline{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n}}, \overline{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n}}\right]$$

Пример: по результатам опроса 100 жителей очень большого города оказалось, что половина из них готова поддержать на выборах председателя академии наук кандидатуру ученого кота. Найдем реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для вероятности того, что случайно выбранный житель проголосует за ученого кота (исходя из ЗБЧ она бует приблизительной равняться доле людей, которые за него проголосуют).

Асимптотические доверительные интервалы для доли

Доля

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слуцкого получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для p:

$$\left[\overline{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n}}, \overline{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n}}\right]$$

Пример: по результатам опроса 100 жителей очень большого города оказалось, что половина из них готова поддержать на выборах председателя академии наук кандидатуру ученого кота. Найдем реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для вероятности того, что случайно выбранный житель проголосует за ученого кота (исходя из ЗБЧ она бует приблизительной равняться доле людей, которые за него проголосуют). Поскольку $\overline{x}_{100} = 50/100 = 0.5$ и $z_{0.975} \approx 1.96$, то:

- Рассмотрим выборку $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слуцкого получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для p:

$$\left[\overline{X}_n - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n}}, \overline{X}_n + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n}}\right]$$

Пример: по результатам опроса 100 жителей очень большого города оказалось, что половина из них готова поддержать на выборах председателя академии наук кандидатуру ученого кота. Найдем реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для вероятности того, что случайно выбранный житель проголосует за ученого кота (исходя из ЗБЧ она бует приблизительной равняться доле людей, которые за него проголосуют). Поскольку $\overline{x}_{100} = 50/100 = 0.5$ и $z_{0.975} \approx 1.96$, то:

$$\left[0.5 - 1.96\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{100}}, 0.5 + 1.96\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{100}}\right] = [0.402, 0.598]$$

Асимптотические доверительные интервалы для доли

Разница долей

- Рассмотрим независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений Бернулли с параметрами $p_X \in (0, 1)$ и $p_Y \in (0, 1)$ соответственно.

Асимптотические доверительные интервалы для доли

Разница долей

- Рассмотрим независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений Бернулли с параметрами $p_X \in (0, 1)$ и $p_Y \in (0, 1)$ соответственно.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слуцкого получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $p_X - p_Y$:

$$\left[\overline{X}_n - \overline{Y}_m - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n} + \frac{\overline{Y}_m\left(1-\overline{Y}_m\right)}{m}}, \overline{X}_n - \overline{Y}_m + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n} + \frac{\overline{Y}_m\left(1-\overline{Y}_m\right)}{m}}\right]$$

Асимптотические доверительные интервалы для доли

Разница долей

- Рассмотрим независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений Бернулли с параметрами $p_X \in (0,1)$ и $p_Y \in (0,1)$ соответственно.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слуцкого получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $p_X - p_Y$:

$$\left[\overline{X}_n - \overline{Y}_m - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n} + \frac{\overline{Y}_m\left(1-\overline{Y}_m\right)}{m}}, \overline{X}_n - \overline{Y}_m + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n} + \frac{\overline{Y}_m\left(1-\overline{Y}_m\right)}{m}}\right]$$

Пример: ученый кот и Лаврентий независимо друг от друга изобрели лекарство от лени. Ученый кот испытал свое лекарство на 225 добровольцах, а Лаврентий – на 100. Среди добровольцев ученого кота лениться меньше стали 180 испытуемых, а у Лаврентия – 60%. Найдите реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для разницы в вероятностях успешного действия лекарства ученого кота и Лаврентия.

- Рассмотрим независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений Бернулли с параметрами $p_X \in (0, 1)$ и $p_Y \in (0, 1)$ соответственно.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слуцкого получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $p_X - p_Y$:

$$\left[\overline{X}_n - \overline{Y}_m - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n} + \frac{\overline{Y}_m\left(1-\overline{Y}_m\right)}{m}}, \overline{X}_n - \overline{Y}_m + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n} + \frac{\overline{Y}_m\left(1-\overline{Y}_m\right)}{m}}\right]$$

Пример: ученый кот и Лаврентий независимо друг от друга изобрели лекарство от лени. Ученый кот испытал свое лекарство на 225 добровольцах, а Лаврентий – на 100. Среди добровольцев ученого кота лениться меньше стали 180 испытуемых, а у Лаврентия – 60%. Найдите реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для разницы в вероятностях успешного действия лекарства ученого кота и Лаврентия. Обратим внимание, что $\overline{x}_{225} = 180/225 = 0.8$, $\overline{y}_{100} = 0.6$ и $z_{0.975} \approx 1.96$, поэтому:

- Рассмотрим независимые выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ из распределений Бернулли с параметрами $p_X \in (0,1)$ и $p_Y \in (0,1)$ соответственно.
- Используя теоремы Муавра–Лапласа и Слуцкого получаем $100(1-\gamma)$ процентный асимптотический доверительный интервал для $p_X - p_Y$:

$$\left[\overline{X}_n - \overline{Y}_m - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n}+\frac{\overline{Y}_m\left(1-\overline{Y}_m\right)}{m}}, \overline{X}_n - \overline{Y}_m + z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}{n}+\frac{\overline{Y}_m\left(1-\overline{Y}_m\right)}{m}}\right]$$

Пример: ученый кот и Лаврентий независимо друг от друга изобрели лекарство от лени. Ученый кот испытал свое лекарство на 225 добровольцах, а Лаврентий – на 100. Среди добровольцев ученого кота лениться меньше стали 180 испытуемых, а у Лаврентия – 60%. Найдите реализацию 95%-го асимптотического доверительного интервала для разницы в вероятностях успешного действия лекарства ученого кота и Лаврентия. Обратим внимание, что $\overline{x}_{225} = 180/225 = 0.8$, $\overline{y}_{100} = 0.6$ и $z_{0.975} \approx 1.96$, поэтому:

$$\left[0.8 - 0.6 - 1.96\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{225}+\frac{0.6(1-0.6)}{100}}, 0.8 - 0.6 + 1.96\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{225}+\frac{0.6(1-0.6)}{100}}\right] \approx [0.09, 0.31]$$