

Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2021-2022

Дедлайн: домашнее задание отправляется в **pdf** формате на почту семинариста. В копию письма необходимо поставить ассистента группы.

Почты семинаристов, на которые следует отправлять домашние задания:

1. Погорелова Полина Вячеславовна – tvis.we.2021@gmail.com (группы 202 и 203)
2. Потанин Богдан Станиславович – studypotandin@gmail.com (группа 201)
3. Слаболицкий Илья Сергеевич – tvis.fweia.hse@gmail.com (группы 204, 205 и 206)

Почты ассистентов, на которые следует продублировать домашнее задание (поставить в копию при отправке):

1. Романова Дарья Юрьевна – dyuromanova_1@edu.hse.ru (группа 201)
2. Афонина Ангелина Геннадьевна – agafonina@edu.hse.ru (группа 202)
3. Макаров Антон Андреевич – aamakarov_5@edu.hse.ru (группа 203)
4. Атласов Александр Александрович – aaatlasov@edu.hse.ru (группа 204)
5. Костромина Алина Максимовна – amkostromina@edu.hse.ru (группа 205)
6. Краевский Артем Андреевич – aakraevskiy@edu.hse.ru (группа 206)

Домашнее задание должно быть отправлено на указанные почты в **pdf** формате до **22.10.2021, 8.00 (утра)** включительно (по московскому времени). Тема письма должна иметь следующий формат: “МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ”, например, “МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 2”.

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №2

Дискретные случайные величины

Задание №1. Штангист. (31 балл)

Штангист может поднять штангу весом в 100 или 200 килограмм с вероятностями 0.8 и 0.5 соответственно. У него есть две попытки. Сперва он пытается поднять более легкую штангу. Если у него это успешно получается, то при второй попытке он пытается поднять более тяжелую штангу. В противном случае он вновь пытается поднять более легкую штангу. В качестве итогового результата штангисту засчитывают наибольший из поднятых ими за две попытки весов (в килограммах). Если штангисту за две попытки ни разу не удастся поднять штангу, то в качестве итогового результата ему засчитывают 0 килограмм.

1. При помощи таблицы задайте закон распределения случайной величины, отражающей итоговый результат штангиста (наибольший из поднятых им весов в килограммах). **(3 балла)**
2. Рассчитайте математическое ожидание и дисперсию результата штангиста. **(2 балла)**
3. Посчитайте математическое ожидание результата штангиста, при условии, что ему удалось успешно поднять хотя бы одну штангу. **(8 баллов)**
4. За участие в соревнованиях штангист получает 1000 рублей. Также, дополнительно он получает по 10 рублей за каждый килограмм, входящий в итоговый результат (например, если наибольший из поднятых штангистом весов оказался равен 200, то штангист получит дополнительные 2000 рублей). Рассчитайте математическое ожидание и дисперсию денежного вознаграждения штангиста (в рублях). **(7 баллов)**
5. Предположим, что соревнуются два одинаковых штангиста, идентичных тому, что рассматривался в предыдущих пунктах. Победителем объявляется штангист, показавший больший результат. Если же они продемонстрировали идентичные результаты, то их текущие результаты обнуляются и им даются по две новые попытки (которые они также начинают с более легкой штанги). Соответствующая процедура повторяется до тех пор, пока не будет выявлен победитель. Найдите математическое ожидание общего числа попыток, которые совершит первый из этих штангистов (обратите внимание, что каждый раз штангист совершает по две попытки). **(5 баллов)**
6. В предыдущем пункте найдите математическое ожидание результата (в килограммах) победителя (его результата в том раунде, в котором он победил). **(5 баллов)**
7. Штангист может поднять штангу весом от $100/3$ до $1100/3$ килограмм. Вероятность поднять штангу весом $x \in [100/3, 1100/3]$ составляет $(1.1 - 0.003x)$. Примерьте на себя роль спортивного менеджера: подберите штангисту такую легкую и тяжелую штанги (также, допустимо подбирать штанги равного веса), что математическое ожидание его результата окажется максимальным. **(1 балл)**

Примечание: это несложный, но довольно громоздкий бонусный пункт.

Указание: для максимизации удобно воспользоваться wolframalpha, приводить выражения к красивому виду не обязательно, достаточно записать математическое ожидание как функцию от веса легкой и тяжелой штанг, сформулировать (при этом решать ее аналитически не нужно) оптимизационную задачу и записать ответ (при условии грамотно сформулированной оптимизационной задачи балл за неправильный численный ответ не снимается). Формулируя оптимизационную задачу важно указать надлежащие ограничения на оптимизируемые параметры.

Задание №2. Курочка Ряба. (30 баллов)

Курочка Ряба несет золотые яйца. Число золотых яиц, которые она сносит за день, является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона. Сумма первого и второго начальных моментов этой случайной величины равняется 15. Число снесенных ранее золотых яиц никак не влияет на число снесенных позже. Стоимость одного золотого яйца составляет 10 монет.

1. Найдите дисперсию стоимости (в монетах) снесенных курочкой Рябой за день золотых яиц. **(5 баллов)**
2. Определите, с какой вероятностью курочка Ряба снесет за день не менее трех золотых яиц. **(3 баллов)**
3. Рассчитай вероятность того, что курочка Ряба снесла хотя бы одно золотое яйцо, если известно, что она снесла менее трех золотых яиц. **(5 баллов)**
4. Определите, с какой вероятностью за 2 дня (суммарно) курочка Ряба снесет ровно 5 яиц. **(2 баллов)**
5. Посчитайте вероятность, с которой хотя бы в один из двух дней курочка Ряба снесет ровно 3 яйца. **(5 баллов)**
6. Из каждого золотого яйца с вероятностью 0.3 может вылупиться золотой драконоцyp. Найдите математическое ожидание числа драконоцypов, которые могут вылупиться из снесенных Курочкой Рябой за день золотых яиц, если известно, что Курочка Ряба снесла менее трех яиц. **(10 баллов)**

Задание №3. Маршрутка. (15 баллов)

В пустую маршрутку зашли 10 человек. Маршрутка следует на протяжении 5 остановок (не считая той, на которой зашли пассажиры) и останавливается на остановке лишь в том случае, если хотя бы один из пассажиров просит высадить его на этой остановке. Каждый пассажир с равной вероятностью и независимо от других пассажиров может выйти на той или иной остановке¹.

1. Вычислите математическое ожидание числа остановок маршрутки. **(10 баллов)**

Подсказка: представьте случайную величину, отражающую общее число остановок как сумму некоторых случайных величин.

¹Пассажиры ведут себя обычным образом: всегда выходят на той остановке, на которой просят остановиться водителя маршрутки.

2. Рассчитайте вероятность того, что все пассажиры выйдут на первых трех остановках. **(3 балла)**
3. Вычислите вероятность того, что все пассажиры выйдут на первых трех остановках, при условии, что маршрутка сделала ровно две остановки. **(2 балла)**

Задание №4. Кузнецы. (25 баллов)

В королевстве живут 10 крутых, 20 обычных и 30 криворуких кузнецов. Крутые кузнецы – настоящие мастера своего дела. Они изготавливают качественный меч с вероятностью 0.9. Обычные кузнецы изготавливают качественные мечи с вероятностью 0.7. Криворукие кузнецы, как следует из названия, наименее надежные: для них вероятность изготовления качественного меча составляет 0.1. Король сделал заказ на 7 мечей наугад выбранному кузнецу. За каждый качественный меч король выплачивает кузнецу по 5 монет, а за каждый некачественный – штрафует на 10.

1. Найдите вероятность того, что кузнец изготовит более 5 качественных мечей, если известно, что королю попался крутой кузнец. **(2 баллов)**
2. Вычислите вероятность того, что кузнец изготовит ровно 5 качественных мечей. **(5 баллов)**
3. Определите вероятность, с которой король выбрал крутого кузнеца, если известно, что ему удалось изготовить ровно 5 мечей. **(5 баллов)**
4. Посчитайте математическое ожидание и дисперсию числа монет, которые кузнец получит за заказ короля (число монет может оказаться и отрицательным: в таком случае кузнец останется должен королю). **(8 баллов)**
5. Король отменил свой первоначальный заказ и попросил каждого кузнеца в городе сделать ему по 7 мечей. Найдите математическое ожидание числа качественных мечей, которое получит король. **(5 баллов)**