Теория Вероятностей и Статистика

Совместное распределение непрерывных случайных величин

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021

Совместная функция распределения

Определение

- Совместная функция распределения непрерывных случайных величин X и Y имеет вид:

$$F_{X,Y}(x,y) = P\left(X \leq x, Y \leq y\right)$$

Пример:
Совместная функция распределение случайных величин X и Y задана слоедующим образом ($\wedge$ – и, $\vee$ – или):

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \vee y < 2 \\ x(x+7)/8, \text{ если } x \in [0,1] \wedge y > 5 \\ (y^2+y-6)/24, \text{ если } y \in [2,5] \wedge x > 1 \\ x(y-2)(x+y+2)/24, \text{ если } x \in [0,1] \wedge y \in [2,5] \end{cases}$$

Рассчитаем некоторые вероятности:

$$P(X \leq 0.5, Y \leq 3) = F_{X,Y}(0.5,3) = 0.5(3-2)(0.5+3+2)/24 = 11/96 \approx 0.115$$

$$P(X \leq 0.5, Y \leq 1) = F_{X,Y}(0.5,1) = 0$$

$$P(X \leq 10, Y \leq 3) = F_{X,Y}(10,3) = (3^2+3-6)/24 = 0.25$$

Совместная функция плотности
Определение

- Совместная функция плотности непрерывных случайных величин X и Y имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Пример:
Найдите совместную функцию плотности случайных величин X и Y, если известна их совместная функция распределения:

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0,\text{ если } x<0 \vee y<2\\ x(x+7)/8,\text{ если } x\in[0,1]\wedge y>5\\ (y^2+y-6)/24,\text{ если } y\in[2,5]\wedge x>1\\ x(y-2)(x+y+2)/24,\text{ если } x\in[0,1]\wedge y\in[2,5]\end{cases}$$

Решение:
Дифференцируя получаем, что:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}=\begin{cases}(x+y)/24,\text{ если } x\in[0,1]\wedge y\in[2,5]\\ 0,\text{ если } x\notin[0,1]\vee y\notin[2,5]\end{cases}$$

Совместная функция плотности
Расчет вероятностей

- Рассмотрим константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$, тогда:

$$P(\alpha_1 \leq X \leq \beta_1, \alpha_2 \leq Y \leq \beta_2) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2} f_{X,Y}(x,y)dydx$$

Пример:
Совместная функция плотности случайных величин X и Y имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases}(x+y)/24, \text{ если } x \in [0,1] \wedge y \in [2,5]\\ 0, \text{ если } x \notin [0,1] \vee y \notin [2,5]\end{cases}$$

Рассчитаем некоторые вероятности:

$$P(0.2 \leq X \leq 0.8, 1.5 \leq Y \leq 3) = \int_{0.2}^{0.8}\int_{1.5}^{3}(x+y)/24dydx \approx 0.103$$

$$P(0.2 \leq X \leq 0.8, Y \geq 3) = P(X \in [0.2, 0.8], Y \in [3,5]) + P(X \in [0.2, 0.8], Y \in (5, \infty)) =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8}\int_{3}^{5}(x+y)/24dydx + \int_{0.2}^{0.8}\int_{5}^{\infty}0dydx = 0.225$$

Совместная функция плотности
Восстановление функции распределения

- Можно показать, что:

$$F_{X,Y}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t_x,t_y)dt_y dt_x$$

Пример:
Совместная функция плотности случайных величин X и Y имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}6x^2y, \text{ если } x\in[0,1]\wedge y\in[0,1]\\ 0, \text{ если } x\notin[0,1]\vee y\notin[0,1]\end{cases}$$

Рассчитаем функцию распределения в некоторых точках:

$$F_{X,Y}(0.9,0.5)=\int\limits_{0}^{0.9}\int\limits_{0}^{0.5} 6x^2ydydx=0.18225$$

$$F_{X,Y}(0.9,2)=\int\limits_{0}^{0.9}\int\limits_{0}^{1} 6x^2ydydx=0.729$$

- Маржинальная функция плотности непрерывной случайной величины X находится как:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

- Прочие характеристики маржинального распределения (математическое ожидание, функция распределения, дисперсия и т.д.) находятся исходя из маржинальной функции плотности обычным образом.

Пример:
Найдите маржинальные функции плотности случайных величин X и Y.
Решение:

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^1 6x^2ydy\text{, если } x\in[0,1]\\ \int_0^1 0dy\text{, если } x\notin[0,1]\end{cases}=\begin{cases}3x^2\text{, если } x\in[0,1]\\ 0\text{, если } x\notin[0,1]\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^1 6x^2ydx\text{, если } y\in[0,1]\\ \int_0^1 0dx\text{, если } y\notin[0,1]\end{cases}=\begin{cases}2y\text{, если } y\in[0,1]\\ 0\text{, если } y\notin[0,1]\end{cases}$$

Математическое ожидание функции

Определение

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$, тогда:

$$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{X,Y}(x,y)dydx$$

Пример:
Цена единицы продукции и объем продаж фирмы заданы случайными величинами X и Y со следующей совместной функцией плотности:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x - y, \text{ если } x \in [1,2] \wedge y \in [0,1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание выручки фирмы.
Решение:

$$E(XY) = \int_{1}^{2}\int_{0}^{1} xy(x-y)dydx = 2/3$$

- Применяя формулу математического ожидания функции от непрерывных случайных величин нетрудно рассчитать ковариацию между ними.

Пример:
Цена единицы продукции и объем продаж фирмы заданы случайными величинами X и Y со следующей совместной функцией плотности:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}x-y, \text{ если } x\in[1,2]\wedge y\in[0,1]\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$$

Найдите ковариацию между ценой и объемом продукции.
Решение:

$$E(XY)=\int_1^2\int_0^1 xy(x-y)dydx=2/3$$

$$E(X)=\int_1^2\int_0^1 x(x-y)dydx=19/12$$

$$E(Y)=\int_1^2\int_0^1 y(x-y)dydx=5/12$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2/3-(19/12)\times(5/12)=1/144$$

Независимость

Определение

- Непрерывные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда соблюдено любое из обозначенных ниже условий:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$
$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Пример:
Совместаня функция плотности случайных величин X и Y имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, \text{ если } x \in [0,1] \wedge y \in [0,1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Проверьте, являются ли X и Y независимыми.
Решение: Достаточно проверить, что совпадение имеет место в тех точках, где совместная и маржинальные функции плотности не обращаются в ноль (в остальных случаях они автоматически совпадают, поскольку равняются нулю). В данном случае незвисимость соблюдается, поскольку:

$$f_X(x) = \int_0^1 4xydy = 2x, \text{ при } x \in [0,1]$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4xydx = 2y, \text{ при } y \in [0,1]$$

$$f_X(x)f_Y(y) = 2x \times 2y = 4xy = f_{X,Y}(x,y), \text{ при } x,y \in [0,1]$$

- Пусть $f_Y(y) > 0$. Рассмотрим условное распределение случайной величины X, а именно $(X|Y = y)$. Условная функция плотности будет иметь вид:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Пример:
Цена единицы продукции и объем продаж фирмы заданы случайными величинами X и Y со следующей совместной функцией плотности:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x - y, \text{ если } x \in [1,2] \wedge y \in [0,1] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание цены единицы продукции, если известно, что продажи равны 0.5.

$$f_Y(y) = \int_1^2 (x-y)dx = 1.5 - y, \text{ при } y \in [0,1]$$

$$f_{X|Y=0.5}(x) = \frac{x - 0.5}{1.5 - 0.5} = x - 0.5, \text{ при } x \in [1,2]$$

$$E(X|Y = 1.5) = \int_1^2 (x - 0.5)dx = 1$$