Теория Вероятностей и Статистика

Основные непрерывные распределения

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021

- Случайная величина X имеет **равномерное распределение** $X \sim U(a, b)$, где $b > a$, если:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{ если } x \in [a, b] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

- Функция распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, \text{ если } x \in [a, b] \\ 1, \text{ если } x > b \end{cases}$$

- Математическое ожидание и дисперсия:

$$E(X) = (b-a)/2$$
$$Var(X) = (b-a)^2/12$$

Пример:

- Вражеский конвой движется по дороге длиной в 5 километров. Партизаны устроили засаду в случайном месте на этой дороге и нападут сразу же, как только к ним приблизится конвой. Найдите вероятность того, что до нападения партизан конвой успеет пройти от 2 до 3.5 километров, а также математическое ожидание пути, которое конвой пройдет до нападения.

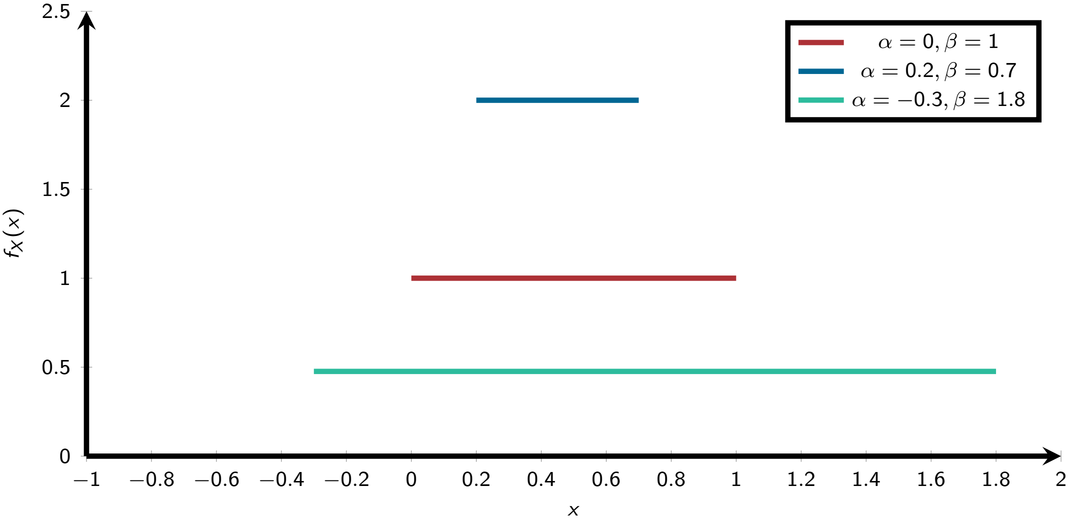
Решение:

Обозначим через $X \sim (0, 5)$ длину пути, пройденную конвоем до нападения.

$$P(2 \leq X \leq 3.5) = F_X(3.5) - F_X(2) = \frac{3.5-0}{5-0} - \frac{2-0}{5-0} = 0.3$$
$$E(X) = (5-0)/2 = 2.5$$

Равномерное распределение

Визуализация функции плотности



- Случайная величина X имеет **экспоненциальное распределение** $X \sim EXP(\lambda)$, где $\lambda > 0$, если:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x \geq 0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

- Функция распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$$

- Математическое ожидание и дисперсия:

$$E(X) = 1/\lambda$$
$$Var(X) = 1/\lambda^2$$

Пример:

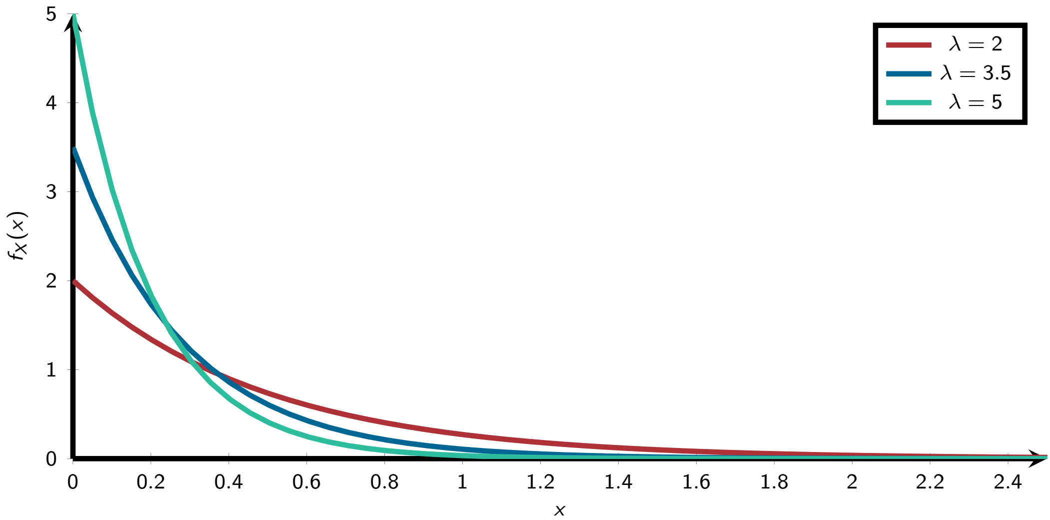
- Время на написание домашнего задания (в часах) является экспоненциальной случайной величиной с математическим ожиданием 0.2. Найдите вероятность того, что домашнее задание будет написано не быстрее, чем за 2 часа.

Решение:

$$E(X) = 0.2 \implies 0.2 = 1/\lambda \implies \lambda = 5$$
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - (1 - e^{-5\times 2}) = e^{-10}$$

Экспоненциальное распределение

Визуализация функции плотности



- Пусть $X \sim EXP(\lambda)$, тогда, в соответствии со **свойством отсутствия памяти**:

$$P(X \geq x + t | X \geq t) = P(X \geq x)$$

Доказательство:

$$P(X \geq x + t | X \geq t) = \frac{P(X \geq x + t)}{P(X \geq t)} = \frac{1 - P(X \leq x + t)}{1 - P(X \leq t)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = P(X \geq x)$$

Пример: Продолжительность собрания (в часах) является экспоненциальной случайной величиной с параметром $\lambda = 1$. Найдите вероятность того, что собрание продлилось более трех часов, если известно, что оно будет идти не менее часа.
Решение:

$$P(X > 3 | X \geq 1) = P(X \geq 2 + 1 | X \geq 1) = P(X \geq 2) = e^{-2} \approx 0.135$$

- Случайная величина X имеет **нормальное распределение** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, где $\sigma \geq 0$, если:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Функция распределения не может быть выражена аналитически, вследствие чего считается численно (приблизительно): программно (excel, python, R, matlab, Julia и т.д.) или по таблице распределения.
- Математическое ожидание и дисперсия:

$$E(X) = \mu$$
$$Var(X) = \sigma^2$$

Пример:

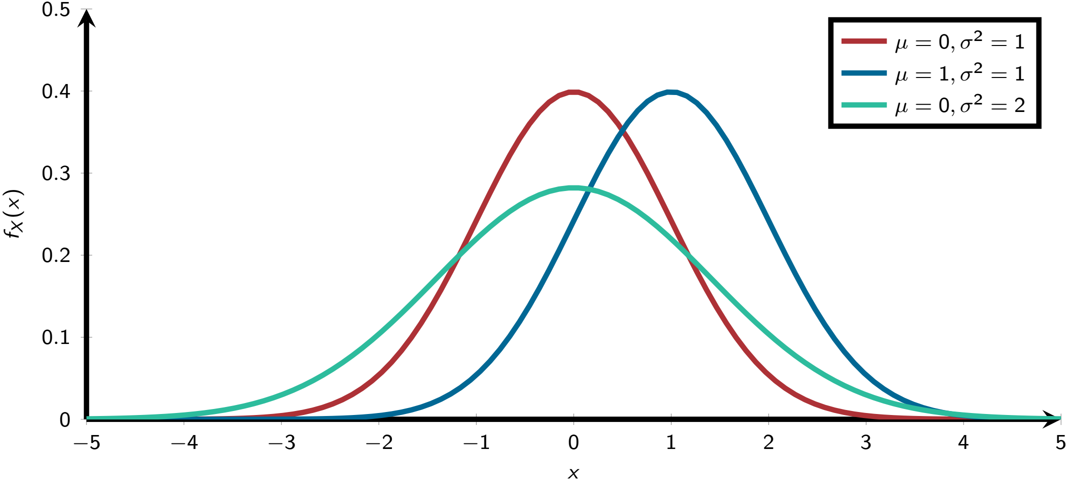
- Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 10 и дисперсией 25. Найдите значение ее функции плотности в точке 20.
  Решение:

$$E(X) = 10 \implies \mu = 10$$
$$Var(X) = 25 \implies \sigma^2 = 25$$
$$f_X(20) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{25}} e^{\frac{-(20-10)^2}{2\times 25}} \approx 0.0108$$

Нормальное распределение

Визуализация функции плотности

- Математическое ожидание, мода и медиана совпадают с μ.



- Случайная величина $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ имеет **стандартное нормальное распределение**.
- У стандартного нормального распределения для краткости обозначают: $f_Z(x) = \phi(X)$ и $F_Z(x) = \Phi(x)$.
- Таблица распределения стандартного нормального распределения (сокращенно):

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

- На пересечении строки a и столбца b находится $\Phi(a+b)$. Например, если $a = 0.5$ и $b = 0.07$, то:

$$\Phi(0.5 + 0.07) = \Phi(0.57) \approx 0.7157$$

Пример: температура за окном является стандартной нормальной случайной величиной. Определите, с какой вероятностью она составит от 0.3 до 0.95 градусов.

Решение:

$$P\left(0.3 \leq Z \leq 1.2\right) = \Phi(0.95) - \Phi(0.3) \approx 0.8289 - 0.6179 = 0.211$$

- Пусть $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, тогда $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- Функцию плотности и функцию распределения нормальной случайной величины можно выразить через соответствующие функции стандартной нормальной случайной величины:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Доказательство:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{dx} = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Пример: если $X \sim \mathcal{N}(5, 100)$, то:

$$P(X \leq 10) = F_X(10) = \Phi\left(\frac{10-5}{\sqrt{100}}\right) = \Phi(0.5) \approx \underset{\text{по таблице}}{0.6915}$$

$$f_X(10) = \frac{1}{\sqrt{100}}\phi\left(\frac{10-5}{\sqrt{100}}\right) = \frac{1}{10}\phi(0.5) = \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{1}} e^{\frac{-(0.5-0)^2}{2\times 1}}\right) \approx 0.035$$

- Случайная величина $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ **симметрична вокруг** μ, то есть:

$$f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$$

- Из симметрии стандартного нормального распределения вокруг нуля следует, что:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad \phi(-x) = \phi(x)$$

Пример: если $X \sim \mathcal{N}(10, 100)$, то:

$$P(X \leq 20) = \Phi\left(\frac{10 - 20}{\sqrt{100}}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Нормальное распределение

Линейное преобразование нормальной случайной величины

- Линейное преобразование случайной величины $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ также дает нормальную случайную величину.
- Поскольку параметры нормального распределения определяются математическим ожиданием и дисперсией, то при $\alpha, \beta \in R$ получаем:

$$(\alpha X + \beta) \sim \mathcal{N}\left(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2\right)$$

$$\tilde{\mu} = E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta = \alpha\mu + \beta \qquad \tilde{\sigma}^2 = Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X) = \alpha^2\sigma^2$$

Пример: Доход Бориса хорошо описывается нормальной случайной величиной с математическим ожиданием 1000 и стандартным отклонением 100. Борис уплачивает 10% от своего дохода в качестве налога и отдает 200 денежных единиц на благотворительность. Найдите вероятность того, что после уплаты налогов и отчислений на благотворительность у Бориса останется не более 790 денежных единиц.

Решение: обозначим дохода Бориса как с.в. X и найдем ее распределение:

$$\begin{cases} E(X) = 1 \implies \mu = 1000 \\ sd(X) = 100 \implies \sigma = 100 \implies \sigma^2 = 100^2 \end{cases} \implies X \sim \mathcal{N}\left(1000, 100^2\right)$$

Найдем распределения остающихся у Бориса средств $(0.9X - 200)$ и искомую вероятность:

$$\begin{cases} E(0.9X - 200) = 0.9E(X) - 200 = 0.9 \times 1000 - 200 = 700 \\ Var(0.9X - 200) = 0.9^2 Var(X) = 0.9^2 \times 100^2 = 8100 \end{cases} \implies (0.9X - 200) \sim \mathcal{N}(700, 8100)$$

$$P\left(0.9X - 200 \leq 790\right) = \Phi\left(\frac{790 - 700}{\sqrt{8100}}\right) \approx \Phi(1) \approx 0.8413$$

Нормальное распределение

Линейная комбинация нормальных случайных величин

- Линейная комбинация нормальных случайных величин $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ также является нормальной случайной величиной. Поэтому, для любых $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$ выполняется:

$$(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \beta) \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$$
$$\mu = E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \beta) \qquad \sigma^2 = Var(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \beta)$$

Пример: Доходности акций A и B являются случайными величинами $X_A \sim \mathcal{N}(2, 4)$ и $X_B \sim \mathcal{N}(1, 9)$, причем $Cov(X_A, X_B) = 3$. Портфель Бориса состоит из 10 акций фирмы A и 5 акций фирмы B. Найдите вероятность того, что общая доходность его портфеля не превысит 50.
Решение: найдем распределение доходности:

$$\mu = E(10X_A + 5X_B) = 10E(X_A) + 5E(X_B) = 10 \times 2 + 5 \times 1 = 25$$
$$\sigma^2 = Var(10X_A + 5X_B) = 10^2 Var(X_A) + 5^2 Var(X_B) + 2 \times 10 \times 5 \times Cov(X_A, X_B) =$$
$$= 10^2 \times 4 + 5^2 \times 9 + 2 \times 10 \times 5 \times 3 = 925$$
$$(10X_A + 5X_B) \sim \mathcal{N}(25, 925)$$

Рассчитаем искомую вероятность исходя из найденного распределения:

$$P(10X_A + 5X_B \leq 50) = F_{10X_A + 5X_B}(50) = \Phi\left(\frac{50 - 25}{\sqrt{925}}\right) \approx \Phi(0.82) \approx 0.794$$