# Теория Вероятностей и Статистика

## Совместное распределение дискретных случайных величин

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2022

- Часто нам интересно изучить связь между несколькими случайными величинами.

# Совместное распределение

## Мотивация

- Часто нам интересно изучить связь между несколькими случайными величинами.
- Например, рост и вес случайного взятого студента являются случайными величинами. При этом очевидно наличие связи между этими случайными величинами. Так, вероятность выбрать индивида с ростом 190 сантиметров и ростом 100 килограмм, интуитивно, кажется выше, чем вероятность выбрать индивида с таким же ростом и весом 60 килограмм.

# Совместное распределение

## Мотивация

- Часто нам интересно изучить связь между несколькими случайными величинами.
- Например, рост и вес случайного взятого студента являются случайными величинами. При этом очевидно наличие связи между этими случайными величинами. Так, вероятность выбрать индивида с ростом 190 сантиметров и ростом 100 килограмм, интуитивно, кажется выше, чем вероятность выбрать индивида с таким же ростом и весом 60 килограмм.
- Так, если мы посмотрим на рост случайно взятого индивида и он окажется равен 190 сантиметрам, то условная вероятность того, что индивид весит более 100 килограмм, очевидно, возрастет (по сравнению с безусловной вероятностью).

# Совместное распределение

## Мотивация

- Часто нам интересно изучить связь между несколькими случайными величинами.
- Например, рост и вес случайного взятого студента являются случайными величинами. При этом очевидно наличие связи между этими случайными величинами. Так, вероятность выбрать индивида с ростом 190 сантиметров и ростом 100 килограмм, интуитивно, кажется выше, чем вероятность выбрать индивида с таким же ростом и весом 60 килограмм.
- Так, если мы посмотрим на рост случайно взятого индивида и он окажется равен 190 сантиметрам, то условная вероятность того, что индивид весит более 100 килограмм, очевидно, возрастет (по сравнению с безусловной вероятностью).
- Также, интуиция подсказывает, что математическое ожидание веса случайного индивида меньше, чем математическое ожидание веса индивида ростом 190 сантиметров.

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x, Y=y\right)=P\left(X=x \cap Y=y\right)=P\{\omega \in \Omega : X(\omega)=x \wedge Y(\omega)=y\}$$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x,Y=y\right)=P\left(X=x\cap Y=y\right)=P\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x\wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x,Y=y\right)=P\left(X=x\cap Y=y\right)=P\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x\wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1\cap Y=0)=$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x, Y=y\right)=P\left(X=x \cap Y=y\right)=P\{\omega \in \Omega : X(\omega)=x \wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1 \cap Y=0) = P(\{1\}) = 1/6$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X = x, Y = y\right) = P\left(X = x \cap Y = y\right) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

  Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
  **Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$
$P(X = 2 \cap Y = 0) =$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x, Y=y\right)=P\left(X=x \cap Y=y\right)=P\{\omega \in \Omega : X(\omega)=x \wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1 \cap Y=0) = P(\{1\}) = 1/6$
$P(X=2 \cap Y=0) = P(\{3\}) = 1/6$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x, Y=y\right)=P\left(X=x\cap Y=y\right)=P\{\omega\in\Omega: X(\omega)=x\wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1\cap Y=0)=P(\{1\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=0)=P(\{3\})=1/6$
$P(X=3\cap Y=0)=$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x,Y=y\right)=P\left(X=x\cap Y=y\right)=P\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x\wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1\cap Y=0)=P(\{1\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=0)=P(\{3\})=1/6$
$P(X=3\cap Y=0)=P(\emptyset)=0$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x, Y=y\right)=P\left(X=x\cap Y=y\right)=P\{\omega\in\Omega: X(\omega)=x\wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1\cap Y=0)=P(\{1\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=0)=P(\{3\})=1/6$
$P(X=3\cap Y=0)=P(\emptyset)=0$
$P(X=1\cap Y=1)=$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x,Y=y\right)=P\left(X=x\cap Y=y\right)=P\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x\wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1\cap Y=0)=P(\{1\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=0)=P(\{3\})=1/6$
$P(X=3\cap Y=0)=P(\emptyset)=0$
$P(X=1\cap Y=1)=P(\{2\})=1/6$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x, Y=y\right)=P\left(X=x\cap Y=y\right)=P\{\omega\in\Omega: X(\omega)=x\wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1\cap Y=0)=P(\{1\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=0)=P(\{3\})=1/6$
$P(X=3\cap Y=0)=P(\emptyset)=0$
$P(X=1\cap Y=1)=P(\{2\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=1)=$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x, Y=y\right)=P\left(X=x\cap Y=y\right)=P\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x\wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1\cap Y=0)=P(\{1\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=0)=P(\{3\})=1/6$
$P(X=3\cap Y=0)=P(\emptyset)=0$
$P(X=1\cap Y=1)=P(\{2\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=1)=P(\{4,5\})=2/6$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x,Y=y\right)=P\left(X=x\cap Y=y\right)=P\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x\wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1\cap Y=0)=P(\{1\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=0)=P(\{3\})=1/6$
$P(X=3\cap Y=0)=P(\emptyset)=0$
$P(X=1\cap Y=1)=P(\{2\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=1)=P(\{4,5\})=2/6$
$P(X=3\cap Y=1)=$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x,Y=y\right)=P\left(X=x\cap Y=y\right)=P\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x\wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1\cap Y=0)=P(\{1\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=0)=P(\{3\})=1/6$
$P(X=3\cap Y=0)=P(\emptyset)=0$
$P(X=1\cap Y=1)=P(\{2\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=1)=P(\{4,5\})=2/6$
$P(X=3\cap Y=1)=P(\{6\})=1/6$

- Совместное распределение дискретных случайных величин $X$ и $Y$ задается при помощи **совместной функциии вероятностей**:

$$P\left(X=x, Y=y\right)=P\left(X=x\cap Y=y\right)=P\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x\wedge Y(\omega)=y\}$$

**Пример:**

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет $X$ и яблок $Y$.
**Решение**:

Совместная функция вероятности:
$P(X=1\cap Y=0)=P(\{1\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=0)=P(\{3\})=1/6$
$P(X=3\cap Y=0)=P(\emptyset)=0$
$P(X=1\cap Y=1)=P(\{2\})=1/6$
$P(X=2\cap Y=1)=P(\{4,5\})=2/6$
$P(X=3\cap Y=1)=P(\{6\})=1/6$

Таблица совместного распределения:

| Y \ X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/6 | 1/6 | 0 |
| 1 | 1/6 | 2/6 | 1/6 |

# Совместное распределение

## Маржинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$. Тогда распределения этих случайных величин именуются **маржинальными распределениями**.

- Пусть задано совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$. Тогда распределения этих случайных величин именуются **маржинальными распределениями**.
- Маржинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \textbf{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) \qquad P(Y = y) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

- Пусть задано совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$. Тогда распределения этих случайных величин именуются **маржинальными распределениями**.
- Маржинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \textbf{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) \qquad P(Y = y) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маржинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

- Пусть задано совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$. Тогда распределения этих случайных величин именуются **маржинальными распределениями**.
- Маржинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \textbf{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) \qquad P(Y = y) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маржинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.
**Решение:**
Маржинальное распределение числа удачных сделок (с.в. $X$):

- Пусть задано совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$. Тогда распределения этих случайных величин именуются **маржинальными распределениями**.
- Маржинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X=x)=\sum_{y\in\textbf{supp}(Y)} P(X=x\cap Y=y) \qquad P(Y=y)=\sum_{x\in\textbf{supp}(X)} P(X=x\cap Y=y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маржинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

**Решение:**

Маржинальное распределение числа удачных сделок (с.в. $X$):

$P(X=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.05+0.15=0.2$

- Пусть задано совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$. Тогда распределения этих случайных величин именуются **маржинальными распределениями**.
- Маржинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \textbf{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) \qquad P(Y = y) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маржинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

**Решение:**

Маржинальное распределение числа удачных сделок (с.в. $X$):

$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$

$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$

- Пусть задано совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$. Тогда распределения этих случайных величин именуются **маржинальными распределениями**.
- Маржинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \textbf{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) \qquad P(Y = y) = \sum_{x \in \textbf{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маржинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

**Решение:**

Маржинальное распределение числа удачных сделок (с.в. $X$):

$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$

$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$

$P(X = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 2) = 0.2 + 0.45 = 0.65$

- Пусть задано совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$. Тогда распределения этих случайных величин именуются **маржинальными распределениями**.
- Маржинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \mathbf{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) \qquad P(Y = y) = \sum_{x \in \mathbf{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маржинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

**Решение:**

Маржинальное распределение числа удачных сделок (с.в. $X$):

$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$

$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$

$P(X = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 2) = 0.2 + 0.45 = 0.65$

Маржинальное распределение числа неудачных сделок (с.в. $Y$):

- Пусть задано совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$. Тогда распределения этих случайных величин именуются **маржинальными распределениями**.
- Маржинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X=x)=\sum_{y\in \textbf{supp}(Y)} P(X=x\cap Y=y) \qquad P(Y=y)=\sum_{x\in \textbf{supp}(X)} P(X=x\cap Y=y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маржинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.
**Решение:**
Маржинальное распределение числа удачных сделок (с.в. $X$):
$P(X=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.05+0.15=0.2$
$P(X=1)=P(X=1\cap Y=1)+P(X=1\cap Y=2)=0.15+0=0.15$
$P(X=2)=P(X=2\cap Y=1)+P(X=2\cap Y=2)=0.2+0.45=0.65$
Маржинальное распределение числа неудачных сделок (с.в. $Y$):
$P(Y=1)=P(X=1\cap Y=1)+P(X=2\cap Y=1)+P(X=3\cap Y=1)=0.05+0.15+0.2=0.4$

- Пусть задано совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$. Тогда распределения этих случайных величин именуются **маржинальными распределениями**.
- Маржинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X=x)=\sum_{y\in\textbf{supp}(Y)}P(X=x\cap Y=y) \qquad P(Y=y)=\sum_{x\in\textbf{supp}(X)}P(X=x\cap Y=y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маржинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

**Решение:**

Маржинальное распределение числа удачных сделок (с.в. $X$):

$P(X=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.05+0.15=0.2$
$P(X=1)=P(X=1\cap Y=1)+P(X=1\cap Y=2)=0.15+0=0.15$
$P(X=2)=P(X=2\cap Y=1)+P(X=2\cap Y=2)=0.2+0.45=0.65$

Маржинальное распределение числа неудачных сделок (с.в. $Y$):

$P(Y=1)=P(X=1\cap Y=1)+P(X=2\cap Y=1)+P(X=3\cap Y=1)=0.05+0.15+0.2=0.4$
$P(Y=2)=P(X=1\cap Y=2)+P(X=2\cap Y=2)+P(X=3\cap Y=2)=0.15+0+0.45=0.6$

- Совместная функция распределения случайных величин $X$ и $Y$ задается как:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \textbf{supp}(X), y^* \in \textbf{supp}(Y):(x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- Совместная функция распределения случайных величин $X$ и $Y$ задается как:
$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \textbf{supp}(X), y^* \in \textbf{supp}(Y):(x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$
- $\lim\limits_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $\lim\limits_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$

- Совместная функция распределения случайных величин $X$ и $Y$ задается как:
$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \textbf{supp}(X), y^* \in \textbf{supp}(Y) : (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$
- $\lim\limits_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $\lim\limits_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, $\lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$

- Совместная функция распределения случайных величин $X$ и $Y$ задается как:
$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\leq x\cap Y\leq y)=\sum_{x^*\in\textbf{supp}(X),y^*\in\textbf{supp}(Y):(x^*\leq x)\wedge(y^*\leq y)}P(X=x^*\cap Y=y^*)$$
- $\lim\limits_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=F_Y(y),\ \lim\limits_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}F_{X,Y}(x,y)=0,\ \lim\limits_{y\to-\infty}F_{X,Y}(x,y)=0$
- $\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=1$

- Совместная функция распределения случайных величин $X$ и $Y$ задается как:
$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\leq x\cap Y\leq y)=\sum_{x^*\in\textbf{supp}(X),y^*\in\textbf{supp}(Y):(x^*\leq x)\wedge(y^*\leq y)}P(X=x^*\cap Y=y^*)$$
- $\lim\limits_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=F_Y(y),\ \lim\limits_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}F_{X,Y}(x,y)=0,\ \lim\limits_{y\to-\infty}F_{X,Y}(x,y)=0$
- $\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=1$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите $F_{X,Y}(1,2.5)$ и $F_{X,Y}(10,1)$.

- Совместная функция распределения случайных величин $X$ и $Y$ задается как:
$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \textbf{supp}(X), y^* \in \textbf{supp}(Y):(x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$
- $\lim\limits_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $\lim\limits_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, $\lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty, y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите $F_{X,Y}(1, 2.5)$ и $F_{X,Y}(10, 1)$.
**Решение:**
$F_{X,Y}(1, 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2) =$

# Совместное распределение

## Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин $X$ и $Y$ задается как:
$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \textbf{supp}(X), y^* \in \textbf{supp}(Y):(x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$
- $\lim\limits_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $\lim\limits_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, $\lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty, y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите $F_{X,Y}(1, 2.5)$ и $F_{X,Y}(10, 1)$.

**Решение:**

$F_{X,Y}(1, 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2) =$
$= P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) + P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 + 0.15 + 0 = 0.35$

- Совместная функция распределения случайных величин $X$ и $Y$ задается как:
$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \mathbf{supp}(X), y^* \in \mathbf{supp}(Y):(x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$
- $\lim\limits_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y), \lim\limits_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0, \lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty, y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

**Пример:**

- Совместное распределение числа удачных (с.в. $X$) и неудачных (с.в. $Y$) сделок задано таблицей:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите $F_{X,Y}(1, 2.5)$ и $F_{X,Y}(10, 1)$.

**Решение:**

$F_{X,Y}(1, 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2) =$
$= P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) + P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 + 0.15 + 0 = 0.35$
$F_{X,Y}(10, 1) = P(X \leq 10 \cap Y \leq 1) = P(Y \leq 1) = P(Y = 1) = 0.05 + 0.15 + 0.2 = 0.4$

- Рассмотрим функцию $g(X,Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:
$$P(g(X,Y)=t)=\sum_{x,y:g(x,y)=t}P(X=x\cap Y=y)$$

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:
$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x,y:g(x,y)=t} P(X = x \cap Y = y)$$
- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:
$$E\left(g\left(X, Y\right)\right) = \sum_{t \in \mathbf{supp}(g(X,Y))} P\left(g\left(X, Y\right) = t\right) t = \sum_{x \in \mathbf{supp}(X), y \in \mathbf{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:
$$P(g(X,Y)=t)=\sum_{x,y:g(x,y)=t} P(X=x\cap Y=y)$$
- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:
$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\sum_{t\in \mathbf{supp}(g(X,Y))} P\left(g\left(X,Y\right)=t\right)t=\sum_{x\in\mathbf{supp}(X),y\in\mathbf{supp}(Y)} P(X=x\cap Y=y)g(x,y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа кокосов (с.в $X$) и населения (с.в. $Y$) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения $X/Y$.

| Y \ X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

- Рассмотрим функцию $g(X,Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:
$$P(g(X,Y)=t)=\sum_{x,y:g(x,y)=t}P(X=x\cap Y=y)$$
- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:
$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\sum_{t\in\textbf{supp}(g(X,Y))}P\left(g\left(X,Y\right)=t\right)t=\sum_{x\in\textbf{supp}(X),y\in\textbf{supp}(Y)}P(X=x\cap Y=y)g(x,y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа кокосов (с.в $X$) и населения (с.в. $Y$) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения $X/Y$.

| Y \ X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

**Решение:**

$$P(X/Y=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.1+0.3=0.4$$

- Рассмотрим функцию $g(X,Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:
$$P(g(X,Y)=t)=\sum_{x,y:g(x,y)=t}P(X=x\cap Y=y)$$
- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:
$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\sum_{t\in\textbf{supp}(g(X,Y))}P\left(g\left(X,Y\right)=t\right)t=\sum_{x\in\textbf{supp}(X),y\in\textbf{supp}(Y)}P(X=x\cap Y=y)g(x,y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа кокосов (с.в $X$) и населения (с.в. $Y$) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения $X/Y$.

| Y \ X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

**Решение:**

$$P(X/Y=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.1+0.3=0.4$$
$$P(X/Y=1)=P(X=1\cap Y=1)=0.5$$

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:
$$P(g(X,Y)=t)=\sum_{x,y:g(x,y)=t}P(X=x\cap Y=y)$$
- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:
$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\sum_{t\in\mathbf{supp}(g(X,Y))}P\left(g\left(X,Y\right)=t\right)t=\sum_{x\in\mathbf{supp}(X),y\in\mathbf{supp}(Y)}P(X=x\cap Y=y)g(x,y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа кокосов (с.в $X$) и населения (с.в. $Y$) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения $X/Y$.

| Y \ X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

**Решение:**

$$P(X/Y=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.1+0.3=0.4$$
$$P(X/Y=1)=P(X=1\cap Y=1)=0.5$$
$$P(X/Y=0.5)=P(X=1\cap Y=2)=0.1$$

- Рассмотрим функцию $g(X,Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X,Y)=t)=\sum_{x,y:g(x,y)=t}P(X=x\cap Y=y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\sum_{t\in\textbf{supp}(g(X,Y))}P\left(g\left(X,Y\right)=t\right)t=\sum_{x\in\textbf{supp}(X),y\in\textbf{supp}(Y)}P(X=x\cap Y=y)g(x,y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа кокосов (с.в $X$) и населения (с.в. $Y$) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения $X/Y$.

| Y \ X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

**Решение:**

$P(X/Y=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.1+0.3=0.4$
$P(X/Y=1)=P(X=1\cap Y=1)=0.5$
$P(X/Y=0.5)=P(X=1\cap Y=2)=0.1$

Таблица распределения $X/Y$:

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|---|---|---|---|
| P(X/Y=t) | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X,Y)=t)=\sum_{x,y:g(x,y)=t}P(X=x\cap Y=y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\sum_{t\in\textbf{supp}(g(X,Y))}P\left(g\left(X,Y\right)=t\right)t=\sum_{x\in\textbf{supp}(X),y\in\textbf{supp}(Y)}P(X=x\cap Y=y)g(x,y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа кокосов (с.в $X$) и населения (с.в. $Y$) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения $X/Y$.

| Y \ X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

**Решение:**

$P(X/Y=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.1+0.3=0.4$
$P(X/Y=1)=P(X=1\cap Y=1)=0.5$
$P(X/Y=0.5)=P(X=1\cap Y=2)=0.1$

Таблица распределения $X/Y$:

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|---|---|---|---|
| P(X/Y=t) | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

Поиск математического ожидания $X/Y$ с использованием распределения $X/Y$:

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:
$$P(g(X,Y)=t)=\sum_{x,y:g(x,y)=t}P(X=x\cap Y=y)$$
- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:
$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\sum_{t\in\textbf{supp}(g(X,Y))}P\left(g\left(X,Y\right)=t\right)t=\sum_{x\in\textbf{supp}(X),y\in\textbf{supp}(Y)}P(X=x\cap Y=y)g(x,y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа кокосов (с.в $X$) и населения (с.в. $Y$) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения $X/Y$.

| Y \ X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

**Решение:**

$P(X/Y=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.1+0.3=0.4$
$P(X/Y=1)=P(X=1\cap Y=1)=0.5$
$P(X/Y=0.5)=P(X=1\cap Y=2)=0.1$

Таблица распределения $X/Y$:

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|---|---|---|---|
| P(X/Y=t) | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

Поиск математического ожидания $X/Y$ с использованием распределения $X/Y$:
$E(X/Y)=P(X/Y=0)\times 0+P(X/Y=1)\times 1+P(X/Y=0.5)\times 0.5=0.4\times 0+0.5\times 1+0.1\times 0.5=0.55$

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:
$$P(g(X,Y)=t)=\sum_{x,y:g(x,y)=t} P(X=x\cap Y=y)$$
- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:
$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\sum_{t\in\textbf{supp}(g(X,Y))} P\left(g\left(X,Y\right)=t\right)t=\sum_{x\in\textbf{supp}(X),y\in\textbf{supp}(Y)} P(X=x\cap Y=y)g(x,y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа кокосов (с.в $X$) и населения (с.в. $Y$) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения $X/Y$.

| Y \ X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

**Решение:**

$P(X/Y=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.1+0.3=0.4$
$P(X/Y=1)=P(X=1\cap Y=1)=0.5$
$P(X/Y=0.5)=P(X=1\cap Y=2)=0.1$

Таблица распределения $X/Y$:

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|---|---|---|---|
| P(X/Y=t) | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

Поиск математического ожидания $X/Y$ с использованием распределения $X/Y$:
$E(X/Y)=P(X/Y=0)\times 0+P(X/Y=1)\times 1+P(X/Y=0.5)\times 0.5=0.4\times 0+0.5\times 1+0.1\times 0.5=0.55$
Поиск математического ожидания $X/Y$ с использованием совместного распределения $X$ и $Y$:

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:
$$P(g(X,Y)=t)=\sum_{x,y:g(x,y)=t}P(X=x\cap Y=y)$$
- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:
$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\sum_{t\in\mathbf{supp}(g(X,Y))}P\left(g\left(X,Y\right)=t\right)t=\sum_{x\in\mathbf{supp}(X),y\in\mathbf{supp}(Y)}P(X=x\cap Y=y)g(x,y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа кокосов (с.в $X$) и населения (с.в. $Y$) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения $X/Y$.

| Y \ X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

**Решение:**

$P(X/Y=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.1+0.3=0.4$
$P(X/Y=1)=P(X=1\cap Y=1)=0.5$
$P(X/Y=0.5)=P(X=1\cap Y=2)=0.1$

Таблица распределения $X/Y$:

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|---|---|---|---|
| P(X/Y=t) | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

Поиск математического ожидания $X/Y$ с использованием распределения $X/Y$:
$E(X/Y)=P(X/Y=0)\times 0+P(X/Y=1)\times 1+P(X/Y=0.5)\times 0.5=0.4\times 0+0.5\times 1+0.1\times 0.5=0.55$
Поиск математического ожидания $X/Y$ с использованием совместного распределения $X$ и $Y$:
$E(X/Y)=P(X=0\cap Y=1)\times(0/1)+P(X=0\cap Y=2)\times(0/2)+P(X=1\cap Y=1)\times(1/1)+$

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:
$$P(g(X,Y)=t)=\sum_{x,y:g(x,y)=t}P(X=x\cap Y=y)$$
- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:
$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\sum_{t\in\mathbf{supp}(g(X,Y))}P\left(g\left(X,Y\right)=t\right)t=\sum_{x\in\mathbf{supp}(X),y\in\mathbf{supp}(Y)}P(X=x\cap Y=y)g(x,y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа кокосов (с.в $X$) и населения (с.в. $Y$) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения $X/Y$.

| Y \ X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

**Решение:**

$P(X/Y=0)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)=0.1+0.3=0.4$
$P(X/Y=1)=P(X=1\cap Y=1)=0.5$
$P(X/Y=0.5)=P(X=1\cap Y=2)=0.1$

Таблица распределения $X/Y$:

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|---|---|---|---|
| P(X/Y=t) | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

Поиск математического ожидания $X/Y$ с использованием распределения $X/Y$:
$E(X/Y)=P(X/Y=0)\times 0+P(X/Y=1)\times 1+P(X/Y=0.5)\times 0.5=0.4\times 0+0.5\times 1+0.1\times 0.5=0.55$
Поиск математического ожидания $X/Y$ с использованием совместного распределения $X$ и $Y$:
$E(X/Y)=P(X=0\cap Y=1)\times(0/1)+P(X=0\cap Y=2)\times(0/2)+P(X=1\cap Y=1)\times(1/1)+$
$+P(X=1\cap Y=2)\times(1/2)=0.1\times(0/1)+0.5\times(1/1)+0.3\times(0/2)+0.1\times(1/2)=0.55$

- Для случайных величин $X$ и $Y$, а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:
$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

- Для случайных величин $X$ и $Y$, а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

**Примеры:**

- Фирмы $A$ и $B$ производят комбайны. Число произведенных на фирмах $A$ и $B$ комбайнов являются случайными величинами $X$ и $Y$ соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма $A$ продает их по 2 рубля, а фирма $B$ – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

- Для случайных величин $X$ и $Y$, а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

**Примеры:**

- Фирмы $A$ и $B$ производят комбайны. Число произведенных на фирмах $A$ и $B$ комбайнов являются случайными величинами $X$ и $Y$ соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма $A$ продает их по 2 рубля, а фирма $B$ – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.
  **Решение:**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

- Для случайных величин $X$ и $Y$, а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

**Примеры:**

- Фирмы $A$ и $B$ производят комбайны. Число произведенных на фирмах $A$ и $B$ комбайнов являются случайными величинами $X$ и $Y$ соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма $A$ продает их по 2 рубля, а фирма $B$ – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.
**Решение:**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$
$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

- Для случайных величин $X$ и $Y$, а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

**Примеры:**

- Фирмы $A$ и $B$ производят комбайны. Число произведенных на фирмах $A$ и $B$ комбайнов являются случайными величинами $X$ и $Y$ соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма $A$ продает их по 2 рубля, а фирма $B$ – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.
  **Решение:**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$
$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$
$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

- Для случайных величин $X$ и $Y$, а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

**Примеры:**

- Фирмы $A$ и $B$ производят комбайны. Число произведенных на фирмах $A$ и $B$ комбайнов являются случайными величинами $X$ и $Y$ соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма $A$ продает их по 2 рубля, а фирма $B$ – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.
  **Решение:**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$
$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$
$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

- Известно, что $E(X + Y) = 10$ и $E(X - Y) = 5$. Найдите $E(X)$ и $E(Y)$.

- Для случайных величин $X$ и $Y$, а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

**Примеры:**

- Фирмы $A$ и $B$ производят комбайны. Число произведенных на фирмах $A$ и $B$ комбайнов являются случайными величинами $X$ и $Y$ соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма $A$ продает их по 2 рубля, а фирма $B$ – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.
  **Решение:**

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$
$$E(2X+3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$
$$E(2X-3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

- Известно, что $E(X+Y) = 10$ и $E(X-Y) = 5$. Найдите $E(X)$ и $E(Y)$.
  **Решение:**
  Составляем и решаем систему из двух линейных равенств:

- Для случайных величин $X$ и $Y$, а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:
$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

**Примеры:**

- Фирмы $A$ и $B$ производят комбайны. Число произведенных на фирмах $A$ и $B$ комбайнов являются случайными величинами $X$ и $Y$ соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма $A$ продает их по 2 рубля, а фирма $B$ – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.
**Решение:**
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$
$$E(2X+3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$
$$E(2X-3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$
- Известно, что $E(X+Y) = 10$ и $E(X-Y) = 5$. Найдите $E(X)$ и $E(Y)$.
**Решение:**
Составляем и решаем систему из двух линейных равенств:
$$\begin{cases} E(X) + E(Y) = 10 \\ E(X) - E(Y) = 5 \end{cases}$$

- Для случайных величин $X$ и $Y$, а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:
$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

**Примеры:**

- Фирмы $A$ и $B$ производят комбайны. Число произведенных на фирмах $A$ и $B$ комбайнов являются случайными величинами $X$ и $Y$ соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма $A$ продает их по 2 рубля, а фирма $B$ – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.
**Решение:**
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$
$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$
$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$
- Известно, что $E(X + Y) = 10$ и $E(X - Y) = 5$. Найдите $E(X)$ и $E(Y)$.
**Решение:**
Составляем и решаем систему из двух линейных равенств:
$$\begin{cases} E(X) + E(Y) = 10 \\ E(X) - E(Y) = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 7.5 \\ E(Y) = 2.5 \end{cases}$$

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P\left(X = x \cap Y = y\right) = P(X = x)P(Y = y)$$

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P\left(X = x \cap Y = y\right) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P\left(X = x \cap Y = y\right) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. $X$) и семинаров (с.в. $Y$) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. $X$) и семинаров (с.в. $Y$) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

**Решение:**
Сперва найдем маржинальные распределения:

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P\left(X = x \cap Y = y\right) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. $X$) и семинаров (с.в. $Y$) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

**Решение:**
Сперва найдем маржинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \qquad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P\left(X = x \cap Y = y\right) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. $X$) и семинаров (с.в. $Y$) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

**Решение:**
Сперва найдем маржинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \qquad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$
$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \qquad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P\left(X = x \cap Y = y\right) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. $X$) и семинаров (с.в. $Y$) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

**Решение:**
Сперва найдем маржинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \qquad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$
$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \qquad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P\left(X = x \cap Y = y\right) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. $X$) и семинаров (с.в. $Y$) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

**Решение:**
Сперва найдем маржинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \qquad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$
$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \qquad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P\left(X = x \cap Y = y\right) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. $X$) и семинаров (с.в. $Y$) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

**Решение:**

Сперва найдем маржинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \qquad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$
$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \qquad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$
$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

# Независимость случайных величин
## Определение независимости

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P\left(X = x \cap Y = y\right) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. $X$) и семинаров (с.в. $Y$) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

**Решение:**
Сперва найдем маржинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \qquad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$
$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \qquad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$
$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$
$$P(X = 3)P(Y = 3) = 0.8 \times 0.7 = 0.56 = P(X = 3 \cap Y = 3)$$

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P\left(X = x \cap Y = y\right) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. $X$) и семинаров (с.в. $Y$) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

**Решение:**
Сперва найдем маржинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \qquad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$
$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \qquad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$
$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$
$$P(X = 3)P(Y = 3) = 0.8 \times 0.7 = 0.56 = P(X = 3 \cap Y = 3)$$
$$P(X = 3)P(Y = 5) = 0.8 \times 0.3 = 0.24 = P(X = 3 \cap Y = 5)$$

- Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P\left(X = x \cap Y = y\right) = P(X = x)P(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

**Пример:**

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. $X$) и семинаров (с.в. $Y$) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

**Решение:**
Сперва найдем маржинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \qquad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$
$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \qquad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$
$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$
$$P(X = 3)P(Y = 3) = 0.8 \times 0.7 = 0.56 = P(X = 3 \cap Y = 3)$$
$$P(X = 3)P(Y = 5) = 0.8 \times 0.3 = 0.24 = P(X = 3 \cap Y = 5)$$

Все условия соблюдены, следовательно, случайные величины $X$ и $Y$ – независимы.

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.
  **Решение:**
  Через $X$ и $Y$ обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.
  **Решение:**
  Через $X$ и $Y$ обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:
  $E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \cdots + 6)/6 = 3.5$

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.
  **Решение:**
  Через $X$ и $Y$ обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:
  $E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \cdots + 6)/6 = 3.5$
  Пользуясь тем, что $X$ и $Y$ независимы, получаем:

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.
  **Решение:**
  Через $X$ и $Y$ обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:
  $E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$
  Пользуясь тем, что $X$ и $Y$ независимы, получаем:
  $E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.
  **Решение:**
  Через $X$ и $Y$ обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:
  $E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \cdots + 6)/6 = 3.5$
  Пользуясь тем, что $X$ и $Y$ независимы, получаем:
  $E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp(Y)} \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.
  **Решение:**
  Через $X$ и $Y$ обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:
  $E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \cdots + 6)/6 = 3.5$
  Пользуясь тем, что $X$ и $Y$ независимы, получаем:
  $E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.
  **Решение:**
  Из $\text{supp}(Y) \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.
  **Решение:**
  Через $X$ и $Y$ обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:
  $E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \cdots + 6)/6 = 3.5$
  Пользуясь тем, что $X$ и $Y$ независимы, получаем:
  $E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp(Y)} \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.
  **Решение:**
  Из $\text{supp(Y)} \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$, откуда получаем систему:

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.
**Решение:**
Через $X$ и $Y$ обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:
$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \cdots + 6)/6 = 3.5$
Пользуясь тем, что $X$ и $Y$ независимы, получаем:
$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp(Y)} \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.
**Решение:**
Из $\text{supp(Y)} \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.
Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$, откуда получаем систему:
$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases}$$

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.
  **Решение:**
  Через $X$ и $Y$ обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:
  $E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \cdots + 6)/6 = 3.5$
  Пользуясь тем, что $X$ и $Y$ независимы, получаем:
  $E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp}(\text{Y}) \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.
  **Решение:**
  Из $\text{supp}(\text{Y}) \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$, откуда получаем систему:

$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ 12/E(Y) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases}$$

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.
**Решение:**
Через $X$ и $Y$ обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:
$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \cdots + 6)/6 = 3.5$
Пользуясь тем, что $X$ и $Y$ независимы, получаем:
$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp(Y)} \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.
**Решение:**
Из $\text{supp(Y)} \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.
Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$, откуда получаем систему:

$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ 12/E(Y) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ E(Y)^2 = 6, \\ E(Y) > 0 \end{cases}$$

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то:
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость $X$ и $Y$.

**Примеры:**

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.
**Решение:**
Через $X$ и $Y$ обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:
$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \cdots + 6)/6 = 3.5$
Пользуясь тем, что $X$ и $Y$ независимы, получаем:
$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp(Y)} \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.
**Решение:**
Из $\text{supp(Y)} \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.
Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$, откуда получаем систему:

$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ 12/E(Y) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ E(Y)^2 = 6, \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 2\sqrt{6} \\ E(Y) = \sqrt{6} \end{cases}$$

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то независимы также $X^2$ и $Y^2$, откуда:

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то независимы также $X^2$ и $Y^2$, откуда:
  $Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 =$

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то независимы также $X^2$ и $Y^2$, откуда:
  $Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 =$
  $= \left(Var(X) + E(X)^2\right) \times \left(Var(Y) + E(Y)^2\right) - E(X)^2E(Y)^2 = \left(2 + 1^2\right) \times \left(5 + 5^2\right) - 1^2 \times 5^2 = 65$

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то независимы также $X^2$ и $Y^2$, откуда:
  $Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 =$
  $= \left(Var(X) + E(X)^2\right) \times \left(Var(Y) + E(Y)^2\right) - E(X)^2E(Y)^2 = \left(2 + 1^2\right) \times \left(5 + 5^2\right) - 1^2 \times 5^2 = 65$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то независимы также $X^2$ и $Y^2$, откуда:
  $Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 =$
  $= \left(Var(X) + E(X)^2\right) \times \left(Var(Y) + E(Y)^2\right) - E(X)^2E(Y)^2 = \left(2 + 1^2\right) \times \left(5 + 5^2\right) - 1^2 \times 5^2 = 65$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.
  **Решение:**
  Если использовать независимость $X$ и $Y$:

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то независимы также $X^2$ и $Y^2$, откуда:
  $Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 =$
  $= \left(Var(X) + E(X)^2\right) \times \left(Var(Y) + E(Y)^2\right) - E(X)^2E(Y)^2 = \left(2 + 1^2\right) \times \left(5 + 5^2\right) - 1^2 \times 5^2 = 65$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.
  **Решение:**
  Если использовать независимость $X$ и $Y$:
  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) = P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) =$

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то независимы также $X^2$ и $Y^2$, откуда:
  $Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 =$
  $= \left(Var(X) + E(X)^2\right) \times \left(Var(Y) + E(Y)^2\right) - E(X)^2E(Y)^2 = \left(2 + 1^2\right) \times \left(5 + 5^2\right) - 1^2 \times 5^2 = 65$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.
  **Решение:**
  Если использовать независимость $X$ и $Y$:
  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) = P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) =$
  $= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) =$

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то независимы также $X^2$ и $Y^2$, откуда:
  $Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 =$
  $= \left(Var(X) + E(X)^2\right) \times \left(Var(Y) + E(Y)^2\right) - E(X)^2E(Y)^2 = \left(2 + 1^2\right) \times \left(5 + 5^2\right) - 1^2 \times 5^2 = 65$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.
  **Решение:**
  Если использовать независимость $X$ и $Y$:
  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) = P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) =$
  $= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) =$
  $= 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.15$

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то независимы также $X^2$ и $Y^2$, откуда:
  $Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 =$
  $= \left(Var(X) + E(X)^2\right) \times \left(Var(Y) + E(Y)^2\right) - E(X)^2E(Y)^2 = \left(2 + 1^2\right) \times \left(5 + 5^2\right) - 1^2 \times 5^2 = 65$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.
  **Решение:**
  Если использовать независимость $X$ и $Y$:
  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) = P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) =$
  $= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) =$
  $= 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.15$
  Если сразу использовать независимость $\ln(X)$ и $Y^2$:

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то независимы также $X^2$ и $Y^2$, откуда:
  $Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 =$
  $= \left(Var(X) + E(X)^2\right) \times \left(Var(Y) + E(Y)^2\right) - E(X)^2E(Y)^2 = \left(2 + 1^2\right) \times \left(5 + 5^2\right) - 1^2 \times 5^2 = 65$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.
  **Решение:**
  Если использовать независимость $X$ и $Y$:
  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) = P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) =$
  $= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) =$
  $= 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.15$
  Если сразу использовать независимость $\ln(X)$ и $Y^2$:
  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) = P(\ln(X) = 0)P(Y^2 = 25) =$

- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

**Примеры:**

- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $E(X)=1$, $Var(X)=2$ и $E(Y)=Var(Y)=5$. Найдите $Var(XY)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то независимы также $X^2$ и $Y^2$, откуда:
  $Var(XY)=E(X^2Y^2)-E(XY)^2=E(X^2)E(Y^2)-(E(X)E(Y))^2=$
  $=\left(Var(X)+E(X)^2\right)\times\left(Var(Y)+E(Y)^2\right)-E(X)^2E(Y)^2=\left(2+1^2\right)\times\left(5+5^2\right)-1^2\times 5^2=65$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X=1)=0.5$, $P(Y=5)=0.1$ и $P(Y=-5)=0.2$. Вычислите $P(\ln(X)=0\cap Y^2=25)$.
  **Решение:**
  Если использовать независимость $X$ и $Y$:
  $P(\ln(X)=0\cap Y^2=25)=P(X=1\cap(Y=5\cup Y=-5))=P((X=1\cap Y=5)\cup(X=1\cap Y=-5))=$
  $=P(X=1\cap Y=5)+P(X=1\cap Y=-5)=P(X=1)P(Y=5)+P(X=1)P(Y=-5)=$
  $=0.5\times 0.1+0.5\times 0.2=0.15$
  Если сразу использовать независимость $\ln(X)$ и $Y^2$:
  $P(\ln(X)=0\cap Y^2=25)=P(\ln(X)=0)P(Y^2=25)=$
  $=P(X=1)(P(Y=5)+P(Y=-5))=0.5\times(0.2+0.1)=0.15$

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:

$$Cov(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:
$$Cov(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
**Доказательство:**
$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:
$$Cov(X,Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
**Доказательство:**
$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:

$$Cov(X,Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

  **Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:
$$Cov(X,Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
**Доказательство:**
$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.
**Решение:**
Найдем совместное распределение $XY$:

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:
$$Cov(X,Y)=E([X-E(X)][Y-E(Y)])=E(XY)-E(X)E(Y)$$
**Доказательство:**
$$E([X-E(X)][Y-E(Y)])=E(XY)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X=1\cap Y=2)=0.3$, $P(X=2\cap Y=1)=0.5$ и $P(X=1\cap Y=0)=0.2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.
**Решение:**
Найдем совместное распределение $XY$:
$P(XY=0)=P(X=1\cap Y=0)=0.2$

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:

$$Cov(X,Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.

**Решение:**

Найдем совместное распределение $XY$:

$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$

$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:
$$Cov(X,Y) = E([X-E(X)][Y-E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
**Доказательство:**
$$E([X-E(X)][Y-E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X=1 \cap Y=2) = 0.3$, $P(X=2 \cap Y=1) = 0.5$ и $P(X=1 \cap Y=0) = 0.2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.
**Решение:**
Найдем совместное распределение $XY$:
$P(XY=0) = P(X=1 \cap Y=0) = 0.2$
$P(XY=2) = P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$
Откуда: $E(XY) = P(XY=2) \times 2 + P(XY=0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:
$$Cov(X,Y) = E([X-E(X)][Y-E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
**Доказательство:**
$$E([X-E(X)][Y-E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X=1 \cap Y=2) = 0.3$, $P(X=2 \cap Y=1) = 0.5$ и $P(X=1 \cap Y=0) = 0.2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.
**Решение:**
Найдем совместное распределение $XY$:
$P(XY=0) = P(X=1 \cap Y=0) = 0.2$
$P(XY=2) = P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$
Откуда: $E(XY) = P(XY=2) \times 2 + P(XY=0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$
Альтернативный способ без необходимо искать распределение $XY$:

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:

$$Cov(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.

  **Решение:**

  Найдем совместное распределение $XY$:

  $P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$

  $P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$

  Откуда: $E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$

  Альтернативный способ без необходимо искать распределение $XY$:

  $E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:
$$Cov(X,Y)=E([X-E(X)][Y-E(Y)])=E(XY)-E(X)E(Y)$$
**Доказательство:**
$$E([X-E(X)][Y-E(Y)])=E(XY)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X=1\cap Y=2)=0.3$, $P(X=2\cap Y=1)=0.5$ и $P(X=1\cap Y=0)=0.2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.
**Решение:**
Найдем совместное распределение $XY$:
$P(XY=0)=P(X=1\cap Y=0)=0.2$
$P(XY=2)=P(X=1\cap Y=2)+P(X=2\cap Y=1)=0.3+0.5=0.8$
Откуда: $E(XY)=P(XY=2)\times 2+P(XY=0)\times 0=0.8\times 2+0.2\times 0=1.6$
Альтернативный способ без необходимо искать распределение $XY$:
$E(XY)=P(X=1\cap Y=2)\times(1\times 2)+P(X=2\cap Y=1)\times(2\times 1)+P(X=1\cap Y=0)\times(1\times 0)=1.6$
Математические ожидания $X$ и $Y$ можно найти таким же образом:

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:
$$Cov(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
**Доказательство:**
$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.
**Решение:**
Найдем совместное распределение $XY$:
$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$
$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$
Откуда: $E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$
Альтернативный способ без необходимо искать распределение $XY$:
$E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$
Математические ожидания $X$ и $Y$ можно найти таким же образом:
$E(X) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times 1 + P(X = 2 \cap Y = 1) \times 2 + P(X = 1 \cap Y = 0) \times 1 = 0.3 \times 1 + 0.5 \times 2 + 0.2 \times 1 = 1.5$

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:
$$Cov(X,Y)=E([X-E(X)][Y-E(Y)])=E(XY)-E(X)E(Y)$$
**Доказательство:**
$$E([X-E(X)][Y-E(Y)])=E(XY)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X=1\cap Y=2)=0.3$, $P(X=2\cap Y=1)=0.5$ и $P(X=1\cap Y=0)=0.2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.
**Решение:**
Найдем совместное распределение $XY$:
$P(XY=0)=P(X=1\cap Y=0)=0.2$
$P(XY=2)=P(X=1\cap Y=2)+P(X=2\cap Y=1)=0.3+0.5=0.8$
Откуда: $E(XY)=P(XY=2)\times 2+P(XY=0)\times 0=0.8\times 2+0.2\times 0=1.6$
Альтернативный способ без необходимо искать распределение $XY$:
$E(XY)=P(X=1\cap Y=2)\times(1\times 2)+P(X=2\cap Y=1)\times(2\times 1)+P(X=1\cap Y=0)\times(1\times 0)=1.6$
Математические ожидания $X$ и $Y$ можно найти таким же образом:
$E(X)=P(X=1\cap Y=2)\times 1+P(X=2\cap Y=1)\times 2+P(X=1\cap Y=0)\times 1=0.3\times 1+0.5\times 2+0.2\times 1=1.5$
$E(Y)=P(X=1\cap Y=2)\times 2+P(X=2\cap Y=1)\times 1+P(X=1\cap Y=0)\times 0=0.3\times 2+0.5\times 1+0.2\times 0=1.1$

- **Ковариация** между случайными величинами $X$ и $Y$ определяется как:
$$Cov(X,Y)=E([X-E(X)][Y-E(Y)])=E(XY)-E(X)E(Y)$$
**Доказательство:**
$$E([X-E(X)][Y-E(Y)])=E(XY)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $P(X=1\cap Y=2)=0.3$, $P(X=2\cap Y=1)=0.5$ и $P(X=1\cap Y=0)=0.2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.
**Решение:**
Найдем совместное распределение $XY$:
$P(XY=0)=P(X=1\cap Y=0)=0.2$
$P(XY=2)=P(X=1\cap Y=2)+P(X=2\cap Y=1)=0.3+0.5=0.8$
Откуда: $E(XY)=P(XY=2)\times 2+P(XY=0)\times 0=0.8\times 2+0.2\times 0=1.6$
Альтернативный способ без необходимо искать распределение $XY$:
$E(XY)=P(X=1\cap Y=2)\times(1\times 2)+P(X=2\cap Y=1)\times(2\times 1)+P(X=1\cap Y=0)\times(1\times 0)=1.6$
Математические ожидания $X$ и $Y$ можно найти таким же образом:
$E(X)=P(X=1\cap Y=2)\times 1+P(X=2\cap Y=1)\times 2+P(X=1\cap Y=0)\times 1=0.3\times 1+0.5\times 2+0.2\times 1=1.5$
$E(Y)=P(X=1\cap Y=2)\times 2+P(X=2\cap Y=1)\times 1+P(X=1\cap Y=0)\times 0=0.3\times 2+0.5\times 1+0.2\times 0=1.1$
Считаем ковариацию: $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1.6-1.5\times 1.1=-0.05$

- Если $Cov(X, Y) \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $Cov(X, Y) < 0$.

- Если $Cov(X, Y) \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $Cov(X, Y) < 0$.
- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X, Y) = 0$.

- Если $Cov(X, Y) \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $Cov(X, Y) < 0$.
- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X, Y) = 0$.
  **Доказательство**: если $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:

- Если $Cov(X, Y) \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $Cov(X, Y) < 0$.
- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X, Y) = 0$.
**Доказательство**: если $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:
$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если $Cov(X, Y) \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $Cov(X, Y) < 0$.
- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X, Y) = 0$.
  **Доказательство**: если $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:
  $$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$
- Если $Cov(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины $X$ и $Y$ независимы.

- Если $Cov(X, Y) \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $Cov(X, Y) < 0$.
- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X, Y) = 0$.
**Доказательство**: если $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:
$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$
- Если $Cov(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины $X$ и $Y$ независимы.

**Пример:**

- Случайная величина $X$ с равной вероятностью принимает значения $-1$, $0$ и $1$. Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$, а также проверьте, являются ли они независимыми.

- Если $Cov(X, Y) \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $Cov(X, Y) < 0$.
- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X, Y) = 0$.
  **Доказательство**: если $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:
  $$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$
- Если $Cov(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины $X$ и $Y$ независимы.

**Пример:**

- Случайная величина $X$ с равной вероятностью принимает значения $-1$, $0$ и $1$. Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$, а также проверьте, являются ли они независимыми.
  **Решение:**
  $$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

- Если $Cov(X, Y) \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $Cov(X, Y) < 0$.
- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X, Y) = 0$.
  **Доказательство**: если $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:
  $$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$
- Если $Cov(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины $X$ и $Y$ независимы.

**Пример:**

- Случайная величина $X$ с равной вероятностью принимает значения $-1$, $0$ и $1$. Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$, а также проверьте, являются ли они независимыми.
  **Решение:**
  $$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$
  $$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$

- Если $Cov(X,Y)\neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X,Y)>0$ и отрицательной – при $Cov(X,Y)<0$.
- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X,Y)=0$.
  **Доказательство**: если $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY)=E(X)E(Y)$, а значит:
  $$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(X)E(Y)-E(X)E(Y)=0$$
- Если $Cov(X,Y)=0$, то это не гарантирует, что случайные величины $X$ и $Y$ независимы.

**Пример:**

- Случайная величина $X$ с равной вероятностью принимает значения $-1$, $0$ и $1$. Также, имеется случайная величина $Y=X^2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$, а также проверьте, являются ли они независимыми.
  **Решение:**
  $$E(X)=(-1+0+1)/3=0$$
  $$E(Y)=E(X^2)=((-1)^2+0+1^2)/3=2/3$$
  $$E(XY)=E(X\times X^2)=E(X^3)=((-1)^3+0^3+1^3)/3=0$$

- Если $Cov(X, Y) \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $Cov(X, Y) < 0$.
- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X, Y) = 0$.
  **Доказательство**: если $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:
  $$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$
- Если $Cov(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины $X$ и $Y$ независимы.

**Пример:**

- Случайная величина $X$ с равной вероятностью принимает значения $-1$, $0$ и $1$. Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$, а также проверьте, являются ли они независимыми.
  **Решение:**
  $$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$
  $$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$
  $$E(XY) = E(X \times X^2) = E(X^3) = ((-1)^3 + 0^3 + 1^3)/3 = 0$$
  $$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times (2/3) = 0$$

- Если $Cov(X,Y) \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X,Y) > 0$ и отрицательной – при $Cov(X,Y) < 0$.
- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X,Y) = 0$.
  **Доказательство**: если $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:
  $$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$
- Если $Cov(X,Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины $X$ и $Y$ независимы.

**Пример:**

- Случайная величина $X$ с равной вероятностью принимает значения $-1$, $0$ и $1$. Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$, а также проверьте, являются ли они независимыми.
  **Решение:**
  $$E(X) = (-1+0+1)/3 = 0$$
  $$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$
  $$E(XY) = E(X \times X^2) = E(X^3) = ((-1)^3 + 0^3 + 1^3)/3 = 0$$
  $$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times (2/3) = 0$$
  Несмотря на нулевую ковариацию, эти случайные величины зависимы, поскольку:

- Если $Cov(X, Y) \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ **линейно зависимы** (частный случай зависимости). Линейная зависимость именуется положительной при $Cov(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $Cov(X, Y) < 0$.
- Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X, Y) = 0$.
**Доказательство**: если $X$ и $Y$ независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:
$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$
- Если $Cov(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины $X$ и $Y$ независимы.

**Пример:**

- Случайная величина $X$ с равной вероятностью принимает значения $-1$, $0$ и $1$. Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$, а также проверьте, являются ли они независимыми.
**Решение:**
$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$
$$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$
$$E(XY) = E(X \times X^2) = E(X^3) = ((-1)^3 + 0^3 + 1^3)/3 = 0$$
$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times (2/3) = 0$$
Несмотря на нулевую ковариацию, эти случайные величины зависимы, поскольку:
$$P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0 \cap X^2 = 0) = P(X = 0) = 1/3 \neq P(X = 0)P(Y = 0) = 1/3 \times 1/3 = 1/9$$

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

**Пример:**

- Про случайные величины $X, Y, W$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, $Y$ и $W$ – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

**Пример:**

- Про случайные величины $X, Y, W$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, $Y$ и $W$ – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.

  **Решение:**

  Поскольку $Y$ и $W$ независимы, то $Cov(Y, W) = 0$

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1\alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

**Пример:**

- Про случайные величины $X, Y, W$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, $Y$ и $W$ – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.
  **Решение:**
  Поскольку $Y$ и $W$ независимы, то $Cov(Y, W) = 0$
  $Cov(2X + Y, X - W) = Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) =$

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1\alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

**Пример:**

- Про случайные величины $X, Y, W$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, $Y$ и $W$ – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.
  **Решение:**
  Поскольку $Y$ и $W$ независимы, то $Cov(Y, W) = 0$
  $Cov(2X + Y, X - W) = Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) =$
  $= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) =$

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

**Пример:**

- Про случайные величины $X, Y, W$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, $Y$ и $W$ – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.
  **Решение:**
  Поскольку $Y$ и $W$ независимы, то $Cov(Y, W) = 0$
  $Cov(2X + Y, X - W) = Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) =$
  $= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) =$
  $= 2Var(X) - 2Cov(X, W) + Cov(X, Y) + Cov(Y, W) = 2 \times 10 - 2 \times (-0.3) + 0.5 - 0 = 21.1$

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

**Пример:**

- Про случайные величины $X, Y, W$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, $Y$ и $W$ – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.

  **Решение:**

  Поскольку $Y$ и $W$ независимы, то $Cov(Y, W) = 0$

  $Cov(2X + Y, X - W) = Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) =$
  $= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) =$
  $= 2Var(X) - 2Cov(X, W) + Cov(X, Y) + Cov(Y, W) = 2 \times 10 - 2 \times (-0.3) + 0.5 - 0 = 21.1$

  $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6) =$
  $= 30Var(X) - 3Cov(X, Y) + 50Cov(X, Y) - 5Var(Y) - 20Cov(X, W) + 2Cov(Y, W) =$

Рассмотрим случайные величины $X, Y, W$ и $Z$, а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

**Пример:**

- Про случайные величины $X, Y, W$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, $Y$ и $W$ – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.

  **Решение:**

  Поскольку $Y$ и $W$ независимы, то $Cov(Y, W) = 0$

  $Cov(2X + Y, X - W) = Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) =$
  $= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) =$
  $= 2Var(X) - 2Cov(X, W) + Cov(X, Y) + Cov(Y, W) = 2 \times 10 - 2 \times (-0.3) + 0.5 - 0 = 21.1$

  $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6) =$
  $= 30Var(X) - 3Cov(X, Y) + 50Cov(X, Y) - 5Var(Y) - 20Cov(X, W) + 2Cov(Y, W) =$
  $= 30 \times 10 - 3 \times 0.5 + 50 \times 0.5 - 5 \times 20 - 20 \times (-0.3) + 2 \times 0 = 229.5$

Рассмотрим случайные величины $X$ и $Y$.

Рассмотрим случайные величины $X$ и $Y$.

- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

Рассмотрим случайные величины $X$ и $Y$.

- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
- $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

Рассмотрим случайные величины $X$ и $Y$.

- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
- $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X,Y) = 0.5$. Найдите $Var(X+Y)$ и $Var(2X - 3Y + 5)$.

# Ковариация

## Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины $X$ и $Y$.

- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
- $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X,Y) = 0.5$. Найдите $Var(X+Y)$ и $Var(2X - 3Y + 5)$.
  **Решение:**
  $Var(X,Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$

Рассмотрим случайные величины $X$ и $Y$.

- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
- $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X,Y) = 0.5$. Найдите $Var(X+Y)$ и $Var(2X-3Y+5)$.
  **Решение:**
  $Var(X,Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$
  $Var(2X-3Y+5) = Var(2X-3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X,3Y) =$

Рассмотрим случайные величины $X$ и $Y$.

- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
- $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X,Y) = 0.5$. Найдите $Var(X+Y)$ и $Var(2X-3Y+5)$.
  **Решение:**
  $Var(X,Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$
  $Var(2X-3Y+5) = Var(2X-3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X,3Y) =$
  $= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X,Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214$

Рассмотрим случайные величины $X$ и $Y$.

- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
- $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X,Y) = 0.5$. Найдите $Var(X+Y)$ и $Var(2X - 3Y + 5)$.
  **Решение:**
  $Var(X,Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$
  $Var(2X - 3Y + 5) = Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X, 3Y) =$
  $= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X,Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $Var(X) = 1$ и $Var(Y) = 2$. Найдите $Var(X - Y)$.

Рассмотрим случайные величины $X$ и $Y$.

- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
- $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X,Y) = 0.5$. Найдите $Var(X+Y)$ и $Var(2X-3Y+5)$.
  **Решение:**
  $Var(X,Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$
  $Var(2X-3Y+5) = Var(2X-3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X,3Y) =$
  $= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X,Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $Var(X) = 1$ и $Var(Y) = 2$. Найдите $Var(X-Y)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X,Y) = 0$, а значит:

Рассмотрим случайные величины $X$ и $Y$.

- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
- $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X,Y) = 0.5$. Найдите $Var(X+Y)$ и $Var(2X-3Y+5)$.
  **Решение:**
  $Var(X,Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$
  $Var(2X-3Y+5) = Var(2X-3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X,3Y) =$
  $= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X,Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214$
- Про независимые случайные величины $X$ и $Y$ известно, что $Var(X) = 1$ и $Var(Y) = 2$. Найдите $Var(X-Y)$.
  **Решение:**
  Поскольку $X$ и $Y$ независимы, то $Cov(X,Y) = 0$, а значит:
  $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = 1 + 2 - 2 \times 0 = 3$

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины $X$ и $Y$ отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $Cov(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $Cov(1000X, 10Y) = 10000Cov(X, Y)$.

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины $X$ и $Y$ отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $Cov(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $Cov(1000X, 10Y) = 10000Cov(X, Y)$.
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от $-1$ до 1, за счет стандартизации на дисперсию:

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } Var(X), Var(Y) > 0$$

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины $X$ и $Y$ отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $Cov(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $Cov(1000X, 10Y) = 10000Cov(X, Y)$.
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от $-1$ до 1, за счет стандартизации на дисперсию:

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } Var(X), Var(Y) > 0$$

- Если $|Corr(X, Y)| = 1$, то существуют такие $\alpha, \beta \in R$, что $Y = \alpha X + \beta$.

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины $X$ и $Y$ отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $Cov(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $Cov(1000X, 10Y) = 10000Cov(X, Y)$.
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от $-1$ до 1, за счет стандартизации на дисперсию:
$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } Var(X), Var(Y) > 0$$
- Если $|Corr(X, Y)| = 1$, то существуют такие $\alpha, \beta \in R$, что $Y = \alpha X + \beta$.
**Пример:**
Ковариация между оценками за курс математики (с.в $X$) и экономики (с.в. $Y$) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины $X$ и $Y$ отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $Cov(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $Cov(1000X, 10Y) = 10000Cov(X, Y)$.
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от $-1$ до 1, за счет стандартизации на дисперсию:

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } Var(X), Var(Y) > 0$$

- Если $|Corr(X, Y)| = 1$, то существуют такие $\alpha, \beta \in R$, что $Y = \alpha X + \beta$.

  **Пример:**

  Ковариация между оценками за курс математики (с.в $X$) и экономики (с.в. $Y$) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.

  **Решение:**

$$Corr(X, Y) = \frac{5}{\sqrt{10 \times 40}} = 0.25$$

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины $X$ и $Y$ отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $Cov(X,Y)=1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $Cov(1000X, 10Y) = 10000Cov(X,Y)$.
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от $-1$ до 1, за счет стандартизации на дисперсию:

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \in [-1,1], \text{ где } Var(X), Var(Y) > 0$$

- Если $|Corr(X,Y)| = 1$, то существуют такие $\alpha, \beta \in R$, что $Y = \alpha X + \beta$.
  **Пример:**
  Ковариация между оценками за курс математики (с.в $X$) и экономики (с.в. $Y$) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.
  **Решение:**

$$Corr(X,Y) = \frac{5}{\sqrt{10\times 40}} = 0.25$$

$$Corr(X+Y, X-Y) = \frac{Cov(X+Y,X-Y)}{\sqrt{Var(X+Y)Var(X-Y)}} = \frac{Var(X)-Cov(X,Y)+Cov(X,Y)-Var(Y)}{\sqrt{(Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y))(Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y))}} =$$

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины $X$ и $Y$ отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $Cov(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $Cov(1000X, 10Y) = 10000Cov(X, Y)$.
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от $-1$ до 1, за счет стандартизации на дисперсию:
$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } Var(X), Var(Y) > 0$$
- Если $|Corr(X, Y)| = 1$, то существуют такие $\alpha, \beta \in R$, что $Y = \alpha X + \beta$.
**Пример:**
Ковариация между оценками за курс математики (с.в $X$) и экономики (с.в. $Y$) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.
**Решение:**
$$Corr(X, Y) = \frac{5}{\sqrt{10 \times 40}} = 0.25$$
$$Corr(X + Y, X - Y) = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{Var(X+Y)Var(X-Y)}} = \frac{Var(X) - Cov(X, Y) + Cov(X, Y) - Var(Y)}{\sqrt{(Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y))(Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y))}} =$$
$$= \frac{10 - 5 + 5 - 40}{\sqrt{(10 + 40 + 2 \times 5)(10 + 40 - 2 \times 5)}} \approx -0.61$$

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины $X$ и $Y$, а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины $X$ и $Y$, а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины $X$ и $Y$, а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y=y)$ имеет вид:

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x\cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y=y)>0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X=0)$, а также $E(Y|X=0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины $X$ и $Y$, а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины $X$ и $Y$, а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$
$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины $X$ и $Y$, а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$
$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$

Таблица распределения (Y|X=0):

| t | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P(Y=t\|X=0) | 1/3 | 2/3 |

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины $X$ и $Y$, а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y=y)$ имеет вид:

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y=y)>0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X=0)$, а также $E(Y|X=0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

$P(Y=1|X=0)=P(X=0 \cap Y=1)/P(X=0)=0.1/(0.1+0.2)=1/3$
$P(Y=2|X=0)=P(X=0 \cap Y=2)/P(X=0)=0.2/(0.1+0.2)=2/3$
$E(Y|X=0)=P(Y=1|X=0)\times 1+P(Y=2|X=0)\times 2=$

Таблица распределения (Y|X=0):

| t | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P(Y=t\|X=0) | 1/3 | 2/3 |

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины $X$ и $Y$, а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y=y)$ имеет вид:

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y=y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X=0)$, а также $E(Y|X=0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

$P(Y=1|X=0) = P(X=0 \cap Y=1)/P(X=0) = 0.1/(0.1+0.2) = 1/3$
$P(Y=2|X=0) = P(X=0 \cap Y=2)/P(X=0) = 0.2/(0.1+0.2) = 2/3$
$E(Y|X=0) = P(Y=1|X=0) \times 1 + P(Y=2|X=0) \times 2 =$
$= (1/3) \times 1 + (2/3) \times 2 = 5/3$

Таблица распределения (Y|X=0):

| t | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P(Y=t\|X=0) | 1/3 | 2/3 |

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины $X$ и $Y$, а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y=y)$ имеет вид:

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y=y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X=0)$, а также $E(Y|X=0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

$P(Y=1|X=0) = P(X=0 \cap Y=1)/P(X=0) = 0.1/(0.1+0.2) = 1/3$
$P(Y=2|X=0) = P(X=0 \cap Y=2)/P(X=0) = 0.2/(0.1+0.2) = 2/3$
$E(Y|X=0) = P(Y=1|X=0) \times 1 + P(Y=2|X=0) \times 2 =$
$= (1/3) \times 1 + (2/3) \times 2 = 5/3$

Таблица распределения (Y|X=0):

| t | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P(Y=t\|X=0) | 1/3 | 2/3 |

- Если Катя покупает три кофты, то с вероятностью 0.5 она приобретет и две юбки. Три кофты Катя покупает с вероятностью 0.2. Найдите вероятность того, что Катя купит две юбки и три кофты

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины $X$ и $Y$, а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$
$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$
$E(Y|X = 0) = P(Y = 1|X = 0) \times 1 + P(Y = 2|X = 0) \times 2 =$
$= (1/3) \times 1 + (2/3) \times 2 = 5/3$

Таблица распределения (Y|X=0):

| t | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P(Y=t\|X=0) | 1/3 | 2/3 |

- Если Катя покупает три кофты, то с вероятностью 0.5 она приобретет и две юбки. Три кофты Катя покупает с вероятностью 0.2. Найдите вероятность того, что Катя купит две юбки и три кофты
  **Решение:**
  Через $X$ и $Y$ обозначим число купленных Катей юбок и кофт соответственно, откуда:

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины $X$ и $Y$, а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y=y)$ имеет вид:

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x\cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y=y)>0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X=0)$, а также $E(Y|X=0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

$P(Y=1|X=0)=P(X=0\cap Y=1)/P(X=0)=0.1/(0.1+0.2)=1/3$
$P(Y=2|X=0)=P(X=0\cap Y=2)/P(X=0)=0.2/(0.1+0.2)=2/3$
$E(Y|X=0)=P(Y=1|X=0)\times 1+P(Y=2|X=0)\times 2=$
$=(1/3)\times 1+(2/3)\times 2=5/3$

Таблица распределения (Y|X=0):

| t | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P(Y=t\|X=0) | 1/3 | 2/3 |

- Если Катя покупает три кофты, то с вероятностью 0.5 она приобретет и две юбки. Три кофты Катя покупает с вероятностью 0.2. Найдите вероятность того, что Катя купит две юбки и три кофты
  **Решение:**
  Через $X$ и $Y$ обозначим число купленных Катей юбок и кофт соответственно, откуда:

$$P(X=2\cap Y=3)=P(X=2|Y=3)P(Y=3)=0.5\times 0.2=0.1$$

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1)+P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} =$$

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1)+P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} =$$

$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1)+P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} =$$

$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1)+P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1)+P(X=2)} =$$

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1)+P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} =$$

$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1)+P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1)+P(X=2)} =$$

$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y\in S)$, где $S\subset R$ и $P(Y\in S)>0$, имеет вид:

$$P(X=x|Y\in S)=\frac{P(X=x\cap Y\in S)}{P(Y\in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X>0)$, а также $E(Y|X>0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X>0$ эквивалентно событию $X\in\{1,2\}$, откуда:

$$P(Y=1|X>0)=\frac{P(X=1\cap Y=1)+P(X=2\cap Y=1)}{P(X=1\cup X=2)}=\frac{P(X=1\cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)}+\frac{P(X=2\cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)}=$$

$$=\frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)}+\frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)}=3/7$$

$$P(Y=2|X>0)=\frac{P(X=1\cap Y=2)}{P(X=1\cup X=2)}+\frac{P(X=2\cap Y=2)}{P(X=1\cup X=2)}=\frac{P(X=1\cap Y=2)}{P(X=1)+P(X=2)}+\frac{P(X=2\cap Y=2)}{P(X=1)+P(X=2)}=$$

$$=\frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)}+\frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)}=4/7$$

$$P(Y=2|X>0)=1-P(Y=1|X>0)=1-3/7=4/7$$

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:
$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1)+P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$
$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1)+P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1)+P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$
$$P(Y = 2|X > 0) = 1 - P(Y = 1|X > 0) = 1 - 3/7 = 4/7$$

Таблица распределения (Y|X>0):

| t | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P(Y=t\|X>0) | 3/7 | 4/7 |

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$

$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$

$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = 1 - P(Y = 1|X > 0) = 1 - 3/7 = 4/7$$

$$E(Y|X > 0) = P(Y = 1|X > 0) \times 1 + P(Y = 2|X > 0) \times 2 =$$

Таблица распределения (Y|X>0):

| t | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P(Y=t\|X>0) | 3/7 | 4/7 |

# Условное распределение

## Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1)+P(X=2)} =$$

$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1)+P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1)+P(X=2)} =$$

$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = 1 - P(Y = 1|X > 0) = 1 - 3/7 = 4/7$$

$$E(Y|X > 0) = P(Y = 1|X > 0) \times 1 + P(Y = 2|X > 0) \times 2 =$$

$$= (3/7) \times 1 + (4/7) \times 2 = 11/7$$

Таблица распределения (Y|X>0):

| t | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P(Y=t\|X>0) | 3/7 | 4/7 |

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X,Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X,Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X,Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

- Совместное распределение $(X, Y|(X,Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X,Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X,Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$, откуда:

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

- Совместное распределение $(X, Y|(X,Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X,Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X,Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y)\in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1\cap Y=2)}{P(X+Y\geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2\cap Y=1)}{P(X+Y\geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2\cap Y=1)}{P(X+Y\geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

Таблица распределения $(X, Y|X + Y \geq 3)$:

| Y \ X | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

Таблица распределения $(X, Y|X + Y \geq 3)$:

| Y \ X | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

$$E(Y|X + Y \geq 3) = (0 + 1/3) \times 1 + (1/6 + 1/2) \times 2 = 5/3$$

Таблица распределения $(X, Y|X + Y \geq 3)$:

| Y \ X | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

- Совместное распределение $(X,Y|(X,Y)\in S)$, где $S\subset R^2$ и $P((X,Y)\in S)>0$, имеет вид:

$$P(X=x\cap Y=y|(X,Y)\in S)=\frac{P(X=x\cap Y=y)}{P((X,Y)\in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение $(X,Y|X+Y\geq 3)$ и $Cov(X,Y|X+Y\geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X+Y\geq 3$ эквивалентно событию $(X,Y)\in\{(1,2),(2,1),(2,2)\}$, откуда:

$$P(X=1\cap Y=2|X+Y\geq 3)=\frac{P(X=1\cap Y=2)}{P(X+Y\geq 3)}=\frac{0.1}{0.1+0.2+0.3}=1/6$$

$$P(X=2\cap Y=1|X+Y\geq 3)=\frac{P(X=2\cap Y=1)}{P(X+Y\geq 3)}=\frac{0.2}{0.1+0.2+0.3}=1/3$$

$$P(X=2\cap Y=2|X+Y\geq 3)=\frac{P(X=2\cap Y=1)}{P(X+Y\geq 3)}=\frac{0.3}{0.1+0.2+0.3}=1/2$$

$$E(X|X+Y\geq 3)=(0+1/6)\times 1+(1/3+1/2)\times 2=11/6$$

$$E(Y|X+Y\geq 3)=(0+1/3)\times 1+(1/6+1/2)\times 2=5/3$$

Таблица распределения $(X,Y|X+Y\geq 3)$:

| Y \ X | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

Таблица распределения $(XY|X+Y\geq 3)$:

| $t$ | 2 | 4 |
|---|---|---|
| $P(XY=t\vert X+Y\geq 3)$ | 1/2 | 1/2 |

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

$$E(Y|X + Y \geq 3) = (0 + 1/3) \times 1 + (1/6 + 1/2) \times 2 = 5/3$$

$$E(XY|X + Y \geq 3) = (1/6 + 1/3) \times 2 + (1/2) \times 4 = 3$$

Таблица распределения $(X, Y|X + Y \geq 3)$:

| Y \ X | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

Таблица распределения $(XY|X + Y \geq 3)$:

| $t$ | 2 | 4 |
|---|---|---|
| $P(XY = t\|X + Y \geq 3)$ | 1/2 | 1/2 |

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

**Пример:**

- Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

**Решение:**

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$

$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$

$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$

$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$

$E(Y|X + Y \geq 3) = (0 + 1/3) \times 1 + (1/6 + 1/2) \times 2 = 5/3$

$E(XY|X + Y \geq 3) = (1/6 + 1/3) \times 2 + (1/2) \times 4 = 3$

$Cov(X, Y|X + Y \geq 3) = 3 - (11/6)\,(5/3) = -1/18$

Таблица распределения $(X, Y|X + Y \geq 3)$:

| Y \ X | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

Таблица распределения $(XY|X + Y \geq 3)$:

| $t$ | 2 | 4 |
|---|---|---|
| $P(XY = t\|X + Y \geq 3)$ | 1/2 | 1/2 |