

Теория Вероятностей и Статистика

Гипотезы о среднем, дисперсии и доле

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021-2022

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ .

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ .
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ .
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.
- Задается уровень значимости теста α (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика $T(X)$, исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область \mathcal{T}_α , то есть $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$.

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ .
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.
- Задается уровень значимости теста α (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика $T(X)$, исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область \mathcal{T}_α , то есть $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$.
- Как правило критическая область \mathcal{T}_α подбирается таким образом, чтобы в нее входили экстремальные (наибольшие и наименьшие) реализации тестовой статистики.

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ .
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.
- Задается уровень значимости теста α (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика $T(X)$, исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область \mathcal{T}_α , то есть $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$.
- Как правило критическая область \mathcal{T}_α подбирается таким образом, чтобы в нее входили экстремальные (наибольшие и наименьшие) реализации тестовой статистики.
- Например, если по выборке из нормального распределения тестируется гипотеза $H_0 : \mu = \mu_0$ с помощью статистики $T(X) = \bar{X}_n$, то интуиция подсказывает целесообразность отклонения нулевой гипотезы когда выборочное среднее \bar{X}_n окажется намного больше или намного меньше предполагаемого математического ожидания μ_0 .

Тестирование гипотез

Краткое повторение структуры параметрического теста

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из некоторого распределения D_X с вектором параметров θ .
- Формулируются нулевая и альтернативные гипотезы: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.
- Задается уровень значимости теста α (вероятность совершить ошибку первого рода) и подбирается тестовая статистика $T(X)$, исходя из распределения которой (при условии верной нулевой гипотезы) задается критическая область \mathcal{T}_α , то есть $P(T(X) \in \mathcal{T}_\alpha | H_0) = \alpha$.
- Как правило критическая область \mathcal{T}_α подбирается таким образом, чтобы в нее входили экстремальные (наибольшие и наименьшие) реализации тестовой статистики.
- Например, если по выборке из нормального распределения тестируется гипотеза $H_0 : \mu = \mu_0$ с помощью статистики $T(X) = \bar{X}_n$, то интуиция подсказывает целесообразность отклонения нулевой гипотезы когда выборочное среднее \bar{X}_n окажется намного больше или намного меньше предполагаемого математического ожидания μ_0 .
- Если мы, например, тестируем гипотезу о математическом ожидании зарплаты случайно взятого индивида, то нулевая гипотеза будет отклоняться, если наблюдаемая по результатам опроса средняя зарплата намного больше или меньше предполагаемой.

Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.

Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.

Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) > c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty)$ именуется **правосторонней**.

Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) > c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty)$ именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_{\alpha/2}$ и $T(X) > c_{1-\alpha/2}$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_{\alpha/2}) \cup (c_{1-\alpha/2}, \infty)$ именуется **двухсторонней**.

Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|H_0$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) > c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty)$ именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_{\alpha/2}$ и $T(X) > c_{1-\alpha/2}$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_{\alpha/2}) \cup (c_{1-\alpha/2}, \infty)$ именуется **двухсторонней**.
- Для соответствующих критических областей довольно просто считать p-value:

$$\text{Левосторонняя: } p\text{-value} = F_{T(X)|H_0}(T(x))$$

Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|_{H_0}$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) > c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty)$ именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_{\alpha/2}$ и $T(X) > c_{1-\alpha/2}$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_{\alpha/2}) \cup (c_{1-\alpha/2}, \infty)$ именуется **двухсторонней**.
- Для соответствующих критических областей довольно просто считать p-value:

Левосторонняя: $p\text{-value} = F_{T(X)|H_0}(T(x))$

Правосторонняя: $p\text{-value} = 1 - F_{T(X)|H_0}(T(x))$

Тестирование гипотез

Левосторонняя, двухсторонняя, и правосторонняя критические области

- Обозначим через c_q квантиль уровня q тестовой статистики при условии верной нулевой гипотезы, то есть $T(X)|_{H_0}$.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_\alpha)$ именуется **левосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) > c_\alpha$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (c_{1-\alpha}, \infty)$ именуется **правосторонней**.
- Если нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α при $T(X) < c_{\alpha/2}$ и $T(X) > c_{1-\alpha/2}$, то критическая область $\mathcal{T}_\alpha = (-\infty, c_{\alpha/2}) \cup (c_{1-\alpha/2}, \infty)$ именуется **двухсторонней**.
- Для соответствующих критических областей довольно просто считать p-value:

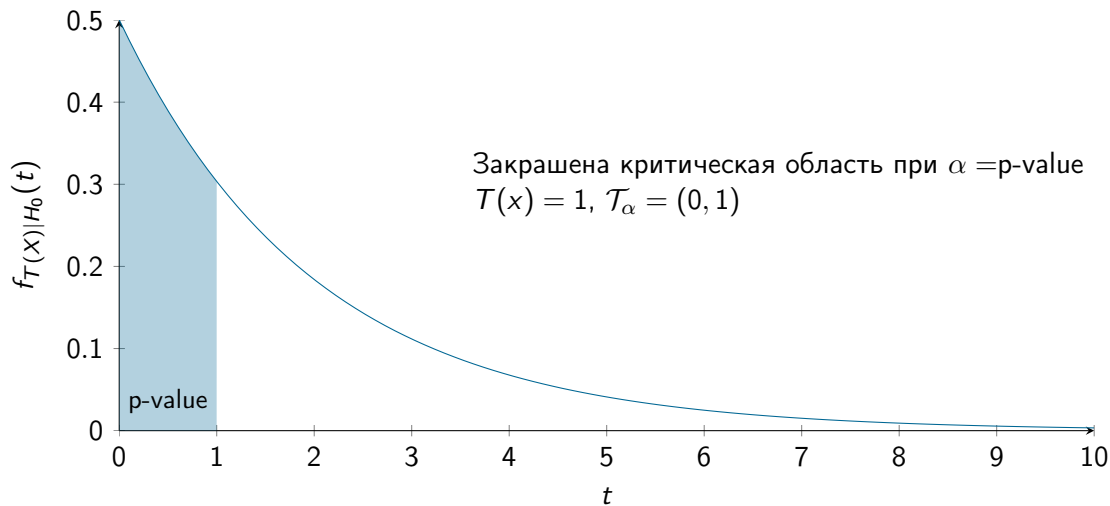
Левосторонняя: $\text{p-value} = F_{T(X)|_{H_0}}(T(x))$

Правосторонняя: $\text{p-value} = 1 - F_{T(X)|_{H_0}}(T(x))$

Двухсторонняя: $\text{p-value} = 2 \min(F_{T(X)|_{H_0}}(T(x)), 1 - F_{T(X)|_{H_0}}(T(x)))$

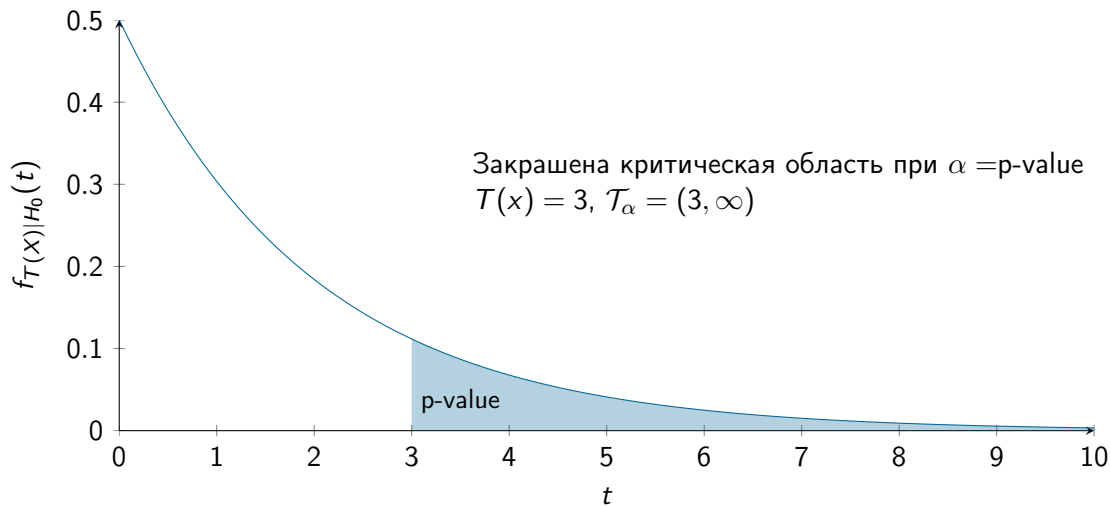
Тестирование гипотез

Левосторонняя критическая область, графическая иллюстрация



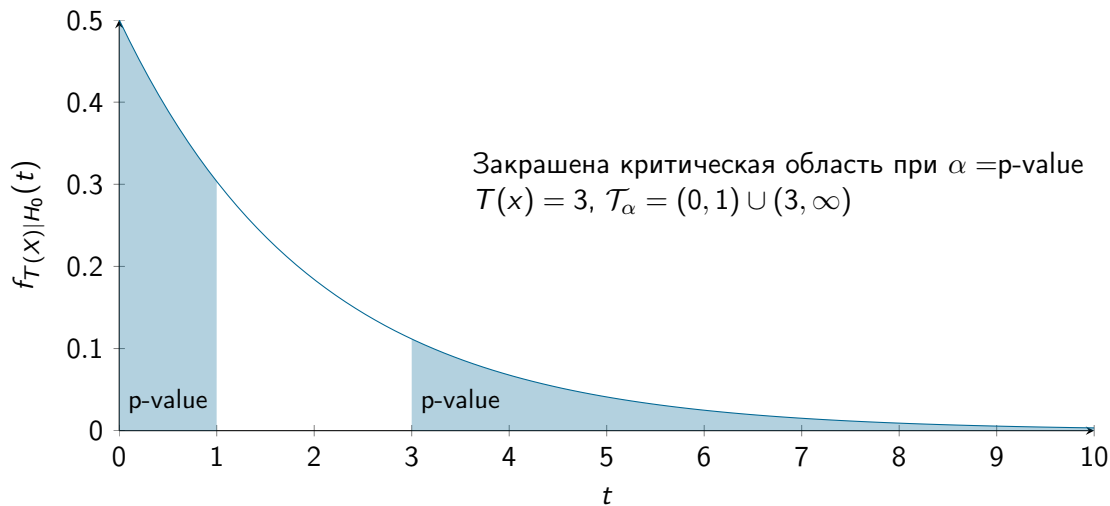
Тестирование гипотез

Правосторонняя критическая область, графическая иллюстрация



Тестирование гипотез

Двухсторонняя критическая область, графическая иллюстрация



Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с неизвестными параметрами.

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu = \mu_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}}, \quad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu = \mu_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}}, \quad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через $t_{n-1,q}$ обозначая квантиль уровня q распределения $t(n-1)$:

| Тип | Левосторонняя | Двухсторонняя | Правосторонняя |
|----------------------|--------------------------------|--|------------------------------|
| Гипотеза | $H_1 : \mu < \mu_0$ | $H_1 : \mu \neq \mu_0$ | $H_1 : \mu > \mu_0$ |
| \mathcal{T}_α | $(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha})$ | $(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha/2}) \cup (t_{n-1,1-\alpha/2}, \infty)$ | $(t_{n-1,1-\alpha}, \infty)$ |
| p-value | $F_{t(n-1)}(T(x))$ | $2 \min(F_{t(n-1)}(T(x)), 1 - F_{t(n-1)}(T(x)))$ | $1 - F_{t(n-1)}(T(x))$ |

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Пример

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p -value теста.

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Пример

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 6$ и $H_1 : \mu < 6$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Пример

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 6$ и $H_1 : \mu < 6$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3-1,0.95} = t_{2,0.95} \approx 2.92$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$.

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Пример

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 6$ и $H_1 : \mu < 6$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3-1, 0.95} = t_{2, 0.95} \approx 2.92$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$.
- Так как $\bar{x}_3 = 5$ и $\hat{\sigma}_3^2(x) = 4$, то $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{4/3}} \approx -0.866$.

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Пример

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 6$ и $H_1 : \mu < 6$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3-1, 0.95} = t_{2, 0.95} \approx 2.92$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$.
- Так как $\bar{x}_3 = 5$ и $\hat{\sigma}_3^2(x) = 4$, то $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{4/3}} \approx -0.866$.
- В силу того, что $-0.866 \notin (-\infty, -2.92)$, нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.

Гипотеза о математическом ожидании: нормальная выборка

Пример

Температура случайно взятого напитка хорошо описывается нормальным распределением. Лаврентий выпил три напитка, температуры которых составили 5, 7 и 3 градусов. На 5%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что математическое ожидание температуры случайно взятого напитка равняется 6-ти градусам, против альтернативы о том, что ожидаемая температура случайного напитка холоднее. Также, посчитаем p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 6$ и $H_1 : \mu < 6$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3-1, 0.95} = t_{2, 0.95} \approx 2.92$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -2.92)$.
- Так как $\bar{x}_3 = 5$ и $\hat{\sigma}_3^2(x) = 4$, то $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{4/3}} \approx -0.866$.
- В силу того, что $-0.866 \notin (-\infty, -2.92)$, нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.
- Наконец, $p\text{-value} = F_{t(2)}(-0.866) \approx 0.239$, а значит нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 23.9%, например, на 30%-м (10%-м).

Гипотеза о математическом ожидании

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 .

Гипотеза о математическом ожидании

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 .
- При большом $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu = \mu_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Гипотеза о математическом ожидании

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения с конечными математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 .
- При большом $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu = \mu_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

| Тип | Левосторонняя | Двухсторонняя | Правосторонняя |
|----------------------|----------------------------|--|--------------------------|
| Гипотеза | $H_1 : \mu < \mu_0$ | $H_1 : \mu \neq \mu_0$ | $H_1 : \mu > \mu_0$ |
| \mathcal{T}_α | $(-\infty, -z_{1-\alpha})$ | $(-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$ | $(z_{1-\alpha}, \infty)$ |
| p-value | $\Phi(T(x))$ | $2 \min(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x)))$ | $1 - \Phi(T(x))$ |

Гипотеза о математическом ожидании

Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

Гипотеза о математическом ожидании

Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 8$ и $H_1 : \mu > 8$, где $E(X_1) = \mu$.

Гипотеза о математическом ожидании

Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 8$ и $H_1 : \mu > 8$, где $E(X_1) = \mu$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$.

Гипотеза о математическом ожидании

Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 8$ и $H_1 : \mu > 8$, где $E(X_1) = \mu$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$.
- Так как $\bar{x}_{30} = 300/30 = 10$ и $\hat{\sigma}_{30}^2(x) = 50$, то $T(x) = \frac{(10-8)}{\sqrt{50/30}} \approx 1.55$.

Гипотеза о математическом ожидании

Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 8$ и $H_1 : \mu > 8$, где $E(X_1) = \mu$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$.
- Так как $\bar{x}_{30} = 300/30 = 10$ и $\hat{\sigma}_{30}^2(x) = 50$, то $T(x) = \frac{(10-8)}{\sqrt{50/30}} \approx 1.55$.
- В силу того, что $1.55 \in (1.28, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 10%-м уровне значимости.

Гипотеза о математическом ожидании

Пример

Продолжительность сна ученого кота хорошо описывается экспоненциальным распределением. За месяц (30 дней) общая продолжительность сна ученого кота составила 300 часов, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 50. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что ожидаемая продолжительность сна ученого кота составляет 8 часов, против альтернативы о том, что в среднем он спит дольше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu = 8$ и $H_1 : \mu > 8$, где $E(X_1) = \mu$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.9} \approx 1.28$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.1} = (1.28, \infty)$.
- Так как $\bar{x}_{30} = 300/30 = 10$ и $\hat{\sigma}_{30}^2(x) = 50$, то $T(x) = \frac{(10-8)}{\sqrt{50/30}} \approx 1.55$.
- В силу того, что $1.55 \in (1.28, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, $p\text{-value} = 1 - \Phi(1.55) \approx 0.06$, а значит нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 6%, например, на 15%-м (5%-м).

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из распределений с конечными математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и дисперсиями σ_X^2, σ_Y^2 .

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из распределений с конечными математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и дисперсиями σ_X^2, σ_Y^2 .
- При больших $n \geq 30$ и $m \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}_X^2/n + \hat{\sigma}_Y^2/m}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из распределений с конечными математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и дисперсиями σ_X^2, σ_Y^2 .
- При больших $n \geq 30$ и $m \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью T_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}_X^2/n + \hat{\sigma}_Y^2/m}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

| Тип | Левосторонняя | Двухсторонняя | Правосторонняя |
|------------|----------------------------|--|--------------------------|
| Гипотеза | $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ | $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ | $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ |
| T_α | $(-\infty, -z_{1-\alpha})$ | $(-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$ | $(z_{1-\alpha}, \infty)$ |
| p-value | $\Phi(T(x))$ | $2 \min(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x)))$ | $1 - \Phi(T(x))$ |

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p -value.

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, где $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, где $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.01$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.995} \approx 2.58$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, где $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.01$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.995} \approx 2.58$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$.
- Так как $n = m = 100$, $\bar{x}_{100} = 5$, $\bar{y}_{100} = 6$, $\hat{\sigma}_X^2(x) = 9$ и $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 7$, то $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{9/100+7/100}} = -2.5$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, где $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.01$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.995} \approx 2.58$, откуда получаем критическую область $T_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$.
- Так как $n = m = 100$, $\bar{x}_{100} = 5$, $\bar{y}_{100} = 6$, $\hat{\sigma}_X^2(x) = 9$ и $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 7$, то $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{9/100+7/100}} = -2.5$.
- В силу того, что $-2.5 \notin (-\infty, -2.58)$, нулевая гипотеза не отвергается на 1%-м уровне значимости.

Гипотеза о разнице математических ожиданий

Пример

На программе обучаются 100 студентов. Средняя оценка по статистике оказалась равна 5, а по эконометрике – 6. Реализации исправленных выборочных дисперсий оценок за эти курсы оказались равны 9 и 7 соответственно. На уровне значимости 1% проверим гипотезу о равенстве ожидаемых оценок за рассматриваемые курсы против альтернативы о том, что соответствующие математические ожидания не равны. Также, рассчитаем p-value.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, где $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.01$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.995} \approx 2.58$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.99} = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$.
- Так как $n = m = 100$, $\bar{x}_{100} = 5$, $\bar{y}_{100} = 6$, $\hat{\sigma}_X^2(x) = 9$ и $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 7$, то $T(x) = \frac{(5-6)}{\sqrt{9/100+7/100}} = -2.5$.
- В силу того, что $-2.5 \notin (-\infty, -2.58)$, нулевая гипотеза не отвергается на 1%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = 2 \min(\Phi(-2.5), 1 - \Phi(-2.5)) \approx 2 \min(0.0062, 0.9938) = 2 \times 0.0062 = 0.0124$$

Поскольку p-value = 0.0124, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 1.24%, например, на 5%-м (1%-м).

Гипотеза о доле

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.

Гипотеза о доле

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.
- При $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : p = p_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Гипотеза о доле

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.
- При $n \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : p = p_0$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

| Тип | Левосторонняя | Двухсторонняя | Правосторонняя |
|----------------------|----------------------------|--|--------------------------|
| Гипотеза | $H_1 : p < p_0$ | $H_1 : p \neq p_0$ | $H_1 : p > p_0$ |
| \mathcal{T}_α | $(-\infty, -z_{1-\alpha})$ | $(-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$ | $(z_{1-\alpha}, \infty)$ |
| p-value | $\Phi(T(x))$ | $2 \min(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x)))$ | $1 - \Phi(T(x))$ |

Гипотеза о доле

Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p -value теста.

Гипотеза о доле

Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p = 0.5$ и $H_1 : p > 0.5$, где $X_1 \sim Ber(p)$.

Гипотеза о доле

Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p = 0.5$ и $H_1 : p > 0.5$, где $X_1 \sim Ber(p)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.2$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.8} \approx 0.84$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$.

Гипотеза о доле

Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p = 0.5$ и $H_1 : p > 0.5$, где $X_1 \sim Ber(p)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.2$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.8} \approx 0.84$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$.
- Так как $\bar{x}_{100} = 60/100 = 0.6$ то $T(x) = \frac{(0.6-0.5)}{\sqrt{0.5(1-0.5)/100}} = 2$.

Гипотеза о доле

Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p = 0.5$ и $H_1 : p > 0.5$, где $X_1 \sim Ber(p)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.2$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.8} \approx 0.84$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$.
- Так как $\bar{x}_{100} = 60/100 = 0.6$ то $T(x) = \frac{(0.6-0.5)}{\sqrt{0.5(1-0.5)/100}} = 2$.
- В силу того, что $2 \in (0.84, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 20%-м уровне значимости.

Гипотеза о доле

Пример

Из 100 заказов курьеры доставили вовремя 60. На уровне значимости 20% протестируйте гипотезу о том, что курьеры вовремя доставляют заказ в половине случаев, против альтернативы о том, что заказы приходят вовремя чаще. Также, вычислите p-value теста.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p = 0.5$ и $H_1 : p > 0.5$, где $X_1 \sim Ber(p)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.2$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.8} \approx 0.84$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.2} = (0.84, \infty)$.
- Так как $\bar{x}_{100} = 60/100 = 0.6$ то $T(x) = \frac{(0.6-0.5)}{\sqrt{0.5(1-0.5)/100}} = 2$.
- В силу того, что $2 \in (0.84, \infty)$, нулевая гипотеза отвергается на 20%-м уровне значимости.
- Наконец, $p\text{-value} = 1 - \Phi(2) \approx 0.023$, а значит нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 2.3%, например, на 25%-м (1%-м).

Гипотеза о разности долей

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из распределений Бернулли с параметрами $p_X, p_Y \in (0, 1)$.

Гипотеза о разности долей

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из распределений Бернулли с параметрами $p_X, p_Y \in (0, 1)$.
- При $n \geq 30$ и $m \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : p_X = p_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{Z_{n,m}(1 - Z_{n,m})(1/n + 1/m)}}, \quad Z_{n,m} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{j=1}^m Y_j}{n + m}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Гипотеза о разности долей

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из распределений Бернулли с параметрами $p_X, p_Y \in (0, 1)$.
- При $n \geq 30$ и $m \geq 30$ на уровне значимости α гипотезу $H_0 : p_X = p_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{Z_{n,m}(1 - Z_{n,m})(1/n + 1/m)}}, \quad Z_{n,m} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{j=1}^m Y_j}{n + m}, \quad T(X)|H_0 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через z_q обозначая квантиль уровня q стандартного нормального распределения:

| Тип | Левосторонняя | Двухсторонняя | Правосторонняя |
|----------------------|----------------------------|--|--------------------------|
| Гипотеза | $H_1 : p_X < p_Y$ | $H_1 : p_X \neq p_Y$ | $H_1 : p_X > p_Y$ |
| \mathcal{T}_α | $(-\infty, -z_{1-\alpha})$ | $(-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$ | $(z_{1-\alpha}, \infty)$ |
| p-value | $\Phi(T(x))$ | $2 \min(\Phi(T(x)), 1 - \Phi(T(x)))$ | $1 - \Phi(T(x))$ |

Гипотеза о разности долей

Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

Гипотеза о разности долей

Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_X = p_Y$ и $H_1 : p_X < p_Y$, где $X_1 \sim Ber(p_X)$ и $Y_1 \sim Ber(p_Y)$.

Гипотеза о разности долей

Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_X = p_Y$ и $H_1 : p_X < p_Y$, где $X_1 \sim Ber(p_X)$ и $Y_1 \sim Ber(p_Y)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.95} \approx 1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.

Гипотеза о разности долей

Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_X = p_Y$ и $H_1 : p_X < p_Y$, где $X_1 \sim Ber(p_X)$ и $Y_1 \sim Ber(p_Y)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.95} \approx 1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.
- Так как $\bar{x}_{100} = 70/100 = 0.7$, $\bar{y}_{225} = 180/225 = 0.8$ и $z_{100,225} = (70 + 180)/(100 + 225) \approx 0.77$, то $T(x) = \frac{(0.7-0.8)}{\sqrt{0.77(1-0.77)(1/100+1/225)}} \approx -1.98$.

Гипотеза о разности долей

Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_X = p_Y$ и $H_1 : p_X < p_Y$, где $X_1 \sim Ber(p_X)$ и $Y_1 \sim Ber(p_Y)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.95} \approx 1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.
- Так как $\bar{x}_{100} = 70/100 = 0.7$, $\bar{y}_{225} = 180/225 = 0.8$ и $z_{100,225} = (70 + 180)/(100 + 225) \approx 0.77$, то $T(x) = \frac{(0.7-0.8)}{\sqrt{0.77(1-0.77)(1/100+1/225)}} \approx -1.98$.
- В силу того, что $-1.98 \in (-\infty, -1.65)$, нулевая гипотеза отвергается на 5%-м уровне значимости.

Гипотеза о разности долей

Пример

Из 100 испытуемых, принявших плацебо, выздоровели 70, а из 225 получивших лекарство, поправились 180. На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что лекарство не работает, против альтернативы о том, что оно помогает.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : p_X = p_Y$ и $H_1 : p_X < p_Y$, где $X_1 \sim \text{Ber}(p_X)$ и $Y_1 \sim \text{Ber}(p_Y)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $z_{0.95} \approx 1.65$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.05} = (-\infty, -1.65)$.
- Так как $\bar{x}_{100} = 70/100 = 0.7$, $\bar{y}_{225} = 180/225 = 0.8$ и $z_{100,225} = (70 + 180)/(100 + 225) \approx 0.77$, то $T(x) = \frac{(0.7-0.8)}{\sqrt{0.77(1-0.77)(1/100+1/225)}} \approx -1.98$.
- В силу того, что $-1.98 \in (-\infty, -1.65)$, нулевая гипотеза отвергается на 5%-м уровне значимости.
- Наконец, $p\text{-value} = \Phi(-1.98) \approx 0.024$, а значит нулевая гипотеза на любом уровне значимости, больше (меньше) 2.4%, например, на 5%-м (1%-м).

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с неизвестными параметрами.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2}, \quad T(X)|H_0 \sim \chi^2(n-1)$$

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Формулировка

- Имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2}, \quad T(X)|H_0 \sim \chi^2(n-1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через $\chi_{n-1,q}^2$ обозначая квантиль уровня q распределения $\chi^2(n-1)$:

| Тип | Левосторонняя | Двухсторонняя | Правосторонняя |
|----------------------|-------------------------------|---|-----------------------------------|
| Гипотеза | $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ | $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ | $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ |
| \mathcal{T}_α | $(0, \chi_{n-1,\alpha}^2)$ | $(0, \chi_{n-1,\alpha/2}^2) \cup (\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2, \infty)$ | $(\chi_{n-1,1-\alpha}^2, \infty)$ |
| p-value | $F_{\chi^2(n-1)}(T(x))$ | $2 \min(F_{\chi^2(n-1)}(T(x)), 1 - F_{\chi^2(n-1)}(T(x)))$ | $1 - F_{\chi^2(n-1)}(T(x))$ |

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma^2 = 20$ и $H_1 : \sigma^2 \neq 20$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma^2 = 20$ и $H_1 : \sigma^2 \neq 20$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантили $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$ и $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma^2 = 20$ и $H_1 : \sigma^2 \neq 20$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантили $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$ и $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$, откуда получаем критическую область $T_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}_3^2(x) = 21$, то $T(x) = \frac{(3-1) \times 21}{20} \approx 2.1$.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma^2 = 20$ и $H_1 : \sigma^2 \neq 20$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантили $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$ и $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$, откуда получаем критическую область $T_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}_3^2(x) = 21$, то $T(x) = \frac{(3-1) \times 21}{20} \approx 2.1$.
- В силу того, что $2.1 \notin (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$, нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.

Гипотеза о дисперсии: нормальная выборка

Пример

Прибыль заправки хорошо описывается нормальным распределением. За три дня прибыли составили 1, 10 и 7 соответственно. На 10%-м уровне значимости протестируем гипотезу о том, что дисперсия прибыли равна 20 против альтернативы о том, что она не равняется данному значению.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma^2 = 20$ и $H_1 : \sigma^2 \neq 20$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о двухсторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантили $\chi^2_{2,0.05} \approx 0.103$ и $\chi^2_{2,0.95} \approx 5.99$, откуда получаем критическую область $T_{0.9} = (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}_3^2(x) = 21$, то $T(x) = \frac{(3-1) \times 21}{20} \approx 2.1$.
- В силу того, что $2.1 \notin (0, 0.103) \cup (5.99, \infty)$, нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = 2 \min(F_{\chi^2(2)}(2.1), 1 - F_{\chi^2(2)}(2.1)) \approx 2 \min(0.65, 0.35) = 0.7$$

Поскольку p-value = 0.7, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 70%, например, на 80%-м (50%-м).

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ из нормальных распределений $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ с неизвестными параметрами.

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ из нормальных распределений $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}, \quad T(X)|H_0 \sim F(n-1, m-1)$$

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Формулировка

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ из нормальных распределений $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ с неизвестными параметрами.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}, \quad T(X)|H_0 \sim F(n-1, m-1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через $F_{n-1, m-1}^q$ обозначая квантиль уровня q распределения $F(n-1, m-1)$:

| Тип | Левосторонняя | Двухсторонняя | Правосторонняя |
|----------------------|---------------------------------|---|-------------------------------------|
| Гипотеза | $H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ | $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ | $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ |
| \mathcal{T}_α | $(0, F_{n-1, m-1}^\alpha)$ | $(0, F_{n-1, m-1}^{\alpha/2}) \cup (F_{n-1, m-1}^{1-\alpha/2}, \infty)$ | $(F_{n-1, m-1}^{1-\alpha}, \infty)$ |
| p-value | $F_{F(n-1, m-1)}(T(x))$ | $2 \min(F_{F(n-1, m-1)}(T(x)), 1 - F_{F(n-1, m-1)}(T(x)))$ | $1 - F_{F(n-1, m-1)}(T(x))$ |

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ и $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ и $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $F_{6-1, 11-1}^{0.9} \approx 2.52$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (2.52, \infty)$.

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ и $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $F_{6-1, 11-1}^{0.9} \approx 2.52$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (2.52, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}_X^2(x) = 20$, и $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 10$, то $T(x) = 20/10 = 2$.

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ и $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $F_{6-1, 11-1}^{0.9} \approx 2.52$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (2.52, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}_X^2(x) = 20$, и $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 10$, то $T(x) = 20/10 = 2$.
- В силу того, что $2 \notin (2.52, \infty)$, нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.

Гипотеза о равенстве дисперсий: нормальная выборка

Пример

Доходы в стране хорошо описываются нормальным распределением. По результатам опроса 6 граждан и 11 мигрантов оказалась, что реализация исправленной выборочной дисперсии доходов граждан равна 20, а мигрантов – 10. На уровне значимости 10% протестируем гипотезу о том, что дисперсии доходов граждан и мигрантов совпадают, против альтернативы о том, что у граждан она больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ и $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $F_{6-1, 11-1}^{0.9} \approx 2.52$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (2.52, \infty)$.
- Так как $\hat{\sigma}_X^2(x) = 20$, и $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 10$, то $T(x) = 20/10 = 2$.
- В силу того, что $2 \notin (2.52, \infty)$, нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, поскольку $p\text{-value} = 1 - F_{F(5,10)}(2) = 0.164$, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 16.4%, например, на 20%-м (5%-м).

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из нормальных распределений с математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и равными дисперсиями $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из нормальных распределений с математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и равными дисперсиями $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 (1/n + 1/m)}}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_X^2 + (m-1)\hat{\sigma}_Y^2}{n+m-2}, \quad T(X)|H_0 \sim t(n+m-2)$$

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из нормальных распределений с математическими ожиданиями μ_X, μ_Y и равными дисперсиями $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 (1/n + 1/m)}}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_X^2 + (m-1)\hat{\sigma}_Y^2}{n+m-2}, \quad T(X)|H_0 \sim t(n+m-2)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через $t_{n+m-2,q}$ обозначая квантиль уровня q распределения $t(n+m-2)$:

| Тип | Левосторонняя | Двухсторонняя | Правосторонняя |
|----------------------|----------------------------------|--|--------------------------------|
| Гипотеза | $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ | $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ | $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ |
| \mathcal{T}_α | $(-\infty, -t_{n+m-2,1-\alpha})$ | $(-\infty, -t_{n+m-2,1-\alpha/2}) \cup (t_{n+m-2,1-\alpha/2}, \infty)$ | $(t_{n+m-2,1-\alpha}, \infty)$ |
| p-value | $F_{t(n+m-2)}(T(x))$ | $2 \min(F_{t(n+m-2)}(T(x)), 1 - F_{t(n+m-2)}(T(x)))$ | $1 - F_{t(n+m-2)}(T(x))$ |

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X > \mu_Y$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X > \mu_Y$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3+2-2, 0.95} \approx 2.35$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X > \mu_Y$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3+2-2, 0.95} \approx 2.35$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$.
- Так как $\bar{x}_3 = 3$, $\bar{y}_2 = 3.5$, $\hat{\sigma}_X^2(x) = 1$, $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 4.5$ и $\hat{\sigma}^2 \approx 0.93$, то $T(x) = \frac{(3-3.5)}{\sqrt{0.93 \times (1/3+1/2)}} \approx -0.568$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X > \mu_Y$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3+2-2, 0.95} \approx 2.35$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$.
- Так как $\bar{x}_3 = 3$, $\bar{y}_2 = 3.5$, $\hat{\sigma}_X^2(x) = 1$, $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 4.5$ и $\hat{\sigma}^2 \approx 0.93$, то $T(x) = \frac{(3-3.5)}{\sqrt{0.93 \times (1/3+1/2)}} \approx -0.568$.
- В силу того, что $-0.568 \notin (2.35, \infty)$, нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Объем нефти (в тысячах баррелей), независимо добываемой на каждой из двух скважинах, хорошо описывается нормальными распределениями с равными дисперсиями. На первой скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей нефти, во второй 3 тысячи баррелей, а в третий – 4 тысячи баррелей. На второй скважине в первый день добыли 2 тысячи баррелей, а во второй – 5 тысяч. На уровне значимости 5% протестируем гипотезу о том, что в среднем на обеих скважинах добывается равный объем нефти, против альтернативы о том, что на первой скважине добывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X > \mu_Y$, где $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$.
- Поскольку речь идет о правосторонней критической области и $\alpha = 0.05$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{3+2-2, 0.95} \approx 2.35$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.95} = (2.35, \infty)$.
- Так как $\bar{x}_3 = 3$, $\bar{y}_2 = 3.5$, $\hat{\sigma}_X^2(x) = 1$, $\hat{\sigma}_Y^2(y) = 4.5$ и $\hat{\sigma}^2 \approx 0.93$, то $T(x) = \frac{(3-3.5)}{\sqrt{0.93 \times (1/3 + 1/2)}} \approx -0.568$.
- В силу того, что $-0.568 \notin (2.35, \infty)$, нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = 1 - F_{t(3)}(-0.568) \approx 0.695$$

Поскольку p-value = 0.695, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 69.5%, например, на 80%-м (60%-м).

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных объемах

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, такие, что $X - Y$ является выборкой из нормального распределения. Обозначим $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных объемах

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, такие, что $X - Y$ является выборкой из нормального распределения. Обозначим $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_n}{\sqrt{\hat{\sigma}_{X-Y}^2/n}}, \quad \hat{\sigma}_{X-Y}^2 \text{ считается по выборке } X - Y, \quad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных объемах

Формулировка для выборки из нормального распределения

- Имеются выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, такие, что $X - Y$ является выборкой из нормального распределения. Обозначим $E(X_1) = \mu_X$ и $E(Y_1) = \mu_Y$.
- На уровне значимости α гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ можно протестировать с помощью следующей тестовой статистики с критической областью \mathcal{T}_α :

$$T(X) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_n}{\sqrt{\hat{\sigma}_{X-Y}^2/n}}, \quad \hat{\sigma}_{X-Y}^2 \text{ считается по выборке } X - Y, \quad T(X)|H_0 \sim t(n-1)$$

- Рассмотрим несколько типов альтернативных гипотез, через $t_{n-1,q}$ обозначая квантиль уровня q распределения $t(n-1)$:

| Тип | Левосторонняя | Двухсторонняя | Правосторонняя |
|----------------------|--------------------------------|--|------------------------------|
| Гипотеза | $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ | $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ | $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ |
| \mathcal{T}_α | $(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha})$ | $(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha/2}) \cup (t_{n-1,1-\alpha/2}, \infty)$ | $(t_{n-1,1-\alpha}, \infty)$ |
| p-value | $F_{t(n-1)}(T(x))$ | $2 \min(F_{t(n-1)}(T(x)), 1 - F_{t(n-1)}(T(x)))$ | $1 - F_{t(n-1)}(T(x))$ |

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X < \mu_Y$, где $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_{X-Y}^2)$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X < \mu_Y$, где $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_{X-Y}^2)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{2-1,0.9} \approx 3.08$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X < \mu_Y$, где $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_{X-Y}^2)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{2-1, 0.9} \approx 3.08$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$.
- Так как $x - y = (-60, 10)$, $\bar{x}_2 - \bar{y}_2 = -25$ и $\hat{\sigma}_{X-Y}^2 = 2450$, то $T(x) = \frac{-25}{\sqrt{2450/2}} \approx -0.71$.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X < \mu_Y$, где $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_{X-Y}^2)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{2-1, 0.9} \approx 3.08$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$.
- Так как $x - y = (-60, 10)$, $\bar{x}_2 - \bar{y}_2 = -25$ и $\hat{\sigma}_{X-Y}^2 = 2450$, то $T(x) = \frac{-25}{\sqrt{2450/2}} \approx -0.71$.
- В силу того, что $-0.71 \notin (-\infty, -3.08)$, нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.

Гипотеза о разнице математических ожиданий при равных дисперсиях

Пример

Разница в доходах мужей и жен хорошо описывается нормальным распределением. В первой семейной паре муж зарабатывал 50 тысяч рублей, а жена – 110 тысяч рублей. Во второй семейной паре муж зарабатывал на 10 тысяч рублей больше, чем жена. На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что средние заработки мужей и жен равны, против альтернативы о том, что в среднем жены зарабатывают больше.

- Формализуем гипотезы: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X < \mu_Y$, где $(X_1 - Y_1) \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_{X-Y}^2)$.
- Поскольку речь идет о левосторонней критической области и $\alpha = 0.1$, то необходимо рассмотреть квантиль $t_{2-1, 0.9} \approx 3.08$, откуда получаем критическую область $\mathcal{T}_{0.9} = (-\infty, -3.08)$.
- Так как $x - y = (-60, 10)$, $\bar{x}_2 - \bar{y}_2 = -25$ и $\hat{\sigma}_{X-Y}^2 = 2450$, то $T(x) = \frac{-25}{\sqrt{2450/2}} \approx -0.71$.
- В силу того, что $-0.71 \notin (-\infty, -3.08)$, нулевая гипотеза не отвергается на 10%-м уровне значимости.
- Наконец, рассчитаем p-value:

$$\text{p-value} = F_{t(1)}(-0.71) \approx 0.3$$

Поскольку p-value = 0.3, то нулевая гипотеза (не) отвергается на любом уровне значимости, больше (меньше) 30%, например, на 90%-м (20%-м).