Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2021-2022

Дедлайн: домашнее задание отправляется в **pdf** формате на почту семинариста. В копию письма необходимо поставить ассистента группы.

Почты семинаристов, на которые следует отправлять домашние задания:

1. Погорелова Полина Вячеславовна – tvis.we.2021@gmail.com (группы 202 и 203)
2. Потанин Богдан Станиславович – studypotanin@gmail.com (группа 201)
3. Слаболицкий Илья Сергеевич – tvis.fweia.hse@gmail.com (группы 204, 205 и 206)

https://www.overleaf.com/project/6149fc1fb5e5d12aceae0ee1

Почты ассистентов, на которые следует продублировать домашнее задание (поставить в копию при отправке):

1. Романова Дарья Юрьевна – dyuromanova_1@edu.hse.ru (группа 201)
2. Афонина Ангелина Геннадьевна – agafonina@edu.hse.ru (группа 202)
3. Макаров Антон Андреевич – aamakarov_5@edu.hse.ru (группа 203)
4. Атласов Александр Александрович – aaatlasov@edu.hse.ru (группа 204)
5. Костромина Алина Максимовна – amkostromina@edu.hse.ru (группа 205)
6. Краевский Артем Андреевич – aakraevskiy@edu.hse.ru (группа 206)

Домашнее задание должно быть отправлено на указанные почты в **pdf** формате до **27.09.2021, 8.00 (утра)** включительно (по московскому времени). Тема письма должна иметь следующий формат: "МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ", например, "МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 1".

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №1

Дискретное вероятностное пространство и условная вероятность

Задание №1. Волк и поросята. (30 баллов)

Волк пытается сдувать дома поросят. Известно, что 20% поросят живут в соломенных домах, 30% – в деревянных, а остальные – в каменных. Волк гарантированно сдувает соломенный дом и не может сдуть каменный. Деревянный дом волк может сдуть с вероятностью 0.6. Если Волку не удается сдуть дом, то он пытается проникнуть в него через трубу (которая есть в каждом доме). Вероятность успешного проникновения, независимо от типа дома, составляет 0.1.

1. Найдите вероятность того, что волку не удастся сдуть домик поросенка. **(5 баллов)**

2. Рассчитайте условную вероятность того, что поросенок живет в деревянном доме, если известно, что волку не удалось сдуть этот дом. **(5 баллов)**

3. Рассчитайте условную вероятность того, что поросенок живет в каменном доме, если известно, что волку удалось проникнуть в этот дом через трубу. **(5 баллов)**

4. Волк дважды пытается сдуть домик одного и того же поросенка. Найдите вероятность того, что в результате волку не удастся сдуть домик этого поросенка. **(5 баллов)**

5. Вычислите условную вероятность, с которой поросенок проживает в каменном доме, если известно, что обе попытки волка сдуть этот дом оказались неудачными. **(10 баллов)**

Примечание: ни один поросенок не пострадал, поскольку их дома были выгодно застрахованы, а волк – оказался вегетарианцем и проникал в дома через трубу для того, чтобы вручить поросятам подарки, так как подменял Санта-Клауса.

Решение

1. Через D_1, D_2 и D_3 обозначим события, в соответствии с которыми столкнувшийся с Волком поросенок проживает в соломенном, деревянном и каменном доме соответственно. Из условия следует, что $P(D_1) = 0.2$, $P(D_2) = 0.3$ и $P(D_3) = 0.5$. Обозначим через S событие, при котором волку удается успешно сдуть домик поросенка. По условию $P(S|D_1) = 1$, $P(S|D_1) = 0.6$ и $P(S|D_1) = 0$.

   Применяя формулу полной вероятности получаем, что:

$$P(S) = P(S|D_1)P(D_1) + P(S|D_2)P(D_2) + P(S|D_3)P(D_3) =$$
$$= 1 \times 0.2 + 0.6 \times 0.3 + 0 \times 0.5 = 0.38$$

   Используя формулу вероятности обратного события получаем искомую вероятность:

$$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.38 = 0.62$$

2. Вследствие формулы условной вероятности получаем:

$$P(D_2|\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}|D_2)P(D_2)}{P(\overline{S})} = \frac{(1-P(S|D_2))P(D_2)}{P(\overline{S})} =$$
$$= \frac{(1-0.6)\times 0.3}{0.62} = \frac{6}{31} \approx 0.19$$

3. Обозначим через T событие, при котором волк успешно проникает в дом поросенка через трубу. Сперва рассчитаем вероятность данного события с помощью формулы полной вероятности:

$$P(T) = P(T|S)P(S) + P(T|\overline{S})P(\overline{S}) = 0\times 0.38 + 0.1\times 0.62 = 0.062$$

По формуле условной вероятности получаем:

$$P(D_3|T) = \frac{P(T|D_3)P(D_3)}{P(T)} = \frac{0.1\times 0.5}{0.062} = \frac{25}{31} \approx 0.81$$

4. Через S_1 и S_2 обозначим события, при которых первая и вторая попытки сдуть дом соответственно оказываются успешными. Вероятность того, что обе попытки окажутся неудачными, вследствие формулы полной вероятности и формулы вероятности пересечения событий составит:

$$P(\overline{S}_1\cap\overline{S}_2) = P(\overline{S}_1\cap\overline{S}_2|D_1)P(D_1) + P(\overline{S}_1\cap\overline{S}_2|D_2)P(D_2) + P(\overline{S}_1\cap\overline{S}_2|D_3)P(D_3) =$$
$$= P(\overline{S}_2|D_1\cap\overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_1)P(D_1) + P(\overline{S}_2|D_2\cap\overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_2)P(D_2) +$$
$$+ P(\overline{S}_2|D_3\cap\overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_3)P(D_3) = 0\times 0\times 0.2 + 0.4\times 0.4\times 0.3 + 1\times 1\times 0.5 = 0.548$$

5. Применяя формулу условной вероятности получаем:

$$P(D_3|\overline{S}_1\cap\overline{S}_2) = \frac{P(\overline{S}_1\cap\overline{S}_2|D_3)P(D_3)}{P(\overline{S}_1\cap\overline{S}_2)} = \frac{P(\overline{S}_2|D_3\cap\overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_3)P(D_3)}{P(\overline{S}_1\cap\overline{S}_2)} =$$
$$= \frac{1\times 1\times 0.5}{0.548} = \frac{125}{152} \approx 0.91$$

Проверка в R:

```
# Число симуляций
n <- 1000000
# Вероятность наткнуться на тот или иной домик
p.house <- c(0.2, 0.3, 0.5)
# Вероятность сдуть тот или иной домик
p.blow <- c(1, 0.6, 0)
# Вероятность проникнуть в трубу (когда сдуть не получилось)
p.tube <- 0.1
# Назначаем домики поросятам
```

```
house <- sample(1:3, n, replace = TRUE, prob = p.house)
# Волк пытается сдуть домик
is.blow <- (runif(n) <= p.blow[house])
# Волк повторно пытается сдуть домик
is.blow2 <- (runif(n) <= p.blow[house])
# Волк пытается пролезть в трубу
is.tube <- rep(FALSE, n)
is.tube[!is.blow] <- runif(sum(!is.blow)) <= p.tube
# пункт 1
1 - mean(is.blow)
# пункт 2
mean((house == 2)[!is.blow])
# пункт 3
mean((house == 3)[is.tube])
# пункт 4
mean(!(is.blow | is.blow2))
# пункт 5
mean((house == 3)[!(is.blow | is.blow2)])
```

Задание №2. Футбольная разминка. (15 баллов)

Перед началом футбольного матча трое футболистов разминаются, отдавая друг другу пасы (одним и тем же мячом). Каждый раз первый футболист отдает пас второму с вероятностью 0.3, второй отдает пас третьему с вероятностью 0.4, а третий футболист отдает пас только первому. Изначально мяч находится у первого футболиста. Найдите вероятность того, что на протяжении ста пасов (включительно):

1. Мяч хотя бы раз окажется у третьего футболиста. **(5 баллов)**
2. Мяч окажется у третьего футболиста ровно один раз. **(10 баллов)**

Примечание: ответ можно представить в форме суммы и произведения возведенных в степени чисел (досчитывать соответствующее выражение не обязательно, поскольку оно может быть равно крайне малому числу).

Решение:

1. Через i_j обозначим событие, в соответствии с которым после j-го паса мяч оказывается у i-го игрока. Сперва найдем вероятность обратного события. При этом обратим внимание, что вероятность того, что на протяжении 100 пасов мяч ни разу не окажется у третьего игрока равняется вероятности того, первый и второй игроки будут пасоваться между собой. Применяя формулу пересечения событий получаем:

$$P(2_1 \cap 1_2 \cap 2_3 \cap 1_4 \cap 2_5 \cap \dots \cap 1_{100}) =$$
$$= P(2_1)P(1_2|2_1)P(2_3|2_1 \cap 1_2) \times \dots \times P(1_{100}|2_1 \cap 1_2 \cap 2_3 \cap 1_4 \cap 2_5 \cap \dots \cap 2_{99}) =$$
$$= 0.3 \times 0.6 \times 0.3 \times 0.6 \times \cdots 0.3 \times 0.6 = 0.3^{50}0.6^{50} = 0.18^{50}$$

Используя формулу вероятности обратного события получаем искомую вероятность:

$$P(\overline{2_1 \cap 1_2 \cap 2_3 \cap 1_4 \cap 2_5 \cap \cdots \cap 1_{100}}) = 1 - P(2_1 \cap 1_2 \cap 2_3 \cap 1_4 \cap 2_5 \cap \cdots \cap 1_{100}) = 1 - 0.18^{50}$$

2. Обратим внимание, что до того, как мяч оказывается у третьего футболиста, его будут пасовать между собой первый и второй футболисты. Пусть k – номер паса, после которого мяч окажется у третьего футболиста. Если $k < 100$ и k не четное (на что приходится 50 возможных случаев), то с учетом того, что мяч ровно один раз окажется у третьего футболиста, первый футболист отдаст 49 пасов второму футболисту, а второй футболист – столько же пасов первому. Также, первый футболист отдаст один пас третьему, а третий – один раз второму. Нетрудно посчитать, по аналогии с предыдущим пунктом, вероятность соответствующего события:

$$\underset{1\to2}{0.3} \times \underset{2\to1}{0.6} \times \cdots \times \underset{2\to3}{0.7} \times \underset{3\to1}{1} \times \underset{1\to2}{0.3} \times \cdots \times \underset{2\to1}{0.6} = 0.3^{49}0.6^{49}0.7$$

Теперь предположим, что $k < 100$ и k – четное (на что приходится 49 возможных случаев). В таком случае второй футболист получит 50 пасов от первого, а первый – 48 пасов от второго. Также, пас третьему футболист передаст второй. Вероятность описанного события составляет:

$$\underset{1\to2}{0.3} \times \underset{2\to1}{0.6} \times \cdots \times \underset{2\to3}{0.4} \times \underset{3\to1}{1} \times \underset{1\to2}{0.3} \times \cdots \times \underset{2\to1}{0.6} = 0.3^{50}0.6^{48}0.4$$

Остается учесть еще один случай, при котором третий футболист получает мяч в самом конце, то есть $k = 1$. В таком случае второй футболист получит 50 пасов от первого, а первый – 49 пасов от второго. При этом в самом конце второй футболист один раз передаст пас третьему, вероятность чего составит:

$$\underset{1\to2}{0.3} \times \underset{2\to1}{0.6} \times \cdots \times \underset{2\to3}{0.7} = 0.3^{50}0.6^{49}0.4$$

Поскольку мы описали несовместные события, объединение которых эквивалентно событию, при котором мяч ровно один раз оказывается у третьего футболиста, то искомая вероятность окажется равна сумме соответствующих событий:

$$50 \times 0.3^{49}0.6^{49}0.7 + 49 \times 0.3^{50}0.6^{48}0.4 + 0.3^{50}0.6^{49}0.4$$

Проверка в R:

```
# Проверку осуществим для случая 10 пасов
# В противном случае числа получатся слишком маленькими
# и нам понадобится чрезвычайно много симуляций для
# получения ответа
# В задании большое число пасов обусловлено необходимостью
# предотвратить возможность решения задачи путем перебора
options(scipen = 999)
# Определяем число симуляций
n <- 100000
```

```
# Задаем количество пасов
n.pass <- 10
# Вектор для сохранения игроков
player <- rep(1, n.pass + 1)
# Проверяем, был ли дан пас третьему игроку хотя бы раз
player3.atleast.once <- rep(FALSE, n)
# Проверяем, был ли дан пас третьему игроку ровно один раз
player3.once <- rep(FALSE, n)
# Воспроизводим пасы
for (i in 1:n)
{
  for (j in 2:(n.pass + 1))
  {
    # Первый игрок отдает пас второму или третьему
    if (player[j - 1] == 1)
    {
      player[j] <- ifelse(runif(1) <= 0.3, 2, 3)
    }

    # Второй игрок отдает пас третьему или первому
    if (player[j - 1] == 2)
    {
      player[j] <- ifelse(runif(1) <= 0.4, 3, 1)
    }

    # Третий игрок отдает пас первому
    if (player[j - 1] == 3)
    {
      player[j] <- 1
    }
  }
  # Проверяем условия для третьего игрока
  player3.atleast.once[i] <- any(player[-1] == 3)
  player3.once[i] <- (sum(player[-1] == 3) == 1)
}
# пункт 1
  # аналитическая формула
(0.3 * 0.6) ^ 5
  # оценка по симуляциям
1 - mean(player3.atleast.once)
# пункт 2
  # аналитическая формула
(n.pass / 2) * (0.3 ^ (n.pass / 2 - 1)) * (0.6 ^ (n.pass / 2 - 1)) * 0.7 +
(n.pass / 2 - 1) * (0.3 ^ (n.pass / 2)) * (0.6 ^ (n.pass / 2 - 2)) * 0.4 +
(0.3 ^ (n.pass / 2))* (0.6 ^ (n.pass / 2 - 1)) * 0.4
  # оценка по симуляциям
mean(player3.once)
```

Задание №3. Прогнозирование финансового кризиса. (30 баллов)

Вероятность наступления финансового кризиса равняется 0.1. Независимо от того, произойдет финансовый кризис или нет, Аналитик Борис дает верный прогноз наступления финансового кризиса с вероятностью 0.6. Аналитик Елена верно прогнозирует наступление финансового кризиса с вероятностью 0.8. При этом она никогда не делает верный прогноз финансового кризиса в случае, если он действительно должен наступить. Борис и Елена никак не ориентируются на прогнозы друг друга. Однако, аналитик Лаврентий, также осуществляющий прогноз финансового кризиса, либо копирует прогноз Бориса, либо повторяет прогноз Елены, в зависимости от того, выпадет на его правильной монетке орел или решка соответственно.

Примечание: следует различать **предсказание (прогноз) кризиса** и **верный прогноз (предсказание) кризиса**. В первом случае предполагается, что аналитик утверждает, что кризис наступит. Во втором случае подразумевается, что аналитик утверждает, что кризис наступит и тот действительно наступает, либо что кризис не наступит и кризис действительно не наступает.

1. Запишите три различных элементарных исхода, соответствующие случайному эксперименту, результатом которого является как сам факт наступления (или не наступления) финансового кризиса, так и прогнозы (предсказания) аналитиков. **(2 балла)**

2. Рассчитайте вероятность того, что Лаврентий сделает верный прогноз. Предварительно запишите соответствующее событие как объединение двух (произвольных) несовместных событий, каждое из которых может произойти с ненулевой вероятностью. **(5 баллов)**

3. Найдите вероятность, с которой Борис предскажет кризис. **(3 балла)**

4. Вычислите вероятность, с которой Елена предскажет кризис, при условии, что кризис не наступит. **(5 баллов)**

5. Рассчитайте вероятность, с которой Елена предскажет кризис. **(3 балла)**

6. Посчитайте вероятность, с которой Лаврентий спрогнозирует наступление кризиса. **(5 баллов)**

7. Определите вероятность, с которой прогнозы всех трех аналитиков совпадут. **(5 баллов)**

8. Найдите вероятность того, что Лаврентий скопировал прогноз Елены, при условии, что прогноз Лаврентия оказался верным. **(2 балла)**

Решение:

1. Запишем три различных элементарных события:

$$\omega_1 = \{c, c_B, c_E, c_L\}$$

$$\omega_2 = \{\overline{c}, c_B, c_E, c_L\}$$

$$\omega_3 = \{\overline{c}, \overline{c}_B, c_E, c_L\}$$

где:
c – наступил кризис
$\overline{c}$ – не наступил кризис
c_B – Борис предсказал кризис
$\overline{c}_B$ – Борис не предсказал кризис
c_E – Елена предсказала кризис
c_L – Лаврентий предсказал кризис

Отметим, что для описания элементарных событий вместо предсказания кризиса можно использовать факт верного или неверного прогноза.

2. Через V_B, V_E и V_L обозначим события, при которых Борис, Елена и Лаврентий соответственно дают верный прогноз. Обозначим через L_B и L_E события, при которых Лаврентий копирует прогнозы Бориса и Елены соответственно.

   Лаврентий даст верный прогноз V_L, если он скопирует верный прогноз Бориса $V_B \cap L_B$ или повторит верный прогноз Елены $V_B \cap L_E$. Эти события несовместны, поскольку Лаврентий копирует лишь один из прогнозов. Следовательно, вероятность искомого события может быть найдена как вероятность объединения обозначенных несовместных событий:

$$P(V_L) = P((V_B \cap L_B) \cup (V_E \cap L_E)) = P(V_B \cap L_B) + P(V_E \cap L_E) =$$
$$= P(V_B|L_B)P(L_B) + P(V_B|L_E)P(L_E) = 0.6 \times 0.5 + 0.8 \times 0.5 = 0.7$$

3. Через C обозначим событие, при котором наступает кризис. Обозначим через C_B, C_E и C_L события, при которых Борис, Елена и Лаврентий соответственно предсказывают наступление кризиса.

   Представляя C_B как объединение двух несовместных событий, а также пользуясь следующей из условия независимостью событий V_B и C, получаем искомую вероятность:

$$P(C_B) = P((V_B \cap C) \cup (\overline{V}_B \cap \overline{C})) = P(V_B|C)P(C) + P(\overline{V}_B|\overline{C})P(\overline{C}) =$$
$$= P(V_B)P(C) + P(\overline{V}_B)P(\overline{C}) = 0.6 \times 0.1 + (1 - 0.6) \times 0.9 = 0.42$$

4. Из условия известно, что $P(C) = 0.1$, $P(V_E) = 0.8$ и $P(V_E|C) = 0$. Поэтому, по формуле полной вероятности получаем:

$$P(V_E) = P(V_E|C)P(C) + P(V_E|\overline{C})P(\overline{C}) = 0 \times 0.1 + P(V_E|\overline{C}) \times 0.9 = 0.8$$

   Из полученного результата следует, что:

$$P(V_E|\overline{C}) = \frac{0.8}{0.9} = \frac{8}{9}$$

   Обратим внимание, что предсказать кризис, при условии, что он не наступит, эквивалентно тому, чтобы дать неверный прогноз, при условии, что кризис не наступит. Исходя из соответствующего соображения и используя формулу вероятности обратного события получаем искомую вероятность:

$$P(\overline{V}_E|\overline{C}) = 1 - P(V_E|\overline{C}) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

5. Представим событие C_E как объединение двух несовместных событий и рассчитаем искомую вероятность:

$$P(C_E) = P((V_E \cap C) \cup (\overline{V}_E \cap \overline{C})) = P(V_E|C)P(C) + P(\overline{V}_E|\overline{C})P(\overline{C}) =$$
$$= 0 \times 0.1 + \frac{1}{9} \times 0.9 = 0.1$$

6. Действуя по аналогии с предыдущими пунктами получаем:

$$P(C_L) = P(C_B \cap L_B) + P(C_E \cap L_E) = P(C_B|L_B)P(L_B) + P(C_E|L_E)P(L_E) =$$
$$= P(C_B) \times P(L_B) + P(C_E) \times P(L_E) = 0.42 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 = 0.26$$

7. Поскольку Лаврентий копирует один из прогнозов, то достаточно, чтобы совпали прогнозы Елены и Бориса. При этом их прогнозы совпадут, если оба прогноза окажутся верными или неверными.

$$P((V_B \cap V_E) \cup (\overline{V}_B \cap \overline{V}_E)) = P(V_B \cap V_E) + P(\overline{V}_B \cap \overline{V}_E)$$

Пользуясь условной независимостью рассчитаем первую из соответствующих вероятностей:

$$P(V_B \cap V_E) = P(V_B \cap V_E|C)P(C) + P(V_B \cap V_E|\overline{C})P(\overline{C}) =$$
$$= P(V_B|C)P(V_E|C)P(C) + P(V_B|\overline{C})P(V_E|\overline{C})P(\overline{C}) =$$
$$= 0.6 \times 0 \times 0.1 + 0.6 \times \frac{8}{9} \times 0.9 = 0.48$$

По аналогии вычислим вторую вероятность:

$$P(\overline{V}_B \cap \overline{V}_E) = P(\overline{V}_B \cap \overline{V}_E|C)P(C) + P(\overline{V}_B \cap \overline{V}_E|\overline{C})P(\overline{C}) =$$
$$= P(\overline{V}_B|C)P(\overline{V}_E|C)P(C) + P(\overline{V}_B|\overline{C})P(\overline{V}_E|\overline{C})P(\overline{C}) =$$
$$= (1 - 0.6) \times 1 \times 0.1 + (1 - 0.6) \times \frac{1}{9} \times 0.9 = 0.08$$

В результате получаем искомую вероятность:

$$P(V_B \cap V_E) + P(\overline{V}_B \cap \overline{V}_E) = 0.48 + 0.08 = 0.56$$

8. Применяя формулу условной вероятности получаем:

$$P(L_E|V_L) = \frac{P(V_L|L_E)P(L_E)}{P(V_L)} = \frac{P(V_E) \times 0.5}{0.7} = \frac{0.8 \times 0.5}{0.7} = \frac{4}{7} \approx 0.57$$

Проверка в R:

```
# Число симуляций
n <- 10000000
# Вероятность кризиса
p.crisis <- 0.1
# Симулируем финансовые кризисы (и их отсутствие)
crisis <- runif(n) <= p.crisis
# Вероятность предсказания кризиса для Бориса
p.Boris <- 0.6
# Вероятность предсказания кризиса для Елены,
# при условии, что кризис не наступил, что
# получаем предварительно аналитически
p.Elena.if.nocrisis <- (8 / 9)
# Борис и Елена предсказывают кризисы
pred.Boris <- ifelse(runif(n) <= p.Boris,
                     crisis, !crisis)
pred.Elena <- !crisis
pred.Elena[!crisis] <- ifelse(runif(sum(!crisis)) <= p.Elena.if.nocrisis,
                              crisis[!crisis], !crisis[!crisis])
# Убеждаемся, что Елена предсказывает
# кризис с вероятностью 0.8 (нет противоречий с пунктом 4 задачи)
mean(pred.Elena == crisis)
# Симулируем предсказания Лаврентия
coin <- rbinom(n, 1, 0.5)
pred.Lavr <- pred.Boris * coin + pred.Elena * (1 - coin)
# пункт 1
c(crisis[1], pred.Boris[1], pred.Elena[1], pred.Lavr[1])
# пункт 2
mean(pred.Lavr == crisis)
# пункт 3
mean(pred.Boris == 1)
# пункт 4
mean((pred.Elena == 1)[!crisis])
# пункт 5
mean(pred.Elena == 1)
# пункт 6
mean(pred.Lavr == 1)
# пункт 7
mean(pred.Boris == pred.Elena)
# пункт 8
mean(coin[pred.Lavr == crisis] == 0)
```

Задание №4. Экзамены (25 баллов)

Лаврентий сдает три экзамена. К экзамену по математике Лаврентий выучил 5 билетов из 10, к экзамену по физике – 3 билета из 5, а к экзамену по экономике – 6 билетов из 20. Лаврентий может успешно ответить лишь на те билеты, которые он выучил. На экзамене Лаврентий случайным образом достает три билета и для успешной сдачи ему достаточно ответить хотя бы на два из них (в противном случае он проваливает экзамен).

1. Найдите вероятность того, что Лаврентий ответит хотя бы на один из билетов на экзамене по физике. **(1 балл)**

2. Посчитайте вероятность, с которой Лаврентий даст верный ответ на все билеты на экзамене по физике. **(5 баллов)**

3. Определите вероятность того, что Лаврентий сдаст экзамен по математике. **(5 баллов)**

4. Вычислите вероятность, с которой Лаврентий успешно сдаст хотя бы один экзамен. **(5 баллов)**

5. Учебная часть с равной вероятностью может поставить первым в расписании любой из соответствующих трех экзаменов. Известно, что Лаврентий успешно сдал первый экзамен. Найдите условную вероятность того, что это был экзамен по математике. **(9 баллов)**

Решение:

1. Нетрудно догадаться, что соответствующая вероятность равняется единице.

2. Обозначим через M, F и E события, в соответствии с которыми Лаврентий успешно сдает экзамен по математике, физике и экономике соответственно. Во-первых, искомую вероятность можно рассчитать как:

$$P(F) = \frac{A_3^3}{A_5^3} = \frac{1}{10}$$

Во-вторых, можно воспользоваться формулой пересечения событий. Действительно, через F_i обозначим событие, в соответствии с которым Лаврентий знает ответ на i-й из трех билетов по физике, которые попались ему на экзамене. Например, событие F_2 предполагает, что Лаврентий знает ответ на второй из выбранных им билетов на экзамене по физике. Искомая вероятность может быть рассчитана с помощью формулы вероятности пересечения нескольких событий:

$$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(F_3|F_2 \cap F_1)P(F_2|F_1)P(F_1) =$$
$$= \frac{3-2}{5-2} \times \frac{3-1}{5-1} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$$

3. Для того, чтобы сдать экзамен по математике, Лаврентию необходимо достать 2 или 3 из 5 известных ему билетов. Достать 3 из 5 известных билетов можно A_5^3 способами (для удобства при подсчета числа способов будем различать билеты, в зависимости от очередности их взятия: первым, вторым или третьим). Взять билеты таким образом, чтобы 2 из них были известны, а 1 – нет, можно следующим числом способов:

$$\underbrace{C_5^2 C_5^1}_{\text{берем 2 известных и 1 неизвестный билет}} \times \underbrace{A_3^3}_{\text{учитываем, что эти билеты можно достать в разном порядке}}$$

Таким образом, общее число способов взять билеты таким образом, что экзамен будет сдан успешно, составит:

$$A_5^3 + C_5^2 C_5^1 A_3^3 = 360$$

Общее число способов достать 3 билета из 10 составит $A_{10}^3 = 720$. В результате искомая вероятность оказывается равна:

$$P(M) = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}$$

Рассмотрим и альтернативный способ решения. По аналогии с предыдущим пунктом через M_i обозначим событие, в соответствии с которым Лаврентий знает ответ на i-й из трех билетов по математике. Искомая вероятность может быть рассчитана как сумма вероятностей нескольких несовместных событий:

$$P(M) = P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) + P(\overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3) + P(M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3) + P(M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) =$$

$$= P(M_3|M_1 \cap M_2)P(M_2|M_1)P(M_1) + P(M_3|\overline{M}_1 \cap M_2)P(M_2|\overline{M}_1)P(\overline{M}_1) +$$
$$+ P(M_3|M_1 \cap \overline{M}_2)P(\overline{M}_2|M_1)P(M_1) + P(\overline{M}_3|M_1 \cap M_2)P(M_2|M_1)P(M_1) =$$
$$= \frac{5-2}{10-2} \times \frac{5-1}{10-1} \times \frac{5}{10} + \frac{5-1}{10-2} \times \frac{5}{10-1} \times \frac{5}{10} +$$
$$+ \frac{5-1}{10-2} \times \frac{5}{10-1} \times \frac{5}{10} + \frac{5}{10-2} \times \frac{5-1}{10-1} \times \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Наконец, возможен и третий способ решения. Достаточно заметить, что поскольку Лаврентий выучил половину билетов, то вероятность того, что он будет знать хотя бы 2 из них совпадает с вероятностью того, что он не будет знать хотя бы 2 из них. Поскольку обозначенные события формируют полную группу и не являются совместными, то вероятность каждого из них будет равняться $\frac{1}{2}$.

4. Сперва рассчитаем вероятность того, что Лаврентий сдаст экзамен по экономике. Действуя по аналогии с предыдущими пунктами получаем:

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(\overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3) =$$

$$= P(E_3|E_1 \cap E_2)P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_3|\overline{E}_1 \cap E_2)P(E_2|\overline{E}_1)P(\overline{E}_1) +$$
$$+ P(E_3|E_1 \cap \overline{E}_2)P(\overline{E}_2|E_1)P(E_1) + P(\overline{E}_3|E_1 \cap E_2)P(E_2|E_1)P(E_1) =$$
$$= \frac{6-2}{20-2} \times \frac{6-1}{20-1} \times \frac{6}{20} + \frac{6-1}{20-2} \times \frac{6}{20-1} \times \frac{14}{20} +$$
$$+ \frac{6-1}{20-2} \times \frac{14}{20-1} \times \frac{6}{20} + \frac{14}{20-2} \times \frac{6-1}{20-1} \times \frac{6}{20} = \frac{23}{114} \approx 0.2$$
$$= \frac{11}{114} \approx 0.2$$

Вероятность сдать экзамен по физике можно рассчитать аналогичным образом. Однако, соответствующую вероятность проще вычислить как вероятность того, что Лаврентий не достанет оба неизвестных ему билета.

$$P(F) = 1 - \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = 10\frac{1 \times 3}{10} = 0.7$$

Рассчитаем вероятность того, что Лаврентий не сдаст ни один из экзаменов:

$$P(\overline{M} \cap \overline{F} \cap \overline{E}) = P(\overline{M})P(\overline{F})P(\overline{E}) = (1 - 0.5)(1 - 0.7)(1 - \frac{23}{114}) = \frac{91}{760} \approx 0.12$$

Используя формулу вероятности обратного события находим вероятность искомого события:

$$P(M \cup F \cup E) = 1 - P(\overline{M \cup F \cup E}) = 1 - P(\overline{M} \cap \overline{F} \cap \overline{E}) = 1 - \frac{91}{760} \approx 0.88$$

5. Через S обозначим событие, в соответствии с которым Лаврентий успешно сдает первый экзамен, а через Q_i – событие, при котором первым был экзамен по i-му предмету, где $i \in \{m, f, e\}$, причем m, f и e соответствуют математике, физике и экономике соответственно. Сперва рассчитаем вероятность того, что Лаврентий успешно ответит на все вопросы на первом экзамене. Для этого воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|Q_m)P(Q_m) + P(S|Q_f)P(Q_f) + P(S|Q_e)P(Q_e) = \\ &= P(M)P(Q_m) + P(F)P(Q_f) + P(E)P(Q_e) = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0.7 \times \frac{1}{3} + \frac{23}{114} \times \frac{1}{3} = \frac{799}{1710} \approx 0.467 \end{aligned}$$

Применяя формулу условной вероятности получаем вероятность искомого события:

$$P(Q_m|S) = \frac{P(S|Q_m)P(Q_m)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{799}{1710}} = \frac{285}{799} \approx 0.357$$

Проверка в R:

```
# Число симуляций
n <- 100000
# Выученные (1) и невыученные (0) билеты
math <- c(rep(0, 5), rep(1, 5))
phys <- c(rep(0, 2), rep(1, 3))
econ <- c(rep(0, 14), rep(1, 6))
# Матрицы для сохранения результатов
math.get <- matrix(NA, n, 3)
phys.get <- matrix(NA, n, 3)
```

```
econ.get <- matrix(NA, n, 3)
# Воспроизводим эксперимент n раз
for (i in 1:n)
{
  # Достаем билеты по математике
  math.get[i, ] <- sample(math, 3)
  # Достаем билеты по физике
  phys.get[i, ] <- sample(phys, 3)
  # Достаем билеты по экономике
  econ.get[i, ] <- sample(econ, 3)
}
# Проверяем факт сдачи экзаменов
math.succ <- rowSums(math.get) >= 2
phys.succ <- rowSums(phys.get) >= 2
econ.succ <- rowSums(econ.get) >= 2
# Проводим первым один из трех экзаменов
first.exam <- sample(c("math", "phys", "econ"), n, replace = TRUE)
# Проверяем, был ли сдан этот экзамен успешно
first.exam.succ <- ((first.exam == "math") & (math.succ)) |
                   ((first.exam == "phys") & (phys.succ)) |
                   ((first.exam == "econ") & (econ.succ))
# пункт 1
mean(rowSums(phys.get) >= 1)
# пункт 2
mean(rowSums(phys.get) == 3)
# пункт 3
mean(math.succ)
# пункт 4
1 - mean((!math.succ) &
         (!phys.succ) &
         (!econ.succ))
# пункт 5
mean((first.exam == "math")[first.exam.succ])
```