Теория Вероятностей и Статистика

Основные дискретные распределения

Потанин Богдан Станиславович

доцент, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2023-2024

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ. Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ.

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ. Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ.

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [-0.3, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ. Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ.
- Фиксируя параметр θ на конкретном значении мы получаем конкретное распределение из этого семейства Θ.

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [-0.3, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ. Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ.
- Фиксируя параметр θ на конкретном значении мы получаем конкретное распределение из этого семейства Θ.
- Если случайная величина X имеет распределение Θ с конкретным значением параметра θ, то это записывается как $X \sim \Theta(\theta)$.

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [-0.3, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

Семейство дискретных распределений

Параметры распределения

- Пусть имеется множество дискретных распределений с функциями вероятности, зависящими от **параметра** θ. Эти распределение формируют **семейство**. Обозначим его как Θ.
- Фиксируя параметр θ на конкретном значении мы получаем конкретное распределение из этого семейства Θ.
- Если случайная величина X имеет распределение Θ с конкретным значением параметра θ, то это записывается как $X \sim \Theta(\theta)$.

Пример: Рассмотрим распределения, функция вероятности которых зависит от параметра $\theta \in [-0.3, 0.3]$ следующим образом (опишем функцию вероятности через таблицу):

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3 + \theta$	$0.3 - \theta$

Обозначим семейство этих распределений как Θ. Тогда, фиксируя $\theta = 0.2$ мы получаем распределение из семейства Θ с параметром $\theta = 0.2$. Если случайная величина X имеет соответствующее распределение, что записывается как $X \sim \Theta(0.2)$, то оно будет иметь вид:

x	1	2	3
$P(X = x)$	0.4	0.5	0.1

Распределение Бернулли

Определение распределения Бернулли

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1 - p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1 - p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0,1)$, если:

$$P(X=x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1-p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0,1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X=x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.

Определение распределения Бернулли

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1 - p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.
  Решение:
  Введем случайную величину X, которая принимает значение 1 – если Юрий получит зачет, и значение 0 – в противном случае. Обратим внимание, что $P(X = 1) = 0.8$ и $P(X = 0) = 0.2$. Следовательно, случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.8$, то есть $X \sim Ber(0.8)$.

Распределение Бернулли

Определение распределения Бернулли

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1 - p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \ \mathrm{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.
  Решение:
  Введем случайную величину X, которая принимает значение 1 – если Юрий получит зачет, и значение 0 – в противном случае. Обратим внимание, что $P(X = 1) = 0.8$ и $P(X = 0) = 0.2$. Следовательно, случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.8$, то есть $X \sim Ber(0.8)$.
- Вася бьет по воротам **один раз** и может забить либо один, либо ноль голов. Число забитых Васей голов является Бернуллиевской случайной величиной X с параметром $p = 0.3$. Найдите вероятность того, что Вася **не забьет** гол.

- Случайная величина $X \sim Ber(p)$ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, \text{ если } x = 1 \\ 1 - p, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1\}$$

- Параметр распределения p определяет форму функции вероятности $P(X = x)$. Например, при $p = 0.5$ случайная величина X с равной вероятностью принимает значения 0 и 1.

Примеры:

- Вероятность того, что Юрий получит зачет, составляет 0.8. Сформулируйте получение зачета как Бернуллиевскую случайную величину.
  Решение:
  Введем случайную величину X, которая принимает значение 1 – если Юрий получит зачет, и значение 0 – в противном случае. Обратим внимание, что $P(X = 1) = 0.8$ и $P(X = 0) = 0.2$. Следовательно, случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.8$, то есть $X \sim Ber(0.8)$.
- Вася бьет по воротам **один раз** и может забить либо один, либо ноль голов. Число забитых Васей голов является Бернуллиевской случайной величиной X с параметром $p = 0.3$. Найдите вероятность того, что Вася **не забьет** гол.
  Решение:
  Поскольку $p = 0.3$, то $P(X = 1) = 0.3$, а значит $P(X = 0) = 1 - 0.3 = 0.7$.

Распределение Бернулли
Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X=1)\times 1 + P(X=0)\times 0 = p\times 1 + (1-p)\times 0 = p$
- $Var(X) = p(1-p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p\times 1^2 + p\times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p\times 1^k + p\times 0^k = p$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
  Решение: $E(X) = 0.7,\ Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21.$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
  Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.
- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p.

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
  Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.
- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p.
  Решение: $Var(X) = 0.16 \implies p(1 - p) = 0.16 \implies p^2 - p + 0.16 = 0 \implies p \in \{0.2, 0.8\}$

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
  Решение: $E(X) = 0.7$, $Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$.
- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p.
  Решение: $Var(X) = 0.16 \implies p(1 - p) = 0.16 \implies p^2 - p + 0.16 = 0 \implies p \in \{0.2, 0.8\}$
- Сумма первых 10-ти начальных моментов Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 1. Найдите $P(X = 0)$.

Распределение Бернулли

Моменты распределения Бернулли

- $E(X) = p$
  Доказательство: $E(X) = P(X=1) \times 1 + P(X=0) \times 0 = p \times 1 + (1-p) \times 0 = p$
- $Var(X) = p(1-p)$
  Доказательство: $E(X^2) = p \times 1^2 + p \times 0^2 = p \implies Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$
- $E(X^k) = p$
  Доказательство: $E(X^k) = p \times 1^k + p \times 0^k = p$

Примеры:

- Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
  Решение: $E(X) = 0.7,\ Var(X) = 0.7 \times (1 - 0.7) = 0.7 \times 0.3 = 0.21.$
- Дисперсия Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 0.16. Найдите все возможные значения параметра p.
  Решение: $Var(X) = 0.16 \implies p(1-p) = 0.16 \implies p^2 - p + 0.16 = 0 \implies p \in \{0.2, 0.8\}$
- Сумма первых 10-ти начальных моментов Бернуллиевской случайной величины $X \sim Ber(p)$ равняется 1. Найдите $P(X=0)$.
  Решение: $E(X^1) + E(X^2) + \cdots + E(X^{10}) = 10p = 1 \implies p = 0.1 \implies P(X=0) = 1 - 0.1 = 0.9.$

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} \quad , \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \text{ supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.
  Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} \approx 0.22$.

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.
  Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!}e^{-3} \approx 0.22$.
- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.
  Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!}e^{-3} \approx 0.22.$
- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.
  Решение: $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} \approx 0.68.$

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.
  Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!}e^{-3} \approx 0.22.$
- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.
  Решение: $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} \approx 0.68.$
- В предыдущей задаче найдите вероятность того, что кафе посетит хотя бы один человек, если известно, что число посетителей меньше трех.

- Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \in (0, \infty)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

Примеры:

- Количество звонков в службу поддержки является случайной величиной $X \sim Pois(3)$. Найдите вероятность того, что поступит 2 звонка.
  Решение: $P(X = 2) = \frac{3^2}{2!}e^{-3} \approx 0.22.$
- Число посетителей кафе является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность того, что кафе посетит менее трех человек.
  Решение: $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} \approx 0.68.$
- В предыдущей задаче найдите вероятность того, что кафе посетит хотя бы один человек, если известно, что число посетителей меньше трех.
  Решение: $P(X \geq 1|X < 3) = \frac{P(1 \leq X < 3)}{P(X < 3)} = \frac{P(X=1)+P(X=2)}{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)} = \frac{\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}}{\frac{2^0}{0!}e^{-2}+\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}} = 0.8.$

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

- $E(X) = \lambda$

  Доказательство: $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

- $E(X) = \lambda$

  Доказательство: $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$
- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

- $E(X) = \lambda$

  Доказательство: $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

  Доказательство:

  $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

  Доказательство: $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

  Доказательство:

  $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$

- $Var(X) = \lambda$

  Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Распределение Пуассона

Моменты распределения Пуассона

- $E(X) = \lambda$

  Доказательство: $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

  Доказательство:

  $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$

- $Var(X) = \lambda$

  Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.

- $E(X) = \lambda$

  Доказательство: $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

  Доказательство:

  $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$

- $Var(X) = \lambda$

  Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.

  Решение: $Var(X) = E(X) = 5 \implies \lambda = 5 \implies P(X = 6) = \frac{5^6}{6!}e^{-5} \approx 0.146.$

- $E(X) = \lambda$

  Доказательство: $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$
- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

  Доказательство:

  $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$
- $Var(X) = \lambda$

  Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.

  Решение: $Var(X) = E(X) = 5 \implies \lambda = 5 \implies P(X=6) = \frac{5^6}{6!}e^{-5} \approx 0.146.$
- Число привлеченных клиентов является Пуассоновской случайной с математическим ожиданием 5. Найдите математическое ожидание X, если известно, что удалось привлечь менее двух клиентов.

- $E(X) = \lambda$
  Доказательство: $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$
- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$
  Доказательство:
  $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\times(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
  Доказательство: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Примеры:

- Количество забитых на чемпионате футболистом голов является Пуассоновской случайной величиной с дисперсией 5. Найдите вероятность того, что футболист забьет шесть голов и математическое ожидание числа голов.
  Решение: $Var(X) = E(X) = 5 \implies \lambda = 5 \implies P(X = 6) = \frac{5^6}{6!}e^{-5} \approx 0.146.$
- Число привлеченных клиентов является Пуассоновской случайной с математическим ожиданием 5. Найдите математическое ожидание X, если известно, что удалось привлечь менее двух клиентов.
  Решение: $E(X|X<2) = P(X=0|X<2)\times 0 + P(X=1|X<2)\times 1 = P(X=1|X<2) = \frac{5e^{-5}}{5e^{-5}+e^{-5}} = \frac{5}{6}$

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$.

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров
  Решение:
  Через $X_1 \sim Pois(1)$, $X_2 \sim Pois(2)$, $X_2 \sim Pois(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости
  $X_1 + X_2 + X_3 \sim Pois(1 + 2 + 5) = Pois(8)$.

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров

  Решение:

  Через $X_1 \sim Pois(1)$, $X_2 \sim Pois(2)$, $X_2 \sim Pois(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости
  $X_1 + X_2 + X_3 \sim Pois(1 + 2 + 5) = Pois(8)$. Отсюда получаем:
  $P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!}e^{-8} \approx 0.1$

Распределение Пуассона

Свойство воспроизводимости

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров

  Решение:

  Через $X_1 \sim Pois(1)$, $X_2 \sim Pois(2)$, $X_2 \sim Pois(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости $X_1 + X_2 + X_3 \sim Pois(1 + 2 + 5) = Pois(8)$. Отсюда получаем:

  $P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!}e^{-8} \approx 0.1$

  $E(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1 + X_2 + X_3) = 8$

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров
  Решение:
  Через $X_1 \sim Pois(1)$, $X_2 \sim Pois(2)$, $X_2 \sim Pois(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости $X_1 + X_2 + X_3 \sim Pois(1 + 2 + 5) = Pois(8)$. Отсюда получаем:
  $P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!}e^{-8} \approx 0.1$
  $E(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1 + X_2 + X_3) = 8$
- Имеются шесть идентичных, работающих независимо роботов. Число попыток захватить человечество для каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 0.5$. Найдите вероятность того, хотя бы один из роботов попытается захватить человечество.

- Для последовательности независимых Пуассоновских случайных величин $X_i \sim Pois(\lambda_i), i \in \{1, ..., n\}$ справедливо **свойство воспроизводимости**: $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Примеры:

- В банке работают ленивый, обычный и усердный юристы. Они независимо друг от друга оформляют договора для клиентов. Число оформленных договоров у каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной. Математические ожидания числа оформленных договоров для ленивого, обычного и усердного юристов равняются 1, 2 и 5 соответственно. Рассчитайте вероятность того, что вместе они оформят 10 договоров, а также математическое ожидание и дисперсию числа оформленных ими договоров

  Решение:

  Через $X_1 \sim Pois(1)$, $X_2 \sim Pois(2)$, $X_2 \sim Pois(5)$ обозначим случайные величины, отражающие число договоров, оформленных ленивым, обычным и усердным юристами соответственно. Поскольку эти случайные величины независимы, то по свойству воспроизводимости
  $X_1 + X_2 + X_3 \sim Pois(1 + 2 + 5) = Pois(8)$. Отсюда получаем:

  $P(X_1 + X_2 + X_3 = 10) = \frac{8^{10}}{10!} e^{-8} \approx 0.1$

  $E(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1 + X_2 + X_3) = 8$

- Имеются шесть идентичных, работающих независимо роботов. Число попыток захватить человечество для каждого из них описывается Пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 0.5$. Найдите вероятность того, хотя бы один из роботов попытается захватить человечество.

  Решение: $P(X_1 + \cdots + X_6 \geq 1) = 1 - P(X_1 + \cdots + X_6 = 0) = 1 - \frac{(6 \times 0.5)^0}{0!} e^{-6 \times 0.5} \approx 0.95$

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1 - p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1-p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n=3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1,1,0)$.

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1-p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n=3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1,1,0)$.
- Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p. Тогда вероятность элементарного события $(1,1,0)$ можно записать как:

$$P(\{(1,1,0)\}) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times P(X_3 = 0) = p \times p \times (1-p) = p^2(1-p)$$

Биномиальное распределение

Серия испытаний Бернулли и схема Бернулли

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1-p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n=3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1,1,0)$.
- Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p. Тогда вероятность элементарного события $(1,1,0)$ можно записать как:

$$P(\{(1,1,0)\}) = P(X_1=1)\times P(X_2=1)\times P(X_3=0) = p\times p\times(1-p) = p^2(1-p)$$

- Вероятность того, что в серии из $n=3$ испытаний Бернулли ровно два закончатся успехом равняется:

$$P(\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}) = p^2(1-p)+p^2(1-p)+p^2(1-p) = 3p^2(1-p) = C_3^2p^2(1-p)$$

  Для получения искомой вероятности мы сложили все элементарные события с двумя успехами. Эти элементарные события **равновероятны** и их число совпадает с **количеством способов** выбрать $x=2$ позиции из $n=3$ под единицы – C_3^2.

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1-p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n=3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1,1,0)$.
- Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p. Тогда вероятность элементарного события $(1,1,0)$ можно записать как:

$$P(\{(1,1,0)\}) = P(X_1=1)\times P(X_2=1)\times P(X_3=0) = p\times p\times(1-p) = p^2(1-p)$$

- Вероятность того, что в серии из $n=3$ испытаний Бернулли ровно два закончатся успехом равняется:

$$P(\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}) = p^2(1-p)+p^2(1-p)+p^2(1-p) = 3p^2(1-p) = C_3^2p^2(1-p)$$

  Для получения искомой вероятности мы сложили все элементарные события с двумя успехами. Эти элементарные события **равновероятны** и их число совпадает с **количеством способов** выбрать $x=2$ позиции из $n=3$ под единицы – C_3^2.
- Приведенная логика справедлива и для произвольных x и n, откуда:

$$P(x \text{ успехов в серии из } n \text{ испытаний Бернулли}) = P(X_1+X_2+\cdots+X_n=x) = C_n^xp^x(1-p)^{n-x}$$

- Рассмотрим случайный эксперимент, в рамках которого n раз повторяются независимые эксперименты, каждый из которых может с вероятностью p закончиться успехом (кодируется как 1) или, с вероятностью $1-p$, окончиться неудачей (кодируется как 0). Эти эксперименты именуются **серией испытаний Бернулли**.
- Например, **элементарное событие**, в соответствии с которым первые два из трех ($n=3$) экспериментов завершились успехом, а последний – неудачей, записывается как $(1,1,0)$.
- Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные Бернуллиевские случайные величины с параметром p. Тогда вероятность элементарного события $(1,1,0)$ можно записать как:

$$P(\{(1,1,0)\}) = P(X_1=1)\times P(X_2=1)\times P(X_3=0) = p\times p\times(1-p) = p^2(1-p)$$

- Вероятность того, что в серии из $n=3$ испытаний Бернулли ровно два закончатся успехом равняется:

$$P(\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}) = p^2(1-p)+p^2(1-p)+p^2(1-p) = 3p^2(1-p) = C_3^2p^2(1-p)$$

  Для получения искомой вероятности мы сложили все элементарные события с двумя успехами. Эти элементарные события **равновероятны** и их число совпадает с **количеством способов** выбрать $x=2$ позиции из $n=3$ под единицы – C_3^2.
- Приведенная логика справедлива и для произвольных x и n, откуда:

$$P(x \text{ успехов в серии из } n \text{ испытаний Бернулли}) = P(X_1+X_2+\cdots+X_n=x) = C_n^xp^x(1-p)^{n-x}$$

- Дискретное вероятностное пространство, порождаемое серией испытаний Бернулли, именуется **схемой Бернулли**.

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$$

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.

- Случайная величина $X \sim B(n,p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1,2,\cdots\}$ и $p \in (0,1)$, если:

$$P(X=x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0,1,2,\cdots,n\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \mathrm{supp}(X) = \{0,1,2\cdots,n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин $X_1, \cdots X_n$ с параметром p, имеет биномиальное распределение $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$.

- Случайная величина $X \sim B(n,p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p \in (0,1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин $X_1, \cdots X_n$ с параметром p, имеет биномиальное распределение $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$.

Пример:

- Каждый раз, независимо от результатов предыдущих попыток, Арсений забивает гол в ворота с вероятностью 0.8. Найдите вероятность того, что за пять ударов он забьет ровно три гола.

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \quad \mathrm{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин $X_1, \cdots X_n$ с параметром p, имеет биномиальное распределение $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$.

Пример:

- Каждый раз, независимо от результатов предыдущих попыток, Арсений забивает гол в ворота с вероятностью 0.8. Найдите вероятность того, что за пять ударов он забьет ровно три гола.

  Решение:

  Число голов, которые Арсений забивает за **одну** попытку, является Бернуллиевской случайной величиной с параметром $p = 0.8$, поскольку за один раз он может забить либо 0 голов, либо 1 гол. Из условия следует, что эти Бернуллиевские случайных величины независимы, а значит их сумма, отражающая общее число голов, будет иметь Биномиальное распределение $X \sim B(5, 0.8)$

- Случайная величина $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p \in (0, 1)$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} \quad , \operatorname{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots, n\}$$

- Биномиальная случайная величина отражает число успехов в серии испытаний Бернулли.
- Поэтому сумма независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин $X_1, \cdots X_n$ с параметром p, имеет биномиальное распределение $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$.

Пример:

- Каждый раз, независимо от результатов предыдущих попыток, Арсений забивает гол в ворота с вероятностью 0.8. Найдите вероятность того, что за пять ударов он забьет ровно три гола.

  Решение:

  Число голов, которые Арсений забивает за **одну** попытку, является Бернуллиевской случайной величиной с параметром $p = 0.8$, поскольку за один раз он может забить либо 0 голов, либо 1 гол. Из условия следует, что эти Бернуллиевские случайных величины независимы, а значит их сумма, отражающая общее число голов, будет иметь Биномиальное распределение $X \sim B(5, 0.8)$, откуда:

$$P(X = 3) = C_5^3 0.8^3 (1 - 0.8)^{5-3} \approx 0.2$$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.

- Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$

- Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n \text{ раз}} = np(1-p)$

- Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n \text{ раз}} = np(1-p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n \text{ раз}} = np(1-p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.
  Решение:
  $X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, Var(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X = 7) = C_{10}^{7} 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$

- Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n \text{ раз}} = np(1-p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.
  Решение:
  $X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, Var(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X = 7) = C_{10}^{7} 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$
- В выборах начальника отдела участвуют 8 сотрудников. Число голосов за Ивана (из 8 возможных) описывается биномиальным распределением с дисперсией 2. Найдите математическое ожидание числа голосов за Ивана, если за него проголосовало не менее 6 участников.

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n \text{ раз}} = np(1-p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.
  Решение:
  $X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, Var(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X = 7) = C_{10}^{7} 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$
- В выборах начальника отдела участвуют 8 сотрудников. Число голосов за Ивана (из 8 возможных) описывается биномиальным распределением с дисперсией 2. Найдите математическое ожидание числа голосов за Ивана, если за него проголосовало не менее 6 участников.
  Решение:
  $X \sim B(8, p) \implies Var(X) = 8 \times p(1-p) = 2 \implies p^2 - p + 0.25 = 0 \implies p = 0.5$

Биномиальное распределение

Моменты Биномиального распределения

- Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, где $X_1, ..., X_n$ i.i.d. и $X_1 \sim Ber(p)$.
- $E(X) = np$
  Доказательство: $E(X) = E(X_1 + \cdots X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ раз}} = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
  Доказательство: $Var(X) = Var(X_1 + \cdots X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = \underbrace{p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n \text{ раз}} = np(1-p)$

Примеры:

- Стрелок совершает 10 независимых выстрелов, вероятность попадания в каждом из которых равняется 0.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, а также вероятность, что их будет 7.
  Решение:
  $X \sim B(10, 0.6) \implies E(X) = 10 \times 0.6 = 6, Var(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4, P(X = 7) = C_{10}^{7} 0.6^7 0.4^3 \approx 0.215.$
- В выборах начальника отдела участвуют 8 сотрудников. Число голосов за Ивана (из 8 возможных) описывается биномиальным распределением с дисперсией 2. Найдите математическое ожидание числа голосов за Ивана, если за него проголосовало не менее 6 участников.
  Решение:
  $X \sim B(8, p) \implies Var(X) = 8 \times p(1-p) = 2 \implies p^2 - p + 0.25 = 0 \implies p = 0.5$
  $E(X|X \geq 6) = P(X = 6|X \geq 6) \times 6 + P(X = 7|X \geq 6) \times 7 + P(X = 8|X \geq 6) \times 8 = \frac{P(X=6)\times 6 + P(X=7)\times 7 + P(X=8)\times 8}{P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)} \approx$
  $\approx (0.109 \times 6 + 0.031 \times 7 + 0.004 \times 8) / (0.109 + 0.031 + 0.004) \approx 6.27$

Биномиальное распределение

Свойство воспроизводимости

- Пусть имеются независимые Биномиальные случайные величины $X_1, X_2, \cdots X_m$ с одинаковым параметром p и параметрами $n_1, n_2, \cdots n_m$, то есть $X_i \sim B(n_i, p)$, тогда:

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) \sim B(n_1 + n_2 + \cdots n_m, p)$$

- Пусть имеются независимые Биномиальные случайные величины $X_1, X_2, \cdots X_m$ с одинаковым параметром p и параметрами $n_1, n_2, \cdots n_m$, то есть $X_i \sim B(n_i, p)$, тогда:

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) \sim B(n_1 + n_2 + \cdots n_m, p)$$

Доказательство: Биномиальная случайная величина X_i, по определению, может быть представлена как сумма n_i Бернуллиевских случайных величин с параметром p. Поскольку $X_1, \cdots X_m$ независимы, то по аналогии сумма $X_1 + \cdots + X_m$ может быть представлена как сумма $n_1 + \cdots + n_m$ независимых Бернуллиевских случайных величин с параметром p. Данная сумма, по определению, будет иметь Биномиальное распределение с параметрами $n_1 + \cdots + n_m$ и p.

Биномиальное распределение

Свойство воспроизводимости

- Пусть имеются независимые Биномиальные случайные величины $X_1, X_2, \cdots X_m$ с одинаковым параметром p и параметрами $n_1, n_2, \cdots n_m$, то есть $X_i \sim B(n_i, p)$, тогда:

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) \sim B(n_1 + n_2 + \cdots n_m, p)$$

  Доказательство: Биномиальная случайная величина X_i, по определению, может быть представлена как сумма n_i Бернуллиевских случайных величин с параметром p. Поскольку $X_1, \cdots X_m$ независимы, то по аналогии сумма $X_1 + \cdots + X_m$ может быть представлена как сумма $n_1 + \cdots + n_m$ независимых Бернуллиевских случайных величин с параметром p. Данная сумма, по определению, будет иметь Биномиальное распределение с параметрами $n_1 + \cdots + n_m$ и p.

Пример:

- Трое спортсменов независимо друг от друга и с равной вероятностью забрасывают баскетбольный мяч в корзину. При каждом броске вероятность попадания для каждого из них равняется 0.9. Первый спортсмен совершает 2 попытки, второй – 3, а третий – 5. Найдите вероятность того, что общее число попаданий в корзину окажется равно 8.

Биномиальное распределение

Свойство воспроизводимости

- Пусть имеются независимые Биномиальные случайные величины $X_1, X_2, \cdots X_m$ с одинаковым параметром p и параметрами $n_1, n_2, \cdots n_m$, то есть $X_i \sim B(n_i, p)$, тогда:

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) \sim B(n_1 + n_2 + \cdots n_m, p)$$

  Доказательство: Биномиальная случайная величина X_i, по определению, может быть представлена как сумма n_i Бернуллиевских случайных величин с параметром p. Поскольку $X_1, \cdots X_m$ независимы, то по аналогии сумма $X_1 + \cdots + X_m$ может быть представлена как сумма $n_1 + \cdots + n_m$ независимых Бернуллиевских случайных величин с параметром p. Данная сумма, по определению, будет иметь Биномиальное распределение с параметрами $n_1 + \cdots + n_m$ и p.

Пример:

- Трое спортсменов независимо друг от друга и с равной вероятностью забрасывают баскетбольный мяч в корзину. При каждом броске вероятность попадания для каждого из них равняется 0.9. Первый спортсмен совершает 2 попытки, второй – 3, а третий – 5. Найдите вероятность того, что общее число попаданий в корзину окажется равно 8.

  Решение: обозначим через $X_1 \sim B(2, 0.9)$, $X_2 \sim B(3, 0.9)$ и $X_3 \sim B(5, 0.9)$ случайные величины, отражающие число попаданий первого, второго и третьего спортсменов соответственно. В силу независимости по свойству воспроизводимости получаем, что:

$$(X_1 + X_2 + X_3) \sim B(2 + 3 + 5, 0.9) = B(10, 0.9)$$

- Пусть имеются независимые Биномиальные случайные величины $X_1, X_2, \cdots X_m$ с одинаковым параметром p и параметрами $n_1, n_2, \cdots n_m$, то есть $X_i \sim B(n_i, p)$, тогда:

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) \sim B(n_1 + n_2 + \cdots n_m, p)$$

Доказательство: Биномиальная случайная величина X_i, по определению, может быть представлена как сумма n_i Бернуллиевских случайных величин с параметром p. Поскольку $X_1, \cdots X_m$ независимы, то по аналогии сумма $X_1 + \cdots + X_m$ может быть представлена как сумма $n_1 + \cdots + n_m$ независимых Бернуллиевских случайных величин с параметром p. Данная сумма, по определению, будет иметь Биномиальное распределение с параметрами $n_1 + \cdots + n_m$ и p.

Пример:

- Трое спортсменов независимо друг от друга и с равной вероятностью забрасывают баскетбольный мяч в корзину. При каждом броске вероятность попадания для каждого из них равняется 0.9. Первый спортсмен совершает 2 попытки, второй – 3, а третий – 5. Найдите вероятность того, что общее число попаданий в корзину окажется равно 8.

Решение: обозначим через $X_1 \sim B(2, 0.9)$, $X_2 \sim B(3, 0.9)$ и $X_3 \sim B(5, 0.9)$ случайные величины, отражающие число попаданий первого, второго и третьего спортсменов соответственно. В силу независимости по свойству воспроизводимости получаем, что:

$$(X_1 + X_2 + X_3) \sim B(2 + 3 + 5, 0.9) = B(10, 0.9)$$

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = 8) = C_{10}^{8} 0.9^8 (1 - 0.9)^2 \approx 0.19371$$

- Случайная величина $X \sim Geom(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0,1]$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \text{ supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

- Случайная величина $X \sim Geom(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0,1]$, если:

$$P(X=x)=\begin{cases}(1-p)^x p, \text{ если } x \in \{0,1,2,\cdots\}\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}, \; \text{supp}(X)=\{0,1,2\cdots\}$$

- Геометрическая случайная величина отражает число неудач до первого успеха в бесконечной серии независимых испытаний Бернулли. Пусть $X_1, X_2, \cdots$ – бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин, где $X_i = 1$, если успех наступил в i-м испытании, тогда:

$$P(X=x)=P(X_1=0)\times\cdots\times P(X_x=0)\times P(X_{x+1}=1)=\underbrace{(1-p)\times\cdots\times(1-p)}_{x \text{ раз}}\times p=(1-p)^x p$$

- Случайная величина $X \sim Geom(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1]$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1, 2 \cdots\}$$

- Геометрическая случайная величина отражает число неудач до первого успеха в бесконечной серии независимых испытаний Бернулли. Пусть $X_1, X_2, \cdots$ – бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин, где $X_i = 1$, если успех наступил в i-м испытании, тогда:

$$P(X = x) = P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0) \times P(X_{x+1} = 1) = \underbrace{(1-p) \times \cdots \times (1-p)}_{x \text{ раз}} \times p = (1-p)^x p$$

Пример:

- София кидает кубик до тех пор, пока на нем не выпадет число меньше 3. Найдите вероятность того, София сделает 6 бросков.

- Случайная величина $X \sim Geom(p)$ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0,1]$, если:

$$P(X=x) = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x \in \{0,1,2,\cdots\} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0,1,2\cdots\}$$

- Геометрическая случайная величина отражает число неудач до первого успеха в бесконечной серии независимых испытаний Бернулли. Пусть $X_1, X_2, \cdots$ – бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных Бернуллиевских случайных величин, где $X_i = 1$, если успех наступил в i-м испытании, тогда:

$$P(X=x) = P(X_1=0)\times\cdots\times P(X_x=0)\times P(X_{x+1}=1) = \underbrace{(1-p)\times\cdots\times(1-p)}_{x \text{ раз}}\times p = (1-p)^x p$$

Пример:

- София кидает кубик до тех пор, пока на нем не выпадет число меньше 3. Найдите вероятность того, София сделает 6 бросков.
Решение: Число бросков **до того**, как выпадет число меньше 3, является геометрической случайной величиной X с параметром $p = \frac{1}{3}$. Общее число бросков является случайной величиной $X+1$, а значит:

$$P(X+1=6) = P(X=5) = \left(1-\frac{1}{3}\right)^5 \times \frac{1}{3} = \frac{32}{729}$$

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Примеры:

- Джек грабит банки до тех пор, пока его не поймают. Каждый раз вероятность того, что ограбление пройдет успешно, составляет 0.9. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа успешных ограблений и числа попыток ограблений.

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Примеры:

- Джек грабит банки до тех пор, пока его не поймают. Каждый раз вероятность того, что ограбление пройдет успешно, составляет 0.9. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа успешных ограблений и числа попыток ограблений.
  Решение:
  $X \sim Geom(0.1)$ – число успешных ограблений:
  $$E(X) = \frac{1-0.1}{0.1} = 9$$
  $$Var(X) = \frac{1-0.1}{0.1^2} = 90$$

- Моменты легко найти с помощью метода первого шага.
- $E(X) = \frac{1-p}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Примеры:

- Джек грабит банки до тех пор, пока его не поймают. Каждый раз вероятность того, что ограбление пройдет успешно, составляет 0.9. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа успешных ограблений и числа попыток ограблений.

  Решение:

  $X \sim Geom(0.1)$ – число успешных ограблений:

  $$E(X) = \frac{1-0.1}{0.1} = 9$$
  $$Var(X) = \frac{1-0.1}{0.1^2} = 90$$

  $X+1$ – число попыток ограблений:

  $$E(X+1) = E(X) + 1 = 9 + 1 = 10$$
  $$Var(X+1) = Var(X) = 90$$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1 - p)^x$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$, где $x \in \{0, 1, 2, ...\}$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$, где $x \in \{0, 1, 2, ...\}$

  Доказательство:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$, где $x \in \{0, 1, 2, ...\}$
  Доказательство:
  $$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$
- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$, где $x \in \{0, 1, 2, ...\}$
  Доказательство:
  $$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$
- $P(X \geq x + a|X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**
  Доказательство: $P(X \geq x + a|X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$, где $x \in \{0, 1, 2, ...\}$

  Доказательство:
  $$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$

- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**

  Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$, где $x \in \{0, 1, 2, ...\}$
  Доказательство:
  $$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$
- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**
  Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.
  Решение: $P(X \leq 5) = F_X(5) = 1 - (1-0.3)^{5+1} \approx 0.88$

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$, где $x \in \{0, 1, 2, ...\}$
  Доказательство:
  $$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$
- $P(X \geq x + a | X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**
  Доказательство: $P(X \geq x + a | X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.
  Решение: $P(X \leq 5) = F_X(5) = 1 - (1-0.3)^{5+1} \approx 0.88$
- Вероятность устроиться на работу по результатам очередного собеседования для Никиты неизменно составляет 0.2. Рассчитайте вероятность того, что Никите придется пройти не менее 8 собеседований, если известно, что он уже провалил 2.

Геометрическое распределение

Функция распределения геометрического распределения и свойство отсутствия памяти

- $P(X \geq x) = (P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_x = 0)) = (1-p)^x$
- $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$, где $x \in \{0, 1, 2, ...\}$
  Доказательство:
  $$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^{x+1}$$
- $P(X \geq x + a|X \geq a) = P(X \geq x)$ – свойство **отсутствия памяти**
  Доказательство: $P(X \geq x + a|X \geq a) = \frac{P(X \geq x+a)}{P(X \geq a)} = \frac{(1-p)^{x+a}}{(1-p)^a} = (1-p)^x = P(X \geq x)$

Примеры:

- Старик кидает невод до тех пор, пока не поймает золотую рыбку. Вероятность поймать золотую рыбку при очередном броске составляет 0.3. Рассчитайте вероятность того, что Старик сделает не более 5 неудачных бросков.
  Решение: $P(X \leq 5) = F_X(5) = 1 - (1-0.3)^{5+1} \approx 0.88$
- Вероятность устроиться на работу по результатам очередного собеседования для Никиты неизменно составляет 0.2. Рассчитайте вероятность того, что Никите придется пройти не менее 8 собеседований, если известно, что он уже провалил 2.
  Решение: количество неудачных собеседований обозначим как $X \sim Geom(0.8)$, откуда, по свойству отсутствия памяти:

$$P(X + 1 \geq 8|X \geq 2) = P(X \geq 7|X \geq 2) = P(X \geq 5 + 2|X \geq 2) = P(X \geq 5) = (1-0.2)^5 = 0.32768$$

Геометрическое распределение

Случай с ограниченным числом испытаний

- Рассмотрим геометрическую случайную величину Y с параметром p и случайную величину $X = \min(Y, n)$, где $n \in N$.

Геометрическое распределение

Случай с ограниченным числом испытаний

- Рассмотрим геометрическую случайную величину Y с параметром p и случайную величину $X = \min(Y, n)$, где $n \in N$.
- Случайная величина X отражает число успехов до первой неудачи в серии из n испытаний Бернулли:

$$P(X = x) = \begin{cases} P(Y = x), \text{ если } x < n \\ P(Y \geq x), \text{ если } x \geq n \end{cases} \quad =$$

Геометрическое распределение

Случай с ограниченным числом испытаний

- Рассмотрим геометрическую случайную величину Y с параметром p и случайную величину $X = \min(Y, n)$, где $n \in N$.
- Случайная величина X отражает число успехов до первой неудачи в серии из n испытаний Бернулли:

$$P(X = x) = \begin{cases} P(Y = x), \text{ если } x < n \\ P(Y \geq x), \text{ если } x \geq n \end{cases} = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x < n \\ (1-p)^x, \text{ если } x \geq n \end{cases}$$

Геометрическое распределение

Случай с ограниченным числом испытаний

- Рассмотрим геометрическую случайную величину Y с параметром p и случайную величину $X = \min(Y, n)$, где $n \in N$.
- Случайная величина X отражает число успехов до первой неудачи в серии из n испытаний Бернулли:

$$P(X = x) = \begin{cases} P(Y = x), \text{ если } x < n \\ P(Y \geq x), \text{ если } x \geq n \end{cases} = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x < n \\ (1-p)^x, \text{ если } x \geq n \end{cases}$$

- Математическое ожидание X можно найти с помощью формулы суммы членов геометрической прогрессии:

$$E(X) = E((1 - X_1) + (1 - X_1)(1 - X_2) + (1 - X_1)(1 - X_2)(1 - X_3) + ... + (1 - X_1)(1 - X_2) \times ... \times (1 - X_n)) =$$

Геометрическое распределение

Случай с ограниченным числом испытаний

- Рассмотрим геометрическую случайную величину Y с параметром p и случайную величину $X = \min(Y, n)$, где $n \in N$.
- Случайная величина X отражает число успехов до первой неудачи в серии из n испытаний Бернулли:

$$P(X = x) = \begin{cases} P(Y = x), \text{ если } x < n \\ P(Y \geq x), \text{ если } x \geq n \end{cases} = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x < n \\ (1-p)^x, \text{ если } x \geq n \end{cases}$$

- Математическое ожидание X можно найти с помощью формулы суммы членов геометрической прогрессии:

$$E(X) = E((1 - X_1) + (1 - X_1)(1 - X_2) + (1 - X_1)(1 - X_2)(1 - X_3) + ... + (1 - X_1)(1 - X_2) \times ... \times (1 - X_n)) =$$
$$= E(1 - X_1) + E(1 - X_1)E(1 - X_2) + ... + E(1 - X_1)E(1 - X_2)....E(1 - X_n) =$$

- Рассмотрим геометрическую случайную величину Y с параметром p и случайную величину $X = \min(Y, n)$, где $n \in N$.
- Случайная величина X отражает число успехов до первой неудачи в серии из n испытаний Бернулли:

$$P(X = x) = \begin{cases} P(Y = x), \text{ если } x < n \\ P(Y \geq x), \text{ если } x \geq n \end{cases} = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x < n \\ (1-p)^x, \text{ если } x \geq n \end{cases}$$

- Математическое ожидание X можно найти с помощью формулы суммы членов геометрической прогрессии:

$$E(X) = E((1 - X_1) + (1 - X_1)(1 - X_2) + (1 - X_1)(1 - X_2)(1 - X_3) + ... + (1 - X_1)(1 - X_2) \times ... \times (1 - X_n)) =$$

$$= E(1 - X_1) + E(1 - X_1)E(1 - X_2) + ... + E(1 - X_1)E(1 - X_2)....E(1 - X_n) =$$

$$= (1-p) + (1-p)^2 + ... + (1-p)^n = \frac{(1-p)^{n+1} - (1-p)}{(1-p) - 1} = \frac{(1-p) - (1-p)^{n+1}}{p}$$

Геометрическое распределение

Случай с ограниченным числом испытаний

- Рассмотрим геометрическую случайную величину Y с параметром p и случайную величину $X = \min(Y, n)$, где $n \in N$.
- Случайная величина X отражает число успехов до первой неудачи в серии из n испытаний Бернулли:

$$P(X = x) = \begin{cases} P(Y = x), \text{ если } x < n \\ P(Y \geq x), \text{ если } x \geq n \end{cases} = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x < n \\ (1-p)^x, \text{ если } x \geq n \end{cases}$$

- Математическое ожидание X можно найти с помощью формулы суммы членов геометрической прогрессии:

$$E(X) = E((1-X_1) + (1-X_1)(1-X_2) + (1-X_1)(1-X_2)(1-X_3) + ... + (1-X_1)(1-X_2) \times ... \times (1-X_n)) =$$
$$= E(1-X_1) + E(1-X_1)E(1-X_2) + ... + E(1-X_1)E(1-X_2)....E(1-X_n) =$$
$$= (1-p) + (1-p)^2 + ... + (1-p)^n = \frac{(1-p)^{n+1} - (1-p)}{(1-p) - 1} = \frac{(1-p) - (1-p)^{n+1}}{p}$$

Пример: Лаврентий строит карточный домик из 36 карт, устанавливая их поочередно. При установке очередной карты (даже первой) вероятность падения домика составляет 0.01. Вычислите математическое ожидание наибольшего числа карт, из которых Лаврентию удастся выстроить домик.

Геометрическое распределение

Случай с ограниченным числом испытаний

- Рассмотрим геометрическую случайную величину Y с параметром p и случайную величину $X = \min(Y, n)$, где $n \in N$.
- Случайная величина X отражает число успехов до первой неудачи в серии из n испытаний Бернулли:

$$P(X = x) = \begin{cases} P(Y = x), \text{ если } x < n \\ P(Y \geq x), \text{ если } x \geq n \end{cases} = \begin{cases} (1-p)^x p, \text{ если } x < n \\ (1-p)^x, \text{ если } x \geq n \end{cases}$$

- Математическое ожидание X можно найти с помощью формулы суммы членов геометрической прогрессии:

$$E(X) = E((1-X_1) + (1-X_1)(1-X_2) + (1-X_1)(1-X_2)(1-X_3) + ... + (1-X_1)(1-X_2) \times ... \times (1-X_n)) =$$
$$= E(1-X_1) + E(1-X_1)E(1-X_2) + ... + E(1-X_1)E(1-X_2)....E(1-X_n) =$$
$$= (1-p) + (1-p)^2 + ... + (1-p)^n = \frac{(1-p)^{n+1} - (1-p)}{(1-p) - 1} = \frac{(1-p) - (1-p)^{n+1}}{p}$$

Пример: Лаврентий строит карточный домик из 36 карт, устанавливая их поочередно. При установке очередной карты (даже первой) вероятность падения домика составляет 0.01. Вычислите математическое ожидание наибольшего числа карт, из которых Лаврентию удастся выстроить домик.

Решение: Обозначим через $X = \min(Y, 36)$ соответствующее число карт, где $Y \sim \text{Geom}(0.01)$, откуда:

$$E(X) = \frac{(1-0.01) - (1-0.01)^{36+1}}{0.01} \approx 30.055$$

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \ldots x_m!} p_1^{x_1} \ldots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \ldots x_m!} p_1^{x_1} \ldots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \ldots x_m!} p_1^{x_1} \ldots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \ \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маржинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \ldots x_m!} p_1^{x_1} \ldots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маржинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Пример:

- В выборах принимают участие 3 кандидата и 10 независимо голосующих избирателей. За первого из кандидатов случайно выбранный избиратель голосует с вероятностью 0.2, за второго – с вероятностью 0.3, а за третьего – с вероятностью 0.5. Найдите вероятность того, что первый кандидат получит 1 голос, второй – 2 голоса, а третий – 7 голосов. Также вычислите вероятность, с которой второй кандидат наберет 6 голосов.

Мультиномиальное распределение

Определение мультиномиального распределения

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \ldots x_m!} p_1^{x_1} \ldots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0, 1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0, 1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маржинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Пример:

- В выборах принимают участие 3 кандидата и 10 независимо голосующих избирателей. За первого из кандидатов случайно выбранный избиратель голосует с вероятностью 0.2, за второго – с вероятностью 0.3, а за третьего – с вероятностью 0.5. Найдите вероятность того, что первый кандидат получит 1 голос, второй – 2 голоса, а третий – 7 голосов. Также вычислите вероятность, с которой второй кандидат наберет 6 голосов.
  Решение:

$$X \sim M(10, 0.2, 0.3, 0.5) \implies P(X = (1, 2, 7)) = \frac{10!}{1!2!7!} 0.2^1 0.3^2 0.5^7 \approx 0.05$$

- Случайный вектор X размерности m имеет мультиномиальное распределение $M(n, p_1, \cdots p_m)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \cdots\}$ и $p_1, \cdots, p_m \in (0, 1)$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, если:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1!\ldots x_m!} p_1^{x_1} \ldots p_m^{x_m}, \text{ если } x \in \{0,1\}^m \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \quad \text{supp}(X) = \{0,1\}^m$$

- Это распределение результатов n независимых, одинаковых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из m исходов.
- Маржинальные распределения компонент случайного вектора X являются Биномиальными $X_i \sim B(n, p_i)$.

Пример:

- В выборах принимают участие 3 кандидата и 10 независимо голосующих избирателей. За первого из кандидатов случайно выбранный избиратель голосует с вероятностью 0.2, за второго – с вероятностью 0.3, а за третьего – с вероятностью 0.5. Найдите вероятность того, что первый кандидат получит 1 голос, второй – 2 голоса, а третий – 7 голосов. Также вычислите вероятность, с которой второй кандидат наберет 6 голосов.
Решение:

$$X \sim M(10, 0.2, 0.3, 0.5) \implies P(X = (1, 2, 7)) = \frac{10!}{1!2!7!} 0.2^1 0.3^2 0.5^7 \approx 0.05$$

$$X_2 \sim B(10, 0.3) \implies P(X_2 = 6) = C_{10}^{6} 0.3^6 (1 - 0.3)^{10-6} \approx 0.037$$

Мультиномиальное распределение

Логика формирования мультиномиального распределения

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от кампании A, B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.

Мультиномиальное распределение

Логика формирования мультиномиального распределения

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от кампании A, B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.
- Вероятность того, что первые три покупателя приобретут телефон кампании A, следующие четыре покупателя отдадут предпочтение телефону кампании B, а последние два выберут телефон кампании C составит:

$$P(\{(A, A, A, B, B, B, B, C, C)\}) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.1 \times 0.1 = 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от кампании A, B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.
- Вероятность того, что первые три покупателя приобретут телефон кампании A, следующие четыре покупателя отдадут предпочтение телефону кампании B, а последние два выберут телефон кампании C составит:

$$P(\{(A,A,A,B,B,B,B,C,C)\}) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.1 \times 0.1 = 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

- Вероятность события $\mathcal{D}$, в соответствии с которым три покупателя выберут A, четверо B и двое C окажется больше в число раз, которым можно поменять местами элементы последовательности A,A,A,B,B,B,B,C, C, что можно сделать следующим числом способов:

$$C_9^3 C_{(9-3)}^4 C_{(9-3-4)}^2 = C_9^3 C_6^4 C_2^2 = \frac{9!}{6!3!}\frac{6!}{2!4!}\frac{2!}{0!2!} = \frac{9!}{3!4!2!}$$

- Пусть имеются 9 покупателей, независимо принимающих решение о покупке телефона от кампании A, B или C с вероятностями 0.4, 0.5 и 0.1 соответственно.
- Вероятность того, что первые три покупателя приобретут телефон кампании A, следующие четыре покупателя отдадут предпочтение телефону кампании B, а последние два выберут телефон кампании C составит:

$$P(\{(A,A,A,B,B,B,B,C,C)\}) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.1 \times 0.1 = 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

- Вероятность события $\mathcal{D}$, в соответствии с которым три покупателя выберут A, четверо B и двое C окажется больше в число раз, которым можно поменять местами элементы последовательности A,A,A,B,B,B,B,C, C, что можно сделать следующим числом способов:

$$C_9^3 C_{(9-3)}^4 C_{(9-3-4)}^2 = C_9^3 C_6^4 C_2^2 = \frac{9!}{6!3!}\frac{6!}{2!4!}\frac{2!}{0!2!} = \frac{9!}{3!4!2!}$$

- В результате вероятность события $\mathcal{D}$ рассчитывается в соответствии с мультиномиальным распределением $X \sim M(9, 0.4, 0.5, 0.1)$:

$$P(\mathcal{D}) = P(X = (3,4,2)) = \frac{9!}{3!4!2!} 0.4^3 0.5^4 0.1^2$$

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \cdots, m\}$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \cdots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \cdots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.
  Решение:
  $$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0.2 - 0.7 = 0.1$$

Мультиномиальное распределение

Моменты мультиномиального распределения

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \cdots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.

  Решение:

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0.2 - 0.7 = 0.1$$

$$E(X) = (0.2 \times 100, 0.7 \times 100, 0.1 \times 100) = (20, 70, 10)$$

- Пользуясь тем, что $X_i \sim B(n, p_i)$, нетрудно вывести выражения для математического ожидания и дисперсии.
- $E(X) = (np_1, \cdots, np_m)$
- $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$, где $i \in \{1, \cdots, m\}$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{1, \cdots, m\}$

Пример:

- Распределение 100 посетителей между тремя магазинами имеет мультиномиальное распределение. Про параметры этого распределения известно, что $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.7$. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения.

  Решение:

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0.2 - 0.7 = 0.1$$

$$E(X) = (0.2 \times 100, 0.7 \times 100, 0.1 \times 100) = (20, 70, 10)$$

$$Cov(X) = \begin{bmatrix} 100 \times 0.2 \times (1 - 0.2) & -100 \times 0.2 \times 0.7 & -100 \times 0.2 \times 0.1 \\ -100 \times 0.2 \times 0.7 & 100 \times 0.7 \times (1 - 0.7) & -100 \times 0.7 \times 0.1 \\ -100 \times 0.2 \times 0.1 & -100 \times 0.7 \times 0.1 & 100 \times 0.1 \times (1 - 0.1) \end{bmatrix}$$