

Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2021-2022

Дедлайн: домашнее задание отправляется в **pdf** формате на почту семинариста. В копию письма необходимо поставить ассистента группы.

Почты семинаристов, на которые следует отправлять домашние задания:

1. Погорелова Полина Вячеславовна – tvis.we.2021@gmail.com (группы 202 и 203)
2. Потанин Богдан Станиславович – studypotnin@gmail.com (группа 201)
3. Слаболицкий Илья Сергеевич – tvis.fweia.hse@gmail.com (группы 204, 205 и 206)

Почты ассистентов, на которые следует продублировать домашнее задание (поставить в копию при отправке):

1. Романова Дарья Юрьевна – dyuromanova_1@edu.hse.ru (группа 201)
2. Афонина Ангелина Геннадьевна – agafonina@edu.hse.ru (группа 202)
3. Макаров Антон Андреевич – aamakarov_5@edu.hse.ru (группа 203)
4. Атласов Александр Александрович – aaatlasov@edu.hse.ru (группа 204)
5. Костромина Алина Максимовна – amkostromina@edu.hse.ru (группа 205)
6. Краевский Артем Андреевич – aakraevskiy@edu.hse.ru (группа 206)

Домашнее задание должно быть отправлено на указанные почты в **pdf** формате до **21.02.2022, 8.00 (утра)** включительно (по московскому времени). Тема письма должна иметь следующий формат: “МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ”, например, “МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 5”.

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №5

Доверительные интервалы и статистические гипотезы

Задание №1. Предприятие (20 баллов)

Прибыль фирмы за месяц (в миллионах рублей) является нормально распределенной случайной величиной. Каждый месяц прибыль фирмы не зависит от прибылей в предыдущие месяцы. Суммарная прибыль за год составила 120 миллионов рублей, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 22. Найдите реализацию двухстороннего 90%-го доверительного интервала для:

1. Математического ожидания прибыли фирмы за месяц (**3 балла**).
2. Дисперсии прибыли фирмы за месяц (**2 балла**).
3. Дисперсии прибыли фирмы за год (**5 балла**).
4. Математического ожидания прибыли фирмы за месяц, если известно, что еще за один месяц прибыль фирмы составила 10 миллионов рублей и (истинная) дисперсия прибыли фирмы за месяц равняется 25 (**5 балла**).
5. Повторите предыдущий пункт предполагая, что дисперсия неизвестна. (**5 балла**).

Задание №2. Звезды (15 баллов)

В далекой-далекой галактике средняя температура случайно выбранной звезды (измеренная в градусах Лаврентия) является нормально распределенной случайной величиной, у которой математическое ожидание совпадет со стандартным отклонением. У первой звезды средняя температура составила 100 градусов, у второй – 120 градусов, а у третьей – 80 градусов.

1. Используя обозначенную в условии информацию об ограничении на параметры постройте 80%-й двухсторонний доверительный интервал для математического ожидания средней температуры случайно выбранной звезды (**5 баллов**).
2. Найдите реализацию построенного вами доверительного интервала (**5 баллов**).
3. Запишите реализацию 80%-го доверительного интервала для математического ожидания произведения температур трех случайно взятых звезд (**5 баллов**).

Задание №3. Банки (25 баллов)

Число звонков за час в банки **Случайный вклад** и **Доверительный процент** являются независимыми Пуассоновскими случайными величинами с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. За неделю в первый банк позвонило 840 клиентов, а во второй – 2520. Реализации исправленных выборочных дисперсий для данных банков оказались равны 6 и 12 соответственно. Постройте 70%-й асимптотический доверительный интервал (и найдите его реализацию) для:

1. Математического ожидания числа ежедневных звонков, поступающих в банк **Случайный вклад** (без использования ММП оценки) (**5 балла**).
2. Математического ожидания числа ежедневных звонков, поступающих в банк **Случайный вклад** (с использованием ММП оценки) (**5 балла**).

3. Вероятности того, что в банк Случайный вклад за **день** (не час) не поступит ни одного звонка (**4 балла**).
4. Математического ожидания разницы числа звонков, ежедневно поступающих в соответствующие банки. (**3 балла**).
5. Математического ожидания суммы числа звонков, ежедневно поступающих в соответствующие банки. (**3 балла**).
6. Математического ожидания числа ежедневных звонков, поступающих в банк Случайный вклад, не используя ни информацию о реализации выборочной дисперсии, ни ММП оценку (воспользуйтесь ЦПТ и теоремой Слуцкого) (**5 баллов**).

Задание №4. Волшебная палочка (25 баллов)

Сила заклинания, произнесенного с помощью волшебной палочки, является нормальной случайной величиной с единичной дисперсией. У хороших волшебных палочек математическое ожидание силы заклинания равняется 10, а у плохих – 7. Лаврентий взял случайную волшебную палочку и хочет проверить, является ли она хорошей. Для этого он три раза произносит заклинание и считает волшебную палочку хорошей, только если сила даже самого слабого из произнесенных заклинаний оказалась больше 8.

Подсказка: вспомните вариационный ряд и распределение экстремальных статистик.

1. Сформулируйте нулевую и альтернативную гипотезы теста Лаврентия в параметрическом виде (возможны два верных варианта ответа, получаемые за счет перестановки нулевой и альтернативной гипотез) (**5 баллов**).
2. Найдите уровень значимости теста Лаврентия (**5 баллов**).
3. Вычислите мощность теста Лаврентия (**5 баллов**).
4. **Бонусный пункт:** посчитайте p-value теста Лаврентия, если сила самого слабого заклинания оказалась равна 9 и Лаврентий предполагает, что палочка плохая, если сила самого слабого заклинания не превысила некоторое значение. (**5 баллов**).
5. Используя лемму Неймана-Пирсона предложите Лаврентию альтернативный критерий тестирования гипотезы и рассчитайте его мощность при 10%-м уровне значимости. (**5 баллов**).

Задание №5. Гонцики (20 баллов)

Время (в минутах), затрачиваемое случайно выбранным гонщиком на прохождение трассы, является экспоненциальной случайной величиной. По результатам 200 заездов оказалось, что среднее время, за которое один гонщик проходит трассу, составляет 10 минут, а реализация исправленной выборочной дисперсии – 100. На уровне значимости 0.1 протестируйте (против двухсторонней альтернативы) гипотезу о том, что:

1. Математическое ожидание времени прохождения трассы случайно выбранным гонщиком равняется 11 минутам (не используйте ММП оценку) (**10 баллов**).
2. Дисперсия времени прохождения трассы случайно выбранным гонщиком равняется 121 (используйте ММП оценку) (**10 баллов**).