Фамилия:..

Имя:...

Группа:...

Задача №1

Вор пытается взломать сейф. Известно, что 20% сейфов не имеют защиты, 30% – слабо защищены, а остальные – защищены хорошо. Вор гарантированно взламывает незащищенные сейфы и не может взломать хорошо защищенный. Слабо защищенные сейфы вор может взломать с вероятностью 0.6. Если вору не удается взломать сейф, то он пытается его подорвать. Вероятность успешного подрыва, независимо от типа сейфа, составляет 0.1.

1. Найдите вероятность того, что вору не удастся взломать сейф. **(2 балла)**
2. Рассчитайте условную вероятность того, что сейф оказался слабо защищен, если известно, что вору не удалось его взломать. **(2 балла)**
3. Посчитайте условную вероятность того, что сейф был хорошо защищен, если известно, что вору удалось успешно подорвать сейф. **(3 балла)**
4. Вор дважды пытается взломать один и тот же сейф (без использования подрыва). Найдите вероятность того, что в результате вору не удастся взломать сейф. **(3 балла)**
5. Вычислите условную вероятность, с которой сейф оказался хорошо защищенным, если известно, что обе попытки вора взломать этот сейф оказались неудачными. **(5 баллов)**

Решение:

1. Через D_1, D_2 и D_3 обозначим события, в соответствии с которыми сейв является слабо, средне и хорошо защищенным соответственно. Из условия следует, что $P(D_1) = 0.2$, $P(D_2) = 0.3$ и $P(D_3) = 0.5$. Обозначим через S событие, при котором вору удается взломать сейф. По условию $P(S|D_1) = 1$, $P(S|D_2) = 0.6$ и $P(S|D_3) = 0$.

   Применяя формулу полной вероятности получаем, что:

$$P(S) = P(S|D_1)P(D_1) + P(S|D_2)P(D_2) + P(S|D_3)P(D_3) =$$
$$= 1 \times 0.2 + 0.6 \times 0.3 + 0 \times 0.5 = 0.38$$

   Используя формулу вероятности обратного события получаем искомую вероятность:

$$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.38 = 0.62$$

2. Вследствие формулы условной вероятности получаем:

$$P(D_2|\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}|D_2)P(D_2)}{P(\overline{S})} = \frac{(1 - P(S|D_2))P(D_2)}{P(\overline{S})} =$$
$$= \frac{(1 - 0.6) \times 0.3}{0.62} = \frac{6}{31} \approx 0.19$$

3. Обозначим через T событие, при котором вор успешно подрывает сейф. Сперва рассчитаем вероятность данного события с помощью формулы полной вероятности:

$$P(T) = P(T|S)P(S) + P(T|\overline{S})P(\overline{S}) = 0 \times 0.38 + 0.1 \times 0.62 = 0.062$$

   По формуле условной вероятности получаем:

$$P(D_3|T) = \frac{P(T|D_3)P(D_3)}{P(T)} = \frac{0.1 \times 0.5}{0.062} = \frac{25}{31} \approx 0.81$$

4. Через S_1 и S_2 обозначим события, при которых первая и вторая попытки взломать сейф оказались удачными. Вероятность того, что обе попытки окажутся неудачными, вследствие формулы полной вероятности и формулы вероятности пересечения событий составит:

$$P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2) = P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2|D_1)P(D_1) + P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2|D_2)P(D_2) + P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2|D_3)P(D_3) =$$
$$= P(\overline{S}_2|D_1 \cap \overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_1)P(D_1) + P(\overline{S}_2|D_2 \cap \overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_2)P(D_2) +$$
$$+ P(\overline{S}_2|D_3 \cap \overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_3)P(D_3) = 0 \times 0 \times 0.2 + 0.4 \times 0.4 \times 0.3 + 1 \times 1 \times 0.5 = 0.548$$

5. Применяя формулу условной вероятности получаем:

$$P(D_3|\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2) = \frac{P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2|D_3)P(D_3)}{P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2)} = \frac{P(\overline{S}_2|D_3 \cap \overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_3)P(D_3)}{P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2)} =$$
$$= \frac{1 \times 1 \times 0.5}{0.548} = \frac{125}{137} \approx 0.91$$

Фамилия:..

Имя:...

Группа:..

Задача №2

Лаврентий учит вопросы к экзамену ГИБДД. В мобильном приложении, которое использует Лаврентий, есть два режима игры. В **обычном** режиме Лаврентий отвечает ровно на 5 вопросов. В **бесконечном** режиме Лаврентий отвечает на вопросы до тех пор, пока не ошибется. В обоих режимах каждый из вопросов случайным образом и с равной вероятностью выбирается из общей базы, включающей 800 вопросов (то есть вопросы могут повторяться). Каждый вопрос имеет 4 варианта ответа, лишь 1 из которых является верным. Лаврентий выучил 480 вопросов и всегда дает на них верный ответ. Ответы на оставшиеся вопросы Лаврентий выбирает наугад. Вероятность того, что Лаврентий будет играть в обычном режиме, в 2 раза больше вероятности того, что он будет играть в бесконечном режиме.

1. Перед тем, как приступать к игре, Лаврентий решил ответить ровно на один случайным образом выбраннный вопрос. Посчитайте вероятность, с которой Лаврентий даст верный ответ. (**1 балл**)
2. Начиная с данного пункта считаем, что Лаврентий приступил к игре. Найдите вероятность того, что Лаврентий ответит верно ровно на 3 вопроса, если он играет в обычном режиме. (**2 балла**)
3. Вычислите вероятность того, что Лаврентий даст правильный ответ ровно на 3 вопроса. (**2 балла**)
4. Посчитайте вероятность, с которой Лаврентий играл в обычном режиме, если он правильно ответил на 3 вопроса. (**2 балла**)
5. Найдите математическое ожидание числа верных ответов Лаврентия. (**2 балла**)
6. Посчитайте дисперсию числа верных ответов Лаврентия. (**4 балла**)
7. Определите, являются ли независимыми следующие события. A – Лаврентий играет в обычном режиме. B – Лаврентий дал верный ответ не менее, чем на 5 вопросов. (**2 балла**)
8. В игре ввели новый режим. Этот режим отличается от обычного двумя особенностями. Во-первых, в нем задается ровно 10 вопросов. Во-вторых, в новом режиме начисляются призовые баллы. Лаврентий получает балл за верный ответ на вопрос, если на предыдущие 2 вопроса он также дал правильный ответ (то есть за первый и второй вопросы балл получить нельзя). Найдите математическое ожидание числа баллов, полученных Лаврентием за ответы на вопросы в новом режиме. (**5 баллов**)

Решение

1. Обозначим через Z событие, при котором Лаврентий верно отвечает на случайно выбранный вопрос. Через Q обозначим событие, при котором соответствующий вопрос был выбран из числа тех, на которые Лаврентий знает ответ. Применяя формулу полной вероятности получаем:

$$P(Z)=P(Z|Q)P(Q)+P(Z|\overline{Q})P(\overline{Q})=1\times\frac{480}{800}+0.25\times\frac{800-480}{800}=0.7$$

2. Обозначим через D событие, при котором Лаврентий играет в обычном режиме. Через V обозначим случайную величину, отражающую число верных ответов. Обратим внимание, что $V|D\sim B(5,0.7)$ и $V|\overline{D}\sim Geom(0.3)$.

   Поскольку $V|D\sim B(5,0.7)$, то:

$$P(V=3|D)=C_5^3 0.7^3(1-0.7)^2=0.3087$$

3. Применим формулу полной вероятности:

$$P(V=3)=P(V=3|D)P(D)+P(V=3|\overline{D})P(\overline{D})=$$
$$=0.3087\times\frac{2}{3}+\left(0.7^3\times(1-0.7)\right)\times\frac{1}{3}=0.2401$$

4. Воспользуемся формулой условной вероятности:

$$P(D|V=3)=\frac{P(V=3|D)P(D)}{P(V=3)}=\frac{0.3087\times\frac{2}{3}}{0.2401}\approx 0.857$$

5. Обратим внимание, что $E(V|D)=5\times0.7=3.5$ и $E(V|\overline{D})=\frac{1-0.3}{0.3}=\frac{7}{3}$. По свойствам математического ожидания получаем:

$$E(V)=E(V|D)P(D)+E(V|D)P(\overline{D})=3.5\times\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{28}{9}\approx 3.11$$

6. Посчитаем условные дисперсии:

$$Var(V|D)=5\times0.7\times(1-0.7)=1.05$$
$$Var(V|\overline{D})=\frac{1-0.3}{0.3^2}=\frac{70}{9}\approx 7.78$$

   Отсюда находим условные вторые начальные моменты:

$$E(V^2|D)=E(V|D)^2+Var(V|D)=3.5^2+1.05=13.3$$
$$E(V^2|\overline{D})=E(V|\overline{D})^2+Var(V|\overline{D})=\left(\frac{7}{3}\right)^2+\frac{70}{9}=\frac{119}{9}\approx 13.2$$

   В результате получаем:

$$Var(V)=E(V^2)-E(V)^2=E(V^2|D)P(D)+E(V^2|\overline{D})P(\overline{D})+E(V)^2=$$
$$=13.3\times\frac{2}{3}+\frac{119}{9}\times\frac{1}{3}-\left(\frac{28}{9}\right)^2=\frac{1456}{405}\approx 3.595$$

7. Из условия известно, что $P(A) = \frac{2}{3}$. Для нахождения вероятности события B применим формулу полной вероятности:

$$P(B) = P(V \geq 5) = P(V \geq 5|D)P(D) + P(V \geq 5|\overline{D})P(\overline{D}) =$$
$$= 0.7^5 \times \frac{2}{3} + 0.7^5 \times \frac{1}{3} = 0.7^5$$

В результате получаем, что события A и B независимы, поскольку:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.7^5 \times \frac{2}{3} = P(A)P(B)$$

8. Обозначим через $V_i \sim Ber(0.7)$ случайную величину, принимающую значение 1, если Лаврентий дал верный овет на i-й вопрос в новом режиме и 0 – в противном случае. Число баллов, полученных Лаврентием за ответы на вопросы, можно представить в виде:

$$V_1V_2V_3 + V_2V_3V_4 + ... + V_8V_9V_{10}$$

Пользуясь независимостью данных случайных величин получаем:

$$E(V_1V_2V_3 + V_2V_3V_4 + ... + V_8V_9V_{10}) = E(V_1)E(V_2)E(V_3) + ... + E(V_8)E(V_9)E(V_{10}) =$$
$$= 0.7^3 \times 8 = 2.744$$

Фамилия:...

Имя:...

Группа:...

Задача №3

На первом этаже 6-этажного дома в пустой лифт зашли k человек. Каждый из них с равной вероятностью и независимо от других пассажиров может выйти на любом из этажей (кроме, очевидно, первого).

1. Пусть $k = 3$. Вычислите математическое ожидание числа остановок лифта. **(10 баллов)**

2. Пусть $k = 1$. Найдите ковариацию между числом остановок на четных и нечетных этажах. **(5 баллов)**

Решение:

1. Случайную величину, отражающую общее число остановок лифта, обозначим как X. Через X_i, где $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, обозначим случайные величины, принимающие значение 1, если на i-м этаже вышел хотя бы один пассажир и 0 – в противном случае. Через A_j обозначая событие, в соответствии с которым на 2-м этаже выходит j-й из 3-х пассажиров. Обращая внимание на то, что по условию соответствующие события независимы, рассмотрим закон распределения случайной величины X_2:

$$P(X_2 = 1) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A}_1) \times P(\overline{A}_2) \times P(\overline{A}_3) =$$

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0.488$$

$$P(X_2 = 0) = 1 - P(X_2 = 0) = 1 - 0.488 = 0.512$$

Исходя из информации о распределении найдем математическое ожидание соответствующей случайной величины:

$$E(X_2) = P(X_2 = 1) \times 1 + P(X_2 = 0) \times 0 \approx 1 \times 0.488 + 0 \times 0.512 = 0.488$$

Поскольку пассажиры независимо друг от друга и с равной вероятностью могут выходить на любом из этажей, то X_i будут одинаково распределены, то есть так же, как и X_2. В частности, у этих случайных величин будут одинаковые математические ожидания. Кроме того заметим, что:

$$X = X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

В результате, в силу свойства линейности математического ожидания получаем:

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) \approx$$

$$\approx 0.488 + 0.488 + 0.488 + 0.488 + 0.488 = 2.44$$

Возможен и альтернативный подход к решению. С помощью комбинаторики рассчитаем вероятность каждого возможного числа остановок лифта:

$$P(X = 1) = \frac{5}{5^3}$$

$$P(X = 2) = \frac{3 \times 5 \times 4}{5^3}$$

$$P(X = 3) = \frac{5 \times 4 \times 3}{5^3}$$

У каждой из вероятностей в знаменателе указано общее число способов распределить 3-х пассажиров по 5-ти этажам, а в числителе – число способов, при которых лифт совершит соответствующее количество остановок.

Пользуясь распределением числа остановок лифта X найдем математическое ожидание этой случайной величины:

$$E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 2) \times 2 + P(X = 3) \times 3 =$$

$$= \frac{5}{5^3} \times 1 + \frac{3 \times 5 \times 4}{5^3} \times 2 + \frac{5 \times 4 \times 3}{5^3} \times 3 = 2.44$$

2. Обратим внимание, что поскольку в лифт зашел лишь один пассажир, то $E(X_i) = \frac{1}{5} = 0.2$ и из $X_i = 1$ следует $X_j = 0$ (и наоборот) для любых $i \neq j$, а значит $E(X_i X_j) = 0$. Следовательно, при $i \neq j$ получаем:

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = 0 - 0.2 \times 0.2 = -0.04$$

Отсюда получаем, что:

$$\begin{gathered} Cov(X_2 + X_4 + X_6, X_3 + X_5) = \\ = Cov(X_2, X_3) + Cov(X_4, X_3) + Cov(X_6, X_3) + \\ + Cov(X_2, X_5) + Cov(X_4, X_5) + Cov(X_6, X_5) = \\ = 6 \times (-0.04) = -0.24 \end{gathered}$$

В качестве альтернативы можем рассмотреть случайную величину Y, принмающую значение 1, если лифт остановился на четном этаже и 0 – в противном случае. Поскольку остановки на всех этажах равновероятны, то $P(Y = 1) = \frac{3}{5} = 0.6$. Отсюда получаем, что:

$$Cov(Y, 1 - Y) = Cov(Y, -Y) = -Var(Y) = -0.6 \times (1 - 0.6) = -0.24$$