Теория Вероятностей и Статистика

Сходимость по вероятности

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2022

Границы вероятностей

Неравенство Маркова

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X < 0) = 0$, то при любом $\alpha > 0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X < 0) = 0$, то при любом $\alpha > 0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha > 0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X:

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X < 0) = 0$, то при любом $\alpha > 0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha > 0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X:

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

$$E(X) = \sum_{t \in \textbf{supp}(X)} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \textbf{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \textbf{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)\alpha = \alpha P(X \geq \alpha)$$

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X < 0) = 0$, то при любом $\alpha > 0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha > 0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X:

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

$$E(X) = \sum_{t \in \textbf{supp}(X)} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \textbf{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)t \geq \sum_{t \in \textbf{supp}(X): t \geq \alpha} P(X = t)\alpha = \alpha P(X \geq \alpha)$$

Пример:

- Срок службы видеокарты (в годах) является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 2. При помощи неравенства Маркова определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что видеокарта прослужит не менее (не более) 10 лет.

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X<0)=0$, то при любом $\alpha>0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha>0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X:

$$E(X)=\int_{0}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

$$E(X)=\sum_{t \in \textbf{supp}(X)} P(X=t)t \geq \sum_{t \in \textbf{supp}(X):t\geq\alpha} P(X=t)t \geq \sum_{t \in \textbf{supp}(X):t\geq\alpha} P(X=t)\alpha = \alpha P(X \geq \alpha)$$

Пример:

- Срок службы видеокарты (в годах) является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 2. При помощи неравенства Маркова определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что видеокарта прослужит не менее (не более) 10 лет.

Решение: обратим внимание, что $P(X<0)=0$, $E(X)=2$ и $\alpha=10$, откуда:

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X<0)=0$, то при любом $\alpha>0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha>0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X:

$$E(X)=\int_0^\infty xf(x)dx \geq \int_\alpha^\infty xf(x)dx \geq \int_\alpha^\infty \alpha f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

$$E(X)=\sum_{t\in \textbf{supp}(X)} P(X=t)t \geq \sum_{t\in \textbf{supp}(X):t\geq\alpha} P(X=t)t \geq \sum_{t\in \textbf{supp}(X):t\geq\alpha} P(X=t)\alpha = \alpha P(X \geq \alpha)$$

Пример:

- Срок службы видеокарты (в годах) является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 2. При помощи неравенства Маркова определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что видеокарта прослужит не менее (не более) 10 лет.

Решение: обратим внимание, что $P(X<0)=0$, $E(X)=2$ и $\alpha=10$, откуда:

$$\text{Верхняя граница: } P(X \geq 10) \leq \frac{2}{10} = 0.2$$

- Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения $P(X<0)=0$, то при любом $\alpha>0$ справедливо **неравенство Маркова**:

$$P(X\geq\alpha)\leq\frac{E(X)}{\alpha}$$

Доказательство: положим $\alpha>0$ и рассмотрим по отдельности случаи с непрерывным и дискретным X:

$$E(X)=\int_{0}^{\infty}xf(x)dx\geq\int_{\alpha}^{\infty}xf(x)dx\geq\int_{\alpha}^{\infty}\alpha f(x)dx=\alpha P(X\geq\alpha)$$

$$E(X)=\sum_{t\in\textbf{supp}(X)}P(X=t)t\geq\sum_{t\in\textbf{supp}(X):t\geq\alpha}P(X=t)t\geq\sum_{t\in\textbf{supp}(X):t\geq\alpha}P(X=t)\alpha=\alpha P(X\geq\alpha)$$

Пример:

- Срок службы видеокарты (в годах) является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 2. При помощи неравенства Маркова определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что видеокарта прослужит не менее (не более) 10 лет.

Решение: обратим внимание, что $P(X<0)=0$, $E(X)=2$ и $\alpha=10$, откуда:

$$\text{Верхняя граница: } P(X\geq 10)\leq\frac{2}{10}=0.2$$

$$\text{Нижняя граница: } P(X\leq 10)=1-P(X\geq 10)\geq 1-0.2=0.8$$

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2},\ \alpha > 0$$

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2},\ \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2},\ \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

$$P((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) = P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

Неравенство Чебышева

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2},\ \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

$$P((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) = P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

- Полагая $\alpha = k\sigma$ можно переписать это неравенство в виде:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2},\ k > 0$$

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2},\ \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

$$P((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) = P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

- Полагая $\alpha = k\sigma$ можно переписать это неравенство в виде:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2},\ k > 0$$

Пример:

- Прибыль фирмы является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 10 и дисперсией 25. При помощи неравенства Чебышева определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что прибыль фирмы отклонится от ожидаемой более (менее), чем на 6.

Неравенство Чебышева

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2},\ \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

$$P((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) = P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

- Полагая $\alpha = k\sigma$ можно переписать это неравенство в виде:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2},\ k > 0$$

Пример:

- Прибыль фирмы является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 10 и дисперсией 25. При помощи неравенства Чебышева определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что прибыль фирмы отклонится от ожидаемой более (менее), чем на 6.

Решение: пользуясь тем, что речь идет о непрерывной с.в., заменим строгие неравенства на нестрогие:

$$\text{Верхняя граница: } P(|X - 10| > 6) = P(|X - 10| \geq 6) \leq 25/6^2 = 25/36$$

- У случайной величины X для краткости обозначим $Var(X) = \sigma^2 > 0$ и $E(X) = \mu$. Тогда **неравенство Чебышева** для любого $\alpha > 0$ гарантирует, что:

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2},\ \alpha > 0$$

Доказательство: применяя неравенство Маркова к с.в. $(X - \mu)^2$ получаем:

$$P((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) = P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

- Полагая $\alpha = k\sigma$ можно переписать это неравенство в виде:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2},\ k > 0$$

Пример:

- Прибыль фирмы является непрерывной случайной величиной с математическим ожиданием 10 и дисперсией 25. При помощи неравенства Чебышева определите верхнюю (нижнюю) границу вероятности того, что прибыль фирмы отклонится от ожидаемой более (менее), чем на 6.

Решение: пользуясь тем, что речь идет о непрерывной с.в., заменим строгие неравенства на нестрогие:

Верхняя граница: $P(|X - 10| > 6) = P(|X - 10| \geq 6) \leq 25/6^2 = 25/36$

Нижняя граница: $P(|X - 10| < 6) = 1 - P(|X - 10| \geq 6) \geq 1 - (25/6^2) = 11/36$

Сходимость по вероятности

Определение

- Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ **сходится по вероятности** к случайной величине X, что обозначается как $X_n \xrightarrow{p} X$ или $\operatorname*{plim}_{n\to\infty} X_n = X$, если:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0,\ \forall \epsilon > 0$$

- Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ **сходится по вероятности** к случайной величине X, что обозначается как $X_n \xrightarrow{p} X$ или $\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\, X_n = X$, если:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0,\ \forall \epsilon > 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность **стандартных нормальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X. Известно, что $Cov\left(X_n, X\right) = \frac{n-1}{n}$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по вероятности данная последовательность к X.

- Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ **сходится по вероятности** к случайной величине X, что обозначается как $X_n \xrightarrow{p} X$ или $\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\, X_n = X$, если:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0,\ \forall\epsilon > 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность **стандартных нормальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X. Известно, что $Cov\left(X_n, X\right) = \frac{n-1}{n}$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по вероятности данная последовательность к X.

Решение: найдем распределение $X_n - X$:

$$\begin{cases} E(X_n - X) = E(X_n) - E(X) = 0 - 0 = 0 \\ Var(X_n - X) = Var(X_n) + Var(X) - 2Cov(X_n, X) = 1 + 1 - 2\frac{n-1}{n} \end{cases} \implies (X_n - X) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{n}\right)$$

- Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ **сходится по вероятности** к случайной величине X, что обозначается как $X_n \xrightarrow{p} X$ или $\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\, X_n = X$, если:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0,\ \forall \epsilon > 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность **стандартных нормальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X. Известно, что $Cov\,(X_n, X) = \frac{n-1}{n}$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по вероятности данная последовательность к X.
Решение: найдем распределение $X_n - X$:

$$\begin{cases} E(X_n - X) = E(X_n) - E(X) = 0 - 0 = 0 \\ Var(X_n - X) = Var(X_n) + Var(X) - 2Cov(X_n, X) = 1 + 1 - 2\frac{n-1}{n} \end{cases} \implies (X_n - X) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{n}\right)$$

Сходимость $X_n \xrightarrow{p} X$ выполняется, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ соблюдается:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n - X > \epsilon) + P(X_n - X < -\epsilon) =$$

- Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ **сходится по вероятности** к случайной величине X, что обозначается как $X_n \xrightarrow{p} X$ или $\underset{n\to\infty}{\operatorname{plim}} X_n = X$, если:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0,\ \forall \epsilon > 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность **стандартных нормальных** случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X. Известно, что $Cov\,(X_n, X) = \frac{n-1}{n}$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по вероятности данная последовательность к X.
Решение: найдем распределение $X_n - X$:

$$\begin{cases} E(X_n - X) = E(X_n) - E(X) = 0 - 0 = 0 \\ Var(X_n - X) = Var(X_n) + Var(X) - 2Cov(X_n, X) = 1 + 1 - 2\frac{n-1}{n} \end{cases} \implies (X_n - X) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{n}\right)$$

Сходимость $X_n \xrightarrow{p} X$ выполняется, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ соблюдается:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n - X > \epsilon) + P(X_n - X < -\epsilon) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon - 0}{\sqrt{\frac{2}{n}}}\right)\right) = 2 - 2\lim_{n\to\infty}\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) = 2 - 2\lim_{k\to\infty}\Phi(k) = 2 - 2 = 0$$

Сходимость по вероятности

Сходимость по вероятности к константе (частный случай)

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.

Сходимость по вероятности к константе (частный случай)

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.
- $X_n \xrightarrow{p} c$ тогда и только тогда, когда соблюдаются следующие условия:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = c$$
$$\lim_{n\to\infty} Var(X_n) = 0$$

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.
- $X_n \xrightarrow{p} c$ тогда и только тогда, когда соблюдаются следующие условия:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = c$$
$$\lim_{n\to\infty} Var(X_n) = 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, таких, что $X_n \sim EXP(n)$. Покажите, что эта последовательность сходится по вероятности к $c = 0$.

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.
- $X_n \xrightarrow{p} c$ тогда и только тогда, когда соблюдаются следующие условия:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = c$$
$$\lim_{n\to\infty} Var(X_n) = 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, таких, что $X_n \sim EXP(n)$. Покажите, что эта последовательность сходится по вероятности к $c = 0$.

Решение:
Способ 1 (используя упрощенный способ для констант):

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} Var(X_n) = \lim_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$$

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.
- $X_n \xrightarrow{p} c$ тогда и только тогда, когда соблюдаются следующие условия:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = c$$
$$\lim_{n\to\infty} Var(X_n) = 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, таких, что $X_n \sim EXP(n)$. Покажите, что эта последовательность сходится по вероятности к $c = 0$.

Решение:

Способ 1 (используя упрощенный способ для констант):

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} Var(X_n) = \lim_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$$

Способ 2 (используя общий подход):

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} e^{-n\epsilon} = 0$$

Сходимость по вероятности

Сходимость по вероятности к константе (частный случай)

- Рассмотрим частный случай сходимости по вероятности, когда $X = c$, где c – константа.
- $X_n \xrightarrow{p} c$ тогда и только тогда, когда соблюдаются следующие условия:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = c$$
$$\lim_{n\to\infty} Var(X_n) = 0$$

Пример:

- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, таких, что $X_n \sim EXP(n)$. Покажите, что эта последовательность сходится по вероятности к $c = 0$.

Решение:

Способ 1 (используя упрощенный способ для констант):

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} Var(X_n) = \lim_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$$

Способ 2 (используя общий подход):

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} e^{-n\epsilon} = 0$$

Способ 3 (используя неравенство Маркова):

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\epsilon} = 0$$

Сходимость по вероятности

О малое

- Пусть имеется последовательность $X_1/\alpha_1, X_2/\alpha_2, \cdots$ со множеством индексов I, где при любом $i \in I$: X_i – случайная величина, а α_i – отличная от нуля константа. Если эта последовательность сходится по вероятности к нулю, то записывают:

$$X_n = o_p\left(\alpha_n\right) \text{ или } \frac{X_n}{\alpha_n} = o_p\left(1\right)$$

- Пусть имеется последовательность $X_1/\alpha_1, X_2/\alpha_2, \cdots$ со множеством индексов I, где при любом $i \in I$: X_i – случайная величина, а α_i – отличная от нуля константа. Если эта последовательность сходится по вероятности к нулю, то записывают:

$$X_n = o_p(\alpha_n) \text{ или } \frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$$

- В частности, запись $X_n = o_p(1)$ эквивалентна $X_n \xrightarrow{p} 0$, а запись $\frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$ эквивалентна $\frac{X_n}{\alpha_n} \xrightarrow{p} 0$. То есть знак равенства не нужно воспринимать буквально.

- Пусть имеется последовательность $X_1/\alpha_1, X_2/\alpha_2, \cdots$ со множеством индексов I, где при любом $i \in I$: X_i – случайная величина, а α_i – отличная от нуля константа. Если эта последовательность сходится по вероятности к нулю, то записывают:

$$X_n = o_p\left(\alpha_n\right) \text{ или } \frac{X_n}{\alpha_n} = o_p\left(1\right)$$

- В частности, запись $X_n = o_p\left(1\right)$ эквивалентна $X_n \xrightarrow{p} 0$, а запись $\frac{X_n}{\alpha_n} = o_p\left(1\right)$ эквивалентна $\frac{X_n}{\alpha_n} \xrightarrow{p} 0$. То есть знак равенства не нужно воспринимать буквально.
- Если $Y_n = o_p(1)$, то часто записывают $X_n + Y_n = X_n + o_p(1)$.

Сходимость по вероятности

О малое

- Пусть имеется последовательность $X_1/\alpha_1, X_2/\alpha_2, \cdots$ со множеством индексов I, где при любом $i \in I$: X_i – случайная величина, а α_i – отличная от нуля константа. Если эта последовательность сходится по вероятности к нулю, то записывают:

$$X_n = o_p(\alpha_n) \text{ или } \frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$$

- В частности, запись $X_n = o_p(1)$ эквивалентна $X_n \xrightarrow{p} 0$, а запись $\frac{X_n}{\alpha_n} = o_p(1)$ эквивалентна $\frac{X_n}{\alpha_n} \xrightarrow{p} 0$. То есть знак равенства не нужно воспринимать буквально.
- Если $Y_n = o_p(1)$, то часто записывают $X_n + Y_n = X_n + o_p(1)$.

  Пример:

  Имеется последовательность $X_1, X_2, \cdots$ нормальных случайных величин, таких, что $X_n \sim \mathcal{N}(0, n)$. Покажите, что $X_n = o_p(n)$.

- Пусть имеется последовательность $X_1/\alpha_1, X_2/\alpha_2, \cdots$ со множеством индексов I, где при любом $i \in I$: X_i – случайная величина, а α_i – отличная от нуля константа. Если эта последовательность сходится по вероятности к нулю, то записывают:

$$X_n = o_p\left(\alpha_n\right) \text{ или } \frac{X_n}{\alpha_n} = o_p\left(1\right)$$

- В частности, запись $X_n = o_p\left(1\right)$ эквивалентна $X_n \xrightarrow{p} 0$, а запись $\frac{X_n}{\alpha_n} = o_p\left(1\right)$ эквивалентна $\frac{X_n}{\alpha_n} \xrightarrow{p} 0$. То есть знак равенства не нужно воспринимать буквально.
- Если $Y_n = o_p(1)$, то часто записывают $X_n + Y_n = X_n + o_p(1)$.
  Пример:
  Имеется последовательность $X_1, X_2, \cdots$ нормальных случайных величин, таких, что $X_n \sim \mathcal{N}(0, n)$. Покажите, что $X_n = o_p(n)$.
  Решение: обратим внимание, что $\frac{X_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(\frac{0}{n}, \frac{n}{n^2}\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$, откуда:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{X_n}{n} - 0| \geq \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n}{n} > \varepsilon\right) + P\left(\frac{X_n}{n} < -\varepsilon\right) = 2 - 2\lim_{n\to\infty}\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) = 0$$

- Пусть имеется функция g(x) и случайная величина X (которая может быть и константой). Множество точек разрыва этой функции обозначим как D_g. По **теореме Манна-Вальда** если $P(X \in D_g) = 0$, то из $X_n \xrightarrow{p} X$ следует $g\left(X_n\right) \xrightarrow{p} g\left(X\right)$.

- Пусть имеется функция g(x) и случайная величина X (которая может быть и константой). Множество точек разрыва этой функции обозначим как D_g. По **теореме Манна-Вальда** если $P(X \in D_g) = 0$, то из $X_n \xrightarrow{p} X$ следует $g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$.
  Пример:
- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, таких, что $X_n \sim EXP(n)$. Найдите, к чему сходится по вероятности последовательность $(X_1 + 10)^2, (X_2 + 10)^2, \cdots$.

- Пусть имеется функция g(x) и случайная величина X (которая может быть и константой). Множество точек разрыва этой функции обозначим как D_g. По **теореме Манна-Вальда** если $P(X \in D_g) = 0$, то из $X_n \xrightarrow{p} X$ следует $g\left(X_n\right) \xrightarrow{p} g\left(X\right)$.
Пример:
- Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, таких, что $X_n \sim EXP(n)$. Найдите, к чему сходится по вероятности последовательность $\left(X_1 + 10\right)^2, \left(X_2 + 10\right)^2, \cdots$.
Решение:
В данном случае речь идет о функции $g(x) = (x + 10)^2$, которая не имеет разрывов. Ранее было показано, что $X_n \xrightarrow{p} 0$, откуда, по теореме Манна-Вальда, получаем $(X_n + 10)^2 \xrightarrow{p} (0 + 10)^2$, то есть $(X_n + 10)^2 \xrightarrow{p} 100$.

- Имеется бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, у которых $E(X_1) = \mu$ и $Var(X_1) = \sigma^2$. Тогда по **закону больших чисел** (ЗБЧ):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

Теоремы о сходимости по вероятности

Закон больших чисел (ЗБЧ)

- Имеется бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, у которых $E(X_1) = \mu$ и $Var(X_1) = \sigma^2$. Тогда по **закону больших чисел** (ЗБЧ):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

Доказательство: применим одинаковую распределенность $Var(X_1) = Var(X_2) = \cdots = \sigma^2$ и независимость:

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times Var(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Теоремы о сходимости по вероятности

Закон больших чисел (ЗБЧ)

- Имеется бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, у которых $E(X_1) = \mu$ и $Var(X_1) = \sigma^2$. Тогда по **закону больших чисел** (ЗБЧ):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

Доказательство: применим одинаковую распределенность $Var(X_1) = Var(X_2) = \cdots = \sigma^2$ и независимость:

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times Var(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Используя неравенство Чебышева получаем:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| > \epsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} = 0$$

- Имеется бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, у которых $E(X_1) = \mu$ и $Var(X_1) = \sigma^2$. Тогда по **закону больших чисел** (ЗБЧ):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

Доказательство: применим одинаковую распределенность $Var(X_1) = Var(X_2) = \cdots = \sigma^2$ и независимость:

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times Var(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Используя неравенство Чебышева получаем:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| > \epsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} = 0$$

Пример: Лаврентий бесконечное число раз подбрасывает обычную монетку. Найдите, к чему стремится по вероятности доля выпавших орлов.

Теоремы о сходимости по вероятности

Закон больших чисел (ЗБЧ)

- Имеется бесконечная последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, у которых $E(X_1) = \mu$ и $Var(X_1) = \sigma^2$. Тогда по **закону больших чисел** (ЗБЧ):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

Доказательство: применим одинаковую распределенность $Var(X_1) = Var(X_2) = \cdots = \sigma^2$ и независимость:

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times Var(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Используя неравенство Чебышева получаем:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| > \epsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} = 0$$

Пример: Лаврентий бесконечное число раз подбрасывает обычную монетку. Найдите, к чему стремится по вероятности доля выпавших орлов.

Решение: мы имеем дело с бесконечной последовательности независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин с параметром $p = 0.5$. Поскольку $E(X_i) = 0.5$, то по ЗБЧ:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} 0.5$$

Дополнительные примеры

Фирма и ЗБЧ

- Каждый день прибыль фирмы является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием и дисперсией, равными одному. Также, прибыль не зависит от прибыли, полученной ранее. Пользуясь законом больших чисел, определите, к чему стремится по вероятности средняя прибыль фирмы, а также вероятность того, что средняя прибыль за год отклонится от ожидаемой средней прибыли более, чем на 10%.

- Каждый день прибыль фирмы является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием и дисперсией, равными одному. Также, прибыль не зависит от прибыли, полученной ранее. Пользуясь законом больших чисел, определите, к чему стремится по вероятности средняя прибыль фирмы, а также вероятность того, что средняя прибыль за год отклонится от ожидаемой средней прибыли более, чем на 10%.
  Решение
  Поскольку ежедневные прибыли являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, то в силу ЗБЧ:
  $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{p} 1$$

- Каждый день прибыль фирмы является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием и дисперсией, равными одному. Также, прибыль не зависит от прибыли, полученной ранее. Пользуясь законом больших чисел, определите, к чему стремится по вероятности средняя прибыль фирмы, а также вероятность того, что средняя прибыль за год отклонится от ожидаемой средней прибыли более, чем на 10%.

  Решение

  Поскольку ежедневные прибыли являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, то в силу ЗБЧ:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} 1$$

  Обратим внимание, что:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(1, \frac{1}{n}\right)$$

- Каждый день прибыль фирмы является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием и дисперсией, равными одному. Также, прибыль не зависит от прибыли, полученной ранее. Пользуясь законом больших чисел, определите, к чему стремится по вероятности средняя прибыль фирмы, а также вероятность того, что средняя прибыль за год отклонится от ожидаемой средней прибыли более, чем на 10%.
  Решение
  Поскольку ежедневные прибыли являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, то в силу ЗБЧ:
  $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{p} 1$$
  Обратим внимание, что:
  $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \sim \mathcal{N}\left(1, \frac{1}{n}\right)$$
  Отсюда получаем искомую вероятность:
  $$P\left(|\frac{1}{365}\sum_{i=1}^{365}X_i - 1| \geq 0.1 \times 1\right) = P\left(\frac{1}{365}\sum_{i=1}^{365}X_i \geq 1.1\right) + P\left(\frac{1}{365}\sum_{i=1}^{365}X_i \leq 0.9\right) =$$

- Каждый день прибыль фирмы является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием и дисперсией, равными одному. Также, прибыль не зависит от прибыли, полученной ранее. Пользуясь законом больших чисел, определите, к чему стремится по вероятности средняя прибыль фирмы, а также вероятность того, что средняя прибыль за год отклонится от ожидаемой средней прибыли более, чем на 10%.

Решение

Поскольку ежедневные прибыли являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, то в силу ЗБЧ:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{p} 1$$

Обратим внимание, что:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \sim \mathcal{N}\left(1, \frac{1}{n}\right)$$

Отсюда получаем искомую вероятность:

$$P\left(|\frac{1}{365}\sum_{i=1}^{365}X_i - 1| \geq 0.1\times 1\right) = P\left(\frac{1}{365}\sum_{i=1}^{365}X_i \geq 1.1\right) + P\left(\frac{1}{365}\sum_{i=1}^{365}X_i \leq 0.9\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1.1-1}{\sqrt{1/365}}\right) + \Phi\left(\frac{0.9-1}{\sqrt{1/365}}\right) \approx 0.056$$

- Имеется определенный интеграл $\int_a^b g(x)dx$, где $g(x)$ – некоторая, возможно очень сложная функция.

- Имеется определенный интеграл $\int_a^b g(x)dx$, где $g(x)$ – некоторая, возможно очень сложная функция.
- Закон больших чисел позволяет приблизительно (но потенциально с очень большой точностью) посчитать значение такого интеграла с использованием очень простого алгоритма.

Приложение ЗБЧ

Интегрирование методом Монте-Карло

- Имеется определенный интеграл $\int_a^b g(x)dx$, где $g(x)$ – некоторая, возможно очень сложная функция.
- Закон больших чисел позволяет приблизительно (но потенциально с очень большой точностью) посчитать значение такого интеграла с использованием очень простого алгоритма.
- Рассмотрим произвольное распределение с носителем (a, b) и функцией плотности $f_X(x)$, откуда:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g(x)\frac{f_X(x)}{f_X(x)}dx = \int_a^b \frac{g(x)}{f_X(x)}f_X(x)dx = E\left(\frac{g(X)}{f_X(X)}\right)$$

- Имеется определенный интеграл $\int_a^b g(x)dx$, где $g(x)$ – некоторая, возможно очень сложная функция.
- Закон больших чисел позволяет приблизительно (но потенциально с очень большой точностью) посчитать значение такого интеграла с использованием очень простого алгоритма.
- Рассмотрим произвольное распределение с носителем (a, b) и функцией плотности $f_X(x)$, откуда:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g(x)\frac{f_X(x)}{f_X(x)}dx = \int_a^b \frac{g(x)}{f_X(x)}f_X(x)dx = E\left(\frac{g(X)}{f_X(X)}\right)$$

- Предположим, что случайная величина $\frac{g(X)}{f_X(X)}$ имеет конечные математическое ожидание и дисперсию. Тогда, согласно ЗБЧ, если мы сгенерируем очень много независимых случайных величин X_i из распределения с функцией плотности $f_X(x)$ (то есть распределенных так же, как X), затем заменим каждую из них на $\frac{g(X_i)}{f_X(X_i)}$ и посчитаем по этим преобразованным случайным величнам выборочное среднее, то оно почти наверняка окажется очень близко к значению искомого интеграла.

Приложение ЗБЧ

Интегрирование методом Монте-Карло

- Имеется определенный интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$, где $g(x)$ – некоторая, возможно очень сложная функция.
- Закон больших чисел позволяет приблизительно (но потенциально с очень большой точностью) посчитать значение такого интеграла с использованием очень простого алгоритма.
- Рассмотрим произвольное распределение с носителем (a, b) и функцией плотности $f_X(x)$, откуда:

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b g(x)\frac{f_X(x)}{f_X(x)}dx = \int\limits_a^b \frac{g(x)}{f_X(x)}f_X(x)dx = E\left(\frac{g(X)}{f_X(X)}\right)$$

- Предположим, что случайная величина $\frac{g(X)}{f_X(X)}$ имеет конечные математическое ожидание и дисперсию. Тогда, согласно ЗБЧ, если мы сгенерируем очень много независимых случайных величин X_i из распределения с функцией плотности $f_X(x)$ (то есть распределенных так же, как X), затем заменим каждую из них на $\frac{g(X_i)}{f_X(X_i)}$ и посчитаем по этим преобразованным случайным величнам выборочное среднее, то оно почти наверняка окажется очень близко к значению искомого интеграла.
- Например, чтобы посчитать интеграл $\int_1^3 \cos(e^{-\sqrt{x}})dx$ возьмем за основу равномерное распределение $U(1, 3)$, функция плотности которого на носителе выглядит как $f_X(x) = 0.5$. Затем сгенерируем множество независимых случайных величин $X_i \sim U(1, 3)$ и их значения заменим на $\frac{g(X_i)}{f_X(X_i)} = 2\cos(e^{-\sqrt{X_i}})$. Усреднив соответствующие значения мы почти наверняка получим очень точное приближение интеграла.