Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2022-2023

Дедлайн: домашнее задание отправляется в **pdf** формате на почту семинариста. В копию письма необходимо поставить ассистента группы.

Почты, на которые следует отправлять домашние задания, в зависимости от вашего семинариста:

1. Погорелова Полина Вячеславовна – tvis.we.2021@gmail.com
2. Потанин Богдан Станиславович – tvismirec@gmail.com
3. Слаболицкий Илья Сергеевич – tvis.fweia.hse@gmail.com

Домашнее задание должно быть отправлено на указанные почты в **pdf** формате до конца дня **20.10.2022** включительно (по московскому времени). Тема письма должна иметь следующий формат: “МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ”, например, “МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 1”.

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №1

Задание №1. Монеты (40 баллов)

В компьютерной игре при победе над противником из него выпадает железный, серебряный или золотой сундук с монетами с вероятностями 0.6, 0.3 и 0.1 соответственно. В железном сундуке с равной вероятностью лежит от 1-й до 3-х монет. В серебряном сундуке лежит 2, 3 или 4 монеты с вероятностями 0.2, 0.7 и 0.1 соответственно. Наконец, в золотом сундуке с вероятностью 0.8 лежит 4 монеты, а с вероятностью 0.2 находится 5 монет.

Если игрок проигрывает противнику, то лишается всех своих ранее накопленных монет, но может продолжить сражаться с другими противниками, тем самым начав накапливать монеты заново. Игрок начинает игру с нулем монет и для простоты сперва допустим, что игрок одерживает победу над противником с вероятностью $p = 1$ (то есть всегда).

1. Посчитайте вероятность того, что из противника выпадет сундук с 3-мя монетами. **(5 баллов)**

2. Вычислите условную вероятность того, что из противника выпал серебряный сундук, если в выпавшем сундуке лежало 3 монеты. **(5 баллов)**

3. Запишите таблицу распределения числа монет, которое может выпасть из побежденного противника. **(5 баллов)**

4. Выпишите функцию распределения числа монет, которое может выпасть из побежденного противника и посчитайте вероятность, с которой из противника выпадет сундук не менее, чем с тремя монетами. **(5 баллов)**

5. Начиная с данного пункта и далее предположим, что вероятность победы над противником составляет $p = 0.9$. Посчитайте математическое ожидание числа монет, которое останется у игрока после поочередного сражения с двумя противниками. **(5 баллов)**

6. Рассчитайте ковариацию между числом монет, которое останется у игрока после первого боя, и числом монет, которое останется после второго боя. **(5 баллов)**

7. Посчитайте математическое ожидание выигрыша игрока, последовательно сразившегося со 100 противниками. **(10 баллов)**

Подсказка к пунктам 5, 6 и 7:
Без потери общности предположите, что сперва игроку дают сундук с монетками независимо от того, победил он или нет, а затем полученные монетки отбирают, если оказывается, что игрок проиграл. Тогда через X_1 и X_2 обозначьте число монет, которое игрок получает после первого и второго боя соответственно, независимо от того, победил он или проиграл (то есть до того, как их могли у него отобрать).

Через $W_1 \sim Ber(0.9)$ и $W_2 \sim Ber(0.9)$ обозначьте независимые бернуллиевские случайные величины, единичные значения которых соответствуют событиям, при которых игрок побеждает первого и второго противников соответственно. Отметим, что случайные величины X_1, X_2, W_1 и W_2 независимы.

Таким образом, по результатам первого боя игрок получает X_1W_1 монет, где при $W_1 = 1$ игрок получает X_1 монет, а при $W_1 = 0$ он не получает ничего. По аналогии X_2W_2 отражает число монет, заработанных во втором бою. Подумайте, как в этих обозначениях записать случайную величину, которая отражает то, сколько монет остается у игрока по окончанию двух раундов. При этом обратите внимание на то, что в случае поражения во втором раунде игрок утрачивает все ранее накопленные монеты.

Задание №2. Игра (20 баллов)

Лаврентий играет в следующую игру. Сперва он кидает **четырехгранный** кубик и записывает выпавшее на нем число (каждая грань выпадает с равной вероятностью). Затем он подбрасывает этот же кубик до тех пор, пока не выбросит такое же или меньшее число, чем то, которое он записал.

1. Предположим, что сперва Лаврентий выбросил 2 очка и, соответственно, записал число 2. Найдите условную вероятность того, что после этого он подбросит кубик еще ровно (только) 3 раза. **(5 баллов)**

2. Вычислите вероятность, с которой Лаврентий, после того, как запишет очки, кинет кубик ровно (только) 3 раза. **(5 баллов)**

3. Найдите условную вероятность того, что Лаврентий записал 2 очка, если после этого он подкинул кубик ровно (только) 3 раза. **(5 баллов)**

4. Найдите условный третий начальный момент числа бросков кубика, после того, как Лаврентий записал число 2 по результатам первого броска. **(5 баллов)**

Задание №3. Гномы (40 баллов)

Группа отважных гномов копает туннель в поисках золота. Карта разведываемого гномами участка изображена ниже. Каждый день гномы с равной вероятностью передвигаются на одну клетку вверх или на одну клетку вправо, если только не упрутся в верхнюю или правую стенку. Если гномы упираются в стенку справа, то они продолжают идти наверх до тех пор, пока не достигнут выхода. По аналогии, если гномы упираются в верхнюю стенку, то вплоть до выхода он продолжают идти вправо. Если гномы оказываются на клетке с золотом, то они забирают его с собой.

A1	0	**3**	0	0	выход
A2	0	0	0	**2**	0
A3	0	0	0	0	0
A4	0	0	**1**	0	0
A5	0	0	0	0	0
A6	старт	0	0	0	0
	B1	B2	B3	B4	B5

Где для удобства в левом столбце и нижней строке указаны координаты. Например, точка с 3-мя килограммами золота обозначена как A1, B2. Прохождение гномов через точку с той или иной координатой удобно рассматривать в качестве события.

Мотивирующая музыка: www.youtube.com/watch?v=ytWz0qVvBZ0

1. Посчитайте вероятность, с которой гномы попадут на клетку, в которой хранится ровно 1 килограмм золота. **(5 баллов)**
   Подсказка: подумайте, сколько нужно сделать шагов, чтобы попасть в соответствующую клетку и сколько из них должны быть вправо.

2. Рассчитайте вероятность, с которой гномы пройдут и клетку с 1-м килограммом золота, и клетку с 2-мя килограммами золота. **(5 баллов)**
   Подсказка: воспользуйтесь формулой вероятности пересечения событий и посчитайте вероятность попасть в клетку с двумя килограммами золота, если гномы уже находятся на клетке с одним килограммом золота.

3. Рассчитайте вероятность, с которой гномы добудут ровно 3 килограмма золота. **(5 баллов)**
   Подсказка: учтите, что если гномы упираются в верхнюю стенку, то далее они гарантированно продолжают двигаться направо.

4. Вычислите вероятность, с которой гномы добудут ровно 1 килограмм золота. **(5 баллов)**

5. Найдите математическое ожидание количества добытого гномами золота (за весь путь). **(10 баллов)**

6. Повторите предыдущий пункт, предполагая, что клетки с золотом охраняются злыми гоблинами. Каждый раз гномы побеждают гоблинов и продолжают поход с вероятностью 0.8. В случае поражения гномы теряют все накопленное золото и продолжают поход, при этом сохраняя возможность получить золото с посещаемых далее клеток в случае успешной победы над охраняющими их гоблинами. **(10 баллов)**