

Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2021-2022

Дедлайн: домашнее задание отправляется в **pdf** формате на почту семинариста. В копию письма необходимо поставить ассистента группы.

Почты семинаристов, на которые следует отправлять домашние задания:

1. Погорелова Полина Вячеславовна – tvis.we.2021@gmail.com (группы 202 и 203)
2. Потанин Богдан Станиславович – studypotnin@gmail.com (группа 201)
3. Слаболицкий Илья Сергеевич – tvis.fweia.hse@gmail.com (группы 204, 205 и 206)

Почты ассистентов, на которые следует продублировать домашнее задание (поставить в копию при отправке):

1. Романова Дарья Юрьевна – dyuromanova_1@edu.hse.ru (группа 201)
2. Афонина Ангелина Геннадьевна – agafonina@edu.hse.ru (группа 202)
3. Макаров Антон Андреевич – aamakarov_5@edu.hse.ru (группа 203)
4. Атласов Александр Александрович – aaatlasov@edu.hse.ru (группа 204)
5. Костромина Алина Максимовна – amkostromina@edu.hse.ru (группа 205)
6. Краевский Артем Андреевич – aakraevskiy@edu.hse.ru (группа 206)

Домашнее задание должно быть отправлено на указанные почты в **pdf** формате до **15.01.2022, 8.00 (утра)** включительно (по московскому времени). Тема письма должна иметь следующий формат: “МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ”, например, “МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 4”.

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №4

Новогодние статистические оценки

Задание №1. Предновогодняя суэта. (20 баллов)

В преддверии Нового года Санта-Клаус поручил своим помощникам эльфам наполнить подарками мешок и погрузить его в сани. Вес каждого подарка — случайная величина X — измеряется в килограммах, не зависит от веса других подарков и имеет следующую плотность:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{3\alpha^3}{t^4}, & \text{если } t \geq \alpha \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \text{ где } \alpha > 1$$

Всего эльфам нужно погрузить n подарков. Санта-Клаус не знает статистику, поэтому безосновательно предположил следующие оценки для неизвестного параметра α : $\hat{\alpha}_1 = 2022\bar{X}_n$ и $\hat{\alpha}_2 = \frac{2}{3}\bar{X}_n$.

1. Определите, является ли оценка $\hat{\alpha}_1$ несмещенной оценкой параметра α . Если нет, то преобразуйте оценку $\hat{\alpha}_1$ так, чтобы она стала несмещенной оценкой параметра α . (5 баллов)
2. Проверьте, является ли оценка $\hat{\alpha}_2$ состоятельной оценкой параметра α . (5 баллов)
3. Найдите состоятельную оценку для вероятности того, что вес случайного подарка превысит 5 килограмм. (10 баллов)

Задание №2. Сказочное поручение. (10 баллов)

Каждый раз Санта-Клаусу удается пробраться в дом и оставить подарок под елкой незамеченным с вероятностью $p \in (0, 1)$. Соответствующая вероятность не зависит от того, был ли Санта-Клаус обнаружен в предыдущие разы. С целью оценки целесообразности увеличения расходов на скрытность Санта-Клаус поручил аналитическому отделу (с дедлайном в новогоднюю ночь) по выборке из 5-ти наблюдений найти оценку параметра p с дисперсией, не превышающей $\frac{p^2 - p^3}{10}$. Несчастные эльфы из аналитического отдела потратили целый год, но так и не смогли выполнить поручение Санта-Клауса. Отчаявшись, в канун новогодней ночи они просят вас о помощи. Используя знания в области математической статистики помогите эльфам выполнить поручение Санта-Клауса или обосновать невозможность его реализации.

Задание №3. Оценка для Снеговика. (40 баллов)

Температура в новогоднюю ночь в случайно выбранном городе является случайной величиной со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} \frac{3t^2}{\theta^3}, & \text{при } t \in [-\theta, 0] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \text{ где } \theta > 0$$

Допустим, что температуры в городах независимы. Из соображений мониторинга ситуации с глобальным потеплением Снеговик Почтовик просит вас оценить параметр θ по выборке из новогодних температур в n городах.

1. Найдите оценку параметра θ при помощи метода моментов. (5 баллов)
2. Рассчитайте эффективность найденной вами в предыдущем пункте оценки. (5 баллов)
3. Найдите оценку параметра θ при помощи метода максимального правдоподобия. (5 баллов)
4. Рассчитайте информацию Фишера или обоснуйте, почему в данном случае она не определена. (5 балла)
5. Проверьте, является ли найденная вами оценка несмещенной. Если нет, то попытайтесь скорректировать ее таким образом, чтобы она стала несмещенной. (5 баллов)
6. Вычислите эффективность ММП оценки. (10 баллов)
7. Найдите оценку, которая будет более эффективна, чем ММП оценка. Покажите, что она действительно является более эффективной. (5 балла)

Рекомендация: подумайте, как бы решалась данная задача, если бы носитель наблюдений равнялся $[-\theta, \theta]$.

Задание №4. Дифференциация новогодних подарков. (30 баллов)

Дед Мороз раздает подарки разного качества в зависимости от поведения детей. Он делит детей на послушных, средних и непослушных, кодируя соответствующие категории как 1, 0 и -1 соответственно. Дети попадают в различные категории независимо друг от друга. Категория случайно взятого ребенка описывается следующим распределением:

$$\begin{array}{c|c|c|c} t & -1 & 0 & 1 \\ \hline P(X_1 = t) & p & 1 - 2p & p \end{array}, \text{ где } p \in (0, 0.5)$$

Дед Мороз собирается раздать подарки n детям. Для того, чтобы на будущее оптимизировать число подготавливаемых подарков разного качества, он хочет оценить параметр p .

1. Оцените параметр p при помощи произведения второго и четвертого начальных моментов. (5 баллов)
2. Оцените параметр p при помощи метода максимального правдоподобия. (5 баллов)

Подсказка: вспомните функцию правдоподобия для выборки из распределения Бернулли, а также обратите внимание, что $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = p$.

3. Проверьте, является ли найденная вами оценка эффективной. (5 баллов)
4. Найдите ММП оценку для выборки из распределения со следующей функцией плотности:

$$\begin{array}{c|c|c|c} t & -1 & 0 & 1 \\ \hline P(X_1 = t) & p & 1 - 3p & 2p \end{array}, \text{ где } p \in (0, 1/3) \text{ (5 баллов)}$$

Подсказка: обратите внимание, что при выборке из распределения Бернулли выражение $\prod_{i=1}^n p^{X_i}(1-p)^{1-X_i}$ можно заменить на $\prod_{i: X_i=1} p \prod_{i: X_i=0} (1-p)$.

5. Найдите асимптотическую дисперсию найденной вами в предыдущем пункте оценки. **(5 баллов)**
6. Известно, что $p = 0.15$. Рассчитайте вероятность, с которой ММП оценка (из двух предыдущих пунктов) отклонится от истинного значения более, чем на 5%, если Дед Мороз использует выборку из 100 детей. **(5 балла)**