**Фамилия:**..........................................................................................................................................

**Имя:**..................................................................................................................................................

**Группа:**.............................................................................................................................................

## Задача №1

Вор пытается взломать сейф. Известно, что $20\%$ сейфов не имеют защиты, $30\%$ – слабо защищены, а остальные – защищены хорошо. Вор гарантированно взламывает незащищенные сейфы и не может взломать хорошо защищенный. Слабо защищенные сейфы вор может взломать с вероятностью $0.6$. Если вору не удается взломать сейф, то он пытается его подорвать. Вероятность успешного подрыва, независимо от типа сейфа, составляет $0.1$.

1. Найдите вероятность того, что вору не удастся взломать сейф. **(2 балла)**
2. Рассчитайте условную вероятность того, что сейф оказался слабо защищен, если известно, что вору не удалось его взломать. **(2 балла)**
3. Посчитайте условную вероятность того, что сейф был хорошо защищен, если известно, что вору удалось успешно подорвать сейф. **(3 балла)**
4. Вор дважды пытается взломать один и тот же сейф (без использования подрыва). Найдите вероятность того, что в результате вору не удастся взломать сейф. **(3 балла)**
5. Вычислите условную вероятность, с которой сейф оказался хорошо защищенным, если известно, что обе попытки вора взломать этот сейф оказались неудачными. **(5 баллов)**

**Решение:**

1. Через $D_1$, $D_2$ и $D_3$ обозначим события, в соответствии с которыми сейв является слабо, средне и хорошо защищенным соответственно. Из условия следует, что $P(D_1) = 0.2$, $P(D_2) = 0.3$ и $P(D_3) = 0.5$. Обозначим через $S$ событие, при котором вору удается взломать сейф. По условию $P(S|D_1) = 1$, $P(S|D_2) = 0.6$ и $P(S|D_3) = 0$.

   Применяя формулу полной вероятности получаем, что:

$$P(S) = P(S|D_1)P(D_1) + P(S|D_2)P(D_2) + P(S|D_3)P(D_3) =$$
$$= 1 \times 0.2 + 0.6 \times 0.3 + 0 \times 0.5 = 0.38$$

   Используя формулу вероятности обратного события получаем искомую вероятность:

$$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.38 = 0.62$$

2. Вследствие формулы условной вероятности получаем:

$$P(D_2|\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}|D_2)P(D_2)}{P(\overline{S})} = \frac{(1 - P(S|D_2))P(D_2)}{P(\overline{S})} =$$
$$= \frac{(1 - 0.6) \times 0.3}{0.62} = \frac{6}{31} \approx 0.19$$

3. Обозначим через $T$ событие, при котором вор успешно подрывает сейф. Сперва рассчитаем вероятность данного события с помощью формулы полной вероятности:

$$P(T) = P(T|S)P(S) + P(T|\overline{S})P(\overline{S}) = 0 \times 0.38 + 0.1 \times 0.62 = 0.062$$

   По формуле условной вероятности получаем:

$$P(D_3|T) = \frac{P(T|D_3)P(D_3)}{P(T)} = \frac{0.1 \times 0.5}{0.062} = \frac{25}{31} \approx 0.81$$

4. Через $S_1$ и $S_2$ обозначим события, при которых первая и вторая попытки взломать сейф оказались удачными. Вероятность того, что обе попытки окажутся неудачными, вследствие формулы полной вероятности и формулы вероятности пересечения событий составит:

$$P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2) = P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2|D_1)P(D_1) + P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2|D_2)P(D_2) + P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2|D_3)P(D_3) =$$
$$= P(\overline{S}_2|D_1 \cap \overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_1)P(D_1) + P(\overline{S}_2|D_2 \cap \overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_2)P(D_2) +$$
$$+ P(\overline{S}_2|D_3 \cap \overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_3)P(D_3) = 0 \times 0 \times 0.2 + 0.4 \times 0.4 \times 0.3 + 1 \times 1 \times 0.5 = 0.548$$

5. Применяя формулу условной вероятности получаем:

$$P(D_3|\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2) = \frac{P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2|D_3)P(D_3)}{P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2)} = \frac{P(\overline{S}_2|D_3 \cap \overline{S}_1)P(\overline{S}_1|D_3)P(D_3)}{P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2)} =$$
$$= \frac{1 \times 1 \times 0.5}{0.548} = \frac{125}{137} \approx 0.91$$

**Фамилия:**.......................................................................................................................................

**Имя:**.......................................................................................................................................

**Группа:**.......................................................................................................................................

## Задача №2

Лаврентий учит вопросы к экзамену ГИБДД. В мобильном приложении, которое использует Лаврентий, есть два режима игры. В **обычном** режиме Лаврентий отвечает ровно на $5$ вопросов. В **бесконечном** режиме Лаврентий отвечает на вопросы до тех пор, пока не ошибется. В обоих режимах каждый из вопросов случайным образом и с равной вероятностью выбирается из общей базы, включающей $800$ вопросов (то есть вопросы могут повторяться). Каждый вопрос имеет $4$ варианта ответа, лишь $1$ из которых является верным. Лаврентий выучил $480$ вопросов и всегда дает на них верный ответ. Ответы на оставшиеся вопросы Лаврентий выбирает наугад. Вероятность того, что Лаврентий будет играть в обычном режиме, в $2$ раза больше вероятности того, что он будет играть в бесконечном режиме.

1. Перед тем, как приступать к игре, Лаврентий решил ответить ровно на один случайным образом выбраннный вопрос. Посчитайте вероятность, с которой Лаврентий даст верный ответ. (**1 балл**)

2. Начиная с данного пункта считаем, что Лаврентий приступил к игре. Найдите вероятность того, что Лаврентий ответит верно ровно на $3$ вопроса, если он играет в обычном режиме. (**2 балла**)

3. Вычислите вероятность того, что Лаврентий даст правильный ответ ровно на $3$ вопроса. (**2 балла**)

4. Посчитайте вероятность, с которой Лаврентий играл в обычном режиме, если он правильно ответил на $3$ вопроса. (**2 балла**)

5. Найдите математическое ожидание числа верных ответов Лаврентия. (**2 балла**)

6. Посчитайте дисперсию числа верных ответов Лаврентия. (**4 балла**)

7. Определите, являются ли независимыми следующие события. $A$ – Лаврентий играет в обычном режиме. $B$ – Лаврентий дал верный ответ не менее, чем на $5$ вопросов. (**2 балла**)

8. В игре ввели новый режим. Этот режим отличается от обычного двумя особенностями. Во-первых, в нем задается ровно $10$ вопросов. Во-вторых, в новом режиме начисляются призовые баллы. Лаврентий получает балл за верный ответ на вопрос, если на предыдущие $2$ вопроса он также дал правильный ответ (то есть за первый и второй вопросы балл получить нельзя). Найдите математическое ожидание числа баллов, полученных Лаврентием за ответы на вопросы в новом режиме. (**5 баллов**)

**Решение**

1. Обозначим через $Z$ событие, при котором Лаврентий верно отвечает на случайно выбранный вопрос. Через $Q$ обозначим событие, при котором соответствующий вопрос был выбран из числа тех, на которые Лаврентий знает ответ. Применяя формулу полной вероятности получаем:

$$P(Z) = P(Z|Q)P(Q) + P(Z|\overline{Q})P(\overline{Q}) = 1 \times \frac{480}{800} + 0.25 \times \frac{800-480}{800} = 0.7$$

2. Обозначим через $D$ событие, при котором Лаврентий играет в обычном режиме. Через $V$ обозначим случайную величину, отражающую число верных ответов. Обратим внимание, что $V|D \sim B(5, 0.7)$ и $V|\overline{D} \sim Geom(0.3)$.

   Поскольку $V|D \sim B(5, 0.7)$, то:

$$P(V=3|D) = C_5^3 0.7^3(1-0.7)^2 = 0.3087$$

3. Применим формулу полной вероятности:

$$P(V=3) = P(V=3|D)P(D) + P(V=3|\overline{D})P(\overline{D}) =$$
$$= 0.3087 \times \frac{2}{3} + \left(0.7^3 \times (1-0.7)\right) \times \frac{1}{3} = 0.2401$$

4. Воспользуемся формулой условной вероятности:

$$P(D|V=3) = \frac{P(V=3|D)P(D)}{P(V=3)} = \frac{0.3087 \times \frac{2}{3}}{0.2401} \approx 0.857$$

5. Обратим внимание, что $E(V|D) = 5 \times 0.7 = 3.5$ и $E(V|\overline{D}) = \frac{1-0.3}{0.3} = \frac{7}{3}$. По свойствам математического ожидания получаем:

$$E(V) = E(V|D)P(D) + E(V|D)P(\overline{D}) = 3.5 \times \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{28}{9} \approx 2.33$$

6. Посчитаем условные дисперсии:

$$Var(V|D) = 5 \times 0.7 \times (1-0.7) = 1.05$$
$$Var(V|\overline{D}) = \frac{1-0.3}{0.3^2} = \frac{70}{9} \approx 7.78$$

   Отсюда находим условные вторые начальные моменты:

$$E(V^2|D) = E(V|D)^2 + Var(V|D) = 3.5^2 + 1.05 = 13.3$$
$$E(V^2|\overline{D}) = E(V|\overline{D})^2 + Var(V|\overline{D}) = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \frac{70}{9} = \frac{119}{9} \approx 13.2$$

   В результате получаем:

$$Var(V) = E(V^2) - E(V)^2 = E(V^2|D)P(D) + E(V^2|\overline{D})P(\overline{D}) + E(V)^2 =$$
$$= 13.3 \times \frac{2}{3} + \frac{119}{9} \times \frac{1}{3} - \left(\frac{28}{9}\right)^2 = \frac{1456}{405} \approx 3.595$$

7. Из условия известно, что $P(A) = \frac{2}{3}$. Для нахождения вероятности события $B$ применим формулу полной вероятности:

$$P(B) = P(V \geq 5) = P(V \geq 5|D)P(D) + P(V \geq 5|\overline{D})P(\overline{D}) =$$
$$= 0.7^5 \times \frac{2}{3} + 0.7^5 \times \frac{1}{3} = 0.7^5$$

В результате получаем, что события $A$ и $B$ независимы, поскольку:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.7^5 \times \frac{2}{3} = P(A)P(B)$$

8. Обозначим через $V_i \sim Ber(0.7)$ случайную величину, принимающую значение $1$, если Лаврентий дал верный ответ на $i$-й вопрос в новом режиме и $0$ – в противном случае. Число баллов, полученных Лаврентием за ответы на вопросы, можно представить в виде:

$$V_1V_2V_3 + V_2V_3V_4 + ... + V_8V_9V_{10}$$

Пользуясь независимостью данных случайных величин получаем:

$$E(V_1V_2V_3 + V_2V_3V_4 + ... + V_8V_9V_{10}) = E(V_1)E(V_2)E(V_3) + ... + E(V_8)E(V_9)E(V_{10}) =$$
$$= 0.7^3 \times 8 = 2.744$$

**Фамилия:**...................................................................................................................................

**Имя:**..........................................................................................................................................

**Группа:**......................................................................................................................................

## Задача №3

На первом этаже 6-этажного дома в пустой лифт зашли $k$ человек. Каждый из них с равной вероятностью и независимо от других пассажиров может выйти на любом из этажей (кроме, очевидно, первого).

1. Пусть $k = 3$. Вычислите математическое ожидание числа остановок лифта. **(10 баллов)**

2. Пусть $k = 1$. Найдите ковариацию между числом остановок на четных и нечетных этажах. **(5 баллов)**

**Решение:**

1. Случайную величину, отражающую общее число остановок лифта, обозначим как $X$. Через $X_i$, где $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, обозначим случайные величины, принимающие значение 1, если на $i$-м этаже вышел хотя бы один пассажир и 0 – в противном случае. Через $A_j$ обозначая событие, в соответствии с которым на 2-м этаже выходит $j$-й из 3-х пассажиров. Обращая внимание на то, что по условию соответствующие события независимы, рассмотрим закон распределения случайной величины $X_2$:

$$P(X_2 = 1) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A}_1) \times P(\overline{A}_2) \times P(\overline{A}_3) =$$

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0.488$$

$$P(X_2 = 0) = 1 - P(X_2 = 0) = 1 - 0.488 = 0.512$$

Исходя из информации о распределении найдем математическое ожидание соответствующей случайной величины:

$$E(X_2) = P(X_2 = 1) \times 1 + P(X_2 = 0) \times 0 \approx 1 \times 0.488 + 0 \times 0.512 = 0.488$$

Поскольку пассажиры независимо друг от друга и с равной вероятностью могут выходить на любом из этажей, то $X_i$ будут одинаково распределены, то есть так же, как и $X_2$. В частности, у этих случайных величин будут одинаковые математические ожидания. Кроме того заметим, что:

$$X = X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

В результате, в силу свойства линейности математического ожидания получаем:

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) \approx$$

$$\approx 0.488 + 0.488 + 0.488 + 0.488 + 0.488 = 2.44$$

2. Обратим внимание, что поскольку в лифт зашел лишь один пассажир, то $E(X_i) = \frac{1}{5} = 0.2$ и из $X_i = 1$ следует $X_j = 0$ (и наоборот) для любых $i \neq j$, а значит $E(X_i X_j) = 0$. Следовательно, при $i \neq j$ получаем:

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = 0 - 0.2 \times 0.2 = -0.04$$

Отсюда получаем, что:

$$\begin{gathered} Cov(X_2 + X_4 + X_6, X_3 + X_5) = \\ = Cov(X_2, X_3) + Cov(X_4, X_3) + Cov(X_6, X_3) + \\ + Cov(X_2, X_5) + Cov(X_4, X_5) + Cov(X_6, X_5) = \\ = 6 \times (-0.04) = -0.24 \end{gathered}$$

В качестве альтернативы можем рассмотреть случайную величину $Y$, принмающую значение 1, если лифт остановился на четном этаже и 0 – в противном случае. Поскольку остановки на всех этажах равновероятны, то $P(Y = 1) = \frac{3}{5} = 0.6$. Отсюда получаем, что:

$$Cov(Y, 1 - Y) = Cov(Y, -Y) = -Var(Y) = -0.6 \times (1 - 0.6) = -0.24$$