Информация о минимуме

1. Минимум включает базовые задачи по теории вероятностей и статистике, для решения которых достаточно применить некоторый типичный алгоритм.

2. Каждая контрольная работа и экзамен состоят из основной части и минимума. В минимум входят задачи, схожие с теми, что представлены далее. За полностью верное решение этих задач можно получить до 5 баллов из 10.

3. Задачи решаются в тестовой форме: необходимо выбрать единственный верный вариант из нескольких доступных.

4. Минимум включает как простые задачи, так и задачи повышенной сложности. За правильное решение всех простых задач выставляется 4 балла, а за решение сложной – 1 балл.

5. Задачи повышенной сложности отмечаются пометкой (**доп.**) в конце условия. Эти задачи в контрольной работе могут в заметно большей степени отличаться от своих аналогов в данном файле.

6. Оценка за минимум не нормируется.

Минимум 2

1. Функция распределения случайной величины X имеет следующий вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 5 \\ \frac{(x-5)^2}{25}, \text{ если } x \in (5, \alpha) \\ 1, \text{ если } x \ge \alpha \end{cases}$$

   а) Найдите параметр α (при решении дальнейших пунктов пользуйтесь найденным значением).
   б) Рассчитайте $P(X \le 6.5)$.
   в) Вычислите $P(X \ge 7)$.
   г) Найдите $P(6 \le X \le 7)$.
   д) Посчитайте $P(2 \le X \le 7)$.
   е) Определите, чему равняется $P(6 \le X \le 8|2 \le X \le 7)$.
   ж) Выпишите функцию плотности случайной величины X и найдите ее значение в точке 8.
   з) Выпишите функцию распределения случайной величины X^2 на носителе $\text{supp}(X^2)$ и вычислите $F_{X^2}(64)$. **(доп.)**
   и) Выпишите функцию плотности случайной величины X^2 и вычислите $f_{X^2}(64)$. **(доп.)**
   к) Найдите медиану X.
   л) Вычислите квантиль уровня 0.8 для X.

Решение:

   а) Поскольку по свойствам функции распределения $F_X(\alpha) = 1$ и $\alpha > 5$, то:

$$\frac{(\alpha-5)^2}{25} = 1 \implies \alpha = 10$$

   б) Пользуясь определением функции распределения получаем:

$$P(X \le 6.5) = F_X(6.5) = \frac{(6.5-5)^2}{25} = 0.09$$

   в) Применяя формулу вероятности обратного событиями имеем:

$$P(X \ge 7) = 1 - P(X \le 7) = 1 - F_X(7) = 1 - \frac{(7-5)^2}{25} = 0.84$$

   г) По свойствам функции распределения получаем:

$$P(6 \le X \le 7) = F_X(7) - F_X(6) = \frac{(7-5)^2}{25} - \frac{(6-5)^2}{25} = 0.12$$

   д) По аналогии с предыдущим пунктом имеем:

$$P(2 \le X \le 7) = F_X(7) - F_X(2) = \frac{(7-5)^2}{25} - 0 = 0.16$$

е) Пользуясь формулой условной вероятности получаем:

$$P(6 \le X \le 8|2 \le X \le 7) = \frac{P(6 \le X \le 8 \cap 2 \le X \le 7)}{P(2 \le X \le 7)} =$$
$$= \frac{P(6 \le X \le 7)}{P(2 \le X \le 7)} = \frac{F_X(7) - F_X(6)}{F_X(7) - F_X(2)} = \frac{\frac{(7-5)^2}{25} - \frac{(6-5)^2}{25}}{\frac{(7-5)^2}{25} - 0} = 0.75$$

ж) По определению функции плотности имеем:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{d0}{dx}, \text{ если } x \le 5 \\ \frac{d\frac{(x-5)^2}{25}}{dx}, \text{ если } x \in (5, 10) \\ \frac{d1}{dx}, \text{ если } x \ge 10 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2(x-5)}{25}, \text{ если } x \in (5, 10) \\ 0, \text{ если } x \notin (5, 10) \end{cases}$$

Отсюда получаем, что:

$$f_X(8) = \frac{2 \times (8-5)}{25} = 0.24$$

з) Запишем функцию распределения функции от случайной величины через функцию распределения исходной случайной величины, учитывая, что функция x^2, заданная на $\text{supp}(X) = (5, 10)$, имеет обратную. Кроме того, носитель X^2 будет иметь вид $\text{supp}(X^2) = (5^2, 10^2) = (25, 100)$. Следовательно, при $x \in (25, 100)$ получаем:

$$F_{X^2}(x) = P(X^2 \le x) = P(X \le \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) = \frac{(\sqrt{x}-5)^2}{25}$$

Пользуясь полученным результатом рассчитаем искомую вероятность:

$$F_{X^2}(64) = \frac{(\sqrt{64}-5)^2}{25} = 0.36$$

и) Функция плотности при $x \in \text{supp}(X^2) = (25, 100)$ будет иметь вид:

$$\frac{dF_{X^2}(x)}{dx} = \frac{d\frac{(\sqrt{x}-5)^2}{25}}{dx} = \frac{\sqrt{x}-5}{25\sqrt{x}}$$

По определению носителя во всех остальных точках функция плотности случайной величины X^2 будет равняться нулю, а значит:

$$f_{X^2}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-5}{25\sqrt{x}}, \text{ если } x \in (25, 100) \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Применяя найденную функцию плотности получаем:

$$f_{X^2}(64) = \frac{\sqrt{64}-5}{25 \times \sqrt{64}} = 0.015$$

к) Поскольку медиана является квантилью уровня 0.5, то:

$$\frac{(x_{0.5}-5)^2}{25} = 0.5 \implies x_{0.5} \approx 8.536$$

л) По аналогии с предыдущим пунктом получаем:

$$\frac{(x_{0.8}-5)^2}{25} = 0.8 \implies x_{0.8} \approx 9.472$$

2. Функция плотности случайной величины X имеет следующий вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(x-3)^2, \text{если } x \in [2,5] \\ 0, \text{если } x \notin (2,5) \end{cases}$$

а) Найдите параметр α (при решении дальнейших пунктов пользуйтесь найденным значением).

б) Рассчитайте $P(X \leq 3.5)$.

в) Вычислите $P(X > 3)$.

г) Найдите $P(3 \leq X \leq 4)$.

д) Посчитайте $P(1 \leq X < 3.5)$.

е) Определите, чему равняется $P(2.5 \leq X \leq 4|X > 3.5)$.

ж) Найдите $E(2X + 1.5)$.

з) Вычислите $Var(100X + 8)$.

и) Посчитайте третий начальный момент.

к) Рассчитайте $E\left(e^{\frac{1}{9}(x-3)^3}\right)$. **(доп.)**

л) Запишите функцию распределения случайной величины X.

м) Найдите $E(X|X < 3.5)$. **(доп.)**

н) Укажите моду X.

Решение:

а) По свойствам функции плотности получаем, что:

$$\int_2^5 \alpha(x-3)^2 = 1 \implies 3\alpha = 1 \implies \alpha = \frac{1}{3}$$

б) Пользуясь формулой расчета вероятностей с помощью функции плотности получаем:

$$P(X \leq 3.5) = \int_2^{3.5} \frac{(x-3)^2}{3} dx = 0.125$$

в) По аналогии с предыдущим пунктом:

$$P(X > 3) = \int_3^5 \frac{(x-3)^2}{3} dx = \frac{8}{9} \approx 0.889$$

г) Также, как и в предыдущих пунктах, получаем:

$$P(3 \le X \le 4) = \int\limits_3^4 \frac{(x-3)^2}{3} dx = \frac{1}{9} \approx 0.111$$

д) Обращая внимание на носитель X получаем:

$$P(1 \le X \le 3.5) = P(2 \le X \le 3.5) = \int\limits_2^{3.5} \frac{(x-3)^2}{3} dx = 0.125$$

е) По формуле условной вероятности получаем:

$$P(2.5 \le X \le 4 | X > 3.5) = \frac{P(2.5 \le X \le 4 \cap X > 3.5)}{P(X > 3.5)} =$$

$$= \frac{P(3.5 < X \le 4)}{P(X > 3.5)} = \frac{\int_{3.5}^4 \frac{(x-3)^2}{3} dx}{\int_{3.5}^5 \frac{(x-3)^2}{3} dx} \approx \frac{0.09722}{0.875} \approx 0.111$$

ж) Сперва вычислим математическое ожидание:

$$E(X) = \int\limits_2^5 x \frac{(x-3)^2}{3} dx = 4.25$$

Отсюда получаем, что по свойствам математического ожидания:

$$E(2X + 1.5) = 2 \times 4.25 + 1.5 = 10$$

з) Для начала найдем второй начальный момнент:

$$E(X^2) = \int\limits_2^5 x^2 \frac{(x-3)^2}{3} dx = 18.7$$

Подставляя полученный результат в формулу дисперсии имеем:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 18.7 - 4.25^2 = 0.6375$$

Наконец, применяя свойства дисперсии получаем:

$$Var(100X + 8) = 100^2 Var(X) = 10000 \times 0.6375 = 6375$$

и) По определению третьего начального момента получаем:

$$E(X^3) = \int\limits_2^5 x^3 \frac{(x-3)^2}{3} dx = 84.05$$

к) По формуле математического ожидания функции от случайной величины получаем:

$$E\left(e^{\frac{1}{9}(x-3)^3}\right) = \int\limits_2^5 e^{\frac{1}{9}(x-3)^3} \frac{(x-3)^2}{3} dx =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{9}(2-3)^3}^{\frac{1}{9}(5-3)^3} e^{\frac{1}{9}(x-3)^3} d\left(\frac{1}{9}(x-3)^3\right) = \int\limits_{-1/9}^{8/9} e^t dt \approx 1.538$$

л) По свойствам функции плотности получаем, что при $x \in (2, 5)$:

$$F_X(x) = \int_2^x \frac{(t-3)^2}{3} dt = \frac{(x^3 - 9x^2 + 27x - 26)}{9}$$

Отсюда следует, что:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leq 2 \\ \frac{(x^3-9x^2+27x-26)}{9}, \text{ если } x \in (2,5) \\ 1, \text{ если } x \geq 5 \end{cases}$$

м) Сперва найдем функцию распределения усеченного распределения:

$$F_{X|X<3.5}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leq 2 \\ \frac{(x^3-9x^2+27x-26)}{9} / \frac{(3.5^3-9\times(3.5^2)+27\times 3.5-26)}{9}, \text{ если } x \in (2,3.5) \\ 1, \text{ если } x \geq 3.5 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } x \leq 2 \\ \frac{8(x^3-9x^2+27x-26)}{9}, \text{ если } x \in (2,3.5) \\ 1, \text{ если } x < 3.5 \end{cases}$$

Дифференцируя найденную функцию получаем:

$$f_{X|X>3.5}(x) = \begin{cases} \frac{8(x-3)^2}{3}, \text{ если } x \in (2,3.5) \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Наконец, пользуясь найденной функцией плотности посчитаем искомое математическое ожидание:

$$E(X|X < 3.5) = \int_2^{3.5} x\frac{8(x-3)^2}{3} dx = 2.375$$

н) В данном случае функция плотности достигает максимума в двух точках, поэтому моды также будет две, а именно, значения 2 и 5.

3. Случайная величина X имеет равномерное распределение $U(a, b)$. Про эту случайную величину известно, что $E(X) = 2$ и $F_X(1.5) = 0.25$.

   а) Найдите параметры распределения X (используйте найденные параметры при решении дальнейших пунктов).

   б) Запишите носитель X.

   в) Определите, чему равняется Var(3X-10).

   г) Вычислите $E\left(\frac{2}{X}\right)$.

   д) Рассчитайте вероятность $P(X > 2|X < 2.5)$.

   е) Посчитайте $E(X|\frac{1}{X} < 0.5)$. **(доп.)**

   ж) Найдите квантиль уровня 0.6 случайной величины X.

з) Посчитайте квантиль уровня 0.4 случайной величины e^{-X}.

Решение:

а) Используя приведенную в условии информацию составим систему, из решения которой получим искомые параметры:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 2 \\ \frac{1.5-a}{b-a} = 0.25 \end{cases} \implies \begin{cases} a+b=4 \\ 6-4a = b-a \end{cases} \implies \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

б) Носитель имеет вид supp(X) $= (1, 3)$.

в) По формуле дисперсии равномерного распределения получаем:

$$Var(X) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

Отсюда, по свойствам дисперсии имеем:

$$Var(3X-10) = 9Var(X) = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

г) Пользуясь формулой математического ожидания функции от случайной величины получаем:

$$E\left(\frac{2}{X}\right) = \int\limits_1^3 \frac{2}{x} \times \frac{1}{3-1} dx = \ln(3) \approx 1.0986$$

д) По формуле условной вероятности имеем:

$$P(X>2|X<2.5) = \frac{P(X>2 \cap X<2.5)}{P(X<2.5)} = \frac{P(2<X<2.5)}{P(X<2.5)} = $$
$$= \frac{F_X(2.5)-F_X(2)}{F_X(2.5)} = \frac{\frac{2.5-1}{3-1} - \frac{2-1}{3-1}}{\frac{2.5-1}{3-1}} = \frac{1}{3}$$

е) Используя условную функцию плотности нетрудно показать, что:

$$E\left(X|\frac{1}{X}<0.5\right) = E(X|X>2) = \int\limits_2^3 x \frac{\frac{1}{3-1}}{1-\frac{2-1}{3-1}} dx = 2.5$$

ж) Найдем соответствующую квантиль, пользуясь функцией распределения:

$$F_X(x_{0.6}) = \frac{x_{0.6}-1}{3-1} = 0.6 \implies x_{0.6} = 2.2$$

з) Поскольку функция e^{-x} строго убывает на носителе случайной величины X, то есть при $x \in (1,3)$, то квантиль уровня 0.4 случайной величины e^{-X} будет равняться соответствующей функции от квантили уровня $1-0.4=0.6$ случайной величины X, то есть $e^{-x_{0.6}} = e^{-2.2}$.

4. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с медианой, равной $\ln\left(\sqrt{2}\right)$.

а) Найдите параметры распределения X (используйте найденные параметры при решении дальнейших пунктов).

б) Запишите носитель X.

в) Посчитайте $E(8X+6)$

г) Определите, чему равняется $Var(2X - E(X))$.

д) Вычислите $E\left(e^X\right)$.

е) Рассчитайте $P(X \in [1,3])$.

ж) Рассчитайте вероятность $P(X < 2 | X \in [1,3])$.

з) Посчитайте $E(e^X | X \in [1,3])$. **(доп.)**

и) Найдите квантиль уровня 0.6 случайной величины X.

к) Посчитайте квантиль уровня 0.6 случайной величины $\ln(X)$.

Решение:

а) По определению медианы $F_X\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right) = 0.5$, а значит:

$$1 - e^{-\ln(\sqrt{2})\lambda} = 0.5 \implies e^{-\ln(\sqrt{2})\lambda} = 0.5 \implies$$
$$\implies -0.5\ln(2)\lambda = \ln(0.5) \implies 0.5\ln(2)\lambda = -\ln(0.5) = \ln(2) \implies \lambda = 2$$

б) Носитель имеет вид supp(X) $= (0, \infty)$.

в) Используя формулу математического ожидания экспоненциальной случайной величины имеем:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Отсюда получаем, что:

$$E(8X+6) = 8 \times 0.5 + 6 = 10$$

г) По формуле дисперсии экспоненциального распределения получаем:

$$Var(X) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Далее, по свойствам дисперсии имеем:

$$Var(2X - E(X)) = 4Var(X) = 4 \times 0.25 = 1$$

д) Пользуясь формулой математического ожидания функции от случайной величины получаем:

$$E\left(e^X\right) = \int\limits_0^\infty e^x \times 2e^{-2x}dx = \int\limits_0^\infty 2e^{-x}dx = 2$$

е) Используя функцию распределения экспоненциального распредедения получаем:

$$P(X \in [1,3]) = F_X(3) - F_X(1) = \left(1 - e^{-2\times 3}\right) - \left(1 - e^{-2\times 1}\right) \approx 0.13286$$

ж) По формуле условной вероятности имеем:

$$P(X < 2|X \in [1,3]) = \frac{P(X \in [1,2])}{P(X \in [1,3])} = \frac{F_X(2) - F_X(1)}{F_X(3) - F_X(1)} =$$
$$= \frac{(1 - e^{-2\times 2}) - (1 - e^{-2\times 1})}{(1 - e^{-2\times 3}) - (1 - e^{-2\times 1})} \approx 0.88$$

з) Используя условную функцию плотности получаем:

$$E\left(e^X|X \in [1,3]\right) = \int\limits_1^3 e^x \frac{2e^{-2x}}{(1 - e^{-2\times 3}) - (1 - e^{-2\times 1})} dx \approx \int\limits_1^3 15.05e^{-x} dx \approx 4.7885$$

и) Найдем соответствующую квантиль, пользуясь функцией распределения:

$$F_X(x_{0.6}) = 1 - e^{-2x_{0.6}} = 0.6 \implies x_{0.6} = 0.458$$

к) Поскольку функция $\ln(x)$ строго возрастает на носителе случайной величины X, то есть при $x \in (0, \infty)$, то квантиль уровня 0.6 случайной величины e^{-X} будет равняться соответствующей функции от квантили уровня 0.6 случайной величины X, то есть $\ln(x_{0.6}) = \ln(0.458) \approx -0.781$.

5. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 2 и вторым начальным моментом, равным 29.

а) Найдите параметры распределения X (используйте найденные параметры при решении дальнейших пунктов).

б) Запишите носитель X.

в) Посчитайте $E(Var(2X + 5)X + 10)$.

г) Определите, чему равняется $P(X < 1.5)$.

д) Рассчитайте вероятность $P(X \in [1,2]|X < 1.5)$.

е) Вычислите, чему равняется $P(X < 1.8 \cup X \in [1,2])$.

ж) Найдите квантиль уровня 0.6 случайной величины X.

з) Посчитайте $P(2X + 5 > 7)$.

и) Случайная величина $Y \sim \mathcal{N}(-1, 16)$ не зависит от X. Посчитайте следующую вероятность $P(5X + 2 - 3Y \leq 20)$.

Решение:

а) Поскольку $E(X) = 2$ и $E(X^2) = 29$, то $Var(X) = 29 - 2^2 = 25$, откуда $\mu = 2$ и $\sigma^2 = 25$.

б) Носитель совпадает с вещественной прямой, то есть supp(X) $= (-\infty, \infty) = R$.

в) Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии получаем:

$$E(Var(2X + 5)X + 10) = 4Var(X) \times E(X) + 10 = 4 \times 25 \times 2 + 10 = 210$$

г) Пользуясь таблице стандартного нормального распределения находим:

$$P(X < 1.5) = F_X(1.5) = \Phi\left(\frac{1.5 - 2}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(-0.1) = 1 - \Phi(0.1) \approx 0.46$$

д) По формуле условной вероятности имеем:

$$P(X \in [1,2]|X < 1.5) = \frac{P(X \in [1,1.5])}{P(X < 1.5)} = \frac{F_X(1.5) - F_X(1)}{F_X(1.5)} =$$
$$= \frac{\Phi\left(\frac{1.5-2}{\sqrt{25}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{25}}\right)}{\Phi\left(\frac{1.5-2}{\sqrt{25}}\right)} = \frac{\Phi(-0.1) - \Phi(-0.2)}{\Phi(-0.1)} \approx 0.085689$$

е) Можно либо воспользоваться формулой вероятности объединения событий, либо предварительно объединить оба события (воспользуемся вторым способом):

$$P(X < 1.8 \cup X \in [1,2]) = P(X < 2) = \Phi\left(\frac{2-2}{\sqrt{25}}\right) = 0.5$$

ж) Обратим внимание, что:

$$P(X \leq x_{0.6}) = 0.6$$

Отсюда получаем, что:

$$P(X \leq x_{0.6}) = \Phi\left(\frac{x_{0.6}-2}{5}\right) = 0.6 \implies \frac{x_{0.6}-2}{5} \approx 0.253$$

з) Обратим внимание, что:

$$E(2X+5) = 2E(X) + 5 = 2 \times 2 + 5 = 9$$
$$Var(2X+5) = 4Var(X) = 4 \times 25 = 100$$

Отсюда следует, что:

$$2X + 5 \sim \mathcal{N}(9, 100)$$

В результате получаем:

$$P(2X+5 > 7) = 1 - P(2X+5 \leq 7) = 1 - \Phi\left(\frac{7-9}{\sqrt{100}}\right) \approx 0.579$$

В качестве альтернативы задачу можно решать следующим образом:

$$P(2X+5 > 7) = P(2X > 2) = P(X > 1) = 1 - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{25}}\right) \approx 0.579$$

и) Сперва найдем распределение рассматриваемой линейной комбинации нормальных случайных величин, учитывая, что в силу независимости ковариация между ними окажется нулевой:

$$E(5X + 2 - 3Y) = 5 \times 2 + 2 - (3 \times -1) = 15$$
$$Var(5X + 2 - 3Y) = 25Var(X) + 9Var(Y) = 25 \times 25 + 9 \times 16 = 769$$

По свойствам линейной комбинации нормальных случайных величин получаем:

$$5X + 2 - 3Y \sim \mathcal{N}(15, 769)$$

Пользуясь найденным распределением получаем:

$$P(5X + 2 - 3Y \leq 20) = \Phi\left(\frac{20-15}{\sqrt{769}}\right) \approx 0.428$$

6. Математическое ожидание непрерывной случайной величину X с неотрицательным носителем равняется 1. При помощи неравенства Маркова определите:

   а) Верхнюю границу для вероятности $P(X > 2)$.

   б) Нижнюю границу значения, принимаемого функцией распределения этой случайной величины в точке 5.

   Решение:

   а) Поскольку $E(X) = 1$, то при помощи неравенства Маркова получаем:

   $$P(X > 2) = P(X \geq 2) \leq \frac{1}{2} = 0.5$$

   б) По аналогии с предыдущим пунктом получаем:

   $$F_X(5) = P(X \leq 5) = 1 - P(X \geq 5) \geq 1 - \frac{1}{5} = 0.8$$

7. При помощи неравенства Чебышева определите:

   а) Верхнюю границу вероятности того, что случайная величина X, у которой $E(X) = 2$ и $Var(X) = 25$, отклонится от своего математического ожидания не менее, чем на 10.

   б) Нижнюю границу вероятности того, что непрерывная случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не более, чем на 3 стандартных отклонения.

   Решение:

   а) Применяя неравенство Чебышева получаем:

   $$P(|X - 2| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2} = 0.25$$

   б) Обозначая $\sqrt{Var(X)} = \sigma$ получаем:

   $$P(|X - E(X)| \leq 3\sigma) = 1 - P(|X - E(X)| \geq 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9}$$

8. Имеется бесконечная последовательность независимых экспоненциальных величин, дисперсия каждой из которых равняется 0.64. Определите, к чему стремится по вероятности:

   а) Арифметическое среднее этих случайных величин.

   б) Квадратный корень из арифметического среднего этих случайных величин.

   в) Арифметическое среднее квадратов этих случайных величин.

   г) Логарифм арифметического среднего квадратов этих случайных величин. **(доп.)**

   Решение:

   а) Через $X_i \sim EXP(\lambda)$ обозначим i-й элемент рассматриваемой последовательности. Поскольку $Var(X_i) = 0.64$, то $\frac{1}{\lambda^2} = 0.64$, откуда $\lambda = 1.25$, а значит $E(X_i) = \frac{1}{1.25} = 0.8$. Обратим внимание, что речь идет об арифметическом среднем независимых, одинаково распределенных случайных величин. Следовательно, пользуясь законом больших числе получаем:

   $$\overline{X} \xrightarrow{p} 0.8$$

б) Поскольку функция $\sqrt{x}$ непрерывна, то применяя теорему Манна-Вальда имеем:

$$\sqrt{\overline{X}} \xrightarrow{p} \sqrt{0.8}$$

в) Обратим внимание, что:

$$E(X_i^2) = Var(X_i) + E(X_i)^2 = \frac{1}{1.25^2} + \left(\frac{1}{1.25}\right)^2 = 1.28$$

Следовательно, пользуясь законом больших чисел получаем:

$$\overline{X^2} \xrightarrow{p} 1.28$$

г) Применяя теорему Манна-Вальда получаем:

$$\ln\left(\overline{X^2}\right) \xrightarrow{p} \ln(1.28)$$

9. Лаврентий 100 раз подбросил обычный шестигранный кубик. При помощи центральной предельной теоремы рассчитайте, приблизительно, вероятность, с которой в сумме у него выпадет более 360 очков.

Решение: Обозначим через X_i сумму очков, выпавших при i-м броске. Поскольку $E(X_i) = 3.5$ и $Var(X_i) \approx 2.92$, то в силу ЦПТ:

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \dot{\sim} \mathcal{N}\left(100 \times 3.5, 100 \times 2.92\right) = \mathcal{N}\left(350, 292\right)$$

Отсюда получаем, что:

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 360\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{360 - 350}{\sqrt{292}}\right) \approx 1 - \Phi\left(0.585\right) \approx 0.279$$

10. Имеется выборка $X_1, ..., X_5$ с реализацией $x = (2, 0, 0, -1, 3)$.

а) Найдите реализацию вариационного ряда и его третьего члена.

б) Посчитайте реализацию выборочного среднего.

в) Вычислите реализацию исправленной выборочной дисперсии.

г) Определите, чему равняется реализация третьего начального выборочного момента.

д) Запишите реализацию выборочной функции распределения.

Решение:

а) Сортируя реализации наблюдений получаем реализацию вариационного ряда:

$$(-1, 0, 0, 2, 3)$$

б) Рассчитаем реализацию выборочного среднего:

$$\overline{x} = \frac{-1 + 0 + 0 + 2 + 3}{5} = 0.8$$

в) Посчитаем реализацию выборочной дисперсии:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(-1-0.8)^2 + (0-0.8)^2 + (0-0.8)^2 + (2-0.8)^2 + (3-0.8)^2}{5-1} = 2.7$$

г) Вычислим значение реализации третьего начального выборочного момента:

$$\overline{x^3} = \frac{-1^3 + 0^3 + 0^3 + 2^3 + 3^3}{5} = 6.8$$

д) Запишем реализацию выборочной функции распределения:

$$\hat{F}_n(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < -1 \\ 0.2, \text{ если } -1 \leq t < 0 \\ 0.6, \text{ если } 0 \leq t < 2 \\ 0.8, \text{ если } 0 \leq t < 2 \\ 1, \text{ если } t \geq 2 \end{cases}$$

11. Имеется выборка $X_1, X_2, ..., X_n$ из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}, \text{ при } x \in [0, \theta] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} \quad , \text{ где } \theta > 0$$

а) Определите, при каком α оценка $\hat{\theta}_3 = X_1 - 2X_2 + \alpha X_3$ окажется несмещенной.

б) Найдите $\alpha > 0$, при котором последовательность оценок $\hat{\theta}_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{\alpha(n+1)}$ окажется состоятельной, либо покажите, что такого α не существует.

в) Реализация выборки имеет вид $x = (1.5, 3.5, 3)$. При помощи второго начального момента найдите реализацию оценки параметра θ.

Решение:

а) Сперва рассчитаем математическое ожидание наблюдения:

$$E(X_i) = \int_0^\theta \frac{x \times 2(\theta - x)}{\theta^2} dx = \frac{\theta}{3}$$

Пользуясь полученным результатам найдем математическое ожидание оценки:

$$E\left(\hat{\theta}_3\right) = E(X_1 - 2X_2 + \alpha X_3) = \frac{\theta}{3} - \frac{2\theta}{3} + \frac{\alpha\theta}{3}$$

У несмещенной оценки математическое ожидание равняется истинному значению оцениваемого параметра, откуда:

$$\frac{\theta}{3} - \frac{2\theta}{3} + \frac{\alpha\theta}{3} = \theta$$

Решая соответствующее равенство для θ получаем, что $\alpha = 4$.

б) Сперва найдем, к чему стремится математическое ожидание оценки:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_n\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{X_1+...+X_n}{\alpha(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{E(X_1)+...+E(X_n)}{\alpha(n+1)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\times\frac{\theta}{3}}{\alpha(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\theta}{3\alpha(n+1)} = \frac{\theta}{3\alpha}$$

Поскольку состоятельность требует выполнение асимптотическое несмещенности, то должно соблюдаться $\frac{\theta}{3\alpha} = \theta$, а значит $\alpha = \frac{1}{3}$.

Убедимся, что при соответствующем значении α дисперсия последовательности оценок стремится к нулю. В противном случае необходимого значения α не существует.

$$\lim_{n\to\infty} Var\left(\hat{\theta}_n\right) = \lim_{n\to\infty} Var\left(\frac{X_1+...+X_n}{\alpha(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{Var(X_1)+...+Var(X_n)}{(\alpha(n+1))^2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{nVar(X_1)}{\alpha^2(n+1)^2} = 0$$

Обратим внимание, что для нахождения предела нет необходимости в расчете выражения для $Var(X_i)$, поскольку дисперсия наблюдения является константой, не зависящей от объема выборки n.

В данном случае дисперсия последовательности оценок стремится к нулю при любом $\alpha > 0$, в том числе при $\alpha = \frac{1}{3}$, а значит при соответствующем значении последовательность оценок окажется состоятельной.

в) Найдем второй начальный момент наблюдения:

$$E(X_i^2) = \int_0^\theta \frac{x^2\times 2(\theta - x)}{\theta^2}dx = \frac{\theta^2}{6}$$

Отсюда получаем, что:

$$\theta = \sqrt{6E(X_i)}$$

Следовательно, оценка метода моментов будет иметь вид:

$$\hat{\theta} = \sqrt{6\overline{X}} = \sqrt{2(X_1+X_2+X_3)}$$

В итоге получаем реализацию оценки:

$$\hat{\theta}(x) = \sqrt{2\times(1.5+3.5+3)} = 4$$

12. Имеется выборка $X_1, X_2, ..., X_n$ из распределения со следующей функцией вероятности:

x	1	2	3
$P(X_\theta = x)$	0.4	$0.3+\theta$	$0.3-\theta$

Реализация выборки имеет вид $x = (1, 2, 2, 1, 3)$

а) При помощи первого начального момента найдите оценку параметра θ методом моментов и посчитайте ее реализацию.

б) Проверьте, является ли найденная вами в предыдущем пункте оценка несмещенной.

Решение:

а) Найдем математическое ожидание наблюдения:

$$E(X_i) = 1 \times 0.4 + 2 \times (0.3 + \theta) + 3 \times (0.3 - \theta) = 1.9 - \theta$$

Отсюда получаем, что:

$$1.9 - \theta = E(X_i) \implies \theta = 1.9 - E(X_i)$$

Следовательно, оценка метода моментов имеет вид:

$$\hat{\theta} = 1.9 - \overline{X}$$

В результате получаем реализацию данной оценки:

$$\hat{\theta}(x) = 1.9 - \frac{1 + 2 + 2 + 1 + 3}{5} = 0.1$$

б) Оценка является несмещенной, поскольку:

$$E(\hat{\theta}) = E(1.9 - \overline{X}) = 1.9 - (1.9 - \theta) = \theta$$