Теория Вероятностей и Статистика

Метод моментов и некоторые распределения

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021

Методы получения оценок
Мотивация

- Ранее мы предполагали, что оценки нам уже даны и нам необходимо было лишь изучить их свойства.

- Ранее мы предполагали, что оценки нам уже даны и нам необходимо было лишь изучить их свойства.
- На практике мы часто хотим вывести выражение для оценки, которая будет обладать рядом хороших свойств (состоятельность, несмещенность и т.д.). Но как заранее догадаться, как нужно конструировать оценку для того, чтобы она обладала данными свойствами?

- Ранее мы предполагали, что оценки нам уже даны и нам необходимо было лишь изучить их свойства.
- На практике мы часто хотим вывести выражение для оценки, которая будет обладать рядом хороших свойств (состоятельность, несмещенность и т.д.). Но как заранее догадаться, как нужно конструировать оценку для того, чтобы она обладала данными свойствами?
- Существует ряд методов (алгоритмов), позволяющих получать оценки, обладающие данными свойствами.

- Выборочные начальные моменты k-го порядка являются состоятельными оценками соответствующих начальных моментов $E(X_1^k)$ и определяются как:

$$\hat{m}_k = \overline{X_n^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

- Выборочные начальные моменты k-го порядка являются состоятельными оценками соответствующих начальных моментов $E(X_1^k)$ и определяются как:

$$\hat{m}_k = \overline{X_n^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

- Выборочные центральные моменты k-го порядка являются состоятельными оценками соответствующих центральных моментов $E((X_1 - E(X_1))^k)$ и определяются как:

$$\hat{c}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^k$$

- Выборочные начальные моменты k-го порядка являются состоятельными оценками соответствующих начальных моментов $E(X_1^k)$ и определяются как:

$$\hat{m}_k = \overline{X_n^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

- Выборочные центральные моменты k-го порядка являются состоятельными оценками соответствующих центральных моментов $E((X_1 - E(X_1))^k)$ и определяются как:

$$\hat{c}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^k$$

- С помощью ЦПТ можно показать, что асимптотическое распределение начальных моментов является нормальным, откуда:

$$\overline{X_n^k} \dot{\sim} \mathcal{N}\left(E(X_1^k), \frac{E(X_1^{2k}) - E(X_1^k)^2}{n}\right)$$

Метод моментов

Простой случай

- Имеется выборка $X_1, ..., X_n$ из распределения $\Theta(\theta)$ с параметром $\theta \in R$.

Метод моментов

Простой случай

- Имеется выборка $X_1, ..., X_n$ из распределения $\Theta(\theta)$ с параметром $\theta \in R$.
- Рассмотрим k-й начальный момент как функцию от параметра распределения $E(X_1^k) = g(\theta)$.

Метод моментов

Простой случай

- Имеется выборка $X_1, ..., X_n$ из распределения $\Theta(\theta)$ с параметром $\theta \in R$.
- Рассмотрим k-й начальный момент как функцию от параметра распределения $E(X_1^k) = g(\theta)$.
- Предположим, что существует непрерывная обратная функция $\theta = g^{-1}\left(E(X_1^k)\right)$.

Метод моментов
Простой случай

- Имеется выборка $X_1, ..., X_n$ из распределения $\Theta(\theta)$ с параметром $\theta \in R$.
- Рассмотрим k-й начальный момент как функцию от параметра распределения $E(X_1^k) = g(\theta)$.
- Предположим, что существует непрерывная обратная функция $\theta = g^{-1}\left(E(X_1^k)\right)$.
- Вспомним, что выборочные начальные моменты $\overline{X_n^k}$ являются состоятельными оценками начальных моментов $E(X_1^k)$.

Метод моментов

Простой случай

- Имеется выборка $X_1, ..., X_n$ из распределения $\Theta(\theta)$ с параметром $\theta \in R$.
- Рассмотрим k-й начальный момент как функцию от параметра распределения $E(X_1^k) = g(\theta)$.
- Предположим, что существует непрерывная обратная функция $\theta = g^{-1}\left(E(X_1^k)\right)$.
- Вспомним, что выборочные начальные моменты $\overline{X_n^k}$ являются состоятельными оценками начальных моментов $E(X_1^k)$.
- Тогда, по теореме Манна-Вальда, состоятельная оценка параметра θ может быть получена за счет замены истинного выборочного момента на его выборочный аналог $\hat{\theta} = g^{-1}\left(\overline{X_n^k}\right)$.

Метод моментов
Простой случай

- Имеется выборка $X_1, ..., X_n$ из распределения $\Theta(\theta)$ с параметром $\theta \in R$.
- Рассмотрим k-й начальный момент как функцию от параметра распределения $E(X_1^k) = g(\theta)$.
- Предположим, что существует непрерывная обратная функция $\theta = g^{-1}\left(E(X_1^k)\right)$.
- Вспомним, что выборочные начальные моменты $\overline{X_n^k}$ являются состоятельными оценками начальных моментов $E(X_1^k)$.
- Тогда, по теореме Манна-Вальда, состоятельная оценка параметра θ может быть получена за счет замены истинного выборочного момента на его выборочный аналог $\hat{\theta} = g^{-1}\left(\overline{X_n^k}\right)$.

Примеры:

- Имеется выборка объема n из экспоненциального распределения с параметром λ. При помощи метода моментов найдем состоятельную оценку параметра λ.

Метод моментов

Простой случай

- Имеется выборка $X_1, ..., X_n$ из распределения $\Theta(\theta)$ с параметром $\theta \in R$.
- Рассмотрим k-й начальный момент как функцию от параметра распределения $E(X_1^k) = g(\theta)$.
- Предположим, что существует непрерывная обратная функция $\theta = g^{-1}\left(E(X_1^k)\right)$.
- Вспомним, что выборочные начальные моменты $\overline{X_n^k}$ являются состоятельными оценками начальных моментов $E(X_1^k)$.
- Тогда, по теореме Манна-Вальда, состоятельная оценка параметра θ может быть получена за счет замены истинного выборочного момента на его выборочный аналог $\hat{\theta} = g^{-1}\left(\overline{X_n^k}\right)$.

Примеры:

- Имеется выборка объема n из экспоненциального распределения с параметром λ. При помощи метода моментов найдем состоятельную оценку параметра λ.

$$E(X_1) = 1/\lambda \implies \lambda = 1/E(X_1) \implies \hat{\lambda} = 1/\overline{X_n} = n/(X_1 + ... + X_n)$$

Метод моментов

Простой случай

- Имеется выборка $X_1, ..., X_n$ из распределения $\Theta(\theta)$ с параметром $\theta \in R$.
- Рассмотрим k-й начальный момент как функцию от параметра распределения $E(X_1^k) = g(\theta)$.
- Предположим, что существует непрерывная обратная функция $\theta = g^{-1}\left(E(X_1^k)\right)$.
- Вспомним, что выборочные начальные моменты $\overline{X_n^k}$ являются состоятельными оценками начальных моментов $E(X_1^k)$.
- Тогда, по теореме Манна-Вальда, состоятельная оценка параметра θ может быть получена за счет замены истинного выборочного момента на его выборочный аналог $\hat{\theta} = g^{-1}\left(\overline{X_n^k}\right)$.

Примеры:

- Имеется выборка объема n из экспоненциального распределения с параметром λ. При помощи метода моментов найдем состоятельную оценку параметра λ.

$$E(X_1) = 1/\lambda \implies \lambda = 1/E(X_1) \implies \hat{\lambda} = 1/\overline{X_n} = n/(X_1 + ... + X_n)$$

- Имеется выборка из равномерного распределения $U(0, b)$. При помощи третьего начального момента найдем состоятельную оценку параметра b.

Метод моментов

Простой случай

- Имеется выборка $X_1, ..., X_n$ из распределения $\Theta(\theta)$ с параметром $\theta \in R$.
- Рассмотрим k-й начальный момент как функцию от параметра распределения $E(X_1^k) = g(\theta)$.
- Предположим, что существует непрерывная обратная функция $\theta = g^{-1}\left(E(X_1^k)\right)$.
- Вспомним, что выборочные начальные моменты $\overline{X_n^k}$ являются состоятельными оценками начальных моментов $E(X_1^k)$.
- Тогда, по теореме Манна-Вальда, состоятельная оценка параметра θ может быть получена за счет замены истинного выборочного момента на его выборочный аналог $\hat{\theta} = g^{-1}\left(\overline{X_n^k}\right)$.

Примеры:

- Имеется выборка объема n из экспоненциального распределения с параметром λ. При помощи метода моментов найдем состоятельную оценку параметра λ.

$$E(X_1) = 1/\lambda \implies \lambda = 1/E(X_1) \implies \hat{\lambda} = 1/\overline{X_n} = n/(X_1 + ... + X_n)$$

- Имеется выборка из равномерного распределения $U(0, b)$. При помощи третьего начального момента найдем состоятельную оценку параметра b.

$$E(X_1^3) = \int\limits_0^b x^3 \frac{1}{b} dx = 0.25b^3 \implies b = (4E(X_1^3))^{1/3} \implies \hat{b} = (4\overline{X^3}_n)^{1/3} = (4(X_1^3 + ... + X_n^3)/n)^{1/3}$$

Метод моментов

Общий случай

- Рассмотрим некоторую функцию от первых k начальных моментов: $\psi\left(E(X_1^1),...,E(X_1^k)\right) = g(\theta)$.

Метод моментов

Общий случай

- Рассмотрим некоторую функцию от первых k начальных моментов: $\psi\left(E(X_1^1), ..., E(X_1^k)\right) = g(\theta)$.
- Предположим существование непрерывной обратной функции $g^{-1}\left(\psi\left(E(X_1^1), ..., E(X_1^k)\right)\right) = \theta$.

Метод моментов

Общий случай

- Рассмотрим некоторую функцию от первых k начальных моментов: $\psi\left(E(X_1^1), ..., E(X_1^k)\right) = g(\theta)$.
- Предположим существование непрерывной обратной функции $g^{-1}\left(\psi\left(E(X_1^1), ..., E(X_1^k)\right)\right) = \theta$.
- Применяя теорему Манна-Вальда и теорему Слуцкого можно показать, что состоятельная оценка параметра θ может быть получена как:

$$\hat{\theta} = g^{-1}\left(\psi\left(\overline{X_n}, ..., \overline{X_n^k}\right)\right)$$

Метод моментов

Общий случай

- Рассмотрим некоторую функцию от первых k начальных моментов: $\psi\left(E(X_1^1), ..., E(X_1^k)\right) = g(\theta)$.
- Предположим существование непрерывной обратной функции $g^{-1}\left(\psi\left(E(X_1^1), ..., E(X_1^k)\right)\right) = \theta$.
- Применяя теорему Манна-Вальда и теорему Слуцкого можно показать, что состоятельная оценка параметра θ может быть получена как:
$$\hat{\theta} = g^{-1}\left(\psi\left(\overline{X_n}, ..., \overline{X_n^k}\right)\right)$$

Пример:

- Имеется выборка из экспоненциального распределения. При помощи выражения $Var(X_1)/E(X_1)$ найдите состоятельную оценку параметра λ.

- Рассмотрим некоторую функцию от первых k начальных моментов: $\psi\left(E(X_1^1),...,E(X_1^k)\right)=g(\theta)$.
- Предположим существование непрерывной обратной функции $g^{-1}\left(\psi\left(E(X_1^1),...,E(X_1^k)\right)\right)=\theta$.
- Применяя теорему Манна-Вальда и теорему Слуцкого можно показать, что состоятельная оценка параметра θ может быть получена как:

$$\hat{\theta}=g^{-1}\left(\psi\left(\overline{X_n},...,\overline{X_n^k}\right)\right)$$

Пример:

- Имеется выборка из экспоненциального распределения. При помощи выражения $Var(X_1)/E(X_1)$ найдите состоятельную оценку параметра λ.

$$E(X_1)/Var(X_1)=(1/\lambda^2)/(1/\lambda)=1/\lambda \implies \lambda=E(X_1)/Var(X_1)=E(X_1)/(E(X_1^2)-E(X_1)^2) \implies$$

- Рассмотрим некоторую функцию от первых k начальных моментов: $\psi\left(E(X_1^1),...,E(X_1^k)\right) = g(\theta)$.
- Предположим существование непрерывной обратной функции $g^{-1}\left(\psi\left(E(X_1^1),...,E(X_1^k)\right)\right) = \theta$.
- Применяя теорему Манна-Вальда и теорему Слуцкого можно показать, что состоятельная оценка параметра θ может быть получена как:

$$\hat{\theta} = g^{-1}\left(\psi\left(\overline{X_n},...,\overline{X_n^k}\right)\right)$$

Пример:

- Имеется выборка из экспоненциального распределения. При помощи выражения $Var(X_1)/E(X_1)$ найдите состоятельную оценку параметра λ.

$$E(X_1)/Var(X_1) = (1/\lambda^2)/(1/\lambda) = 1/\lambda \implies \lambda = E(X_1)/Var(X_1) = E(X_1)/(E(X_1^2) - E(X_1)^2) \implies$$

$$\implies \hat{\lambda} = \overline{X_n}/\left(\overline{X_n^2} - \left(\overline{X}_n\right)^2\right)$$

- Рассмотрим некоторую функцию от первых k начальных моментов: $\psi\left(E(X_1^1), ..., E(X_1^k)\right) = g(\theta)$.
- Предположим существование непрерывной обратной функции $g^{-1}\left(\psi\left(E(X_1^1), ..., E(X_1^k)\right)\right) = \theta$.
- Применяя теорему Манна-Вальда и теорему Слуцкого можно показать, что состоятельная оценка параметра θ может быть получена как:

$$\hat{\theta} = g^{-1}\left(\psi\left(\overline{X_n}, ..., \overline{X_n^k}\right)\right)$$

Пример:

- Имеется выборка из экспоненциального распределения. При помощи выражения $Var(X_1)/E(X_1)$ найдите состоятельную оценку параметра λ.

$$E(X_1)/Var(X_1) = (1/\lambda^2)/(1/\lambda) = 1/\lambda \implies \lambda = E(X_1)/Var(X_1) = E(X_1)/(E(X_1^2) - E(X_1)^2) \implies$$
$$\implies \hat{\lambda} = \overline{X_n}/\left(\overline{X_n^2} - \left(\overline{X}_n\right)^2\right)$$

- Повторите предыдущее задание, используя второй центральный момент $Var(X_1)$.

Метод моментов

Общий случай

- Рассмотрим некоторую функцию от первых k начальных моментов: $\psi\left(E(X_1^1), ..., E(X_1^k)\right) = g(\theta)$.
- Предположим существование непрерывной обратной функции $g^{-1}\left(\psi\left(E(X_1^1), ..., E(X_1^k)\right)\right) = \theta$.
- Применяя теорему Манна-Вальда и теорему Слуцкого можно показать, что состоятельная оценка параметра θ может быть получена как:

$$\hat{\theta} = g^{-1}\left(\psi\left(\overline{X_n}, ..., \overline{X_n^k}\right)\right)$$

Пример:

- Имеется выборка из экспоненциального распределения. При помощи выражения $Var(X_1)/E(X_1)$ найдите состоятельную оценку параметра λ.

$$E(X_1)/Var(X_1) = (1/\lambda^2)/(1/\lambda) = 1/\lambda \implies \lambda = E(X_1)/Var(X_1) = E(X_1)/(E(X_1^2) - E(X_1)^2) \implies$$

$$\implies \hat{\lambda} = \overline{X_n}/\left(\overline{X_n^2} - \left(\overline{X}_n\right)^2\right)$$

- Повторите предыдущее задание, используя второй центральный момент $Var(X_1)$.

$$Var(X_1) = 1/\lambda^2 \implies \lambda = 1/\sqrt{Var(X_1)} = 1/\sqrt{E(X_1^2) - E(X_1)^2} \implies \hat{\lambda} = \sqrt{\overline{X_n^2} - \left(\overline{X}_n\right)^2}$$

- Имеется выборка объема n из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\theta^2}, \text{ если } t \in [0, \theta] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \theta > 0$$

Метод моментов
Дополнительный пример

- Имеется выборка объема n из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t)=\begin{cases}\frac{2t}{\theta^2}\text{, если } t\in[0,\theta]\\ 0\text{, в противном случае}\end{cases},\theta>0$$

- Найдите оценку методом моментов и ее реализацию по реализации выборки $x=(1,0,2)$, используя 1) первый начальный момент, 2) второй начальный момент, 3) отношение второго начального момента к первому, 4) второй центральный момент.

Метод моментов

Дополнительный пример

- Имеется выборка объема n из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\theta^2}, \text{ если } t \in [0, \theta] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \theta > 0$$

- Найдите оценку методом моментов и ее реализацию по реализации выборки $x = (1, 0, 2)$, используя 1) первый начальный момент, 2) второй начальный момент, 3) отношение второго начального момента к первому, 4) второй центральный момент.
  Решение:

$$E(X_1) = \int_0^\theta t \times 2t/\theta^2 dt = 2\theta/3 \implies \theta = 3E(X_1)/2 \implies \hat{\theta} = 3\overline{X}_n/2 \implies \hat{\theta}(x) = 3((1+0+2)/3)/2 = 1.5$$

Метод моментов
Дополнительный пример

- Имеется выборка объема n из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\theta^2}, \text{ если } t \in [0, \theta] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \theta > 0$$

- Найдите оценку методом моментов и ее реализацию по реализации выборки $x = (1, 0, 2)$, используя 1) первый начальный момент, 2) второй начальный момент, 3) отношение второго начального момента к первому, 4) второй центральный момент.
  Решение:

$$E(X_1) = \int_0^\theta t \times 2t/\theta^2 dt = 2\theta/3 \implies \theta = 3E(X_1)/2 \implies \hat{\theta} = 3\overline{X}_n/2 \implies \hat{\theta}(x) = 3((1+0+2)/3)/2 = 1.5$$

$$E(X_1^2) = \int_0^\theta t^2 \times 2t/\theta^2 dt = \theta^2/2 \implies \theta = \sqrt{2E(X_1^2)} \implies \hat{\theta} = \sqrt{2\overline{X_n^2}} \implies \hat{\theta}(x) = \sqrt{2(1^2+0^2+2^2)/3} = \sqrt{2}$$

- Имеется выборка объема n из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\theta^2}, \text{ если } t \in [0, \theta] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \theta > 0$$

- Найдите оценку методом моментов и ее реализацию по реализации выборки $x = (1, 0, 2)$, используя 1) первый начальный момент, 2) второй начальный момент, 3) отношение второго начального момента к первому, 4) второй центральный момент.
Решение:

$$E(X_1) = \int_0^\theta t \times 2t/\theta^2 dt = 2\theta/3 \implies \theta = 3E(X_1)/2 \implies \hat{\theta} = 3\overline{X}_n/2 \implies \hat{\theta}(x) = 3((1+0+2)/3)/2 = 1.5$$

$$E(X_1^2) = \int_0^\theta t^2 \times 2t/\theta^2 dt = \theta^2/2 \implies \theta = \sqrt{2E(X_1^2)} \implies \hat{\theta} = \sqrt{2\overline{X_n^2}} \implies \hat{\theta}(x) = \sqrt{2(1^2+0^2+2^2)/3} = \sqrt{2}$$

$$E(X_1^2)/E(X_1) = 0.75\theta \implies \hat{\theta} = \overline{X_n^2}/\overline{X_n} \implies \hat{\theta}(x) = ((1^2+0^2+2^2)/3)/((1+0+2)/3) = 5/3$$

- Имеется выборка объема n из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\theta^2}, \text{ если } t \in [0, \theta] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} \quad , \theta > 0$$

- Найдите оценку методом моментов и ее реализацию по реализации выборки $x = (1, 0, 2)$, используя 1) первый начальный момент, 2) второй начальный момент, 3) отношение второго начального момента к первому, 4) второй центральный момент.
Решение:

$$E(X_1) = \int_0^\theta t \times 2t/\theta^2 dt = 2\theta/3 \implies \theta = 3E(X_1)/2 \implies \hat{\theta} = 3\overline{X}_n/2 \implies \hat{\theta}(x) = 3((1+0+2)/3)/2 = 1.5$$

$$E(X_1^2) = \int_0^\theta t^2 \times 2t/\theta^2 dt = \theta^2/2 \implies \theta = \sqrt{2E(X_1^2)} \implies \hat{\theta} = \sqrt{2\overline{X_n^2}} \implies \hat{\theta}(x) = \sqrt{2(1^2+0^2+2^2)/3} = \sqrt{2}$$

$$E(X_1^2)/E(X_1) = 0.75\theta \implies \hat{\theta} = \overline{X_n^2}/\overline{X_n} \implies \hat{\theta}(x) = ((1^2+0^2+2^2)/3)/((1+0+2)/3) = 5/3$$

$$Var(X_1) = \theta^2/2 - (2\theta/3)^2 \implies \theta = \sqrt{18 Var(X_1)} \implies \hat{\theta} = \sqrt{18(\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2)} \implies$$

- Имеется выборка объема n из распределения со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\theta^2}, \text{ если } t \in [0, \theta] \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} \quad , \theta > 0$$

- Найдите оценку методом моментов и ее реализацию по реализации выборки $x = (1, 0, 2)$, используя 1) первый начальный момент, 2) второй начальный момент, 3) отношение второго начального момента к первому, 4) второй центральный момент.

  Решение:

$$E(X_1) = \int_0^\theta t \times 2t/\theta^2 dt = 2\theta/3 \implies \theta = 3E(X_1)/2 \implies \hat{\theta} = 3\overline{X}_n/2 \implies \hat{\theta}(x) = 3((1+0+2)/3)/2 = 1.5$$

$$E(X_1^2) = \int_0^\theta t^2 \times 2t/\theta^2 dt = \theta^2/2 \implies \theta = \sqrt{2E(X_1^2)} \implies \hat{\theta} = \sqrt{2\overline{X_n^2}} \implies \hat{\theta}(x) = \sqrt{2(1^2+0^2+2^2)/3} = \sqrt{2}$$

$$E(X_1^2)/E(X_1) = 0.75\theta \implies \hat{\theta} = \overline{X_n^2}/\overline{X_n} \implies \hat{\theta}(x) = ((1^2+0^2+2^2)/3)/((1+0+2)/3) = 5/3$$

$$Var(X_1) = \theta^2/2 - (2\theta/3)^2 \implies \theta = \sqrt{18Var(X_1)} \implies \hat{\theta} = \sqrt{18(\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2)} \implies$$

$$\implies \hat{\theta}(x) = \sqrt{18((1^2+0^2+2^2)/3 - ((1+0+2)/3)^2)} = 2\sqrt{3}$$

Хи-квадрат распределение

Определение и свойства

- Дана последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин $Z_1, ..., Z_n$.

Хи-квадрат распределение

Определение и свойства

- Дана последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин $Z_1, ..., Z_n$.
- Сумма их квадратов будет иметь **Хи-квадрат** распределение с параметром n, именуемым **числом степеней свободы**:

$$\chi_n^2 = (Z_1^2 + ... + Z_n^2) \sim \chi^2(n)$$

- Дана последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин $Z_1, ..., Z_n$.
- Сумма их квадратов будет иметь **Хи-квадрат** распределение с параметром n, именуемым **числом степеней свободы**:

$$\chi^2_n = (Z_1^2 + ... + Z_n^2) \sim \chi^2(n)$$

- Нетрудно вывести моменты данного распределения:

$$E(\chi^2_n) = n \qquad Var(\chi^2_n) = 2n$$

Хи-квадрат распределение

Определение и свойства

- Дана последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин $Z_1, ..., Z_n$.
- Сумма их квадратов будет иметь **Хи-квадрат** распределение с параметром n, именуемым **числом степеней свободы**:

$$\chi_n^2 = (Z_1^2 + ... + Z_n^2) \sim \chi^2(n)$$

- Нетрудно вывести моменты данного распределения:

$$E(\chi_n^2) = n \qquad Var(\chi_n^2) = 2n$$

- Также, достаточно просто доказать следующее свойство:

$$(\chi_n^2 + \chi_m^2) \sim \chi^2(n+m)$$

Хи-квадрат распределение

Определение и свойства

- Дана последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин $Z_1, ..., Z_n$.
- Сумма их квадратов будет иметь **Хи-квадрат** распределение с параметром n, именуемым **числом степеней свободы**:

$$\chi_n^2 = (Z_1^2 + ... + Z_n^2) \sim \chi^2(n)$$

- Нетрудно вывести моменты данного распределения:

$$E(\chi_n^2) = n \qquad Var(\chi_n^2) = 2n$$

- Также, достаточно просто доказать следующее свойство:

$$(\chi_n^2 + \chi_m^2) \sim \chi^2(n + m)$$

- Значения функции распределения $F_{\chi_n^2}(t)$ считаются в программе или по таблице.

- Дана последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин $Z_1, ..., Z_n$.
- Сумма их квадратов будет иметь **Хи-квадрат** распределение с параметром n, именуемым **числом степеней свободы**:

$$\chi_n^2 = (Z_1^2 + ... + Z_n^2) \sim \chi^2(n)$$

- Нетрудно вывести моменты данного распределения:

$$E(\chi_n^2) = n \qquad Var(\chi_n^2) = 2n$$

- Также, достаточно просто доказать следующее свойство:

$$(\chi_n^2 + \chi_m^2) \sim \chi^2(n + m)$$

- Значения функции распределения $F_{\chi_n^2}(t)$ считаются в программе или по таблице.
Пример: выборка из пяти наблюдений была получена из стандартного нормального распределения. Рассчитаем вероятность того, что второй начальный выборочный момент окажется меньше двух.

Хи-квадрат распределение

Определение и свойства

- Дана последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин $Z_1, ..., Z_n$.
- Сумма их квадратов будет иметь **Хи-квадрат** распределение с параметром n, именуемым **числом степеней свободы**:

$$\chi^2_n = (Z_1^2 + ... + Z_n^2) \sim \chi^2(n)$$

- Нетрудно вывести моменты данного распределения:

$$E(\chi^2_n) = n \qquad Var(\chi^2_n) = 2n$$

- Также, достаточно просто доказать следующее свойство:

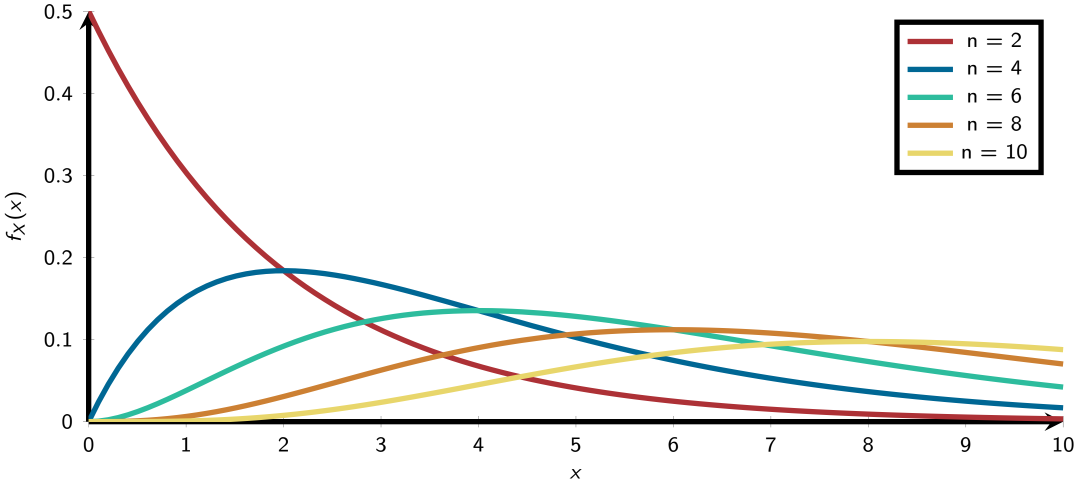
$$(\chi^2_n + \chi^2_m) \sim \chi^2(n + m)$$

- Значения функции распределения $F_{\chi^2_n}(t)$ считаются в программе или по таблице.
  Пример: выборка из пяти наблюдений была получена из стандартного нормального распределения. Рассчитаем вероятность того, что второй начальный выборочный момент окажется меньше двух.

$$P(\overline{X^2}_5 < 2) = P((X_1^2 + ... + X_5^2)/5 < 2) = P(X_1^2 + ... + X_5^2 < 10) = P(\chi^2_5 < 10) = \underbrace{F_{\chi^2_5}(10)}_{\text{по таблице}} \approx 0.925$$

Хи-квадрат распределение

Визуализация функции плотности



- Рассмотрим независимые стандартную нормальную случайную величину Z и Хи-квадрат случайную величину χ_n^2 с n степенями свободы.

- Рассмотрим независимые стандартную нормальную случайную величину Z и Хи-квадрат случайную величину χ_n^2 с n степенями свободы.
- Следующее отношение имеет **распределение Стьюдента** с параметром n, именуемым **степенями свободы**:

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}} \sim t(n)$$

Распределение Стьюдента

Определение и свойства

- Рассмотрим независимые стандартную нормальную случайную величину Z и Хи-квадрат случайную величину χ^2_n с n степенями свободы.
- Следующее отношение имеет **распределение Стьюдента** с параметром n, именуемым **степенями свободы**:

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi^2_n}} \sim t(n)$$

- Математическое ожидание и дисперсия определены лишь при $n > 1$ и $n > 2$ соответственно:

$$E(t_n) = 0 \qquad Var(t_n) = n/(n-2)$$

- Рассмотрим независимые стандартную нормальную случайную величину Z и Хи-квадрат случайную величину χ^2_n с n степенями свободы.
- Следующее отношение имеет **распределение Стьюдента** с параметром n, именуемым **степенями свободы**:

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi^2_n}} \sim t(n)$$

- Математическое ожидание и дисперсия определены лишь при $n > 1$ и $n > 2$ соответственно:

$$E(t_n) = 0 \qquad Var(t_n) = n/(n-2)$$

- Значения функции распределения $F_{t_n}(k)$ считаются в программе или по таблице.

- Рассмотрим независимые стандартную нормальную случайную величину Z и Хи-квадрат случайную величину χ^2_n с n степенями свободы.
- Следующее отношение имеет **распределение Стьюдента** с параметром n, именуемым **степенями свободы**:

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi^2_n}} \sim t(n)$$

- Математическое ожидание и дисперсия определены лишь при $n > 1$ и $n > 2$ соответственно:

$$E(t_n) = 0 \qquad Var(t_n) = n/(n-2)$$

- Значения функции распределения $F_{t_n}(k)$ считаются в программе или по таблице.
Пример: Рассчитаем вероятность того, что случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с 10-ю степенями свободы, превысит значение 1.

- Рассмотрим независимые стандартную нормальную случайную величину Z и Хи-квадрат случайную величину χ^2_n с n степенями свободы.
- Следующее отношение имеет **распределение Стьюдента** с параметром n, именуемым **степенями свободы**:

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi^2_n}} \sim t(n)$$

- Математическое ожидание и дисперсия определены лишь при $n > 1$ и $n > 2$ соответственно:

$$E(t_n) = 0 \qquad Var(t_n) = n/(n-2)$$

- Значения функции распределения $F_{t_n}(k)$ считаются в программе или по таблице.
Пример: Рассчитаем вероятность того, что случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с 10-ю степенями свободы, превысит значение 1.

$$P(t_{10} > 1) = 1 - \underbrace{F_{t_{10}}(1)}_{\text{по таблице}} \approx 1 - 0.83 = 0.17$$

- Бесконечная последовательность случайных величин из распределения Стьюдента $t_1, t_2, ...$ сходится по вероятности к стандартному нормальному распределению, то есть $t_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$.

Распределение Стьюдента

Асимптотитика

- Бесконечная последовательность случайных величин из распределения Стьюдента $t_1, t_2, \ldots$ сходится по вероятности к стандартному нормальному распределению, то есть $t_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$.
- На практике при большом $n \geq 30$ можно предположить $t_n \dot{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$.

Распределение Стьюдента

Асимптотитика

- Бесконечная последовательность случайных величин из распределения Стьюдента $t_1, t_2, ...$ сходится по вероятности к стандартному нормальному распределению, то есть $t_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$.
- На практике при большом $n \geq 30$ можно предположить $t_n \dot{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.
  Доказательство:
  Представим Хи-квадрат случайную величину как сумму квадратов независимых, одинаково распределенных стандартных нормальных случайных величин $Z_1, Z_2, ...Z_n$, откуда, по ЗБЧ:

$$\frac{1}{n}\chi^2_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \xrightarrow{p} E(Z_1^2) = Var(Z_1) - E(Z_1)^2 = 1 - 0^2 = 1 \implies \frac{1}{n}\chi^2_n \xrightarrow{p} 1$$

Распределение Стьюдента

Асимптотитика

- Бесконечная последовательность случайных величин из распределения Стьюдента $t_1, t_2, \ldots$ сходится по вероятности к стандартному нормальному распределению, то есть $t_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$.
- На практике при большом $n \geq 30$ можно предположить $t_n \dot{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

  Доказательство:

  Представим Хи-квадрат случайную величину как сумму квадратов независимых, одинаково распределенных стандартных нормальных случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$, откуда, по ЗБЧ:

$$\frac{1}{n}\chi^2_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \xrightarrow{p} E(Z_1^2) = Var(Z_1) - E(Z_1)^2 = 1 - 0^2 = 1 \implies \frac{1}{n}\chi^2_n \xrightarrow{p} 1$$

  Поскольку извлечение квадратного корня является непрерывной функцией, то по теоерме Манна-Вальда получаем:

$$\sqrt{\frac{1}{n}\chi^2_n} \xrightarrow{p} \sqrt{1} = 1$$

- Бесконечная последовательность случайных величин из распределения Стьюдента $t_1, t_2, ...$ сходится по вероятности к стандартному нормальному распределению, то есть $t_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$.
- На практике при большом $n \geq 30$ можно предположить $t_n \dot{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

Доказательство:

Представим Хи-квадрат случайную величину как сумму квадратов независимых, одинаково распределенных стандартных нормальных случайных величин $Z_1, Z_2, ...Z_n$, откуда, по ЗБЧ:

$$\frac{1}{n}\chi^2_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \xrightarrow{p} E(Z_1^2) = Var(Z_1) - E(Z_1)^2 = 1 - 0^2 = 1 \implies \frac{1}{n}\chi^2_n \xrightarrow{p} 1$$

Поскольку извлечение квадратного корня является непрерывной функцией, то по теоерме Манна-Вальда получаем:

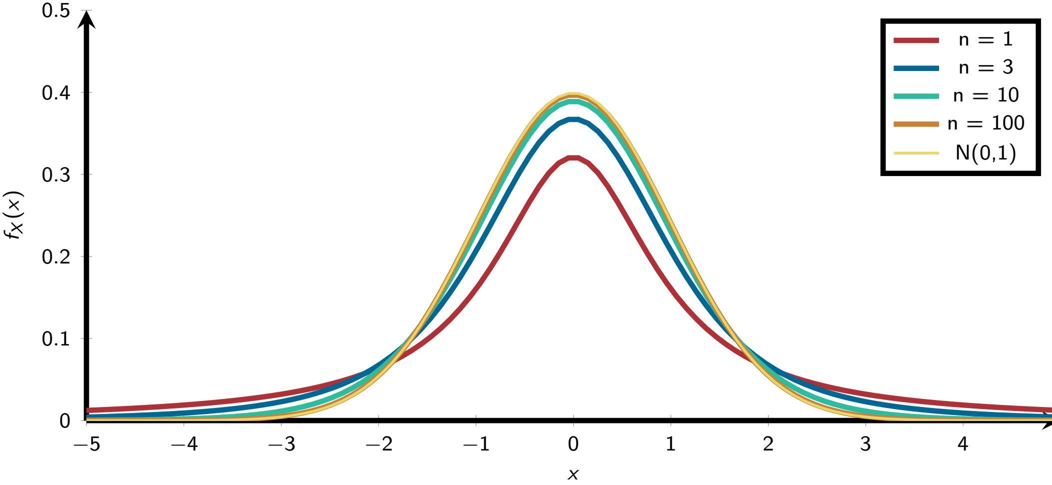
$$\sqrt{\frac{1}{n}\chi^2_n} \xrightarrow{p} \sqrt{1} = 1$$

Поскольку $Z_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, то, применяя теорему Слуцкого, имеем:

$$\frac{Z_n}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi^2_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0,1\right)/1 = \mathcal{N}\left(0,1\right)$$

Распределение Стьюдента

Визуализация функции плотности



- Рассмотрим независимые хи-квадрат случайные величины χ_n^2 и χ_m^2 с n и m степенями свободы соответственно.

- Рассмотрим независимые хи-квадрат случайные величины χ^2_n и χ^2_m с n и m степенями свободы соответственно.
- Следующее отношение имеет **распределение Фишера** с параметрами n и m, именуемыми **степенями свободы**:

$$F_{n,m} = \frac{\chi^2_n}{\chi^2_m}\frac{m}{n} \sim F(n, m)$$

Распределение Фишера

Определение и свойства

- Рассмотрим независимые хи-квадрат случайные величины χ^2_n и χ^2_m с n и m степенями свободы соответственно.
- Следующее отношение имеет **распределение Фишера** с параметрами n и m, именуемыми **степенями свободы**:

$$F_{n,m} = \frac{\chi^2_n}{\chi^2_m}\frac{m}{n} \sim F(n,m)$$

- Пусть $F^{(\alpha)}_{n,m}$ является квантилью уровня α распределения Фишера с n и m степенями свободы, тогда нетрудно показать, что:

$$F^{(1-\alpha)}_{n,m} = \frac{1}{F^{(\alpha)}_{m,n}}$$

Распределение Фишера

Определение и свойства

- Рассмотрим независимые хи-квадрат случайные величины χ^2_n и χ^2_m с n и m степенями свободы соответственно.
- Следующее отношение имеет **распределение Фишера** с параметрами n и m, именуемыми **степенями свободы**:

$$F_{n,m} = \frac{\chi^2_n}{\chi^2_m}\frac{m}{n} \sim F(n, m)$$

- Пусть $F^{(\alpha)}_{n,m}$ является квантилью уровня α распределения Фишера с n и m степенями свободы, тогда нетрудно показать, что:

$$F^{(1-\alpha)}_{n,m} = \frac{1}{F^{(\alpha)}_{m,n}}$$

- Значения функции распределения $F_{F_{n,m}}(t)$ считаются в программе или по таблице.

- Рассмотрим независимые хи-квадрат случайные величины χ^2_n и χ^2_m с n и m степенями свободы соответственно.
- Следующее отношение имеет **распределение Фишера** с параметрами n и m, именуемыми **степенями свободы**:

$$F_{n,m} = \frac{\chi^2_n}{\chi^2_m}\frac{m}{n} \sim F(n, m)$$

- Пусть $F^{(\alpha)}_{n,m}$ является квантилью уровня α распределения Фишера с n и m степенями свободы, тогда нетрудно показать, что:

$$F^{(1-\alpha)}_{n,m} = \frac{1}{F^{(\alpha)}_{m,n}}$$

- Значения функции распределения $F_{F_{n,m}}(t)$ считаются в программе или по таблице.
Пример: имеются две независимые Хи-квадрат случайные величины с 10 и 5 степенями свободы соответственно. Рассчитайте вероятность того, что первая из них примет значение хотя бы вдвое большее, чем вторая.

- Рассмотрим независимые хи-квадрат случайные величины χ^2_n и χ^2_m с n и m степенями свободы соответственно.
- Следующее отношение имеет **распределение Фишера** с параметрами n и m, именуемыми **степенями свободы**:

$$F_{n,m} = \frac{\chi^2_n}{\chi^2_m}\frac{m}{n} \sim F(n,m)$$

- Пусть $F^{(\alpha)}_{n,m}$ является квантилью уровня α распределения Фишера с n и m степенями свободы, тогда нетрудно показать, что:

$$F^{(1-\alpha)}_{n,m} = \frac{1}{F^{(\alpha)}_{m,n}}$$

- Значения функции распределения $F_{F_{n,m}}(t)$ считаются в программе или по таблице.
Пример: имеются две независимые Хи-квадрат случайные величины с 10 и 5 степенями свободы соответственно. Рассчитайте вероятность того, что первая из них примет значение хотя бы вдвое большее, чем вторая.

$$P(\chi^2_{10} > 2\chi^2_5) = P\left(\frac{\chi^2_{10}}{\chi^2_5} > 2\right) = P\left(\frac{\chi^2_{10}}{\chi^2_5}\frac{5}{10} > 2\times\frac{5}{10}\right) = P(F_{10,5} > 1) = 1 - F_{F_{10,5}}(1) \approx 0.535$$

Распределение Фишера
Визуализация распределения Фишера