

Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2021-2022

Дедлайн: домашнее задание отправляется в **pdf** формате на почту семинариста. В копию письма необходимо поставить ассистента группы.

Почты семинаристов, на которые следует отправлять домашние задания:

1. Погорелова Полина Вячеславовна – tvis.we.2021@gmail.com (группы 202 и 203)
2. Потанин Богдан Станиславович – studypotnin@gmail.com (группа 201)
3. Слаболицкий Илья Сергеевич – tvis.fweia.hse@gmail.com (группы 204, 205 и 206)

Почты ассистентов, на которые следует продублировать домашнее задание (поставить в копию при отправке):

1. Романова Дарья Юрьевна – dyuromanova_1@edu.hse.ru (группа 201)
2. Афонина Ангелина Геннадьевна – agafonina@edu.hse.ru (группа 202)
3. Макаров Антон Андреевич – aamakarov_5@edu.hse.ru (группа 203)
4. Атласов Александр Александрович – aaatlasov@edu.hse.ru (группа 204)
5. Костромина Алина Максимовна – amkostromina@edu.hse.ru (группа 205)
6. Краевский Артем Андреевич – aakraevskiy@edu.hse.ru (группа 206)

Домашнее задание должно быть отправлено на указанные почты в **pdf** формате до **29.11.2021, 8.00 (утра)** включительно (по московскому времени). Тема письма должна иметь следующий формат: “МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ”, например, “МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 3”.

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №3

Непрерывные случайные величины и асимптотические теоремы

Задание №1. Фермер. (20 баллов)

Выручка фермера является случайной величиной с функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0, \alpha] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Издержки фермера постоянны и составляют 0.1. В качестве налогов государство забирает 30% от выручки фермера. Прибыль фермера определяется как разница между выручкой (за вычетом налогов) и постоянными издержками.

1. Найдите параметр α . (2 балла)
 2. Рассчитайте вероятность того, что выручка фермера превысит 0.5. (2 балла)
 3. Посчитайте математическое ожидание и дисперсию выручки фермера. (2 балла)
 4. Запишите функцию распределения выручки фермера. (2 балла)
 5. Запишите квантиль уровня 0.64 выручки фермера. (2 балла)
 6. Посчитайте условное математическое ожидание выручки фермера, если известно, что она превысила 0.5. (3 балла)
 7. Найдите математическое ожидание и дисперсию прибыли фермера. (2 балла)
 8. Зарплата доярки рассчитывается в зависимости от выручки фермера (и даже может превышать ее) как e^X . Запишите функцию плотности и математическое ожидание зарплаты доярки. (5 баллов)
- Подсказка: $\int \ln(x) d(x) = x \ln(x) - x + C$

Задание №2. Подозрительный аналитик. (20 баллов)

Цена акции является непрерывной случайной величиной с конечными математическим ожиданием и дисперсией. Проверьте, не ошибается ли аналитик, утверждающий, что в силу высокой волатильности на рынке с вероятностью 0.5 цена акции может:

1. Не менее чем втрое превысить ее математическое ожидание. (5 баллов)
2. Отклониться от математического ожидания более, чем на два стандартных отклонения. (5 баллов)
3. Превысить цену другой (второй) акции. При этом известно, что математическое ожидание первой акции на 1.5 меньше, чем у второй. Кроме того, максимально возможная разница в ценах акций (по абсолютному значению) не превышает 2. (10 баллов)

Задание №3. Закон Лаврентия. (20 баллов)

Лаврентий бесконечно число раз независимо друг от друга с равной вероятностью загадывает число 10, 100 или 1000. Порадуйте Лаврентия, определив, к чему стремится по вероятности:

1. Среднее арифметическое загаданных им чисел. (3 балла)
2. Геометрическое среднее загаданных им чисел. (7 баллов)
3. Отношение арифметического среднего к геометрическому среднему загаданных им чисел. (5 баллов)
4. Произведение загаданных им чисел, если теперь он каждый раз с равной вероятностью загадывает одно из целых чисел от 0 до 99999 включительно. (5 баллов)

Примечание: Ответ сопроводите формальным доказательством.

Подсказка: среднее геометрическое положительных чисел x_1, \dots, x_n может быть записано как:

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} = e^{\frac{\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)}{n}}$$

Задание №4. Видеоролик. (10 баллов)

Число просмотров видеоролика является Пуассоновской случайной величиной с математическим ожиданием 10000. Используя центральную предельную теорему приблизительно посчитайте вероятность того, что ролик посмотрит не более 10100 человек.

Примечание: необходимо обосновать применимость ЦПТ в данном случае.

Подсказка: вспомните свойство воспроизводимости пуассоновских случайных величин.

Задание №5. Большой курс. (30 баллов)

Контрольную работу, включающую 3 задания, пишут 100 студентов. Они решают задания независимо друг от друга. Студент успешно решает каждое задание с вероятностью 0.5, независимо от того, смог ли он успешно решить другие задания. Найдите приблизительную вероятность того, что:

1. Студенты (суммарно) решат верно не более 160 заданий. (10 балла)
2. Процент студентов, не решивших ни одного задания, не превышает 10-ти. (10 баллов)
3. Общее число успешно решенных заданий (всеми студентами в сумме) окажется хотя бы в 1.7 раза больше числа студентов, успешно решивших по крайней мере одно задание. (10 баллов)