

# Теория Вероятностей и Статистика

## Совместное распределение дискретных случайных величин

Потанин Богдан Станиславович

доцент, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2023

- Часто нам интересно изучить связь между несколькими случайными величинами.

- Часто нам интересно изучить связь между несколькими случайными величинами.
- Например, рост и вес случайного взятого студента являются случайными величинами. При этом очевидно наличие связи между этими случайными величинами. Так, вероятность выбрать индивида с ростом 190 сантиметров и весом 100 килограмм, интуитивно, кажется выше, чем вероятность выбрать индивида с таким же ростом и весом 60 килограмм.

# Совместное распределение

## Мотивация

- Часто нам интересно изучить связь между несколькими случайными величинами.
- Например, рост и вес случайного взятого студента являются случайными величинами. При этом очевидно наличие связи между этими случайными величинами. Так, вероятность выбрать индивида с ростом 190 сантиметров и весом 100 килограмм, интуитивно, кажется выше, чем вероятность выбрать индивида с таким же ростом и весом 60 килограмм.
- Если мы посмотрим на рост случайно взятого индивида и он окажется равен 190 сантиметрам, то условная вероятность того, что индивид весит более 100 килограмм, очевидно, возрастет (по сравнению с безусловной вероятностью).

# Совместное распределение

## Мотивация

- Часто нам интересно изучить связь между несколькими случайными величинами.
- Например, рост и вес случайного взятого студента являются случайными величинами. При этом очевидно наличие связи между этими случайными величинами. Так, вероятность выбрать индивида с ростом 190 сантиметров и весом 100 килограмм, интуитивно, кажется выше, чем вероятность выбрать индивида с таким же ростом и весом 60 килограмм.
- Если мы посмотрим на рост случайно взятого индивида и он окажется равен 190 сантиметрам, то условная вероятность того, что индивид весит более 100 килограмм, очевидно, возрастет (по сравнению с безусловной вероятностью).
- Также, интуиция подсказывает, что математическое ожидание веса случайного индивида меньше, чем математическое ожидание веса индивида ростом 190 сантиметров.

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

**Решение:**

Совместная функция вероятности:



# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

**Решение:**

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) =$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

**Решение:**

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

**Решение:**

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) =$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

**Решение:**

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

**Решение:**

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) =$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

### Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

### Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) =$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

### Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$



# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

### Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1) =$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

### Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1) = P(\{4, 5\}) = 2/6$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

### Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1) = P(\{4, 5\}) = 2/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 1) =$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

### Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1) = P(\{4, 5\}) = 2/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 1) = P(\{6\}) = 1/6$$

# Совместное распределение

## Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

### Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

Кубик	1	2	3	4	5	6
Конфеты	1	1	2	2	2	3
Яблоки	0	1	0	1	1	1

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет  $X$  и яблок  $Y$ .

### Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1) = P(\{4, 5\}) = 2/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 1) = P(\{6\}) = 1/6$$

Таблица совместного распределения:

$Y \backslash X$	1	2	3
0	1/6	1/6	0
1	1/6	2/6	1/6

# Совместное распределение

## Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$ . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

# Совместное распределение

## Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$ . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.
- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

# Совместное распределение

## Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$ . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.



# Совместное распределение

## Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$ . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

**Решение:**

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в.  $X$ ):

# Совместное распределение

## Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$ . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

### Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в.  $X$ ):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

# Совместное распределение

## Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$ . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

### Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в.  $X$ ):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

$$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$$

# Совместное распределение

## Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$ . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

### Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в.  $X$ ):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

$$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$$

$$P(X = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 2) = 0.2 + 0.45 = 0.65$$

# Совместное распределение

## Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$ . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

### Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в.  $X$ ):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

$$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$$

$$P(X = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 2) = 0.2 + 0.45 = 0.65$$

Маргинальное распределение числа неудачных сделок (с.в.  $Y$ ):

# Совместное распределение

## Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$ . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

### Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в.  $X$ ):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

$$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$$

$$P(X = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 2) = 0.2 + 0.45 = 0.65$$

Маргинальное распределение числа неудачных сделок (с.в.  $Y$ ):

$$P(Y = 1) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.05 + 0.15 + 0.2 = 0.4$$

# Совместное распределение

## Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$ . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

### Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в.  $X$ ):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

$$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$$

$$P(X = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 2) = 0.2 + 0.45 = 0.65$$

Маргинальное распределение числа неудачных сделок (с.в.  $Y$ ):

$$P(Y = 1) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.05 + 0.15 + 0.2 = 0.4$$

$$P(Y = 2) = P(X = 0 \cap Y = 2) + P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 + 0.45 = 0.6$$

# Совместное распределение

## Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин  $X$  и  $Y$  задается как:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$



# Совместное распределение

## Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин  $X$  и  $Y$  задается как:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y)$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$

# Совместное распределение

## Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин  $X$  и  $Y$  задается как:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y), \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0, \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$

# Совместное распределение

## Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин  $X$  и  $Y$  задается как:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y)$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = 1$

# Совместное распределение

## Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин  $X$  и  $Y$  задается как:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите  $F_{X,Y}(1, 2.5)$  и  $F_{X,Y}(10, 1)$ .

# Совместное распределение

## Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин  $X$  и  $Y$  задается как:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

$X \backslash Y$	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите  $F_{X,Y}(1, 2.5)$  и  $F_{X,Y}(10, 1)$ .

**Решение:**

$$F_{X,Y}(1, 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2) =$$

# Совместное распределение

## Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин  $X$  и  $Y$  задается как:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y), \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0, \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

X \ Y	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите  $F_{X,Y}(1, 2.5)$  и  $F_{X,Y}(10, 1)$ .

**Решение:**

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(1, 2.5) &= P(X \leq 1 \cap Y \leq 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2) = \\ &= P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) + P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 + 0.15 + 0 = 0.35 \end{aligned}$$

# Совместное распределение

## Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин  $X$  и  $Y$  задается как:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

### Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в.  $X$ ) и неудачных (с.в.  $Y$ ) сделок задано таблицей:

$X \backslash Y$	0	1	2
1	0.05	0.15	0.2
2	0.15	0	0.45

Найдите  $F_{X,Y}(1, 2.5)$  и  $F_{X,Y}(10, 1)$ .

**Решение:**

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(1, 2.5) &= P(X \leq 1 \cap Y \leq 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2) = \\ &= P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) + P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 + 0.15 + 0 = 0.35 \\ F_{X,Y}(10, 1) &= P(X \leq 10 \cap Y \leq 1) = P(Y \leq 1) = P(Y = 1) = 0.05 + 0.15 + 0.2 = 0.4 \end{aligned}$$

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$



# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в.  $X$ ) и населения (с.в.  $Y$ ) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения  $X/Y$ .

Y \ X	0	1
1	0.1	0.5
2	0.3	0.1

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в.  $X$ ) и населения (с.в.  $Y$ ) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения  $X/Y$ .

Y \ X	0	1
1	0.1	0.5
2	0.3	0.1

### Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в.  $X$ ) и населения (с.в.  $Y$ ) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения  $X/Y$ .

Y \ X	0	1
1	0.1	0.5
2	0.3	0.1

### Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в.  $X$ ) и населения (с.в.  $Y$ ) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения  $X/Y$ .

Y \ X	0	1
1	0.1	0.5
2	0.3	0.1

### Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в.  $X$ ) и населения (с.в.  $Y$ ) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения  $X/Y$ .

Y \ X	0	1
	0.1	0.5
2	0.3	0.1

### Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Таблица распределения  $X/Y$ :

t	0	0.5	1
P(X/Y=t)	0.4	0.1	0.5

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в.  $X$ ) и населения (с.в.  $Y$ ) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения  $X/Y$ .

Y \ X	0	1
	0.1	0.5
2	0.3	0.1

### Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Поиск математического ожидания  $X/Y$  с использованием распределения  $X/Y$ :

Таблица распределения  $X/Y$ :

t	0	0.5	1
P(X/Y=t)	0.4	0.1	0.5

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в.  $X$ ) и населения (с.в.  $Y$ ) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения  $X/Y$ .

Y \ X	0	1
	0.1	0.5
2	0.3	0.1

### Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Поиск математического ожидания  $X/Y$  с использованием распределения  $X/Y$ :

$$E(X/Y) = P(X/Y = 0) \times 0 + P(X/Y = 1) \times 1 + P(X/Y = 0.5) \times 0.5 = 0.4 \times 0 + 0.5 \times 1 + 0.1 \times 0.5 = 0.55$$

Таблица распределения  $X/Y$ :

t	0	0.5	1
P(X/Y=t)	0.4	0.1	0.5



# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в.  $X$ ) и населения (с.в.  $Y$ ) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения  $X/Y$ .

Y \ X	0	1
	0.1	0.5
2	0.3	0.1

### Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Таблица распределения  $X/Y$ :

t	0	0.5	1
$P(X/Y=t)$	0.4	0.1	0.5

Поиск математического ожидания  $X/Y$  с использованием распределения  $X/Y$ :

$$E(X/Y) = P(X/Y = 0) \times 0 + P(X/Y = 1) \times 1 + P(X/Y = 0.5) \times 0.5 = 0.4 \times 0 + 0.5 \times 1 + 0.1 \times 0.5 = 0.55$$

Поиск математического ожидания  $X/Y$  с использованием совместного распределения  $X$  и  $Y$ :

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в.  $X$ ) и населения (с.в.  $Y$ ) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения  $X/Y$ .

Y \ X	0	1
	0.1	0.5
2	0.3	0.1

### Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Таблица распределения  $X/Y$ :

t	0	0.5	1
$P(X/Y=t)$	0.4	0.1	0.5

Поиск математического ожидания  $X/Y$  с использованием распределения  $X/Y$ :

$$E(X/Y) = P(X/Y = 0) \times 0 + P(X/Y = 1) \times 1 + P(X/Y = 0.5) \times 0.5 = 0.4 \times 0 + 0.5 \times 1 + 0.1 \times 0.5 = 0.55$$

Поиск математического ожидания  $X/Y$  с использованием совместного распределения  $X$  и  $Y$ :

$$E(X/Y) = P(X = 0 \cap Y = 1) \times (0/1) + P(X = 0 \cap Y = 2) \times (0/2) + P(X = 1 \cap Y = 1) \times (1/1) +$$

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию  $g(X, Y)$  от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в.  $X$ ) и населения (с.в.  $Y$ ) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения  $X/Y$ .

Y \ X	0	1
	0.1	0.5
2	0.3	0.1

### Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Таблица распределения  $X/Y$ :

t	0	0.5	1
$P(X/Y=t)$	0.4	0.1	0.5

Поиск математического ожидания  $X/Y$  с использованием распределения  $X/Y$ :

$$E(X/Y) = P(X/Y = 0) \times 0 + P(X/Y = 1) \times 1 + P(X/Y = 0.5) \times 0.5 = 0.4 \times 0 + 0.5 \times 1 + 0.1 \times 0.5 = 0.55$$

Поиск математического ожидания  $X/Y$  с использованием совместного распределения  $X$  и  $Y$ :

$$E(X/Y) = P(X = 0 \cap Y = 1) \times (0/1) + P(X = 0 \cap Y = 2) \times (0/2) + P(X = 1 \cap Y = 1) \times (1/1) + P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1/2) = 0.1 \times (0/1) + 0.5 \times (1/1) + 0.3 \times (0/2) + 0.1 \times (1/2) = 0.55$$

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин  $X$  и  $Y$ , а также констант  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$ , выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин  $X$  и  $Y$ , а также констант  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$ , выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

### Примеры:

- Фирмы  $A$  и  $B$  производят комбайны. Число произведенных на фирмах  $A$  и  $B$  комбайнов являются случайными величинами  $X$  и  $Y$  соответственно, с математическими ожиданиями  $E(X) = 5$  и  $E(Y) = 10$ . Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма  $A$  продает их по 2 рубля, а фирма  $B$  – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин  $X$  и  $Y$ , а также констант  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$ , выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

### Примеры:

- Фирмы  $A$  и  $B$  производят комбайны. Число произведенных на фирмах  $A$  и  $B$  комбайнов являются случайными величинами  $X$  и  $Y$  соответственно, с математическими ожиданиями  $E(X) = 5$  и  $E(Y) = 10$ . Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма  $A$  продает их по 2 рубля, а фирма  $B$  – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

**Решение:**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин  $X$  и  $Y$ , а также констант  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$ , выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

### Примеры:

- Фирмы  $A$  и  $B$  производят комбайны. Число произведенных на фирмах  $A$  и  $B$  комбайнов являются случайными величинами  $X$  и  $Y$  соответственно, с математическими ожиданиями  $E(X) = 5$  и  $E(Y) = 10$ . Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма  $A$  продает их по 2 рубля, а фирма  $B$  – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

### Решение:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин  $X$  и  $Y$ , а также констант  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$ , выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

### Примеры:

- Фирмы  $A$  и  $B$  производят комбайны. Число произведенных на фирмах  $A$  и  $B$  комбайнов являются случайными величинами  $X$  и  $Y$  соответственно, с математическими ожиданиями  $E(X) = 5$  и  $E(Y) = 10$ . Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма  $A$  продает их по 2 рубля, а фирма  $B$  – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

### Решение:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$



# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин  $X$  и  $Y$ , а также констант  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$ , выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

### Примеры:

- Фирмы  $A$  и  $B$  производят комбайны. Число произведенных на фирмах  $A$  и  $B$  комбайнов являются случайными величинами  $X$  и  $Y$  соответственно, с математическими ожиданиями  $E(X) = 5$  и  $E(Y) = 10$ . Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма  $A$  продает их по 2 рубля, а фирма  $B$  – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

**Решение:**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

- Известно, что  $E(X + Y) = 10$  и  $E(X - Y) = 5$ . Найдите  $E(X)$  и  $E(Y)$ .

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин  $X$  и  $Y$ , а также констант  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$ , выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

### Примеры:

- Фирмы  $A$  и  $B$  производят комбайны. Число произведенных на фирмах  $A$  и  $B$  комбайнов являются случайными величинами  $X$  и  $Y$  соответственно, с математическими ожиданиями  $E(X) = 5$  и  $E(Y) = 10$ . Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма  $A$  продает их по 2 рубля, а фирма  $B$  – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

**Решение:**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

- Известно, что  $E(X + Y) = 10$  и  $E(X - Y) = 5$ . Найдите  $E(X)$  и  $E(Y)$ .

**Решение:**

Составляем и решаем систему из двух линейных равенств:

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин  $X$  и  $Y$ , а также констант  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$ , выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

### Примеры:

- Фирмы  $A$  и  $B$  производят комбайны. Число произведенных на фирмах  $A$  и  $B$  комбайнов являются случайными величинами  $X$  и  $Y$  соответственно, с математическими ожиданиями  $E(X) = 5$  и  $E(Y) = 10$ . Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма  $A$  продает их по 2 рубля, а фирма  $B$  – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

**Решение:**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

- Известно, что  $E(X + Y) = 10$  и  $E(X - Y) = 5$ . Найдите  $E(X)$  и  $E(Y)$ .

**Решение:**

Составляем и решаем систему из двух линейных равенств:

$$\begin{cases} E(X) + E(Y) = 10 \\ E(X) - E(Y) = 5 \end{cases}$$

# Функции от нескольких дискретных случайных величин

## Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин  $X$  и  $Y$ , а также констант  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$ , выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

### Примеры:

- Фирмы  $A$  и  $B$  производят комбайны. Число произведенных на фирмах  $A$  и  $B$  комбайнов являются случайными величинами  $X$  и  $Y$  соответственно, с математическими ожиданиями  $E(X) = 5$  и  $E(Y) = 10$ . Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма  $A$  продает их по 2 рубля, а фирма  $B$  – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

**Решение:**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

- Известно, что  $E(X + Y) = 10$  и  $E(X - Y) = 5$ . Найдите  $E(X)$  и  $E(Y)$ .

**Решение:**

Составляем и решаем систему из двух линейных равенств:

$$\begin{cases} E(X) + E(Y) = 10 \\ E(X) - E(Y) = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 7.5 \\ E(Y) = 2.5 \end{cases}$$

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в.  $X$ ) и семинаров (с.в.  $Y$ ) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

Y \ X	1	3
3	0.14	0.56
5	0.06	0.24

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в.  $X$ ) и семинаров (с.в.  $Y$ ) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

Y \ X	1	3
3	0.14	0.56
5	0.06	0.24

### Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:



# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в.  $X$ ) и семинаров (с.в.  $Y$ ) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

Y \ X	1	3
	0.14	0.56
3	0.06	0.24
5		

### Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в.  $X$ ) и семинаров (с.в.  $Y$ ) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

Y \ X	1	3
3	0.14	0.56
5	0.06	0.24

### Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2,$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7,$$

$$P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в.  $X$ ) и семинаров (с.в.  $Y$ ) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

Y \ X	1	3
3	0.14	0.56
5	0.06	0.24

### Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2,$$

$$P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7,$$

$$P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в.  $X$ ) и семинаров (с.в.  $Y$ ) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

Y \ X	1	3
3	0.14	0.56
5	0.06	0.24

### Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \quad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в.  $X$ ) и семинаров (с.в.  $Y$ ) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

Y \ X	1	3
3	0.14	0.56
5	0.06	0.24

### Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \quad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 5)$$

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в.  $X$ ) и семинаров (с.в.  $Y$ ) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

Y \ X	1	3
3	0.14	0.56
5	0.06	0.24

### Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \quad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 5)$$

$$P(X = 3)P(Y = 3) = 0.8 \times 0.7 = 0.56 = P(X = 3 \cap Y = 3)$$

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в.  $X$ ) и семинаров (с.в.  $Y$ ) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

Y \ X	1	3
3	0.14	0.56
5	0.06	0.24

### Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \quad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 5)$$

$$P(X = 3)P(Y = 3) = 0.8 \times 0.7 = 0.56 = P(X = 3 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 3)P(Y = 5) = 0.8 \times 0.3 = 0.24 = P(X = 3 \cap Y = 5)$$

# Независимость случайных величин

## Определение независимости

- Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in R$  выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

### Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в.  $X$ ) и семинаров (с.в.  $Y$ ) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

Y \ X	1	3
3	0.14	0.56
5	0.06	0.24

### Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \quad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 5)$$

$$P(X = 3)P(Y = 3) = 0.8 \times 0.7 = 0.56 = P(X = 3 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 3)P(Y = 5) = 0.8 \times 0.3 = 0.24 = P(X = 3 \cap Y = 5)$$

Все условия соблюдены, следовательно, случайные величины  $X$  и  $Y$  – независимы.



# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

#### Решение:

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

#### Решение:

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

#### Решение:

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что  $X$  и  $Y$  независимы, получаем:

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

#### Решение:

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что  $X$  и  $Y$  независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

#### Решение:

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что  $X$  и  $Y$  независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(XY) = 12$ ,  $E(X) = 2E(Y)$  и  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$ . Найдите математические ожидания этих случайных величин.



# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

#### Решение:

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что  $X$  и  $Y$  независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(XY) = 12$ ,  $E(X) = 2E(Y)$  и  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$ . Найдите математические ожидания этих случайных величин.

#### Решение:

Из  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$  следует, что  $E(Y) > 0$ .

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

#### Решение:

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что  $X$  и  $Y$  независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(XY) = 12$ ,  $E(X) = 2E(Y)$  и  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$ . Найдите математические ожидания этих случайных величин.

#### Решение:

Из  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$  следует, что  $E(Y) > 0$ .

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$ , откуда получаем систему:

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

#### Решение:

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что  $X$  и  $Y$  независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(XY) = 12$ ,  $E(X) = 2E(Y)$  и  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$ . Найдите математические ожидания этих случайных величин.

#### Решение:

Из  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$  следует, что  $E(Y) > 0$ .

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$ , откуда получаем систему:

$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases}$$

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

#### Решение:

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что  $X$  и  $Y$  независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(XY) = 12$ ,  $E(X) = 2E(Y)$  и  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$ . Найдите математические ожидания этих случайных величин.

#### Решение:

Из  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$  следует, что  $E(Y) > 0$ .

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$ , откуда получаем систему:

$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ 12/E(Y) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases}$$

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

#### Решение:

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что  $X$  и  $Y$  независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(XY) = 12$ ,  $E(X) = 2E(Y)$  и  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$ . Найдите математические ожидания этих случайных величин.

#### Решение:

Из  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$  следует, что  $E(Y) > 0$ .

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$ , откуда получаем систему:

$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ 12/E(Y) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ E(Y)^2 = 6, \\ E(Y) > 0 \end{cases}$$

# Независимость случайных величин

## Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что  $E(XY) = E(X)E(Y)$  не всегда следует независимость  $X$  и  $Y$ .

### Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

#### Решение:

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что  $X$  и  $Y$  независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(XY) = 12$ ,  $E(X) = 2E(Y)$  и  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$ . Найдите математические ожидания этих случайных величин.

#### Решение:

Из  $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$  следует, что  $E(Y) > 0$ .

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$ , откуда получаем систему:

$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ 12/E(Y) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ E(Y)^2 = 6, \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 2\sqrt{6} \\ E(Y) = \sqrt{6} \end{cases}$$

# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .



# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .

#### Решение:

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы также  $X^2$  и  $Y^2$ , откуда:

# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .

#### Решение:

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы также  $X^2$  и  $Y^2$ , откуда:

$$Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 =$$

# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .

#### Решение:

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы также  $X^2$  и  $Y^2$ , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) \times (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .

#### Решение:

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы также  $X^2$  и  $Y^2$ , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) \times (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1) = 0.5$ ,  $P(Y = 5) = 0.1$  и  $P(Y = -5) = 0.2$ . Вычислите  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$ .

# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .

#### Решение:

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы также  $X^2$  и  $Y^2$ , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) \times (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1) = 0.5$ ,  $P(Y = 5) = 0.1$  и  $P(Y = -5) = 0.2$ . Вычислите  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$ .

#### Решение:

Если использовать независимость  $X$  и  $Y$ :

# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .

**Решение:**

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы также  $X^2$  и  $Y^2$ , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) \times (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1) = 0.5$ ,  $P(Y = 5) = 0.1$  и  $P(Y = -5) = 0.2$ . Вычислите  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$ .

**Решение:**

Если использовать независимость  $X$  и  $Y$ :

$$P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) = P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) =$$

# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .

#### Решение:

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы также  $X^2$  и  $Y^2$ , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) \times (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1) = 0.5$ ,  $P(Y = 5) = 0.1$  и  $P(Y = -5) = 0.2$ . Вычислите  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$ .

#### Решение:

Если использовать независимость  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) = \\ &= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) = \end{aligned}$$

# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .

#### Решение:

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы также  $X^2$  и  $Y^2$ , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) \times (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1) = 0.5$ ,  $P(Y = 5) = 0.1$  и  $P(Y = -5) = 0.2$ . Вычислите  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$ .

#### Решение:

Если использовать независимость  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) = \\ &= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) = \\ &= 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.15 \end{aligned}$$



# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .

#### Решение:

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы также  $X^2$  и  $Y^2$ , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) \times (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1) = 0.5$ ,  $P(Y = 5) = 0.1$  и  $P(Y = -5) = 0.2$ . Вычислите  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$ .

#### Решение:

Если использовать независимость  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) = \\ &= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) = \\ &= 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.15 \end{aligned}$$

Если сразу использовать независимость  $\ln(X)$  и  $Y^2$ :

# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .

**Решение:**

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы также  $X^2$  и  $Y^2$ , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) \times (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1) = 0.5$ ,  $P(Y = 5) = 0.1$  и  $P(Y = -5) = 0.2$ . Вычислите  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$ .

**Решение:**

Если использовать независимость  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) = \\ &= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) = \\ &= 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.15 \end{aligned}$$

Если сразу использовать независимость  $\ln(X)$  и  $Y^2$ :

$$P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) = P(\ln(X) = 0)P(Y^2 = 25) =$$

# Независимость случайных величин

## Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы и функции от этих случайных величин –  $g_1(X)$  и  $g_2(Y)$ .

### Примеры:

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $E(X) = 1$ ,  $Var(X) = 2$  и  $E(Y) = Var(Y) = 5$ . Найдите  $Var(XY)$ .

**Решение:**

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то независимы также  $X^2$  и  $Y^2$ , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) \times (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1) = 0.5$ ,  $P(Y = 5) = 0.1$  и  $P(Y = -5) = 0.2$ . Вычислите  $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$ .

**Решение:**

Если использовать независимость  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) = \\ &= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) = \\ &= 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.15 \end{aligned}$$

Если сразу использовать независимость  $\ln(X)$  и  $Y^2$ :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(\ln(X) = 0)P(Y^2 = 25) = \\ &= P(X = 1)(P(Y = 5) + P(Y = -5)) = 0.5 \times (0.2 + 0.1) = 0.15 \end{aligned}$$

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$ ,  $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$  и  $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ .

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$ ,  $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$  и  $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ .

**Решение:**

Найдем совместное распределение  $XY$ :



# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$ ,  $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$  и  $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ .

**Решение:**

Найдем совместное распределение  $XY$ :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$ ,  $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$  и  $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ .

**Решение:**

Найдем совместное распределение  $XY$ :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$ ,  $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$  и  $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ .

**Решение:**

Найдем совместное распределение  $XY$ :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$ ,  $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$  и  $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ .

**Решение:**

Найдем совместное распределение  $XY$ :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение  $XY$ :

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$ ,  $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$  и  $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ .

**Решение:**

Найдем совместное распределение  $XY$ :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение  $XY$ :

$$E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$$

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$ ,  $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$  и  $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ .

**Решение:**

Найдем совместное распределение  $XY$ :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение  $XY$ :

$$E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$$

Математические ожидания  $X$  и  $Y$  можно найти таким же образом:

# Ковариация

## Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$ ,  $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$  и  $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ .

**Решение:**

Найдем совместное распределение  $XY$ :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение  $XY$ :

$$E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$$

Математические ожидания  $X$  и  $Y$  можно найти таким же образом:

$$E(X) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times 1 + P(X = 2 \cap Y = 1) \times 2 + P(X = 1 \cap Y = 0) \times 1 = 0.3 \times 1 + 0.5 \times 2 + 0.2 \times 1 = 1.5$$

# Ковариация

## Определение ковариации

- Ковариация между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$ ,  $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$  и  $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ .

**Решение:**

Найдем совместное распределение  $XY$ :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение  $XY$ :

$$E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$$

Математические ожидания  $X$  и  $Y$  можно найти таким же образом:

$$E(X) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times 1 + P(X = 2 \cap Y = 1) \times 2 + P(X = 1 \cap Y = 0) \times 1 = 0.3 \times 1 + 0.5 \times 2 + 0.2 \times 1 = 1.5$$

$$E(Y) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times 2 + P(X = 2 \cap Y = 1) \times 1 + P(X = 1 \cap Y = 0) \times 0 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 1 + 0.2 \times 0 = 1.1$$



# Ковариация

## Определение ковариации

- Ковариация между случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Доказательство:**

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

**Пример:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$ ,  $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$  и  $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ .

**Решение:**

Найдем совместное распределение  $XY$ :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение  $XY$ :

$$E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$$

Математические ожидания  $X$  и  $Y$  можно найти таким же образом:

$$E(X) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times 1 + P(X = 2 \cap Y = 1) \times 2 + P(X = 1 \cap Y = 0) \times 1 = 0.3 \times 1 + 0.5 \times 2 + 0.2 \times 1 = 1.5$$

$$E(Y) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times 2 + P(X = 2 \cap Y = 1) \times 1 + P(X = 1 \cap Y = 0) \times 0 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 1 + 0.2 \times 0 = 1.1$$

$$\text{Считаем ковариацию: } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1.6 - 1.5 \times 1.1 = -0.05$$

# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .

# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .
- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .
- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .  
**Доказательство:** если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , а значит:

# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .
- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Доказательство:** если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Доказательство:** если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , то это не гарантирует, что случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы.

# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Доказательство:** если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , то это не гарантирует, что случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы.

### Пример:

- Случайная величина  $X$  с равной вероятностью принимает значения  $-1, 0$  и  $1$ . Также, имеется случайная величина  $Y = X^2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ , а также проверьте, являются ли они независимыми.

# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Доказательство:** если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , то это не гарантирует, что случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы.

### Пример:

- Случайная величина  $X$  с равной вероятностью принимает значения  $-1, 0$  и  $1$ . Также, имеется случайная величина  $Y = X^2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ , а также проверьте, являются ли они независимыми.

**Решение:**

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$



# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Доказательство:** если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , то это не гарантирует, что случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы.

### Пример:

- Случайная величина  $X$  с равной вероятностью принимает значения  $-1, 0$  и  $1$ . Также, имеется случайная величина  $Y = X^2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ , а также проверьте, являются ли они независимыми.

**Решение:**

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$

# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Доказательство:** если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , то это не гарантирует, что случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы.

### Пример:

- Случайная величина  $X$  с равной вероятностью принимает значения  $-1, 0$  и  $1$ . Также, имеется случайная величина  $Y = X^2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ , а также проверьте, являются ли они независимыми.

**Решение:**

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$

$$E(XY) = E(X \times X^2) = E(X^3) = ((-1)^3 + 0^3 + 1^3)/3 = 0$$

# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Доказательство:** если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , то это не гарантирует, что случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы.

### Пример:

- Случайная величина  $X$  с равной вероятностью принимает значения  $-1, 0$  и  $1$ . Также, имеется случайная величина  $Y = X^2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ , а также проверьте, являются ли они независимыми.

**Решение:**

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$

$$E(XY) = E(X \times X^2) = E(X^3) = ((-1)^3 + 0^3 + 1^3)/3 = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times (2/3) = 0$$

# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Доказательство:** если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , то это не гарантирует, что случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы.

### Пример:

- Случайная величина  $X$  с равной вероятностью принимает значения  $-1, 0$  и  $1$ . Также, имеется случайная величина  $Y = X^2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ , а также проверьте, являются ли они независимыми.

**Решение:**

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$

$$E(XY) = E(X \times X^2) = E(X^3) = ((-1)^3 + 0^3 + 1^3)/3 = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times (2/3) = 0$$

Несмотря на нулевую ковариацию, эти случайные величины зависимы, поскольку:

# Ковариация

## Ковариация и независимость

- Если  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  **линейно зависимы** (частный случай зависимости).  
Линейная зависимость именуется положительной при  $\text{Cov}(X, Y) > 0$  и отрицательной – при  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ .

- Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Доказательство:** если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , то это не гарантирует, что случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы.

### Пример:

- Случайная величина  $X$  с равной вероятностью принимает значения  $-1, 0$  и  $1$ . Также, имеется случайная величина  $Y = X^2$ . Найдите ковариацию между  $X$  и  $Y$ , а также проверьте, являются ли они независимыми.

**Решение:**

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$

$$E(XY) = E(X \times X^2) = E(X^3) = ((-1)^3 + 0^3 + 1^3)/3 = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times (2/3) = 0$$

Несмотря на нулевую ковариацию, эти случайные величины зависимы, поскольку:

$$P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0 \cap X^2 = 0) = P(X = 0) = 1/3 \neq P(X = 0)P(Y = 0) = 1/3 \times 1/3 = 1/9$$

# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ .

# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ .

- $\text{Cov}(X, \alpha_1) = 0,$

# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ .

- $\text{Cov}(X, \alpha_1) = 0$ ,
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ ,



# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ .

- $\text{Cov}(X, \alpha_1) = 0$ ,
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ ,
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$

# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ .

- $\text{Cov}(X, \alpha_1) = 0$ ,
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ ,
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 \text{Cov}(X, Y)$ .

# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ .

- $\text{Cov}(X, \alpha_1) = 0$ ,
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ ,
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 \text{Cov}(X, Y)$ .
- $\text{Cov}(X + Y, W + Z) = \text{Cov}(X, W) + \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, W) + \text{Cov}(Y, Z)$

# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ .

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$ ,
- $Cov(X, X) = Var(X)$ ,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$ .
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

### Пример:

- Про случайные величины  $X, Y, W$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$ ,  $Cov(X, Y) = 0.5$ ,  $Cov(X, W) = -0.3$ ,  $Y$  и  $W$  – независимы. Найдите  $Cov(Y, W)$ ,  $Cov(2X + Y, X - W)$  и  $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$ .

# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ .

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$ ,
- $Cov(X, X) = Var(X)$ ,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$ .
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

### Пример:

- Про случайные величины  $X, Y, W$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$ ,  $Cov(X, Y) = 0.5$ ,  $Cov(X, W) = -0.3$ ,  $Y$  и  $W$  – независимы. Найдите  $Cov(Y, W)$ ,  $Cov(2X + Y, X - W)$  и  $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$ .

### Решение:

Поскольку  $Y$  и  $W$  независимы, то  $Cov(Y, W) = 0$

# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ .

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$ ,
- $Cov(X, X) = Var(X)$ ,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$ .
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

### Пример:

- Про случайные величины  $X, Y, W$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$ ,  $Cov(X, Y) = 0.5$ ,  $Cov(X, W) = -0.3$ ,  $Y$  и  $W$  – независимы. Найдите  $Cov(Y, W)$ ,  $Cov(2X + Y, X - W)$  и  $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$ .

### Решение:

Поскольку  $Y$  и  $W$  независимы, то  $Cov(Y, W) = 0$

$$Cov(2X + Y, X - W) = Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) =$$

# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ .

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$ ,
- $Cov(X, X) = Var(X)$ ,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$ .
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

### Пример:

- Про случайные величины  $X, Y, W$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$ ,  $Cov(X, Y) = 0.5$ ,  $Cov(X, W) = -0.3$ ,  $Y$  и  $W$  – независимы. Найдите  $Cov(Y, W)$ ,  $Cov(2X + Y, X - W)$  и  $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$ .

### Решение:

Поскольку  $Y$  и  $W$  независимы, то  $Cov(Y, W) = 0$

$$\begin{aligned} Cov(2X + Y, X - W) &= Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) = \\ &= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) = \end{aligned}$$

# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ .

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$ ,
- $Cov(X, X) = Var(X)$ ,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$ .
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

### Пример:

- Про случайные величины  $X, Y, W$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$ ,  $Cov(X, Y) = 0.5$ ,  $Cov(X, W) = -0.3$ ,  $Y$  и  $W$  – независимы. Найдите  $Cov(Y, W)$ ,  $Cov(2X + Y, X - W)$  и  $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$ .

### Решение:

Поскольку  $Y$  и  $W$  независимы, то  $Cov(Y, W) = 0$

$$Cov(2X + Y, X - W) = Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) =$$

$$= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) =$$

$$= 2Var(X) - 2Cov(X, W) + Cov(X, Y) + Cov(Y, W) = 2 \times 10 - 2 \times (-0.3) + 0.5 - 0 = 21.1$$



# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ .

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$ ,
- $Cov(X, X) = Var(X)$ ,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$ .
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

### Пример:

- Про случайные величины  $X, Y, W$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$ ,  $Cov(X, Y) = 0.5$ ,  $Cov(X, W) = -0.3$ ,  $Y$  и  $W$  – независимы. Найдите  $Cov(Y, W)$ ,  $Cov(2X + Y, X - W)$  и  $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$ .

### Решение:

Поскольку  $Y$  и  $W$  независимы, то  $Cov(Y, W) = 0$

$$Cov(2X + Y, X - W) = Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) =$$

$$= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) =$$

$$= 2Var(X) - 2Cov(X, W) + Cov(X, Y) + Cov(Y, W) = 2 \times 10 - 2 \times (-0.3) + 0.5 - 0 = 21.1$$

$$Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6) =$$

$$= 30Var(X) - 3Cov(X, Y) + 50Cov(X, Y) - 5Var(Y) - 20Cov(X, W) + 2Cov(Y, W) =$$

# Ковариация

## Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины  $X, Y, W$  и  $Z$ , а также константы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ .

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$ ,
- $Cov(X, X) = Var(X)$ ,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$ .
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

### Пример:

- Про случайные величины  $X, Y, W$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$ ,  $Cov(X, Y) = 0.5$ ,  $Cov(X, W) = -0.3$ ,  $Y$  и  $W$  – независимы. Найдите  $Cov(Y, W)$ ,  $Cov(2X + Y, X - W)$  и  $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$ .

#### Решение:

Поскольку  $Y$  и  $W$  независимы, то  $Cov(Y, W) = 0$

$$\begin{aligned} Cov(2X + Y, X - W) &= Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) = \\ &= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) = \\ &= 2Var(X) - 2Cov(X, W) + Cov(X, Y) + Cov(Y, W) = 2 \times 10 - 2 \times (-0.3) + 0.5 - 0 = 21.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6) &= \\ &= 30Var(X) - 3Cov(X, Y) + 50Cov(X, Y) - 5Var(Y) - 20Cov(X, W) + 2Cov(Y, W) = \\ &= 30 \times 10 - 3 \times 0.5 + 50 \times 0.5 - 5 \times 20 - 20 \times (-0.3) + 2 \times 0 = 229.5 \end{aligned}$$

# Ковариация

## Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины  $X$  и  $Y$ .

# Ковариация

## Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины  $X$  и  $Y$ .

- $$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

# Ковариация

## Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины  $X$  и  $Y$ .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

# Ковариация

## Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины  $X$  и  $Y$ .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$  и  $Cov(X, Y) = 0.5$ . Найдите  $Var(X + Y)$  и  $Var(2X - 3Y + 5)$ .

# Ковариация

## Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины  $X$  и  $Y$ .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$  и  $Cov(X, Y) = 0.5$ . Найдите  $Var(X + Y)$  и  $Var(2X - 3Y + 5)$ .

**Решение:**

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

# Ковариация

## Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины  $X$  и  $Y$ .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$  и  $Cov(X, Y) = 0.5$ . Найдите  $Var(X + Y)$  и  $Var(2X - 3Y + 5)$ .

**Решение:**

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

$$Var(2X - 3Y + 5) = Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X, 3Y) =$$



# Ковариация

## Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины  $X$  и  $Y$ .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$  и  $Cov(X, Y) = 0.5$ . Найдите  $Var(X + Y)$  и  $Var(2X - 3Y + 5)$ .

**Решение:**

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

$$\begin{aligned} Var(2X - 3Y + 5) &= Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X, 3Y) = \\ &= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X, Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214 \end{aligned}$$

# Ковариация

## Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины  $X$  и  $Y$ .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$  и  $Cov(X, Y) = 0.5$ . Найдите  $Var(X + Y)$  и  $Var(2X - 3Y + 5)$ .

**Решение:**

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

$$\begin{aligned} Var(2X - 3Y + 5) &= Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X, 3Y) = \\ &= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X, Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $Var(X) = 1$  и  $Var(Y) = 2$ . Найдите  $Var(X - Y)$ .

# Ковариация

## Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины  $X$  и  $Y$ .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$  и  $Cov(X, Y) = 0.5$ . Найдите  $Var(X + Y)$  и  $Var(2X - 3Y + 5)$ .

**Решение:**

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

$$\begin{aligned} Var(2X - 3Y + 5) &= Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X, 3Y) = \\ &= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X, Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $Var(X) = 1$  и  $Var(Y) = 2$ . Найдите  $Var(X - Y)$ .

**Решение:**

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то  $Cov(X, Y) = 0$ , а значит:

# Ковариация

## Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины  $X$  и  $Y$ .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

**Примеры:**

- Про случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $Var(X) = 10$ ,  $Var(Y) = 20$  и  $Cov(X, Y) = 0.5$ . Найдите  $Var(X + Y)$  и  $Var(2X - 3Y + 5)$ .

**Решение:**

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

$$\begin{aligned} Var(2X - 3Y + 5) &= Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X, 3Y) = \\ &= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X, Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  известно, что  $Var(X) = 1$  и  $Var(Y) = 2$ . Найдите  $Var(X - Y)$ .

**Решение:**

Поскольку  $X$  и  $Y$  независимы, то  $Cov(X, Y) = 0$ , а значит:

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y) = 1 + 2 - 2 \times 0 = 3$$

# Ковариация

## Корреляция

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем  $\text{Cov}(X, Y) = 1$ . Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит  $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$ .

# Ковариация

## Корреляция

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем  $\text{Cov}(X, Y) = 1$ . Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит  $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$ .
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от  $-1$  до  $1$ , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

# Ковариация

## Корреляция

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем  $\text{Cov}(X, Y) = 1$ . Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит  $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$ .

- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от  $-1$  до  $1$ , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

- Если  $|\text{Corr}(X, Y)| = 1$ , то существуют такие  $\alpha, \beta \in R$ , что  $Y = \alpha X + \beta$ .

# Ковариация

## Корреляция

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем  $\text{Cov}(X, Y) = 1$ . Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит  $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$ .
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от  $-1$  до  $1$ , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

- Если  $|\text{Corr}(X, Y)| = 1$ , то существуют такие  $\alpha, \beta \in R$ , что  $Y = \alpha X + \beta$ .

### Пример:

Ковариация между оценками за курс математики (с.в.  $X$ ) и экономики (с.в.  $Y$ ) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.



# Ковариация

## Корреляция

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем  $\text{Cov}(X, Y) = 1$ . Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит  $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$ .
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от  $-1$  до  $1$ , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

- Если  $|\text{Corr}(X, Y)| = 1$ , то существуют такие  $\alpha, \beta \in R$ , что  $Y = \alpha X + \beta$ .

### Пример:

Ковариация между оценками за курс математики (с.в.  $X$ ) и экономики (с.в.  $Y$ ) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.

### Решение:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{5}{\sqrt{10 \times 40}} = 0.25$$

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем  $\text{Cov}(X, Y) = 1$ . Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит  $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$ .
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от  $-1$  до  $1$ , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

- Если  $|\text{Corr}(X, Y)| = 1$ , то существуют такие  $\alpha, \beta \in R$ , что  $Y = \alpha X + \beta$ .

### Пример:

Ковариация между оценками за курс математики (с.в.  $X$ ) и экономики (с.в.  $Y$ ) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.

### Решение:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{5}{\sqrt{10 \times 40}} = 0.25$$

$$\text{Corr}(X + Y, X - Y) = \frac{\text{Cov}(X+Y, X-Y)}{\sqrt{\text{Var}(X+Y)\text{Var}(X-Y)}} = \frac{\text{Var}(X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Y) - \text{Var}(Y)}{\sqrt{(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y))(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y))}} =$$

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем  $\text{Cov}(X, Y) = 1$ . Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит  $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$ .
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от  $-1$  до  $1$ , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

- Если  $|\text{Corr}(X, Y)| = 1$ , то существуют такие  $\alpha, \beta \in R$ , что  $Y = \alpha X + \beta$ .

### Пример:

Ковариация между оценками за курс математики (с.в.  $X$ ) и экономики (с.в.  $Y$ ) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.

### Решение:

$$\begin{aligned}\text{Corr}(X, Y) &= \frac{5}{\sqrt{10 \times 40}} = 0.25 \\ \text{Corr}(X + Y, X - Y) &= \frac{\text{Cov}(X+Y, X-Y)}{\sqrt{\text{Var}(X+Y)\text{Var}(X-Y)}} = \frac{\text{Var}(X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Y) - \text{Var}(Y)}{\sqrt{(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y))(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y))}} = \\ &= \frac{10 - 5 + 5 - 40}{\sqrt{(10 + 40 + 2 \times 5)(10 + 40 - 2 \times 5)}} \approx -0.61\end{aligned}$$

# Ковариация

## Ковариация между линейными комбинациями случайных величин

- Имеется последовательности случайных величин  $X_1, \dots, X_n$  и  $Y_1, \dots, Y_m$ , а также константы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ .
- Используя свойства ковариации нетрудно показать, что ковариация между линейными комбинациями соответствующих случайных величин имеет вид:

$$\text{Cov}(\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n, \beta_1 Y_1 + \dots + \beta_m Y_m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , а также константу  $y \in \text{supp}(Y)$ .

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , а также константу  $y \in \text{supp}(Y)$ .
- Распределение случайной величины  $(X|Y = y)$  имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , а также константу  $y \in \text{supp}(Y)$ .
- Распределение случайной величины  $(X|Y = y)$  имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей.  
Найдите распределение случайной величины  $(Y|X = 0)$ , а также  $E(Y|X = 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , а также константу  $y \in \text{supp}(Y)$ .
- Распределение случайной величины  $(X|Y = y)$  имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей.  
Найдите распределение случайной величины  $(Y|X = 0)$ , а также  $E(Y|X = 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

**Решение:**

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$



# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , а также константу  $y \in \text{supp}(Y)$ .
- Распределение случайной величины  $(X|Y = y)$  имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей.  
Найдите распределение случайной величины  $(Y|X = 0)$ , а также  $E(Y|X = 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

**Решение:**

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , а также константу  $y \in \text{supp}(Y)$ .
- Распределение случайной величины  $(X|Y = y)$  имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей.  
Найдите распределение случайной величины  $(Y|X = 0)$ , а также  $E(Y|X = 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

**Решение:**

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

Таблица распределения  $(Y|X=0)$ :

t	1	2
$P(Y=t X=0)$	1/3	2/3

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , а также константу  $y \in \text{supp}(Y)$ .
- Распределение случайной величины  $(X|Y = y)$  имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей.  
Найдите распределение случайной величины  $(Y|X = 0)$ , а также  $E(Y|X = 0)$ .

**Решение:**

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

$$E(Y|X = 0) = P(Y = 1|X = 0) \times 1 + P(Y = 2|X = 0) \times 2 =$$

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

Таблица распределения  $(Y|X=0)$ :

t	1	2
$P(Y=t X=0)$	1/3	2/3

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , а также константу  $y \in \text{supp}(Y)$ .
- Распределение случайной величины  $(X|Y = y)$  имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей.  
Найдите распределение случайной величины  $(Y|X = 0)$ , а также  $E(Y|X = 0)$ .

**Решение:**

$$\begin{aligned} P(Y = 1|X = 0) &= P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3 \\ P(Y = 2|X = 0) &= P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3 \\ E(Y|X = 0) &= P(Y = 1|X = 0) \times 1 + P(Y = 2|X = 0) \times 2 = \\ &= (1/3) \times 1 + (2/3) \times 2 = 5/3 \end{aligned}$$

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

Таблица распределения  $(Y|X=0)$ :

t	1	2
$P(Y=t X=0)$	1/3	2/3

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , а также константу  $y \in \text{supp}(Y)$ .
- Распределение случайной величины  $(X|Y = y)$  имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей.  
Найдите распределение случайной величины  $(Y|X = 0)$ , а также  $E(Y|X = 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

**Решение:**

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

$$E(Y|X = 0) = P(Y = 1|X = 0) \times 1 + P(Y = 2|X = 0) \times 2 = \\ = (1/3) \times 1 + (2/3) \times 2 = 5/3$$

Таблица распределения  $(Y|X=0)$ :

t	1	2
$P(Y=t X=0)$	1/3	2/3

- Если Катя покупает три кофты, то с вероятностью 0.5 она приобретет и две юбки. Три кофты Катя покупает с вероятностью 0.2. Найдите вероятность того, что Катя купит две юбки и три кофты

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , а также константу  $y \in \text{supp}(Y)$ .
- Распределение случайной величины  $(X|Y = y)$  имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X = 0)$ , а также  $E(Y|X = 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

**Решение:**

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

$$E(Y|X = 0) = P(Y = 1|X = 0) \times 1 + P(Y = 2|X = 0) \times 2 = (1/3) \times 1 + (2/3) \times 2 = 5/3$$

Таблица распределения  $(Y|X=0)$ :

t	1	2
$P(Y=t X=0)$	1/3	2/3

- Если Катя покупает три кофты, то с вероятностью 0.5 она приобретет и две юбки. Три кофты Катя покупает с вероятностью 0.2. Найдите вероятность того, что Катя купит две юбки и три кофты

**Решение:**

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число купленных Катей юбок и кофт соответственно, откуда:

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , а также константу  $y \in \text{supp}(Y)$ .
- Распределение случайной величины  $(X|Y = y)$  имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

**Примеры:**

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X = 0)$ , а также  $E(Y|X = 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

**Решение:**

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

$$\begin{aligned} E(Y|X = 0) &= P(Y = 1|X = 0) \times 1 + P(Y = 2|X = 0) \times 2 = \\ &= (1/3) \times 1 + (2/3) \times 2 = 5/3 \end{aligned}$$

Таблица распределения  $(Y|X=0)$ :

t	1	2
$P(Y=t X=0)$	1/3	2/3

- Если Катя покупает три кофты, то с вероятностью 0.5 она приобретет и две юбки. Три кофты Катя покупает с вероятностью 0.2. Найдите вероятность того, что Катя купит две юбки и три кофты

**Решение:**

Через  $X$  и  $Y$  обозначим число купленных Катей юбок и кофт соответственно, откуда:

$$P(X = 2 \cap Y = 3) = P(X = 2|Y = 3)P(Y = 3) = 0.5 \times 0.2 = 0.1$$

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение  $(X|Y \in S)$ , где  $S \subset R$  и  $P(Y \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$



# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение  $(X|Y \in S)$ , где  $S \subset R$  и  $P(Y \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

## Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X > 0)$ , а также  $E(Y|X > 0)$ .

Y \ X	X		
	0	1	2
1	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение  $(X|Y \in S)$ , где  $S \subset R$  и  $P(Y \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

## Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X > 0)$ , а также  $E(Y|X > 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

## Решение:

Обратим внимание, что событие  $X > 0$  эквивалентно событию  $X \in \{1, 2\}$ , откуда:

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение  $(X|Y \in S)$ , где  $S \subset R$  и  $P(Y \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

## Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X > 0)$ , а также  $E(Y|X > 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

## Решение:

Обратим внимание, что событие  $X > 0$  эквивалентно событию  $X \in \{1, 2\}$ , откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение  $(X|Y \in S)$ , где  $S \subset R$  и  $P(Y \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

## Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X > 0)$ , а также  $E(Y|X > 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

## Решение:

Обратим внимание, что событие  $X > 0$  эквивалентно событию  $X \in \{1, 2\}$ , откуда:

$$\begin{aligned} P(Y = 1|X > 0) &= \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} = \\ &= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7 \end{aligned}$$

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение  $(X|Y \in S)$ , где  $S \subset R$  и  $P(Y \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

## Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X > 0)$ , а также  $E(Y|X > 0)$ .

Y \ X	X		
	0	1	2
1	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

## Решение:

Обратим внимание, что событие  $X > 0$  эквивалентно событию  $X \in \{1, 2\}$ , откуда:

$$\begin{aligned} P(Y = 1|X > 0) &= \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} = \\ &= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7 \end{aligned}$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение  $(X|Y \in S)$ , где  $S \subset R$  и  $P(Y \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

## Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X > 0)$ , а также  $E(Y|X > 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

## Решение:

Обратим внимание, что событие  $X > 0$  эквивалентно событию  $X \in \{1, 2\}$ , откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение  $(X|Y \in S)$ , где  $S \subset R$  и  $P(Y \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

## Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X > 0)$ , а также  $E(Y|X > 0)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

## Решение:

Обратим внимание, что событие  $X > 0$  эквивалентно событию  $X \in \{1, 2\}$ , откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$
$$P(Y = 2|X > 0) = 1 - P(Y = 1|X > 0) = 1 - 3/7 = 4/7$$

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение  $(X|Y \in S)$ , где  $S \subset R$  и  $P(Y \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

## Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X > 0)$ , а также  $E(Y|X > 0)$ .

X \ Y	0	1	2
1	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

## Решение:

Обратим внимание, что событие  $X > 0$  эквивалентно событию  $X \in \{1, 2\}$ , откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$
$$P(Y = 2|X > 0) = 1 - P(Y = 1|X > 0) = 1 - 3/7 = 4/7$$

Таблица распределения  $(Y|X > 0)$ :

t	1	2
$P(Y=t X > 0)$	3/7	4/7



# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение  $(X|Y \in S)$ , где  $S \subset R$  и  $P(Y \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

## Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X > 0)$ , а также  $E(Y|X > 0)$ .

X \ Y	0	1	2
1	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

## Решение:

Обратим внимание, что событие  $X > 0$  эквивалентно событию  $X \in \{1, 2\}$ , откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = 1 - P(Y = 1|X > 0) = 1 - 3/7 = 4/7$$

$$E(Y|X > 0) = P(Y = 1|X > 0) \times 1 + P(Y = 2|X > 0) \times 2 =$$

Таблица распределения  $(Y|X > 0)$ :

t	1	2
$P(Y=t X>0)$	3/7	4/7

# Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение  $(X|Y \in S)$ , где  $S \subset R$  и  $P(Y \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

## Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение случайной величины  $(Y|X > 0)$ , а также  $E(Y|X > 0)$ .

X \ Y	0	1	2
1	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

## Решение:

Обратим внимание, что событие  $X > 0$  эквивалентно событию  $X \in \{1, 2\}$ , откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = 1 - P(Y = 1|X > 0) = 1 - 3/7 = 4/7$$

$$E(Y|X > 0) = P(Y = 1|X > 0) \times 1 + P(Y = 2|X > 0) \times 2 =$$
$$= (3/7) \times 1 + (4/7) \times 2 = 11/7$$

Таблица распределения  $(Y|X > 0)$ :

t	1	2
$P(Y=t X>0)$	3/7	4/7

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y | (X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y | (X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y | (X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y | (X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

### Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей.  
Найдите распределение  $(X, Y | X + Y \geq 3)$  и  $Cov(X, Y | X + Y \geq 3)$ .

Y \ X	X		
	0	1	2
1	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y|(X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

### Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей.  
Найдите распределение  $(X, Y|X + Y \geq 3)$  и  $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$ .

Y \ X	X		
	0	1	2
1	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

### Решение:

Обратим внимание, что событие  $X + Y \geq 3$  эквивалентно событию  $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , откуда:

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y | (X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y | (X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

### Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение  $(X, Y | X + Y \geq 3)$  и  $Cov(X, Y | X + Y \geq 3)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

### Решение:

Обратим внимание, что событие  $X + Y \geq 3$  эквивалентно событию  $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2 | X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y | (X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y | (X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

### Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение  $(X, Y | X + Y \geq 3)$  и  $Cov(X, Y | X + Y \geq 3)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

### Решение:

Обратим внимание, что событие  $X + Y \geq 3$  эквивалентно событию  $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2 | X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1 | X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y|(X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

### Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение  $(X, Y|X + Y \geq 3)$  и  $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

### Решение:

Обратим внимание, что событие  $X + Y \geq 3$  эквивалентно событию  $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$



# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y|(X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

### Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение  $(X, Y|X + Y \geq 3)$  и  $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

### Решение:

Обратим внимание, что событие  $X + Y \geq 3$  эквивалентно событию  $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

Таблица распределения  $(X, Y|X + Y \geq 3)$ :

Y \ X	1	2
	0	1/3
2	1/6	1/2

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y|(X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

### Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение  $(X, Y|X + Y \geq 3)$  и  $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

### Решение:

Обратим внимание, что событие  $X + Y \geq 3$  эквивалентно событию  $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

Таблица распределения  $(X, Y|X + Y \geq 3)$ :

Y \ X	1	2
	0	1/3
2	1/6	1/2

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y|(X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

### Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение  $(X, Y|X + Y \geq 3)$  и  $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

### Решение:

Обратим внимание, что событие  $X + Y \geq 3$  эквивалентно событию  $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

$$E(Y|X + Y \geq 3) = (0 + 1/3) \times 1 + (1/6 + 1/2) \times 2 = 5/3$$

Таблица распределения  $(X, Y|X + Y \geq 3)$ :

Y \ X	1	2
	0	1/3
2	1/6	1/2

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y|(X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

### Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение  $(X, Y|X + Y \geq 3)$  и  $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

### Решение:

Обратим внимание, что событие  $X + Y \geq 3$  эквивалентно событию  $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

$$E(Y|X + Y \geq 3) = (0 + 1/3) \times 1 + (1/6 + 1/2) \times 2 = 5/3$$

Таблица распределения  $(X, Y|X + Y \geq 3)$ :

Y \ X	1	2
	0	1/3
2	1/6	1/2

Таблица распределения  $(XY|X + Y \geq 3)$ :

t	2	4
$P(XY = t X + Y \geq 3)$	1/2	1/2

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y|(X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

### Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение  $(X, Y|X + Y \geq 3)$  и  $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

### Решение:

Обратим внимание, что событие  $X + Y \geq 3$  эквивалентно событию  $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

$$E(Y|X + Y \geq 3) = (0 + 1/3) \times 1 + (1/6 + 1/2) \times 2 = 5/3$$

$$E(XY|X + Y \geq 3) = (1/6 + 1/3) \times 2 + (1/2) \times 4 = 3$$

Таблица распределения  $(X, Y|X + Y \geq 3)$ :

Y \ X	1	2
	0	1/3
2	1/6	1/2

Таблица распределения  $(XY|X + Y \geq 3)$ :

t	2	4
$P(XY = t X + Y \geq 3)$	1/2	1/2

# Условное распределение

## Условное совместное распределение

- Совместное распределение  $(X, Y|(X, Y) \in S)$ , где  $S \subset R^2$  и  $P((X, Y) \in S) > 0$ , имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

### Пример:

- Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано таблицей. Найдите распределение  $(X, Y|X + Y \geq 3)$  и  $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$ .

Y \ X	0	1	2
	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.3

### Решение:

Обратим внимание, что событие  $X + Y \geq 3$  эквивалентно событию  $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

$$E(Y|X + Y \geq 3) = (0 + 1/3) \times 1 + (1/6 + 1/2) \times 2 = 5/3$$

$$E(XY|X + Y \geq 3) = (1/6 + 1/3) \times 2 + (1/2) \times 4 = 3$$

$$Cov(X, Y|X + Y \geq 3) = 3 - (11/6)(5/3) = -1/18$$

Таблица распределения  $(X, Y|X + Y \geq 3)$ :

Y \ X	1	2
	0	1/3
2	1/6	1/2

Таблица распределения  $(XY|X + Y \geq 3)$ :

t	2	4
$P(XY = t X + Y \geq 3)$	1/2	1/2