

Теория Вероятностей и Статистика

Сходимость по распределению

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, научный сотрудник, кандидат экономических наук

2022

Сходимость по распределению

Определение

- Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится по распределению** к случайной величине X , что обозначается как $X_n \xrightarrow{d} X$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \forall x \in \mathcal{T}$$

Где \mathcal{T} обозначает множество точек, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна.

Сходимость по распределению

Определение

- Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится по распределению** к случайной величине X , что обозначается как $X_n \xrightarrow{d} X$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \forall x \in \mathcal{T}$$

Где \mathcal{T} обозначает множество точек, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна.

Примеры:

- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X . Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X .

Сходимость по распределению

Определение

- Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится по распределению** к случайной величине X , что обозначается как $X_n \xrightarrow{d} X$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \forall x \in \mathcal{T}$$

Где \mathcal{T} обозначает множество точек, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна.

Примеры:

- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X . Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X .

Решение: сходимость по распределению соблюдается, поскольку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{n}}{\sqrt{1}}\right) = \Phi\left(\frac{x - 0}{\sqrt{1}}\right) = \Phi(x) = F_X(x), \forall x \in \mathcal{T}$$

Сходимость по распределению

Определение

- Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится по распределению** к случайной величине X , что обозначается как $X_n \xrightarrow{d} X$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \forall x \in \mathcal{T}$$

Где \mathcal{T} обозначает множество точек, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна.

Примеры:

- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X . Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X .

Решение: сходимость по распределению соблюдается, поскольку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{n}}{\sqrt{1}}\right) = \Phi\left(\frac{x - 0}{\sqrt{1}}\right) = \Phi(x) = F_X(x), \forall x \in \mathcal{T}$$

- Рассмотрим последовательность **экспоненциальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **экспоненциальную** случайную величину $X \sim EXP(1)$. Известно, что $X_n \sim EXP\left(\frac{n}{n+1}\right)$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X .

Сходимость по распределению

Определение

- Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots **сходится по распределению** к случайной величине X , что обозначается как $X_n \xrightarrow{d} X$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \forall x \in \mathcal{T}$$

Где \mathcal{T} обозначает множество точек, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна.

Примеры:

- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X . Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$, где $n \in I$. Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X .

Решение: сходимость по распределению соблюдается, поскольку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{n}}{\sqrt{1}}\right) = \Phi\left(\frac{x - 0}{\sqrt{1}}\right) = \Phi(x) = F_X(x), \forall x \in \mathcal{T}$$

- Рассмотрим последовательность **экспоненциальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **экспоненциальную** случайную величину $X \sim EXP(1)$. Известно, что $X_n \sim EXP\left(\frac{n}{n+1}\right)$, где $n \in I$.

Проверьте, сходится ли по распределению данная последовательность к X .

Решение: сходимость по распределению соблюдается, поскольку при $x \geq 0$ (при $x < 0$ предел очевиден):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-\frac{n}{n+1}x} = 1 - e^{-1 \times x} = 1 - e^{-x} = F_X(x), \forall x \in \mathcal{T}$$

Сходимость по распределению

Приблизительное распределение (практический смысл)

- Если распределения случайной величины X предполагается схожим с распределением Θ , то записывают $X \dot{\sim} \Theta$.

Сходимость по распределению

Приблизительное распределение (практический смысл)

- Если распределения случайной величины X предполагается схожим с распределением Θ , то записывают $X \dot{\sim} \Theta$.
- Если последовательность X_1, X_2, \dots по распределению сходится к $X \sim \Theta$, то при достаточно большом n без существенных потерь в точности можно предположить, что $X_n \dot{\sim} \Theta$. В таких случаях Θ часто именуют **асимптотическим распределением**.

Сходимость по распределению

Приблизительное распределение (практический смысл)

- Если распределения случайной величины X предполагается схожим с распределением Θ , то записывают $X \dot{\sim} \Theta$.
- Если последовательность X_1, X_2, \dots по распределению сходится к $X \sim \Theta$, то при достаточно большом n без существенных потерь в точности можно предположить, что $X_n \dot{\sim} \Theta$. В таких случаях Θ часто именуют **асимптотическим распределением**.

Примеры:

- Если $X \sim U(0, 0.999)$, то полагая $\Theta = U(0, 1)$ без существенной потери в точности можно предположить, что $X \dot{\sim} U(0, 1)$.

Сходимость по распределению

Приблизительное распределение (практический смысл)

- Если распределения случайной величины X предполагается схожим с распределением Θ , то записывают $X \dot{\sim} \Theta$.
- Если последовательность X_1, X_2, \dots по распределению сходится к $X \sim \Theta$, то при достаточно большом n без существенных потерь в точности можно предположить, что $X_n \dot{\sim} \Theta$. В таких случаях Θ часто именуют **асимптотическим распределением**.

Примеры:

- Если $X \sim U(0, 0.999)$, то полагая $\Theta = U(0, 1)$ без существенной потери в точности можно предположить, что $X \dot{\sim} U(0, 1)$.
- Рассмотрим последовательность нормальных случайных величин X_1, X_2, \dots , такую, что $X_n \sim \mathcal{N}(\frac{1}{n}, 1)$. Ранее было показано, что она стремится по распределению к стандартной нормальной случайной величине $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда при $n = 1000$ без существенной потери в точности можно предположить, что $X_{1000} \dot{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$.

Сходимость по распределению

Приблизительное распределение (практический смысл)

- Если распределения случайной величины X предполагается схожим с распределением Θ , то записывают $X \dot{\sim} \Theta$.
- Если последовательность X_1, X_2, \dots по распределению сходится к $X \sim \Theta$, то при достаточно большом n без существенных потерь в точности можно предположить, что $X_n \dot{\sim} \Theta$. В таких случаях Θ часто именуют **асимптотическим распределением**.

Примеры:

- Если $X \sim U(0, 0.999)$, то полагая $\Theta = U(0, 1)$ без существенной потери в точности можно предположить, что $X \dot{\sim} U(0, 1)$.
- Рассмотрим последовательность нормальных случайных величин X_1, X_2, \dots , такую, что $X_n \sim \mathcal{N}(\frac{1}{n}, 1)$. Ранее было показано, что она стремится по распределению к стандартной нормальной случайной величине $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда при $n = 1000$ без существенной потери в точности можно предположить, что $X_{1000} \dot{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$. Оценим погрешность в вычислениях на конкретном примере:

Настоящее распределение: $P(X_{1000} < 1) = \Phi(1 - \frac{1}{1000}) \approx 0.8411027$

Асимптотическое распределение: $P(X_{1000} < 1) \approx \Phi(1) \approx 0.8413447$

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$.

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{P} X$, где $X \sim \text{Pois}(5)$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{d} X$.

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{P} X$, где $X \sim \text{Pois}(5)$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} 5$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{P} 5$.

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{P} X$, где $X \sim \text{Pois}(5)$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} 5$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{P} 5$.
- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X . Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ и $\text{Cov}(X_n, X) = 0.5$, где $n \in I$. Ранее было показано, что $X_n \xrightarrow{d} X$.

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{P} X$, где $X \sim \text{Pois}(5)$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} 5$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{P} 5$.
- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X . Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}(\frac{1}{n}, 1)$ и $\text{Cov}(X_n, X) = 0.5$, где $n \in I$. Ранее было показано, что $X_n \xrightarrow{d} X$. Теперь покажем, что несмотря на то, что соблюдается сходимость по распределению, не будет соблюдаться сходимость по вероятности. Полагая $\varepsilon = 1$ и обращая внимание на то, что $(X_n - X) \sim \mathcal{N}(\frac{1}{n}, 1)$ получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n - X > 1) + P(X_n - X < -1)$$

Сходимость по распределению

Связь со сходимостью по вероятности

- Из сходимости по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$ следует сходимость по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Если $X = c$ – константа, то из сходимости по распределению $X_n \xrightarrow{d} X$ следует сходимость по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$.

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{P} X$, где $X \sim \text{Pois}(5)$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{d} X$.
- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} 5$. Тогда верно также, что $X_n \xrightarrow{P} 5$.
- Рассмотрим последовательность **нормальных** случайных величин X_1, X_2, \dots со множеством индексов I и **стандартную нормальную** случайную величину X . Известно, что $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ и $\text{Cov}(X_n, X) = 0.5$, где $n \in I$. Ранее было показано, что $X_n \xrightarrow{d} X$. Теперь покажем, что несмотря на то, что соблюдается сходимость по распределению, не будет соблюдаться сходимость по вероятности. Полагая $\varepsilon = 1$ и обращая внимание на то, что $(X_n - X) \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n - X > 1) + P(X_n - X < -1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \Phi\left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1}}\right) - \Phi\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1}}\right) \geq 2 - \Phi\left(\frac{1 - 1}{\sqrt{1}}\right) - \Phi\left(\frac{1 + 0}{\sqrt{1}}\right) \approx 0.66 > 0 \end{aligned}$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Теорема Слуцкого

Рассмотрим последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots и Y_1, Y_2, \dots такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Слуцкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Теорема Слущкого

Рассмотрим последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots и Y_1, Y_2, \dots такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Слущкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Теорема Слущкого

Рассмотрим последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots и Y_1, Y_2, \dots такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Слущкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
- $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c$, где $c \neq 0$.

Основные теоремы о сходимости по распределению

Теорема Слущкого

Рассмотрим последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots и Y_1, Y_2, \dots такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Слущкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
- $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c$, где $c \neq 0$.

Важно: поскольку из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению, то теорема останется справедливой, если при ее формулировке все \xrightarrow{d} заменить на \xrightarrow{p} .

Основные теоремы о сходимости по распределению

Теорема Слущкого

Рассмотрим последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots и Y_1, Y_2, \dots такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Слущкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
- $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c$, где $c \neq 0$.

Важно: поскольку из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению, то теорема останется справедливой, если при ее формулировке все \xrightarrow{d} заменить на \xrightarrow{p} .

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} 10$, где $X \sim U(0, 1)$. Тогда верно также, что $X_n Y_n \xrightarrow{d} 10X$, где $10X \sim U(0, 10)$.

Основные теоремы о сходимости по распределению

Теорема Случкого

Рассмотрим последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots и Y_1, Y_2, \dots такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} c$, где c – константа. Тогда по **теореме Случкого** справедливо следующее:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
- $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c$, где $c \neq 0$.

Важно: поскольку из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению, то теорема останется справедливой, если при ее формулировке все \xrightarrow{d} заменить на \xrightarrow{p} .

Примеры:

- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} 10$, где $X \sim U(0, 1)$. Тогда верно также, что $X_n Y_n \xrightarrow{d} 10X$, где $10X \sim U(0, 10)$.
- Известно, что $X_n \xrightarrow{d} 5$ и $Y_n \xrightarrow{p} 10$. Тогда верно также, что $X_n Y_n \xrightarrow{d} 50$ и $X_n Y_n \xrightarrow{p} 50$.

Основные теоремы о сходимости по распределению

Формулировка и доказательство теоремы Пуассона

Пусть имеется последовательность X_1, X_2, \dots биномиальных случайных величин $X_n \sim B(n, p_n)$, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$. Тогда по **теореме Пуассона** $X_n \xrightarrow{d} X$, где $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Основные теоремы о сходимости по распределению

Формулировка и доказательство теоремы Пуассона

Пусть имеется последовательность X_1, X_2, \dots биномиальных случайных величин $X_n \sim B(n, p_n)$, такая, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$. Тогда по **теореме Пуассона** $X_n \xrightarrow{d} X$, где $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Доказательство: сперва рассмотрим, к чему стремится функция вероятностей элементов последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^x p_n^x (1 - p_n)^{n-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Формулировка и доказательство теоремы Пуассона

Пусть имеется последовательность X_1, X_2, \dots биномиальных случайных величин $X_n \sim B(n, p_n)$, такая, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$. Тогда по **теореме Пуассона** $X_n \xrightarrow{d} X$, где $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Доказательство: сперва рассмотрим, к чему стремится функция вероятностей элементов последовательности:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^x p_n^x (1 - p_n)^{n-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n * (n-1) * \dots * (n-x+1)}{n^x} \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \end{aligned}$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Формулировка и доказательство теоремы Пуассона

Пусть имеется последовательность X_1, X_2, \dots биномиальных случайных величин $X_n \sim B(n, p_n)$, такая, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$. Тогда по **теореме Пуассона** $X_n \xrightarrow{d} X$, где $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Доказательство: сперва рассмотрим, к чему стремится функция вероятностей элементов последовательности:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^x p_n^x (1 - p_n)^{n-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n * (n-1) * \dots * (n-x+1)}{n^x} \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{n^x}{n^x} - \dots - \frac{(1+2+\dots+x-1)*n}{n^x} \right)}_{\text{стремится к } 1} * \frac{\lambda^x}{x!} * \underbrace{\left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^n}_{\text{стремится к } e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\text{стремится к } 1} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = P(X = x) \end{aligned}$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Формулировка и доказательство теоремы Пуассона

Пусть имеется последовательность X_1, X_2, \dots биномиальных случайных величин $X_n \sim B(n, p_n)$, такая, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$. Тогда по **теореме Пуассона** $X_n \xrightarrow{d} X$, где $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Доказательство: сперва рассмотрим, к чему стремится функция вероятностей элементов последовательности:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^x p_n^x (1 - p_n)^{n-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n * (n-1) * \dots * (n-x+1)}{n^x} \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{n^x}{n^x} - \dots - \frac{(1+2+\dots+x-1)*n}{n^x} \right)}_{\text{стремится к } 1} * \frac{\lambda^x}{x!} * \underbrace{\left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^n}_{\text{стремится к } e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\text{стремится к } 1} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = P(X = x) \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что предел суммы равен сумме пределов, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t \in \{0, 1, \dots, \lceil x \rceil\} : t \leq x} P(X_n = t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t \in \{0, 1, \dots, \lceil x \rceil\} : t \leq x} P(X = t) = F_X(x)$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Применение теоремы Пуассона

- Если $X \sim B(n, p)$, причем n велико, а p – мало, то без существенной потери в точности можно предположить, что $X \sim \text{Pois}(np)$.

Основные теоремы о сходимости по распределению

Применение теоремы Пуассона

- Если $X \sim B(n, p)$, причем n велико, а p – мало, то без существенной потери в точности можно предположить, что $X \sim \text{Pois}(np)$.
- Преимущество данного подхода заключается в том, что как правило функция вероятностей распределения Пуассона считается гораздо проще, чем функция вероятностей Биномиального распределения.

Основные теоремы о сходимости по распределению

Применение теоремы Пуассона

- Если $X \sim B(n, p)$, причем n велико, а p – мало, то без существенной потери в точности можно предположить, что $X \sim \text{Pois}(np)$.
- Преимущество данного подхода заключается в том, что как правило функция вероятностей распределения Пуассона считается гораздо проще, чем функция вероятностей Биномиального распределения.

Примеры:

- Вероятность наступления страхового случая для каждого клиента составляет 0.01. В фирме застрахованы 1000 клиентов. Рассчитайте вероятность того, что наступит ровно два страховых случая.

Основные теоремы о сходимости по распределению

Применение теоремы Пуассона

- Если $X \sim B(n, p)$, причем n велико, а p – мало, то без существенной потери в точности можно предположить, что $X \sim \text{Pois}(np)$.
- Преимущество данного подхода заключается в том, что как правило функция вероятностей распределения Пуассона считается гораздо проще, чем функция вероятностей Биномиального распределения.

Примеры:

- Вероятность наступления страхового случая для каждого клиента составляет 0.01. В фирме застрахованы 1000 клиентов. Рассчитайте вероятность того, что наступит ровно два страховых случая.

Решение:

Через $X \sim B(1000, 0.01)$ обозначим число страховых случаев, которое можно аппроксимировать как $X \sim \text{Pois}(1000 \times 0.01) = \text{Pois}(10)$. В результате получаем:

$$P(X = 2) \approx \frac{10^2}{2!} e^{-10} \approx 0.00227$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Применение теоремы Пуассона

- Если $X \sim B(n, p)$, причем n велико, а p – мало, то без существенной потери в точности можно предположить, что $X \sim \text{Pois}(np)$.
- Преимущество данного подхода заключается в том, что как правило функция вероятностей распределения Пуассона считается гораздо проще, чем функция вероятностей Биномиального распределения.

Примеры:

- Вероятность наступления страхового случая для каждого клиента составляет 0.01. В фирме застрахованы 1000 клиентов. Рассчитайте вероятность того, что наступит ровно два страховых случая.

Решение:

Через $X \sim B(1000, 0.01)$ обозначим число страховых случаев, которое можно аппроксимировать как $X \sim \text{Pois}(1000 \times 0.01) = \text{Pois}(10)$. В результате получаем:

$$P(X = 2) \approx \frac{10^2}{2!} e^{-10} \approx 0.00227$$

С использованием истинного распределения мы бы получили близкий результат:

$$P(X = 2) = C_{1000}^2 0.01^2 0.99^{998} \approx 0.00220$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Центральная предельная теорема

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Центральная предельная теорема

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

- На практике эта теорема позволяет предположить, что при соблюдении соответствующих условий и достаточно большом n окажется точной аппроксимация $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Основные теоремы о сходимости по распределению

Центральная предельная теорема

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

- На практике эта теорема позволяет предположить, что при соблюдении соответствующих условий и достаточно большом n окажется точной аппроксимация $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Примеры:

- В аудитории 100 студентов независимо друг от друга пишут контрольную работу. Время (в часах), затрачиваемое на написание контрольной, для каждого студента является равномерной случайной величиной $X_i \sim U(1, 2)$, где $i \in \{1, \dots, 100\}$. Рассчитайте вероятность, с которой суммарное время на написание контрольной работы не превысит 152 часа.

Основные теоремы о сходимости по распределению

Центральная предельная теорема

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

- На практике эта теорема позволяет предположить, что при соблюдении соответствующих условий и достаточно большом n окажется точной аппроксимация $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Примеры:

- В аудитории 100 студентов независимо друг от друга пишут контрольную работу. Время (в часах), затрачиваемое на написание контрольной, для каждого студента является равномерной случайной величиной $X_i \sim U(1, 2)$, где $i \in \{1, \dots, 100\}$. Рассчитайте вероятность, с которой суммарное время на написание контрольной работы не превысит 152 часа.

Решение: поскольку достаточно много $n = 100$ студентов пишут контрольную независимо друг от друга и время на ее написание у них распределено одинаково, то можно применить ЦПТ:

$$\mu = E(X_i) = (1 + 2)/2 = 1.5 \quad \sigma^2 = (2 - 1)^2/12 = 1/12$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Центральная предельная теорема

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

- На практике эта теорема позволяет предположить, что при соблюдении соответствующих условий и достаточно большом n окажется точной аппроксимация $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Примеры:

- В аудитории 100 студентов независимо друг от друга пишут контрольную работу. Время (в часах), затрачиваемое на написание контрольной, для каждого студента является равномерной случайной величиной $X_i \sim U(1, 2)$, где $i \in \{1, \dots, 100\}$. Рассчитайте вероятность, с которой суммарное время на написание контрольной работы не превысит 152 часа.

Решение: поскольку достаточно много $n = 100$ студентов пишут контрольную независимо друг от друга и время на ее написание у них распределено одинаково, то можно применить ЦПТ:

$$\mu = E(X_i) = (1 + 2)/2 = 1.5 \quad \sigma^2 = (2 - 1)^2/12 = 1/12$$

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}(100 \times 1.5, 100 \times (1/12)) = \mathcal{N}(150, 25/3)$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Центральная предельная теорема

- Пусть имеется последовательность независимы, одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots с конечными математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $Var(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

- На практике эта теорема позволяет предположить, что при соблюдении соответствующих условий и достаточно большом n окажется точной аппроксимация $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Примеры:

- В аудитории 100 студентов независимо друг от друга пишут контрольную работу. Время (в часах), затрачиваемое на написание контрольной, для каждого студента является равномерной случайной величиной $X_i \sim U(1, 2)$, где $i \in \{1, \dots, 100\}$. Рассчитайте вероятность, с которой суммарное время на написание контрольной работы не превысит 152 часа.

Решение: поскольку достаточно много $n = 100$ студентов пишут контрольную независимо друг от друга и время на ее написание у них распределено одинаково, то можно применить ЦПТ:

$$\mu = E(X_i) = (1 + 2)/2 = 1.5 \quad \sigma^2 = (2 - 1)^2/12 = 1/12$$

$$P \left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 152 \right) \approx \Phi \left(\frac{152 - 150}{\sqrt{25/3}} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}(100 \times 1.5, 100 \times (1/12)) = \mathcal{N}(150, 25/3)$$

$$= \Phi(0.693) \approx 0.7557888$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Теорема Муавра-Лапласа

- Поскольку биномиальное распределение $X \sim B(n, p)$ можно представить как сумму независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $X_i \sim Ber(p)$, то вследствие ЦПТ:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Теорема Муавра-Лапласа

- Поскольку биномиальное распределение $X \sim B(n, p)$ можно представить как сумму независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $X_i \sim Ber(p)$, то вследствие ЦПТ:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

- На практике при достаточно большом n можно допустить $X \dot{\sim} \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Основные теоремы о сходимости по распределению

Теорема Муавра-Лапласа

- Поскольку биномиальное распределение $X \sim B(n, p)$ можно представить как сумму независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $X_i \sim Ber(p)$, то вследствие ЦПТ:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

- На практике при достаточно большом n можно допустить $X \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите вероятность, с которой у него выпало от 510 до 520 орлов включительно.

Основные теоремы о сходимости по распределению

Теорема Муавра-Лапласа

- Поскольку биномиальное распределение $X \sim B(n, p)$ можно представить как сумму независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $X_i \sim \text{Ber}(p)$, то вследствие ЦПТ:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

- На практике при достаточно большом n можно допустить $X \dot{\sim} \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите вероятность, с которой у него выпало от 510 до 520 орлов включительно.

Решение: число выпавших орлов обозначим как $X \sim B(1000, 0.5)$, откуда по теореме Муавра-Лапласа:

$$X \dot{\sim} \mathcal{N}(1000 \times 0.5, 1000 \times 0.5 \times (1 - 0.5)) = \mathcal{N}(500, 250)$$

Основные теоремы о сходимости по распределению

Теорема Муавра-Лапласа

- Поскольку биномиальное распределение $X \sim B(n, p)$ можно представить как сумму независимых, одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $X_i \sim \text{Ber}(p)$, то вследствие ЦПТ:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

- На практике при достаточно большом n можно допустить $X \dot{\sim} \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите вероятность, с которой у него выпало от 510 до 520 орлов включительно.

Решение: число выпавших орлов обозначим как $X \sim B(1000, 0.5)$, откуда по теореме Муавра-Лапласа:

$$X \dot{\sim} \mathcal{N}(1000 \times 0.5, 1000 \times 0.5 \times (1 - 0.5)) = \mathcal{N}(500, 250)$$

Применяя приближительное распределение получаем:

$$P(510 \leq X \leq 520) \approx \Phi\left(\frac{520 - 500}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\frac{510 - 500}{\sqrt{250}}\right) \approx 0.8970484 - 0.7364554 = 0.160593$$

Погрешность аппроксимации

Неравенство Берри-Эссеена

- Пусть для последовательности X_1, X_2, \dots соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i - \mu)^3|) = \tau < \infty$, тогда:

$$\left| P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

Погрешность аппроксимации

Неравенство Берри-Эссеена

- Пусть для последовательности X_1, X_2, \dots соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i - \mu)^3|) = \tau < \infty$, тогда:

$$\left| P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

- Максимальная погрешность снижается вместо с числом элементов суммы n .

Погрешность аппроксимации

Неравенство Берри-Эссеена

- Пусть для последовательности X_1, X_2, \dots соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i - \mu)^3|) = \tau < \infty$, тогда:

$$\left| P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

- Максимальная погрешность снижается вместо с числом элементов суммы n .

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите максимальную погрешность, которую вы можете получить, используя ЦПТ для расчета вероятности того, что выпадет не более 510 орлов.

Погрешность аппроксимации

Неравенство Берри-Эссеена

- Пусть для последовательности X_1, X_2, \dots соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i - \mu)^3|) = \tau < \infty$, тогда:

$$\left| P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

- Максимальная погрешность снижается вместо с числом элементов суммы n .

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите максимальную погрешность, которую вы можете получить, используя ЦПТ для расчета вероятности того, что выпадет не более 510 орлов.

Решение: число выпавших орлов обозначим как $X \sim B(1000, 0.5)$, откуда:

$$\mu = 0.5 \quad \sigma^2 = 0.25 \quad \tau = 0.5 \times (|1 - 0.5|)^3 + 0.5 \times (|0 - 0.5|)^3 = 0.125$$

Погрешность аппроксимации

Неравенство Берри-Эссеена

- Пусть для последовательности X_1, X_2, \dots соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i - \mu)^3|) = \tau < \infty$, тогда:

$$\left| P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

- Максимальная погрешность снижается вместо с числом элементов суммы n .

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите максимальную погрешность, которую вы можете получить, используя ЦПТ для расчета вероятности того, что выпадет не более 510 орлов.

Решение: число выпавших орлов обозначим как $X \sim B(1000, 0.5)$, откуда:

$$\mu = 0.5 \quad \sigma^2 = 0.25 \quad \tau = 0.5 \times (|1 - 0.5|)^3 + 0.5 \times (|0 - 0.5|)^3 = 0.125$$

В соответствии с неравенством Берри-Эссеена погрешность не превысит:

$$\frac{0.4784 \times 0.125}{\sqrt{0.25}^3 \sqrt{1000}} = 0.0151283$$

Погрешность аппроксимации

Неравенство Берри-Эссеена

- Пусть для последовательности X_1, X_2, \dots соблюдены условия ЦПТ и $E(|(X_i - \mu)^3|) = \tau < \infty$, тогда:

$$\left| P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{0.4784\tau}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

- Максимальная погрешность снижается вместо с числом элементов суммы n .

Пример:

- Лаврентий подкинул правильную монетку 1000 раз. Определите максимальную погрешность, которую вы можете получить, используя ЦПТ для расчета вероятности того, что выпадет не более 510 орлов.

Решение: число выпавших орлов обозначим как $X \sim B(1000, 0.5)$, откуда:

$$\mu = 0.5 \quad \sigma^2 = 0.25 \quad \tau = 0.5 \times (|1 - 0.5|)^3 + 0.5 \times (|0 - 0.5|)^3 = 0.125$$

В соответствии с неравенством Берри-Эссеена погрешность не превысит:

$$\frac{0.4784 \times 0.125}{\sqrt{0.25^3} \sqrt{1000}} = 0.0151283$$

Обратите внимание, что для любого числа орлов максимальная погрешность, получаемая из данного неравенства, останется прежней.