

Теория вероятностей и статистика, МИРЭК, 2021-2022

Дедлайн: домашнее задание отправляется в **pdf** формате на почту семинариста. В копию письма необходимо поставить ассистента группы.

Почты семинаристов, на которые следует отправлять домашние задания:

1. Погорелова Полина Вячеславовна – tvis.we.2021@gmail.com (группы 202 и 203)
2. Потанин Богдан Станиславович – studypotandin@gmail.com (группа 201)
3. Слаболицкий Илья Сергеевич – tvis.fweia.hse@gmail.com (группы 204, 205 и 206)

Почты ассистентов, на которые следует продублировать домашнее задание (поставить в копию при отправке):

1. Романова Дарья Юрьевна – dyuromanova_1@edu.hse.ru (группа 201)
2. Афонина Ангелина Геннадьевна – agafonina@edu.hse.ru (группа 202)
3. Макаров Антон Андреевич – aamakarov_5@edu.hse.ru (группа 203)
4. Атласов Александр Александрович – aaatlasov@edu.hse.ru (группа 204)
5. Костромина Алина Максимовна – amkostromina@edu.hse.ru (группа 205)
6. Краевский Артем Андреевич – aakraevskiy@edu.hse.ru (группа 206)

Домашнее задание должно быть отправлено на указанные почты в **pdf** формате до **27.09.2021, 8.00 (утра)** включительно (по московскому времени). Тема письма должна иметь следующий формат: “МИРЭК Фамилия Имя Группа Номер ДЗ”, например, “МИРЭК Потанин Богдан 200 ДЗ 1”.

Оформление: первый лист задания должен быть титульным и содержать лишь информацию об имени и фамилии, а также о номере группы студента и сдаваемого домашнего задания. Если pdf файл содержит фотографии, то они должны быть разборчивыми и повернуты правильной стороной.

Санкции: домашние задания, не удовлетворяющие требованиям к оформлению, выполненные не самостоятельно или сданные позже срока получают 0 баллов.

Проверка: при оценивании каждого задания проверяется не ответ, а весь ход решения, который должен быть описан подробно и формально, с использованием надлежащих определений, обозначений, теорем и т.д.

Самостоятельность: задания выполняются самостоятельно. С целью проверки самостоятельности выполнения домашнего задания студент может быть вызван на устное собеседование, по результатам которого оценка может быть либо сохранена, либо обнулена.

Домашнее задание №1

Дискретное вероятностное пространство и условная вероятность

Задание №1. Волк и поросята. (30 баллов)

Волк пытается сдуть дома поросят. Известно, что 20% поросят живут в соломенных домах, 30% – в деревянных, а остальные – в каменных. Волк гарантированно сдувает соломенный дом и не может сдуть каменный. Деревянный дом волк может сдуть с вероятностью 0.6. Если Волку не удастся сдуть дом, то он пытается проникнуть в него через трубу (которая есть в каждом доме). Вероятность успешного проникновения, независимо от типа дома, составляет 0.1.

1. Найдите вероятность того, что волку не удастся сдуть домик поросенка. (5 баллов)
2. Рассчитайте условную вероятность того, что поросенок живет в деревянном доме, если известно, что волку не удалось сдуть этот дом. (5 баллов)
3. Рассчитайте условную вероятность того, что поросенок живет в каменном доме, если известно, что волку удалось проникнуть в этот дом через трубу. (5 баллов)
4. Волк дважды пытается сдуть домик одного и того же поросенка. Найдите вероятность того, что в результате волку не удастся сдуть домик этого поросенка. (5 баллов)
5. Вычислите условную вероятность, с которой поросенок проживает в каменном доме, если известно, что обе попытки волка сдуть этот дом оказались неудачными. (10 баллов)

Примечание: ни один поросенок не пострадал, поскольку их дома были выгодно застрахованы, а волк – оказался вегетарианцем и проникал в дома через трубу для того, чтобы вручить поросятам подарки, так как подменял Санта-Клауса.

Задание №2. Футбольная разминка. (15 баллов)

Перед началом футбольного матча трое футболистов разминаются, отдавая друг другу пасы (одним и тем же мячом). Каждый раз первый футболист отдает пас второму с вероятностью 0.3, второй отдает пас третьему с вероятностью 0.4, а третий футболист отдает пас только первому. Изначально мяч находится у первого футболиста. Найдите вероятность того, что на протяжении ста пасов (включительно):

1. Мяч хотя бы раз окажется у третьего футболиста. (5 баллов)
2. Мяч окажется у третьего футболиста ровно один раз. (10 баллов)

Примечание: ответ можно представить в форме суммы и произведения возведенных в степени чисел (досчитывать соответствующее выражение не обязательно, поскольку оно может быть равно крайне малому числу).

Задание №3. Прогнозирование финансового кризиса. (30 баллов)

Вероятность наступления финансового кризиса равняется 0.1. Независимо от того, произойдет финансовый кризис или нет, Аналитик Борис дает верный прогноз

наступления финансового кризиса с вероятностью 0.6. Аналитик Елена верно прогнозирует наступление финансового кризиса с вероятностью 0.8. При этом она никогда не делает верный прогноз финансового кризиса в случае, если он действительно должен наступить. Борис и Елена никак не ориентируются на прогнозы друг друга. Однако, аналитик Лаврентий, также осуществляющий прогноз финансового кризиса, либо копирует прогноз Бориса, либо повторяет прогноз Елены, в зависимости от того, выпадет на его правильной монетке орел или решка соответственно.

Примечание: следует различать **предсказание (прогноз) кризиса** и **верный прогноз (предсказание) кризиса**. В первом случае предполагается, что аналитик утверждает, что кризис наступит. Во втором случае подразумевается, что аналитик утверждает, что кризис наступит и тот действительно наступает, либо что кризис не наступит и кризис действительно не наступает.

1. Запишите три различных элементарных исхода, соответствующие случайному эксперименту, результатом которого является как сам факт наступления (или не наступления) финансового кризиса, так и прогнозы (предсказания) аналитиков. **(2 балла)**
2. Рассчитайте вероятность того, что Лаврентий сделает верный прогноз. Предварительно запишите соответствующее событие как объединение двух (произвольных) несовместных событий, каждое из которых может произойти с ненулевой вероятностью. **(5 баллов)**
3. Найдите вероятность, с которой Борис предскажет кризис. **(3 балла)**
4. Вычислите вероятность, с которой Елена предскажет кризис, при условии, что кризис не наступит. **(5 баллов)**
5. Рассчитайте вероятность, с которой Елена предскажет кризис. **(3 балла)**
6. Посчитайте вероятность, с которой Лаврентий спрогнозирует наступление кризиса. **(5 баллов)**
7. Определите вероятность, с которой прогнозы всех трех аналитиков совпадут. **(5 баллов)**
8. Найдите вероятность того, что Лаврентий скопировал прогноз Елены, при условии, что прогноз Лаврентия оказался верным. **(2 балла)**

Задание №4. Экзамены (25 баллов)

Лаврентий сдает три экзамена. К экзамену по математике Лаврентий выучил 5 билетов из 10, к экзамену по физике – 3 билета из 5, а к экзамену по экономике – 6 билетов из 20. Лаврентий может успешно ответить лишь на те билеты, которые он выучил. На экзамене Лаврентий случайным образом достает три билета и для успешной сдачи ему достаточно ответить хотя бы на два из них (в противном случае он проваливает экзамен).

1. Найдите вероятность того, что Лаврентий ответит хотя бы на один из билетов на экзамене по физике. **(1 балл)**

2. Посчитайте вероятность, с которой Лаврентий даст верный ответ на все билеты на экзамене по физике. **(5 баллов)**
3. Определите вероятность того, что Лаврентий сдаст экзамен по математике. **(5 баллов)**
4. Вычислите вероятность, с которой Лаврентий успешно сдаст хотя бы один экзамен. **(5 баллов)**
5. Учебная часть с равной вероятностью может поставить первым в расписании любой из соответствующих трех экзаменов. Известно, что Лаврентий успешно сдал первый экзамен. Найдите условную вероятность того, что это был экзамен по математике. **(9 баллов)**