

Теория Вероятностей и Статистика

Совместное распределение дискретных случайных величин

Потанин Богдан Станиславович

старший преподаватель, кандидат экономических наук

2021

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) =$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) =$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) =$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) =$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1) =$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1) = P(\{4, 5\}) = 2/6$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1) = P(\{4, 5\}) = 2/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 1) =$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1) = P(\{4, 5\}) = 2/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 1) = P(\{6\}) = 1/6$$

Совместное распределение

Совместное распределение дискретных случайных величин

- Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задается при помощи **совместной функции вероятностей**:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$$

Пример:

- Вы кидаете кубик. В зависимости от результата броска вам дают определенное число конфет и яблок.

| Кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Конфеты | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Яблоки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Найдите совместное распределение полученных по результатам броска кубика конфет X и яблок Y .

Решение:

Совместная функция вероятности:

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 0) = P(\{3\}) = 1/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 0) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\{2\}) = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1) = P(\{4, 5\}) = 2/6$$

$$P(X = 3 \cap Y = 1) = P(\{6\}) = 1/6$$

Таблица совместного распределения:

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 | 3 |
|------------------|-----|-----|-----|
| 0 | 1/6 | 1/6 | 0 |
| 1 | 1/6 | 2/6 | 1/6 |

Совместное распределение

Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин X и Y . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

Совместное распределение

Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин X и Y . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.
- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

Совместное распределение

Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин X и Y . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

Совместное распределение

Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин X и Y . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в. X):

Совместное распределение

Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин X и Y . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в. X):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

Совместное распределение

Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин X и Y . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в. X):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

$$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$$

Совместное распределение

Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин X и Y . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в. X):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

$$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$$

$$P(X = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 2) = 0.2 + 0.45 = 0.65$$

Совместное распределение

Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин X и Y . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в. X):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

$$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$$

$$P(X = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 2) = 0.2 + 0.45 = 0.65$$

Маргинальное распределение числа неудачных сделок (с.в. Y):

Совместное распределение

Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин X и Y . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в. X):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

$$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$$

$$P(X = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 2) = 0.2 + 0.45 = 0.65$$

Маргинальное распределение числа неудачных сделок (с.в. Y):

$$P(Y = 1) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.05 + 0.15 + 0.2 = 0.4$$

Совместное распределение

Маргинальное распределение

- Пусть задано совместное распределение случайных величин X и Y . Тогда распределения этих случайных величин именуются **маргинальными распределениями**.

- Маргинальное распределение можно найти при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \text{supp}(X)} P(X = x \cap Y = y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите маргинальные распределения числа удачных и неудачных сделок.

Решение:

Маргинальное распределение числа удачных сделок (с.в. X):

$$P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

$$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 = 0.15$$

$$P(X = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 2) = 0.2 + 0.45 = 0.65$$

Маргинальное распределение числа неудачных сделок (с.в. Y):

$$P(Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 3 \cap Y = 1) = 0.05 + 0.15 + 0.2 = 0.4$$

$$P(Y = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 2) + P(X = 3 \cap Y = 2) = 0.15 + 0 + 0.45 = 0.6$$

Совместное распределение

Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин X и Y задается как:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

Совместное распределение

Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин X и Y задается как:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y)$, $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$

Совместное распределение

Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин X и Y задается как:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y), \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0, \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$

Совместное распределение

Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин X и Y задается как:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y), \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0, \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = 1$

Совместное распределение

Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин X и Y задается как:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите $F_{X,Y}(1, 2.5)$ и $F_{X,Y}(10, 1)$.

Совместное распределение

Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин X и Y задается как:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите $F_{X,Y}(1, 2.5)$ и $F_{X,Y}(10, 1)$.

Решение:

$$F_{X,Y}(1, 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2) =$$

Совместное распределение

Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин X и Y задается как:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите $F_{X,Y}(1, 2.5)$ и $F_{X,Y}(10, 1)$.

Решение:

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(1, 2.5) &= P(X \leq 1 \cap Y \leq 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2) = \\ &= P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) + P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 + 0.15 + 0 = 0.35 \end{aligned}$$

Совместное распределение

Совместная функция распределения

- Совместная функция распределения случайных величин X и Y задается как:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x^* \in \text{supp}(X), y^* \in \text{supp}(Y): (x^* \leq x) \wedge (y^* \leq y)} P(X = x^* \cap Y = y^*)$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

Пример:

- Совместное распределение числа удачных (с.в. X) и неудачных (с.в. Y) сделок задано таблицей:

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|------|------|------|
| 1 | 0.05 | 0.15 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.45 |

Найдите $F_{X,Y}(1, 2.5)$ и $F_{X,Y}(10, 1)$.

Решение:

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(1, 2.5) &= P(X \leq 1 \cap Y \leq 2.5) = P(X \leq 1 \cap Y \leq 2) = \\ &= P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) + P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.05 + 0.15 + 0.15 + 0 = 0.35 \\ F_{X,Y}(10, 1) &= P(X \leq 10 \cap Y \leq 1) = P(Y \leq 1) = P(Y = 1) = 0.05 + 0.15 + 0.2 = 0.4 \end{aligned}$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в. X) и населения (с.в. Y) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения X/Y .

| Y \ X | 0 | 1 |
|-------|-----|-----|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в. X) и населения (с.в. Y) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения X/Y .

| Y \ X | 0 | 1 |
|-------|-----|-----|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в. X) и населения (с.в. Y) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения X/Y .

| Y \ X | 0 | 1 |
|-------|-----|-----|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в. X) и населения (с.в. Y) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения X/Y .

| Y \ X | 0 | 1 |
|-------|-----|-----|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в. X) и населения (с.в. Y) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения X/Y .

| Y \ X | 0 | 1 |
|-------|-----|-----|
| 1 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Таблица распределения X/Y :

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|----------|-----|-----|-----|
| P(X/Y=t) | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в. X) и населения (с.в. Y) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения X/Y .

| Y \ X | 0 | 1 |
|-------|-----|-----|
| | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Поиск математического ожидания X/Y с использованием распределения X/Y :

Таблица распределения X/Y :

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|----------|-----|-----|-----|
| P(X/Y=t) | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в. X) и населения (с.в. Y) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения X/Y .

| Y \ X | 0 | 1 |
|-------|-----|-----|
| | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Поиск математического ожидания X/Y с использованием распределения X/Y :

$$E(X/Y) = P(X/Y = 0) \times 0 + P(X/Y = 1) \times 1 + P(X/Y = 0.5) \times 0.5 = 0.4 \times 0 + 0.5 \times 1 + 0.1 \times 0.5 = 0.55$$

Таблица распределения X/Y :

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|----------|-----|-----|-----|
| P(X/Y=t) | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в. X) и населения (с.в. Y) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения X/Y .

| Y \ X | 0 | 1 |
|-------|-----|-----|
| | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Таблица распределения X/Y :

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|------------|-----|-----|-----|
| $P(X/Y=t)$ | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

Поиск математического ожидания X/Y с использованием распределения X/Y :

$$E(X/Y) = P(X/Y = 0) \times 0 + P(X/Y = 1) \times 1 + P(X/Y = 0.5) \times 0.5 = 0.4 \times 0 + 0.5 \times 1 + 0.1 \times 0.5 = 0.55$$

Поиск математического ожидания X/Y с использованием совместного распределения X и Y :

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в. X) и населения (с.в. Y) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения X/Y .

| Y \ X | 0 | 1 |
|-------|-----|-----|
| | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Таблица распределения X/Y :

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|------------|-----|-----|-----|
| $P(X/Y=t)$ | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

Поиск математического ожидания X/Y с использованием распределения X/Y :

$$E(X/Y) = P(X/Y = 0) \times 0 + P(X/Y = 1) \times 1 + P(X/Y = 0.5) \times 0.5 = 0.4 \times 0 + 0.5 \times 1 + 0.1 \times 0.5 = 0.55$$

Поиск математического ожидания X/Y с использованием совместного распределения X и Y :

$$E(X/Y) = P(X = 0 \cap Y = 1) \times (0/1) + P(X = 0 \cap Y = 2) \times (0/2) + P(X = 1 \cap Y = 1) \times (1/1) +$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Распределение и математическое ожидание функции от дискретных случайных величин

- Рассмотрим функцию $g(X, Y)$ от дискретных случайных величин. Ее распределение будет иметь вид:

$$P(g(X, Y) = t) = \sum_{x, y: g(x, y) = t} P(X = x \cap Y = y)$$

- Математическое ожидание функции от случайных величин можно вычислить как:

$$E(g(X, Y)) = \sum_{t \in \text{supp}(g(X, Y))} P(g(X, Y) = t) t = \sum_{x \in \text{supp}(X), y \in \text{supp}(Y)} P(X = x \cap Y = y) g(x, y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа кокосов (с.в. X) и населения (с.в. Y) крошечного острова задано таблицей. Найдите распределение и математическое ожидание числа кокосов на душу населения X/Y .

| Y \ X | 0 | 1 |
|-------|-----|-----|
| | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0.3 | 0.1 |

Решение:

$$P(X/Y = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 0 \cap Y = 2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(X/Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5$$

$$P(X/Y = 0.5) = P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.1$$

Таблица распределения X/Y :

| t | 0 | 0.5 | 1 |
|------------|-----|-----|-----|
| $P(X/Y=t)$ | 0.4 | 0.1 | 0.5 |

Поиск математического ожидания X/Y с использованием распределения X/Y :

$$E(X/Y) = P(X/Y = 0) \times 0 + P(X/Y = 1) \times 1 + P(X/Y = 0.5) \times 0.5 = 0.4 \times 0 + 0.5 \times 1 + 0.1 \times 0.5 = 0.55$$

Поиск математического ожидания X/Y с использованием совместного распределения X и Y :

$$E(X/Y) = P(X = 0 \cap Y = 1) \times (0/1) + P(X = 0 \cap Y = 2) \times (0/2) + P(X = 1 \cap Y = 1) \times (1/1) + P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1/2) = 0.1 \times (0/1) + 0.5 \times (1/1) + 0.3 \times (0/2) + 0.1 \times (1/2) = 0.55$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин X и Y , а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин X и Y , а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

Примеры:

- Фирмы A и B производят комбайны. Число произведенных на фирмах A и B комбайнов являются случайными величинами X и Y соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма A продает их по 2 рубля, а фирма B – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин X и Y , а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

Примеры:

- Фирмы A и B производят комбайны. Число произведенных на фирмах A и B комбайнов являются случайными величинами X и Y соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма A продает их по 2 рубля, а фирма B – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

Решение:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин X и Y , а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

Примеры:

- Фирмы A и B производят комбайны. Число произведенных на фирмах A и B комбайнов являются случайными величинами X и Y соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма A продает их по 2 рубля, а фирма B – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

Решение:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин X и Y , а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

Примеры:

- Фирмы A и B производят комбайны. Число произведенных на фирмах A и B комбайнов являются случайными величинами X и Y соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма A продает их по 2 рубля, а фирма B – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

Решение:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин X и Y , а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

Примеры:

- Фирмы A и B производят комбайны. Число произведенных на фирмах A и B комбайнов являются случайными величинами X и Y соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма A продает их по 2 рубля, а фирма B – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

Решение:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

- Известно, что $E(X + Y) = 10$ и $E(X - Y) = 5$. Найдите $E(X)$ и $E(Y)$.

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин X и Y , а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

Примеры:

- Фирмы A и B производят комбайны. Число произведенных на фирмах A и B комбайнов являются случайными величинами X и Y соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма A продает их по 2 рубля, а фирма B – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

Решение:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

- Известно, что $E(X + Y) = 10$ и $E(X - Y) = 5$. Найдите $E(X)$ и $E(Y)$.

Решение:

Составляем и решаем систему из двух линейных равенств:

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин X и Y , а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

Примеры:

- Фирмы A и B производят комбайны. Число произведенных на фирмах A и B комбайнов являются случайными величинами X и Y соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма A продает их по 2 рубля, а фирма B – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

Решение:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

- Известно, что $E(X + Y) = 10$ и $E(X - Y) = 5$. Найдите $E(X)$ и $E(Y)$.

Решение:

Составляем и решаем систему из двух линейных равенств:

$$\begin{cases} E(X) + E(Y) = 10 \\ E(X) - E(Y) = 5 \end{cases}$$

Функции от нескольких дискретных случайных величин

Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин

- Для случайных величин X и Y , а также констант $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$, выполняется:

$$E(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \beta) = \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(Y) + \beta$$

Примеры:

- Фирмы A и B производят комбайны. Число произведенных на фирмах A и B комбайнов являются случайными величинами X и Y соответственно, с математическими ожиданиями $E(X) = 5$ и $E(Y) = 10$. Фирмы продают все произведенные комбайны. Фирма A продает их по 2 рубля, а фирма B – по 3. Найдите математические ожидания суммарного объема и суммарной выручки фирм, а также разницы в выручках.

Решение:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 10 = 15$$

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40$$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 5 - 3 \times 10 = -20$$

- Известно, что $E(X + Y) = 10$ и $E(X - Y) = 5$. Найдите $E(X)$ и $E(Y)$.

Решение:

Составляем и решаем систему из двух линейных равенств:

$$\begin{cases} E(X) + E(Y) = 10 \\ E(X) - E(Y) = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 7.5 \\ E(Y) = 2.5 \end{cases}$$

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. X) и семинаров (с.в. Y) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|-------|------|------|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. X) и семинаров (с.в. Y) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|-------|------|------|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. X) и семинаров (с.в. Y) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|-------|------|------|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. X) и семинаров (с.в. Y) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|-------|------|------|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2,$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7,$$

$$P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. X) и семинаров (с.в. Y) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|-------|------|------|
| | 0.14 | 0.56 |
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2,$$

$$P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7,$$

$$P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. X) и семинаров (с.в. Y) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|-------|------|------|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \quad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. X) и семинаров (с.в. Y) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|-------|------|------|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \quad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 5)$$

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. X) и семинаров (с.в. Y) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|-------|------|------|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \quad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 5)$$

$$P(X = 3)P(Y = 3) = 0.8 \times 0.7 = 0.56 = P(X = 3 \cap Y = 3)$$

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. X) и семинаров (с.в. Y) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|-------|------|------|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \quad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 5)$$

$$P(X = 3)P(Y = 3) = 0.8 \times 0.7 = 0.56 = P(X = 3 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 3)P(Y = 5) = 0.8 \times 0.3 = 0.24 = P(X = 3 \cap Y = 5)$$

Независимость случайных величин

Определение независимости

- Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in R$ выполняется любое из двух перечисленных ниже условий:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Пример:

- Совместное распределение числа посещенных Василием лекций (с.в. X) и семинаров (с.в. Y) задается таблицей. Определите, посещает ли Василий лекции и семинары независимо.

| Y \ X | 1 | 3 |
|-------|------|------|
| 3 | 0.14 | 0.56 |
| 5 | 0.06 | 0.24 |

Решение:

Сперва найдем маргинальные распределения:

$$P(X = 1) = 0.14 + 0.06 = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.56 + 0.24 = 0.8$$

$$P(Y = 3) = 0.14 + 0.56 = 0.7, \quad P(Y = 5) = 0.06 + 0.24 = 0.3$$

Проверим соблюдение условий независимости:

$$P(X = 1)P(Y = 3) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = P(X = 1 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 1)P(Y = 5) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 = P(X = 1 \cap Y = 5)$$

$$P(X = 3)P(Y = 3) = 0.8 \times 0.7 = 0.56 = P(X = 3 \cap Y = 3)$$

$$P(X = 3)P(Y = 5) = 0.8 \times 0.3 = 0.24 = P(X = 3 \cap Y = 5)$$

Все условия соблюдены, следовательно, случайные величины X и Y – независимы.

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Решение:

Через X и Y обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Решение:

Через X и Y обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Решение:

Через X и Y обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что X и Y независимы, получаем:

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Решение:

Через X и Y обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что X и Y независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Решение:

Через X и Y обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что X и Y независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Решение:

Через X и Y обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что X и Y независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.

Решение:

Из $\text{supp}(Y) \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Решение:

Через X и Y обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что X и Y независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.

Решение:

Из $\text{supp}(Y) \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.

Поскольку X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$, откуда получаем систему:

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Решение:

Через X и Y обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что X и Y независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.

Решение:

Из $\text{supp}(Y) \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.

Поскольку X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$, откуда получаем систему:

$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases}$$

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Решение:

Через X и Y обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что X и Y независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.

Решение:

Из $\text{supp}(Y) \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.

Поскольку X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$, откуда получаем систему:

$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ 12/E(Y) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases}$$

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Решение:

Через X и Y обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что X и Y независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.

Решение:

Из $\text{supp}(Y) \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.

Поскольку X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$, откуда получаем систему:

$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ 12/E(Y) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ E(Y)^2 = 6, \\ E(Y) > 0 \end{cases}$$

Независимость случайных величин

Произведение математических ожиданий независимых случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Из того, что $E(XY) = E(X)E(Y)$ не всегда следует независимость X и Y .

Примеры:

- Маша кидает два обычных кубика. Найдите математическое ожидание произведения числа выпавших на кубиках очков.

Решение:

Через X и Y обозначим число очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно, откуда:

$$E(X) = E(Y) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 3.5$$

Пользуясь тем, что X и Y независимы, получаем:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3.5^2 = 12.25$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(XY) = 12$, $E(X) = 2E(Y)$ и $\text{supp}(Y) \subset (0, \infty)$. Найдите математические ожидания этих случайных величин.

Решение:

Из $\text{supp}(Y) \subset [0, \infty)$ следует, что $E(Y) > 0$.

Поскольку X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y) = 12$, откуда получаем систему:

$$\begin{cases} E(X)E(Y) = 12 \\ E(X) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ 12/E(Y) = 2E(Y) \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 12/E(Y) \\ E(Y)^2 = 6, \\ E(Y) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E(X) = 2\sqrt{6} \\ E(Y) = \sqrt{6} \end{cases}$$

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то независимы также X^2 и Y^2 , откуда:

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то независимы также X^2 и Y^2 , откуда:

$$Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 =$$

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то независимы также X^2 и Y^2 , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) + (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то независимы также X^2 и Y^2 , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) + (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то независимы также X^2 и Y^2 , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) + (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.

Решение:

Если использовать независимость X и Y :

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то независимы также X^2 и Y^2 , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) + (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.

Решение:

Если использовать независимость X и Y :

$$P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) = P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) =$$

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то независимы также X^2 и Y^2 , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) + (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.

Решение:

Если использовать независимость X и Y :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) = \\ &= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) = \end{aligned}$$

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то независимы также X^2 и Y^2 , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) + (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.

Решение:

Если использовать независимость X и Y :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) = \\ &= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) = \\ &= 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.15 \end{aligned}$$

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то независимы также X^2 и Y^2 , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) + (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.

Решение:

Если использовать независимость X и Y :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) = \\ &= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) = \\ &= 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.15 \end{aligned}$$

Если сразу использовать независимость $\ln(X)$ и Y^2 :

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то независимы также X^2 и Y^2 , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) + (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.

Решение:

Если использовать независимость X и Y :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) = \\ &= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) = \\ &= 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.15 \end{aligned}$$

Если сразу использовать независимость $\ln(X)$ и Y^2 :

$$P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) = P(\ln(X) = 0)P(Y^2 = 25) =$$

Независимость случайных величин

Независимость функций от случайных величин

- Если случайные величины X и Y независимы, то независимы и функции от этих случайных величин – $g_1(X)$ и $g_2(Y)$.

Примеры:

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $E(X) = 1$, $Var(X) = 2$ и $E(Y) = Var(Y) = 5$. Найдите $Var(XY)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то независимы также X^2 и Y^2 , откуда:

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = \\ &= (Var(X) + E(X)^2) + (Var(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2 = (2 + 1^2) \times (5 + 5^2) - 1^2 \times 5^2 = 65 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1) = 0.5$, $P(Y = 5) = 0.1$ и $P(Y = -5) = 0.2$. Вычислите $P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25)$.

Решение:

Если использовать независимость X и Y :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(X = 1 \cap (Y = 5 \cup Y = -5)) = P((X = 1 \cap Y = 5) \cup (X = 1 \cap Y = -5)) = \\ &= P(X = 1 \cap Y = 5) + P(X = 1 \cap Y = -5) = P(X = 1)P(Y = 5) + P(X = 1)P(Y = -5) = \\ &= 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.15 \end{aligned}$$

Если сразу использовать независимость $\ln(X)$ и Y^2 :

$$\begin{aligned} P(\ln(X) = 0 \cap Y^2 = 25) &= P(\ln(X) = 0)P(Y^2 = 25) = \\ &= P(X = 1)(P(Y = 5) + P(Y = -5)) = 0.5 \times (0.2 + 0.1) = 0.15 \end{aligned}$$

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Пример:

- Про случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между X и Y .

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Пример:

- Про случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между X и Y .

Решение:

Найдем совместное распределение XY :

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Пример:

- Про случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между X и Y .

Решение:

Найдем совместное распределение XY :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Пример:

- Про случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между X и Y .

Решение:

Найдем совместное распределение XY :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Пример:

- Про случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между X и Y .

Решение:

Найдем совместное распределение XY :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Пример:

- Про случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между X и Y .

Решение:

Найдем совместное распределение XY :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение XY :

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Пример:

- Про случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между X и Y .

Решение:

Найдем совместное распределение XY :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение XY :

$$E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$$

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Пример:

- Про случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между X и Y .

Решение:

Найдем совместное распределение XY :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение XY :

$$E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$$

Математические ожидания X и Y можно найти таким же образом:

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Пример:

- Про случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между X и Y .

Решение:

Найдем совместное распределение XY :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение XY :

$$E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$$

Математические ожидания X и Y можно найти таким же образом:

$$E(X) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times 1 + P(X = 2 \cap Y = 1) \times 2 + P(X = 1 \cap Y = 0) \times 1 = 0.3 \times 1 + 0.5 \times 2 + 0.2 \times 1 = 1.5$$

Ковариация

Определение ковариации

- **Ковариация** между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Пример:

- Про случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между X и Y .

Решение:

Найдем совместное распределение XY :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение XY :

$$E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$$

Математические ожидания X и Y можно найти таким же образом:

$$E(X) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times 1 + P(X = 2 \cap Y = 1) \times 2 + P(X = 1 \cap Y = 0) \times 1 = 0.3 \times 1 + 0.5 \times 2 + 0.2 \times 1 = 1.5$$

$$E(Y) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times 2 + P(X = 2 \cap Y = 1) \times 1 + P(X = 1 \cap Y = 0) \times 0 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 1 + 0.2 \times 0 = 1.1$$

Ковариация

Определение ковариации

- Ковариация между случайными величинами X и Y определяется как:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Доказательство:

$$E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Ковариация измеряет силу **линейной** связи между случайными величинами.

Пример:

- Про случайные величины X и Y известно, что $P(X = 1 \cap Y = 2) = 0.3$, $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.5$ и $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$. Найдите ковариацию между X и Y .

Решение:

Найдем совместное распределение XY :

$$P(XY = 0) = P(X = 1 \cap Y = 0) = 0.2$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1 \cap Y = 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) = 0.3 + 0.5 = 0.8$$

$$\text{Откуда: } E(XY) = P(XY = 2) \times 2 + P(XY = 0) \times 0 = 0.8 \times 2 + 0.2 \times 0 = 1.6$$

Альтернативный способ без необходимости искать распределение XY :

$$E(XY) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times (1 \times 2) + P(X = 2 \cap Y = 1) \times (2 \times 1) + P(X = 1 \cap Y = 0) \times (1 \times 0) = 1.6$$

Математические ожидания X и Y можно найти таким же образом:

$$E(X) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times 1 + P(X = 2 \cap Y = 1) \times 2 + P(X = 1 \cap Y = 0) \times 1 = 0.3 \times 1 + 0.5 \times 2 + 0.2 \times 1 = 1.5$$

$$E(Y) = P(X = 1 \cap Y = 2) \times 2 + P(X = 2 \cap Y = 1) \times 1 + P(X = 1 \cap Y = 0) \times 0 = 0.3 \times 2 + 0.5 \times 1 + 0.2 \times 0 = 1.1$$

$$\text{Считаем ковариацию: } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1.6 - 1.5 \times 1.1 = -0.05$$

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.
- Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.
- Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
Доказательство: если X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.

- Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Доказательство: если X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.

- Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Доказательство: если X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если $\text{Cov}(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины X и Y независимы.

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.

- Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Доказательство: если X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если $\text{Cov}(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины X и Y независимы.

Пример:

- Случайная величина X с равной вероятностью принимает значения $-1, 0$ и 1 . Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между X и Y , а также проверьте, являются ли они независимыми.

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.

- Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Доказательство: если X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если $\text{Cov}(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины X и Y независимы.

Пример:

- Случайная величина X с равной вероятностью принимает значения $-1, 0$ и 1 . Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между X и Y , а также проверьте, являются ли они независимыми.

Решение:

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.

- Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Доказательство: если X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если $\text{Cov}(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины X и Y независимы.

Пример:

- Случайная величина X с равной вероятностью принимает значения $-1, 0$ и 1 . Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между X и Y , а также проверьте, являются ли они независимыми.

Решение:

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.

- Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Доказательство: если X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если $\text{Cov}(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины X и Y независимы.

Пример:

- Случайная величина X с равной вероятностью принимает значения $-1, 0$ и 1 . Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между X и Y , а также проверьте, являются ли они независимыми.

Решение:

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$

$$E(XY) = E(X \times X^2) = E(X^3) = ((-1)^3 + 0^3 + 1^3)/3 = 0$$

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.

- Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Доказательство: если X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если $\text{Cov}(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины X и Y независимы.

Пример:

- Случайная величина X с равной вероятностью принимает значения $-1, 0$ и 1 . Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между X и Y , а также проверьте, являются ли они независимыми.

Решение:

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$

$$E(XY) = E(X \times X^2) = E(X^3) = ((-1)^3 + 0^3 + 1^3)/3 = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times (2/3) = 0$$

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.

- Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Доказательство: если X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если $\text{Cov}(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины X и Y независимы.

Пример:

- Случайная величина X с равной вероятностью принимает значения $-1, 0$ и 1 . Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между X и Y , а также проверьте, являются ли они независимыми.

Решение:

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$

$$E(XY) = E(X \times X^2) = E(X^3) = ((-1)^3 + 0^3 + 1^3)/3 = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times (2/3) = 0$$

Несмотря на нулевую ковариацию, эти случайные величины зависимы, поскольку:

Ковариация

Ковариация и независимость

- Если $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y **линейно зависимы** (частный случай зависимости).
Линейная зависимость именуется положительной при $\text{Cov}(X, Y) > 0$ и отрицательной – при $\text{Cov}(X, Y) < 0$.

- Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Доказательство: если X и Y независимы, то $E(XY) = E(X)E(Y)$, а значит:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

- Если $\text{Cov}(X, Y) = 0$, то это не гарантирует, что случайные величины X и Y независимы.

Пример:

- Случайная величина X с равной вероятностью принимает значения $-1, 0$ и 1 . Также, имеется случайная величина $Y = X^2$. Найдите ковариацию между X и Y , а также проверьте, являются ли они независимыми.

Решение:

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)/3 = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = ((-1)^2 + 0 + 1^2)/3 = 2/3$$

$$E(XY) = E(X \times X^2) = E(X^3) = ((-1)^3 + 0^3 + 1^3)/3 = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times (2/3) = 0$$

Несмотря на нулевую ковариацию, эти случайные величины зависимы, поскольку:

$$P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0 \cap X^2 = 0) = P(X = 0) = 1/3 \neq P(X = 0)P(Y = 0) = 1/3 \times 1/3 = 1/9$$

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X , Y , W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

- $\text{Cov}(X, \alpha_1) = 0,$

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

- $\text{Cov}(X, \alpha_1) = 0$,
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$,

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

- $\text{Cov}(X, \alpha_1) = 0$,
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$,
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

- $\text{Cov}(X, \alpha_1) = 0$,
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$,
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 \text{Cov}(X, Y)$.

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

- $\text{Cov}(X, \alpha_1) = 0$,
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$,
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 \text{Cov}(X, Y)$.
- $\text{Cov}(X + Y, W + Z) = \text{Cov}(X, W) + \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, W) + \text{Cov}(Y, Z)$

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

Пример:

- Про случайные величины X, Y, W известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, Y и W – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

Пример:

- Про случайные величины X, Y, W известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, Y и W – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.

Решение:

Поскольку Y и W независимы, то $Cov(Y, W) = 0$

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

Пример:

- Про случайные величины X, Y, W известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, Y и W – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.

Решение:

Поскольку Y и W независимы, то $Cov(Y, W) = 0$

$$Cov(2X + Y, X - W) = Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) =$$

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

Пример:

- Про случайные величины X, Y, W известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, Y и W – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.

Решение:

Поскольку Y и W независимы, то $Cov(Y, W) = 0$

$$\begin{aligned} Cov(2X + Y, X - W) &= Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) = \\ &= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) = \end{aligned}$$

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

Пример:

- Про случайные величины X, Y, W известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, Y и W – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.

Решение:

Поскольку Y и W независимы, то $Cov(Y, W) = 0$

$$\begin{aligned} Cov(2X + Y, X - W) &= Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) = \\ &= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) = \\ &= 2Var(X) - 2Cov(X, W) + Cov(X, Y) + Cov(Y, W) = 2 \times 10 - 2 \times (-0.3) + 0.5 - 0 = 21.1 \end{aligned}$$

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

Пример:

- Про случайные величины X, Y, W известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, Y и W – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.

Решение:

Поскольку Y и W независимы, то $Cov(Y, W) = 0$

$$Cov(2X + Y, X - W) = Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) =$$

$$= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) =$$

$$= 2Var(X) - 2Cov(X, W) + Cov(X, Y) + Cov(Y, W) = 2 \times 10 - 2 \times (-0.3) + 0.5 - 0 = 21.1$$

$$Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6) =$$

$$= 30Var(X) - 3Cov(X, Y) + 50Cov(X, Y) - 5Var(Y) - 20Cov(X, W) + 2Cov(Y, W) =$$

Ковариация

Основные свойства ковариации

Рассмотрим случайные величины X, Y, W и Z , а также константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$.

- $Cov(X, \alpha_1) = 0$,
- $Cov(X, X) = Var(X)$,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(\alpha_1 X + \beta_1, \alpha_2 Y + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X, Y)$.
- $Cov(X + Y, W + Z) = Cov(X, W) + Cov(X, Z) + Cov(Y, W) + Cov(Y, Z)$

Пример:

- Про случайные величины X, Y, W известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$, $Cov(X, Y) = 0.5$, $Cov(X, W) = -0.3$, Y и W – независимы. Найдите $Cov(Y, W)$, $Cov(2X + Y, X - W)$ и $Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6)$.

Решение:

Поскольку Y и W независимы, то $Cov(Y, W) = 0$

$$\begin{aligned} Cov(2X + Y, X - W) &= Cov(2X, X) + Cov(2X, -W) + Cov(Y, X) + Cov(Y, -W) = \\ &= 2Cov(X, X) - 2Cov(X, W) + Cov(Y, X) - Cov(Y, W) = \\ &= 2Var(X) - 2Cov(X, W) + Cov(X, Y) + Cov(Y, W) = 2 \times 10 - 2 \times (-0.3) + 0.5 - 0 = 21.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(3X + 5Y - 2W, 10X - Y + 6) &= \\ &= 30Var(X) - 3Cov(X, Y) + 50Cov(X, Y) - 5Var(Y) - 20Cov(X, W) + 2Cov(Y, W) = \\ &= 30 \times 10 - 3 \times 0.5 + 50 \times 0.5 + 50 \times 0.5 - 5 \times 20 - 20 \times (-0.3) + 2 \times 0 = 254.5 \end{aligned}$$

Ковариация

Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины X и Y .

Ковариация

Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины X и Y .

- $$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

Ковариация

Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины X и Y .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

Ковариация

Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины X и Y .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

Примеры:

- Про случайные величины X и Y известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X, Y) = 0.5$. Найдите $Var(X + Y)$ и $Var(2X - 3Y + 5)$.

Ковариация

Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины X и Y .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

Примеры:

- Про случайные величины X и Y известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X, Y) = 0.5$. Найдите $Var(X + Y)$ и $Var(2X - 3Y + 5)$.

Решение:

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

Ковариация

Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины X и Y .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

Примеры:

- Про случайные величины X и Y известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X, Y) = 0.5$. Найдите $Var(X + Y)$ и $Var(2X - 3Y + 5)$.

Решение:

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

$$Var(2X - 3Y + 5) = Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X, 3Y) =$$

Ковариация

Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины X и Y .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

Примеры:

- Про случайные величины X и Y известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X, Y) = 0.5$. Найдите $Var(X + Y)$ и $Var(2X - 3Y + 5)$.

Решение:

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

$$\begin{aligned} Var(2X - 3Y + 5) &= Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X, 3Y) = \\ &= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X, Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214 \end{aligned}$$

Ковариация

Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины X и Y .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

Примеры:

- Про случайные величины X и Y известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X, Y) = 0.5$. Найдите $Var(X + Y)$ и $Var(2X - 3Y + 5)$.

Решение:

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

$$\begin{aligned} Var(2X - 3Y + 5) &= Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X, 3Y) = \\ &= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X, Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $Var(X) = 1$ и $Var(Y) = 2$. Найдите $Var(X - Y)$.

Ковариация

Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины X и Y .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

Примеры:

- Про случайные величины X и Y известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X, Y) = 0.5$. Найдите $Var(X + Y)$ и $Var(2X - 3Y + 5)$.

Решение:

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

$$\begin{aligned} Var(2X - 3Y + 5) &= Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X, 3Y) = \\ &= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X, Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $Var(X) = 1$ и $Var(Y) = 2$. Найдите $Var(X - Y)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то $Cov(X, Y) = 0$, а значит:

Ковариация

Дисперсия суммы и разницы случайных величин

Рассмотрим случайные величины X и Y .

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$

Примеры:

- Про случайные величины X и Y известно, что $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 20$ и $Cov(X, Y) = 0.5$. Найдите $Var(X + Y)$ и $Var(2X - 3Y + 5)$.

Решение:

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 10 + 20 + 2 \times 0.5 = 31$$

$$\begin{aligned} Var(2X - 3Y + 5) &= Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(3Y) - 2Cov(2X, 3Y) = \\ &= 4Var(X) + 9Var(Y) - 2 \times (2 \times 3) \times Cov(X, Y) = 4 \times 10 + 9 \times 20 - 2 \times (2 \times 3) \times 0.5 = 214 \end{aligned}$$

- Про независимые случайные величины X и Y известно, что $Var(X) = 1$ и $Var(Y) = 2$. Найдите $Var(X - Y)$.

Решение:

Поскольку X и Y независимы, то $Cov(X, Y) = 0$, а значит:

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y) = 1 + 2 - 2 \times 0 = 3$$

Ковариация

Корреляция

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины X и Y отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $\text{Cov}(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$.

Ковариация

Корреляция

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины X и Y отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $\text{Cov}(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$.
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от -1 до 1 , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

Ковариация

Корреляция

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины X и Y отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $\text{Cov}(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$.

- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от -1 до 1 , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

- Если $|\text{Cov}(X, Y)| = 1$, то существуют такие $\alpha, \beta \in R$, что $Y = \alpha X + \beta$.

Ковариация

Корреляция

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины X и Y отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $\text{Cov}(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$.

- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от -1 до 1 , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

- Если $|\text{Cov}(X, Y)| = 1$, то существуют такие $\alpha, \beta \in R$, что $Y = \alpha X + \beta$.

Пример:

Ковариация между оценками за курс математики (с.в. X) и экономики (с.в. Y) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.

Ковариация

Корреляция

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины X и Y отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $\text{Cov}(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$.
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от -1 до 1 , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

- Если $|\text{Cov}(X, Y)| = 1$, то существуют такие $\alpha, \beta \in R$, что $Y = \alpha X + \beta$.

Пример:

Ковариация между оценками за курс математики (с.в. X) и экономики (с.в. Y) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.

Решение:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{5}{\sqrt{10 \times 40}} = 0.25$$

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины X и Y отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $\text{Cov}(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$.
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от -1 до 1 , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

- Если $|\text{Cov}(X, Y)| = 1$, то существуют такие $\alpha, \beta \in R$, что $Y = \alpha X + \beta$.

Пример:

Ковариация между оценками за курс математики (с.в. X) и экономики (с.в. Y) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.

Решение:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{5}{\sqrt{10 \times 40}} = 0.25$$

$$\text{Corr}(X + Y, X - Y) = \frac{\text{Cov}(X+Y, X-Y)}{\sqrt{\text{Var}(X+Y)\text{Var}(X-Y)}} = \frac{\text{Var}(X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Y) - \text{Var}(Y)}{\sqrt{(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y))(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y))}} =$$

- Недостаток ковариации как меры линейной связи между случайными величинами заключается в том, что она чувствительна к единицам измерения. Например, пусть случайные величины X и Y отражают урожай зерна в кукурузы в тоннах соответственно, причем $\text{Cov}(X, Y) = 1$. Тогда ковариация между урожаями зерна и кукурузы, измеренными в килограммах и центнерах соответственно, составит $\text{Cov}(1000X, 10Y) = 10000\text{Cov}(X, Y)$.
- **Корреляция** позволяет заключить меру линейной связи между случайными величинами в диапазон от -1 до 1 , за счет стандартизации на дисперсию:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1], \text{ где } \text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$$

- Если $|\text{Cov}(X, Y)| = 1$, то существуют такие $\alpha, \beta \in R$, что $Y = \alpha X + \beta$.

Пример:

Ковариация между оценками за курс математики (с.в. X) и экономики (с.в. Y) равняется 5. Дисперсии оценок по математике и экономике составляет 10 и 40 соответственно. Найдите корреляцию между оценками за эти курсы, а также корреляцию между суммой и разницей этих оценок.

Решение:

$$\begin{aligned}\text{Corr}(X, Y) &= \frac{5}{\sqrt{10 \times 40}} = 0.25 \\ \text{Corr}(X + Y, X - Y) &= \frac{\text{Cov}(X+Y, X-Y)}{\sqrt{\text{Var}(X+Y)\text{Var}(X-Y)}} = \frac{\text{Var}(X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Y) - \text{Var}(Y)}{\sqrt{(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y))(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y))}} = \\ &= \frac{10 - 5 + 5 - 40}{\sqrt{(10 + 40 + 2 \times 5)(10 + 40 - 2 \times 5)}} \approx -0.61\end{aligned}$$

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

Примеры:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей.
Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

Примеры:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей.
Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

Примеры:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей.
Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

Примеры:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

| Y \ X | X | | |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

Таблица распределения $(Y|X=0)$:

| t | 1 | 2 |
|--------------|-----|-----|
| $P(Y=t X=0)$ | 1/3 | 2/3 |

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

Примеры:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей.
Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

Решение:

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

$$E(Y|X = 0) = P(Y = 1|X = 0) \times 1 + P(Y = 2|X = 0) \times 2 =$$

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Таблица распределения $(Y|X=0)$:

| t | 1 | 2 |
|--------------|-----|-----|
| $P(Y=t X=0)$ | 1/3 | 2/3 |

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

Примеры:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей.
Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

Решение:

$$\begin{aligned} P(Y = 1|X = 0) &= P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3 \\ P(Y = 2|X = 0) &= P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3 \\ E(Y|X = 0) &= P(Y = 1|X = 0) \times 1 + P(Y = 2|X = 0) \times 2 = \\ &= (1/3) \times 1 + (2/3) \times 2 = 5/3 \end{aligned}$$

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Таблица распределения $(Y|X=0)$:

| t | 1 | 2 |
|--------------|-----|-----|
| $P(Y=t X=0)$ | 1/3 | 2/3 |

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

Примеры:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

$$E(Y|X = 0) = P(Y = 1|X = 0) \times 1 + P(Y = 2|X = 0) \times 2 = (1/3) \times 1 + (2/3) \times 2 = 5/3$$

Таблица распределения $(Y|X=0)$:

| t | 1 | 2 |
|--------------|-----|-----|
| $P(Y=t X=0)$ | 1/3 | 2/3 |

- Если Катя покупает три кофты, то с вероятностью 0.5 она приобретет и две юбки. Три кофты Катя покупает с вероятностью 0.2. Найдите вероятность того, что Катя купит две юбки и три кофты

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

Примеры:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

$$E(Y|X = 0) = P(Y = 1|X = 0) \times 1 + P(Y = 2|X = 0) \times 2 = (1/3) \times 1 + (2/3) \times 2 = 5/3$$

Таблица распределения $(Y|X=0)$:

| t | 1 | 2 |
|--------------|-----|-----|
| $P(Y=t X=0)$ | 1/3 | 2/3 |

- Если Катя покупает три кофты, то с вероятностью 0.5 она приобретет и две юбки. Три кофты Катя покупает с вероятностью 0.2. Найдите вероятность того, что Катя купит две юбки и три кофты

Решение:

Через X и Y обозначим число купленных Катей юбок и кофт соответственно, откуда:

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при фиксированном значении другой

- Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y , а также константу $y \in \text{supp}(Y)$.
- Распределение случайной величины $(X|Y = y)$ имеет вид:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}, \text{ где } P(Y = y) > 0$$

Примеры:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X = 0)$, а также $E(Y|X = 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

$$P(Y = 1|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 1)/P(X = 0) = 0.1/(0.1 + 0.2) = 1/3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 2)/P(X = 0) = 0.2/(0.1 + 0.2) = 2/3$$

$$E(Y|X = 0) = P(Y = 1|X = 0) \times 1 + P(Y = 2|X = 0) \times 2 = (1/3) \times 1 + (2/3) \times 2 = 5/3$$

Таблица распределения $(Y|X=0)$:

| t | 1 | 2 |
|--------------|-----|-----|
| $P(Y=t X=0)$ | 1/3 | 2/3 |

- Если Катя покупает три кофты, то с вероятностью 0.5 она приобретет и две юбки. Три кофты Катя покупает с вероятностью 0.2. Найдите вероятность того, что Катя купит две юбки и три кофты

Решение:

Через X и Y обозначим число купленных Катей юбок и кофт соответственно, откуда:

$$P(X = 2 \cap Y = 3) = P(X = 2|Y = 3)P(Y = 3) = 0.5 \times 0.2 = 0.1$$

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | X | | |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$\begin{aligned} P(Y = 1|X > 0) &= \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} = \\ &= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7 \end{aligned}$$

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | X | | |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$\begin{aligned} P(Y = 1|X > 0) &= \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} = \\ &= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7 \end{aligned}$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$
$$P(Y = 2|X > 0) = 1 - P(Y = 1|X > 0) = 1 - 3/7 = 4/7$$

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$
$$P(Y = 2|X > 0) = 1 - P(Y = 1|X > 0) = 1 - 3/7 = 4/7$$

Таблица распределения $(Y|X > 0)$:

| t | 1 | 2 |
|----------------|-----|-----|
| $P(Y=t X > 0)$ | 3/7 | 4/7 |

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = 1 - P(Y = 1|X > 0) = 1 - 3/7 = 4/7$$

$$E(Y|X > 0) = P(Y = 1|X > 0) \times 1 + P(Y = 2|X > 0) \times 2 =$$

Таблица распределения $(Y|X > 0)$:

| t | 1 | 2 |
|--------------|-----|-----|
| $P(Y=t X>0)$ | 3/7 | 4/7 |

Условное распределение

Распределение одной дискретной случайной величины при попадании другой в некоторую область

- Распределение $(X|Y \in S)$, где $S \subset R$ и $P(Y \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x|Y \in S) = \frac{P(X=x \cap Y \in S)}{P(Y \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение случайной величины $(Y|X > 0)$, а также $E(Y|X > 0)$.

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X > 0$ эквивалентно событию $X \in \{1, 2\}$, откуда:

$$P(Y = 1|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.2}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 3/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1 \cup X=2)} = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} + \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X=1) + P(X=2)} =$$
$$= \frac{0.1}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} + \frac{0.3}{(0.1+0.1)+(0.2+0.3)} = 4/7$$

$$P(Y = 2|X > 0) = 1 - P(Y = 1|X > 0) = 1 - 3/7 = 4/7$$

$$E(Y|X > 0) = P(Y = 1|X > 0) \times 1 + P(Y = 2|X > 0) \times 2 =$$
$$= (3/7) \times 1 + (4/7) \times 2 = 11/7$$

Таблица распределения $(Y|X > 0)$:

| t | 1 | 2 |
|--------------|-----|-----|
| $P(Y=t X>0)$ | 3/7 | 4/7 |

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y | (X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y | (X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y | (X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y | (X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y | X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y | X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | X | | |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей.
Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | X | | |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X,Y) \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y | (X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y | (X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y | X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y | X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2 | X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1 | X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

Таблица распределения $(X, Y|X + Y \geq 3)$:

| X \ Y | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|
| 1 | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

Таблица распределения $(X, Y|X + Y \geq 3)$:

| X \ Y | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|
| 1 | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

$$E(Y|X + Y \geq 3) = (0 + 1/3) \times 1 + (1/6 + 1/2) \times 2 = 5/3$$

Таблица распределения $(X, Y|X + Y \geq 3)$:

| Y \ X | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|
| | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

$$E(Y|X + Y \geq 3) = (0 + 1/3) \times 1 + (1/6 + 1/2) \times 2 = 5/3$$

Таблица распределения $(X, Y|X + Y \geq 3)$:

| Y \ X | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|
| | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

Таблица распределения $(XY|X + Y \geq 3)$:

| t | 2 | 4 |
|--------------------------|-----|-----|
| $P(XY = t X + Y \geq 3)$ | 1/2 | 1/2 |

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

$$E(Y|X + Y \geq 3) = (0 + 1/3) \times 1 + (1/6 + 1/2) \times 2 = 5/3$$

$$E(XY|X + Y \geq 3) = (1/6 + 1/3) \times 2 + (1/2) \times 4 = 3$$

Таблица распределения $(X, Y|X + Y \geq 3)$:

| Y \ X | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|
| | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

Таблица распределения $(XY|X + Y \geq 3)$:

| t | 2 | 4 |
|--------------------------|-----|-----|
| $P(XY = t X + Y \geq 3)$ | 1/2 | 1/2 |

Условное распределение

Условное совместное распределение

- Совместное распределение $(X, Y|(X, Y) \in S)$, где $S \subset R^2$ и $P((X, Y) \in S) > 0$, имеет вид:

$$P(X = x \cap Y = y|(X, Y) \in S) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P((X, Y) \in S)}$$

Пример:

- Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей. Найдите распределение $(X, Y|X + Y \geq 3)$ и $Cov(X, Y|X + Y \geq 3)$.

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|-----|
| | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Решение:

Обратим внимание, что событие $X + Y \geq 3$ эквивалентно событию $(X, Y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, откуда:

$$P(X = 1 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = 1/6$$

$$P(X = 2 \cap Y = 1|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = 1/3$$

$$P(X = 2 \cap Y = 2|X + Y \geq 3) = \frac{P(X=2 \cap Y=2)}{P(X+Y \geq 3)} = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = 1/2$$

$$E(X|X + Y \geq 3) = (0 + 1/6) \times 1 + (1/3 + 1/2) \times 2 = 11/6$$

$$E(Y|X + Y \geq 3) = (0 + 1/3) \times 1 + (1/6 + 1/2) \times 2 = 5/3$$

$$E(XY|X + Y \geq 3) = (1/6 + 1/3) \times 2 + (1/2) \times 4 = 3$$

$$Cov(X, Y|X + Y \geq 3) = 3 - (11/6)(5/3) = -1/18$$

Таблица распределения $(X, Y|X + Y \geq 3)$:

| Y \ X | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|
| | 0 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 1/2 |

Таблица распределения $(XY|X + Y \geq 3)$:

| t | 2 | 4 |
|--------------------------|-----|-----|
| $P(XY = t X + Y \geq 3)$ | 1/2 | 1/2 |