Сходимость по вероятности для нормального распределения

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Сходимости (/Topics/Details?id=13)
Раздел
Сходимость по вероятности (/SubTopics/Details?id=69)
Дата публикации
23.11.2019
Дата последней правки
26.11.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг

Условие

Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$. Проверьте, сходится ли данная последовательность к Y по вероятности и по распределению, если:

1. $X_n \sim \mathcal{N}\left(5, \frac{1}{n}\right)$ и $Y = 5$.
2. $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{5n^2+n}{3+n^2}, e^{-n}\right)$ и $Y = 5$.
3. $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{5n^2+n}{3+n^2}, 50\right)$ и $Y \sim \mathcal{N}(5, 50)$, где $Corr(X_n, Y) = 0$. Как изменится ваш ответ при $Corr(X_n, Y) = \frac{n^5-1}{n^5}$ и X_i, Y имеющих совместное нормальное распределение?

Решение

1. При помощи неравенства Чебышева докажем сходимость по вероятности и из нее автоматически будет следовать сходимость по распределению:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 5| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|X_n - 5| \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\epsilon^2} = 0$$

2. Рассчитывая вероятность напрямую докажем сходимость по вероятности и из нее автоматически будет следовать сходимость по распределению:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 5| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|X_n - 5| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} 1 - P(-\epsilon \leq X_n - 5 \leq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} 1 - P(5-\epsilon \leq X_n \leq 5+\epsilon) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - F_{X_n}(5+\epsilon) + F_{X_n}(5-\epsilon) = \lim_{n\to\infty} 1 - \Phi\left(\frac{5+\epsilon-\frac{5n^2+n}{3+n^2}}{\sqrt{e^{-n}}}\right) + \Phi\left(\frac{5-\epsilon-\frac{5n^2+n}{3+n^2}}{\sqrt{e^{-n}}}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} = 1 - \Phi(k) + \Phi(-k) = 1 - 1 + 0 = 0$$

3. Сходимость по вероятности не соблюдается, так как:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - Y| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|X_n - Y| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} 1 - P(-\epsilon \leq X_n - Y \leq \epsilon) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - F_{X_n-Y}(\epsilon) + F_{X_n-Y}(-\epsilon) = \lim_{n\to\infty} 1 - \Phi\left(\frac{\epsilon - \left(\frac{5n^2+n}{3+n^2} - 5\right)}{\sqrt{100}}\right) + \Phi\left(\frac{-\epsilon - \left(\frac{5n^2+n}{3+n^2} - 5\right)}{\sqrt{100}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 - 2\Phi\left(\frac{\epsilon - \left(\frac{5n^2+n}{3+n^2} - 5\right)}{\sqrt{100}}\right) = 2 - 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{10}\right) > 0, \text{при } \epsilon = 1$$

Зато соблюдается сходимость по распределению, потому что:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{x - \frac{5n^2+n}{3+n^2}}{\sqrt{50}}\right) = \Phi\left(\frac{x-5}{\sqrt{50}}\right) = F_X(x), \forall x \in R$$

Если $Corr(X_n, Y) = \frac{n^5-1}{n^5}$, то будет соблюдаться и сходимость по вероятности, так как:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - Y| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} 2 - 2\Phi\left(\frac{\epsilon - \left(\frac{5n^2+n}{3+n^2} - 5\right)}{\sqrt{100 - 100\frac{n^5-1}{n^5}}}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2 - 2\Phi(k) = 2 - 2 = 0$$

Показать решение