Посчитать, отталкиваясь от функции плотности

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Непрерывные случайные величины (/Topics/Details?id=8)
Раздел
Определение, функция плотности и функция распределения (/SubTopics/Details?id=45)
Дата публикации
24.09.2018
Дата последней правки
10.10.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

Случайная величина X имеет функцию плотности $f_X(x) = \begin{cases} cx^3, \text{если } x \in [1, 10] \\ 0, \text{если } x \notin [1, 10] \end{cases}$. Найдите следующее:

1. Константу c.

2. Функцию распределения $F_X(x)$.

3. $P(X \leq 2)$

4. $P(X \in [2, 8])$

5. $P(X \in [2, 5] \cup [8, 9])$

6. $P(X \geq 2)$

Решение

1. Очевидно, что:

$$\int_1^{10} cx^3 dx = \frac{cx^4}{4}|_1^{10} = \frac{9999c}{4} = 1 => c = \frac{4}{9999}$$

2. Найдем функцию распределения для $x \in \{1, 10\}$:

$$F_X(x) = \frac{4}{9999} \int_1^x t^3 dt = \frac{t^4}{9999}|_1^x = \frac{x^4 - 1}{9999}$$

Откуда получаем:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 1 \\ \frac{x^4-1}{9999}, \text{если } x \in [1, 10] \\ 1, \text{если } x > 10 \end{cases}$$

3. Используя функцию распределения:

$$P(X \leq 2) = F_X(2) = \frac{2^4 - 1}{9999} = \frac{5}{3333}$$

Используя функцию плотности:

$$P(X \leq 2) = \frac{4}{9999} \int_1^2 t^3 dt = \frac{5}{3333}$$

4. Удобней воспользоваться функцией распределения:

$$P(X \in [2, 8]) = F_X(8) - F_X(2) = \frac{8^4 - 1}{9999} - \frac{2^4 - 1}{9999} = \frac{1360}{3333}$$

Также, можно воспользоваться функцией плотности:

$$P(X \in [2, 8]) = \frac{4}{9999} \int_2^8 t^3 dt = \frac{1360}{3333}$$

5. Можно воспользоваться функцией плотности, но удобней функцией распределения:

$$P(X \in [2, 5] \cup [8, 9]) = (F_X(5) - F_X(2)) + (F_X(9) - F_X(8)) =$$
$$= \frac{5^4 - 1}{9999} - \frac{2^4 - 1}{9999} + \frac{9^4 - 1}{9999} - \frac{8^4 - 1}{9999} = \frac{3074}{9999}$$

6. Считаем следующим образом:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \frac{5}{3333} = \frac{3328}{3333}$$

Показать решение