Курьеры и выборка

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Оценки (/Topics/Details?id=30)
Раздел
Определение и свойства оценок (/SubTopics/Details?id=100)
Дата публикации
21.11.2021
Дата последней правки
18.08.2022
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

Имеется выборка $X_1, \ldots, X_n$, отражающая время, за которое курьеры доставляют заказ (в часах). Известно, что:

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{\frac{1-x}{\theta}}, \text{ при } x \geq 1 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}, \text{ где } \theta > 0$$

1. Про статистику $\hat{\theta}_n = (\overline{X}_n - c)$ известно, что она является несмещенной оценкой параметра θ. Найдите константу c.

2. Проверьте, будет ли последовательность оценок $\hat{\theta}_n = (\overline{X}_n - \frac{n^2}{n^2+n})$ асимптотически несмещенной и состоятельной.

3. Найдите состоятельную оценку вероятности того, что случайно выбранный курьер доставит заказ быстрее, чем за 2 часа.

4. Найдите реализацию оценки $\hat{\theta}_5 = 2\overline{X}_5$, если известно, что объем выборки равнялся 5 и суммарное время, которое ушло у всех курьеров на доставку, оказалось равно 30.

5. Рассмотрим класс оценок $\mathcal{K}$, состоящий из всех оценок вида $\hat{\theta}_n^{\{c\}} = (\overline{X}_n - c)$, где $c \in R$. Докажите, что оценка $\hat{\theta}_n^{\{1\}} = (\overline{X}_n - 1)$ является эффективной в данном классе.

Решение

1. Нетрудно догадаться, что:

$$E(\hat{\theta}_n) = E(\overline{X}_n - c) = E(X_1) - c = \int_1^{\infty} x \times \left(\frac{1}{\theta} e^{\frac{1-x}{\theta}}\right) dx - c = (1+\theta) - c \implies c = 1$$

2. Асимптотическая несмещенность соблюдается, поскольку:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \lim_{n\to\infty} E\left(\overline{X}_n - \frac{n^2}{n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty} (1+\theta) - \frac{n^2}{n^2+n} = (1+\theta) - 1 = \theta$$

Состоятельность также выполняется, поскольку:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_n) = \lim_{n\to\infty} Var\left(\overline{X}_n - \frac{n^2}{n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty} Var\left(\overline{X}_n\right) = \lim_{n\to\infty} Var(X_1)/n = 0$$

3. Выразим рассматриваю вероятность как функцию от параметра распределения:

$$P(X_1 \leq 2) = \int_1^2 \left(\frac{1}{\theta} e^{\frac{1-x}{\theta}}\right) dx = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}}$$

Поскольку данная вероятность является непрерывной функций от параметра θ, то из $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$, по теореме Манна-Вальда, следует $1 - e^{-\frac{1}{\theta}} \xrightarrow{p} 1 - e^{-\frac{1}{\hat{\theta}}}$, а значит состоятельная последовательность оценок рассматриваемой вероятности будет иметь следующий вид:

$$\hat{P}_n(X_1 \leq 2) = 1 - e^{-\frac{1}{\overline{X}-1}} = 1 - e^{\frac{1}{1-\overline{X}}}$$

4. Из условия известно, что $\sum_{i=1}^5 x_i = 30$, а значит:

$$\hat{\theta}_5(x) = 2\overline{x} = 2 \times \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 2 \times \frac{1}{5} \times 30 = 12$$

5. Рассчитаем среднеквадратическую ошибку для произвольной оценки из рассматриваемого класса:

$$MSE(\hat{\theta}_n^{\{c\}}) = E\left(\left(\left(\overline{X}_n - c\right) - \theta\right)^2\right) = Var\left(\overline{X}_n - c - \theta\right) + E(\overline{X}_n - c - \theta)^2 =$$
$$= Var(\overline{X}_n) + \left(E(\overline{X}_n) - c - \theta\right)^2 = Var(\overline{X}_n) + (1-c)^2$$

Минимизируя MSE по c получаем, что $c = 1$, а значит оценка $\hat{\theta}_n^{\{1\}} = (\overline{X}_n - 1)$ является эффективной в рассматриваемом классе.

Показать решение