Случайный акционер

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Совместное распределение (/Topics/Details?id=10)
Раздел
Совместное распределение непрерывных случайных величин (/SubTopics/Details?id=58)
Дата публикации
04.11.2019
Дата последней правки
09.11.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

Цены за одну акцию компаний "Пуассон Индастрис" X и "Бернулли Продакшн" Y имеют следующую совместную функцию плотности:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-y)^2}{340}\text{, при } x\in[2,5] \text{ и } y\in[0,10]\\ 0\text{, иначе}\end{cases}$$

1. Найдите вероятность того, что цена за акцию "Пуассон Индастрис" окажется между 3 и 3.5, а у "Бернулли Продакшн" - больше 5.

2. Найдите функции плотности маржинальных распределений цен за акции.

3. Найдите вероятность того, что цена за акцию "Пуассон Индастрис" окажется между 3 и 3.5, при условии, что цена за акцию "Бернулли Продакшн" - больше 5.

4. Вычислите вероятность того, что цена за акцию "Пуассон Индастрис" превышает 3, если цена за акцию "Бернулли Продакшн" равняется 5.

5. Проверьте, являются ли цены акций компаний независимыми.

6. Вычислите корреляцию между ценами акций двух компаний.

7. Найдите вероятность того, что акции "Бернулли Продакшн" будут стоить в два или более раз дороже, чем акции "Пуассон Индастрис".

8. Выведите распределение условного математического ожидания цен на акции компании "Пуассон Индастрис". Найдите вероятность того, что оно не превысит 3, а также математическое ожидание этого условного математического ожидания.

Решение

1. Рассчитаем соответствующую вероятность:

$$P(X \in [3, 3.5] \cap Y \in [5, 10]) = \int_5^{10} \int_3^{3.5} \frac{(x-y)^2}{340} dxdy \approx 0.15$$

2. Найдем маржинальные распределения.

Для X при $x \in [2, 5]$ получаем:

$$f_X(x) = \int_0^{10} \frac{(x-y)^2}{340} dy = \frac{1}{102}(3x^2 - 30x + 100)$$

Для Y при $y \in [0, 10]$ получаем:

$$f_Y(y) = \int_2^5 \frac{(x-y)^2}{340} dx = \frac{3}{340}(y^2 - 7y + 13)$$

3. Используя формулу условной вероятности имеем:

$$P(X \in [3, 3.5] | Y \in [5, 10]) = \frac{P(X \in [3, 3.5] \cap Y \in [5, 10])}{P(Y \in [5, 10])} =$$

$$= \frac{\int_5^{10} \int_3^{3.5} \frac{(x-y)^2}{340} dxdy}{\int_5^{10} \frac{3}{340}(y^2 - 7y + 13)dy} \approx \frac{0.148}{0.831} \approx 0.178$$

4. Найдем условную функцию плотности X при $x \in [2, 5]$:

$$f_{X|Y=5}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, 5)}{f_Y(5)} = \frac{\frac{(x-5)^2}{340}}{\frac{3}{340}(5^2 - 7 * 5 + 13)} = \frac{(x-5)^2}{9}$$

Теперь рассчитаем искомую вероятность:

$$P((X|Y = 5) > 3) = P(X > 3|Y = 5) = \int_3^5 \frac{(x-5)^2}{9} dx \approx 0.296$$

5. Цены акций зависимы, поскольку при $x \in [2, 5]$ и $y \in [0, 10]$:

$$f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{102}(3x^2 - 30x + 100)\frac{3}{340}(y^2 - 7y + 13) \neq \frac{(x-y)^2}{340} = f_{X,Y}(x, y)$$

6. Рассчитаем значение корреляции:

$$E(X) = \int_2^5 x \frac{1}{102}(3x^2 - 30x + 100)dx = \frac{449}{136}$$

$$E(X^2) = \int_2^5 x^2 \frac{1}{102}(3x^2 - 30x + 100)dx = \frac{233}{20}$$

$$Var(X) = \frac{233}{20} - \left(\frac{449}{136}\right)^2 = \frac{69387}{92480}$$

$$E(Y) = \int_0^{10} y \frac{3}{340}(y^2 - 7y + 13)dy = \frac{245}{34}$$

$$E(Y^2) = \int_0^{10} y^2 \frac{3}{340}(y^2 - 7y + 13)dy = \frac{1025}{17}$$

$$Var(Y) = \frac{1025}{17} - \left(\frac{245}{34}\right)^2 = \frac{9675}{1156}$$

$$E(XY) = \int_0^{10} \int_2^5 xy \frac{(x-y)^2}{340} dxdy = \frac{185}{8}$$

$$Cov(X, Y) = \frac{185}{8} - \frac{449}{136} \frac{245}{34} = -\frac{3075}{4624}$$

$$Corr(X, Y) = \frac{-\frac{3075}{4624}}{\sqrt{\frac{69387}{92480} \frac{9675}{1156}}} \approx -0.265$$

7. Важно правильно подобрать пределы интегрирования таким образом, чтобы учесть все случаи, когда $Y \geq 2X$ и не учесть случайно ничего лишнего. Очевидно, что исходя из данного условия Y не может стоить меньше 4, чем и определяется нижний предел интегрирования для Y. Верхний предел интегрирования для Y может достигать 10. При этом нижний предел интегрирования для X может равняться 2, поскольку ему будет противопоставлен нижний предел интегрирования для Y, равный 4. Верхний же предел интегрирования для X установим $0.5y$, чтобы обеспечить соблюдение необходимого условия.

Рассчитаем (https://www.wolframalpha.com/input/?i=%5Cint_%7B4%7D%5E%7B10%7D%5Cint_%7B2%7D%5E%7B0.5y%7D+%5Cfrac%7B%28x-y%29%5E2%7D%7B340%7D+dxdy) искомую вероятность:

$$\int_4^{10} \int_2^{0.5y} \frac{(x-y)^2}{340} dxdy \approx 0.7$$

8. Найдем соответствующее распределение:

$$E(X|Y) = \int_2^5 x \frac{\frac{(x-Y)^2}{340}}{\frac{3}{340}(Y^2 - 7 * Y + 13)} dx = \frac{14Y^2 - 104Y + 203}{4Y^2 - 28Y + 52}$$

Будем искать функцию распределения:

$$F_{E(X|Y)}(z) = P(E(X|Y) \leq z) = P\left(\frac{14Y^2 - 104Y + 203}{4Y^2 - 28Y + 52} \leq z\right)$$

Теперь найдем функцию распределения Y при $y \in [0, 10]$:

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{3}{340}(t^2 - 7t + 13)dt = \frac{2y^3 - 21y^2 + 78y}{680}$$

Рассчитаем искомую вероятность:

$$P\left(E(X|Y) \leq 3\right) = P\left(\frac{14Y^2 - 104Y + 203}{4Y^2 - 28Y + 52} \leq 3\right) =$$

$$= P\left(5 - \sqrt{\frac{3}{2}} \leq Y \leq 5 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = F_Y\left(5 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) - F_Y\left(5 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2\left(5 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 - 21\left(5 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 78\left(5 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{680} - \frac{2\left(5 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 - 21\left(5 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 78\left(5 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{680} \approx$$

$$\approx 0.22679 - 0.15115 = 0.07564$$

Наконец, найдем математическое ожидание условного математического ожидания. Покажем, что в данном случае, как, в прочем, и в любом ином, соблюдается $E\left(E(X|Y)\right) = E(X)$:

$$E\left(E(X|Y)\right) = \int_0^{10} \frac{14y^2 - 104y + 203}{4y^2 - 28y + 52} * \frac{3}{340}(y^2 - 7y + 13)dy = \frac{449}{136} = E(X)$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.