Простые задачи на дельта метод

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Сходимости (/Topics/Details?id=13)
Раздел
Дельта метод (/SubTopics/Details?id=77)
Дата публикации
21.12.2018
Дата последней правки
07.12.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★⯪

Условие

Пусть $X_1, X_2, \cdots$ - последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин. Используя дельта метод найдите приблизительное распределение случайной величины $X^{(100)}$, если:

1. $X_i \sim EXP\left(\frac{1}{9}\right)$ и $X^{(n)} = \sqrt{\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)}$.

2. $X_i \sim \mathcal{N}\left(100, 1\right)$ и $X^{(n)} = X_n^2$.

3. $X_i \sim \mathcal{N}\left(10, 0.05\right)$ и $X^{(n)} = e^{X_n}$

Решение

1. Согласно ЦПТ получаем, что:

$$\sqrt{n}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 9\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 81\right)$$

Полагая $g(x) = \sqrt{x}$ и учитывая, что $g'(\mu) = g'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$, используя дельта метод получаем:

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{X_1+\dots+X_n}{n}}-\sqrt{9}\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,81*\left(\frac{1}{6}\right)^2\right)$$

Отсюда следует, что:

$$\sqrt{100}\left(\sqrt{\frac{X_1+\dots+X_{100}}{100}}-\sqrt{9}\right)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(0,\frac{9}{4}\right)$$

В итоге получаем:

$$X^{(100)}\dot{\sim}\mathcal{N}\left(3,\frac{9}{400}\right)$$

2.Обратим внимание, что $g(100)=100^2, g'(100)=2*100=200$. Для начала получим:

$$X_n\sim\mathcal{N}\left(100,1\right)=>X_n\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(100,1\right)$$

Отсюда следует:

$$\sqrt{n}\left(X_n-100\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,n\right)$$

Применяя дельта метод имеем:

$$\sqrt{n}\left(X_n^2-100^2\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,200^2n\right)$$

Для конкретного члена последовательности получим:

$$\sqrt{100}\left(X_{100}^2-100^2\right)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(0,200^2n\right)$$

Из полученного результата следует, что:

$$X^{(100)}=X_{100}^2\dot{\sim}\mathcal{N}\left(100^2,200^2\right)$$

Обратите внимание, что данный ответ можно было бы получить и сразу, прибегая к не строгой версии формулы.

3. Используя нестрогий, но вполне справедливый, как было показано на примере решения предыдущего пункта, для данного случая вариант формулы имеем:

$$E(X^{(100)})\approx g(10)=e^{10}$$

$$Var(X^{(100)})\approx Var(X^{(100)})*(g'(100))^2=0.05*(e^{10})^2=0.05*e^{20}$$

$$X^{(100)}\dot{\sim}\mathcal{N}\left(e^{10},0.05e^{20}\right)$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.