

Случайные места в автобусе

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Случайные события (/Topics/Details?id=5)

Раздел

Условная вероятность, формула Байеса, формула полной вероятности и независимость событий (/SubTopics/Details?id=32)

Дата публикации

06.11.2021

Дата последней правки

06.11.2021

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★★★

Условие

Каждый пассажир купил билет на одно из 100 мест в автобусе. Первый пассажир, зашедший в автобус, растерялся и сел на случайное место. Каждый следующий пассажир стал садиться на свое место, если оно не занято, и на случайное другое - в противном случае. Найдите вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место.

По мотивам задачи про сумасшедшую старушку.

(https://github.com/bdemeshev/probability_dna/raw/master/probability_dna.pdf)

Решение

Автор решения - Долгих София

Без потери общности предположим, что пассажиры заходят в автобус в том же порядке, в котором у них были присвоены номера билетов. Например, 5-й пассажир заходит 5-м по счету.

Обратим внимание, что пассажир с билетом $x > 1$ сядет либо на первое место $m_x = 1$, либо на место с не меньшим номером $m_x \geq x$, где m_x обозначает номер места, на которое сел пассажир с билетом на место x . Действительно, допустим обратное, что, например, 10-й пассажир сел на 3-е место. Это бы означало,

что 3-е место к этому времени было свободно, но тогда на него должен был бы ранее сесть 3-й пассажир, что приводит к противоречию.

Следовательно, пассажиру x всегда доступны места с номером не меньшим, чем у него самого и не доступны места с меньшим номером, за исключением первого. Также, если ему не доступно первое место, то ему точно доступно его собственное. В таком случае, если пассажир x занимает первое место, то пассажиру $x + 1$ становятся доступны $100 - (x + 1)$ мест, которые по номеру не меньше, чем x , а значит включают и $x + 1$. Поэтому вероятность того, что последний пассажир займет свое место совпадает с вероятностью того, что кто-то из пассажиров, за исключением последнего, займет первое место:

$$\begin{aligned} P(m_{100} = 100) &= P(m_{100} \neq 1) = P(m_1 = 1) + P(m_2 = 1) + \dots + P(m_{99} = 1) = \\ &= P(m_1 = 1) + P(m_2 = 1 | m_2 \neq 2)P(m_2 \neq 2) + \dots + P(m_{99} = 1 | m_{99} \neq 99)P(m_{99} \neq 99) = \\ &= \frac{1}{100} + \frac{1}{99}P(m_2 \neq 2) + \dots + \frac{1}{2}P(m_{99} \neq 99), \end{aligned}$$

где при написании условий не нужно отдельно оговаривать, что все еще не занято первое место, поскольку если бы оно было уже занято, то пассажир автоматически сел бы на свое место.

По аналогии можно показать, что:

$$\begin{aligned} P(m_{100} \neq 100) &= P(m_1 = 100) + P(m_2 = 100) + \dots + P(m_{99} = 100) = \\ &= P(m_1 = 100) + P(m_2 = 100 | m_2 \neq 2)P(m_2 \neq 2) + \dots + P(m_{99} = 100 | m_{99} \neq 99)P(m_{99} \neq 99) = \\ &= \frac{1}{100} + \frac{1}{99}P(m_2 \neq 2) + \dots + \frac{1}{2}P(m_{99} \neq 99) = P(m_{100} = 100) \end{aligned}$$

Мы получили, что $P(m_{100} \neq 100) = P(m_{100} = 100)$, причем $P(m_{100} \neq 100) + P(m_{100} = 100) = 1$, а значит $P(m_{100} = 100) = 0.5$.

Проверка в R:

```
n.sim <- 10000
wrong100 <- rep(FALSE, n.sim)
for (i in 1:n.sim)
{
  n.passangers <- 100
  x <- 1:n.passangers
  places <- rep(NA, n.passangers)
  places[1] <- sample(x, 1)
  x <- x[-places[1]]
  for(p in 2:n.passangers)
  {
    if (p %in% x)
    {
      places[p] <- p
      x <- x[!(x == p)]
    } else {
      places[p] <- sample(x, 1)
      x <- x[!(x == places[p])]
    }
  }
}
```

```
wrong100[i] <- (places[100] == 100)
}  
mean(wrong100)
```

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.
