Футбол до первого гола

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Дискретные случайные величины (/Topics/Details?id=7)
Раздел
Условное математическое ожидание и метод первого шага (/SubTopics/Details?id=44)
Дата публикации
23.09.2018
Дата последней правки
24.09.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★

Условие

Вы с другом по очереди бьете друг другу по воротам. Вы забиваете гол вашему другу с вероятностью 0.2, а он вам - с вероятностью 0.1. Каждый раунд начинается с того, что сначала вы бьете по воротам друга, а затем он по вашим. Если вы оба промахнулись либо оба забили, то вы переходите к следующему раунду. Если же лишь один из вас забил гол, то он признается победителем и игра оканчивается.

1. Найдите вероятность того, что вы победите.

2. Найдите математическое ожидание числа забитых мячей.

3. Найдите математическое ожидание разницы числа забитых и отбитых мячей.

4. Найдите математическое ожидание отбитых вами мячей.

5. Как изменятся ответы на предыдущие вопросы, если для победы необходимо выиграть два раунда подряд?

Решение

1. Обозначим через A событие - вы победили. Через ZZ обозначим событие - на первом ударе вы забили гол, но и ваш соперник на первом ударе забил гол. По очевидной аналогии введем события $Z\overline{Z}$, $\overline{Z}Z$ и $\overline{Z}\overline{Z}$. Тогда нас интересует следующая вероятность:

$$P(A) = P(A|ZZ)P(ZZ) + P(A|Z\overline{Z})P(Z\overline{Z}) + P(A|\overline{Z}Z)P(\overline{Z}Z) + P(A|\overline{Z}\,\overline{Z})P(\overline{Z}\,\overline{Z}) =$$
$$= P(A) * 0.2 * 0.1 + 1 * 0.2 * 0.9 + 0 * 0.8 * 0.1 + P(A) * 0.8 * 0.9$$

Решая получаем $P(A) \approx 0.69$

2. Выпишем рекурентное соотношение для математического ожидания:

$$E(X) = E(X|ZZ)P(ZZ) + E(X|Z\overline{Z})P(Z\overline{Z}) + E(X|\overline{Z}Z)P(\overline{Z}Z) + E(X|\overline{Z}\,\overline{Z})P(\overline{Z}\,\overline{Z}) =$$
$$= (E(X) + 2) * 0.2 * 0.1 + 1 * 0.2 * 0.9 + 1 * 0.8 * 0.1 + E(X) * 0.8 * 0.9 =$$

Решая получаем $E(X) \approx 1.15$.

3. Для начала найдем математическое ожидание числа отбитых мячей:

$$E(Y) = E(Y|ZZ)P(ZZ) + E(Y|Z\overline{Z})P(Z\overline{Z}) + E(Y|\overline{Z}Z)P(\overline{Z}Z) + E(Y|\overline{Z}\,\overline{Z})P(\overline{Z}\,\overline{Z}) =$$
$$= E(Y) * 0.2 * 0.1 + 1 * 0.2 * 0.9 + 1 * 0.8 * 0.1 + (E(Y) + 2) * 0.8 * 0.9$$

В результате имеем $E(Y) \approx 6.538$, откуда, пользуясь свойствами математического ожидания, в итоге получаем:

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 1.15 - 6.538 = -5.388$$

4. По аналогии с предыдущими пунктами:

$$E(O) = E(O|ZZ)P(ZZ) + E(O|Z\overline{Z})P(Z\overline{Z}) + E(O|\overline{Z}Z)P(\overline{Z}Z) + E(O|\overline{Z}\,\overline{Z})P(\overline{Z}\,\overline{Z}) =$$
$$= E(O) * 0.2 * 0.1 + 1 * 0.2 * 0.9 + 0 * 0.8 * 0.1 + (E(O) + 1) * 0.8 * 0.9$$

Решая получаем $E(O) \approx 3.46$.

5. Действуем аналогичным образом:

$$P(A) = P(A|ZZ)P(ZZ) + P(A|Z\overline{Z})P(Z\overline{Z}) + P(A|\overline{Z}Z)P(\overline{Z}Z) + P(A|\overline{Z}\,\overline{Z})P(\overline{Z}\,\overline{Z}) =$$
$$= P(A) * 0.2 * 0.1 + P(A|Z\overline{Z}) * 0.2 * 0.9 + P(A|\overline{Z}Z) * 0.8 * 0.1 + P(A) * 0.8 * 0.9$$

Найдем отдельно выражения для $P(A|Z\overline{Z})$ и $P(A|\overline{Z}Z)$:

$$P(A|Z\overline{Z}) = P(A|Z\overline{Z}ZZ)P(ZZ) + P(A|Z\overline{Z}Z\overline{Z})P(Z\overline{Z}) + P(A|Z\overline{Z}\,\overline{Z}Z)P(\overline{Z}Z) + P(A|Z\overline{Z}\,\overline{Z}\,\overline{Z})P(\overline{Z}\,\overline{Z}) =$$
$$= 0.2 * 0.1 * 1 + 0.2 * 0.9 * 1 + 0.8 * 0.1 * P(A|\overline{Z}Z) + P(A) * 0.8 * 0.9$$

$$P(A|\overline{Z}Z) = P(A|\overline{Z}ZZZ)P(ZZ) + P(A|\overline{Z}ZZ\overline{Z})P(Z\overline{Z}) + P(A|\overline{Z}Z\overline{Z}Z)P(\overline{Z}Z) + P(A|\overline{Z}Z\overline{Z}\,\overline{Z})P(\overline{Z}\,\overline{Z}) =$$
$$= 0 * 0.2 * 0.1 + P(A|Z\overline{Z}) * 0.2 * 0.9 + 0 * 0.8 * 0.1 + P(A) * 0.8 * 0.9$$

Решая систему из полученных выше уравнений получаем $P(A|Z\overline{Z}) \approx 0.84$, $P(\overline{Z}Z) \approx 0.73$ и $P(A) \approx 0.8$

Показать решение