

Маг и зелья

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Теория проверки статистических гипотез (/Topics/Details?id=35)

Раздел

Введение в теорию проверки статистических гипотез (/SubTopics/Details?id=124)

Дата публикации

18.04.2019

Дата последней правки

10.07.2019

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг



Условие

У мага есть два вида зелий. Зелья одного вида увеличивают силу огненных заклинаний на 10%, а второго - уменьшают на 20%. К сожалению, маг забыл, какое из зелий позволяет повысить магические силы, а какое - приводит к их понижению. Зелья одного вида лежат в зеленых бутылках, а второго - в красных. Маг проверяет гипотезу о том, что в зеленых бутылках находятся зелья, повышающее силу магического урона. Если маг не выпил зелье, то сила его магического урона представляет собой экспоненциально распределенную случайную величину $M \sim EXP(0.2)$. Для каждого из следующих дизайнов эксперимента ответьте на поставленный вопрос и укажите: \mathcal{D}_0 , \mathcal{D}_1 , H_0 , H_1 , $T(X)$, α , β , уровень значимости и мощность критерия.

1. Маг выпивает зелье из зеленой бутылки и решает, что оно увеличивает силу заклинаний, если сила выпущенного им огненного шара превысит 6. Сделайте вывод об адекватности такого способа проверки гипотезы. Какой вывод должен сделать маг, если нанесет 7 единиц урона?
2. У мага также есть зелья в белых бутылках, отменяющие действие всех ранее выпитых зелий. Маг n раз подряд повторяет следующую процедуру: выпивает зеленое зелье, наносит магический урон и выпивает белое зелье. Он принимает нулевую гипотезу, если средний за n повторений магический урон превысит 7. К чему стремится мощность критерия по мере увеличения числа повторений описанной процедуры до бесконечности? Можно ли утверждать, что данный тест является качественным при очень больших объемах выборки?

3. Повторите предыдущий пункт учитывая, что маг принимает нулевую гипотезу, если максимальный урон превысил 7.
4. Повторите второй пункт учитывая, что маг не пьет белое зелье.
5. Повторите второй пункт учитывая, что маг в нечетных процедурах выпивает зеленой зелье, а в четных - красное. Предложите собственный способ чередования зелий, который, при $\alpha = 0.1$, максимизирует мощность критерия для заданного n .
6. Повторите пятый пункт учитывая, что маг не пьет белое зелье.

Решение

1. Если зелье в зеленой бутылке увеличивает силу магического урона, то, в соответствии со свойствами экспоненциального распределения, распределение магического урона останется экспоненциальным с параметром $\lambda = \frac{0.2}{1.1} = \frac{1}{5.5}$. Если же это зелье уменьшает магический урон, то по аналогии получаем $\lambda = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4}$.

Исходя из изложенных рассуждений получаем, что $\mathcal{D}_0 = \{EXP\left(\frac{1}{5.5}\right)\}$ и $\mathcal{D}_1 = \{EXP\left(\frac{1}{4}\right)\}$. Обозначим через $\xi \sim EXP(\lambda)$ случайную величину - урон мага после употребления зелья из зеленой бутылки. Тогда $H_0 : EXP(\lambda) \in \{EXP\left(\frac{1}{5.5}\right)\}$ и $H_1 : EXP(\lambda) \in \{EXP\left(\frac{1}{4}\right)\}$. Эти гипотезы можно переписать как $H_0 : \xi \sim EXP\left(\frac{1}{5.5}\right)$ и $H_1 : \xi \sim EXP\left(\frac{1}{4}\right)$. Пользуясь тем, что проверяемая гипотеза простая и параметрическая, можно также написать $H_0 : \lambda = \frac{1}{5.5}$ и $H_1 : \lambda = \frac{1}{4}$.

Поскольку маг применяет заклинание лишь один раз, то можно положить $X = X_1 = \xi$. Установим следующий критерий - будем отвергать H_0 , если $\xi > 6$.

Маг совершит ошибку первого рода, если зеленое зелье повышает урон, но он нанесет урон меньше 6. Рассчитаем соответствующую вероятность (равную уровню значимости):

$$\alpha = P(\xi < 6 | H_0) = F_{\xi|H_0}(6) = 1 - e^{-6 * \frac{1}{5.5}} \approx 0.664089$$

Маг совершит ошибку второго рода, если зеленое зелье не повышает урон, но он нанесет урон больше 6. Рассчитаем соответствующую вероятность:

$$\beta = P(\xi > 6 | H_1) = 1 - F_{\xi|H_1}(6) = e^{-6 * \frac{1}{4}} \approx 0.2231302$$

Таким образом, мощность критерия составит $1 - \beta \approx 1 - 0.2231302 \approx 0.7768698$

Учитывая достаточно большие вероятности ошибок первого и второго родов, предложенный способ тестирования гипотезы довольно плох.

Если маг нанесет 7 единиц урона то, в соответствии с выбранным критерием, он должен будет принять нулевую гипотезу о том, что зелье из зеленой бутылки повышает урон.

2. Нулевая и альтернативная гипотезы сформулированы так же, как и в предыдущем пункте. Из повторяющихся магом процедур можно сформировать выборку $X = (X_1, \dots, X_n)$ из ξ . Независимость и одинаковая распределенность компонент X достигается за счет того, что маг чередует употребление зелий из зеленой и белой бутылок.

В качестве тестовой статистики положим средний урон $T(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Поскольку сумма независимых, одинаково распределенных экспоненциальных случайных величин имеет распределение Эрланга (https://en.wikipedia.org/wiki/Erlang_distribution#Properties), то $T(X)|H_0 \sim \text{Erlang}(n, \frac{1}{5.5})$ и $T(X)|H_1 \sim \text{Erlang}(n, \frac{1}{4})$.

Вероятность совершить ошибку первого рода (уровень значимости) будет:

$$\alpha = P(\bar{X} < 7|H_0) = P\left(\sum X_i < 7n|H_0\right) = F_{T(X)|H_0}(7n)$$

Нетрудно рассчитать и вероятность ошибки второго рода:

$$\beta = P(\bar{X} > 7|H_1) = P\left(\sum X_i > 7n|H_1\right) = 1 - F_{T(X)|H_1}(7n)$$

Чтобы найти предел мощности критерия по объему выборки воспользуемся центральной предельной теоремой. При $n \rightarrow \infty$, в соответствии с ЦПТ, получаем $T(X)|H_1 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(4n, 16n)$. Через Z обозначим стандартную нормальную величину, откуда получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{T(X)|H_1}(7n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_Z\left(\frac{7n - 4n}{\sqrt{16n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_Z\left(\frac{3\sqrt{n}}{4}\right) = 1$$

Несмотря на единичную асимптотическую мощность данный критерий нельзя назвать хорошим, поскольку вероятность совершить ошибку первого рода также будет стремиться к единице. Это связано с тем, что при выбранном критерии и большом объеме выборки маг практически всегда будет отвергать нулевую гипотезу, независимо от её истинности, так как он принимает нулевую гипотезу при слишком больших уровнях среднего урона.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.