

Максимизация мощности

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Теория проверки статистических гипотез (/Topics/Details?id=35)

Раздел

Введение в теорию проверки статистических гипотез (/SubTopics/Details?id=124)

Дата публикации

26.04.2020

Дата последней правки

26.04.2020

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★

Условие

На уровне значимости $\alpha = 0.1$ тестируется гипотеза $H_0 : X \sim EXP(1)$ против альтернативы $H_1 : X \sim G$, где G - распределение с функцией плотности:

$$f_G(x) = \begin{cases} 0.5x, & \text{при } x \in [0, 2] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Критическая область имеет вид $x^{(1)} = [\ln(a), \ln(b)]$, где $a, b \in [1, e^2]$ и $b > a$. Определите, при каком значении константы k мощность теста окажется максимальной.

Решение

Обратим внимание, что поскольку уровень значимости составляет 0.1, то:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(X \in [\ln(a), \ln(b)] | H_0) = e^{-\ln(a)} - e^{-\ln(b)} = \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0.1 \end{aligned}$$

Максимизация мощности теста эквивалентна минимизации вероятности ошибки второго рода, которая равняется:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(X \notin [\ln(a), \ln(b)] | H_1) = 1 - P(X \in [\ln(a), \ln(b)] | H_1) = \\ &= 1 - \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} x dx\end{aligned}$$

В итоге необходимо решить следующую минимизационную задачу:

$$\text{minimize } 1 - \ln(b) + \ln(a)$$

$$\text{s.t. } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0.1$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.