Аркадий и карты

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Случайные события (/Topics/Details?id=5)
Раздел
Условная вероятность, формула Байеса, формула полной вероятности и независимость событий (/SubTopics/Details?id=32)
Дата публикации
09.09.2020
Дата последней правки
20.09.2023
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★⯪

Условие

У Аркадия имеется колода карт, в которой содержатся 52 карты: 4 масти и 13 рангов. Он достает две карты.

1. Посчитайте, с какой вероятностью первой картой, которую достанет Аркадий, окажется черный король, а второй - дама? Проверьте, являются ли рассматриваемые события независимыми.

2. При помощи формулы полной вероятности найдите вероятность того, что второй картой Аркадий достанет даму.

3. Посчитайте, с какой вероятностью первой картой, которую достал Аркадий, оказался черный король, при условии, что второй он достал даму?

4. Посчитайте, с какой вероятностью Аркадий достанет первой картой черного короля или (и) второй даму.

5. Посчитайте, с какой вероятностью первая карта не будет черным королем и вторая карта не будет дамой.

6. Теперь Аркадий достает три карты. Рассчитайте вероятность, с которой Аркадий достанет первой картой черного короля, второй даму, а третьей - даму пик.

7. Аркадий вновь достает три карты. Рассчитайте вероятность, с которой Аркадий достанет первой картой черного короля или (и) второй даму или (и) третьей - даму пик.

8. Аркадий опять достает три карты. Найдите вероятность того, что каждая следующая из вытянутых карт была старше предыдущей и среди них был король.

Решение

1. Через K_b^1 обозначим событие - первой картой Аркадий достал черного короля Также, введем событие D^2 - Аркадий достал второй картой даму.

$$P\left(K_b^1 \cap D^2\right) = P(D^2|K_b^1)P\left(K_b^1\right) = \frac{4}{51} * \frac{2}{52} = \frac{2}{663}$$

Также, данную вероятность можно было бы рассчитать, воспользовавшись классическим подходом:

$$P\left(K_b^1 \cap D^2\right) = \frac{C_2^1 C_4^1}{A_{52}^2} = \frac{2}{663}$$

События K_b^1 и D^2 зависимы, поскольку вероятность их пересечения не равняется нулю.

2. Через D^1 обозначим событие, в соответствии с которым первой картой Аркадий достал даму. В результате получаем:

$$P\left(D^2\right) = P\left(D^2|D^1\right)P\left(D^1\right) + P\left(D^2|\overline{D}^1\right)P\left(\overline{D}^1\right) = \frac{3}{51} * \frac{4}{52} + \frac{4}{51} * \frac{48}{52} = \frac{4}{52}$$

3. Используя формулу условной вероятности получаем:

$$P\left(K_b^1|D^2\right) = \frac{P\left(K_b^1 \cap D^2\right)}{P(D^2)} = \frac{\frac{2}{663}}{\frac{4}{52}} = \frac{2}{51}$$

4. Используя формулу объединения событий имеем:

$$P\left(K_b^1 \cup D^2\right) = P\left(K_b^1\right) + P\left(D^2\right) - P\left(K_b^1 \cap D^2\right) = \frac{2}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{663} = \frac{149}{1326}$$

5. Согласно закону Моргана:

$$P\left(\overline{K}_b^1 \cap \overline{D}^2\right) = P\left(\overline{K_b^1 \cup D^2}\right) = 1 - P\left(K_b^1 \cup D^2\right) = 1 - \frac{149}{1326} = \frac{1177}{1326}$$

6. Обозначим через D_p^3 событие, в соответствии с которым Аркадий достал третьей картой даму пик, а через $D_{\overline{p}}^3$ - даму масти, отличной от пик. В результате имеем:

$$P\left(K_b^1 \cap D^2 \cap D_p^3\right) = P\left(D_p^3|K_b^1 \cap D^2\right)P\left(D^2|K_b^1\right)P\left(K_b^1\right) =$$
$$= \frac{3}{200} * \frac{4}{51} * \frac{2}{52} = \frac{1}{22100}$$

При этом предварительно, при помощи формулы полной вероятности, была найдена вероятность:

$$P\left(D_p^3|K_b^1 \cap D^2 \cap D_p^2\right)P\left(D_p^2|K_b^1 \cap D^2\right) + P\left(D_p^3|K_b^1 \cap D^2 \cap D_{\overline{p}}^2\right)P\left(D_{\overline{p}}^2|K_b^1 \cap D^2\right) =$$
$$= 0 * \frac{1}{4} + \frac{1}{50} * \frac{3}{4} = \frac{3}{200}$$

Проверим, что с помощью классического подхода мы бы получили тот же самый результат:

$$P\left(K_b^1 \cap D^2 \cap D_p^3\right) = \frac{C_2^1 C_3^1 C_1^1}{A_{52}^3} = \frac{1}{22100}$$

7. Необходимо найти:

$$\begin{gathered}P\left(K_b^1 \cup D^2 \cup D_p^3\right) = P\left(K_b^1\right) + P\left(D^2\right) + P\left(D_p^3\right) - \\ -P\left(K_b^1 \cap D^2\right) - P\left(K_b^1 \cap D_p^3\right) - P\left(D^2 \cap D_p^3\right) + \\ +P\left(K_b^1 \cap D^2 \cap D_p^3\right) = \\ = \frac{2}{52} + \frac{4}{52} + \frac{1}{52} - \frac{2}{663} - \frac{1}{663} - \frac{3}{52*51} + \frac{1}{22100} = \frac{2851}{22100}\end{gathered}$$

8. Обозначим рассматриваемое событие как S. Обратим внимание, что если событие S произошло, то король мог быть лишь один. Рассмотрим полную группу попарно несовместных событий K^i, в соответствии с которыми был лишь один король, которого Аркадий достал i-м. Используя формулу полной вероятности получаем:

$$\begin{gathered}P(S) = P(S \cap K_1) + P(S \cap K_2) + P(S \cap K_3) = \\ = \left(0 + \frac{(52-4-4)*4*4}{A_{52}^3} + \left(\frac{4*(40+36+\ldots+4)*4}{A_{52}^3}\right)\right) = \frac{176}{5525} \approx 0.0318552\end{gathered}$$

Разберемся с каждой из описанных выше вероятностей.

Поскольку событие $S \cap K_1$ является невозможным, то его вероятность является нулю.

Событию $S \cap K_2$ удовлетворяет $(52-4-4)*4*4$ равновероятных элементарных события. Данный подход к расчету количества событий связан с тем, что если один из 4 королей стоял вторым и каждая следующая карта старше, то на первом месте должна была стоять одна из 44 карты младше короля, а на последнем месте один из 4 тузов.

Событие $S \cap K_3$ предполагает, что на первых двух позициях располагались карты младшей короля. Далее на каждую из 4 карт i-го ранга (из 13-ти остается 11, где 1-й ранг будем считать младшим), которая была выбрана Аркадием первой, приходится $44 - i*4$ карт рангом выше. Отсюда и получаем $4*(40+36+\ldots+4)*4$.

Проверка в R

```
types <- 1:4
cards <- cbind(rep(1:13, 4), rep(1:4, each = 13))
n <- 10000000
event.8 <- rep(NA, n)
for (i in 1:n)
{
 x <- cards[sample(1:nrow(cards), 3, replace = FALSE), ]
 event.8[i] <- (x[1, 1] < x[2, 1]) & (x[2, 1] < x[3, 1]) & any(x[, 1] == 12)
}
# пункт 8
 # симуляции
mean(event.8)
```

```
# аналитика
total <- factorial(52) / factorial(52 - 3)
(52 - 4 - 4) * 4 * 4 / total +
4 * sum(seq(from = 40, to = 4, by = -4)) * 4 / total
```

Показать решение