Оценки параметров равномерного распределения

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Оценки (/Topics/Details?id=30)
Раздел
Определение и свойства оценок (/SubTopics/Details?id=100)
Дата публикации
07.02.2019
Дата последней правки
23.02.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★

Условие

Имеется выборка $X = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения ξ. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение. Проверьте, является ли оценка $\hat{\theta}$ параметра θ несмещенной и состоятельной, если:

1. $\xi \sim U(0, \theta)$ и $\hat{\theta} = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Если данная оценка не является несмещенной, то исправьте ситуацию предложив альтернативную оценку, а затем проверьте её состоятельность.

Решение

1. Нетрудно догадаться (https://sobopedia.azurewebsites.net/Exercises/Details?id=92), что при $x \in \{0, \theta\}$ справедливо $F_{\hat{\theta}}(x) = F_{\xi}(x)^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$. Откуда, при $x \in \{0, \theta\}$ получаем функцию плотности $f_{\hat{\theta}}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}$. Отсюда несложно найти математическое ожидание рассматриваемой оценки и убедиться в том, что она не является несмещенной:

$$E(\hat{\theta}) = \int_0^{\theta} x\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx = \int_0^{\theta} \frac{nx^n}{\theta^n}dx = \frac{nx^{n+1}}{(n+1)\theta^n}|_0^{\theta} = \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta$$

Однако очевидно, что оценка $\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}$ будет являться несмещенной. Для проверки состоятельности оценки $\hat{\theta}_2$ достаточно убедиться, что её дисперсия стремится к нулю. Найдем выражение для дисперсии этой оценки:

$$Var(\hat{\theta}_2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 Var(\hat{\theta}) = \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(E(\hat{\theta}^2) - E(\hat{\theta})^2\right) =$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\int_0^\theta x^2 \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2\right) = \frac{1}{n(n+2)}\theta^2$$

Состоятельность следует из того, что:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_2) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+2)}\theta^2 = 0$$

Показать решение