## Иерархический дележ добычи

**Опубликовал**
sobodv
**Автор или источник**
sobopedia
**Предмет**
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
**Тема**
Классические непрерывные распределения (/Topics/Details?id=11)
**Раздел**
Равномерное распределение (/SubTopics/Details?id=59)
**Дата публикации**
14.10.2018
**Дата последней правки**
07.11.2018
**Последний вносивший правки**
sobodv
**Рейтинг**
★⯪☆

### Условие

В древней таинственной пещере вы и двое ваших друзей обнаружили три сундука. На сундуки наложено заклятие - количество килограммов золота, которое в них окажется после открытия, является равномерной случайной величиной, принимающей значения от $100$ до $1000$. Поскольку клад был найден благодаря вашей карте, то друзья предложили отдать вам все золото из сундука, в котором его окажется больше всего. Найдите функцию распределения количества золота, которое вы получите

1. Согласившись на предложение друзей.

2. Если вы великодушно решите взять себе сундук, в котором окажется наименьшее количество золота.

3. Если вы предложите распределить сундуки между вами и вашими друзьями случайным образом.

4, Если вы решите разделить золото поровну.

5. Изменится ли принципиальным образом решение, если распределение золота в сундуках окажется другим? Если распределения будут разными? Если у вас будет $n$ друзей? Если количество золота в сундуках будут зависимыми величинами?

6. Если вы предложите кинуть кубик и, в случае выпадения четного числа отдать вам лучший сундук, в случае выпадения $1$ или $5$ отдать вам худший сундук, а если выпадет $3$ - средний сундук.

7. Согласившись на предложение друзей, при условии, что вы не можете унести из пещеры больше $300$ килограмм.

8. Согласившись на предложение друзей, при условии, что вы не можете унести из пещеры больше $300$ килограмм, но если ваши друзья получат больше $300$ монет, а вы меньше, то они отдадут вам свои лишние монеты (те что свыше $300$ у каждого из них).

# Решение

1. Обозначим через $X_1, X_2$ и $X_3$ равномерно распределенные случайные величины, обозначающие количество золота в соответствующих сундуках. Тогда количество полученного вами золота будет случайной величиной $X_{max} = max(X_1, X_2, X_3)$, функцию распределения которой, пользуясь независимостью рассматриваемых случайных величин, можно найти следующим

образом:

$$F_{X_{\max}}(x) = P(X_{\max} \le x) = P(\max(X_1, X_2, X_3) \le x) =$$
$$= P((X_1 \le x) \cap (X_2 \le x) \cap (X_3 \le x)) = P(X_1 \le x)P(X_2 \le x)P(X_3 \le x) =$$
$$= F_{X_1}(x)F_{X_2}(x)F_{X_3}(x)$$

Подставляя значения имеем:

$$F_{X_{\max}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 100 \\ \left(\frac{x-100}{1000-100}\right)^3, \text{ если } x \in [100, 1000] \\ 1, \text{ если } x > 1000 \end{cases}$$

2, По аналогии рассмотрим случайную величину $X_{\min} = \min(X_1, X_2, X_3)$, функция распределения которой может быть выражена следующим образом:

$$F_{X_{\min}}(x) = P(X_{in} \le x) = P(\min(X_1, X_2, X_3) \le x) = 1 - P(\min(X_1, X_2, X_3) \ge x) =$$
$$= 1 - P((X_1 \ge x) \cap (X_2 \ge x) \cap (X_3 \ge x)) = 1 - (1 - P(X_1 \le x))(1 - P(X_2 \le x))(1 - P(X_3 \le x)) =$$
$$= 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x))(1 - F_{X_3}(x))$$

В результате чего получаем:

$$F_{X_{\min}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 100 \\ 1 - \left(1 - \frac{x-100}{1000-100}\right)^3, \text{ если } x \in [100, 1000] \\ 1, \text{ если } x > 1000 \end{cases}$$

3. Очевидно, что в таком случае:

$$F_{X_{rand}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 100 \\ \frac{x-100}{1000-100}, \text{ если } x \in [100, 1000] \\ 1, \text{ если } x > 1000 \end{cases}$$

4. Следует рассмотреть случайную величину: $\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$, распределение которой, в силу одинаковой распределенности и независимости, будет таким же, как и у одного случайного сундука:

$$F_{X_{equal}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 100 \\ \frac{x-100}{1000-100}, \text{ если } x \in [100, 1000] \\ 1, \text{ если } x > 1000 \end{cases}$$

5. Ни количество друзей, ни распределение не влияют на ход решения задачи. Принципиальным окажется только зависимость случайных величин, поскольку в случае её наличия мы не сможем представить искомую функцию распределения как произведение известных.

6. Обозначим через $A_{\max}, A_{\min}$ и $A_{mean}$ события, в соответствии с которыми вам достался лучший, худший или средний сундук соответственно. Далее, воспользуемся формулой полной вероятности:

$$F_{X_{comb}}(x) = P(X_{comb} \le x) = P(X_{comb} \le x | A_{\max})P(A_{\max}) + P(X_{comb} \le x | A_{\min})P(A_{\min}) + P(X_{comb} \le x | A_{mean})P(A_{mean}) =$$
$$= \frac{1}{2}F_{X_{\max}} + \frac{1}{3}F_{X_{\min}} + \frac{1}{6}F_{X_{rand}}(x)$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.