Акции и доходность

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические непрерывные распределения (/Topics/Details?id=11)
Раздел
Нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=68)
Дата публикации
19.11.2019
Дата последней правки
15.11.2022
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг

Условие

Рассмотрим акции фирмы A. Через p_t обозначим цену акции в момент времени $t \in \{0, 1, 2\}$. Известно, что $p_0 = 100$. При $t > 0$ разница $\triangle p_t = p_t - p_{t-1}$ хорошо аппроксимируется нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $10t$ и дисперсией $25t^2$. Корреляция между $\triangle p_2^C$ и $\triangle p_1^C$ составляет 0.71. Также предполагается, что они имеют совместное нормальное распределение.

Примечание: на практике и, в частности, в задачах, часто упоминается о том, что нечто, например, цена, хорошо аппроксимируется нормальным распределением. В таком случае под аппроксимацией подразумевается, что рассматриваемая случайная величина на самом деле имеет не нормальное, а некоторое иное распределение, например потому, что, в частности, в случае с ценой, не может принимать отрицательные значения. Однако, в пределах рассматриваемой модели предполагается, что распределение полностью совпадает с нормальным, потому что вероятность попадания рассматриваемой случайной величины в область отрицательных значений слишком мала и ею можно пренебречь.

1. Запишите распределения p_1 и вычислите вероятность того, что по сравнению с нулевым периодом $t = 0$ в первом периоде $t = 1$ цена акции A вырастет более, чем на 5%.

2. Найдите распределение p_2 и вероятность того, что ко второму периоду $t = 2$ цена акции A отклонится (в любую сторону) от изначальной p_0 более, чем на 20%.

3. Посчитайте вероятность, с которой цена акции в период времени $t = 2$ превысит цену акции в период времени $t = 1$ более, чем на 10%.

4. Какое наименьшее число акций (целое) вам необходимо купить в период времени $t=0$, чтобы с вероятностью не менее $\frac{1}{3}$ ваша прибыль с продажи в период времени $t=2$ превысила 200 денежных единиц. При этом под прибылью понимается разница между деньгами, полученными от продажи акций и потраченными на их покупку.

5. В вашем распоряжении имеются $w=1000$ денежных единиц и вы любите риск. Ваша функция полезности имеет вид $u(x)=x^2$, где x - количество денег, оставшихся у вас к концу периода $t=2$ (пренебрежем фактором дисконтирования). Вы покупаете акции в период времени $t=0$ и продаете их все в период времени $t=2$. Сколько акций вам следует приобрести из соображений максимизации своей ожидаемой полезности? Какую полезность вы в таком случае получите?

Решение

1. Нетрудно догадаться, что:

$$p_1=\triangle p_1+p_0\sim\mathcal{N}(110,25)$$

Через $\Phi()$ обозначим функцию распределения стандартного нормального распределения. Рассчитаем искомую вероятность:

$$P(p_1>1.05p_0)=P(p_1>105)=1-\Phi\left(\frac{105-110}{\sqrt{25}}\right)=1-\Phi(-1)=\Phi(1)\approx 0.8413447$$

2. Необходимо найти распределение следующей случайной величины:

$$p_2=\triangle p_2+p_1=\triangle p_2+\triangle p_1+p_0$$

Поскольку рассматриваемая случайная величина является линейной комбинацией нормальных случайных величин, то она также будет нормальной со следующими математическим ожиданием и дисперсией:

$$E(p_2)=E(\triangle p_2+\triangle p_1+p_0)=20+10+100=130$$

$$Var(p_2)=Var(\triangle p_2+\triangle p_1+p_0)=Var(\triangle p_2)+Var(\triangle p_1)+2\sqrt{Var(\triangle p_1)Var(\triangle p_2)}Corr(\triangle p_1,\triangle p_2)=$$
$$=25+100+2\sqrt{25*100}*0.71=196$$

Таким образом получаем, что:

$$p_2\sim\mathcal{N}(130,196)$$

Теперь рассчитаем вероятность пользуясь несовместностью учитываемых событий:

$$P(p_2\leq 0.8p_0\cup p_2\geq 1.2p_0)=P(p_2\leq 80)+P(p_2\geq 120)=\Phi\left(\frac{80-130}{\sqrt{196}}\right)+1-\Phi\left(\frac{120-130}{\sqrt{196}}\right)\approx 0.7626523$$

3. Необходимо найти следующую вероятность:

$$P(p_2\geq 1.1p_1)=P(1.1p_1-p_2\leq 0)$$

Найдем распределение соответствующей случайной величины:

$$E(1.1p_1-p_2)=1.1*110-130=-9$$

$$Cov(p_1,p_2)=Cov(\triangle p_2+\triangle p_1+p_0,\triangle p_1+p_0)=Cov(\triangle p_2+\triangle p_1,\triangle p_1)$$
$$=Cov(\triangle p_1,\triangle p_2)+Var(\triangle p_1)=\sqrt{Var(\triangle p_1)Var(\triangle p_2)}Corr(\triangle p_1,\triangle p_2)+Var(\triangle p_1)=$$
$$=\sqrt{25*100}*0.71+25=60.5$$

$$Var(1.1p_1 - p_2) = 1.1^2 Var(p_1) + Var(p_2) - 2 * 1.1 Cov(p_1, p_2) =$$
$$= 1.1^2 * 25 + 196 - 2 * 1.1 * 60.5 = 93.15$$

Отсюда нетрудно получить значение искомой вероятности:

$$P(1.1p_1 - p_2 \leq 0) = \Phi\left(\frac{0+9}{\sqrt{93.15}}\right) \approx 0.8244621$$

4. Обозначим через $\alpha > 0$ количество купленных акций, откуда получаем, что:

$$P(\alpha p_2 - \alpha p_0 \geq 200) = P(\alpha p_2 - 100\alpha \geq 200) = P\left(p_2 \geq \frac{200+100\alpha}{\alpha}\right) =$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{\frac{200+100\alpha}{\alpha} - 130}{\sqrt{196}}\right) \geq \frac{1}{3}$$

Заметим, что аргумент функции распределения строго убывает по α. Значит, поскольку функция распределения стандартного нормального распределения является строго возрастающей, то рассматриваемое неравенство должно соблюдаться строго, если α, как мы временно предположим, определено не только для целых, но и для всех вещественных чисел.

Перепишем равенство с помощью квантили:

$$\Phi\left(\frac{\frac{200+100\alpha}{\alpha} - 130}{\sqrt{196}}\right) = \frac{2}{3} =>$$
$$=> \Phi^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 0.4307273 = \frac{\frac{200+100\alpha}{\alpha} - 130}{\sqrt{196}}$$

Из данного равенства получаем, что $\alpha \approx 5.55$. Однако, поскольку необходимо купить целое число акций и вероятность рассматриваемого события возрастает по мере увеличения α, то получаем, что $\alpha = 6$.

5. Для начала обратим внимание, что:

$$E((p_2 - p_0)^2) = 196 + 30^2 = 1096$$

Необходимо максимизировать следующую функцию при $\alpha \leq 10$ (бюджетное ограничение):

$$E\left((\alpha(p_2 - p_0) + w)^2\right) = \alpha^2 E((p_2 - p_0)^2) + w^2 + 2\alpha E((p_2 - p_0))w =$$
$$= 1096\alpha^2 + 1000^2 + 2 * 30 * 1000\alpha$$

Нетрудно догадаться, что в данном случае функция достигает максимума при $\alpha = 10$, а значит ваша полезность составит:

$$1096 * 10^2 + 1000^2 + 2 * 30 * 1000 * 10 = 1709600$$

Показать решение