Разноцветный комбинаторный квадрат

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Случайные события (/Topics/Details?id=5)
Раздел
Классическое определение вероятностей и обратные события (/SubTopics/Details?id=30)
Дата публикации
11.09.2019
Дата последней правки
21.09.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★

Условие

Имеется квадрат размером 5 на 5. Каждая из клеток этого квадрата с равной вероятностью окрашена в один из трех цветов: белый, черный или зеленый.

1. Найдите вероятность того, что не будет ни одной черной клетки.

2. Повторите предыдущий пункт учитывая, что все клетки на главной диагонали квадрата раскрашены в зеленый цвет.

3. Повторите первый пункт учитывая, что в квадрате не менее пяти зеленых клеток. **Примечание**: досчитывать ответ не обязательно, главное - верно записать выражение.

4. Вычислите вероятность того, что первая и третья строки квадрата окажутся зелеными. Выясните, как изменится ответ на данный пункт, если необходимо, чтобы первая и третья строки были окрашены в чередующиеся белый и черный цвета: строка может выглядеть как белый, черный, белый, черный, белый или черный, белый, черный, белый черный.

5. Посчитайте вероятность того, что хотя бы одна строка окажется заполнена зелеными квадратами (окрашена в зеленый цвет).

6. Повторите предыдущий пункт при условии, что первый и третий столбцы заполнены зелеными клетками. Будет ли отличаться ответ, если окрашены в зеленый будут не первый и третий столбцы, а два столбца, выбранных случайным образом (любые два столбца выбираются с равной вероятностью).

7. Найдите вероятность того, что **только один** столбец окажется окрашен в зеленый цвет. **Подсказка**: используйте свойства независимых событий.

8. Найдите вероятность того, что не более двух столбцов окрашены в зеленый цвет.

9. Повторите пункт 5 учитывая, что не более двух столбцов окрашены в зеленый цвет.

Решение

1. Введем событие A - все клетки оказались черными. Всего имеется $5*5=25$ клеток. Следовательно, существует 3^{25} способов раскрасить квадрат. При этом 2^{25} способов соответствуют квадрату, на котором нет черных клеток. Следовательно, получаем ответ $\left(\frac{2}{3}\right)^{25}$.

2. Возможны два подхода к решению. Если действовать исходя из классического определения вероятности, то, поскольку 5 клеток уже окрашены в зеленый цвет, то ответ, очевидно, составит $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$. Теперь получим ответ, пользуясь формулой условной вероятности. Введем событие B - все клетки на диагонали оказались зелеными. Нетрудно догадаться, что $P(B)=\frac{3^{20}}{3^{25}}$ и $P(B\cap A)=\frac{2^{20}}{3^{25}}$. Тогда получаем, что:

$$P(A|B)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{\left(\frac{2^{20}}{3^{25}}\right)}{\left(\frac{3^{20}}{3^{25}}\right)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

3. Введем событие C - хотя бы 5 клеток оказались зелеными. Его вероятность, очевидно, составит $\frac{\sum\limits_{i=5}^{25} C_{25}^i 2^{25-i}}{3^{25}}$. Также, нетрудно посчитать $P(A \cap C) = \frac{\sum\limits_{i=5}^{25} C_{25}^i}{3^{25}}$. В итоге получаем ответ (https://www.wolframalpha.com/input/?i=%28sum+%2825+choose+n%29%2C+n%3D5+to+25%29%2F%28sum+%2825+choose+n%29*2%5E%2825-n%29%2C+n%3D5+to+25%29):

$$P(A|C) = \frac{\sum\limits_{i=5}^{25} C_{25}^i}{\sum\limits_{i=5}^{25} C_{25}^i 2^{25-i}} \approx 0.0000415$$

4. Введем событие S_i - строка i оказалась заполнена зелеными квадратами. Нетрудно догадаться, что:

$$P(S_1 \cap S_3) = P(S_3|S_1)P(S_1) = \frac{3^{15}}{3^{20}} * \frac{3^{20}}{3^{25}} = \frac{3^{15}}{3^{25}}$$

Также, данный пункт можно решить, пользуясь независимостью событий:

$$P(S_1 \cap S_3) = P(S_3)P(S_1) = \left(\frac{3^{25}}{3^{20}}\right)^2 = \frac{3^{15}}{3^{25}}$$

Если имеет место чередование белого и черного цветов, то вероятность получить каждую из строк, очевидно, удвоится, так как обеспечить чередование можно двумя способами (начав с белого или начав с черного). А поскольку в данном случае имеет место произведение вероятностей, то в целом вероятность увеличится в 4 раза.

5. Через S^* обозначим событие - хотя бы одна строка оказалась зеленой. Заметим, что в данном случае замена индексов при объединении для событий S_i не изменяет вероятность. Например, $P(S_1 \cap S_2) = P(S_3 \cap S_5)$. Учитывая данную особенность воспользуемся формулой включений и исключений:

$$P(S^*) = P(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5) = C_5^1 P(S_1) - C_5^2 P(S_1 \cap S_2) + C_5^3 P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) - C_5^4 P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4) + C_5^5 P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5) =$$
$$= 5 * \frac{3^{20}}{3^{25}} - 10 * \frac{3^{15}}{3^{25}} + 10 * \frac{3^{10}}{3^{25}} - 5 * \frac{3^5}{3^{25}} + \frac{1}{3^{25}} \approx 0.02$$

6. Поскольку два столбца заполнены зелеными клетками, то значение имеют лишь клетки в оставшемся квадрате 5 на 3 (содержит 15 позиций). Полученный квадрат назовем сокращенным. Введем событие G_i - строка i оказалась заполнена зелеными квадратами в сокращенном квадрате. Нетрудно догадаться, что:

$$P(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5) = C_5^1 P(G_1) - C_5^2 P(G_1 \cap G_2) + C_5^3 P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) - C_5^4 P(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4) + C_5^5 P(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap G_5) =$$
$$= 5 * \frac{3^{12}}{3^{15}} - 10 * \frac{3^9}{3^{15}} + 10 * \frac{3^6}{3^{15}} - 5 * \frac{3^3}{3^{15}} + \frac{1}{3^{15}} \approx 0.172$$

Используя формулу полной вероятности нетрудно показать, что ответ не изменится, если будут окрашены два случайных столбца.

7. Через T_i обозначим событие - i-й столбец окрашен в зеленый цвет, а через T_i^* - что только i-й столбец. Наконец, через T_i^{**} обозначим событие - закрашено только i столбцов в зеленый цвет. Заметим, что события $T_1, \cdots T_n$ - независимы и равновероятны. Отсюда получаем, что:

$$P(T_1^*) = P(T_1 \cap \overline{T_2} \cdots \cap \overline{T_5}) = P(T_1)P(\overline{T}_2)^4 =$$
$$= P(T_1)P(\overline{T}_1)^4 = P(T_1)(1 - P(T_1))^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^4 \approx 0.004048$$

При этом вероятность того, что будет закрашен только первый столбец совпадает с вероятностью того, что будет окрашен только второй и т.д., откуда получаем, что вероятность искомого события:

$$P(T_1^{**}) = 5 * P(T_1^*) \approx 5 * 0.004048 \approx 0.02$$

8. По аналогии с предыдущим пунктом:

$$P(T_2^{**})) = C_5^2 P(T^1 \cap T^2 \cap \overline{T}_3 \cap \overline{T}_4 \cap \overline{T}_5) = 10 * P(T_1)^2 (1 - P(T_1))^3 =$$
$$= 10 * \left(\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^2 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^3 \approx 0.000167$$

$$P(T_0^{**})) = P(\overline{T}^1 \cap \cdots \cap \overline{T}_5) = \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^5 \approx 0.9796$$

В итоге получаем, пользуясь несовместностью событий T_2^{**} и T_0^{**}, что:

$$P(T_2^{**} \cup T_0^{**}) = 0.000167 + 0.9796 = 0.979767$$

9.Теперь воспользуемся несовместность событий T_i^{**} и формулой условной вероятности:

$$P(S^*|T_0^{**}\cup T_1^{**}\cup T_2^{**}) = \frac{P(S^*\cap(T_0^{**}\cup T_1^{**}\cup T_2^{**}))}{P(T_0^{**}\cup T_1^{**}\cup T_2^{**})} =$$

$$= \frac{P\left(\left(S^*\cap T_0^{**}\right)\cup\left(S^*\cap T_1^{**}\right)\cup\left(S^*\cap T_2^{**}\right)\right)}{P(T_0^{**})+P(T_1^{**})+P(T_2^{**})} =$$

$$= \frac{P\left(S^*\cap T_0^{**}\right)+P\left(S^*\cap T_1^{**}\right)+P\left(S^*\cap T_2^{**}\right)}{0.004048+0.000167+0.9796} =$$

$$= \frac{P\left(S^*|T_0^{**}\right)P(T_0^{**})+P\left(S^*|T_1^{**}\right)P(T_1^{**})+P\left(S^*|T_2^{**}\right)P(T_2^{**})}{0.9838}$$

Показать решение