Председатель колхоза

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические многомерные распределения (/Topics/Details?id=19)
Раздел
Многомерное нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=87)
Дата публикации
11.01.2019
Дата последней правки
10.01.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

Объем урожая кукурузы (в тоннах), собранного на трех полях в колхозе имени Гаусса, хорошо описывается многомерным нормальным распределением:

$$X \sim N\left(\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.64 & 0.12 & -0.18\\0.12 & 0.25 & 0.09\\-0.18 & 0.09 & 0.81\end{bmatrix}\right)$$

Где компоненты вектора X, а именно, X_1, X_2, X_3, соответствуют объему урожая, собранного на первом, втором и третьем полях соответственно.

1. Посчитайте корреляцию урожая на первом и втором полях. Найдите корреляционную матрицу X.

2. Найдите вероятность того, что урожай на втором поле окажется в полтора раза больше, чем урожай на первом и третьем полях вместе взятых.

3. Во сколько раз председатель колхоза должен завысить показатели урожая на втором поле, чтобы вероятность того, что завышенный показатель урожая на втором поле окажется в два раза больше, чем урожай на первом и третьем полях вместе взятых, превысила 0.5. Учтите, что поручение о завышении урожая на втором поле в k раз председатель колхоза дает до того, как будет собран урожай, из-за необходимости провести ряд затянутых бюрократических процедур.

4. Председателю колхоза предлагаю купить удобрения. Если председатель купит u тонн удобрений, то собираемый урожай на первом, втором и третьем полях увеличится в $1+\sqrt{u}$, $1+0.5\sqrt{u}$ и $1+0.25\sqrt{u}$ раз соответственно. Тонна удобрений стоит 100 тысяч рублей, а тонна урожая продается государству по фиксированной цене в 50 тысяч рублей. Посчитайте объем удобрений, который следует купить председателю колхоза для того, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль колхоза.

5. Председателя колхоза переизберут на второй срок лишь в том случае, если прибыль колхоза превысит 500 тысяч рублей. Какой объем удобрений приобретет председатель колхоза, если он максимизирует вероятность своего переизбрания?

Решение

1. Воспользуемся тем, что:

$$corr(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} = \frac{0.12}{\sqrt{0.64 * 0.25}} = 0.3$$

Действуя по аналогии получаем корреляционную матрицу:

$$corr(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & -0.25 \\ 0.3 & 1 & 0.2 \\ -0.25 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Рассчитаем следующую вероятность:

$$P(X_2 > 1.5(X_1 + X_3) = P(1.5X_1 - X_2 + 1.5X_3 < 0)$$

Найдем распределение линейно комбинации компонент, посчитав соответствующие моменты:

$$E(1.5X_1 - X_2 + 1.5X_3) = 1.5 * 1 - 5 + 1.5 * 3 = 1$$

$$Var(1.5X_1 - X_2 + 1.5X_3) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1 \\ 1.5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.64 & 0.12 & -0.18 \\ 0.12 & 0.25 & 0.09 \\ -0.18 & 0.09 & 0.81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 2.075$$

$$1.5X_1 - X_2 + 1.5X_3 \sim N(1, 2.075)$$

Обозначим через Z стандартную нормальную величину. В итоге получаем:

$$P(1.5X_1 - X_2 + 1.5X_3 < 0) = F_Z(\frac{0-1}{\sqrt{2.075}}) \approx F_Z(-0.69) \approx 0.245$$

3. Рассчитаем следующую вероятность:

$$P\left(kX_2 > 2(X_1 + X_3)\right) = P(2X_1 - kX_2 + 2X_3 < 0)$$

Очевидно, что достаточно рассчитать лишь математическое ожидание этой линейной комбинации, так как вероятность превышения в 0.5 раза будет достигнута, в силу симметрии, когда оно окажется равным 0:

$$E(2X_1 - kX_2 + 2X_3) = 2 * 1 - 5k + 2 * 3 = 8 - 5k$$

Решая $8 - 5k = 0$ получаем $k = 1.6$.

4. Ожидаемая прибыль колхоза имеет следующий вид:

$$50 * \left((1+\sqrt{u}) * 1 + (1+0.5\sqrt{u}) * 5 + (1+0.25\sqrt{u}) * 3\right) - 100u$$

Максимизируя её по u получаем $u^* = \frac{289}{256}$.

5. Следует максимизировать следующую вероятность по u:

$$P\left(50\left((1+\sqrt{u})X_1 + (1+0.5\sqrt{u})X_2 + (1+0.25\sqrt{u})X_3\right) - 100u > 500\right) =$$
$$= P\left(\left((1+\sqrt{u})X_1 + (1+0.5\sqrt{u})X_2 + (1+0.25\sqrt{u})X_3\right) - 2u > 10\right)$$

Найдем распределение соответствующей случайной величины:

$$E\left((1+\sqrt{u})X_1 + (1+0.5\sqrt{u})X_2 + (1+0.25\sqrt{u})X_3 - 2u\right) =$$
$$= (1+\sqrt{u}) + 5(1+0.5\sqrt{u}) + 3(1+0.25\sqrt{u}) - 2u$$

$$Var\left((1+\sqrt{u})X_1 + (1+0.5\sqrt{u})X_2 + (1+0.25\sqrt{u})X_3 - 2u\right) =$$
$$= 0.64(1+\sqrt{u})^2 + 0.25(1+0.5\sqrt{u})^2 + 0.81(1+0.25\sqrt{u})^2 +$$
$$+2 * 0.12 * (1+\sqrt{u})(1+0.5\sqrt{u}) - 2 * 0.18 * (1+\sqrt{u})(1+0.25\sqrt{u}) + 2 * 0.09 * (1+0.5\sqrt{u})(1+0.25\sqrt{u}) =$$
$$= 0.805625u + 1.98\sqrt{u} + 1.76$$

Стандартизируя получаем следующее выражение для вероятности:

$$P\left(\left((1+\sqrt{u})X_1 + (1+0.5\sqrt{u})X_2 + (1+0.25\sqrt{u})X_3\right) - 2u > 10\right) =$$
$$= 1 - F_Z\left(\frac{10 - (1+\sqrt{u}) - 5 * (1+0.5\sqrt{u}) - 3 * (1+0.25\sqrt{u}) + 2u}{\sqrt{0.805625u + 1.98\sqrt{u} + 1.76}}\right)$$

Очевидно, что для максимизации данной вероятности следует минимизировать значение функции распределения, что, в силу того, что она не убывает, можно достигнуть благодаря минимизации её аргумента по u, откуда (https://www.wolframalpha.com/input/?i=miminize+(10-(1%2B%5Csqrt%7Bu%7D)-5*(1%2B0.5*%5Csqrt%7Bu%7D)-3*(1%2B0.25*%5Csqrt%7Bu%7D)%2B2*u)%2F(%5Csqrt%7B0.805625*u%2B1.98%5Csqrt%7Bu%7D%2B1.76%7D)) $u^* \approx 0.88122$.

Показать решение