

Байес и экспоненциальное распределение

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Байесовская статистика (/Topics/Details?id=37)

Раздел

Введение в Байесовскую статистику (/SubTopics/Details?id=131)

Дата публикации

10.06.2021

Дата последней правки

10.06.2021

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★★★

Условие

Пусть выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ получена из экспоненциального распределения с параметром λ . Используя Гамма распределение с параметрами α и β в качестве априорного, найдите апостериорное распределение параметра λ .

Решение

Функция плотности гамма распределения при $t > 0$ имеет вид:

$$f_{\Gamma}(t) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}$$

Гамма интеграл имеет вид:

$$\int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = \Gamma(z+1)$$

Следовательно, апостериорное распределение при $t > 0$ будет пропорционально:

$$f_{\lambda|X}(t) \propto \left(\prod_{i=1}^n t e^{-tx_i} \right) \times \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} \right) \propto t^{n+a-1} e^{-t \left(b + \sum_{i=1}^n x_i \right)}$$

Для того, чтобы найти константу, при делении на которую полученное выше выражение будет отражать функцию плотности, осуществим интегрирование с использованием Гамма функции:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty t^{n+a-1} e^{-t \left(b + \sum_{i=1}^n x_i \right)} dt = \\ & = \left(\left(b + \sum_{i=1}^n x_i \right) \right)^{-(n+a)} \int_0^\infty \left(t \left(b + \sum_{i=1}^n x_i \right) \right)^{n+a-1} e^{-t \left(b + \sum_{i=1}^n x_i \right)} d \left(t \left(b + \sum_{i=1}^n x_i \right) \right) = \\ & = \left(b + \sum_{i=1}^n x_i \right)^{-(n+a)} \Gamma(n+a) \end{aligned}$$

В результате получаем, что при $t > 0$:

$$f_{\lambda|X}(t) = \frac{\left(b + \sum_{i=1}^n x_i \right)^{-(n+a)}}{\Gamma(n+a)} t^{n+a-1} e^{-t \left(b + \sum_{i=1}^n x_i \right)}$$

Таким образом очевидно, что апостериорное распределение это Гамма распределение $\Gamma(\alpha^*, \beta^*)$, где:

$$\alpha^* = n + a$$

$$\beta^* = b + \sum_{i=1}^n x_i$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.