

Снеговики 2

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Сходимости (/Topics/Details?id=13)

Раздел

Центральная предельная теорема (/SubTopics/Details?id=73)

Дата публикации

13.01.2019

Дата последней правки

13.11.2021

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★★★

Условие

Слепленный на северном полюсе снеговик весит 10 килограмм. Каждый день, в зависимости от погоды, его вес, независимо ни от чего другого, изменяется в число раз, задаваемое равномерно распределенной от 0.9 до 1.1 случайной величиной. Обозначим через Y_i - вес снеговика в i -й день.

1. Найдите математическое ожидание случайной величины $Y_{100} * Y_{99}$.
2. Посчитайте, приблизительно, вероятность того, что через 3000 дней вес снеговика не превысит 11 килограмм.
3. Найдите дисперсию случайной величины $Y_{100} * Y_{99}$.

Решение

1. Через $X_t \sim U(0.9, 1.1)$ обозначим, во сколько раз изменился вес снеговика в день t .

Случайную величину Y_t можно представить в следующем виде:

$$Y_t = 10 * X_1 * \dots * X_t$$

Пользуясь независимостью получаем, что:

$$\begin{aligned}
E(Y_{100}Y_{99}) &= E((10 * X_1 * \dots * X_{99})(10 * X_1 * \dots * X_{100})) = \\
&= E(100 * X_1^2 * \dots * X_{99}^2 * X_{100}) = 100 * E(X_1^2) * E(X_2)^2 * \dots * E(X_{99})^2 * E(X_{100}) = \\
&= 100 * \left(\frac{(1.1 - 0.9)^2}{12} + \frac{1.1 + 0.9}{2} \right)^{99} * \frac{1.1 + 0.9}{2} \approx 139
\end{aligned}$$

2. Рассмотрим следующую вероятность:

$$P(Y_{50} \leq 11) = P(10 * X_1 * \dots * X_{3000} \leq 11)$$

Чтобы воспользоваться ЦПТ, прологарифмируем левую и правую части неравенства:

$$P(Y_{50} \leq 11) = P(\log(X_1) + \dots + \log(X_{3000}) \leq \log(1.1))$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию $\log(X_1)$:

$$E(\log(X_1)) = \int_{0.9}^{1.1} \log(x) \frac{1}{1.1 - 0.9} dx \approx -0.00167169$$

$$Var(\log(X_1)) = \int_{0.9}^{1.1} \log(x)^2 \frac{1}{1.1 - 0.9} dx - 0.00167169^2 = 0.00334898$$

Через $Z \sim N(0, 1)$ обозначим стандартную нормальную величину.

Согласно ЦПТ:

$$\begin{aligned}
\log(X_1) + \dots + \log(X_{3000}) &\sim N(-3000 * 0.00167169, 3000 * 0.00334898) => \\
=> \log(X_1) + \dots + \log(X_{3000}) &\sim N(-5.01507, 10.04694)
\end{aligned}$$

Пользуясь ЦПТ рассчитываем вероятность:

$$P(\log(X_1) + \dots + \log(X_{3000}) \leq \log(1.1)) = F_Z \left(\frac{\log(1.1) + 5.01507}{\sqrt{10.04694}} \right) = F_Z(1.612264553) \approx 0.9465478$$

3. Решается по аналогии с первым пунктом.

Проверка в R

```

n.sim <- 10000
n <- 3000
weight <- rep(NA, n.sim)
y100y99 <- rep(NA, n.sim)
for (i in 1:n.sim)
{
  x <- runif(n, 0.9, 1.1)
  weight[i] <- 10 * prod(x)
  y100y99[i] <- (10 * prod(x[1:100])) * (10 * prod(x[1:99]))
}
# пункт 1
mean(y100y99)
# пункт 2
k <- 11

```

```
pnorm((log(k / 10) + 5.01507) / sqrt(10.04694))  
mean(weight <= k)
```

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.
