

Огород с картошкой и огурцами

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Совместное распределение (/Topics/Details?id=10)

Раздел

Сумма независимых непрерывных случайных величины (/SubTopics/Details?id=61)

Дата публикации

09.11.2019

Дата последней правки

11.11.2020

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★☆☆

Условие

Вы сажаете на огороде картошку и огурцы. Объем собранного урожая зависит от количества выпавших осадков (в миллиметрах). Обозначим через X и Y случайные величины - десятки килограммов собранной вами картошки и огурцов соответственно. При любом количестве выпавших осадков z количество собранной картошки и огурцов никак не зависят друг от друга. Их условные маргинальные функции плотности имеют следующей вид:

$$f_{X|Z=z}(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{z^3}, & \text{при } x \in [0, z] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{Y|Z=z}(y) = \begin{cases} \frac{2y^5}{21z^6}, & \text{при } y \in [z, 2z] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

При этом количество осадков является равномерно распределенной в интервале от 1 до 2 случайной величиной.

1. Найдите совместную функцию плотности и корреляцию десятков килограммов собранных вами огурцов и картошек, если количество выпавших осадков составило 1 миллиметр. Укажите, как зависит математическое ожидание общего веса собранных вами культур ($X + Y$) от количества выпавших осадков.
2. Найдите функцию плотности суммарно собранного урожая ($X + Y$), если количество выпавших осадков составило 1 миллиметр. **Подсказка:** чтобы убедиться в правильности полученного ответа проверьте, что с использованием полученной вами в данном пункте функции плотности математическое ожидание рассчитывается так же, как и в предыдущем пункте.
3. Найдите корреляцию объемов собранного урожая X и Y при заранее неизвестном количестве выпавших осадков.

Решение

1. Поскольку при фиксированном числе осадков данные случайные величины являются независимыми, то:

$$f_{X,Y|Z=1}(x, y) = f_{X|Z=1}(x)f_{Y|Z=1}(y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^5}{7}, & \text{при } x \in [0, 1] \text{ и } y \in [1, 2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

В общем случае совместная функция плотности имеет вид:

$$f_{X,Y|Z=z}(x, y) = f_{X|Z=z}(x)f_{Y|Z=z}(y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^5}{7z^9}, & \text{при } x \in [0, z] \text{ и } y \in [z, 2z] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Отсюда находим математическое ожидание и видим, что оно возрастает вместе с объемом выпавших осадков:

$$E(X + Y|Z = z) = \int_0^z \int_z^{2z} (x + y) \frac{2x^2 y^5}{7z^9} dy dx = \frac{1457}{588} z$$

2. Мы имеем дело с функцией плотности:

$$f_{X+Y|Z=1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t - x) dx$$

Чтобы функция плотности не обращалась в ноль, границы интегрирования должны всегда удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq t - x \leq 2 \end{cases}$$

Решая данное неравенство для x получаем, что:

$$\begin{cases} x \in [0, t - 1], \text{ при } t \in (1, 2] \\ x \in [t - 2, 1], \text{ при } t \in (2, 3] \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $t \in (1, 2]$ функция плотности принимает вид:

$$f_{X+Y|Z=1}(t) = \int_0^{t-1} 3x^2 \frac{2(t-x)^5}{21} dx = \frac{1}{588} (t^8 - 28t^2 + 48t - 21)$$

В то же время при $t \in (2, 3)$ имеем:

$$f_{X+Y|Z=1}(t) = \int_{t-2}^1 3x^2 \frac{2(t-x)^5}{21} dx = \frac{1}{588} (-t^8 + 56t^5 - 210t^4 + 336t^3 + 1512t^2 - 6024t + 5355)$$

Таким образом получаем ответ:

$$f_{X+Y|Z=1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{588} (t^8 - 28t^2 + 48t - 21), \text{ при } t \in [1, 2] \\ \frac{1}{588} (-t^8 + 56t^5 - 210t^4 + 336t^3 + 1512t^2 - 6024t + 5355), \text{ при } t \in [2, 3] \end{cases}$$

Убедимся, что функция плотности получена верно, сверившись с полученным ранее значением математического ожидания:

$$E(X + Y|Z = 1) = \left(\int_1^2 t \frac{1}{588} (t^8 - 28t^2 + 48t - 21) dt \right) + \left(\int_2^3 t \frac{1}{588} (-t^8 + 56t^5 - 210t^4 + 336t^3 + 1512t^2 - 6024t + 5355) dt \right) = \frac{1457}{588}$$

3. Для начала найдем совместную функцию плотности для X , Y и Z :

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = f_{X,Y|Z=z}(x, y) f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2x^2 y^5}{7z^9}, \text{ при } x \in [0, z] \text{ и } y \in [z, 2z] \text{ и } z \in [1, 2] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Теперь рассчитаем необходимые значения:

$$E(X) = \int_1^2 \int_0^z \int_z^{2z} x \frac{2x^2 y^5}{7z^9} dy dx dz = \frac{9}{8}$$

$$E(X^2) = \int_1^2 \int_0^z \int_z^{2z} x^2 \frac{2x^2 y^5}{7z^9} dy dx dz = \frac{7}{5}$$

$$E(Y) = \int_1^2 \int_0^z \int_z^{2z} y \frac{2x^2 y^5}{7z^9} dy dx dz = \frac{127}{49}$$

$$E(Y^2) = \int_1^2 \int_0^z \int_z^{2z} y^2 \frac{2x^2 y^5}{7z^9} dy dx dz = \frac{85}{12}$$

$$Var(X) = \frac{7}{5} - \left(\frac{9}{8} \right)^2 = \frac{43}{320}$$

$$Var(Y) = \frac{85}{12} - \left(\frac{127}{49}\right)^2 = \frac{10537}{28812}$$

$$E(XY) = \int_1^2 \int_0^z \int_z^{2z} xy \frac{2x^2 y^5}{7z^9} dy dx dz = \frac{127}{42}$$

$$Cov(X, Y) = \frac{127}{42} - \frac{9}{8} \frac{127}{49} = \frac{127}{1176}$$

Пользуясь полученными результатами посчитаем значение корреляции:

$$Corr(X, Y) = \frac{\frac{127}{1176}}{\sqrt{\frac{43}{320} \frac{10537}{28812}}} \approx 0.487$$

Таким образом, **мы можем сделать очень важный вывод**. Несмотря на то, что урожай огурцов и картошки никак не связаны при известном уровне осадков (в частности $Corr(X, Y|Z = z) = 0, \forall z \in [1, 2]$), со статистической точки зрения эти случайные величины являются зависимыми. Интуитивно это связано с тем, что и на урожай огурцов и на урожай картошки влияет общий фактор - количество выпавших осадков. Поэтому, например, если урожай огурцов оказался большим, то, скорее всего, осадки были обильными, а значит большим может оказаться и урожай картошки.

Ситуация, когда между двумя случайными величинами существуют корреляция, но она не обусловлена непосредственным влиянием одного явления на другое (а, например, обусловлена, как в данном случае, влиянием третьего фактора), называется **ложной корреляцией**.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.