

Наиболее вероятное значение Бинома

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Классические дискретные распределения (/Topics/Details?id=39)

Раздел

Биномиальное распределение и распределение Бернулли (/SubTopics/Details?id=135)

Дата публикации

16.09.2018

Дата последней правки

05.10.2019

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★

Условие

Найдите наиболее вероятное значение (может быть несколько), которое принимает случайная величина $X \sim B(n, p)$. То есть следует найти такое значение k , что $P(X = k) \geq P(X = t), \forall t \in \{1, \dots, n\}$.
Найдите наиболее вероятное значение для $X \sim B(10, 0.8)$.

Решение

Обозначим через k^* наиболее вероятное значение, принимаемое случайной величиной X . Рассмотрим следующие равенства:

$$\frac{P(X = k^* + 1)}{P(X = k^*)} = \frac{C_n^{k^*+1} p^{k^*+1} (1-p)^{n-k^*-1}}{C_n^{k^*} p^{k^*} (1-p)^{n-k^*}} = \frac{n - k^*}{k^* + 1} \frac{p}{1-p}$$

$$\frac{P(X = k^* - 1)}{P(X = k^*)} = \frac{C_n^{k^*-1} p^{k^*-1} (1-p)^{n-k^*+1}}{C_n^{k^*} p^{k^*} (1-p)^{n-k^*}} = \frac{k^* (1-p)}{p(n - k^* + 1)}$$

Нетрудно показать, что при $n \geq k$ первое из этих равенств не возрастает по k , а второе - не убывает по k . Следовательно, вероятность может достигать максимума лишь в точках, принадлежащих одному непрерывному интервалу. Каждое из входящих в этот интервал значений k^* должно быть целым числом и

удовлетворять неравенствам следующей системы (так как значения на 1 больше и на 1 меньше чем k^* не должны быть более вероятными чем k^*):

$$\begin{cases} \frac{n-k^*}{k^*+1} \frac{p}{1-p} \leq 1 \\ \frac{k^*(1-p)}{p(n-k^*+1)} \leq 1 \end{cases}$$

Решая получаем ответ $np + p - 1 \leq k^* \leq np + p$. В соответствии с чем можно обозначить множество наиболее вероятных значений $K^* = \{k^* \in N : np + p - 1 \leq k^* \leq np + p\}$.

Теперь найдем наиболее вероятное значение для $X \sim (10, 0.8)$. Получаем неравенство $10 * 0.8 + 0.8 \geq k^* \geq 10 * 0.8 + 0.8 - 1$, откуда $k^* = 8$.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.