

Производство кваса

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Доверительные интервалы (/Topics/Details?id=33)

Раздел

Доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии в случае нормальной выборки (/SubTopics/Details?id=115)

Дата публикации

15.01.2022

Дата последней правки

07.02.2023

Последний внесивший правки

sobodv

Рейтинг



Условие

Лаврентий открыл завод по производству кваса. Объем (в литрах) производимого за день кваса является нормальной случайной величиной. Цена производства литра кваса неизменна и равняется 5 рублям. Весь выпускаемый квас Лаврентий продает в тот же день по соответствующей цене. Также, каждый день Лаврентий несет непредвиденные расходы, не зависящие от объемов выпуска кваса. Эти расходы являются нормальной случайной величиной.

Лаврентий сформировал выборку, содержащую информацию об объемах выпущенного кваса и непредвиденных расходах. Данная информация агрегирована в таблице:

Непредвиденные расходы	Выпуск
100	110
80	100
120	90
90	150
110	100

Помогите Лаврентию найти реализацию 99 процентного доверительного интервала:

- Ожидаемой выручки, если стандартное отклонение объема производимого кваса равняется 5.
- Дисперсии выручки, если ожидаемый объем производимого кваса равняется 100.
- Ожидаемой выручки.
- Дисперсии выручки.
- Ожидания прибыли, если дисперсия объема производимого кваса равняется 25, а дисперсия непредвиденных расходов - 100.
- Ожидаемой прибыли.
- Отношения дисперсии выручки к дисперсии неожиданных расходов.

Решение

1. Через $K = (K_1, \dots, K_n)$ обозначим выборку из объемов выпущенного Лаврентием кваса. Обратим внимание, что выборку из выручек можно сформировать как $X = 5K$. В результате ее реализация будет иметь вид:

$$x = 5k = 5 \times (110, 100, 90, 150, 100) = (550, 500, 450, 750, 500)$$

Поскольку $K_1 \sim \mathcal{N}(\mu_K, 5^2)$, то по свойствам нормального распределения получаем, что:

$$X_1 = 5K_1 \sim \mathcal{N}(5\mu_K, 5^2 \times 5^2) = \mathcal{N}(\mu_X, 625)$$

Поскольку необходимо найти реализацию 99 процентного доверительного интервала, то воспользуемся квантилью стандартного нормального распределения, которую можно найти по таблице стандартного нормального распределения $z_{0.995} \approx 2.58$.

Рассчитаем реализацию выборочно среднего:

$$\bar{x}_5 = \frac{550 + 500 + 450 + 750 + 500}{5} = 550$$

Используя формулу для доверительного интервала математического ожидания для выборки из нормального распределения при известной дисперсии получаем искомую реализацию:

$$\left[550 - 2.58\sqrt{\frac{625}{5}}, 550 + 2.58\sqrt{\frac{625}{5}} \right] \approx [521.2, 578.8]$$

2. Обратим внимание, что $X_1 \sim \mathcal{N}(500, \sigma_X^2)$. При помощи таблицы Хи-квадрат распределения найдем необходимые квантили: $\chi_{5,0.005}^2 \approx 0.41$ и $\chi_{5,0.995}^2 \approx 16.75$. Пользуясь данными квантилями и формулой для доверительного интервала дисперсии нормальной выборки с известным математическим ожиданием получаем реализацию 99 процентного доверительного интервала для σ_X^2 :

$$\left[\frac{(550 - 500)^2 + (500 - 500)^2 + (450 - 500)^2 + (750 - 500)^2 + (500 - 500)^2}{16.75}, \frac{(550 - 500)^2 + (500 - 500)^2 + (450 - 500)^2 + (750 - 500)^2 + (500 - 500)^2}{0.41} \right] \approx$$

3. Поскольку в данном случае дисперсия выручки неизвестна, то вместо нее для построения доверительного интервала необходимо воспользоваться исправленной выборочной дисперсией:

$$\hat{\sigma}_X^2(x) = \frac{(550 - 550)^2 + (500 - 550)^2 + (450 - 550)^2 + (750 - 550)^2 + (500 - 550)^2}{5 - 1} = 13750$$

Необходимая квантиль имеет равняется $t_{5-1,0.995} \approx 4.6$. В результате применения формулы для доверительного интервала математического ожидания наблюдения из выборки из нормального распределения с неизвестной дисперсией получаем:

$$\left[550 - 4.6\sqrt{\frac{13750}{5}}, 550 + 4.6\sqrt{\frac{13750}{5}} \right] \approx [308.8, 791.2]$$

4. Поскольку в данном случае вместо математического ожидания используется выборочное среднее, то необходимо использовать квантили $\chi_{5-1,0.005}^2 \approx 0.21$ и $\chi_{5-1,0.995}^2 \approx 14.86$. Применяя формулу для доверительного интервала дисперсии наблюдения из выборки из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием получаем:

$$\left[\frac{(550 - 550)^2 + (500 - 550)^2 + (450 - 550)^2 + (750 - 550)^2 + (500 - 550)^2}{14.86}, \frac{(550 - 550)^2 + (500 - 550)^2 + (450 - 550)^2 + (750 - 550)^2 + (500 - 550)^2}{0.21} \right] \approx$$

5. Обратим внимание, что прибыль может быть рассчитана как разность выручки X и непредвиденных расходов Y . Следовательно, ожидаемая прибыль равна разнице математических ожиданий выручки и непредвиденных расходов.

Поскольку дисперсии известны, то нам понадобится квантиль стандартного нормального распределения $z_{0.995} \approx 2.58$. Также, обратим внимание, что

$$\bar{y}_5 = \frac{100 + 80 + 120 + 90 + 110}{5} = 100$$

Применяя формулу для разницы математических ожиданий наблюдений из независимых нормальных выборок с известными дисперсиями получаем искомую реализацию:

$$\left[550 - 100 - 2.58\sqrt{\frac{625}{5} + \frac{100}{5}}, 550 - 100 + 2.58\sqrt{\frac{625}{5} + \frac{100}{5}} \right] \approx [418.93, 481.07]$$

6. Данный пункт отличается от предыдущего отсутствием информации о дисперсиях. Обратим внимание, что поскольку X и Y независимы и состоят из нормально распределенных наблюдений, то $X - Y$ также будет выборкой (прибылей) из нормального распределения с реализацией:

$$x - y = (550, 500, 450, 750, 500) - (100, 80, 120, 90, 110) = (450, 420, 330, 660, 390)$$

Во-первых, нам понадобится квантиль $t_{5-1,0.995} \approx 4.6$. Во-вторых, необходимо рассчитывать реализацию исправленной выборочной дисперсии прибыли:

$$\begin{aligned} \overline{x - y}_5 &= \bar{x}_5 - \bar{y}_5 = 550 - 100 = 450 \\ \hat{\sigma}_{X-Y}^2(x - y) &= \frac{(450 - 450)^2 + (450 - 420)^2 + (330 - 450)^2 + (660 - 450)^2 + (390 - 450)^2}{5 - 1} = 15750 \end{aligned}$$

Применяя формулу для разницы математических ожиданий для выборок, разница которых дает выборку из нормального распределения, получаем искомую реализацию:

$$\left[450 - 4.6\sqrt{\frac{15750}{5}}, 450 + 4.6\sqrt{\frac{15750}{5}} \right] \approx [191.8, 708.2]$$

7. Поскольку математические ожидания в данном случае нам неизвестны, то необходимо воспользоваться квантилями $F_{5-1,5-1}^{(0.995)} \approx 23.155$ и $F_{5-1,5-1}^{(0.005)} \approx 0.043$. Кроме того, рассчитаем реализацию исправленной выборочной дисперсии по выборке из непредвиденных расходов:

100, 80, 120, 90, 110

$$\hat{\sigma}_Y^2(y) = \frac{(100 - 100)^2 + (80 - 100)^2 + (120 - 100)^2 + (90 - 100)^2 + (110 - 100)^2}{5 - 1} = 250$$

Применяя формулу для отношения дисперсий наблюдения из независимых выборок из нормального распределения получаем реализацию искомого доверительного интервала:

$$\left[\frac{13750}{250} \times 0.043, \frac{13750}{250} \times 23.155 \right] = [2.365, 1273.525]$$

[Показать решение](#)

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.
