Неожиданная полезность

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Дискретные случайные величины (/Topics/Details?id=7)
Раздел
Условное математическое ожидание и метод первого шага (/SubTopics/Details?id=44)
Дата публикации
20.09.2021
Дата последней правки
26.09.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

Лаврентий играет в лотерею. Выигрыш в этой лотерее является случайной величиной X с математическим ожиданием 5. Распределение выигрышей задано следующей таблицей:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 10\theta & 10 \\ P(X=x) & 0.3-\theta & 0.3+\theta & 0.4 \end{bmatrix}$$

1. Найдите значение параметра θ и запишите таблицу распределения с учетом численного значения соответствующего параметра.

2. Лаврентий получает полезность от выигрыша $u(X)=\alpha X^2+5\alpha$, где $\alpha \in R$. Найдите параметр α, если известно, что ожидаемая полезность $E(u(X))$ оказалась равна 94.

3. Найдите ожидаемую полезность, при условии, что выигрыш оказался положительным.

4. Найдите дисперсию выигрыша, при условии, что выигрыш оказался положительным.

5. Найдите дисперсию полезности, при условии, что выигрыш оказался положительным.

Решение

1. Из условия известно, что:

$$E(X)=5$$

Кроме того, математическое ожидание можно расписать как:

$$E(X)=(0.3-\theta)\times 0+(0.3+\theta)\times(10\theta)+0.4\times 10=10\theta^2+3\theta+4$$

Объединяя оба этих равенства получаем:

$$10\theta^2+3\theta+4=5$$

Решая соответствующе квадратное уравнение для θ получаем, что $\theta\in\{-0.5,0.2\}$. Решение $\theta=-0.5$ не подходит, поскольку в таком случае вероятность $P(X=10\theta)$ окажется отрицательной, чего быть не может. Следовательно, подходит лишь решение $\theta=0.2$. При соответствующем значении параметра таблица распределения случайной величины X примет вид:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 2 & 10 \\ P(X=x) & 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

2. Для начала найдем второй начальный момент:

$$E(X^2)=0.1\times 0^2+0.5\times 2^2+0.4\times 10^2=42$$

Подставляя данный результат в выражение для ожидаемой полезности получаем:

$$E(u(X))=E(\alpha X^2+5\alpha)=\alpha E(X^2)+5\alpha=\alpha\times 42+5\alpha=94$$

Решая данное равенство для α получаем, что $\alpha=2$. Для удобства запишем полученное выражение для полезности:

$$u(X)=2X^2+10$$

3. Необходимо найти $E(u(X)|X>0)$. Для этого, сперва, удобно найти распределение $(X|X>0)$:

$$P(X=2|X>0)=\frac{P(X=2)}{P(X=2)+P(X=10)}=\frac{0.5}{0.5+0.4}=\frac{5}{9}$$

$$P(X=5|X>0)=\frac{P(X=5)}{P(X=2)+P(X=10)}=\frac{0.4}{0.5+0.4}=\frac{4}{9}$$

Теперь рассчитаем искомое математическое ожидание:

$$E(u(X)|X>0)=P(X=2|X>0)\times u(2)+P(X=10|X>0)\times u(10)=$$

$$=\frac{5}{9}\times(2\times 2^2+10)+\frac{4}{9}\times(2\times 10^2+10)=\frac{310}{3}\approx 103.33$$

4. Последовательно рассчитаем условные моменты:

$$E(X|X>0)=P(X=2|X>0)\times 2+P(X=10|X>0)\times 10=\frac{5}{9}\times 2+\frac{4}{9}\times 10=\frac{50}{9}\approx 5.56$$

$$E(X^2|X>0)=P(X=2|X>0)\times 2^2+P(X=10|X>0)\times 10^2=\frac{5}{9}\times 2^2+\frac{4}{9}\times 10^2=\frac{140}{3}\approx 46.67$$

Воспользуемся посчитанными условными моментами для расчета условной дисперсии:

$$Var(X|X>0)=E(X^2|X>0)-E(X|X>0)^2=\frac{140}{3}-\left(\frac{50}{9}\right)^2=\frac{1280}{81}\approx 15.8$$

5. Возможны как минимум два подхода к решению данной задачи. В соответствии с первым из них получаем:

$$E(u(X)^2|X>0)=P(X=2|X>0)\times u(2)^2+P(X=10|X>0)\times u(10)^2=$$

$$=\frac{5}{9}\times(2\times 2^2+10)^2+\frac{4}{9}\times(2\times 10^2+10)^2=19780$$

$$Var(u(X)|X>0)=E(u(X)^2|X>0)-E(u(X)|X>0)^2=19780-\left(\frac{310}{3}\right)^2\approx 9102.2$$

Второй подход предполагает использование свойств дисперсии:

$$Var(u(X)|X>0)=Var(2X^2+10|X>0)=4Var(X^2|X>0)=4\left(E(X^4|X>0)-E(X^2|X>0)^2\right)=$$

$$=4\left(\frac{5}{9}\times 2^4+\frac{4}{9}\times 10^4-\left(\frac{140}{3}\right)^2\right)\approx 9102.2$$

Проверка в R

```
n <- 100000
x <- c(0, 2, 10)
p <- c(0.1, 0.5, 0.4)
s <- sample(x, n, replace = TRUE, prob = p)
u_s <- 2 * s ^ 2 + 10
# пункт 3
mean(u_s[s > 0])
# пункт 4
var(s[s > 0])
# пункт 5
var(u_s[s > 0])
```

Показать решение