

Скрытая камера

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Классические непрерывные распределения (/Topics/Details?id=11)

Раздел

Равномерное распределение (/SubTopics/Details?id=59)

Дата публикации

30.09.2019

Дата последней правки

01.11.2021

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★☆☆

Условие

На дороге длиной в 300 километров стоит сотрудник государственной автоинспекции и останавливает автомобилистов, превысивших допустимую скорость движения (не более 60 километров в час). Каждый день сотрудник становится с равной вероятностью в любую точку на данной дороге.

Примечание: Если автомобиль начал движение со скоростью v километров в час и постоянным ускорением α километров в час, то за T часов он преодолеет дистанцию в $vT + \frac{\alpha T^2}{2}$ километров. Например, если автомобиль едет со скоростью 25 километров в час с постоянным ускорением в 15 километров в час, то за 3 часа он проедет $25 * 3 + \frac{15 * 3^2}{2} = 142.5$ километра. При этом к концу третьего часа скорость данного автомобилиста составит $25 + 15 * 3 = 70$ километров в час.

1. Автомобилист начал ехать по дороге со скоростью 50 километров в час с постоянным (равномерным) ускорением 5 километров в час. С какой вероятностью автомобилист будет оштрафован?
2. Одновременно с автомобилистом из предыдущего номера выехал еще один со скоростью 30 километров в час и постоянным ускорением в 10 километров в час. С какой вероятностью хотя бы один из этих двух автомобилистов будет оштрафован?
3. С какой вероятностью второй автомобилист будет оштрафован, при условии, что был оштрафован первый автомобилист?
4. Третий автомобилист едет со скоростью 40 километров в час и постоянным ускорением α . При каком ускорении вероятность получить штраф за превышение скорости окажется равной 0.5?
5. Повторите первый пункт учитывая, что сотрудников ГАИ станет $N = 2$. При этом предположим, что штраф сотрудником ГАИ выписывается автоматически без остановки автомобиля.

Решение

1. Автомобилист достигнет скорости в 60 километров в час за $\frac{60-50}{5} = 2$ часа. На протяжении этого времени его средняя скорость составит 55 километров в час, а значит он проедет $55 * 2 = 110$ километров. Альтернативно, расчет можно осуществить как $\int_0^2 (50 + 5t) dt = 110$. Следовательно, вероятность того, что водитель будет оштрафован, равняется вероятности того, что сотрудники ГАИ будут стоять между 110 и 300 километрами трассы.

Обозначим через X случайную величину - километр, на котором стоял сотрудник ГАИ, со стороны точки, с которой въехал автомобиль:

$$P(X > 110) = 1 - P(X < 110) = 1 - \frac{110}{300} = \frac{19}{30}$$

2. Второй автомобилист превысит скорость через 3 часа, за это время проехав $30 * 3 + \frac{10*3^2}{2} = 135$ километров. А значит вероятность получить штраф для него составит $\frac{300-135}{300} = \frac{11}{20}$. Очевидно, что если оштрафуют второго автомобилиста, то оштрафуют и первого, поскольку он превысил скорость раньше. Следовательно, вероятность штрафа для хотя бы одного автомобилиста будет равняться вероятности штрафа для первого водителя, то есть $\frac{19}{30}$.

3. Если первый автомобилист был оштрафован, то это означает, что сотрудник ГАИ стоял между 110 и 300 километрами трассы. Следовательно, необходимо рассчитать следующую условную вероятность:

$$\begin{aligned} P(X > 135 | X > 110) &= \frac{P((X > 135) \cap (X > 110))}{P(X > 110)} = \frac{P(X > 135)}{P(X > 110)} = \\ &= \frac{1 - \frac{135}{300}}{1 - \frac{110}{300}} = \frac{33}{38} \end{aligned}$$

4. Автомобилист превысит скорость через $\frac{60-40}{\alpha} = \frac{20}{\alpha}$ часов. За это время он преодолеет дистанцию $40 * \frac{20}{\alpha} + \frac{\alpha \left(\frac{20}{\alpha}\right)^2}{2}$ километров. Значит, необходимо решить следующее равенство:

$$P\left(X > 40 * \frac{20}{\alpha} + \frac{\alpha \left(\frac{20}{\alpha}\right)^2}{2}\right) = \frac{300 - 40 * \frac{20}{\alpha} - \frac{\alpha \left(\frac{20}{\alpha}\right)^2}{2}}{300} = 0.5$$

Решая получаем $\alpha \approx 6.666666666$.

5. Воспользуемся формулой объединения событий и через Y обозначим местоположение второго сотрудника ГАИ:

$$P((X > 110) \cup (Y > 110)) = P(X > 110) + P(Y > 110) - P(X > 110)P(Y > 110) = \frac{19}{30} + \frac{19}{30} - \left(\frac{19}{30}\right)^2 = \frac{779}{900}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.