Сталкер и тайники с артефактами

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические дискретные распределения (/Topics/Details?id=39)
Раздел
Биномиальное распределение и распределение Бернулли (/SubTopics/Details?id=135)
Дата публикации
26.09.2019
Дата последней правки
05.10.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

У сталкера есть карта с местоположением n тайников, в каждом из которых, с вероятностью $p \in [0,1]$, будет найден артефакт (один), где p - параметр, отражающий качество оборудования, помогающего в поисках артефактов. Также, в каждом из тайников сталкера может поджидать опасность. Вероятность столкнуться и при этом совладать с опасностью составляет $\beta \in [0,1]$, где β - параметр, отражающий качество экипировки сталкера. Лишь совладав с опасностью он может забрать артефакт из тайника. Сталкер прекращает поиск артефактов после того, как осмотрит все тайники либо после того, как не сможет совладать с поджидавшей его в тайнике

Примечание: досчитывать до конца ответы не следует, достаточно лишь подставить все числа в формулы, при этом сочетания $C_{t_1}^{t_2}$ раскрывать не нужно, достаточно лишь указать соответствующие t_1 и t_2 числа.

1. С какой вероятностью сталкер не найдет **ни одного** артефакта, если $\beta = 1$, $p = 0.95$ и $n = 100$?

2. С какой вероятностью сталкер найдет **менее** 98 артефактов, если $\beta = 1$, $p = 0.95$ и $n = 100$? Как изменится ответ если станет известно, что сталкер нашел не менее одного артефакта?

3. С какой вероятностью сталкер найдет **менее** 98 артефактов, если $\beta = 0.9$, $p = 1$ и $n = \infty$? Как изменится ответ если станет известно, что сталкер нашел не менее одного артефакта? **Подсказка**: используйте оператор суммирования, а затем рассмотрите сумму членов геометрической прогрессии (https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=f2dcda11720f1f7797d7de7d83124b5a).

4*. С какой вероятностью сталкер найдет **ровно** 98 артефактов, если $\beta = 0.9$, $p = 0.95$ и $n = \infty$?

5. С какой вероятностью сталкер найдет **не менее** 50 артефактов, если $\beta = 0.9$, $p = 1$ и $n = 100$?

6. **Предположим**, что сталкер решил прекратить поиски после того, как найдет 10 артефактов. С какой вероятностью сталкер осмотрит **ровно** 15 тайников, прежде, чем прекратит поиски, если $\beta = 1$, $p = 0.95$ и $n = 100$?

7. **Предположим**, что сталкер решил прекратить поиски после того, как найдет 10 артефактов. найдите наиболее вероятное число тайников, которые осмотрит сталкер при $\beta = 1$, $p = 0.95$ и $n = 100$.

Решение

1. Обозначим через B событие - сталкер не нашел ни одного артефакта. Нетрудно догадаться, что:

$$P(B) = (1 - 0.95)^{100} \approx 0$$

2. Введем событие A - сталкер нашел менее 98 артефактов. Используя биномиальное распределение получаем ответ:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (P(X = 98) + P(X = 99) + P(X = 100)) =$$
$$= 1 - C_{100}^{98} 0.95^{98}(1 - 0.95)^2 - C_{100}^{99} 0.95^{99}(1 - 0.95)^1 - C_{100}^{100} 0.95^{100}(1 - 0.95)^0 \approx 0.88$$

Теперь рассчитаем условную вероятность:

$$P(A|\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}|\overline{B}) = 1 - \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A})}{P(\overline{B})} =$$
$$= 1 - \frac{C_{100}^{98} 0.95^{98}(1 - 0.95)^2 + C_{100}^{99} 0.95^{99}(1 - 0.95)^1 + C_{100}^{100} 0.95^{100}(1 - 0.95)^0}{1 - (1 - 0.95)^{100}} \approx 0.88$$

3. Используя геометрическое распределение имеем:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{97} 0.9^i (1 - 0.9) = (1 - 0.9) \sum_{i=0}^{97} 0.9^i \approx 0.999967$$

$$P(A|\overline{B}) = 1 - \frac{P(\overline{A})}{P(\overline{B})} = 1 - \frac{1 - 0.999967}{1 - (1 - 0.9)} \approx 0.999963$$

Нетрудно догадаться, что при $n = 100$ ответ не изменится.

4. Обозначим через B_k событие - сталкеру удавалось избегать опасности ровно k раз подряд. Очевидно, что события B_{k_1} и B_{k_2} не совместны для $k_1 \neq k_2$. Через $D_{(k_1, k_2)}$ обозначим событие - в k_1 из k_2 тайниках, пройденных сталкером, обнаружились артефакты. Суммируя вероятности соответствующих событий получаем ответ (https://www.wolframalpha.com/input/?i=sum+%28i+choose+98%29*0.95%5E%2898%29%281-0.95%29%5E%28i-98%29%280.9%5E%28i-1%29%29%281-0.9%29%2C+i%3D1+to+9999999)::

$$P(A)=\sum_{i=98}^{\infty}P(B_i\cap D_{(98,i)})=\sum_{i=98}^{\infty}P(B_i)P(D_{(98,i)}|B_i)=$$

$$=\sum_{i=98}^{\infty}\left(0.9^{i-1}(1-0.9)\right)\left(C_i^{98}(0.95)^{98}(1-0.95)^{i-98}\right)\approx 2.281*10^{-6}$$

5. Через C обозначим событие - сталкер нашел не менее 50 артефактов. Нетрудно догадаться, что:

$$P(C)=\sum_{i=50}^{99}0.9^i(1-0.9)+0.9^{100}\approx 0.00515$$

6. Обозначим рассматриваемое событие через G, которое можно описать как - сталкер собрал 10-й артефакт в 15-м тайнике. Вследствие использования отрицательного биномиального распределения имеем:

$$P(G)=\left(C_{14}^{9}0.95^9(1-0.95)^5\right)*0.95=C_{14}^{9}0.95^{10}(1-0.95)^5$$

7. Рассмотрим отношение вероятностей при количестве осмотренных тайников x и $x+1$:

$$\frac{C_x^{10}0.95^{10}(1-0.95)^{x+1-10}}{C_{x-1}^{10}0.95^{10}(1-0.95)^{x-10}}=0.05\frac{x}{x-10}$$

Нетрудно заметить, что данное отношение меньше 1 при $x>\frac{200}{19}$ и больше 1 при $x<\frac{200}{19}$. Следовательно, существует единственный максимум по x. Причем, поскольку данное отношение убывает по x, то получаем максимум в точке $x=10$. Также, ответ очевиден исходя из того, что при $x=10$ вероятность превышает 0.5.

Показать решение