Яблочное дерево

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические дискретные распределения (/Topics/Details?id=39)
Раздел
Распределение Пуассона (/SubTopics/Details?id=136)
Дата публикации
07.10.2019
Дата последней правки
07.10.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

В начале дня на дереве росли 500 яблок. В ясную погоду вероятность падения с дерева для каждого яблока составляет 0.01, а в пасмурную - 0.05. Яблоки падают с деревьев независимо друг от друга. Погода будет ясной с вероятностью 0.6.

1. Найдите вероятность того, что к концу дня на дереве останется 6 яблок, при условии, что погода была ясной.

2. Найдите вероятность того, что к концу дня на дереве останется 6 яблок.

3. Вычислите наиболее вероятное число (**моду)** упавших за день яблок, при условии, что погода была ясной.

4. Рассмотрим отдельно взятое яблоко на дереве в ясную погоду. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, принимающей значение 1, если яблоко за день упадет и 0 - в противном случае.

5. Рассчитайте математическое ожидание и дисперсию количества упавших за день яблок, при условии, что погода была ясной.

6. Рассчитайте математическое ожидание количества упавших за день яблок.

7. Над деревом был произведен биологический эксперимент, в результате которого вероятность падения яблок перестала зависеть от погодных условий и всегда составляет 0.01. Найдите вероятность того, что с дерева упадет ровно 6 яблок, используя аппроксимацию Пуассона. Вычислите погрешность аппроксимации и укажите максимальное значение, которому она может быть равна для вероятности падения произвольного числа яблок.

8. Найдите наиболее вероятное число, математическое ожидание и дисперсию количества упавших яблок используя аппроксимацию Пуассона. Как изменится наиболее вероятное число упавших яблок, если вероятность падения снизится до 0.005?

9. Повторите предыдущий пункт учитывая, что вероятности падения яблок все же зависят от погодных условий.

Решение

1. Обозначим через X случайную величину - количество упавших за день яблок. Через A обозначим событие - погода была ясной. Тогда через $X_A = X|A$ будем обозначать количество упавших за день яблок при условии, что он был ясным. Заметим, что поскольку все яблоки падают равновероятно и независимо друг от друга, то X_A будет иметь биномиальное распределение с параметрами $n = 500$ и $p = 0.01$. Рассчитаем искомую вероятность:

$$P(X_A = 6) = P(X = 6|A) = C_{500}^{6} 0.01^6 0.99^{494} \approx 0.14696$$

2. Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(X = 6|A)P(A) + P(X = 6|\overline{A})P(\overline{A}) = C_{500}^{6} 0.01^6 0.99^{494} * 0.6 + C_{500}^{6} 0.05^6 0.05^{494} * 0.4 \approx 0.088$$

3. В соответствии с формулой наиболее вероятное значение должно попасть в следующий интервал:

$500 * 0.01 + 0.01 - 1 \leq X_A^{\mathrm{mod}} \leq 500 * 0.01 + 0.01$

Учитывая, что X_A^{mod} принимает только целочисленные значения, получаем, что $X_A^{\mathrm{mod}} = 5$.

4. Обозначим соответствующую случайную величину через $(Y|A) = Y^A$. Она имеет распределение Бернулли с параметром $p = 0.01$. Откуда получаем:

$$E\left(Y^A\right) = P(Y^A = 1) * 1 + P(Y^A = 0) * 0 = 0.01 * 1 + (1 - 0.01) * 0 = 0.01$$

Перед началом расчета дисперсии заметим, что распределение случайной величины $\left(Y^A\right)^2$ будет совпадать с распределением случайной величины Y. Откуда получаем:

$$Var(Y^A) = E\left(\left(Y^A\right)^2\right) - E(Y)^2 = \left(P\left(Y^A\right)^2 = 1\right) * 1 + P\left(\left(Y^A\right)^2 = 0\right) * 0 - 0.01^2 = 0.01 - 0.01^2 = 0.0099$$

5. Обозначим через Y_i^A случайную величину, аналогичную рассмотренной в предыдущем пункте, относящуюся к i-му яблоку, где $i \in \{1, \cdots, 500\}$. Заметим, что $X = Y_1^A + \cdots + Y_{500}^A$. Откуда получаем значение математического ожидания:

$$E(X^A) = E(Y_1^A + \cdots + Y_{500}^A) = E(Y_1^A) + \cdots + E(Y_{500}^A) = 0.01 + \cdots + 0.01 = 0.01 * 500 = 5$$

Пользуясь независимостью рассматриваемых случайных величин получаем выражение для дисперсии:

$$Var(X^A) = Var(Y_1^A + \cdots + Y_{500}^A) = Var(Y_1^A) + \cdots + Var(Y_{500}^A) = 0.0099 + \cdots + 0.0099 = 0.0099 * 500 = 4.95$$

6. Воспользуемся аналогом формулы полной вероятности для математического ожидания:

$$E(X) = E(X|A)P(A) + E(X|\overline{A})P(\overline{A})$$

Введем обозначение $Y_i|\overline{A} = Y_i^{\overline{A}}$. Поскольку значение $E(X|A) = E(X^A)$ было найдено в предыдущем пункте, то остается лишь вычислить следующее математическое ожидание:

$$E(X|\overline{A}) = E(Y_1^{\overline{A}} + \cdots + Y_{500}^{\overline{A}}) = E(Y_1^{\overline{A}}) + \cdots + E(Y_{500}^{\overline{A}}) = 0.05 + \cdots + 0.05 = 0.05 * 500 = 25$$

7. Будем рассматривать случайную величину $Z \sim Pois(500 * 0.01)$, то есть Пуассоновскую случайную величину с параметром $\lambda = 500 * 0.01 = 5$. В результате находим искомую вероятность:

$$P(Z = 6) = e^{-5} \frac{5^6}{6!} \approx 0.146$$

Через $Z_B \sim B(500, 0.01)$ обозначим случайную величину, имеющую биномиальное распределение, позволяющее рассчитать истинные (без аппроксимации) вероятности падения того или иного числа яблок с дерева. Ошибка аппроксимации в данном случае будет следующей:

$$|P(Z=6) - P(Z_B=6)| = |e^{-6}\frac{6^3}{3!} - C_{500}^{6}0.01^{6}0.99^{494}| \approx 0.0007$$

Пользуясь формулой $\min(p, np^2)$ находим, что максимальная погрешность аппроксимации может составить $\min(0.01, 0.01^2 * 500) = 0.01$.

8. Наиболее вероятно падение 5 или $5-1$ яблок.

Если вероятность снизится до 0.005, то при аппроксимации мы получим $\lambda = 500 * 0.005 = 2.5$. А значит наиболее вероятные значения будут лежать между 2.5 и $2.5 - 1 = 1.5$. Следовательно, наиболее вероятным окажется падение двух яблок, так как $2.5 \geq 2 \geq 1.5$.

Пользуясь формулами получаем, что математическое ожидание и дисперсия совпадают $E(Z) = Var(Z) = \lambda = 5$.

9. Рассчитаем соответствующие значения:

$$E(Z) = E(Z|A)P(A) + E(Z|\overline{A})P(\overline{A}) = (500 * 0.01) * 0.6 + (500 * 0.05) * 0.4 = 13$$

$$\begin{gathered}E(Z^2) = E(Z^2|A)P(A) + E(Z^2|\overline{A})P(\overline{A}) = \\ = \left(E(Z|A)^2 + Var(Z|A)\right)P(A) + \left(E(Z|\overline{A})^2 + Var(Z|\overline{A})\right)P(\overline{A}) = \\ = (5^2 + 5) * 0.6 + (25^2 + 25) * 0.4 = 278\end{gathered}$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 278 - 13^2 = 109$$

Показать решение