Треугольные моменты

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Метод моментов (/Topics/Details?id=32)
Раздел
Введение в ММ (/SubTopics/Details?id=112)
Дата публикации
11.03.2020
Дата последней правки
19.08.2022
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

Пусть $a \in R$, и $a < c < b$. Имеется выборка $X = (X_1, \cdots X_n)$. Случайная величина X_1 имеет распределение со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \leq a \\ \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, \text{если } a < x \leq c \\ \frac{2}{b-a}, \text{если } x = c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, \text{если } c < x \leq b \\ 0, \text{если } b < x \end{cases}$$

Примечание: в данной задаче при проверке состоятельности оценок нельзя просто воспользоваться свойством, согласно которому оценки, полученные при помощи метода моментов, являются состоятельными. Все свойства следует проверить вручную.

1. Найдите первый и второй начальные моменты X_1. **Подсказка**: для интегрирования удобно воспользоваться wolframalpha. Также, после интегрирования необходимо либо вручную, либо вновь, используя wolframalpha, упростить полученное выражение, применяя команду simplify.

2. Пусть $c = 6$ и $b = 9$. При помощи метода моментов найдите оценку $\hat{a}_1$ параметра a с помощью первого начального момента $E(X_1)$. Проверьте несмещенность и состоятельность найденной оценки. Рассчитайте MSE найденной оценки.

3. Пусть $c = 6$ и $b = 9$. Придумайте такую оценку $\hat{a}^*$ параметра a, которая будет смещенной, асимптотически несмещенной и иметь MSE на 10 больше, чем у $\hat{a}_1$ при $n = 10$. Напишите, какая из этих двух оценок более эффективная?

4. Используя базовую комбинаторику, а также свойства независимости и одинаковой распределенности элементов выборки, покажите, что:

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) = nE(X_1^2) + n(n-1)E(X_1)^2$$

Подсказка: обратите внимание, что $(X_1 + \cdots + X_n)^2 = (X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)$, а значит, при помощи комбинаторики, можно посчитать, сколько раз каждый из иксов умножается сам на себе и на другой икс, а затем, используя свойство независимости представить математическое ожидание произведения как произведение математических ожиданий, после чего, применяя одинаковую распределенность, заменить все иксы на X_1.

5. Пусть $c = 6$ и $b = 9$. При помощи метода моментов найдите оценку $\hat{a}_2$ параметра a с помощью $\frac{3}{2}E(X_1)^2 - E(X_1^2)$. Проверьте несмещенность и асимптотическую несмещенность найденной оценки. **Подсказка**: при проверке свойств воспользуйтесь результатом, полученным в предыдущем пункте.

6. Пусть $a = 3$. При помощи метода моментов найдите оценки параметров b и c.

Решение

1. Найдем соответствующие моменты:

$$E(X_1) = \int_a^c x\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}dx + \int_c^b x\frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}dx = \frac{a+b+c}{3}$$

$$E(X_1^2) = \int_a^c x^2\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}dx + \int_c^b x^2\frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}dx = \frac{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}{6}$$

$$E(X_1^3) = \int_a^c x^3 \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} dx + \int_c^b x^3 \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} dx = \frac{a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c++c^2a+c^2b+abc}{10}$$

2. Нетрудно догадаться, что:

$$E(X) = \frac{a+9+6}{3} => a = 3a - 15 => \hat{a}_1 = 3\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - 15$$

Оценка является несмещенной, поскольку:

$$E(\hat{a}_1) = 3\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - 15 = 3\frac{a+6+9}{3} - 15 = a$$

Оценка является состоятельной, так как:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{a}_1) = \lim_{n\to\infty} a = a$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{a}_1) = \lim_{n\to\infty} Var\left(3\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - 15\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n} Var(X_1) = 0$$

Поскольку найденная оценка является несмещенной, то её MSE совпадает с дисперсией, откуда:

$$MSE(\hat{a}_1) = Var(\hat{a}_1) = \frac{9}{n} Var(X_1) = \frac{9}{n}\left(\frac{a^2+6^2+9^2-6a-9a-9*6}{18}\right) = \frac{a^2-15a+63}{2n}$$

3. Рассмотрим оценку:

$$\hat{a}^* = \hat{a}_1 + \frac{\tau}{n}$$

Найдем её MSE:

$$MSE(\hat{a}^*) = E((\hat{a}_1 + \frac{\tau}{n} - a)^2) = E(\hat{a}_1^2) + \frac{\tau^2}{n^2} + a^2 + 2E(\hat{a}_1)\frac{\tau}{n} - 2E(\hat{a}_1)a - 2\frac{\tau}{n}a =$$
$$= Var(\hat{a}_1) + a^2 + \frac{\tau^2}{n^2} + a^2 + 2a\frac{\tau}{n} - 2a^2 - 2\frac{\tau}{n}a = Var(\hat{a}_1) + \frac{\tau^2}{n^2}$$

Отсюда получаем, что при $n = 10$ достаточно, чтобы:

$$\frac{\tau^2}{10^2} = 1000$$

В итоге имеем $\tau = 1000$.

4. Очевидно из подсказки.

5. Обратим внимание, что:

$$\frac{3}{2}E(X)^2 - E(X^2) = \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 - \frac{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}{6} = \frac{ab+ac+bc}{6} =$$
$$= \frac{9a+6a+9*6}{6} = 2.5a + 9$$

Отсюда получаем:

$$a = 0.4\left(\frac{3}{2}E(X)^2 - E(X^2)\right) - 1.8 = 0.6E(X)^2 - 0.4E(X^2) - 1.8$$

В итоге имеем:

$$\hat{a}_2 = 0.6\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2 - 0.4\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - 1.8$$

Полученная оценка является лишь асимптотически несмещенной, поскольку:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{a}_2) = \lim_{n\to\infty} E\left(0.6\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2 - 0.4\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - 1.8\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 0.6\frac{1}{n}E(X_1^2) + 0.6\frac{n(n-1)}{n^2}E(X_1)E(X_2) - 0.4E(X_1^2) - 1.8 = 0.6E(X_1)^2 - 0.4E(X_1^2) - 1.8 =$$

$$= 0.6\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 - 0.4\frac{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}{6} - 1.8 = a$$

6. Введем обозначения $\tau_1 = E(X)$ и $\tau_2 = \frac{3}{2}E(X)^2 - E(X^2)$, а также $\hat{\tau}_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$ и $\hat{\tau}_2 = 1.5\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$. Рассмотрим следующую систему равенств:

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{3+b+c}{3} \\ \tau_2 = \frac{3b+3c+bc}{6} \\ c \le b \\ b > 3 \end{cases}$$

Решая для b и c получаем (https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+x%3D%5Cfrac%7B3%2Bb%2Bc%7D%7B3%7D%2C+y%3D%5Cfrac%7B3b%2B3c%2Bbc%7D%7B6%7D%2C+c%3C%3Db%2C+b%3E3%2C+x%3E%3D3+for+b%2C

$$\hat{b} = \frac{3\hat{\tau}_1 - 3 + \sqrt{3}\sqrt{3\hat{\tau}_1^2 + 6\hat{\tau}_1 - 8\hat{\tau}_2 - 9}}{2}$$

$$\hat{c} = \frac{3\hat{\tau}_1 - 3 - \sqrt{3}\sqrt{3\hat{\tau}_1^2 + 6\hat{\tau}_1 - 8\hat{\tau}_2 - 9}}{2}$$

Код для проверки в R:

```
library("triangle")
#
n <- 10000
X <- rtriangle(n, a = 3, b = 9, c = 6)
#
EX <- mean(X)
EX2 <- mean(X ^ 2)
#
tau_1 <- EX
tau_2 <- 1.5 * EX ^ 2 - EX2
#
b_hat <- (3 * tau_1 - 3 + sqrt(3) * sqrt(3* tau_1 ^ 2 + 6 * tau_1 - 8 * tau_2 - 9)) / 2
c_hat <- (3 * tau_1 - 3 - sqrt(3) * sqrt(3* tau_1 ^ 2 + 6 * tau_1 - 8 * tau_2 - 9)) / 2
```

Показать решение