Статурн

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические многомерные распределения (/Topics/Details?id=19)
Раздел
Многомерное нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=87)
Дата публикации
15.01.2020
Дата последней правки
31.01.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★⯪

Условие

В далекой-далекой галактике есть планета Статурн, каждый из жителей которой является представителем одной из двух профессий: собирает дроидов или световые мечи.

Способности к сборке дроидов и световых мечей у случайно взятого статурнянина хорошо аппроксимируются двумерным нормальным вектором $V = (X, Y)$, где X и Y имеют совместное многомерное распределение с ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$ и математическим ожиданием $\mu = \begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}$.

Если житель собирает дроидов, то за каждую единицу своего навыка X он получает зарплату $\pi_X > 0$. В противном случае он конструирует световые мечи и за каждую единицу навыка Y получает $\pi_Y > 0$. То есть каждый из навыков влияет лишь на зарплату в одной из двух сфер. Каждый житель выбирает ту работу, на которой он получает больший доход. В случае равенства доходов он выбирает одну из двух профессий с равной вероятностью.

Примечание: значения, полученные в предыдущих пунктах, распространяются на последующие, если в условии пункта не сказано иного.

1. Найдите значения параметров ковариационной матрицы Σ, если известно, что дисперсия суммы навыков случайно взятого жителя равняется 49, а разницы 19. Также учтите, что $Cov\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} V\right) = 16$.

Определите, являются ли распределения навыков независимыми.

2. Вычислите значения параметров вектора μ, если известно, что мода X на 5 меньше медианы Y, а распределение суммы навыков симметрично вокруг 95. **Подсказка**: вспомните, как соотносятся мода, медиана и математическое ожидание в нормальном распределении, а также, вокруг какого значения оно симметрично при том, что по определению произвольная случайная величина Z симметрична вокруг s, если $f_Z(s+t) = f_Z(s-t)$ для любого $t \in R$.

3. Посчитайте, с какой вероятностью случайно выбранный житель окажется безразличен между обеими профессиями. Проверьте, зависит ли эта вероятность от соотношения π_X и π_Y.

4. Из соображений максимизации галактического благосостояния правительство планеты желает, чтобы 95% жителей строили дроидов и 5% занимались производством световых мечей. Допустим, что количество жителей планеты является бесконечно большим. Определите, во сколько раз π_X должно быть больше π_Y, чтобы соблюдалось данное условие. **Подсказка**: подумайте, как соотносится доля жителей, строящих дроидов, с вероятностью того, что случайно взятый индивид будет строить дроидов.

5. Пусть $\pi_X = 2$ и $\pi_Y = 1.6$. Про случайно выбранного индивида известно, что его способности к конструированию дроидов на 10% превышают способности к производству световых мечей. Определите, с какой вероятностью он собирает дроидов.

6. Пусть $\pi_X = 2$ и $\pi_Y = 1.6$. Найдите вероятность того, что случайно выбранный индивид зарабатывает менее 100 денежных единиц, если $Y = 60$ и он собирает дроидов.

Решение

1. Решаем следующую систему (https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%5E2%2By%5E2%2B2*x*y*z%3D49%2C+x%5E2%2By%5E2-2*x*y*z%3D19%2C+x%5E2-y%5E2%3D16):

$$\begin{cases} Var(X+Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 49 \\ Var(X-Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 19 \\ Cov(X+Y, X-Y) = \sigma_X^2 - \sigma_Y^2 = 16 \end{cases}$$

Из всех решений подходит лишь одно, в результате чего получаем $\sigma_X = 5$, $\sigma_Y = 3$ и $\rho = 0.5$, а значит:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 25 & 7.5 \\ 7.5 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Поскольку для нормального распределения мода, медиана и математическое ожидание совпадают, то $\mu_Y - \mu_X = 5$. Также, в силу того, что нормальное распределение симметрично вокруг своего математического ожидания, получаем $\mu_X + \mu_Y = 95$. Из этих равенств следует, что $\mu_Y = 50$ и $\mu_X = 45$. В итоге получаем, что:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 45 \\ 50 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 & 7.5 \\ 7.5 & 9 \end{bmatrix}\right)$$

3. Поскольку речь идет о непрерывной случайно величине, то независимо от π_X и π_Y получаем, что:

$$P(\pi_X X = \pi_Y Y) = P(\pi_X X - \pi_Y Y = 0) = 0$$

4. Для того, чтобы 95% жителей собирали дроидов достаточно, чтобы случайно выбранный житель собирал их с вероятностью 0.95. Отсюда получаем ограничение на соотношение π_X и π_Y:

$$P(\pi_Y Y - \pi_X X < 0) = \Phi\left(\frac{50\pi_X - 55\pi_Y}{\sqrt{25\pi_X^2 + 9\pi_Y^2 - 15\pi_X\pi_Y}}\right) = 0.95 =>$$

$$=> \frac{50\pi_X - 55\pi_Y}{\sqrt{25\pi_X^2 + 9\pi_Y^2 - 15\pi_X\pi_Y}} \approx 1.644854$$

Решая получаем, что $\pi_X \approx 1.32\pi_Y$, а значит π_X должно быть больше, приблизительно, в 1.32 раза.

5. Необходимо рассчитать вероятность:

$$P(2X - 1.6Y > 0|X = 1.1Y) = P(2X - 1.6Y > 0|X - 1.1Y = 0)$$

Очевидно, что:

$$\begin{bmatrix} 2X - 1.6Y \\ X - 1.1Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1.6 \\ 1 & -1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\mu^*, \Sigma^*\right)$$

$$\mu^* = \begin{bmatrix} 2 & -1.6 \\ 1 & -1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^* = \begin{bmatrix} 2 & -1.6 \\ 1 & -1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 7.5 \\ 7.5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1.6 & -1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75.04 & 37.34 \\ 37.34 & 19.39 \end{bmatrix}$$

Теперь найдем условное распределение:

$$E(2X - 1.6Y|X - 1.1Y = 0) = 10 + \frac{37.34}{19.39}(0 + 10) \approx 29.25735$$

$$Var(2X - 1.6Y|X - 1.1Y = 0) = 75.04 - \frac{37.34^2}{19.39} \approx 3.133$$

В итоге имеем:

$$P(2X - 1.6Y > 0|X - 1.1Y = 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - 29.25735}{\sqrt{3.133}}\right) \approx 0$$

6. Рассчитаем соответствующую вероятность:

$$P((X|Y = 60) < 50|(X|Y = 60) > 48) = \frac{P(48 < X < 50|Y = 60)}{P(X > 48|Y = 60)}$$

Найдем параметры условного распределения:

$$E(X|Y = 60) = 45 + \frac{7.5}{9}(60 - 50) = \frac{160}{3}$$

$$Var(X|Y = 60) = 25 - \frac{7.5^2}{9} = 18.75$$

В итоге получаем, что:

$$\frac{P(48 < X < 50|Y = 60)}{P(X > 48|Y = 60)} \approx \frac{\Phi\left(\frac{50-\frac{160}{3}}{\sqrt{18.75}}\right) - \Phi\left(\frac{48-\frac{160}{3}}{\sqrt{18.75}}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{48-\frac{160}{3}}{\sqrt{18.75}}\right)} = \frac{0.2207092 - 0.1090342}{1 - 0.1090342} \approx 0.125$$

Показать решение