Робошпионы

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Метод максимального правдоподобия (/Topics/Details?id=31)
Раздел
Введение в ММП (/SubTopics/Details?id=109)
Дата публикации
13.03.2020
Дата последней правки
05.03.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

Вы руководите секретной межгалактической организацией и разрабатываете роботов шпионов. Все роботы одинаковы и выполняемые ими задания однотипны. Поэтому при отправке на очередное задание робот сможет успешно с ним справится с постоянной вероятностью p.

У вас есть 100 роботов. Каждого из них вы отправляете на задания до тех пор, пока его не поймают, что происходит при каждой отправке с вероятностью $1-p$. Вы собираетесь сформировать выборку, записывая для каждого робота количество **успешно** проведенных им операций, до того, как его поймают.

1. Найдите оценку $\hat{p}$ вероятности того, что робот успешно выполнит очередное задание, при помощи метода максимального правдоподобия. Посчитайте реализацию $\hat{p}$, если $\sum\limits_{i=1}^{100} x_i = 1000$.

2. Определите, приблизительно, при каком значении p вероятность того, что оценка $\hat{p}$ отклонится от истинного значения p менее, чем на 1%, составит 0.5.

3. Проверьте, является ли оценка $\hat{p}$ состоятельной.

4. Имеется некоторая несмещенная оценка $\hat{p}^*$ параметра p, у которой $Var\left(\hat{p}^*\right) = \frac{p(1-p)}{n}$. Проверьте, является ли она эффективной и асимптотически эффективной?
Примечание: в данном случае речь идет о дисперсии ММП оценки, которую можно было бы получить, если

бы использовалась выборка, полученная за счет однократной отправки робошпионов на задания, то из распределения Бернулли.

5. Найдите асимптотическое распределение ММП оценки вероятности того, что робота рассекретят не ранее, чем на 29-м задании.

6. Найдите оценку $\hat{p}^{MM}$ вероятности того, что робот успешно выполнит очередное задание, при помощи метода моментов.

7. Предположим, что вероятность успешного выполнения роботом первого задания составляет p_1, а каждого последующего p_2. Найдите реализации оценок p_1 и p_2, полученных при помощи метода максимального правдоподобия, если реализация выборки имеет вид $x = (0, \cdots, 99)$.

Решение

1. Формализуем условие задачи. Имеется выборка $X = (X_1, \cdots, X_n)$ из геометрического распределения с параметром p. Её реализацию обозначим как $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Отсюда получаем функцию правдоподобия:

$$L\left(p; x\right) = \prod_{i=1}^{n}(1-p)p^{x_i}$$

Логарифм функции правдоподобия имеет вид:

$$\ln L\left(p; x\right) = n\ln(1-p) + \ln(p)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Максимизируем логарифм функции правдоподобия. Условия первого порядка имеют вид:

$$\frac{d\ln L\left(p; x\right)}{dp} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n}{1-p} = 0$$

Отсюда следует, что:

$$p = \frac{\overline{x}}{1+\overline{x}}, \text{где } \overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Возьмем вторую производную и проверим соблюдение условий второго порядка:

$$\frac{d^2\ln L\left(p; x\right)}{d^2p} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{p^2} - \frac{n}{(1-p)^2} < 0$$

В результате получаем:

$$\hat{p} = \frac{\overline{X}}{1+\overline{X}}$$

2. Найдем информацию Фишера:

$$I_X(p) = -E\left(\frac{d^2 \ln L\left(p; X\right)}{d^2 p}\right) = E\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{p^2} + \frac{n}{(1-p)^2}\right) = \frac{n}{p(1-p)} + \frac{n}{(1-p)^2} = \frac{n}{p(1-p)^2}$$

Отсюда получаем асимптотическое распределение:

$$\sqrt{n}\left(\hat{p} - p\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, p(1-p)^2\right)$$

При фиксированном $n = 100$ имеем:

$$(\hat{p} - p) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)^2}{100}\right)$$

Отсюда следует, что:

$$100\frac{\hat{p} - p}{p} \dot{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{100(1-p)^2}{p}\right)$$

Распишем вероятность отклонения:

$$P\left(|100\frac{\hat{p} - p}{p}| \leq 1\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{p}}{10(1-p)}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{p}}{10(1-p)}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{p}}{10(1-p)}\right) - 1 = 0.5$$

В результате имеем:

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{p}}{10(1-p)}\right) = 0.75$$

Следовательно, рассматривая квантиль соответствующего уровня, получаем:

$$\frac{\sqrt{p}}{10(1-p)} \approx 0.6744898$$

Решая получаем, что $p \approx 0.862324$.

3. В соответствии с законом больших чисел:

$$\overline{X} \xrightarrow{p} E(X_1) = \frac{p}{1-p}$$

Тогда, по теореме Слуцкого имеем:

$$\hat{p} = g(\overline{X}) = \frac{\overline{X}}{1+\overline{X}} \xrightarrow{p} g\left(\frac{p}{1-p}\right) = \frac{\frac{p}{1-p}}{1+\frac{p}{1-p}} = p$$

4. Согласно неравенству Рао-Крамера, для любой несмещенной оценки $\hat{p}^b$ параметра p соблюдается:

$$Var(\hat{p}^b) \geq \frac{p(1-p)^2}{n}$$

Поскольку данное неравенство для $\hat{p}^*$ не соблюдается строго, то нельзя утверждать, что данная оценка эффективна. Более того, рассматриваемая оценка не является асимптотически эффективной, поскольку, при любом $p \in (0, 1)$:

$$Var\left(\hat{p}^*\right) = \frac{p(1-p)}{n} > \frac{p(1-p)^2}{n}$$

5. Искомая вероятность имеет вид:

$$P(X_1 \leq 29) = 1 - p^{30}$$

В силу инвариантности ММП оценок:

$$\hat{P}(X_1) = 1 - \hat{p}^{30}$$

Обратим внимание, что:

$$\frac{dP(X_1)}{dp} = -30\hat{p}^{29}$$

Применяя дельта метод имеем:

$$\sqrt{n}\left(\hat{P}(X_1 \leq 29) - P(X_1 \leq 29)\right) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{900p^{59}(1-p)^2}{n}\right)$$

6. Обратим внимание, что:

$$E(X_1) = \frac{p}{1-p}$$

Отсюда следует, что:

$$p = \frac{E(X_1)}{1 + E(X_1)}$$

В итоге получаем:

$$\hat{p}^{MM} = \frac{\overline{X}}{1 + \overline{X}}$$

7. Поскольку все реализации кроме первой больше единицы, то функция правдоподобия имеет вид:

$$L\left(p; x\right) = (1 - p_1)\prod_{i=1}^{99} p_1(1-p_2)p_2^{x_i - 1}$$

Логарифм функции правдоподобия принимает форму:

$$\ln L\,(p;x) = \ln(1-p_1) + 100\ln(p_1) + 100\ln(1-p_2) - 100\ln(p_2) + \ln(p_2)\sum_{i=1}^{100} x_i =$$
$$= \ln(1-p_1) + 100\ln(p_1) + 100\ln(1-p_2) + 4850\ln(p_2)$$

Запишем условия первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{100}{p_1} = \frac{1}{1-p_1} \\ \frac{4850}{p_2} = \frac{100}{1-p_2} \end{cases}$$

В итоге получаем $(\hat{p}_1|X=x) = \frac{100}{101}$ и $(\hat{p}_2|X=x) = \frac{97}{99}$.

Показать решение