Байесовское оценивание параметров наблюдений из выборки Бернулли

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Байесовская статистика (/Topics/Details?id=37)
Раздел
Введение в Байесовскую статистику (/SubTopics/Details?id=131)
Дата публикации
13.06.2019
Дата последней правки
04.06.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★★★★

Условие

Пусть $X = (X_1 \ldots X_n)$ - выборка из распределения Бернулли $Ber(\theta)$, причем параметр θ является случайной величиной с неизвестным распределением. Найдите апостериорное распределение параметра θ, если априорное распределение является равномерным $U(0,1)$. Укажите реализацию 90%-го байесовского доверительного интервала для θ при $x = (1,0,1)$.

Решение

Для начала запишем выражение для функции правдоподобия:

$$L(\theta^*|x) = \prod_{i=1}^{n} (\theta^*)^{x_i} (1-\theta^*)^{1-x_i}$$

Теперь выпишем априорную функцию плотности параметра (для $\theta^* \in [0,1]$):

$$P\left(\theta = \theta^*\right) = f_\theta(\theta^*) = 1$$

Наконец, посчитаем апостериорную вероятность (для $\theta^* \in [0,1]$):

$$P\left(\theta=\theta^*|X=x\right)=f_{\theta|X=x}(\theta^*)\propto L(\theta^*|x)P\left(\theta=\theta^*\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(\theta^*)^{x_i}(1-\theta^*)^{1-x_i}*1=(\theta^*)^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta^*)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$$

Мы нашли апостериорную вероятность с точностью для константы $P(X=x)$, поэтому рассчитаем её значение:

$$P(X=x)=\int_0^1(\theta^*)^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta^*)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}d\theta^*=B\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+1,n-\sum_{i=1}^{n}x_i+1\right)$$

Таким образом, получаем следующую функцию плотности апостериорного распределения (для $\theta^*\in[0,1]$):

$$f_{\theta|X=x}(\theta^*)=\frac{(\theta^*)^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta^*)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}{B\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+1,n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+1\right)}$$

Полученная функция плотности является функцией плотности бета распределения $\mathcal{B}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+1,n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+1\right)$.

При $x=(1,0,1)$ получаем $(\theta|X=x)\sim\mathcal{B}\left(3,2\right)$. Рассчитаем квантили уровня 0.05 и 0.95 для данного распределения: $\mathcal{B}(3,2)^{0.05}\approx0.25$ и $\mathcal{B}(3,2)^{0.95}\approx0.9$. В итоге получаем реализацию 90%-го симметричного байесовского доверительного интервала:

$$(0.25,0.9)$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.
