Совместное из условного

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Совместное распределение (/Topics/Details?id=10)
Раздел
Совместное распределение непрерывных случайных величин (/SubTopics/Details?id=58)
Дата публикации
09.11.2019
Дата последней правки
03.12.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★⯪

Условие

Имеются две абсолютное непрерывные случайные величины X и Y, причем:

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{\sin(y)+\cos(y)}, \text{если } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Также, известна функция плотности Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\sin(y)+\cos(y)}{2}, \text{если } y \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

1. Рассчитайте $E(X|Y = \frac{\pi}{4})$.

2. Найдите совместную функцию плотности X и Y.

3. Вычислите корреляцию между X и Y, а также проверьте, являются ли они независимыми.

4. Посчитайте $P\left(X > \left(Y - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$ и $P\left(X > \left(Y - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)$.

5. Запишите функцию распределения, а затем функцию плотности для случайной величины $(X|X > \frac{\pi}{3})$.

6. Отыщите $E(X|Y = \frac{\pi}{4} \cap X > \frac{\pi}{3})$.

Решение

1. Воспользуемся условной функцией плотности:

$$E\left(X|Y = \frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}dx = \frac{\pi}{4}$$

2. Нетрудно догадаться, что в данном случае при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ имеем:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y=y}(x)f_Y(y) = \frac{\sin(x+y)}{\sin(y)+\cos(y)}\frac{\sin(y)+\cos(y)}{2} = \frac{\sin(x+y)}{2}$$

3. Производим следующие вычисления:

$$E(X) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\sin(x+y)}{2}dxdy = \frac{\pi}{4}$$

$$E(X^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{\sin(x+y)}{2}dxdy \approx 0.8$$

$$Var(X) \approx 0.8 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx 0.183$$

$$E(Y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{\sin(x+y)}{2}dxdy = \frac{\pi}{4}$$

$$E(Y^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\frac{\sin(x+y)}{2}dxdy \approx 0.8$$

$$Var(Y) \approx 0.8 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx 0.183$$

$$E(XY) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\frac{\sin(x+y)}{2}dxdy = \frac{\pi-2}{2}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{\pi-2}{2} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx -0.04605$$

$$Corr(X,Y) = \frac{-0.04605}{\sqrt{0.183 * 0.183}} \approx -0.25$$

Исходя из полученного значения корреляции очевидно, что данные случайные величины являются зависимыми.

4. Поскольку $\left(Y - \frac{\pi}{4}\right)^2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то рассчитаем искомую вероятность следующим образом:

$$P\left(X > \left(Y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right) = 1 - P\left(X \le \left(Y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right) =$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2} \frac{\sin(x+y)}{2} dxdy \approx 0.892$$

Во втором случае получаем пределы интегрирования из решения системы (https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+x%3C%3D%28y-pi%2F2%29%5E2%2C+x%3C%3Dpi%2F2%2C+y%3C%3D+pi%2F2%2C+x%3E%3D0%2C+y%3E%3D0):

$$\begin{cases} x \le \left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ x, y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

В итоге рассчитываем искомую вероятность:

$$P\left(X > \left(Y-\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}-\sqrt{x}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(x+y)}{2} dydx \approx 0.53915$$

5. Для начала найдем функцию распределения при $z \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$:

$$F_{X|X>\frac{\pi}{3}}(z) = P(X \le z | X > \frac{\pi}{3}) = \frac{P(\frac{\pi}{3} \le X \le z)}{P(\frac{\pi}{3} \le X)} =$$

$$= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{z} \frac{\sin(x+y)}{2} dxdy}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x+y)}{2} dxdy} = \frac{2\sin(z) - 2\cos(z) - \sqrt{3} + 1}{3 - \sqrt{3}}$$

Далее, путем дифференцирования функции распределения получаем функцию плотности:

$$f_{X|X>\frac{\pi}{3}}(z) = \begin{cases} \frac{2\sin(z)+2\cos(z)}{3-\sqrt{3}}, \text{если } z \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

6. Сперва выведем выражение для функции распределения при $z \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$:

$$F_{X|Y=\frac{\pi}{4} \cap X>\frac{\pi}{3}}(z) = \frac{P(\frac{\pi}{3} \le \left(X|Y=\frac{\pi}{4}\right) \le z)}{P(\frac{\pi}{3} \le X|Y=\frac{\pi}{4})} = \frac{\int_{\frac{\pi}{3}}^{z} \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} dx}{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} dx} = \frac{2\sin(z) - 2\cos(z) - \sqrt{3} + 1}{3 - \sqrt{3}}$$

Дифференцируя получаем функцию плотности:

$$f_{X|Y=\frac{\pi}{4} \cap X>\frac{\pi}{3}}(z) = \begin{cases} \frac{2\sin(z)+2\cos(z)}{3-\sqrt{3}}, \text{если } z \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Наконец, рассчитаем математическое ожидание:

$$E(X|Y = \frac{\pi}{4} \cap X > \frac{\pi}{3}) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} z \frac{2\sin(z) + 2\cos(z)}{3 - \sqrt{3}} dz \approx 1.296$$

Показать решение