## Лаврентий на рыбалке

**Опубликовал**
sobodv
**Автор или источник**
sobopedia
**Предмет**
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
**Тема**
Метод моментов (/Topics/Details?id=32)
**Раздел**
Введение в ММ (/SubTopics/Details?id=112)
**Дата публикации**
03.12.2021
**Дата последней правки**
10.12.2021
**Последний вносивший правки**
sobodv
**Рейтинг**
★★★★★

## Условие

Каждый день Лаврентий, с вероятностью $p \in [0, 1]$, отправляется на рыбалку. Число пойманных рыб является Пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda$. Каждый день Лаврентий записывает число пойманных рыб, которое, очевидно, равняется нулю, если он не отправляется на рыбалку.

1. При помощи первого начального момента оцените параметр $\lambda$, если $p = 1$.

2. Повторите предыдущий пункт при $p = 0.5$.

3. При помощи первого начального момента оцените параметр $p$, если $\lambda = 1$

4. Используя первый начальный момент оцените параметр $\lambda$, если известно, что $\lambda = p$.

5. С помощью метода моментов найдите состоятельную последовательность оценок для параметра $\lambda$, если известно, что $\lambda = 1/p$, где $p > 0$.

# Решение

1. Обозначим через $X = (X_1, \ldots, X_n)$ выборку из распределения Пуассона с параметром $\lambda$. Отсюда получаем, что:

$$E(X_1) = \lambda \implies \hat{\lambda} = \overline{X}_n$$

2. Через $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ обозначим выборку из распределенния Бернулли с параметром $p$. Данные величины принимают значение $1$ если Лаврентий отправляется на рыбалку и $0$ - в противном случае.

$$E(X_1) = P(Y_1 = 1)E(X_1|Y_1 = 1) + P(Y_1 = 0)E(X_1|Y_1 = 0) = p\lambda + (1-p) \times 0 = 0.5\lambda$$

Отсюда получаем, что:

$$\lambda = 2E(X_1) \implies \hat{\lambda} = 2\overline{X}_n$$

3. Нетрудно догадаться, что:

$$E(X_1) = p\lambda + (1-p) \times 0 = p \times 1 = p \implies \hat{p} = \overline{X}_n$$

4. По аналогии получаем:

$$E(X_1) = p\lambda + (1-p) \times 0 = p\lambda = \lambda^2 \implies \hat{\lambda} = \sqrt{\overline{X}_n}$$

5. Для начала попробуем воспользоваться первым начальным моментом:

$$E(X_1) = p\lambda + (1-p) \times 0 = p\frac{1}{p} = 1$$

Полученный результат не информативен и не позволяет получить оценку методом моментов, что мотивирует поиск альтернативного подхода. Попробуем рассмотреть второй начальный момент:

$$E(X_1^2) = pE(X_1^2|Y_1 = 1) + (1-p)E(X_1^2|Y_1 = 0) = p(\lambda^2 + \lambda) + (1-p) \times 0 =$$
$$= p\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} + 1$$

В результате получаем:

$$p = \frac{1}{E(X_1^2) - 1} \implies \hat{p} = \frac{1}{\overline{X_n^2} - 1}$$

Применяя теорему Манна-Вальда имеем:

$$\hat{\lambda} = \overline{X_n^2} - 1$$

**Проверка в R:**

```
# пункт 5
n <- 1000000
p <- 0.6
lambda <- 1 / p
x <- rpois(n, lambda = lambda) * rbinom(n, 1, p)
lambda.est <- mean(x ^ 2) - 1
rbind(lambda, lambda.est)
```

Показать решение