

Пересдачи по курсу

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Классические дискретные распределения (/Topics/Details?id=39)

Раздел

Геометрическое распределение (/SubTopics/Details?id=137)

Дата публикации

17.10.2019

Дата последней правки

13.10.2023

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★

Условие

Вася пересдает курс до тех пор, пока не получит зачет. Каждый раз он принципиально учит лишь 3 вопроса из 10. На экзамене ему задаются два вопроса. Для успешной сдачи курса достаточно ответить хотя бы на один из них.

1. Найдите вероятность того, что Вася сдаст курс с 1-й попытки.
2. Найдите вероятность того, что Вася сдаст курс с 6-й попытки.
3. Найдите математическое ожидание попытки, с которой Вася сдаст курс.
4. Найдите математическое ожидание количества пересдач.
5. Пусть Васе нужно сдать три экзамена и ко всем он готовится по приведенной выше схеме. Найдите математическое ожидание суммы пересдач по трем экзаменам.

Решение

1. Введем случайную величину X - попытка, с которой Вася сдал курс. Через A_1 обозначим событие - Вася знает первый билет, а через A_2 - знает второй. При этом нетрудно догадаться, что:

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{A_3^1 A_7^1 + A_3^1 A_2^1}{A_{10}^2} = \frac{3}{10}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{A_3^2}{A_{10}^2} = \frac{1}{15}$$

Вероятности того, что он знает по крайней мере один билет составит:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{15} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Очевидно, что вероятность того, что он сдаст курс с первой попытки, составляет:

$$P(X = 1) = P(A_1 \cup A_2) = \frac{8}{15}$$

Соответствующую вероятность можно посчитать и альтернативным способом:

$$P(X = 1) = 1 - P(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_1) = 1 - \frac{6}{9} \frac{7}{10} = \frac{8}{15}$$

2. Поскольку процедура экзамена не меняется и Вася каждый раз учит лишь три вопроса из десяти, то количество посещений экзамена до первой сдачи имеет геометрической распределение $X \sim G(\frac{8}{15})$.

Отсюда получаем, что:

$$P(X = 6) = \left(1 - \frac{8}{15}\right)^5 \frac{8}{15} \approx 0.012$$

3. Найдем математическое ожидание числа посещений экзамена. Введем событие A - Вася сдал курс с первой попытки. Откуда получаем, что:

$$E(X) = E(X|A)P(A) + E(X|\bar{A})P(\bar{A}) = 1 * \frac{8}{15} + (E(X) + 1) * \frac{7}{15}$$

Решая данное равенство для $E(X)$ получаем, что $E(X) = \frac{15}{8}$.

4. Обозначим через \tilde{X} количество пересдач. Очевидно, что пересдач будет всегда на одну меньше, чем попыток сдать экзамен, поэтому:

$$E(\tilde{X}) = E(X - 1) = E(X) - 1 = \frac{7}{8}$$

5. Обозначим через \tilde{Y} и \tilde{Z} количество пересдач по двум другим предметам, тогда:

$$E(\tilde{X} + \tilde{Y} + \tilde{Z}) = E(\tilde{X}) + E(\tilde{Y}) + E(\tilde{Z}) = \frac{7}{8} + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} = \frac{21}{8}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.

