Скатерть-самобранка

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Непрерывные случайные величины (/Topics/Details?id=8)
Раздел
Определение, функция плотности и функция распределения (/SubTopics/Details?id=45)
Дата публикации
02.10.2019
Дата последней правки
11.10.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

Вам подарили скатерть-самобранку. Каждый раз при развертывании она создает продукты, суммарная калорийность которых, **деленная на 100**, является случайной величиной X со следующей функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{2}, \text{при } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\cos(x-\frac{\pi}{2})}{2}, \text{при } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

1. Рассчитайте, с какой вероятностью скатерть-самобранка создаст менее 100 калорий?

2. Вычислите, с какой вероятностью скатерть-самобранка создаст от 100 до 200 калорий?

3. Найдите функцию распределения случайной величины X. Повторите предыдущие два пункта используя функцию распределения и убедитесь, что ответы будут совпадать с теми, что были получены вами ранее.

4. С какой вероятностью скатерть-самобранка создала от 100 до 200 калорий при условии, что было создано менее 180 калорий.

5*. Вы попросили трех своих друзей попытаться определить на глаз, сколько калорий произвела скатерть самобранка. Первый друг даст верный ответ с вероятностью 0.6, второй - с вероятностью 0.8. Третий друг повторяет прогноз первого друга если скатерть произвела менее 150 калорий и прогноз второго друга - если более 150 калорий. С какой вероятностью скатерть произвела от 100 до 200 калорий, если прогноз третьего друга оказался верным?

6. Агрегированная аппетитность произведенной скатертью-самобранкой еды в зависимости от сотен калорий x выглядит следующим образом $y(x) = \left(x^2 - x\right)$. Найдите **функцию распределения** и **функцию плотности** случайной величины Y - агрегированная аппетитность произведенной скатертью самобранкой еды. **Затем**, пользуясь найденными функциями вычислите $P(Y > 2)$. **Подсказка**: достаточно выразить функцию распределения (плотности) Y как функцию от функций распределения (плотности) X.

Решение

1. Рассчитаем соответствующую вероятность:

$$P(X < 1) = \int\limits_0^1 f_X(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin(x)}{2}dx \approx 0.23$$

2. Нетрудно догадаться, что:

$$P(X \in [1,2]) = \int\limits_1^2 f_X(x)dx = \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{2}dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^2 \frac{\cos(x - \frac{\pi}{2})}{2}dx \approx 0.27 + 0.21 = 0.48$$

3. Очевидно, что:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ \int\limits_0^x \frac{\sin(x)}{2}dx = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right), \text{ при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0.5 + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos(x - \frac{\pi}{2})}{2}dx = \frac{1 - cos(x)}{2}, \text{ при } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ 1, \text{ при } x > \pi \end{cases}$$

Рассчитаем вероятности из предыдущих пунктов:

$$P(X < 1) = F_X(1) = \sin^2(\frac{1}{2}) \approx 0.23$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1) = \left(\frac{1 - \cos(2)}{2}\right) - \sin^2(\frac{1}{2}) \approx 0.48$$

4. Рассчитаем условную вероятность:

$$P(X \in [1,2] | X < 1.8) = \frac{P((X \in [1,2]) \cap (X < 1.8))}{P(X < 1.8)} = \frac{P(1 \leq X \leq 1.8)}{P(X < 1.8)} =$$

$$= \frac{F_X(1.8) - F_X(1)}{F_X(1.8)} = \frac{\frac{1 - \cos(1.8)}{2} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1 - \cos(1.8)}{2}} \approx 0.625$$

5. Введем событие V_i - прогноз i-го друга оказался верным. Рассчитаем искомую вероятность:

$$P(1 \leq X \leq 2 | V_3) = \frac{P((1 \leq X \leq 2) \cap V_3)}{P(V_3)}$$

Используя формулу полной вероятности нетрудно рассчитать знаменатель:

$$P(V_3) = P(V_3|X \le 1.5)P(X \le 1.5) + P(V_3|X > 1.5)P(X > 1.5) =$$
$$= 0.6F_X(1.5) + 0.8\left(1 - F_X(1.5)\right) = 0.6\sin^2\left(\frac{1.5}{2}\right) + 0.8\left(1 - \sin^2\left(\frac{1.5}{2}\right)\right) \approx 0.707$$

Теперь осуществим расчет числителя, вновь воспользовавшись формулой полной вероятности:

$$P((1 \le X \le 2) \cap V_3) = P(1 \le X \le 2)P(V_3|(1 \le X \le 2)) =$$
$$= 0.48\left(P(V_3|(1 \le X \le 1.5))P(1 \le X \le 1.5|1 \le X \le 2) + P(V_3|(1.5 \le X \le 2))P(1.5 \le X \le 2|1 \le X \le 2)\right) =$$
$$= 0.48(0.6P(1 \le X \le 1.5|1 \le X \le 2) + 0.8P(1.5 \le X \le 2|1 \le X \le 2)) =$$
$$= 0.48\left(0.6 * \frac{F_X(1.5) - F_X(1)}{F_X(2) - F_X(1)} + 0.8 * \frac{F_X(2) - F_X(1.5)}{F_X(2) - F_X(1)}\right) =$$
$$= 0.48\left(0.6 * \frac{\sin^2\left(\frac{1.5}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1-\cos(2)}{2} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)} + 0.8 * \frac{\frac{1-\cos(2)}{2} - \sin^2\left(\frac{1.5}{2}\right)}{\frac{1-\cos(2)}{2} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \approx 0.337$$

В итоге получаем ответ:

$$P(1 \le X \le 2|V_3) = \frac{0.337}{0.707} \approx 0.476$$

6. Для начала найдем функцию распределения:

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(X^2 - X \le x) = P\left(\frac{1 - \sqrt{4x+1}}{2} \le X \le \frac{1 + \sqrt{4x+1}}{2}\right) =$$
$$= F_X\left(\frac{1 + \sqrt{4x+1}}{2}\right) - F_X\left(\frac{1 - \sqrt{4x+1}}{2}\right)$$

По аналогии нетрудно найти функцию плотности:

$$f_Y(x) = \frac{dF_Y(x)}{dx} = \frac{f_X\left(\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2}\right) + f_X\left(\frac{1-\sqrt{4x+1}}{2}\right)}{\sqrt{4x+1}}$$

Наконец, рассчитаем искомую вероятность:

$$P(Y > 2) = 1 - F_Y(2) = 1 - F_X\left(\frac{1 + \sqrt{4*2+1}}{2}\right) + F_X\left(\frac{1 - \sqrt{4*2+1}}{2}\right) =$$
$$= 1 - F_X(2) + F_X(-1) = 1 - F_X(2) + 0 = 1 - \sin^2(1) \approx 0.29$$

Показать решение