Многомерные нормальные акции

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические многомерные распределения (/Topics/Details?id=19)
Раздел
Многомерное нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=87)
Дата публикации
17.01.2020
Дата последней правки
15.01.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг

Условие

На рынке торгуются две акции. Вектор цен на них (X, Y) хорошо аппроксимируется многомерным нормальным распределением:

$$(X, Y) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 100 \\ 110 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 36 \end{bmatrix}\right)$$

1. Ваш портфель состоит из 5 акций фирмы X и 10 акций фирмы Y. Найдите распределение стоимости вашего портфеля и определите, с какой вероятностью она превысит 1700.

2. Какое значение превысит стоимость портфеля с вероятностью 0.9?

3. С какой вероятностью стоимость вашего портфеля превысит 1700, если вторая акция стоит 90 денежных единиц.

Решение

1. Стоимость портфеля составляет:

$$S = 5X + 10Y$$

Поскольку стоимость портфеля является линейной комбинацией нормальных случайных величин, чье совместное распределение является многомерным нормальным, то она будет распределена нормально со следующими параметрами:

$$\mu_S = E(5X) + E(10Y) = 5E(X) + 10E(Y) = 5 * 100 + 10 * 110 = 1600$$

$$\sigma_S^2 = Var(5X + 10Y) = 25Var(X) + 100Var(Y) + 2 * 5 * 10Cov(X, Y) = 25 * 25 + 100 * 36 - 2 * 5 * 10 * 15 = 2725$$

В итоге получаем:

$$S \sim \mathcal{N}(1600, 2725)$$

Отсюда следует, что:

$$P(S > 1700) = 1 - F_S(1700) = 1 - \Phi\left(\frac{1700 - 1600}{\sqrt{2725}} = 2.58\right) \approx 0.02770467$$

2. Необходимо найти решение следующего равенства для α

$$P(S > \alpha) = 0.9$$

Перепишем данное равенство в следующем виде:

$$P(S > \alpha) = 1 - F_S(\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha - 1600}{\sqrt{2725}}\right) = 0.9 =>$$

$$=> \Phi\left(\frac{\alpha - 1600}{\sqrt{2725}}\right) = 0.1 => \frac{\alpha - 1600}{\sqrt{2725}} = \Phi^{-1}(0.1) =>$$

$$=> \frac{\alpha - 1600}{\sqrt{2725}} = -1.281552$$

В итоге получаем, что $\alpha \approx 1533.1$.

3. Рассчитаем следующую вероятность:

$$P(S > 1700|Y = 90) = P(5X + 10 * 90 > 1700|Y = 90) = P(X > 160|Y = 90) =$$
$$1 - P(X \leq 160|Y = 90) = 1 - F_{(X|Y=90)}(160)$$

Найдем условное распределение цены первой акции:

$$E(X|Y = 90) = \mu_X + \frac{Cov(X, Y)}{Var(Y)}(90 - \mu_Y) = 100 - \frac{15}{36}(90 - 110) = \frac{325}{3}$$

$$Var(X|Y = 90) = (1 - Corr(X, Y)^2)Var(X) = \left(1 - \left(\frac{15}{\sqrt{25 * 36}}\right)^2\right) * 25 = 18.75$$

$$(X|Y = 90) \sim \mathcal{N}\left(\frac{325}{3}, 18.75\right)$$

Отсюда следует, что:

$$P(S > 1700|Y = 90) = 1 - F_{(X|Y=90)}(160) = 1 - \Phi\left(\frac{160 - \frac{325}{3}}{\sqrt{18.75}}\right) \approx 1 - \Phi(11.93191) \approx 0$$

Задачу можно решить и альтернативным способом. Для начала, найдем следующее распределение:

$$\begin{bmatrix} S \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 110 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1600 \\ 110 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2725 & 285 \\ 285 & 36 \end{bmatrix}\right)$$

Теперь найдем параметры условного распределения:

$$E(S|Y = 90) = 1600 + \frac{285}{36}(90 - 110) = \frac{4325}{3}$$

$$Var(S|Y = 90) = 2725 - \frac{285^2}{36} = 468.75$$

Наконец, рассчитаем искомую вероятность:

$$P(S > 1700|Y = 90) = 1 - \Phi\left(\frac{1700 - \frac{4325}{3}}{\sqrt{468.75}}\right) \approx 1 - \Phi(11.93191) \approx 0$$

Показать решение