

Крёстный Котец

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Эконометрика (/Subjects/Details?id=9)

Тема

Различные задачи (/Topics/Details?id=36)

Раздел

Различные задачи (/SubTopics/Details?id=130)

Дата публикации

06.06.2019

Дата последней правки

08.06.2019

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★★★

Условие

Крёстный Отец исполняет просьбы в зависимости от меры уважения, продемонстрированной просящим. При этом на принятие решения об удовлетворении просьбы влияет интенсивность урчания Крёстного Котца (кота Крёстного Отца), являющаяся случайной величиной, подчиняющейся экспоненциальному распределению с параметром $\lambda = 1$.

Каждый раз, когда Дон удовлетворяет просьбу, в городе появляется очередной счастливчик. В противном случае уровень Гудзона повышается на объем, приблизительно равный объему тела посетителя, столкнувшегося с отказом в удовлетворении просьбы.

Желание Крестного Отца удовлетворить просьбу формируется следующим образом:

$$\begin{aligned} z_i^* &= \beta \ln(x_i) + \varepsilon_i \\ x_i &\in [0, 1], \quad i \in \{1, \dots, 10^3\}, \quad \beta > 0 \\ \varepsilon_i &\sim EXP(\lambda), \quad \text{i.i.d.} \end{aligned}$$

Где параметр β отражает благосклонность Крестного Отца (обратно пропорционален ей).

Механизм удовлетворения просьб может быть представлен как:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если } z_i^* > 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

1. С какой вероятностью Крестный Отец удовлетворит просьбу человека, просящего абсолютно без уважения ($x = 0$), если благосклонность составляет $\beta = 1$? А если он попросит с полным уважением ($x = 1$)? Как соответствующие вероятности зависят от благосклонности Крестного Отца?
2. Найдите предельный эффект уважения на вероятность удовлетворения просьбы при благосклонности $\beta = 1$ для просящего с уважением $x = 0.5$. Посчитайте, как изменится вероятность того, что просьба будет удовлетворена, если просящий увеличит уровень уважения до 0.7.
3. Предположим, что благосклонность Крестного Отца β неизвестна, но неизменна. Вы собираетесь обратиться к Дону с просьбой, но перед этим хотите оценить его уровень благосклонности. Ваш хороший знакомый работает охранником Дона и собрал информацию о его решениях, а также мере уважения, высказанной просящими. Запишите функцию правдоподобия, которую вам следует максимизировать для того, чтобы оценить благосклонность Крестного Отца.
4. На основе собранных вашим знакомым данных, вами, методом максимального правдоподобия была получена реализация оценки благосклонности $(\hat{\beta}|X) = 0.5$. При этом реализация оценки информации Фишера о благосклонности равняется $(\hat{I}(\beta)|X) = 1$. Вы предполагаете, что уровень благосклонности Дона равняется 0.3. С какой вероятностью вы готовы совершить ошибку первого (она же, возможно, последнего) рода? Сделайте статистический вывод относительно справедливости вашей гипотезы.
5. (Продолжение) Найдите реализацию оценки предельного эффекта уважения для просящего с уважением $x = 0.5$ и при помощи дельта метода запишите приблизительное асимптотическое распределение оценки благосклонности. Проверьте гипотезу о равенстве предельного эффекта уважения значению $0.75 * 0.5^{1-0.75}$ в соответствующей точке на уровне значимости $\alpha = 0.1$.
6. В последние месяцы уровень Гудзона стал стремительно подниматься, на фоне чего пошли слухи о том, что Дон стал менее благосклонен. Вы собрали еще один массив данных об удовлетворении просьб. Вы оценили три модели: по данным до того, как пошли слухи, после этого и общую модель. Для соответствующих моделей вы получили оценки $(\hat{\beta}|X) = 0.5$, $(\hat{\beta}|X) = 0.6$ и $(\hat{\beta}|X) = 0.55$. Логарифмы функции правдоподобия в точке реализаций ММП оценок для этих моделей составили -100 , -200 и -290 соответственно. Проверьте гипотезу об изменении благосклонности Дона и посчитайте соответствующий p-value.
7. Симулируйте в python или в R описанный выше процесс генерации решений Крестного Отца (**рекомендуется писать код с уважением к читабельности синтаксиса!**). Напишите программу, которая будет оценивать, методом максимального правдоподобия, параметр β при фиксированном $\lambda = 1$ и считать p-value теста, проверяющего гипотезу о том, что $\beta = b$, для произвольного b .

Решение

2. Для начала запишем вероятностью того, что при $x = 1$ мы получим $z = 1$:

$$\begin{aligned} P(z = 1) &= P(z^* > 0) = P(\ln(x) + \epsilon > 0) = P(\epsilon > -\ln(x)) = 1 - F_\epsilon(-\ln(x)) = \\ &= 1 - (1 - e^{\ln(x)}) = e^{\ln(x)} = x \end{aligned}$$

Теперь рассчитаем предельный эффект:

$$\frac{dP(z=1)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

По аналогии рассчитаем изменение вероятности:

$$P(z=1|x=0.7) - P(z=1|x=0.5) = 0.7 - 0.5 = 0.2$$

3. Используя свойство инвариантности ММП оценок нетрудно показать, что:

$$\frac{d\widehat{P}(z=1)}{dx} = \frac{d\hat{P}(z=1)}{dx} = \frac{dx^{\hat{\beta}}}{dx} = \hat{\beta}x^{\hat{\beta}-1}$$

Реализация соответствующей оценки принимает вид:

$$\left(\frac{d\hat{P}(z=1)}{dx} \Big|_{\hat{\beta}=0.5} \right) = 0.5 * x^{0.5-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

В точке $x = 0.5$ получаем значение реализации оценки предельного эффекта, равное $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Используя дельта метод запишем асимптотическое распределение оценки предельного эффекта:

$$\hat{\beta}x^{\hat{\beta}-1} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(\beta x^{\beta-1}, \frac{1}{I(\beta)^2} \left(x^{\beta-1} (\beta \ln(x) + 1) \right)^2 \right)$$

$$\frac{x^{\hat{\beta}-1} - x^{\beta-1}}{\frac{1}{I(\beta)} (\beta \ln(x) + 1) x^{\beta-1}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\frac{x^{\hat{\beta}-1} - x^{\beta-1}}{\frac{1}{I(\hat{\beta})} (\hat{\beta} \ln(x) + 1) x^{\hat{\beta}-1}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Очевидно, что реализация тестовой статистики равняется:

$$\frac{0.5^{0.5-1} - 0.5^{0.75-1}}{(0.5 \ln(0.5) + 1) 0.5^{0.5-1}} \approx 0.24$$

Таким образом, нулевая гипотеза не отвергается на любом разумном уровне значимости.

Также, нетрудно заметить, что поскольку предельный эффект зависит лишь от одного параметра, то проверка соответствующей гипотезы может быть сведена к проверке гипотезы о том, что $\beta = 0.75$. Тогда рассмотрим следующее значение тестовой статистики:

$$\frac{0.5 - 0.75}{1} \approx -0.25$$

Нулевая гипотеза вновь не отвергается на любом разумном уровне значимости.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.
