Дискриминация на рынке труда

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические многомерные распределения (/Topics/Details?id=19)
Раздел
Многомерное нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=87)
Дата публикации
16.01.2019
Дата последней правки
09.01.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★★★★

Условие

В стране Терверляндии фирма нанимает работников и максимизирует математическое ожидание своей прибыли. Продуктивность работника i является функцией $g_i(s_{1i}, s_{2i}) = 2s_{1i} + s_{2i}$ от его интеллекта s_{1i} и трудолюбия s_{2i}. Фирма получает прибыль $\pi = \sum\limits_{i=1}^{n} g(s_{1i}, s_{2i}) - w_i(s_{1i}, s_{2i})$, где n - количество нанятых работников. Допустим, что в условиях совершенной конкуренции между абсолютно идентичными фирмами на этом рынке они готовы предложить каждому индивиду зарплату на уровне его продуктивности, то есть $w_i = 2s_{1i} + s_{2i}$.

Каждому индивиду i, пришедшему устраиваться на работу, фирма дает тест, который точно определяет его интеллект s_{1i}. При этом фирма не может определить уровень трудолюбия индивида s_{2i}. Однако, согласно результатам публично доступного всем фирмам научного исследования, трудолюбие и интеллект индивидов коррелируют между собой и с некоторой **наблюдаемой** (ее значение фирме известно) характеристикой s_3. Основываясь на результатах данного исследования фирмы предполагают, что распределение S_1, S_2 и S_3 случайно взятого в обществе индивида подчинятся многомерному нормальному распределению:

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.49 & 0.441 & 0.56 \\ 0.441 & 0.81 & 0.81 \\ 0.56 & 0.81 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

1. Сколько фирма заплатит индивиду с характеристиками $s_1 = 2$ и $s_3 = 1$?

2. Допустим, что результаты исследования верны. Найдите вероятность того, что фирма переплатит индивиду с характеристиками $s_1 = 2$ и $s_3 = 1$. То есть вероятность того, что она заплатит ему меньше, чем заплатила бы зная его истинное значение s_2. Как эта вероятность зависит от значения s_3?

3. Найдите распределение отклонения (по модулю) предлагаемой фирмой зарплаты работника от зарплаты, которую получил бы индивид, если бы фирма знала величину его характеристику s_2.

4. Правительство Терверляндии ввело закон "О Противодействии Дискриминации на Рынке Труда". Теперь фирмам запрещено использовать информацию об s_3 при расчете зарплаты работника. Найдите распределение отклонения (по модулю) предлагаемой фирмой зарплаты работника от зарплаты, которую получил бы индивид, если бы фирма знала величину его характеристики s_2.

5. Основываясь на результатах, полученных в предыдущем пункте, сделайте вывод об эффекте закона на справедливость распределения зарплат в обществе.

6. Предположим, что исследователи ошиблись и случайные величины S_1, S_2 и S_3 на самом деле независимы, хоть и распределены нормально с такими же значениями дисперсии, как в предыдущих пунктах. Каким теперь будет ответ на вопрос №5, если фирмы, не зная об ошибке исследователей, пользовались бы их данными?

Решение

1. Для удобства перепишем распределение в следующем виде:

$$S^* = \begin{bmatrix} S_2 \\ S_1 \\ S_3 \end{bmatrix} = N\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.81 & 0.441 & 0.81 \\ 0.441 & 0.49 & 0.56 \\ 0.81 & 0.56 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Рассмотрим распределение продуктивности работника $\left(2S_1 + S_2 | \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, которое можно переписать в виде $\left(4 + S_2 | \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Найдем математическое ожидание и ковариационную матрицу этого распределения:

$$E\left(4 + S_2 | \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 4 + E\left(S_2 | \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= 4 + 5 + \begin{bmatrix} 0.441 & 0.81 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0.49 & 0.56 \\ 0.56 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 9.921429$$

$$Var\left(4 + S_2 | \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0.81 - \begin{bmatrix} 0.441 & 0.81 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0.49 & 0.56 \\ 0.56 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0.441 \\ 0.81 \end{bmatrix} = 0.153$$

Поскольку фирму интересует только математическое ожидание, то она назначит зарплату $w = 9.921429$.

2. Обозначим через $Z \sim N(0, 1)$ стандартную нормальную величину. Рассмотрим вероятность переплаты:

$$P\left(\left(4 + S_2 | \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) < 9.921429\right) = F_Z\left(\frac{9.921429 - 9.921429}{\sqrt{0.153}}\right) = \frac{1}{2}$$

Нетрудно догадаться, что вероятность переплаты всегда будет $\frac{1}{2}$, независимо от значений S_3, при условии, что информация о соответствующем значении учитывается.

3. Необходимо найти распределение случайной величины

$$|\left(4+S_2|\begin{bmatrix}S_1\\S_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)-9.921429|$$

Введем обозначение $Y=\left(4+S_2|\begin{bmatrix}S_1\\S_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)-9.921429$. Очевидно, что данная случайная величина распределена следующим образом:

$$Y\sim N(0,0.153)$$

Функция распределения $|Y|$ может быть представлена в виде:

$$F_{|Y|}(x)=\begin{cases}P(|Y|\leq x)=P(-x\leq Y\leq x)=F_Y(x)-F_Y(-x)=2F_Y(x)-1,\text{ если }x\geq 0\\0,\text{ если }x<0\end{cases}$$

Стандартизируя получаем:

$$F_{|Y|}(x)=\begin{cases}2F_Z(\frac{x}{\sqrt{0.153}})-1,\text{ если }x\geq 0\\0,\text{ если }x<0\end{cases}$$

4. Для начала найдем распределение продуктивности работника при условии, что информация об S_3 не используется, что равносильно её отсутствию:

$$(4+S_2|S_1=2)$$

Рассчитаем математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины:

$$E\left(4+S_2|S_1=2\right)=4+5+0.441*\frac{1}{0.49}*(1-2)=8.1$$

$$Var\left(4+S_2|S_1=2\right)=0.81-0.441*\frac{1}{0.49}*0.441=0.4131$$

Найдем распределение случайной величины:

$$|\left(4+S_2|\begin{bmatrix}S_1\\S_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)-8.1|$$

Введем обозначение $V=\left(4+S_2|\begin{bmatrix}S_1\\S_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)-8.1$. Учитывая, что $E(V)=9.921429-8.1$, очевидно, что данная случайная величина распределена следующим образом:

$$V\sim N(1.821429,0.153)$$

Откуда получаем функцию распределения:

$$F_{|V|}(x)=\begin{cases}2F_Z(\frac{x-1.821429}{\sqrt{0.153}})-1,\text{ если }x\geq 0\\0,\text{ если }x<0\end{cases}$$

5. Заметим, что $F_{|Y|}(x) \geq F_{|V|}(x), \forall x \in R$. Это говорит о том, что вероятность того, что отклонение истинного значения зарплаты от предложенного фирмой не превысит определенное значение было больше до введения закона, что говорит о негативном эффекте последнего на справедливость распределения зарплат в обществе.

6. Действуя аналогично предыдущему пункту нетрудно показать, что в таком случае эффект закона на справедливость распределения зарплат окажется положительным.

Показать решение