

Нормальное предприятие

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Классические непрерывные распределения (/Topics/Details?id=11)

Раздел

Нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=68)

Дата публикации

26.11.2020

Дата последней правки

15.11.2022

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★★★

Условие

Лаврентий владеет предприятием, выручка которого является нормально распределенной случайной величиной X , имеющей математическое ожидание $\mu = 3$ и стандартное отклонение $\sigma = 5$.

1. Определите, с какой вероятностью предприятие получит отрицательную выручку.
2. Вычислите выручку, не меньше которой предприятие получит с вероятностью 0.8.
3. Прибыль предприятия $X - Y$ зависит от разницы между выручкой X и издержками Y , которые не зависят от X и также имеют нормальное распределение. Найдите математическое ожидание издержек, учитывая, что прибыль с равной вероятностью может оказаться как положительной, так и отрицательной.
4. Определите вероятность, с которой выручка фирмы хотя бы вдвое превысит издержки, если известно, что ковариация между выручкой и издержками равняется 1, а дисперсия издержек равняется 0.25. Предполагается, что и X и Y имеют совместное нормальное распределение.
5. Определите моду и медиану прибыли фирмы.
6. Найдите вероятность, с которой выручка фирмы отклонится от ожидаемой более, чем на 1.

Решение

1. Очевидно, что:

$$P(X < 0) = \Phi\left(\frac{0-3}{5}\right) \approx 0.2742531$$

2. Обозначим искомую выручку через x . Известно, что:

$$\begin{aligned} P(X > x) = 0.8 &\Rightarrow P(X < x) = 0.2 \Rightarrow \Phi\left(\frac{x-3}{5}\right) = 0.2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x-3}{5} = \Phi^{-1}(0.2) \Rightarrow \frac{x-3}{5} \approx -0.85 \end{aligned}$$

Решая данное равенство получаем, что $x \approx -1.25$.

3. Известно, что:

$$P(X - Y < 0) = 0.5$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} P(X - Y < 0) &= \Phi\left(\frac{0 - (E(X) - E(Y))}{\sqrt{Var(X - Y)}}\right) = 0.5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{0 - (E(X) - E(Y))}{\sqrt{Var(X - Y)}} = \Phi^{-1}(0.5) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{0 - (E(X) - E(Y))}{\sqrt{Var(X - Y)}} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E(Y) = E(X) = 3 \end{aligned}$$

4. Необходимо найти следующую вероятность:

$$P(X \geq 2Y) = P(2Y - X \leq 0)$$

Найдем распределение $2Y - X$:

$$E(2Y - X) = 2E(Y) - E(X) = 2 \times 3 - 3 = 3$$

$$Var(2Y - X) = 4Var(Y) + Var(X) - 4Cov(X, Y) = 4 \times 0.25 + 25 - 4 \times 1 = 22$$

$$2Y - X \sim \mathcal{N}(3, 22)$$

Исходя из найденных параметров распределения нетрудно рассчитать искомую вероятность:

$$P(2Y - X \leq 0) = \Phi\left(\frac{0-3}{\sqrt{22}}\right) \approx 1 - \Phi(0.64) \approx 1 - 0.739 = 0.261$$

5. Прибыль фирмы является нормально случайной величиной со следующим математическим ожиданием:

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0$$

Поскольку у нормального распределения мода и медиана совпадают с математическим ожиданием, то они также будут равняться нулю.

6. Найдем искомую вероятность:

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)| > 1) &= P(|X - 3| > 1) = P(X > 4) + P(X < 2) = 1 - P(X \leq 4) + P(X \leq 2) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{4-3}{5}\right) + \Phi\left(\frac{2-3}{5}\right) \approx 1 - 0.58 + 0.42 = 0.84 \end{aligned}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.
