Сходимость по вероятности для нормального распределения

Опубликовал

sobody

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Сходимости (/Topics/Details?id=13)

Раздел

Сходимость по вероятности (/SubTopics/Details?id=69)

Дата публикации

23.11.2019

Дата последней правки

26.11.2020

Последний вносивший правки

sobody

Рейтинг

Условие

Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин X_1, X_2, \cdots . Проверьте, сходится ли данная последовательность к Y по вероятности и по распределению, если:

1.
$$X_n \sim \mathcal{N}\left(5, rac{1}{n}
ight)$$
 и $Y=5$.

2.
$$X_n \sim \mathcal{N}\left(rac{5n^2+n}{3+n^2},e^{-n}
ight)$$
 и $Y=5$.

$$3.~X_n \sim \mathcal{N}\left(rac{5n^2+n}{3+n^2},50
ight)$$
 и $Y \sim \mathcal{N}(5,50)$, где $Corr(X_n,Y)=0$. Как изменится ваш ответ при $Corr(X_n,Y)=rac{n^5-1}{n^5}$ и X_i,Y имеющих совместное нормальное распределение?

Решение

1. При помощи неравенства Чебышева докажем сходимость по вероятности и из нее автоматически будет следовать сходимость по распределению:

$$\lim_{n o\infty}P(|X_n-5|>\epsilon)=\lim_{n o\infty}P(|X_n-5|\geq\epsilon)\leq\lim_{n o\infty}rac{1}{\epsilon^2}=0$$

2. Рассчитывая вероятность напрямую докажем сходимость по вероятности и из нее автоматически будет следовать сходимость по распределению:

$$egin{aligned} \lim_{n o\infty} P(|X_n-5|>\epsilon) &= \lim_{n o\infty} P(|X_n-5|\geq\epsilon) = \lim_{n o\infty} 1 - P(-\epsilon\leq X_n-5\leq\epsilon) = \lim_{n o\infty} 1 - P(5-\epsilon\leq X_n\leq 5+\epsilon) = \ &= \lim_{n o\infty} 1 - F_{X_n}(5+\epsilon) + F_{X_n}(5-\epsilon) = \lim_{n o\infty} 1 - \Phi\left(rac{5+\epsilon-rac{5n^2+n}{3+n^2}}{\sqrt{e^{-n}}}
ight) + \Phi\left(rac{5-\epsilon-rac{5n^2+n}{3+n^2}}{\sqrt{e^{-n}}}
ight) = \ &= \lim_{k o\infty} 1 - \Phi(k) + \Phi(-k) = 1 - 1 + 0 = 0 \end{aligned}$$

3. Сходимость по вероятности не соблюдается, так как:

$$\lim_{n\to\infty}P(|X_n-Y|>\epsilon)=\lim_{n\to\infty}P(|X_n-Y|\geq\epsilon)=\lim_{n\to\infty}1-P(-\epsilon\leq X_n-Y\leq\epsilon)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}1-F_{X_n-Y}(\epsilon)+F_{X_n-Y}(-\epsilon)=\lim_{n\to\infty}1-\Phi\left(\frac{\epsilon-\left(\frac{5n^2+n}{3+n^2}-5\right)}{\sqrt{100}}\right)+\Phi\left(\frac{-\epsilon-\left(\frac{5n^2+n}{3+n^2}-5\right)}{\sqrt{100}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2-2\Phi\left(\frac{\epsilon-\left(\frac{5n^2+n}{3+n^2}-5\right)}{\sqrt{100}}\right)=2-2\Phi\left(\frac{\epsilon}{10}\right)>0,$$
 при $\epsilon=1$

Зато соблюдается сходимость по распределению, потому что:

$$\lim_{n o\infty}F_{X_n}(x)=\lim_{n o\infty}\Phi\left(rac{x-rac{5n^2+n}{3+n^2}}{\sqrt{50}}
ight)=\Phi\left(rac{x-5}{\sqrt{50}}
ight)=F_X(x), orall x\in R$$

Если $Corr(X_n,Y)=rac{n^5-1}{n^5}$, то будет соблюдаться и сходимость по вероятности, так как:

$$egin{aligned} \lim_{n o \infty} P(|X_n - Y| > \epsilon) &= \lim_{n o \infty} 2 - 2\Phi\left(rac{\epsilon - \left(rac{5n^2 + n}{3 + n^2} - 5
ight)}{\sqrt{100 - 100rac{n^5 - 1}{n^5}}}
ight) = \ &= \lim_{k o \infty} 2 - 2\Phi(k) = 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.

© 2018 - 2022 Sobopedia