

Шпион

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Случайные события (/Topics/Details?id=5)

Раздел

Условная вероятность, формула Байеса, формула полной вероятности и независимость событий (/SubTopics/Details?id=32)

Дата публикации

05.09.2018

Дата последней правки

17.09.2019

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг



Условие

Вас отправляют на секретное задание с целью проникнуть в город противника и узнать секретную информацию о планах нападения на вашу базу. Вы можете выбрать один из 3-х вариантов внедрения: замаскироваться под гражданского, солдата или генерала (вражеской армии). Чем более простой является ваша маскировка, тем легче пройти проверку на входе в город, но тем сложнее впоследствии будет добыть нужную информацию.

Если вы оденетесь гражданским, то с вероятностью 0.9 вам удастся проникнуть в город и, если вы проникнете в город, то с вероятностью 0.1 получите необходимые секретные данные. Для прикрытия солдата соответствующие вероятности составляют 0.7 и 0.3, а для генерала 0.3 и 0.8.

1. Найдите вероятность того, что вы добудете секретную информацию, если оденете костюм солдата.
2. Найдите вероятность того, что вы **не** добудете секретную информацию, если оденете костюм генерала.
3. Найдите вероятность того, что вы проникли в город под видом гражданского, если вам удалось получить секретную информацию.
4. Вам предложили самостоятельно разработать костюм, в котором вы проникнете в город. На костюм наклеиваются от одной до десяти звездочек $a \in [1, 10]$ (для простоты допустим, что число звездочек может быть нецелым). Чем больше звездочек - тем более высоким будет восприниматься ваше положение во

вражеской иерархии. То есть тем сложнее будет пройти проверку на входе в город, но тем проще будет получить доступ к секретной информации. Вероятность пробраться в город в этом костюме составляет $\frac{1}{a}$, а вероятность добыть секретные данные $2 - \frac{2}{a^2}$. Подберите параметр a так, чтобы максимизировать вероятность получения секретных данных в этом костюме.

5. Являются ли независимыми события - вы проникли в город в костюме гражданского и событие - вам удалось получить секретную информацию. Проверьте также, являются ли зависимыми событие - вы проникли в город в костюме гражданского и событие - вы проникли в город в костюме солдата?

6. Перед началом операции вы случайным образом открываете один из 10 шкафчиков и одеваете находящийся в нем костюм. В пяти из этих шкафчиков лежат костюмы гражданского, в трех солдата и в двух - генерала. Найдите вероятность того, что вы были замаскированы под гражданского (открыли шкафчик с одеждой гражданского), если вам удалось получить секретную информацию.

7. Найдите вероятность того, что вы проникли в город под видом гражданского, если вам **не** удалось получить секретную информацию.

Решение

1. Обозначим два основных события. Во-первых, событие A_2 - вы проникли в город переодевшись в солдата. Во-вторых, событие B - вы добыли секретную информацию. Тогда событие $A_2 \cap B$ означает, что вы добыли секретную информацию проникнув в город под видом солдата. Из условия также известно, что $P(A_2) = 0.7$ и то, что вероятность добыть секретную информацию при условии, что вы проникли в город как солдат, составляет $P(B|A_2) = 0.3$. Откуда получаем ответ $P(A_2 \cap B) = P(A_2)P(B|A_2) = 0.7 * 0.3 = 0.21$.

2. Через A_3 обозначим событие - вы проникли в город переодевшись в генерала. Нас интересует вероятность события $P(\overline{B} \cap A_3)$ - вы не добыли секретную информацию, будучи замаскированы под генерала. Даже без использования формул теории множеств, логически очевидно, что это событие эквивалентно объединению следующих несовместных событий. Во-первых, $\overline{A_3}$ - вы не смогли проникнуть в город под видом генерала. Во-вторых, $(\overline{B} \cap A_3)$ - вы проникли в город под видом генерала, но вам все равно не удалось добыть секретную информацию.

Таким образом получаем:

$$\begin{aligned} P(\overline{B} \cap A_3) &= P(\overline{A_3} \cup (\overline{B} \cap A_3)) = \\ &= P(\overline{A_3}) + P(\overline{B} \cap A_3) = (1 - 0.3) + 0.3 * (1 - 0.8) = 0.76 \end{aligned}$$

3. Через A_1 обозначим событие - вы проникли в город, переодевшись в гражданского.

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} = \\ &= \frac{0.1 * 0.9}{(0.1 * 0.9 + 0.3 * 0.7 + 0.8 * 0.3)} = \frac{1}{6} \approx 0.16667 \end{aligned}$$

4. Через A_a обозначим событие - вы проникли в город, переодевшись в костюм с a звездочками.

Максимизируем $P(A_a \cap B) = \frac{1}{a}(2 - \frac{2}{a^2})$ по параметру a . Условие первого порядка будет

$$\frac{dP(A_a \cap B)}{da} = \frac{2(3-a^2)}{a^4} = 0. \text{ Решая для } a \text{ получаем } a = \sqrt{3}. \text{ Данная точка является максимумом, поскольку}$$

вторая производная в этой точке отрицательна $\frac{d^2 P(A_a \cap B)}{d^2 a} \Big|_{a=\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Таким образом, получаем $P(A_a \cap B) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}^2} \right) \approx 0.77$

5. Поскольку $P(A_1|B) = \frac{1}{6} \neq 0.9 = P(A_1)$, то события A_1 и B являются зависимыми.

Для событий A_1 и A_2 получаем $P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(\emptyset)}{0.7} = 0 \neq 0.9 = P(A_1)$, а значит события зависимы.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.