Эксперименты по сходимости с равномерным распределением

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Сходимости (/Topics/Details?id=13)
Раздел
Сходимость по распределению (/SubTopics/Details?id=67)
Дата публикации
28.11.2018
Дата последней правки
23.11.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$, такую, что каждый её элемент имеет равномерное распределение $X_n \sim U(\alpha(n), \beta(n))$. Также, рассмотрим случайные величины $X \sim U(-1,1)$ и $Y = 1$. Проверьте, соблюдается ли сходимость по распределению в следующих случаях:

1. При $\alpha(n) = -1$ и $\beta(n) = \frac{n+3}{n}$ проверьте сходимость $X_n \xrightarrow{d} X$.

2. При $\alpha(n) = \frac{ln(n)+n^2}{5-n^2}$ и $\beta(n) = \frac{e^n}{e^n+2n}$, где $n > 3$ (в противном случае без потери общности положим, что $\alpha(n) = \beta(n) = 0$), проверьте сходимость $X_n \xrightarrow{d} X$.

3. При $\alpha(n) = \frac{1}{n}$ и $\beta(n) = e^{-n} + 1$ проверьте сходимость $X_n \xrightarrow{d} X$

4. При $\alpha(n) = 1$ и $\beta(n) = \frac{2n+5}{2n}$ проверьте сходимость $X_n \xrightarrow{d} Y$. Будет ли данная сходимость соблюдаться, если усилить требование к сходимости по распределению потребовав соблюдения соответствующего условия в том числе в точках, в которых функция $F_X(x)$ не является непрерывной?

Решение

1. Функция распределения $F_X(x)$ непрерывна при любых значениях.

Сходимость соблюдается, поскольку:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x+1}{\frac{n+3}{n}+1} = \frac{x+1}{2} = F_X(x), \text{при } x \in [-1,1]$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = F_X(x), \text{при } x < -1$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \geq \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(1) = 1 = F_X(x), \text{при } x > 1$$

В дальнейшем проверку случаев, когда $F_X(x) = 0$ или $F_X(x) = 1,$ будем пропускать как тривиальную.

2. Сходимость соблюдается, так как:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x - \frac{ln(n)+n^2}{5-n^2}}{\frac{e^n}{e^n+2n} - \frac{ln(n)+n^2}{5-n^2}} = \frac{x+1}{2} = F_X(x), \text{при } x \in [-1,1]$$

3. Сходимость не соблюдается из-за того, что:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x - \frac{1}{n}}{e^{-n} + 1 - \frac{1}{n}} = x \neq F_X(x), \text{при } x \in [0,1]$$

4. Функция распределения $F_Y(x)$ не будет непрерывной в точке 1, а значит множество, на котором данная функция распределения непрерывна, будет $\mathcal{T}_Y = R \backslash 1$. Также, для удобства, в явном виде запишем:

$$F_Y(x)=\begin{cases}0, \text{если } x<1\\ 1, \text{если } x\geq 1\end{cases}$$

Сходимость соблюдается, так как (https://www.wolframalpha.com/input/?i=limit+%5B%28Piecewise%5B%7B%7B0%2C+x%3C1%7D%2C+%7B%28x+-+1%29+%2F+%28%282n+%2B+5%29+%2F+%282n%29+-+1%29%2C+%28x%3E%3D0%29+%26+%28x%3C%3D%282n+%2B+5%29+%2F+%282n%29%29%7D%2C%7B1%2C+x%3E1%7D%7D%5D%29%2C+n+to+infinity%5D):

$$\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(x)=\begin{cases}0, \text{если } x<1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x-1}{\frac{2n+5}{2n}-1}, \text{если } x\in[1,\frac{2n+5}{2n}]\\ 1, \text{если } x>\frac{2n+5}{2n}\end{cases}=\begin{cases}1, \text{если } x>1\\ 0, \text{если } x\leq 1\end{cases}$$

Заметим, что функции распределения в пределе не совпадают лишь в точке 1 и, поскольку для $F_Y(y)$ это точка разрыва, то сходимость по распределению соблюдается.

Можно воспользоваться и тем, что из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению и показать, что, вследствие неравенства Маркова и того, что $X_n-1\sim U\left(0,\frac{5}{2n}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty}P(|X_n-1|>\epsilon)\leq\lim_{n\to\infty}P(X_n-1\geq\epsilon)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\frac{5}{2n}+0}{2}}{\epsilon}=0$$

Из приведенного выше выражения следует, что $X_n\xrightarrow{p}1$, а значит и $X_n\xrightarrow{d}1$.

Показать решение