Азартный Лаврентий

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Оценки (/Topics/Details?id=30)
Раздел
Определение и свойства оценок (/SubTopics/Details?id=100)
Дата публикации
21.11.2021
Дата последней правки
21.11.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг

Условие

Лаврентий играет в игру, в которой он может как выиграть, так и проиграть некоторую сумму денег. Выигрыши в соответствующую игру независимы и подчиняются следующему распределению:

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 0.5 & 1 \\ P(X_1 = x) & \theta & 2\theta & 1-3\theta \end{bmatrix}, \theta \in (0, 1/3)$$

По результатам 3-х игр Лаврентий собирается оценить параметр θ как $\hat{\theta} = \frac{X_1 X_2}{X_3}$, где X_i отражает результат i-й игры.

1. Проверьте, будет ли оценка Лаврентия несмещенной.

2. Выясните, будет ли несмещенной оценка $\hat{\theta}^* = \frac{1}{6}\left(2 - \frac{X_1}{X_3} - \frac{X_3}{X_2}\right)$.

3. Проверьте, будет ли асимптотически несмещенной и состоятельной придуманная Лаврентием последовательность оценок:

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{3n}\left(n - \frac{X_1}{X_2} - \frac{X_2}{X_3} - \ldots - \frac{X_{n-1}}{X_n}\right)$$

Решение

1. Проверим несмещенность соответствующей оценки:

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{X_1X_2}{X_3}\right) = E(X_1)E(X_2)E\left(\frac{1}{X_3}\right)$$

Найдем соответствующие математические ожидания:

$$E(X_1) = E(X_2) = (-1) \times \theta + 0.5 \times (2\theta) + 1 \times (1 - 3\theta) = 1 - 3\theta$$

$$E\left(\frac{1}{X_3}\right) = \frac{1}{-1} \times \theta + \frac{1}{0.5} \times (2\theta) + \frac{1}{1} \times (1 - 3\theta) = 1$$

Подставляя полученные значения получаем, что оценка Лаврентия является смещенной:

$$E(\hat{\theta}) = (1 - 3\theta)^2 \neq \theta$$

2. Соответствующая оценка окажется несмещенной, поскольку:

$$E(\hat{\theta}^*) = E\left(\frac{1}{6}\left(2 - \frac{X_1}{X_3} - \frac{X_3}{X_2}\right)\right) = \frac{1}{6}\left(2 - E(X_1) \times E\left(\frac{1}{X_3}\right) - E(X_3) \times E\left(\frac{1}{X_2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{6}(2 - (1 - 3\theta) \times 1 + (1 - 3\theta) \times 1) = \theta$$

3. Асимптотическая несмещенность соблюдается, поскольку:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{1}{3n}\left(n - \frac{X_1}{X_2} - \frac{X_2}{X_3} - \ldots - \frac{X_{n-1}}{X_n}\right)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n}(n - (n-1) \times (1 - 3\theta)) = \lim_{n\to\infty} \theta - \frac{\theta}{n} + \frac{1}{3n} = \theta$$

Обратим внимание, что в силу одинаковой распределенности:

$$Var\left(\frac{X_i}{X_{i+1}}\right) = Var\left(\frac{X_1}{X_2}\right)$$

Кроме того, лишь ковариации следующего вида могут оказаться отличными от нуля:

$$Cov\left(\frac{X_i}{X_{i+1}}, \frac{X_{i+1}}{X_{i+2}}\right) = Cov\left(\frac{X_1}{X_2}, \frac{X_2}{X_3}\right) = E\left(\frac{X_1}{X_3}\right) - E\left(\frac{X_1}{X_2}\right)E\left(\frac{X_2}{X_3}\right) =$$
$$= (1 - \theta) - (1 - \theta^2) > 0, \text{ поскольку } (1 - \theta) \in (0, 2/3)$$

Ковариации между отношениями $\frac{X_i}{X_j}$ другого вида окажутся равны нулю в силу независимости, так как не включают общих элементов. Например, очевидно, что в силу независимости $\frac{X_1}{X_2}$ и $\frac{X_5}{X_6}$ будет соблюдаться $Cov\left(\frac{X_1}{X_2}, \frac{X_5}{X_6}\right) = 0$. Нетрудно догадаться (комбинаторно), что всего ненулевых ковариаций будет $2(n-1)$.

Используя изложенные выше соображения покажем, что рассматриваемая оценка является состоятельной, поскольку:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_n)=\frac{1}{9n^2}\left(Var\left(\frac{X_1}{X_2}+\frac{X_2}{X_3}+\ldots+\frac{X_{n-1}}{X_n}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9n^2}\left((n-1)Var\left(\frac{X_1}{X_2}\right)+2(n-1)Cov\left(\frac{X_1}{X_2},\frac{X_2}{X_3}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(Var\left(\frac{X_1}{X_2}\right)+2Cov\left(\frac{X_1}{X_2},\frac{X_2}{X_3}\right)\right)-\left(Var\left(\frac{X_1}{X_2}\right)+2Cov\left(\frac{X_1}{X_2},\frac{X_2}{X_3}\right)\right)}{9n^2}=0$$

Проверка в R:

```
theta <- 0.15
x <- c(-1, 0.5, 1)
prob <- c(theta, 2 * theta, 1 - 3 * theta)
n <- 1000000
s <- sample(x, size = n, replace = TRUE, prob = prob)

# пункт 3
theta.est <- (1 / (3 * n)) * (n - sum(s[1:(n-1)] / s[2:n]))
```

Показать решение