Простая задача на дельта метод и асимптотическую дисперсию

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Метод максимального правдоподобия (/Topics/Details?id=31)
Раздел
Введение в ММП (/SubTopics/Details?id=109)
Дата публикации
08.01.2022
Дата последней правки
15.01.2022
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг

Условие

При помощи метода максимального правдоподобия была найдена оценка $\hat{\theta}_n$ параметра $\theta > 0$. Носитель распределения, из которого была получена выборка, не зависит от θ. Известно, что $As.Var(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{n}$.

1. Найдите асимптотическую дисперсию ММП оценки 5-го начального момента $E(X_1^5) = \frac{120}{\theta^5}$.

2. Найдите $E(X_1^k)$, если известно, что $As.Var(\hat{E}(X_1^k)) = \frac{324}{n\theta^6}$ и $E'(X_1^k) < 0$, а также при $\theta = 1$ выполняется $E(X_1^k) = 6$.

Решение

1. Поскольку пятый начальный момент в данном случае является монотонной функцией от параметра, то можно воспользоваться свойством инвариантности:

$$E'(X_1^5) = -\frac{600}{\theta^6} \implies As.Var(\hat{E}(X_1^5)) = As.Var(\hat{\theta}_n)E'(X_1^5)^2 = \frac{\theta^2}{n}\left(\frac{600}{\theta^6}\right)^2 = \frac{600^2}{n\theta^{10}}$$

2. Найдем искомое значение:

$$As.Var(\hat{E}(X_1^k)) = E'(X_1^k)^2 \frac{\theta^2}{n} = \frac{324}{n\theta^6} \implies$$

$$\implies E'(X_1^k)^2 = \frac{324}{\theta^8} \implies E'(X_1^k) = -\frac{18}{\theta^4}$$

Интегрируя получаем, что:

$$E(X_1^k) = \int -\frac{18}{\theta^4} d\theta = \frac{6}{\theta^3} + C$$

Из условия $E(X_1^k) = 6$ при $\theta = 1$ получаем, что $C = 0$, откуда:

$$E(X_1^k) = \frac{6}{\theta^3}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.

© 2018 – 2022 Sobopedia