

## Галилей и инквизиция

---

**Опубликовал**

sobodv

**Автор или источник**

sobopedia

**Предмет**

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

**Тема**

Классические дискретные распределения (/Topics/Details?id=39)

**Раздел**

Биномиальное распределение и распределение Бернулли (/SubTopics/Details?id=135)

**Дата публикации**

22.09.2018

**Дата последней правки**

05.10.2019

**Последний вносивший правки**

sobodv

**Рейтинг**

### Условие

Галилей попал в руки инквизиции. На суд над ним собираются прийти 10 инквизиторов. Однако, каждый из них может прийти с вероятностью 0.8. В стране действует правило - **семеро одного не жгут**.

1. С какой вероятностью Галилею удастся избежать сожжения на костре?
2. Друзья Галилея решили помочь ему избавившись от нескольких инквизиторов. Сколько инквизиторов им нужно ликвидировать, чтобы максимизировать вероятность спасения Галилея? При этом, если на суд не явится ни одного инквизитора, то Галилея сожгут.
3. У друзей Галилея не получается уничтожить инквизиторов, поскольку те спрятались в застенках хорошо охраняемого замка. Однако друзья Галилея могут переодеться в инквизиторов и с вероятностью 0.8 их пропустят в суд. С какой вероятностью на суд придет ровно 7 инквизиторов, включая друзей Галилея (которых у него неограниченное количество)? При этом друзья стараются максимизировать вероятность спасения Галилея.
4. Подумайте, как изменится ответ на предыдущий вопрос, если вероятность пропуска в суд переодетого в инквизитора друга Галилея будет отличаться от 0.8 и составит, например, 0.6.
5. Поскольку на суде усилили меры досмотра, друзья Галилея отказались от плана по переодеванию в инквизиторов. Однако, у них появилась возможность повлиять на вероятность. того, что инквизиторы придут, задержав их, либо напротив, приманив, разослав ложные телеграммы от имени короля. Найдите

вероятность  $p$  прихода инквизиторов на суд, максимизирующую вероятность того, что Галилей спасется.

## Решение

1. Поскольку семеро одного не жгут, то Галилей спасется, если на суд явятся только семь инквизиторов. Число инквизиторов, которые посетят суд, является биномиально распределенной случайной величиной  $X \sim B(0.8, 10)$ . Откуда получаем:

$$P(X = 7) = C_{10}^7 0.8^7 (1 - 0.8)^{10-7} \approx 0.2$$

2. Обозначим через  $t \in \{0, 1, 2, 3\}$  число ликвидированных инквизиторов. Введем случайную величину  $Y \sim B(10 - t, 0.8)$ . Максимизируем по  $t$  следующую вероятность:

$$P(Y = 7) = C_{10-t}^7 0.8^7 0.2^{10-t} = \frac{(10-t)!}{7!(3-t)!} 0.8^7 0.2^{10-t}$$

Рассмотрим отношение вероятностей спасения Галилея при  $t = x$  и  $t = x + 1$ :

$$\frac{\frac{(10-(x+1))!}{7!(3-(x+1))!} 0.8^7 0.2^{10-(x+1)}}{\frac{(10-x)!}{7!(3-x)!} 0.8^7 0.2^{10-x}} = \frac{3-x}{0.2(10-x)}$$

Вероятность при  $x + 1$  ликвидированных инквизиторах больше, чем при  $x$  уничтоженных инквизиторах, если соблюдено следующее неравенство:

$$\frac{3-x}{0.2(10-x)} \geq 1$$

То есть если уже ликвидировано  $x \leq 1.25$  инквизиторов, то уничтожение дополнительно инквизитора увеличит вероятностью спасения Галилея. Откуда следует, что нужно ликвидировать  $t = 2$  инквизитора. Тогда вероятность спасения Галилея составит:

$$P(Y = 7 | t = 2) = C_8^7 0.8^7 0.2 \approx 0.3355$$

3. Обозначим через  $t$  - количество друзей Галилея, которые переоденутся в инквизиторов. Введем случайную величину  $Z \sim (0.8, t)$  - количество друзей Галилея, которым удастся проникнуть на суд под видом инквизиторов. Поскольку  $X + Z \sim B(0.8, 10 + t)$ , то следует максимизировать следующую вероятность по  $t$ :

$$P(X + Z = 7) = C_{10+t}^7 0.8^7 0.2^{10+t-7} = \frac{(10+t)!}{7!(3+t)!} 0.8^7 0.2^{3+t}$$

Рассмотрим отношение вероятностей спасения Галилея при  $t = x$  и  $t = x + 1$ :

$$\frac{\frac{(10+(x+1))!}{7!(3+(x+1))!} 0.8^7 0.2^{10+(x+1)}}{\frac{(10+x)!}{7!(3+x)!} 0.8^7 0.2^{10+x}} = \frac{0.2(11+x)}{(4+x)}$$

Вероятность при  $x + 1$  переодетых друзьях больше, чем при  $x$  замаскированных друзьях, если соблюдено следующее неравенство:

$$\frac{0.2(11+x)}{(4+x)} \geq 1$$

Поскольку это неравенство не имеет положительных решений, то друзьям Галилея не имеет смысла пытаться переодеться в инквизиторах, то есть  $t = 0$ .

4. Очень сложный пункт, требующий перехода к распределению Пуассона-Бинома ([https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson\\_binomial\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_binomial_distribution)).

5. Очевидно, что достаточно максимизировать по  $p$  следующее выражение:

$$p^7(1-p)^3 = 0.5$$

В результате получаем  $p = 0.7$ .

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.