

Бенчмаркинг

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Теория проверки статистических гипотез (/Topics/Details?id=35)

Раздел

Проверка гипотез по поводу математического ожидания и дисперсии (/SubTopics/Details?id=125)

Дата публикации

24.05.2020

Дата последней правки

01.06.2020

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★

Условие

Саша сравнивает производительность двух процессоров, сопоставляя время, которое каждый из них затрачивает на рендеринг видеоролика. Саша 5 раз осуществила рендеринг одного и того же видео при помощи первого процессора и 10 раз - при помощи второго процессора. Суммарное время, затраченное на рендеринг всех видео у первого процессора составило 3 часа, а у второго - 10 часов. Время на рендеринг для каждого из процессоров (**в минутах**) является нормально распределенной случайной величиной. Реализация исправленной выборочной дисперсии времени рендеринга для первого процессора составила 25 минут, а для второго процессора - 100 минут.

1. Предполагая, что стандартные отклонения времени рендеринга для первого процессора и второго процессора совпадают, вычислите p -value теста о том, что математические ожидания скорости рендеринга видео для обоих процессоров являются одинаковыми против альтернативы о том, что первый процессор осуществляет рендеринг видео быстрее. Ориентируясь на полученное значение p -value запишите, можно ли отвергнуть нулевую гипотезу на уровне значимости 15%.
2. На уровне значимости $\alpha = 0.1$ протестируйте гипотезу о том, что дисперсии времени рендеринга видео для обоих процессоров равны против альтернативы о том, что они не равны. Запишите p -value теста.
3. На уровне значимости $\alpha = 0.1$ протестируйте гипотезу о том, что дисперсия времени рендеринга видео второго процессора в 5 раз больше, чем у первого процессора. Запишите p -value теста.

4. Теперь предположим, что время рендеринга видео для первого процессора является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром λ . Придумайте тест, при помощи которого на уровне значимости $\alpha = 0.1$ можно проверить гипотезу о том, что математическое ожидание времени рендеринга для первого процессора равняется 30 минутам против альтернативы о том, что оно превышает 30 минут: запишите нулевую и альтернативную гипотезы, статистику теста, её распределение (при условии, что верна нулевая гипотеза) и критическую область. При этом асимптотическое распределение статистики теста использовать **нельзя**. Вычислите реализацию статистики предложенного вами теста и запишите вывод о том, можно ли отвергнуть нулевую гипотезу на соответствующем уровне значимости.

Решение

Через $X = (X_1, \dots, X_5)$ обозначим выборку для времени, затрачиваемого первым процессором, а через $Y = (Y_1, \dots, Y_{10})$ - для второго процессора.

1. Учитывая равенство дисперсий реализация оценки дисперсии выборочного среднего составит:

$$(\hat{\sigma}^2 | X = x, Y = y) = \frac{25 * (5 - 1) + 100 * (10 - 1)}{10 + 5 - 2} \approx 76.923$$

Реализации выборочных средних составят:

$$(\hat{\mu}_X | X = x) = \frac{3 * 60}{5} = 36$$

$$(\hat{\mu}_Y | Y = y) = \frac{10 * 60}{10} = 60$$

Реализация статистики теста будет равняться:

$$(T(X) | X = x) = \frac{36 - 60}{\sqrt{76.923} * \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}}} \approx -5$$

Поскольку тестируется односторонняя гипотеза, то p-value теста составит:

$$\text{p-value} = F_{t(10+5-2)}(-5) \approx 0.000121477$$

В результате на уровне значимости $\alpha = 0.15$ нулевая гипотеза отвергается.

2. Реализация статистики теста окажется равна:

$$\frac{100}{25} = 4$$

Поскольку $F_{10-1,5-1}^{1-\frac{0.1}{2}} = 5.998779 > 4$, то нулевая гипотеза о равенстве дисперсий не отвергается.

3. Данная задача очевидным образом сводится к задаче о проверке равенства дисперсий случайных величин $\sqrt{5}X_1$ и Y_1 . Реализация статистики теста составит:

$$100 / (5 * 25) = 0.8$$

Поскольку $F_{10-1,5-1}^{1-\frac{0.1}{2}} = 5.998779 > 0.8$, то нулевая гипотеза о равенстве дисперсий не отвергается.

4. Ориентируясь на результат, полученный в задаче (<https://sobopedia.azurewebsites.net/Exercises/Details?id=183>), рассмотрим следующую тестовую статистику:

$$T(X) = 2 * \frac{1}{30} * (X_1 + \dots + X_5)$$

При этом:

$$(T(X)|H_0) \sim \chi^2(10)$$

Реализация тестовой статистики составит:

$$2 * \frac{1}{30} * 180 = 12$$

Поскольку $\chi^2_{10,1-0.1} \approx 16 > 12$, то нулевая гипотеза $H_0 : \lambda = \frac{1}{30}$ не отвергается.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.