Футбольный тренер

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Случайные события (/Topics/Details?id=5)
Раздел
Условная вероятность, формула Байеса, формула полной вероятности и независимость событий (/SubTopics/Details?id=32)
Дата публикации
09.09.2018
Дата последней правки
13.10.2022
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★

Условие

Вас назначили новым тренером футбольной команды из 20 футболистов. От бывшего тренера вы узнали, что 5 футболистов хорошие, 5 средние и 10 плохие. Хорошие футболисты забивают пенальти с вероятностью 0.8, средние с вероятностью 0.5 и плохие с вероятностью 0.3. При этом вам забыли сказать, какой футболист хороший, средний или плохой.

1. Посчитайте, с какой вероятностью случайно выбранный футболист забьет пенальти.

2. Вы случайным образом выбрали футболиста и он забил пенальти. Какова вероятность того, что этот футболист хороший.

3. Этот же футболист второй раз бьет пенальти и вновь забивает гол. Какова вероятность того, что этот футболист хороший?

4. Наконец, в третий раз этот футболист промахивается и не забивает пенальти. Рассчитайте вероятность того, что он плохой.

5. Какова вероятность того, что случайно выбранный футболист забьет второе пенальти, если он уже забил первое пенальти.

6. Вы случайным образом выбрали футболиста и он забил пенальти. Какова вероятность того, что после этого **другой** случайно выбранный из 19 оставшихся футболист забьет пенальти.

7. Вы случайным образом выбрали футболиста и он забил пенальти. Какова вероятность того, что этот футболист плохой или средний.

8. С какой вероятностью плохой футболист должен забивать пенальти, чтобы события случайный футболист забил пенальти и событие, согласно которому он является плохим футболистом, были независимы.

Решение

1. Обозначим через A_1 событие - футболист хороший, через A_2 - средний, а через A_3 - плохой. Через B обозначим событие - футболист забил пенальти. Вероятность искомого события рассчитаем по формуле полной вероятности:

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=$$
$$=\frac{5}{20}0.8+\frac{5}{20}0.5+\frac{10}{20}0.3=0.475$$

2. По формуле Байеса получаем:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}=$$
$$=\frac{\frac{5}{20}0.8}{\frac{5}{20}0.8+\frac{5}{20}0.5+\frac{10}{20}0.3}=\frac{8}{19}$$

3. Обозначим через B_1 событие, что футболист забивает первое пенальти, а через B_2 событие - футболист забивает второе пенальти. По аналогии будем обозначать событие B_i - футболист забил i-й гол.

Рассчитываем следующую условную вероятность, пользуясь независимостью событий, отражающих забивание первого и второго голов при условии того, что известен тип футболиста:

$$P(A_1|B_1\cap B_2)=\frac{P(A_1\cap B_1\cap B_2)}{P(B_1\cap B_2)}=$$
$$=\frac{P(B_1\cap B_2|A_1)P(A_1)}{P(B_1\cap B_2|A_1)P(A_1)+P(B_1\cap B_2|A_2)P(A_2)+P(B_1\cap B_2|A_3)P(A_3)}=$$
$$=\frac{P(B_1|A_1)P(B_2|A_1)P(A_1)}{P(B_1|A_1)P(B_2|A_1)P(A_1)+P(B_1|A_2)P(B_2|A_2)P(A_2)+P(B_1|A_3)P(B_2|A_3)P(A_3)}=$$
$$=\frac{0.8*0.8*\frac{5}{20}}{0.8*0.8*\frac{5}{20}+0.5*0.5*\frac{5}{20}+0.3*0.3*\frac{10}{20}}=\frac{64}{107}$$

4. По аналогии с предыдущим пунктом получаем:

$$P(A_3|B_1\cap B_2\cap\overline{B_3})=\frac{P(A_3\cap B_1\cap B_2\cap\overline{B_3})}{P(B_1\cap B_2\cap\overline{B_3})}=$$
$$=\frac{P(B_1\cap B_2\cap\overline{B_3}|A_3)P(A_3)}{P(B_1\cap B_2\cap\overline{B_3}|A_1)P(A_1)+P(B_1\cap B_2\cap\overline{B_3}|A_2)P(A_2)+P(B_1\cap B_2\cap\overline{B_3}|A_3)P(A_3)}=$$
$$=\frac{0.3*0.3*0.7*\frac{10}{20}}{0.8*0.8*0.2*\frac{5}{20}+0.5*0.5*0.5*\frac{5}{20}+0.3*0.3*0.7*\frac{10}{20}}=\frac{42}{169}$$

5. Вновь пользуясь условной независимостью получаем:

$$P(B_2|B_1)=\frac{P(B_2\cap B_1)}{P(B_1)}=\frac{P(B_2\cap B_1|A_1)P(A_1)+P(B_2\cap B_1|A_2)P(A_2)+P(B_2\cap B_1|A_3)P(A_3)}{P(B_1|A_1)P(A_1)+P(B_1|A_2)P(A_2)+P(B_1|A_3)P(A_3)}=$$
$$=\frac{0.8*0.8*\frac{5}{20}+0.5*0.5*\frac{5}{20}+0.3*0.3*\frac{10}{20}}{\frac{5}{20}0.8+\frac{5}{20}0.5+\frac{10}{20}0.3}=\frac{107}{190}$$

6. Обозначим через A_1^2 событие - второй футболист оказался хорошим. По аналогии обозначим события A_2^2 и A_3^2 для среднего и плохого футболистов соответственно. Через B^1 и B^2 обозначим события, при которых первый и второй футболисты соответственно забивают пенальти.

Рассчитаем следующую вероятность:

$$P(B^2|B^1)=\frac{P(B^2\cap B^1)}{P(B^1)}=$$
$$=\frac{P(B^2\cap B^1|A_1\cap A_1^2)P(A_1\cap A_1^2)+P(B^2\cap B^1|A_1\cap A_2^2)P(A_1\cap A_2^2)+\ldots+P(B^2\cap B^1|A_3\cap A_3^2)P(A_3\cap A_3^2)}{P(B^1|A_1)P(A_1)+P(B^1|A_2)P(A_2)+P(B^1|A_3)P(A_3)}$$

В числителе мы используем формулу полной вероятности. Мы складываем вероятности того, что оба пенальти будут забиты, в зависимости от того, какими по качеству окажутся два выбранных нами футболиста (хороший и хороший, хороший и плохой и т.д.). Так, например:

$$P(A_1\cap A_1^2)=\frac{C_5^2}{C_{20}^2}=\frac{A_5^2}{A_{20}^2}=\frac{1}{19}$$

В качестве альтернативы можно применить формулу условной вероятности:

$$P(A_1\cap A_1^2)=P(A_1)P(A_1^2|A_1)=\frac{5}{20}\frac{4}{19}=\frac{1}{19}$$

Также, в силу условной независимости, например:

$$P(B^2\cap B^1|A_1\cap A_3^2)=P(B^1|A_1\cap A_3^2)P(B^2|A_1\cap A_3^2)=$$
$$=P(B^1|A_1)P(B^2|A_3^2)=0.8*0.3=0.24$$

Рассчитывая соответствующим образом все вероятности и подставляя их в обозначенную выше формулу получаем ответ.

7. Это вероятность того, что данный футболист не является хорошим, при условии, что он забил пенальти, то есть $1-P(A_1|B)=1-\frac{8}{19}=\frac{11}{19}$.

8. Необходимо, чтобы соблюдалось $P(A_3\cap B)=P(A_3)P(B)$. Для этого достаточно, чтобы $P(A_3|B)=P(A_3)$ и $P(B|A_3)=P(B)$. Рассмотрим первую из этих вероятностей.

$P(A_3|B)=\frac{\frac{10}{20}P(B|A_3)}{\frac{5}{20}0.8+\frac{5}{20}0.5+\frac{10}{20}P(B|A_3)}=P(A_3)=\frac{10}{20}$. Решая для $P(B|A_3)$ получаем $P(B|A_3)=0.65$.

Убедимся в справедливости полученного ответа:

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)=$$
$$=\frac{5}{20}*0.8+\frac{5}{20}*0.5+\frac{10}{20}*0.65=0.65=P(B|A_3)$$

Таким образом, при $P(B|A_3) = 0.65$ рассматриваемые события окажутся независимыми.

Показать решение