Мобильное приложение

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Сходимости (/Topics/Details?id=13)
Раздел
Центральная предельная теорема (/SubTopics/Details?id=73)
Дата публикации
23.11.2019
Дата последней правки
02.12.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг

Условие

Вы создали мобильное приложение. Его скачали 2500 человек. С вероятностью 0.5 ваше приложение оказывается чрезвычайно полезным для скачавшего, вследствие чего объем его доната (денег, потраченных на покупку услуг внутри приложения) является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\lambda = \frac{1}{500}$. С вероятностью 0.3 приложение не оказывается очень полезным для индивида, но все-таки оно ему нравится и тогда объем его доната является равномерно распределенной случайной величиной от 100 до 300. С вероятностью 0.2 индивида не привлекает ваше приложение и он не тратит на него никаких денег.

Индивиды совершают покупки и относятся к одному из трех типов независимо друг от друга.

1. Найдите математическое ожидание и дисперсию дохода от вашего приложения. **Подсказка**: используйте аналог формулы полной вероятности для математического ожидания (law of total expectation).

2. Вычислите, при помощи ЦПТ, вероятность того, что ваш доход превысит 800000 рублей.

3. При каком наибольшем количестве скачавших приложение человек $n \in N$ вероятность, посчитанная при помощи ЦПТ, того, что средний доход с индивида превысит 320 рублей, окажется больше 0.2? **Пояснение**: предполагается, что приложение скачали на 2500 человек, а n. В последующих пунктах, если отсутствуют иные указания, количество скачавших приложение индивидов вновь полагается 2500.

4. При помощи ЦПТ вычислите вероятность того, что вы получите донат более, чем от 2450 человек. **Подсказка**: обратите внимание на теорему Муавра-Лапласа, что, впрочем, совсем не обязательно.

5. Представим, что количество скачавших приложение человек является Пуассоновской случайной величиной с математическим ожиданием 2500. Можно ли при помощи ЦПТ рассчитать вероятность того, что ваше приложение скачают **не более** 2450 человек? Если да, то математически обоснуйте свой ответ и рассчитайте соответствующую вероятность при помощи ЦПТ и обычным способом (пользуясь функцией распределения для Пуассоновской случайной величины в R (https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/Poisson.html) или python (https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.poisson.html)), а если нет, то докажите, что этого сделать нельзя. **Подсказка**: вспомните свойство суммы независимых Пуассоновских случайных величин.

Решение

1. Введем индексы для индивидов $i \in \{1, \cdots 2500\}$. Рассмотрим следующие случайные величины:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ P(X_i = x) & 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$Y_i^H \sim EXP(0.05)$$

$$Y_i^L \sim U(100, 300)$$

$$Z_i = \begin{cases} 0, \text{если } X_I = 0 \\ Y_i^L, \text{если } X_I = 1 \\ Y_i^H, \text{если } X_I = 2 \end{cases}$$

Обратим внимание, что $E(Y_i^H) = 500$ и $E(Y_i^L) = 200$.

Теперь найдем математическое ожидание и дисперсию доната одного индивида:

$$\begin{gathered} E(Z_i) = E(Z_i|X_i = 0)P(X_i = 0) + E(Z_i|X_i = 1)P(X_i = 1) + E(Z_I|X_i = 2)P(X_i = 2) = \\ = E(0)P(X_i = 0) + E(Y_i^L)P(X_i = 1) + E(Y_i^H)P(X_i = 2) = \\ = 0 * 0.2 + 200 * 0.3 + 500 * 0.5 = 310 \end{gathered}$$

$$E(Z_i^2) = E(0^2)P(Z_i = 0) + E\left(\left(Y_i^L\right)^2\right)P(Z_i = 1) + E\left(\left(Y_i^H\right)^2\right)P(Z_i = 2) =$$

$$= 0 * 0.2 + \left(200^2 + \frac{(300 - 100)^2}{12}\right) * 0.3 + \left(500^2 + 500^2\right) * 0.5 = 263000$$

$$Var(Z_i) = E(Z_i^2) + E(Z_i)^2 = 263000 - 310^2 = 166900$$

Доход от приложения равняется сумме доходов от индивидов, вследствие чего имеем:

$$E\left(\sum_{i=1}^{2500} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{2500} E(Z_i) = 2500 * 310 = 775000$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{2500} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{2500} Var(Z_i) = 2500 * 166900 = 417250000$$

2. Согласно ЦПТ получаем:

$$\left(\sum_{i=1}^{2500} Z_i\right) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(775000, 417250000\right)$$

Отсюда находим вероятность:

$$P\left(\sum_{i=1}^{2500} Z_i > 800000\right) = 1 - \Phi\left(\frac{800000 - 775000}{\sqrt{417250000}}\right) \approx 0.11$$

3. Согласно ЦПТ имеем:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}775000, \frac{1}{n^2}417250000\right)$$

Отсюда получаем, что:

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i > 320\right) = 1 - \Phi\left(\frac{320 - \frac{1}{n}775000}{\sqrt{\frac{1}{n^2}417250000}}\right) \geq 0.2 =>$$

$$=> \frac{320 - \frac{1}{n}775000}{\sqrt{\frac{1}{n^2}417250000}} \leq \Phi^1(0.8) \approx 0.8416212$$

Решая для n получаем, что $n = 2475$, так как рассматривая вероятность убывает по n.

4. Введем случайную величину $V_i = \begin{cases} 1, \text{если } X_i = 0 \\ 0, \text{если} X_i > 0 \end{cases}$, откуда $V_i \sim Ber(0, 0.8)$

Нетрудно догадаться, что:

$$\sum_{i=1}^{2500} V_i \dot{\sim} \mathcal{N}\left(2500 * 0.8, 2500 * 0.8 * 0.2\right)$$

Отсюда получаем искомую вероятность:

$$P\left(\sum_{i=1}^{2500} V_i \geq 2450\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2450 - 2500 * 0.8}{\sqrt{2500 * 0.8 * 0.2}}\right) = 1 - \Phi(22.5) \approx 0$$

5. Мы можем представить рассматриваемую Пуассоновскую случайную величину в виде суммы независимых Пуассоновских случайных величин с параметром $\lambda = 1$ (откуда будет следовать одинаковая распределенность). Отсюда следует, что искомая вероятность можно быть рассчитана как:

$$\Phi\left(\frac{2450 - 2500}{\sqrt{2500}}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 0.1586553$$

При этом мы получили небольшую погрешность, так как истинная вероятность составляет 0.161.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.
