Парадокс Монти Холла

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Случайные события (/Topics/Details?id=5)
Раздел
Условная вероятность, формула Байеса, формула полной вероятности и независимость событий (/SubTopics/Details?id=32)
Дата публикации
11.09.2018
Дата последней правки
26.09.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★

Условие

Представьте, что вы стали участником игры со следующими правилами. Перед вами лежат три коробки. В одной из них находится приз, а две других - пустые. Вам неизвестно в какой из коробок лежит приз. Ведущий предлагает вам выбрать одну из коробок. После того, как вы сделали выбор, ведущий открывает одну из оставшихся пустых коробок. После чего вы принимаете решение - оставить свой выбор на первоначальной коробке либо выбрать ту, что не была выбрана вами изначально и не была открыта ведущим.

Например, вы выбрали коробку 1. Ведущий открыл пустую коробку 2. После чего вам предлагают либо оставить коробку 1, либо выбрать коробку 3.

1. С точки зрения максимизации вероятности выигрыша, стоит ли вам сменить коробку?

2. Как изменяется вероятность того, что вы получите приз сменив коробку, по мере увеличения числа коробок n? Будет ли при $n > 3$ по прежнему выгодно сменить коробку?

3. Как изменится ответ на предыдущий пункт, если ведущий будет открывать $1 \leq k \leq (n-2)$ коробок на втором шаге.

Решение

1. Сначала рассмотрим простое объяснение. В начале вы выбираете пустую коробку с вероятностью $\frac{2}{3}$. А значит, вторая коробка, которую не откроет ведущий, с такой же вероятностью, то есть $\frac{2}{3}$, содержит приз. Следовательно, вам следует изменить свой начальный выбор повысив вероятность выигрыша с $\frac{1}{3}$ до $\frac{2}{3}$.

Теперь воспользуемся формулой Байеса. Обозначим несовместные события A_1, A_2 и A_3 - выигрыш оказался в 1-й, 2-й или 3-й коробке соответственно. Без потери общности допустим, что вы выбрали коробку 1, а ведущий открыл коробку 3. Наконец, введем событие A_{23} - из коробок 2 и 3 ведущий открыл коробку 3.

Заметим, что:

$$P(A_{23}) = P(A_{23}|A_1)P(A_1) + P(A_{23}|A_2)P(A_2) + P(A_{23}|A_3)P(A_3) =$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + 1 + 0) = \frac{1}{2}$$

Тогда получаем:

$$P(A_1|A_{23}) = \frac{P(A_{23}|A_1)P(A_1)}{P(A_{23})} = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2|A_{23}) = \frac{P(A_{23}|A_2)P(A_2)}{P(A_{23})} = \frac{1 * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Поскольку $P(A_2|A_{23}) > P(A_1|A_{23})$, то вам действительно выгодно изменить свое изначальное решение и вместо сундука 1 выбрать сундук 2, тем самым повысив вероятность получения приза с $\frac{1}{3}$ до $\frac{2}{3}$, то есть в 2 раза!

Рассмотрим альтернативный способов решения. Введем событие G - после того, как один из пустых ящиков был удален, мы выбрали другой произвольный и он оказался выигрышным.

$$P(G) = P(G|A_1)P(A_1) + P(G|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) =$$
$$= 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2. Обозначим событие $A_{(-2)}$ - из всех коробок от 2 до n ведущий открыл не 2-ю коробку. Тогда вероятность этого события составит:

$$P(A_{(-2)}) = P(A_{(-2)}|A_1)P(A_1) + P(A_{(-2)}|A_2)P(A_2) + \sum_{i=3}^{n} P(A_{(-2)}|A_i)P(A_i)) =$$
$$= \frac{1}{n}((1 - \frac{1}{n-1}) + 1 + (n-2)(1 - \frac{1}{n-2})) = \frac{n-2}{n-1}$$

Откуда получаем, что нам по прежнему выгодно сменить свой выбор:

$$P(A_2|A_{(-2)}) = \frac{P(A_{(-2)}|A_2)P(A_2)}{P(A_{(-2)})} = \frac{1 * \frac{1}{n}}{\frac{n-2}{n-1}} = \frac{n-1}{n(n-2)} > \frac{1}{n}, n \geq 3$$

Возможно и более простое решение. Введем событие G - после того, как один из пустых ящиков был удален, мы выбрали другой произвольный и он оказался выигрышным.

$$P(G) = P(G|A_1)P(A_1) + P(G|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) =$$
$$= 0 * \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} * \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n(n-2)}$$

3. Без потери общности предположим, что ведущий из коробок со 2-й по n-ю открыл коробки со 2-й по $(k+1)$-ю. Обозначим это событие через $A_{(k)}$. По аналогии с предыдущим пунктом получаем следующий результат:

$$P(A_{(k)}) = P(A_{(k)}|A_1)P(A_1) + \sum_{i=2}^{k+1} P(A_{(k)}|A_i)P(A_i) + \sum_{i=k+2}^{n} P(A_{(k)}|A_i)P(A_i)) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{C_{n-1}^k} + k * 0 + (n-k-1)\frac{1}{C_{n-2}^k}\right)$$

Возьмем одну из не открытых ведущим коробок, например, n-ю. Откуда получим:

$$P(A_n|A_{(k)}) = \frac{P(A_{(k)}|A_n)P(A_n)}{P(A_{(k)})} = \frac{\frac{1}{C_{n-2}^k} * \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{C_{n-1}^k} + k * 0 + (n-k-1)\frac{1}{C_{n-2}^k}\right)} =$$
$$= \frac{n-1}{n(n-k-1)} > \frac{1}{n}, n \geq 3$$

Рассмотрим упрощенное решение:

$$P(G) = P(G|A_1)P(A_1) + P(G|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) =$$
$$= 0 * \frac{1}{n} + \frac{1}{n-k-1} * \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n(n-k-1)}$$

Показать решение