ЭФР и выборка из экспоненциального распределения

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Основные понятия математической статистики (/Topics/Details?id=26)
Раздел
Эмпирическая функция распределения (/SubTopics/Details?id=98)
Дата публикации
24.01.2020
Дата последней правки
06.12.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг

Условие

Имеется выборка $X=(X_1,\cdots,X_n)$ из экспоненциального распределения с параметром $\lambda=5$.

1. Пусть $n=11$ и реализация выборки X имеет вид $x=(5,10,5,10,10,0,10,10,1,3,15)$. Запишите реализацию вариационного ряда и выборочной функции распределения.

2. Используя ЦПТ определите, приблизительно, при $n=100$, с какой вероятностью в точке $\frac{1}{5}$ теоретическая функция распределения отклонится от выборочной более, чем на 1%: то есть следует вычислить $P(|\hat{F}_{X_1}(0.2)-F_{X_1}(0.2)|>0.01F_{X_1}(0.2))$.

Подсказка: для начала вычислите $F_{X_1}(x)$, а затем, при помощи ЦПТ, найдите приблизительное распределение $\hat{F}_{X_1}(0.2)$.

3. Используя ЦПТ определите, при каком наименьшем объеме выборки n вероятность того, что в точке $\frac{1}{5}$ теоретическая функция распределения отклонится от выборочной более, чем на 1%, окажется менее 0.01.

Решение

1. Реализация вариационного ряда имеет вид:

$$\tilde{x}=(0,1,3,5,5,10,10,10,10,10,15)$$

Отсюда получаем, что реализация эмпирической функции распределения имеет вид:

$$\left(\hat{F}_X(x)|\tilde{X}=\tilde{x}\right)=\begin{cases}0, \text{если } x<0\\ \frac{1}{11}, \text{если } 0\leq x<1\\ \frac{2}{11}, \text{если } 1\leq x<3\\ \frac{3}{11}, \text{если } 3\leq x<5\\ \frac{5}{11}, \text{если } 5\leq x<10\\ \frac{10}{11}, \text{если } 10\leq x<15\\ 1, \text{если } x\geq 15\end{cases}$$

2. Используя ЦПТ получаем, что:

$$\hat{F}_{X_1}(0.2)-F_{X_1}(0.2)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(0,\frac{F_X(0.2)(1-F_X(0.2))}{100}\right)$$

Обратим внимание, что $F_{X_1}(0.2)=1-e^{-5*0.2}=1-e^{-1}$, откуда имеем:

$$\hat{F}_{X_1}(0.2)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(1-e^{-1},\frac{e-1}{100e^2}\right)$$

Теперь рассчитаем искомую вероятность:

$$P\left(|\hat{F}_{X_1}(0.2)-F_{X_1}(0.2)|>0.01F_{X_1}(0.2)\right)=1-P\left(|\hat{F}_{X_1}(0.2)-F_{X_1}(0.2)|\leq 0.01F_{X_1}(0.2)\right)=$$

$$=1-P\left(0.99F_{X_1}(0.2)\leq\hat{F}_{X_1}(0.2)\leq 1.01F_{X_1}(0.2)\right)=1-P\left(0.99(1-e^{-1})\leq\hat{F}_{X_1}(0.2)\leq 1.01(1-e^{-1})\right)=$$

$$=1-\left(\Phi\left(\frac{1.01(1-e^{-1})-(1-e^{-1})}{\sqrt{\frac{e-1}{100e^2}}}\right)+\Phi\left(\frac{0.99(1-e^{-1})-(1-e^{-1})}{\sqrt{\frac{e-1}{100e^2}}}\right)\right)\approx 1-\Phi\left(0.131\right)+\Phi\left(-0.131\right)\approx 0.896$$

3. С целью упрощения расчетов и записи обратим внимание, что при достаточно большом n, в силу ЦПТ, хорошо подойдет следующая аппроксимация:

$$\hat{F}_{X_1}(0.2)\dot{\sim}\mathcal{N}\left(0.632121,\frac{0.232544158}{n}\right)$$

Отсюда имеем:

$$P\left(|\hat{F}_{X_1}(0.2)-F_{X_1}(0.2)|>0.01F_{X_1}(0.2)\right)=1-P\left(|\hat{F}_{X_1}(0.2)-F_{X_1}(0.2)|\leq 0.01F_{X_1}(0.2)\right)=$$

$$=1-P\left(0.625799\leq\hat{F}_{X_1}(0.2)\leq 0.638442\right)=2-2\Phi\left(\frac{0.638442-0.632121}{\sqrt{\frac{0.232544158}{n}}}\right)<0.01=>$$

$$=>\frac{0.638442-0.632121}{\sqrt{\frac{0.232544158}{n}}}>2.575829$$

В итоге получаем, что $n=38617$

Показать решение