

## Снеговики

---

### Опубликовал

sobodv

### Автор или источник

sobopedia

### Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

### Тема

Сходимости (/Topics/Details?id=13)

### Раздел

Центральная предельная теорема (/SubTopics/Details?id=73)

### Дата публикации

07.12.2018

### Дата последней правки

15.11.2021

### Последний вносивший правки

sobodv

### Рейтинг

★★★★★

## Условие

На улице гуляют 100 детей, каждый из которых лепит снеговика. Вес снеговика (в килограммах), слепленного случайно выбранным ребенком, является равномерно распределенной случайной величиной  $X_i \sim U(1, 9), i \in \{1, \dots, 100\}$ .

1. Найдите вероятность того, что суммарный вес слепленных снеговиков превысит 510 килограмм.
2. Вычислите вероятность того, что средний вес слепленных снеговиков окажется между 4.9 и 5.1 килограммами.
3. Повторите первый пункт учитывая, что вес каждого снеговика имеет не равномерное, а экспоненциальное распределение  $X_i \sim EXP(0.1), i \in \{1, \dots, 100\}$ .

## Решение

1. Обозначим через  $X_i, i \in \{1, \dots, 100\}$  случайную величину, обозначающую вес слепленного  $i$ -м ребенком снеговика. Очевидно, что  $E(X_1) = \frac{9+1}{2} = 5$  и  $Var(X_1) = \frac{(9-1)^2}{12} = \frac{16}{3}$ . Поскольку веса снеговиков представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины, можем воспользоваться ЦПТ и предположим, что  $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}\left(5 * 100, \frac{16}{3} * 100\right)$ .

Введем стандартную нормальную величину  $Z \sim N(0, 1)$ . Поскольку распределение известно, то нетрудно найти вероятность, пользуясь связью, существующей между функциями распределения произвольной нормальной случайной величины и стандартной нормальной случайной величины:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 510\right) &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 510\right) = \\ &= 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 5 * 100}{\sqrt{\frac{16}{3} * 100}} \leq \frac{510 - 5 * 100}{\sqrt{\frac{16}{3} * 100}}\right) = 1 - F_Z\left(\frac{510 - 5 * 100}{\sqrt{\frac{16}{3} * 100}}\right) = \\ &= 1 - F_Z\left(\frac{510 - 5 * 100}{\sqrt{\frac{16}{3} * 100}}\right) \approx 1 - F_Z(0.433) \approx 1 - 0.6675 \approx 0.3325 \end{aligned}$$

2. Из предыдущего пункта получаем, что средний вес слепленных снеговиков имеет следующее распределение  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}\left(5, \frac{16}{300}\right)$ .

Пользуясь полученным результатом рассчитаем искомую вероятность:

$$P(4.9 \leq \bar{X} \leq 5.1) = F_Z\left(\frac{5.1 - 5}{\sqrt{\frac{16}{300}}}\right) - F_Z\left(\frac{4.9 - 5}{\sqrt{\frac{16}{300}}}\right) \approx 0.335$$

3. Поскольку в данном случае мы имеем дело с экспоненциальным распределением, то нетрудно догадаться, что  $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}(10 * 100, 100 * 100)$ .

Отсюда получаем, что:

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 510\right) = 1 - F_Z\left(\frac{510 - 10 * 100}{\sqrt{100 * 100}}\right) = 1 - F_Z(-4.9) \approx 0.9999995$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.