# Проверка на совместную нормальность.

---

**Опубликовал**
sobodv
**Автор или источник**
sobopedia
**Предмет**
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
**Тема**
Классические многомерные распределения (/Topics/Details?id=19)
**Раздел**
Многомерное нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=87)
**Дата публикации**
17.01.2020
**Дата последней правки**
19.06.2020
**Последний вносивший правки**
sobodv
**Рейтинг**

## Условие

Рассмотрим стандартную нормальную случайную величину $X$. Также, имеется бернуллиевская случайная величина $V$ с параметром $p = 0.5$. Случайные величины $X$ и $V$ - независимы.

1. Найдите распределение случайной величины $Y = 2X * (V - 0.5)$. **Подсказка**: вспомните формулу полной вероятности и примените её для нахождения функции распределения $Y$.

2. Вычислите корреляцию между $X$ и $Y$, а затем проверьте, являются ли они независимыми. **Подсказка**: опять вспомните формулу полной вероятности или её аналог для математического ожидания, а затем найдите ковариацию.

3. Проверьте, является ли совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ многомерным нормальным. Ответ снабдите формальным доказательством. **Подсказка**: проверьте, все ли линейные комбинации $X$ и $Y$ распределены нормально.

# Решение

1. Нетрудно показать, что распределение $Y$ является стандартным нормальным, поскольку:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X * (V - 0.5) \leq y | V = 1)P(V = 1) + P(2X * (V - 0.5) \leq y | V = 0)P(V = 0) =$$
$$= P(X \leq y) * 0.5 + P(-X \leq y) * 0.5 = 0.5 * (\Phi(y) + 1 - \Phi(-y)) = \Phi(y)$$

2. Обратим внимание, что:

$$E(XY) = E(XY|V=1)P(V=1) + E(XY|V=0)P(V=0) = E(X^2)*0.5 - E(X^2)*0.5 = 0$$

Отсюда следует, что случайные величины $X$ и $Y$ не коррелированны. Однако, данные случайные величины зависимы, поскольку, например, $P(X \leq x|Y=x) = 0.5$ для любого $x$.

3. Если $X$ и $Y$ имеют совместное нормальное распределение, то распределение любой их линейной комбинации должны быть нормальным. Рассмотрим линейную комбинацию $X+Y$. Обратим внимание $P(X+Y=0) = P(V=1) = \frac{1}{2}$, что не может быть в случае нормального распределения. Следовательно, $X+Y$ распределено не нормально, а значит совместное распределение $X$ и $Y$ также не является двумерным нормальным.

Показать решение