Интегралофобия

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Непрерывные случайные величины (/Topics/Details?id=8)
Раздел
Медиана, мода и квантили (/SubTopics/Details?id=50)
Дата публикации
07.10.2019
Дата последней правки
07.01.2022
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★★★★

Условие

Мера стресса, испытываемого студентом при виде интеграла, является непрерывной случайной величиной со следующей функцией распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{8}, \text{ при } x \in [0,2] \\ 0, \text{ при } x < 0 \\ 1, \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

Решение задач по математическому анализу позволяет уменьшить объем испытываемого студентом стресса. Если студент прикладывает α усилий, то на столько же снижается его стресс. Например, если случайная величина приняла значение $X = 2$ и студент приложил $\alpha = 0.5$ усилий к изучению математического анализа, то испытываемый стресс составит $S = X - \alpha = 2 - 0.5 = 1.5$.

1. Какое количество усилий α следует приложить студенту к изучению математического анализа, чтобы в половине случаев испытываемый им стресс был нулевым или отрицательным (ощущение умиротворение от решения интеграла) $S \leq 0$.

2. Какое количество усилий α следует приложить студенту к изучению математического анализа, чтобы в четверти случаев испытываемый им стресс был нулевым или отрицательным (ощущение умиротворение от решения интеграла) $S \leq 0$.

3. Найдите математическое ожидание и дисперсию стресса, испытываемого студентом, не изучавшим математический анализ, то есть у которого $\alpha = 0$.

4. Повторите предыдущий пункт для студента, потратившего $\alpha = 0.5$ усилий на изучение математического анализа.

5. Функция удовольствия, получаемого студентом от решения интеграла, выглядит следующим образом: $u(X) = \alpha - \alpha^2 X^3$. Вычислите математическое ожидание удовольствия, которое получит студент от решения интеграла при $\alpha = 0.5$.

6. Найдите математическое ожидание суммы удовольствий, полученных тремя студентами от интегрирования, если их усилия по изучению математического анализа равняются, соответственно, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.5$ и $\alpha_3 = 0.6$.

7. Найдите моду случайной величины X, а затем для случайной величины $\arcsin(\frac{1}{2}X)$.

Решение

1. В данном случае следует найти медиану X, которую обозначим как $X_{0.5}$. Для этого достаточно решить следующее равенство:

$$F_X(X_{0.5}) = 0.5 => \frac{X_{0.5}^3}{8} = 0.5 => X_{0.5} = 4^{\frac{1}{3}}$$

В итоге получаем, что нужно потратить $\alpha = 4^{\frac{1}{3}}$ усилий.

2. Через $X_{0.25}$ обозначим квантиль уровня 0.25 случайной величины X. Тогда, по аналогии с предыдущим пунктом получаем:

$$F_X(X_{0.25}) = 0.25 => \frac{X_{0.25}^3}{8} = 0.25 => X_{0.25} = 2^{\frac{1}{3}}$$

В итоге получаем, что нужно потратить $\alpha = 2^{\frac{1}{3}}$ усилий.

3. Для начала найдем функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{3x^2}{8}, \text{при } x \in [0,2] \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Вопреки стрессу найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$E(X) = \int_0^2 x * \frac{3x^2}{8} dx = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 * \frac{3x^2}{8} dx = \frac{12}{5}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{20}$$

4. Поскольку $S = X - 0.5$, то пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии получаем:

$$E(S) = E(X - 0.5) = E(X) - 0.5 = 1.5 - 0.5 = 1$$

$$Var(S) = Var(X - 0.5) = Var(X) = \frac{3}{20}$$

5. Для начала найдем следующее математическое ожидание:

$$E(X^3) = \int_0^2 x^3 * \frac{3x^2}{8} dx = 4$$

Пользуясь свойствами математического ожидания найдем ожидаемый объем удовольствия:

$$E(U) = E(0.5 - 0.25X^3) = 0.5 - 0.25E(X^3) = 0.5 - 0.25 * 4 = -0.5$$

6. Обозначим через X_i уровень стресса, который бы испытывал бы $i \in \{1, 2, 3\}$-й студент при $\alpha = 0$. Откуда получаем, что:

$$E(U_1 + U_2 + U_3) = E(0.5 - 0.25X_1^3 + 0.5 - 0.25X_2^3 + 0.6 - 0.36X_1^3) =$$
$$= 1.6 - 0.25E(X_1^3) - 0.25E(X_2^3) - 0.36E(X_1^3) = 1.6 - 0.25 * 4 - 0.25 * 4 - 0.36 * 4 = -1.84$$

7. Функция плотности $f_X(x)$ достигает максимума в точке 2, а значит она и будет являться модой.

Для функции от случайной величины воспользуемся известной техникой:

$$F_{\arcsin(\frac{1}{2}X)}(x) = P(\arcsin(\frac{1}{2}X) \leq x) = P(X \leq 2\sin(X)) = F_X(2\sin(x))$$

Теперь нетрудно найти функцию плотности:

$$f_{\arcsin(\frac{1}{2}X)}(x) = \frac{dF_X(2\sin(x))}{dx} = 2\cos(x) f_X(2\sin(x)) = 2\cos(x)\frac{3(2\sin(x))^2}{8}$$

Максимизируя данную функцию плотности по x получаем (https://www.wolframalpha.com/input/?i=maximize+2cos%28x%29*%283%282sin%28x%29%29%5E2%29%2F8%2C+x%3E%3D0%2C+x%3C%3D1) моду как точку глобального максимума $X^{\text{mod}} \approx 0.955$.

Показать решение