Вывод функции плотности Хи-квадрат распределения

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические непрерывные распределения (/Topics/Details?id=11)
Раздел
Хи-квадрат распределение (/SubTopics/Details?id=78)
Дата публикации
24.01.2019
Дата последней правки
25.01.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

Случайная величина χ_n^2 имеет Хи-квадрат распределение с n степенями свободы.

1. Найдите функцию плотности χ_n^2 при $n = 1$

2. Найдите функцию плотности χ_n^2 при $n = 2$

3. Рассмотрим случайную величину $\eta = X^2 + Y^2$, где X и Y - стандартные нормальные величины. Приведите пример, когда случайная величина η не будет иметь Хи-квадрат распределение.

4. Найдите функцию плотности χ_n^2 при произвольном $n \in N$

5. Повторите предыдущий пункт. используя индукцию по числу степеней свободы

Решение

1. Случайную величину χ_1^2 можно выразить как $\chi_1^2 = X^2$, где $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ - стандартная нормальная величина. Тогда получаем, что при $x \geq 0$:

$$F_{\chi_1^2}(x) = P(\chi_1^2 \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) =$$
$$= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = 2F_X(\sqrt{x}) - 1$$

Дифференцируя получаем функцию плотности при $x \geq 0$ (иначе принимает нулевые значения):

$$f_{\chi_1^2}(x) = \frac{dF_{\chi_1^2}(x)}{dx} = \frac{d\left(2F_X(\sqrt{x}) - 1\right)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sqrt{x}^2}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}$$

2. Случайную величину χ_2^2 можно выразить как $\chi_2^2 = X^2 + Y^2$, где $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ - две независимых стандартных нормальных величины. Воспользуемся формулой для суммы двух независимых случайных величин (https://sobopedia.azurewebsites.net/SubTopics/Details?id=61):

$$f_{X^2+Y^2}(x) = \int_0^x \left(\frac{t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}\right) * \left(\frac{(x-t)^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x-t}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}\right) dt =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} dt = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{-(t-0.5x)^2 + 0.25x^2}} dt =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} \int_{-0.5x}^{0.5x} \frac{1}{\sqrt{-(t-0.5x)^2 + 0.25x^2}} d(t-0.5x) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} \arcsin(\frac{z}{0.5x})|_{-0.5x}^{0.5x} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} (\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} \pi = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}$$

Отметим, что интервал от 0 до x брался для того, чтобы не учитывать случаи, когда одна из функций плотности обнуляется вследствие того, что её аргумент оказывается отрицательным.

3. Нарушим допущение о независимости. Допустим, что $X = -Y$, тогда $\eta = X^2 + (-X)^2 = 2X^2$. Следовательно, функция распределения η принимает следующий вид (при $x \geq 0$):

$$F_\eta(x) = P(\eta \leq x) = P(2X^2 \leq x) = P\left(-\sqrt{\frac{x}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{x}{2}}\right) = 2F_X\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) - 1$$

Далее, дифференцируя $F_\eta(x)$ получаем функцию плотности $f_\eta(x)$ и убеждаемся, что она отличается от функции плотности случайной величины χ_2^2, полученной во втором пункте.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.