

## Фирма, прибыль и квантили

---

### Опубликовал

sobodv

### Автор или источник

### Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

### Тема

Непрерывные случайные величины (/Topics/Details?id=8)

### Раздел

Медиана, мода и квантили (/SubTopics/Details?id=50)

### Дата публикации

09.10.2019

### Дата последней правки

21.10.2023

### Последний вносивший правки

sobodv

### Рейтинг

☆☆

## Условие

Выручка фирмы является случайной величиной  $X$  со следующей функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3(x-2)^2, & \text{при } x \in [2, 3] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Для простоты допустим, что общие переменные издержки фирмы равны  $VC = 0$ , а постоянные -  $FC = 2$ . Также, фирма должна уплатить налог в размере 30% от выручки. Оставшиеся (за вычетом налогов и издержек) средства фирмы будем именовать её прибылью.

1. Найдите математическое ожидание и дисперсию **выручки** фирмы.
2. Найдите математическое ожидание и дисперсию **прибыли** фирмы.
3. Повторите предыдущий пункт учитывая, что постоянные издержки  $FC$  не фиксированы, а являются равномерно распределенной на отрезке от 1 до 3 случайной величиной и никак не зависят от выручки (в дальнейших пунктах постоянные издержки вновь фиксированы).
4. Найдите медиану и моду **выручки** фирмы.
5. Найдите медиану и моду **прибыли** фирмы.
6. Найдите функцию распределения и квантиль уровня 0.8 **выручки** фирмы.

7. Если прибыль фирмы окажется отрицательной, то ей придется уйти с рынка. Государство решило выделить фирме безвозмездный трансфер в размере  $\alpha$ . Какой **минимальный** объем трансфера государство должно выделить фирме, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0.8, она не ушла с рынка?
8. Государство решило поддержать фирму, выделяя ей субсидии в размере  $100\beta\%$  от выручки. Также предположим, что как до введения субсидии, так и после фиксированные издержки составляли  $FC = 1$ . Найдите  $\beta$  учитывая, что математическое ожидание прибыли фирмы возросло вдвое.

## Решение

1. Для начала рассчитаем математическое ожидание выручки:

$$E(X) = \int_2^3 3(x-2)^2 * x dx = \frac{11}{4} = 2.75$$

Теперь найдем математическое ожидание квадрата выручки:

$$E(X^2) = \int_2^3 3(x-2)^2 * x^2 dx = \frac{38}{5} = 7.6$$

Используя полученные результаты рассчитаем дисперсию:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 7.6 - 2.75^2 = \frac{3}{80} = 0.0375$$

2. Обозначим через  $Y$  прибыль фирмы. Рассчитаем её математическое ожидание и дисперсию пользуясь соответствующими свойствами:

$$E(Y) = E((1 - 0.3)X - 2) = 0.7E(X) - 2 = 0.7 * 2.75 - 2 = -0.075$$

$$Var(Y) = Var(0.7X - 2) = 0.49Var(X) = 0.49 * 0.0375 = 0.018375$$

3. Поскольку постоянные издержки распределены равномерно, то  $E(FC) = \frac{1+3}{2} = 2$ , а значит:

$$E(Y) = E((1 - 0.3)X - FC) = 0.7E(X) - E(FC) = 0.7 * 2.75 - 2 = -0.075$$

4. Поскольку мода является локальным максимумом функции плотности, то ею, очевидно, будет значение 3. Для нахождения медианы  $m_X$  решим следующее равенство:

$$\int_2^{m_X} 3(x-2)^2 dx = 0.5$$

Решая получаем, что  $m_X \approx 2.79$ .

5. Поскольку в данном случае имело место линейное преобразование, то нетрудно показать, что модой станет значение  $0.7 * 3 - 2 = 0.1$ , а медианой  $m_Y = 0.7 * 2.79 - 2 = -0.047$ .

6. Сперва найдем функцию распределения выручки фирмы на носителе, то есть при  $x \in [2, 3]$ :

$$F_X(x) = \int_2^x 3(x-2)^2 dx = (x-2)^3$$

В результате получаем функцию распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2 \\ (x - 2)^3, & \text{если } x \in [2, 3] \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Отсюда находим квантиль:

$$(x_{0.8} - 2)^3 = 0.8 \implies x_{0.8} \approx 2.929$$

7. Необходимо решить следующее равенство:

$$P(0.7X - 2 + \alpha > 0) = 0.8$$

Перепишем его в общем виде:

$$P\left(X > \frac{2 - \alpha}{0.7}\right) = \int_{\frac{2 - \alpha}{0.7}}^3 3(x - 2)^2 dx \approx 2.915\alpha^3 - 5.248\alpha^2 + 3.149\alpha + 0.370 = 0.8$$

Решая для  $\alpha$  получаем (<https://www.wolframalpha.com/input/?i=%28integrate+%283%28x-2%29%5E2+dx%29+from+%282-a%29%2F%280.7%29+to+3%29%3D0.8%29>), что  $\alpha \approx 0.191$ .

8. Решим следующее равенство:

$$(0.7 + \beta)E(X) - 1 = 2(0.7E(X) - 1)$$

Исходя из данного равенства очевидно, что  $\beta = 0.34$ .

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.