Сходимость эмпирической функции распределения к теоретической

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Основные понятия математической статистики (/Topics/Details?id=26)
Раздел
Эмпирическая функция распределения (/SubTopics/Details?id=98)
Дата публикации
30.01.2019
Дата последней правки
23.01.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

Сделайте следующее:

1. Используя закон больших чисел (https://sobopedia.azurewebsites.net/SubTopics/Details?id=70) докажите, что в каждой точке $x \in R$ эмпирическая функция распределения сходится к теоретической по вероятности: $\hat{F}_X(x) \overset{p}{\to} F_\xi(x)$.

2. Используя неравенство Чебышёва (https://sobopedia.azurewebsites.net/SubTopics/Details?id=72), найдите вероятность того, что разница между значениями эмпирической функции распределения и теоретической превысит некоторое значение.

3. Найдите, к чему стремится распределение разницы эмпирической и теоретической функций распределения в точке $x \in R$, при объеме выборке стремящемся к бесконечности.

Решение

1. Рассмотрим математическое ожидание функции индикатора от i-го наблюдения, $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$E\left(I(X_i \leq x)\right) = P(X_i \leq x) = F_{X_i}(x) = F_\xi(x)$$

Поскольку случайные величины $I(X_i \leq x)$ независимы и одинаково распределены, то, согласно закону больших чисел (https://sobopedia.azurewebsites.net/SubTopics/Details?id=70) получаем:

$$\hat{F}_X(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x) \xrightarrow{p} F_\xi(x)$$

2. Очевидно, что случайная величина $\hat{F}_X(x)$ является неотрицательной, вследствие чего, используя неравенство Чебышёва (https://sobopedia.azurewebsites.net/SubTopics/Details?id=72), получаем:

$$E(\hat{F}_X(x)) = F_\xi(x)$$

$$Var(\hat{F}_X(x)) = \frac{1}{n}F_\xi(x)\left(1 - F_\xi(x)\right)$$

$$P(|\hat{F}_X(x) - F_\xi(x)| > k) \leq \frac{\frac{1}{n}F_\xi(x)\left(1 - F_\xi(x)\right)}{k^2} \leq \frac{0.25}{nk^2} =>$$
$$=> P(|\hat{F}_X(x) - F_\xi(x)| > \frac{k}{\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{4k^2}$$

3. Если объем выборки стремится к бесконечности, то, поскольку случайные величины $\frac{1}{n}I(X_i \leq x)$ независимы и одинаково распределены, можно воспользоваться ЦПТ (https://sobopedia.azurewebsites.net/SubTopics/Details?id=73):

$$\frac{\sqrt{n}\left(\hat{F}_X(x) - F_\xi(x)\right)}{\sqrt{F_\xi(x)\left(1 - F_\xi(x)\right)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 1\right)$$

Показать решение