

# Оборотень Вовочка

---

**Опубликовал**

sobodv

**Автор или источник**

sobopedia

**Предмет**

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

**Тема**

Сходимости (/Topics/Details?id=13)

**Раздел**

Неравенство Чебышёва (/SubTopics/Details?id=72)

**Дата публикации**

14.11.2019

**Дата последней правки**

08.11.2021

**Последний вносивший правки**

sobodv

**Рейтинг**

★★★

## Условие

Вовочка съел заколдованный пирожок и стал каждый день между 10 и 12 часами ночи превращаться в оборотня, принимая вновь обычный облик между 6 и 9 часами утра. Время до превращения в оборотня (в часах с 10 до 12 часов ночи) является случайной величиной  $X$  со следующей функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{при } x \in [0, 2] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

По поводу времени до принятия нормального облика (в часах с 6 до 9 часов утра) известно, что это случайная величина  $Y$ , у которой  $E(Y^2) = 2$  и  $Var(Y) = 1$ . Корреляция между временем до обращения в оборотня и обратно составляет  $\frac{1}{2}$ .

Таким образом, Вовочка превращается в оборотня в  $(10 + X)$  часов вечера и принимает нормальный облик в  $(6 + Y)$  часов утра.

1. Используя неравенство Маркова найдите нижнюю границу вероятности того, что Вовочка превратится в оборотня до 11 часов вечера. Затем, найдите верхнюю границу для вероятности того, что Вовочка превратится в оборотня не раньше, чем за десять минут до конца дня. Сравните полученные границы с истинными значениями.

2. Используя неравенство Чебышева оцените вероятность того, что, во-первых, отклонение времени принятия нормального облика от математического ожидания составит больше полутора часов. Во-вторых, что отклонение времени принятия нормального облика от математического ожидания окажется меньше двух стандартных отклонений. Можно ли в последнем случае получить более точную границу, используя дополнительную информацию, имеющуюся в задаче?
3. При помощи неравенства Маркова оцените верхнюю границу вероятности того, что на протяжении дня Вовочка пробудет оборотнем больше 10-и часов.
4. Находясь в облике Оборотня Вовочка с 10 часов вечера до 3 часов ночи воет на луну, а с 3 часов ночи до 9 утра бегают по лесу. Используя неравенство Маркова оцените вероятность того, что Вовочка будет заниматься одной из этих активностей хотя бы на два часа дольше, чем другой.
5. Вовочке удалось совладать с обликом оборотня и теперь он не воет на луну и не бегают по лесу. Более того, каждое утро он отправляется на занятия в университет к 7 утра. При этом дорога до университета (в часах) является равномерно распределенной случайной величиной с математическим ожиданием  $\frac{1}{2}$  и дисперсией  $\frac{1}{12}$ . Если до 7 часов утра Вовочка принял нормальный облик, то он точно идет в университет, а в противном случае отправится на учебу с вероятностью  $\frac{1}{4}$ . Используя неравенство Чебышева оцените вероятность того, что Вовочка придет в университет и никого не напугает своим обликом.

## Решение

### В РАЗРАБОТКЕ

1. Для начала найдем математическое ожидание времени до обращения в оборотня:

$$E(X) = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{4}{3}$$

Вовочка превратится в оборотня в 11 часов, если время до обращения составит не более, чем 1 час, а значит:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= 1 - P(X \geq 1) \geq 1 - \frac{E(X)}{1} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(X \leq 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Для второго события необходимо, чтобы прошло более, чем  $\frac{120-10}{60} = \frac{11}{6}$  часа, откуда:

$$P\left(X \geq \frac{11}{6}\right) \leq \frac{E(X)}{\frac{11}{6}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{11}{6}} = \frac{8}{11}$$

Сравним с истинными значениями:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4} \\ P\left(X \geq \frac{11}{6}\right) &= \int_{\frac{11}{6}}^2 \frac{x}{2} dx = \frac{23}{144} \end{aligned}$$

2. Сперва найдем математическое ожидание времени до принятия нормального облика:

$$E(Y) = \sqrt{E(Y)^2 - \text{Var}(Y)} = \sqrt{2 - 1} = 1$$

Теперь найдем искомую вероятность:

$$P\left(|Y - E(Y)| \geq \frac{3}{2}\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}$$

Найдем вторую вероятность:

$$P(|Y - 1| \leq 2\sqrt{\text{Var}(Y)}) = P(|Y - 1| \leq 2) \geq 1 - \frac{\text{Var}(Y)}{2^2} = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

При этом очевидно, что поскольку случайная величина  $Y$  принимает значения в диапазоне  $[0, 3]$ , то случайная величина  $|Y - 1|$  будет принимать значения в интервале  $[0, 2]$ , а значит:

$$P(|Y - E(Y)| \leq 2) = 1$$

3. Через  $Z = (2 - X) + Y + 6$  обозначим случайную величину - время, проведенное Вовочкой в качестве оборотня. При этом очевидно, что:

$$E(Z) = E((2 - X) + Y + 6) = 2 - \frac{4}{3} + 1 + 6 = \frac{23}{3}$$

Воспользуемся неравенством Маркова:

$$P(Z \geq 10) \leq \frac{\frac{23}{3}}{10} = \frac{23}{30}$$

4. В облике оборотня Вовочка будет выть на луну  $(2 - X) + 3$  часа. Бегать по лесу он будет  $(6 - 3) + Y$  часов. Разница между этими активностями является случайной величиной:

$$(2 - X) + 3 - (6 - 3) + Y = 2 - (X + Y)$$

Отсюда, вследствие неравенства Маркова, получаем, что:

$$P(|2 - (X + Y)| > 2) = P(X + Y > 4) \leq \frac{E(X + Y)}{4} = \frac{\frac{7}{3}}{4} = \frac{7}{12}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.