

Случайные отряды

Опубликовал

sobody

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Случайные события (/Topics/Details?id=5)

Раздел

Условная вероятность, формула Байеса, формула полной вероятности и независимость событий (/SubTopics/Details?id=32)

Дата публикации

15.09.2019

Дата последней правки

18.09.2023

Последний вносивший правки

sobody

Рейтинг



Условие

У вас есть три военных отряда, состоящие из мечников, лучников и копейщиков. Составы отрядов представлены в таблице ниже.

Номер отряда	Мечники	Лучники	Копейщики
1	10	5	3
2	5	5	5
3	5	10	15

1. Вы выбираете одного воина из отряда 1. С какой вероятностью он окажется мечником?
2. Вы случайным образом переводите воина из отряда 1 в отряд 2, а затем наугад выбираете воина из отряда 2. С какой вероятностью выбранный вами из 2-го отряда воин окажется мечником? **Подсказка:** воспользуйтесь формулой полной вероятности.
3. Вы случайным образом переводите воина из отряда 1 в отряд 2, а затем наугад выбираете воина из отряда 2. Выбранный вами воин из 2-го отряда оказался мечником. С какой вероятностью из отряда 1 в отряд 2 вы перевели лучника? **Подсказка:** воспользуйтесь формулой Байеса.
4. Вы случайным образом выбираете **два** воина из отряда 1. Первого из них вы назначаете командиром, а второго - помощником. Верно ли, что вероятность того, что вы назначите мечника командиром а лучника - помощником такая же, как вероятность того, что командиром станет лучник, а помощником - мечник? Изменится ли ответ, если сначала вы будете назначать помощника, а затем - командира? Как найденные вероятности будут соотноситься с вероятностью того, что из двух наугад взятых из 1-го отряда воинов один является лучником, а другой - мечником.
5. Вы случайным образом переводите **два** воина (но **не копейщика**) из отряда 1 в отряд 2, а затем наугад выбираете воина из отряда 2. Выбранный вами воин из 2-го отряда оказался мечником. С какой вероятностью из отряда 1 в отряд 2 вы перевели двух лучников?

6. Вы случайным образом переводите воина из отряда 1 в отряд 2, а затем наугад выбираете воина из отряда 2 и переводите его в отряд 3. С какой вероятностью выбранный вами воин из 3-го отряда окажется мечником?

7. Вы случайным образом переводите воина из отряда 1 в отряд 2, а затем наугад выбираете воина из отряда 2 и переводите его в отряд 3. Выбранный вами воин из 3-го отряда оказался мечником. С какой вероятностью выбранный вами из 1-го отряда воин был лучником?

Решение

1. Обозначим через M_i событие - из i -го отряда достали мечника. Поскольку в первом отряде 10 мечников, а всего воинов $10 + 5 + 3 = 18$, то соответствующая вероятность составит:

$$P(M_1) = \frac{10}{18}$$

2. Через L_i и K_i обозначим события, в соответствии с которыми из i -го отряда вы достаете лучника и копейщика соответственно. Необходимо найти вероятность события M_2 . Обратим внимание, что события M_1 , L_1 и K_1 составляют полную группу попарно несовместных событий. Следовательно, можно воспользоваться формулой полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(M_2) &= P(M_2|M_1)P(M_1) + P(M_2|L_1)P(L_1) + P(M_2|K_1)P(K_1) = \\ &= \frac{5+1}{15+1} \frac{10}{18} + \frac{5}{15+1} \frac{5}{18} + \frac{5}{15+1} \frac{3}{18} = \frac{25}{72} \end{aligned}$$

3. Воспользуемся формулой Байеса:

$$\begin{aligned} P(L_1|M_2) &= \frac{P(L_1 \cap M_2)}{P(M_2)} = \frac{P(M_2|L_1)P(L_1)}{P(M_2|M_1)P(M_1) + P(M_2|L_1)P(L_1) + P(M_2|K_1)P(K_1)} = \\ &= \frac{\frac{5}{15+1} \frac{5}{18}}{\frac{5+1}{15+1} \frac{10}{18} + \frac{5}{15+1} \frac{5}{18} + \frac{5}{15+1} \frac{3}{18}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Обратите внимание, что вероятность $P(M_2|L_1)P(L_1)$ встречается как в числителе, так и в знаменателе, что типично (хоть и не абсолютно всегда) для задач на формулу Байеса.

4. Обозначим события M_1^1 и L_1^1 , в соответствии с которыми помощники становятся мечник и лучник соответственно. Через M_1^2 и L_1^2 обозначим аналогичные события для статуса командира. Посчитаем обе вероятности:

$$\begin{aligned} P(M_1^1 \cap L_1^2) &= P(M_1^1|L_1^2)P(L_1^2) = \frac{10}{17} \frac{5}{18} = \frac{25}{153} \\ P(L_1^1 \cap M_1^2) &= P(L_1^1|M_1^2)P(M_1^2) = \frac{5}{17} \frac{10}{18} = \frac{25}{153} \end{aligned}$$

Исходя из полученных вероятностей можно заключить, что утверждение является верным, причем независимо от того, в каком порядке выбираются командир и помощник.

Найденные вероятности в сумме равняются вероятности того, что из двух наугад взятых из 1-го отряда воинов один является лучником, а другой - мечником, которую можно рассчитать как $\frac{C_{10}^1 C_5^1}{C_{18}^2} = \frac{50}{153}$.

5. Обозначим через ML_1 событие, при котором первый из двух выбранных из первого отряда воинов оказался мечником, а второй - лучником. Остальные события обозначим по аналогии. Исходя из предыдущего пункта очевидно, что $P(ML_1) = P(LM_1)$. Тогда искомая вероятность принимает вид:

$$\begin{aligned} P(LL_1|M_2) &= \frac{P(M_2|LL_1)P(LL_1)}{P(M_2|MM_1)P(MM_1) + 2P(M_2|ML_1)P(ML_1) + P(M_2|LL_1)P(LL_1)} = \\ &= \frac{\frac{5}{15+2} \left(\frac{5}{18} \frac{5-1}{18-1} \right)}{\frac{5+2}{15+2} \left(\frac{10}{18} \frac{10-1}{18-1} \right) + 2 \frac{5+1}{15+2} \left(\frac{10}{18} \frac{5}{18-1} \right) + \frac{5}{15+2} \left(\frac{5}{18} \frac{5-1}{18-1} \right)} = \frac{10}{133} \end{aligned}$$

6. Приведем решение с использованием необходимых формул, а непосредственная подстановка чисел является достаточно долгим процессом, вследствие чего его можно проигнорировать.

$$P(M_3) = P(M_3|M_2 \cap M_1)P(M_2|M_1)P(M_1) + P(M_3|M_2 \cap L_1)P(M_2|L_1)P(L_1) + \dots + P(M_3|K_2 \cap K_1)P(K_2|K_1)P(K_1)$$

В качестве примера рассмотрим расчет одного из слагаемых (остальные расчеты осуществляются по аналогии):

$$P(M_3|M_2 \cap M_1)P(M_2|M_1)P(M_1) = \frac{6}{31} \frac{5+1}{15+1} \frac{10}{18}$$

7. По аналогии с предыдущим пунктом приведем лишь необходимое выражение, принцип расчета которого очевиден исходя из решения предшествовавших заданий:

$$P(L_1|M_3) = \frac{P(M_3|L_1 \cap M_2)P(M_2) + P(M_3|L_1 \cap L_2)P(L_2) + P(M_3|L_1 \cap K_2)P(K_2)}{P(M_3)}$$

В качестве примера рассмотрим расчет одного из слагаемых в числителе (остальные расчеты осуществляются по аналогии):

$$P(M_3|L_1 \cap M_2)P(M_2) = \frac{6}{31} * \frac{25}{72}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.