Оценивание параметров совместного распределения

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Оценки (/Topics/Details?id=30)
Раздел
Определение и свойства оценок (/SubTopics/Details?id=100)
Дата публикации
13.02.2020
Дата последней правки
15.02.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪

Условие

В рамках исследования были опрошены n студентов, каждый из которых... $X = (X_1, \cdots, X_n)$ из распределения ξ_1 и выборка $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ из распределения ξ_2. Любые X_i и X_j такие, что $i \neq j$ - являются независимыми.

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} b+a \\ b-a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (b+a)^2 & \frac{(b^2-a^2)}{2} \\ \frac{(b^2-a^2)}{2} & (b-a)^2 \end{bmatrix}\right)$$

Пусть $b > a > 0 >$.

1. Найдите корреляцию между X_5 и Y_5.

2. Определите, при каком значении c оценка $\hat{b}_n = c\left(\overline{X}_n - \overline{Y}_n\right)$ будет несмещенной и состоятельной оценкой параметра b. Посчитайте MSE данной оценки.

3. Проверьте, будет ли оценка $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}\overline{Y}}{2}$ несмещенной и состоятельной оценкой $\theta = Cov(\xi_1, \xi_2)$.

Решение

1. Очевидно, что:

$$Corr(X_5, Y_5) = Corr(\xi_1, \xi_2) = \frac{\frac{(b^2-a^2)}{2}}{\sqrt{(b-a)^2(b+a)^2}} = 0.5$$

2. Для начала обеспечим соблюдение условия несмещенности:

$$E\left(c\left(\overline{X}_n - \overline{Y}_n\right)\right) = c*(b+a+b-a) = 2cb$$

Отсюда получаем, что $c = \frac{1}{2}$.

3. Найдем математическое ожидание данной оценки:

$$E\left(\frac{\overline{X}\overline{Y}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(Cov(\overline{X},\overline{Y}) + E(\overline{X})E(\overline{Y})\right) = \frac{1}{2}\left(Cov\left(\frac{X_1}{n}+\cdots+\frac{X_n}{n}, \frac{Y_1}{n}+\cdots+\frac{Y_n}{n}\right) + E(\overline{X})E(\overline{Y})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(n*\frac{1}{n^2}Cov(\xi_1,\xi_2) + (b+a)(b-a)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(b^2-a^2)}{2n} + (b^2-a^2)\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{(b^2-a^2)}{2}$$

Исходя из полученного результата заключаем, что оценка является смещенной. Однако, нетрудно показать, что асимптотичекая несмещенность все же соблюдается:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\overline{X}\overline{Y}}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{(b^2-a^2)}{2} = \frac{(b^2-a^2)}{2} = Cov(\xi_1,\xi_2)$$

Обратим внимание, что $Cov(X_iY_j, X_kY_t) \neq 0$ только в одном из трех случаев:

- $i = k$ и $j = t$ - существует n способов подобрать такие индексы
- $i = k$ и $j \neq t$ - существует $n^2(n-1)$ способов подобрать такие индексы
- $i \neq k$ и $j = t$ - существует $n^2(n-1)$ способов подобрать такие индексы

Пользуясь полученным результатом нетрудно показать состоятельность оценки и найти её дисперсию:

$$\lim_{n\to\infty} Var\left(\frac{\overline{X}\overline{Y}}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^4}Cov\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iY_j, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iY_j\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}Cov\left(X_iY_j, X_kY_t\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^4}\left(nCov(X_1Y_1,X_1Y_1) + n^2(n-1)Cov(X_1Y_2,X_1Y_1) + n^2(n-1)Cov(X_1Y_1,X_2Y_1)\right) = 0$$

Показать решение