

Распределение порядковых статистик

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Основные понятия математической статистики (/Topics/Details?id=26)

Раздел

Определение выборки и её основные характеристики (/SubTopics/Details?id=94)

Дата публикации

26.01.2019

Дата последней правки

27.11.2021

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★

Условие

Дана выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ и её вариационный ряд $X = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$.

1. Найдите распределение максимальной порядковой статистики $X_{(n)}$.
2. Найдите распределение минимальной порядковой статистики $X_{(1)}$.
3. Найдите распределение второй с конца порядковой статистики $X_{(n-1)}$.
4. Найдите распределение произвольной порядковой статистики $X_{(i)}$.
5. Являются ли порядковые статистики независимыми?

Решение

1. Найдём функцию распределения $X_{(n)}$, пользуясь тем, что наблюдения в выборке независимы и одинаково распределены:

$$\begin{aligned} F_{\max(X_1, \dots, X_n)}(x) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = \\ &= P(X_1 \leq x) * \dots * P(X_n \leq x) = F_{X_1}(x) * \dots * F_{X_n}(x) = (F_{X_1}(x))^n \end{aligned}$$

2. Найдем функцию распределения $X_{(1)}$, пользуясь тем, что наблюдения в выборке независимы и одинаково распределены:

$$\begin{aligned} F_{\min(X_1, \dots, X_n)}(x) &= P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x) = 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) = \\ &= 1 - P(X_1 > x) * \dots * P(X_n > x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x)) * \dots * (1 - F_{X_n}(x)) = \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n \end{aligned}$$

3. Чтобы реализация порядковой статистики $X_{(n-1)}$ была меньше некоторого числа x , необходимо, чтобы реализация ровно хотя бы $n - 1$ наблюдений была меньше x . То есть имеет место одно из двух несовместных событий: либо все наблюдения меньше, чем x , либо ровно $n - 1$ меньше, а одно - больше. Исходя из данной логики получаем:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n-1)}}(x) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) + C_n^1 P(X_1 > x) * P(\max(X_2, \dots, X_n) \leq x) = \\ &= (F_{X_1}(x))^n + n \left((1 - F_{X_1}(x)) (F_{X_1}(x))^{n-1} \right) \end{aligned}$$

4. По аналогии с предыдущим пунктом суммируем все несовместные события, начиная с того, где ровно i наблюдений меньше чем x , и заканчивая тем, где все наблюдения меньше чем x :

$$F_{X_{(i)}}(x) = \sum_{k=i}^n C_n^k (1 - F_{X_1}(x))^{n-k} (F_{X_1}(x))^k$$

5. Не являются, поскольку, например, если максимальное значение меньше x , то и минимальное значение также должно быть меньше x .

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.