Функция правдоподобия для параметров нормального распределения

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Метод максимального правдоподобия (/Topics/Details?id=31)
Раздел
Введение в ММП (/SubTopics/Details?id=109)
Дата публикации
27.10.2019
Дата последней правки
27.10.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

Рассмотрим выборку $X = (X_1, \ldots, X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2)$. В качестве данных будем рассматривать реализацию выборки $x = (x_1, \ldots x_n)$. Оцениваются оба параметра: θ_1 и θ_2.

1. Выпишите функцию правдоподобия.

2. Найдите оценку максимального правдоподобия вектора рассматриваемых параметров. Запишите выражения для реализаций этих оценок.

3. Для каждой из найденных оценок проверьте соблюдение свойств несмещенности и состоятельности.

4. Найдите информацию Фишера.

5. Найдите асимптотическое распределение оценок и для каждой из них постройте асимптотический доверительный интервал уровня $1-\alpha$.

6. Найдите асимптотическое распределение $\sqrt{\theta_2}e^{\theta_1}$ и постройте асимптотический доверительный интервал уровня $1-\alpha$.

Решение

1. Функция правдоподобия:

$$L(\theta; x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$$

2. Максимизируем логарифм функции правдоподобия:

$$\max_{\theta} -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\theta_2) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}$$

Условия первого порядка для этой системы принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)}{\theta_2} = 0 \\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2} - \frac{n}{2\theta_2} = 0 \end{cases} => \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1) = 0 \\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}{\theta_2} = n \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $\hat{\theta}_1^{ML} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}$. Подставляя этот результат во второе уравнение имеем $\hat{\theta}_2^{ML} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n}$. Реализации данных оценок будут $\left(\hat{\theta}_1^{ML}|X=x\right) = \overline{x}$ и $\left(\hat{\theta}_2^{ML}|X=x\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$.

3. То, что оценка $\hat{\theta}_1^{ML}$ является несмещенной и состоятельной показать очень просто. По аналогии очевидно, что $\hat{\theta}_2^{ML}$ является смещенной, но состоятельной оценкой.

4. Найдем информацию Фишера вторым способом, поочередно находя каждый элемент матрицы вторых производных (Гессиана):

$$I_X\left(\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix}\right)_{11} = -E\left(-\frac{n}{\theta_2}\right) = \frac{n}{\theta_2}$$

$$I_X\left(\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix}\right)_{22} = -E\left(-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2}{\theta_2^3} + \frac{n}{2\theta_2^2}\right) = E\left(\frac{n\theta_2}{\theta_2^3} - \frac{n}{2\theta_2^2}\right) = \frac{n}{2\theta_2^2}$$

$$I_X\left(\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix}\right)_{12} = I_X\left(\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix}\right)_{21} = -E\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)}{\theta_2^2}\right) = 0$$

5. Найдем обратную матрицу Фишера:

$$I_X\left(\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{\theta_2}{n} & 0\\ 0 & \frac{2\theta_2^2}{n}\end{bmatrix}$$

Следовательно, асимптотическое распределение принимает вид:

$$\begin{bmatrix}\hat{\theta}_1^{ML}\\ \hat{\theta}_2^{ML}\end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{\theta_2}{n} & 0\\ 0 & \frac{2\theta_2^2}{n}\end{bmatrix}\right)$$

В результате асимптотический доверительный интервал уровня $(1-\alpha)$ принимает вид:

$$\left(\hat{\theta}_1^{ML} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\theta_2}{n}}, \hat{\theta}_1^{ML} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\theta_2}{n}}\right),\ \text{для } \theta_1$$

$$\left(\hat{\theta}_2^{ML} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2\theta_2^2}{n}}, \hat{\theta}_2^{ML} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2\theta_2^2}{n}}\right),\ \text{для } \theta_2$$

Реализации оценок этих доверительных интервалов имеют следующий вид:

$$\left(\hat{\theta}_1^{ML} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}{n}}, \hat{\theta}_1^{ML} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}{n}}\right),\ \text{для } \theta_1$$

$$\left(\hat{\theta}_2^{ML} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}\right)^2}{n}}, \hat{\theta}_2^{ML} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}\right)^2}{n}}\right),\ \text{для } \theta_2$$

6. Введем функцию $g(\theta_1,\theta_2)=\sqrt{\theta_2}e^{\theta_1}$. Воспользуемся дельта методом. Сперва найдем градиент:

$$g = \nabla g(\theta_1,\theta_2) = \begin{bmatrix}\frac{\partial g(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\\ \frac{\partial g(\theta_1\theta_2)}{\partial\theta_2},\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{\theta_2}e^{\theta_1}\\ \frac{1}{2\sqrt{\theta_2}}e^{\theta_1}\end{bmatrix}$$

Теперь отыщем асимтотическую дисперсию рассматриваемой функции:

$$As.Var(\hat{g}(\theta_1,\theta_2)^{ML}) = \begin{bmatrix}\sqrt{\theta_2}e^{\theta_1} & \frac{1}{2\sqrt{\theta_2}}e^{\theta_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\theta_2}{n} & 0\\ 0 & \frac{2\theta_2^2}{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\theta_2}e^{\theta_1}\\ \frac{1}{2\sqrt{\theta_2}}e^{\theta_1}\end{bmatrix} = \frac{3\theta_2^2e^{2\theta_1}}{2n}$$

Подставляя вместо истинных значений параметров оценки можно получить оценку асимптотической дисперсии:

$$\widehat{As.Var}(\hat{g}(\theta_1,\theta_2)^{ML}) = \frac{3\left(\hat{\theta}_2^{ML}\right)^2 e^{2\hat{\theta}_1^{ML}}}{2n}$$

Показать решение