Простая счетная задача на многомерное нормальное распределение

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические многомерные распределения (/Topics/Details?id=19)
Раздел
Многомерное нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=87)
Дата публикации
10.01.2019
Дата последней правки
13.01.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

Случайная величина X имеет многомерное нормальное распределение:

$$X \sim N\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.3 \\ 0.5 & 4 & 1.2 \\ -0.3 & 1.2 & 9 \end{bmatrix}\right)$$

1. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу X.

2. Найдите маргинальное распределение первой компоненты X, то есть распределение X_1.

3. Найдите совместное распределение второй и третьей компонент X, то есть распределение $\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$.

4. Найдите распределение случайного вектора $\begin{bmatrix} X_3 \\ X_1 \end{bmatrix}$.

5. Найдите распределение $AX + a$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 12 \\ -5 & 0.5 & 3 \\ 3 & 3 & 1.5 \end{bmatrix}$ и $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$.

6. Найдите $P(B^T X + b \leq 15)$, где $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ и $b = 8$.

7. Запишите функцию плотности X **не используя** матрицы и векторы.

8. Найдите распределение случайной величины $\eta = \begin{bmatrix} X_1 + 10 \\ 3X_2 - 5X_3 \\ 10X_1 - 2X_2 + 0.5X_3 - 5 \end{bmatrix}$ и запишите её функцию плотности.

9. Известно, что $Y = CX$. Найдите квадратную матрицу C, если известно, что функция плотности Y имеет следующий вид:

$$f_Y(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 * 958.2032}} exp\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 - 8.5 & x_2 - 11.3 & x_3 + 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.355 & -0.15 & 0.249 \\ -0.15 & 0.08 & -0.03 \\ 0.249 & -0.03 & 0.058 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 8.5 \\ x_2 - 11.3 \\ x_3 + 32 \end{bmatrix}\right)$$

Решение

1. Поскольку $\mu = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$ и $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.3 \\ 0.5 & 4 & 1.2 \\ -0.3 & 1.2 & 9 \end{bmatrix}$, то из $E(X) = \mu$ и $Var(X) = \Sigma$ следует, что $E(X) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$ и $Var(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.3 \\ 0.5 & 4 & 1.2 \\ -0.3 & 1.2 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Поскольку X_1, будучи компонентой многомерного нормального случайного вектора X, имеет нормальное распределение, а также в силу того, что $E(X_1) = \mu_1 = 3$ и $Var(X_1) = 1$, получаем:

$$X_1 \sim N(3, 1)$$

3. Поскольку $E\left(\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$ и $Var\left(\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 1.2 \\ 1.2 & 9 \end{bmatrix}$, то имеем:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1.2 \\ 1.2 & 9 \end{bmatrix}\right)$$

4. По аналогии с предыдущим пунктом получаем:

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ X_1 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} -10 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & -0.3 \\ -0.3 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

5. Очевидно, что $AX + a \sim N\left(\mu^*, \Sigma^*\right)$, где:

$$\mu^* = E(AX + a) = AE(X) + a = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 12 \\ -5 & 0.5 & 3 \\ 3 & 3 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -111.5 \\ -45.5 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^* = Var(AX + a) = AVar(X)A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 12 \\ -5 & 0.5 & 3 \\ 3 & 3 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.3 \\ 0.5 & 4 & 1.2 \\ -0.3 & 1.2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 12 \\ -5 & 0.5 & 3 \\ 3 & 3 & 1.5 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1319.86 & 346.34 & -114.12 \\ 346.34 & 117.10 & -51.3 \\ -114.12 & -51.3 & 66.15 \end{bmatrix}$$

6. По аналогии с предыдущим пунктом получаем, что $B^T X + b \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma})$, где:

$$\tilde{\mu} = E(B^T X + b) = B^T E(X) + b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0.1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix} + 8 = 14$$

$$\Sigma^* = Var(B^T X + b) = B^T Var(X) B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0.1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.3 \\ 0.5 & 4 & 1.2 \\ -0.3 & 1.2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 15.63$$

Через $Z \sim N(0, 1)$ обозначим стандартную нормальную величину.

Пользуясь таблицей распределения стандартной нормальной величины находим, что $P(B^T X + b \leq 15) = P(Z \leq \frac{15-14}{\sqrt{15.63}}) = F_Z(0.253) \approx 0.6$

7. Для начала посчитаем определитель ковариационной матрицы и матрицу, обратную ей:

$$\Sigma^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1.09401709 & -0.15384615 & 0.05698006 \\ -0.15384615 & 0.28205128 & -0.04273504 \\ 0.05698006 & -0.04273504 & 0.11870845 \end{bmatrix}$$

$$det(\Sigma) = 31.59$$

Подставим полученный результат в функцию плотности:

$$f_X(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 31.59}} exp\left(-\frac{1}{2}[x_1 - 3 \quad x_2 - 5 \quad x_3 + 10] \begin{bmatrix} 1.09401709 & -0.15384615 & 0.05698006 \\ -0.15384615 & 0.28205128 & -0.04273504 \\ 0.05698006 & -0.04273504 & 0.11870845 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 5 \\ x_3 + 10 \end{bmatrix}\right)$$

Обратим внимание, что в экспоненте располагается квадратичная форма, откуда:

$$f_X(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 31.59}} exp\left(-\frac{1.09401709(x_1 - 3)^2 + 0.28205128(x_2 - 5)^2 + 0.11870845(x_3 + 10)^2 - 2 * 0.15384615(x_1 - 3)(x_2 - 5) + 2 * 0.0569800}{2}\right.$$

8. Обратим внимание, что:

$$\begin{bmatrix} X_1 + 10 \\ 3X_2 - 5X_3 \\ 10X_1 - 2X_2 + 0.5X_3 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 10 & -2 & 0.5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Далее решение очевидно и аналогично пункту 5. В итоге получаем, что:

$$\begin{bmatrix} X_1 + 10 \\ 3X_2 - 5X_3 \\ 10X_1 - 2X_2 + 0.5X_3 - 5 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 13 \\ 65 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8.85 \\ 3 & 225 & -2.7 \\ 8.85 & -2.7 & 92.85 \end{bmatrix}\right)$$

Наконец, запишем функцию плотности:

$$f_\eta(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2282.377}} exp\left(-\frac{1}{2}[x_1 - 13 \quad x_2 - 65 \quad x_3 - 10] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8.85 \\ 3 & 225 & -2.7 \\ 8.85 & -2.7 & 92.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 13 \\ x_2 - 65 \\ x_3 - 10 \end{bmatrix}\right)$$

9. Из функции плотности мы знаем, что:

$$(C\Sigma C^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.355 & -0.15 & 0.249 \\ -0.15 & 0.08 & -0.03 \\ 0.249 & -0.03 & 0.058 \end{bmatrix}$$

Беря обратную матрицу получаем, что:

$$C\Sigma C^T \approx \begin{bmatrix} 3.58368 & 1.17859 & -14.77549 \\ 1.17859 & 15.89563 & 3.16207 \\ -14.77549 & 3.16207 & 82.30965 \end{bmatrix}$$

Таким образом, следует решить следующее матричное уравнение:

$$C \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.3 \\ 0.5 & 4 & 1.2 \\ -0.3 & 1.2 & 9 \end{bmatrix} C^T = \begin{bmatrix} 3.58368 & 1.17859 & -14.77549 \\ 1.17859 & 15.89563 & 3.16207 \\ -14.77549 & 3.16207 & 82.30965 \end{bmatrix}$$

Однако данный способ достаточно сложен и можно воспользоваться более простым.

Обратим внимание, что $CE(X) = C \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 11.3 \\ -32 \end{bmatrix}$

Решая получаем, что:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & -0.5 \\ 0.1 & 2 & -0.1 \\ -0.5 & -0.1 & 3 \end{bmatrix}$$

Показать решение