Парадокс девочки и мальчика

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Случайные события (/Topics/Details?id=5)
Раздел
Условная вероятность, формула Байеса, формула полной вероятности и независимость событий (/SubTopics/Details?id=32)
Дата публикации
12.09.2018
Дата последней правки
13.07.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★

Условие

В семье два ребенка. Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова.

1. Младший ребенок - девочка. Какова вероятность того, что старший ребенок - мальчик?

2. По крайней мере один ребенок - мальчик. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик?

3. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что в каждый из дней недели дети рождаются с равной вероятностью.

4. Повторите предыдущий пункт учитывая, что мальчик родился в понедельник, вторник или среду.

5. По крайней мере один ребенок - мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребенок - тоже мальчик? Предположим, что дети рождаются по понедельникам с вероятностью p.

6. Повторите предыдущий пункт учитывая, что мальчик родился в понедельник, вторник или среду. При этом вероятности рождения детей в эти дни составляют p_1, p_2 и p_3 соответственно.

Решение

1. Обозначим через B_2 событие - старший ребенок мальчик, а через G_2 событие - старший ребенок девочка. По аналогии введем события B_1 и G_1 означающие, что младший ребенок является мальчиком или девочкой соответственно.

Пространство элементарных событий состоит их следующих упорядоченных пар, в которых первый элемент соответствует полу младшего ребенка, а второй элемент - полу старшего ребенка:
$\Omega = \{(B,B),(B,G),(G,B),(G,G)\}$. Откуда получаем условную вероятность:

$$P(B_2|G_1) = \frac{P(B_2 \cap G_1)}{P(G_1)} = \frac{P(\{(G,B)\})}{P(\{(G,B),(G,G)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

2. Обозначим через M_1 событие - по крайней мере один ребенок мальчик. Заметим, что $M_1 = \{(B,B),(G,B),(B,G)\}$, а значит $P(M_1) = \frac{3}{4}$. По формуле Байеса получаем:

$$P(\{(B,B)\}|M_1) = \frac{P((B,B) \cap M_1)}{P(M_1)} =$$

$$= \frac{P(\{(B,B)\})}{P(\{(B,B),(G,B),(B,G)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

3. Количество упорядоченных пар, из которых состоит пространство элементарных событий, составит $|\Omega| = (2 * 7)^2 = 14^2$.

Обозначим через B_j^i событие - мальчик родился в i-й день недели, где $i \in \{1,\ldots,7\}$. При этом при j = 1 речь идет о младшем ребенке, а при $j = 2$ - о старшем.

Через M_1^i обозначим событие - по крайней мере один из детей мальчик, родившийся в i-й день недели, где $i \in \{1,\ldots,7\}$. Очевидно, что $P(M_1^1) = \frac{13+13+1}{14^2} = \frac{27}{14^2}$ или, по формуле объединения событий, учитывая независимость B_1^1 и B_2^1 имеем:

$$P(M_1^1) = P(B_1^1 \cup B_2^1) = P(B_1^1) + P(B_2^1) - P(B_1^1)P(B_2^1) = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{14} * \frac{1}{14} = \frac{27}{14^2}$$

В итоге получаем:

$$P(B_1 \cap B_2|M_1^1) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap M_1^1)}{P(M_1^1)} = \frac{\frac{6+6+1}{14^2}}{\frac{27}{14^2}} = \frac{13}{27}$$

.

4. Через $M_1^{1,2,3}$ обозначим событие - по крайней мере один из детей мальчик, родившийся в понедельник, вторник или среду. По аналогии введем событие $B_j^{1,2,3}$ - j-й ребенок является мальчиком, родившимся в понедельник, вторник или среду. Чтобы пересчитать все благоприятствующие этому событию исходы поступим следующим образом:

- В качестве младшего ставим мальчика, родившегося в понедельник.
- В качестве старшего сопоставляем ему девочку или одного из мальчиков, родившегося в четверг, пятницу, субботу или воскресение, что можно сделать 11 способами.
- В качестве старшего ставим мальчика, родившегося в понедельник.
- В качестве младшего сопоставляем ему девочку или одного из мальчиков, родившегося в четверг, пятницу, субботу или воскресение, что можно сделать 11 способами.
- Повторяем предыдущие пункты для мальчиков, родившихся во вторник и в среду.
- Перебираем все возможные варианты сопоставления мальчиков, родившихся в понедельник, вторник или среду, что можно сделать 3^2 способами.

В свете вышеизложенного очевидно, что $P(M_1^{1,2,3}) = \frac{11*2*3+3^2}{14^2} = \frac{75}{14^2}$.

Данный результат можно получить и через формулу объединения событий:

$$P(M_1^{1,2,3}) = P(B_1^{1,2,3} \cup B_2^{1,2,3}) = P(B_1^{1,2,3}) + P(B_2^{1,2,3}) - P(B_1^{1,2,3})P(B_2^{1,2,3}) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} - \frac{3}{14} * \frac{3}{14} = \frac{75}{14^2}$$

Отсюда получаем, что:

$$P(B_1 \cap B_2 | M_1^{1,2,3}) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap M_1^{1,2,3})}{P(M_1^{1,2,3})} = \frac{\frac{4*2*3+3^2}{14^2}}{\frac{75}{14^2}} = \frac{13}{27} = \frac{11}{25}$$

5. Заметим, что $P(M_1^1) = 1 - P(\overline{M_1^1}) = 1 - (1 - \frac{1}{2}p)^2 = p - 0.25p^2$. Или, альтернативным образом:

$$P(M_1^1) = P(B_1^1 \cup B_2^1) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p - \left(\frac{1}{2}p\right)\left(\frac{1}{2}p\right) = p - 0.25p^2$$

Отметим также, что:

$$P(B_1 \cap B_2 \cap M_1^1) = P(M_1^1 | B_1 \cap B_2) * P(B_1 \cap B_2) = (\underbrace{p * (1-p)}_{\substack{\text{только младший} \\ \text{в понедельник}}} + \underbrace{(1-p) * p}_{\substack{\text{только старший} \\ \text{в понедельник}}} + \underbrace{p^2}_{\substack{\text{оба родились} \\ \text{в понедельник}}}) * \frac{1}{4}$$

Откуда получаем, что:

$$P(B_1 \cap B_2 | M_1^1) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap M_1^1)}{P(M_1^1)} = \frac{(p * (1-p) + (1-p) * p + p^2) * \frac{1}{4}}{p - 0.25p^2} = \frac{p-2}{p-4}$$

Показать решение