

Пробуждение на концерте симфонического оркестра

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Случайные события (/Topics/Details?id=5)

Раздел

Условная вероятность, формула Байеса, формула полной вероятности и независимость событий (/SubTopics/Details?id=32)

Дата публикации

21.09.2019

Дата последней правки

09.11.2023

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг



Условие

Вася решил повысить уровень своего культурного развития, пришел на концерт симфонического оркестра и сразу же уснул. Концерт длился 35 минут. Он состоял из 5 частей.

Первая часть длилась 2 минуты и на протяжении нее звучала только скрипка. Во второй части, продолжавшейся 3 минут, одновременно играли скрипка и флейта. В третьей части, длительность которой составила 5 минут, к ним присоединились ударные. Четвертая часть продолжалась 10 минут и на протяжении нее звучали ударные и скрипка. В пятой части, длившейся 15 минут, звучали ударные и флейта.

Часть	Длительность	Скрипка	Флейта	Ударные
1	2	+	—	—
2	3	+	+	—
3	5	+	+	+
4	10	+	—	+
5	15	—	+	+

Вася просыпается один раз с равной вероятностью в любой момент времени на протяжении концерта и больше не засыпает. То есть вероятность того, что Вася проснется между минутами (могут быть нецелыми числами) n_0 и n_1 составляет $\frac{n_1 - n_0}{35}$, где $n_1 \geq n_0$.

Позади Васи сидела Маша и в начале каждой части подкидывала монетку столько раз, сколько инструментов играло в оркестре в данный момент. Например, если одновременно играли скрипка и флейта, то Маша подбрасывала монетку два раза, а если только скрипка - то один раз.

1. С какой вероятностью будет играть скрипка, когда Вася проснется?
2. Используя формулу объединения событий вычислите, с какой вероятностью будет играть хотя бы скрипка или хотя бы флейта?
3. Пользуясь формальными критерием проверьте, являются ли события 1) играла скрипка и 2) играла флейта когда Вася проснулся - независимыми. Составляют ли эти события полную группу? Являются ли они несовместными? Как изменятся ваши ответы на последние два вопроса если в качестве событий рассмотреть 1) играла флейта и 2) играли ударные.
4. Используя формулу условной вероятности найдите вероятность того, что при пробуждении Васи играла скрипка, при условии, что в этот момент играли ударные.
5. Вычислите вероятность, с которой в части, в которой проснется Вася, у Маши выпадет хотя бы один орел.
6. Вычислите вероятность того, что Вася проснулся в момент, когда одновременно играли три инструмента, при условии, что у Маши в начале той части, в которой проснулся Вася, выпал не менее, чем один орел.
7. Вычислите вероятность того, что Вася проснулся в момент, когда играла скрипка, если у Маши в начале той части, в которой проснулся Вася, выпал не менее, чем один орел.

Решение

1. Обозначим через S , U , F события, в соответствии с которыми на момент пробуждения Васи играли скрипка, ударные или флейта. Скрипка играла в первой, второй, третьей и четвертой частях концерта, суммарная длительность которых составила $2 + 3 + 5 + 10 = 20$ минут. Всего же концерт продолжался $2 + 3 + 5 + 10 + 15 = 35$ минут. Следовательно, вероятность искомого события можно рассчитать следующим образом:

$$P(S) = \frac{20}{35}$$

2. По аналогии с предыдущим пунктом получаем, что $P(F) = \frac{23}{35}$ и $P(S \cap F) = \frac{8}{35}$. В итоге получаем ответ:

$$P(S \cup F) = P(S) + P(F) - P(S \cap F) = \frac{20}{35} + \frac{23}{35} - \frac{8}{35} = 1$$

3. Рассматриваемые события являются зависимыми, поскольку

$$P(S)P(F) = \frac{20}{35} \frac{23}{35} = \frac{92}{245} \neq \frac{8}{35} = P(S \cap F)$$

Данные события составляют полную группу и не являются несовместными.

В случае с ударными и флейтой события по прежнему не будут являться несовместными, однако не будут составлять полную группу, так как скрипка может играть отдельно.

4. Рассчитаем искомую вероятность:

$$P(S|U) = \frac{P(S \cap U)}{P(U)} = \frac{\frac{5+10}{35}}{\frac{5+10+15}{35}} = \frac{1}{2}$$

5. Обозначим через I_i событие - одновременно играли i инструментов в момент пробуждения Васи. Через M обозначим событие - у Маши выпал хотя бы один орел в части, в которой проснулся Вася. Очевидно, что:

$$P(M|I_i) = 1 - P(\overline{M}|I_i) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2^i - 1}{2^i}$$

Также, нетрудно догадаться, что $P(I_1) = \frac{2}{35}$, $P(I_2) = \frac{28}{35}$ и $P(I_3) = \frac{5}{35}$.

Используя формулу полной вероятности получаем:

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M|I_1)P(I_1) + P(M|I_2)P(I_2) + P(M|I_3)P(I_3) = \\ &= \frac{2^1 - 1}{2^1} \frac{2}{35} + \frac{2^2 - 1}{2^2} \frac{28}{35} + \frac{2^3 - 1}{2^3} \frac{5}{35} = \frac{211}{280} \end{aligned}$$

6. Рассчитаем искомую вероятность:

$$P(I_3|M) = \frac{P(M|I_3)P(I_3)}{P(M)} = \frac{\frac{2^3-1}{2^3} \frac{5}{35}}{\frac{211}{280}} = \frac{35}{211}$$

7. Попытаемся рассчитать искомую вероятность:

$$P(S|M) = \frac{P(M|S)P(S)}{P(M)} = \frac{P(M|S) \frac{20}{35}}{\frac{211}{280}}$$

Остается найти $P(M|S)$, что нетрудно сделать, воспользовавшись формулой полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(M|S) &= P(M|S \cap I_1)P(I_1|S) + P(M|S \cap I_2)P(I_2|S) + P(M|S \cap I_3)P(I_3|S) = \\ &= P(M|I_1)P(I_1|S) + P(M|I_2)P(I_2|S) + P(M|I_3)P(I_3|S) = \\ &= \frac{2^1 - 1}{2^1} \frac{2}{20} + \frac{2^2 - 1}{2^2} \frac{13}{20} + \frac{2^3 - 1}{2^3} \frac{5}{20} = \frac{121}{160} \end{aligned}$$

В итоге получаем ответ:

$$P(S|M) = \frac{\frac{121}{160} \frac{20}{35}}{\frac{211}{280}} = \frac{121}{221}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.
