Байесовское оценивание параметров наблюдений из нормальной выборки

Опубликовал

sobody

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Байесовская статистика (/Topics/Details?id=37)

Раздел

Введение в Байесовскую статистику (/SubTopics/Details?id=131)

Дата публикации

13.06.2019

Дата последней правки

05.06.2020

Последний вносивший правки

sobody

Рейтинг

Условие

Пусть $X=(X_1\dots X_n)$ - выборка из нормального распределения $\mathcal{N}(\theta,\sigma^2)$, причем параметр θ является случайной величиной с неизвестным распределением, а параметр σ^2 - известной константой. Предположим, что априорное распределение неизвестного параметра также является нормальным $\theta\sim\mathcal{N}\left(\alpha_1,\alpha_2^2\right)$, где α_1 и α_2 - заданные константы.

1. Предположим, что $lpha_1=0$, $lpha_2=1$ и $\sigma^2=1$. Найдите апостериорное распределение параметра heta.

Решение

1. Для начала запишем выражение для функции правдоподобия:

$$L(heta^*|x) = \prod_{i=1}^n rac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-rac{(x_i- heta^*)^2}{2\sigma^2}}$$

Теперь выпишем априорную функцию плотности параметра:

$$P(heta= heta^*)=f_ heta(heta^*)=rac{1}{\sqrt{2\pi}lpha_2}e^{-rac{(heta^*-lpha_1)^2}{2lpha_2^2}}$$

Наконец, посчитаем апостериорную вероятность:

$$egin{aligned} P\left(heta= heta^*|X=x
ight) &= f_{ heta|X=x}(heta^*) \propto L(heta^*|x) P\left(heta= heta^*
ight) = \ &= rac{1}{\sqrt{2\pi}lpha_2}e^{-rac{(heta^*-lpha_1)^2}{2lpha_2^2}} * \prod_{i=1}^n rac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-rac{(x_i- heta^*)^2}{2\sigma^2}} = \ &= rac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-rac{(heta^*-lpha_1)^2}{2}} * \prod_{i=1}^n rac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-rac{(x_i- heta^*)^2}{2}} = \ &= rac{1}{(2\pi)^{rac{n}{2}+1}}e^{-rac{\sum_{i=1}^n x_i^2-2 heta^*}{i=1}rac{n}{x_i+(n-1)(heta^*)^2}}{2} \propto e^{-rac{(n-1)(heta^*)^2-2 heta^*}{2}rac{n}{i=1}x_i}} \propto e^{-rac{\left(heta^*-rac{nar{x}}{n+1}
ight)^2}{2rac{1}{n+1}}} \end{aligned}$$

Поскольку функция плотности параметра пропорциональна полученному значению, то нетрудно догадаться, что апостериорное распределение θ будет нормальным, а именно $(\theta|X=x) \sim \mathcal{N}\left(\frac{n\overline{x}}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.

© 2018 - 2022 Sobopedia