Приближение к Биномиальному

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические дискретные распределения (/Topics/Details?id=39)
Раздел
Распределение Пуассона (/SubTopics/Details?id=136)
Дата публикации
19.09.2018
Дата последней правки
11.11.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

Предположим, что вы решили аппроксимировать вероятность биномиальной случайной величины $X \sim B(n,p)$ при помощи пуассоновской случайной величины $Y \sim Pois(np)$. Найдите максимальную погрешность, которую вы можете получить в таком случае при расчете вероятностей.

Решение

Правильный ответ: $min(p, np^2)$. Доказательство в процессе обдумывания.

Рассмотрим следующую разницу:

$$|P(X=k)-P(Y=k)| = |C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - e^{-np}\frac{(np)^k}{k!}| =$$
$$= \frac{p^k}{k!}|\frac{n!}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} - n^k e^{-np}|$$

Найдем точку локального максимума из решения следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{p^k}{k!}\left|\frac{n!}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}-n^k e^{-np}\right| \geq \frac{p^{k+1}}{(k+1)!}\left|\frac{n!}{(n-k-1)!}(1-p)^{n-k-1}-n^{k+1}e^{-np}\right| \\ \frac{p^k}{k!}\left|\frac{n!}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}-n^k e^{-np}\right| \geq \frac{p^{k-1}}{(k-1)!}\left|\frac{n!}{(n-k+1)!}(1-p)^{n-k+1}-n^{k-1}e^{-np}\right| \end{cases}$$

Сокращая получаем:

Показать решение