Нейман-Пирсон и гипотеза о математическом ожидании

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Теория проверки статистических гипотез (/Topics/Details?id=35)
Раздел
Лемма Неймана-Пирсона (/SubTopics/Details?id=127)
Дата публикации
28.05.2019
Дата последней правки
18.08.2022
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

Пусть дана выборка $X=(X_1,\cdots,X_n)$ из нормального распределения $N(\mu,\sigma^2)$. Величина σ^2 известна. Тестируются гипотезы $H_0:\mu=\mu_0$ против $H_1:\mu=\mu_1$, где $\mu_0\geq\mu_1$. Нулевая гипотеза не отвергается на уровне значимости α, если $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\geq z_\alpha$.

Используя Лемму Неймана-Пирсона, докажите, что описанный выше критерий обеспечивает минимальную вероятность совершить ошибку второго рода, при фиксированном уровне значимости α.

Решение

Составим статистический критерий при помощи Леммы-Неймана Пирсона и покажем, что он эквивалентен критерию, описанному в условии.

Рассмотрим отношение правдоподобия:

$$\frac{L(\mu_0,\sigma^2,X)}{L(\mu_1,\sigma^2,X)}=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(X_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}}{\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(X_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}}=e^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2-(X_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}=e^{\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)-2(\mu_1-\mu_0)\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{2\sigma^2}}$$

Введем статистический критерий - отвергаем H_0, если:

$$T(X) = e^{\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)-2(\mu_1-\mu_0)\sum_{i=1}^{n} X_i}{2\sigma^2}} \geq s$$

Переписывая данное неравенство для $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, нетрудно показать, что это эквивалентно тому, чтобы отвергать H_0, когда:

$$\overline{X} \geq \frac{1}{n}\frac{2\sigma^2 s - n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{-2(\mu_1^2-\mu_0^2)}$$

Пользуясь тем, что в правой части неравенства расположена константа, заменим её на s_0 и перепишем его для $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, то есть будем отвергать H_0, если соблюдено эквивалентное предыдущему условие:

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{s_0-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Заменим правую часть на z_α и покажем, что значимость полученного статистического критерия составляет α, чем завершим доказательство:

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_\alpha | H_0\right) = \alpha$$

Показать решение