Случайная учеба

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Метод максимального правдоподобия (/Topics/Details?id=31)
Раздел
Введение в ММП (/SubTopics/Details?id=109)
Дата публикации
12.12.2021
Дата последней правки
12.12.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★★★★

Условие

Доля времени, которую Лаврентий ежедневно выделяет на учебу, является случайной величиной со следующей функцией плотности:

$$f_{X_1}(t)=\begin{cases}\theta t^{\theta-1}, \text{при } t\in[0,1]\\ 0, \text{в противном случае}\end{cases},\theta>0$$

Лаврентий сформировал выборку, каждый день записывая долю времени, которую он тратит на учебу.

1. При помощи метода моментов оцените параметр θ.

2. При помощи метода максимального правдоподобия оцените параметр θ.

3. Получите выражение для асимптотической дисперсии ММП оценки, а также для оценки данной асимптотической дисперсии.

4. Пользуясь асимптотической нормальностью ММП оценок запишите ее приблизительное распределение при достаточно большом объеме выборки.

5. Найдите реализации найденных вами оценок, если известно, что Лаврентий вел записи на протяжении трех дней, причем в первый день он потратил на учебу 12 часов, во второй - 6 часов, а в третий - 3 часа.

Решение

1. Найдем первый начальный момент:

$$E(X_1) = \int_0^1 t \times \theta t^{\theta-1} dt = \frac{\theta}{1+\theta}$$

В результате имеем:

$$\theta = \frac{E(X_1)}{1 - E(X_1)}$$

Применяя метод моментов получаем состоятельную последовательность оценок:

$$\hat{\theta}_n^{MM} = \frac{\overline{X}_n}{1 - \overline{X}_n}$$

2. Запишем функцию правдоподобия:

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1}$$

Логарифмируя получаем:

$$\ln L(\theta; x) = \sum_{i=1}^{n} \ln(\theta) + (\theta - 1)\ln(x_i) = n\ln(\theta) + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

Рассмотрим условия первого порядка:

$$\frac{d \ln L(\theta; x)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$$

Решая для θ получаем точку, подозреваемую на максимум и, соответственно, предполагаемую ММП оценку:

$$\theta^* = -\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln(x_i)} = -\frac{1}{\overline{\ln(x_n)}} \implies \hat{\theta}_n^{MLE} = -\frac{1}{\overline{\ln(X_n)}}$$

Мы нашли максимум, поскольку рассматриваемая функция правдоподобия является вогнутой:

$$\frac{d^2 \ln L(\theta; x)}{d^2\theta} = -\frac{n}{\theta^2} < 0$$

3. Сперва найдем информацию Фишера:

$$I_n(\theta) = -E\left(\frac{d^2 \ln L(\theta; x)}{d^2\theta}\right) = \frac{n}{\theta^2}$$

В результате получаем асимптотическую дисперсию:

$$As.Var(\hat{\theta}_n^{MLE}) = \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{\theta^2}{n}$$

Ее оценка будет иметь вид:

$$\widehat{As.Var}(\hat{\theta}_n^{MLE}) = \frac{(\hat{\theta}_n)^2}{n} = \frac{1}{n\overline{\ln(X_n)}^2}$$

4. Пользуясь асимптотической нормальностью получаем, что:

$$\hat{\theta}_n^{MLE} \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right)$$

5. Запишем реализацию выборки Лаврентия:

$$x = (12/24, 6/24, 3/24) = (0.5, 0.25, 0.125)$$

Предварительно рассчитаем реализации некоторых статистик:

$$\overline{x}_n = \frac{0.5 + 0.25 + 0.125}{3} = \frac{7}{24}$$

$$\overline{\ln(x_n)} = \frac{\ln(0.5) + \ln(0.25) + \ln(0.125)}{3} \approx -1.386$$

Осуществим расчеты реализаций оценок:

$$\hat{\theta}_n^{MM}(x) = \frac{\frac{7}{24}}{1 - \frac{7}{24}} = \frac{7}{17} \approx 0.412$$

$$\hat{\theta}_n^{MLE}(x) \approx -\frac{1}{-1.386} \approx 0.722$$

$$\widehat{As.Var}(\hat{\theta}_n^{MLE})(x) \approx \frac{1}{3(-1.386)^2} \approx 0.174$$

Показать решение