Разница долей

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Доверительные интервалы (/Topics/Details?id=33)
Раздел
Доверительные интервалы для параметра распределения Бернулли (/SubTopics/Details?id=116)
Дата публикации
25.04.2020
Дата последней правки
14.02.2023
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

У Лаврентия имеются независимые выборки $X=(X_1,\cdots,X_n)$ и $Y=(Y_1,\cdots,Y_m)$ равного объема $n=100$ из распределения Бернулли. По ним, с помощью метода максимального правдоподобия, он оценил неизвестные параметры $\hat{p}_X$ и $\hat{p}_Y$, причем реализация первой из оценок оказалась больше реализации второй. Затем, пользуясь свойством инвариантности ММП оценок он оценил $Var(X_1)$ и $Var(Y_1)$, причем оказалось, что реализации этих оценок равны между собой.

Затем Лаврентий построил симметричный асимптотический доверительный интервал для разницы долей, реализация которого приняла вид $(0.7,0.9)$. Найдите, сколько процентный асимптотический доверительный интервал был построен Лаврентием.

Решение

Обозначим реализации оценок $\hat{p}_X$ и $\hat{p}_Y$ через $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно. Очевидно, что реализации дисперсий в силу свойства инвариантности будут иметь вид $\overline{x}(1-\overline{x})$ и $\overline{y}(1-\overline{y})$.

Через $T_1(x)=0.7$ и $T_2(x)=0.9$ обозначим реализации левой и правой соответствующего асимптотического доверительного интервала. Поскольку доверительный интервал симметричный, то:

$$T_1(x)+T_2(x)=\left(\overline{x}_n-\overline{y}_m-z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{x}_n(1-\overline{x}_n)}{n}+\frac{\overline{y}_m(1-\overline{y}_m)}{m}}\right)+\left(\overline{x}_n-\overline{y}_m+z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\overline{x}_n(1-\overline{x}_n)}{n}+\frac{\overline{y}_m(1-\overline{y}_m)}{m}}\right)=$$

$$=2\left(\overline{x}_n-\overline{y}_m\right)\implies\overline{x}_n-\overline{y}_m=\frac{T_1(x)+T_2(x)}{2}=\frac{0.7+0.9}{2}=0.8$$

Из равенства реализаций асимптотических дисперсий следует, что:

$$\overline{x}(1-\overline{x})=\overline{y}(1-\overline{y})$$

.

Агрегируя полученные результаты получаем систему:

$$\begin{cases} \overline{x}_n - \overline{y}_m = 0.8 \\ \overline{x}_n(1-\overline{x}_n) = \overline{y}_n(1-\overline{y}_n) \end{cases}$$

У данной системы равенств имеется два решения, однако, поскольку $\overline{x} > \overline{y}$, то подходит лишь $\overline{x} = 0.9$ и $\overline{y} = 0.1$.

Обозначим через z_α квантиль уровня α стандартного нормального распределения. Ориентируясь на реализацию левой границы доверительного интервала получаем:

$$0.9 - 0.1 - z_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{0.9*0.1}{100} + \frac{0.1*0.9}{100}} = 0.7$$

Решая получаем, что $z_{1-\gamma/2} \approx 2.35702$, откуда следует, что:

$$1-\gamma/2 = 0.9907889 \implies \gamma \approx 0.0184222 \implies 1-\gamma \approx 0.98158$$

Таким образом, Лаврентий использовал 0.98158\%-й асимптотический доверительный интервал для разницы долей.

Показать решение