

Меломан

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Непрерывные случайные величины (/Topics/Details?id=8)

Раздел

Определение, функция плотности и функция распределения (/SubTopics/Details?id=45)

Дата публикации

30.09.2019

Дата последней правки

03.10.2019

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★★☆

Условие

Меломан Василий очень любит слушать классический рок 80-х годов. Громкость музыки (в десятках децибел), доносящейся из колонок Василия, является непрерывной случайной величиной X со следующей функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2x}{348}, & \text{при } x \in [5, 8] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

1. С какой вероятностью в случайный момент времени Василий слушает музыку с громкостью от 6 до 7 децибел.
2. С какой вероятностью в случайный момент времени Василий слушает музыку с громкостью от более 6.5 децибел. А от 6.5 до 10 децибел?
3. Найдите функцию распределения X .
4. С помощью функции распределения найдите вероятность того, что Василий слушает музыку с громкостью от 6.3 до 7.7 децибел.
5. Какую громкость не превышает прослушиваемая Василием музыка с вероятностью 0.5?

6. С какой вероятностью громкость музыки находится в диапазоне от 5.5 до 7.5 децибел, если из-за злого соседа Вася вынужден слушать музыку на громкости ниже 7 децибел?

7. Колонки Васи испортились и стали играть тише. Теперь громкость музыки в случайный момент является случайной величиной $Y = \sqrt{X}$. Найдите функцию распределения, а затем и функцию плотности Y . Найдите вероятность, с которой громкость музыки находится в диапазоне от 2.5 до 2.7.

Решение

1. Возьмем интеграл:

$$P(X \in [6, 7]) = \int_6^7 \frac{3t^2 - 2t}{348} dt = \frac{19}{58}$$

2. Вновь берем интеграл:

$$P(X \geq 6.5) = P(X \in [6.5, 8]) = \int_{6.5}^8 \frac{3x^2 - 2x}{348} dx \approx 0.62$$

Альтернативный способ:

$$P(X \geq 6.5) = 1 - P(X < 6.5) = 1 - P(X \in [5, 6.5]) = 1 - \int_5^{6.5} \frac{3x^2 - 2x}{348} dx \approx 0.62$$

Очевидно, что громкость от 6.5 до 10 децибел появляется с такой же вероятностью, поскольку вероятность попадания в диапазон от 8 до 10 равняется нулю.

3. Действуя строго по определению найдем функцию распределения при $x \in [5, 8]$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_5^x \frac{3t^2 - 2t}{348} dt = \frac{x^3 - x^2 - 100}{348}, x \in [5, 8]$$

4. Найдем соответствующую вероятность:

$$\begin{aligned} P(X \in [6.3, 7.7]) &= P(6.3 \leq X \leq 7.7) = F_X(7.7) - F_X(6.3) = \\ &= \frac{7.7^3 - 7.7^2 - 100}{348} - \frac{6.3^3 - 6.3^2 - 100}{348} \approx 0.537 \end{aligned}$$

5. Необходимо решить следующее выражение для x^* , где x^* - искомый уровень громкости:

$$P(X \leq x^*) = 0.5$$

Используя функцию распределения имеем:

$$P(X \leq x^*) = F_X(x^*) = \frac{x^{*3} - x^{*2} - 100}{348} = 0.5$$

Решая получаем (<https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+%5Cfrac%7Bx%5E3-x%5E2-100%7D%7B348%7D%3D0.5+for+x>), что $x^* \approx 6.846$.

6. Рассчитаем условную вероятность:

$$\begin{aligned}
 P(X \in [5.5, 7.5] | X < 7) &= P(X \in [5.5, 7.5] | X \in [5, 7]) = \\
 &= \frac{P((X \in [5.5, 7.5]) \cap (X \in [5, 7]))}{P(X \in [5, 7])} = \frac{P(X \in [5.5, 7])}{P(X \in [5, 7])} = \\
 &= \frac{F_X(7) - F_X(5.5)}{F_X(7) - F_X(5)} = \frac{\frac{7^3 - 7^2 - 100}{348} - \frac{5.5^3 - 5.5^2 - 100}{348}}{\frac{7^3 - 7^2 - 100}{348} - \frac{5^3 - 5^2 - 100}{348}} \approx 0.81378
 \end{aligned}$$

7. Для начала найдем функцию распределения при $x \in [\sqrt{5}, \sqrt{8}]$:

$$F_Y(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = \frac{x^6 - x^4 - 100}{348}, x \in [\sqrt{5}, \sqrt{8}]$$

Нетрудно найти и функцию плотности при $x \in [\sqrt{5}, \sqrt{8}]$ (при $x \notin [\sqrt{5}, \sqrt{8}]$ она равняется 0):

$$f_Y(x) = \frac{dF_Y(x)}{dx} = \frac{6x^5 - 4x^3}{348}, x \in [\sqrt{5}, \sqrt{8}]$$

Пользуясь найденной функцией распределения найдем соответствующую вероятность:

$$\begin{aligned}
 P(Y \in [2.5, 2.7]) &= F_Y(2.7) - F_Y(2.5) = \\
 &= \frac{2.7^6 - 2.7^4 - 100}{348} - \frac{2.5^6 - 2.5^4 - 100}{348} \approx 0.37
 \end{aligned}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.