Кубик и монетка

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Дискретные случайные величины (/Topics/Details?id=7)
Раздел
Условное математическое ожидание и метод первого шага (/SubTopics/Details?id=44)
Дата публикации
21.09.2021
Дата последней правки
27.09.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★★

Условие

Даша бросает шестигранный кубик. Если выпадает четное число (событие A), то она подбрасывает монетку 1 раз. Если выпадает 1 или 3 (событие B), то 2 раза. Наконец, если выпадает 5 (событие C), то 3 раза.

1. Найдите математическое ожидание случайной величины X, отражающей число выпавших орлов.

2. Задайте закон распределение числа выпавших орлов.

3. Найдите математическое ожидание числа выпавших орлов, при условии, что выпал по крайней мере один орел.

Решение

1. Для начала рассчитаем условные математические ожидания:

$$E(X|A) = P(X=0|A)\times 0 + P(X=1|A)\times 1 = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X|B) = P(X=0|B)\times 0 + P(X=1|B)\times 1 + P(X=2|B)\times 2 = \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 = 1$$

$$E(X|C) = P(X=0|C)\times 0 + P(X=1|C)\times 1 + P(X=2|C)\times 2 + P(X=3|C)\times 3 = \frac{1}{8}\times 0 + \frac{3}{8}\times 1 + \frac{3}{8}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 = 1.5$$

Применим формулу полного математического ожидания:

$$E(X) = P(A)E(X|A) + P(B)E(X|B) + P(C)E(X|C) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{6}\times 1.5 = \frac{5}{6}$$

2. Найдем все необходимые вероятности при помощи формулы полной вероятности:

$$P(X=0) = P(X=0|A)P(A) + P(X=0|B)P(B) + P(X=0|C)P(C) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\times\frac{1}{6} = \frac{17}{48}$$

$$P(X=1) = P(X=1|A)P(A) + P(X=1|B)P(B) + P(X=1|C)P(C) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{8}\times\frac{1}{6} = \frac{23}{48}$$

$$P(X=2) = P(X=2|A)P(A) + P(X=2|B)P(B) + P(X=2|C)P(C) = 0\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{8}\times\frac{1}{6} = \frac{7}{48}$$

$$P(X=3) = P(X=3|A)P(A) + P(X=3|B)P(B) + P(X=3|C)P(C) = 0\times\frac{1}{2} + 0\times\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{48}$$

Агрегируем полученный результат в форме таблицы:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ P(X=x) & \frac{17}{48} & \frac{23}{48} & \frac{7}{48} & \frac{1}{48} \end{bmatrix}$$

3. Сперва рассмотрим **простой способ решения** данной задачи.

Найдем условное распределение $(X|X \geq 1)$:

$$P(X=0|X \geq 1) = 0$$

$$P(X=1|X \geq 1) = \frac{P(X=1 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)} = \frac{\frac{23}{48}}{\frac{23}{48}+\frac{7}{48}+\frac{1}{48}} = \frac{23}{31}$$

$$P(X=2|X \geq 1) = \frac{P(X=2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)} = \frac{\frac{7}{48}}{\frac{23}{48}+\frac{7}{48}+\frac{1}{48}} = \frac{7}{31}$$

$$P(X=3|X \geq 1) = \frac{P(X=3 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X=3)}{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)} = \frac{\frac{1}{48}}{\frac{23}{48}+\frac{7}{48}+\frac{1}{31}}$$

Запишем полученное условное распределение в форме таблицы:

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ P(X=x|X \geq 1) & \frac{23}{31} & \frac{7}{31} & \frac{1}{31} \end{bmatrix}$$

Исходя из найденного закона распределения нетрудно рассчитать условное математическое ожидание:

$$E(X|X \geq 1) = P(X=1|X \geq 1) \times 1 + P(X=2|X \geq 1) \times 2 + P(X=3|X \geq 1) \times 3 = \frac{23}{31} \times 1 + \frac{7}{31} \times 2 + \frac{1}{31} \times 3 = \frac{40}{31} \approx 1.29$$

Рассмотрим также и **альтернативный, чуть более сложный способ решения**.

Посчитаем следующие условные математические ожидания:

$$E(X|(X \geq 1) \cap A) = P(X=0|(X \geq 1) \cap A) \times 0 + P(X=1|(X \geq 1) \cap A) \times 1 = 0 \times 0 + 1 \times 1 = 1$$

$$E(X|(X \geq 1) \cap B) = P(X=0|(X \geq 1) \cap B) \times 0 + P(X=1|(X \geq 1) \cap B) \times 1 + P(X=2|(X \geq 1) \cap B) \times 2 =$$

$$= 0 \times 0 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \times 1 + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \times 2 = \frac{4}{3}$$

$$E(X|(X \geq 1) \cap C) = P(X=0|(X \geq 1) \cap C) \times 0 + P(X=1|(X \geq 1) \cap C) \times 1 + P(X=2|(X \geq 1) \cap C) \times 2 + P(X=3|(X \geq 1) \cap C) \times 3 =$$

$$= 0 \times 0 + \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}} \times 1 + \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}} \times 2 + \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}} \times 3 = \frac{12}{7}$$

Теперь рассчитаем некоторые вероятности:

$$P(X \geq 1|A) = P(X=1|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X \geq 1|B) = (P(X=1|B) + P(X=2|B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(X \geq 1|C) = P(X=1|C) + P(X=2|C) + P(X=3|C) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Исходя из соответствующих вероятностей получаем:

$$P(A|X \geq 1) = \frac{P(X \geq 1|A)P(A)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 1|A)P(A)}{1-P(X=0)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{1-\frac{17}{48}} = \frac{12}{31}$$

$$P(B|X \geq 1) = \frac{P(X \geq 1|B)P(B)}{1-P(X=0)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}}{1-\frac{17}{48}} = \frac{12}{31}$$

$$P(C|X \geq 1) = \frac{P(X \geq 1|C)P(C)}{1-P(X=0)} = \frac{\frac{7}{8} \times \frac{1}{6}}{1-\frac{17}{48}} = \frac{7}{31}$$

Применяя формулу полного математического ожидания имеем:

$$E(X|X \geq 1) = P(A|X \geq 1)E(X|(X \geq 1) \cap A) + P(B|X \geq 1)E(X|(X \geq 1) \cap B) + P(C|X \geq 1)E(X|(X \geq 1)|C) =$$

$$\frac{12}{31} \times 1 + \frac{12}{31} \times \frac{4}{3} + \frac{7}{31} \times \frac{12}{7} = \frac{40}{31} \approx 1.29$$

Проверка в R

```
n <- 100000
orel <- rep(NA, n)
cube <- sample(1:6, n, replace = TRUE)
for(i in 1:n)
{
 n_orel <- NA
 if(cube[i] %in% c(2, 4, 6))
 {
  orel[i] <- sum(rbinom(1, 1, 0.5))
 }

 if(cube[i] %in% c(1, 3))
 {
  orel[i] <- sum(rbinom(2, 1, 0.5))
 }

 if(cube[i] == 5)
 {
  orel[i] <- sum(rbinom(3, 1, 0.5))
 }
}
# пункт 1
mean(orel)
# пункт 2
table(orel) / n
# пункт 3
mean(orel[orel >= 1])
```

Показать решение