

## Таблица и температура

---

**Опубликовал**

sobodv

**Автор или источник**

sobopedia

**Предмет**

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

**Тема**

Дискретные случайные величины (/Topics/Details?id=7)

**Раздел**

Распределение дискретной случайной величины (/SubTopics/Details?id=36)

**Дата публикации**

19.09.2021

**Дата последней правки**

19.09.2021

**Последний вносивший правки**

sobodv

**Рейтинг**

### Условие

Температура (в градусах) за окном является случайной величиной  $X$  с носителем  $\text{supp}(X) \in \{-2.5, -1.7, 0, 3.2, 5\}$ . Известно, что температуры  $-2.5$  и  $-1.7$  равновероятны. Если температура неотрицательная, то вероятность температуры  $0$  градусов в 2 раза больше вероятности температуры  $3.2$  градуса и в 2 раза меньше вероятности температуры в  $5$  градусов. Наконец, вероятность неотрицательной температуры в 1.5 раза больше вероятности отрицательной.

1. Задайте условное распределение случайной величины, отражающей температуру за окном, при условии, что температура неотрицательная.
2. Рассчитайте вероятность каждой из отрицательных температур:  $-2.5$  и  $-1.7$ .
3. Задайте распределение случайной величины, отражающей температуру за окном, при помощи таблицы.
4. Постройте функцию распределения случайной величины  $X$ .
5. Постройте функцию распределения случайной величины  $X$  при условии, что температура за окном неотрицательная.
6. Задайте распределение случайной величины  $\min(1, \max(0, X))$ .
7. Задайте распределение случайной величины  $\min(1, \max(0, X))$ , при условии, что температура неотрицательная.

# Решение

1. Из условия известно, что:

$$\begin{cases} P(X = 0|X \geq 0) = 2P(X = 3.2|X \geq 0) = 0.5P(X = 5|X \geq 0) \\ P(X = 0|X \geq 0) + P(X = 3.2|X \geq 0) + P(X = 5|X \geq 0) = 1 \end{cases}$$

Заменяя все вероятности на  $P(X = 0|X \geq 0)$  во втором равенстве системы и используя информацию из первого равенства получаем:

$$P(X = 0|X \geq 0) + 0.5P(X = 0|X \geq 0) + 2P(X = 0|X \geq 0) = 1$$

Решая соответствующее равенство получаем  $P(X = 0|X \geq 0) = \frac{2}{7}$ . Подставляя данный результат в первое равенство системы имеем  $P(X = 3.2|X \geq 0) = \frac{1}{7}$  и  $P(X = 5|X \geq 0) = \frac{4}{7}$ .

Зададим найденное условное распределение с помощью таблицы:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 3.2 & 5 \\ P(X = x|X \geq 0) & 2/7 & 1/7 & 4/7 \end{bmatrix}$$

2. Из условия известно, что  $P(X \geq 0) = 1.5P(X < 0)$ , откуда  $P(X \geq 0) = \frac{3}{5}$  и  $P(X < 0) = \frac{2}{5}$ .

Объединяя данный результат с информацией, известной из условия, получаем:

$$\begin{cases} P(X < 0) = P(X = -2.5) + P(X = -1.7) = \frac{2}{5} \\ P(X = -2.5) = P(X = -1.7) \end{cases}$$

Из полученной системы равенств следует, что:

$$P(X = -2.5) = P(X = -1.7) = \frac{1}{5}$$

3. Необходимо найти безусловное распределение случайной величины  $X$ . Обратим внимание, что из полученной ранее таблицы следует  $P(X = 0|X \geq 0) = \frac{2}{7}$ . Расписывая соответствующую вероятность при помощи формулы условной вероятности имеем:

$$P(X = 0|X \geq 0) = \frac{P(X = 0)P(X \geq 0|X = 0)}{P(X \geq 0)} = \frac{P(X = 0) \times 1}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{7}$$

Решая последнее равенство для  $P(X = 0)$  получаем  $P(X = 0) = \frac{6}{35}$ . По аналогии находим оставшиеся вероятности:

$$\frac{P(X = 3.2) \times 1}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{7} \implies P(X = 3.2) = \frac{3}{35}$$

$$\frac{P(X = 5) \times 1}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{7} \implies P(X = 5) = \frac{12}{35}$$

Исходя из найденных в данном и предыдущем пунктах вероятностей запишем распределение случайной величины  $X$  при помощи таблицы:

$$\begin{bmatrix} x & -2.5 & -1.7 & 0 & 3.2 & 5 \\ P(X=x) & 1/5 & 1/5 & 6/35 & 3/35 & 12/35 \end{bmatrix}$$

4. Для удобства сперва рассчитаем некоторые вероятности:

$$P(X < -2.5) = 0$$

$$P(X \leq -2.5) = P(X = -2.5) = \frac{1}{5}$$

$$P(X \leq -1.7) = P(X = -2.5) + P(X = -1.7) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(X \leq 0) = P(X \leq -1.7) + P(X = 0) = \frac{2}{5} + \frac{6}{35} = \frac{4}{7}$$

$$P(X \leq 3.2) = P(X \leq 0) + P(X = 3.2) = \frac{4}{7} + \frac{3}{35} = \frac{23}{35}$$

$$P(X \leq 5) = P(X \leq 3.2) + P(X = 5) = \frac{23}{35} + \frac{12}{35} = 1$$

Исходя из рассчитанных вероятностей построим функцию распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -2.5 \\ \frac{1}{5}, & \text{если } -2.5 \leq x < -1.7 \\ \frac{2}{5}, & \text{если } -1.7 \leq x < 0 \\ \frac{4}{7}, & \text{если } 0 \leq x < 3.2 \\ \frac{23}{35}, & \text{если } 3.2 \leq x < 5 \\ 1, & \text{если } x \geq 5 \end{cases}$$

5. Используя построенную ранее таблицу распределения получаем:

$$F_{X|X \geq 0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \frac{2}{7}, & \text{если } 0 \leq x < 3.2 \\ \frac{1}{7} + \frac{2}{7}, & \text{если } 3.2 \leq x < 5 \\ \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}, & \text{если } x \geq 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \frac{2}{7}, & \text{если } 0 \leq x < 3.2 \\ \frac{3}{7}, & \text{если } 3.2 \leq x < 5 \\ 1, & \text{если } x \geq 5 \end{cases}$$

6. Обратим внимание, что случайная величина  $\min(1, \max(0, X))$  принимает с ненулевой вероятностью лишь значения 0 и 1, откуда:

$$P(\min(1, \max(0, X)) = 0) = P(X \leq 0) = F_X(0) = \frac{4}{7}$$

$$P(\min(1, \max(0, X)) = 1) = P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F_X(0) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

В итоге получаем следующую таблицу распределения:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ P(\min(1, \max(0, X)) = x) & 3/7 & 4/7 \end{bmatrix}$$

7. По аналогии с предыдущим пунктом получаем:

$$P(\min(1, \max(0, X)) = 0 | X \geq 0) = P(X \leq 0 | X \geq 0) = P(X = 0 | X \geq 0) = \frac{2}{7}$$

$$P(\min(1, \max(0, X)) = 1 | X \geq 0) = P(X > 0 | X \geq 0) = P(X = 3.2 | X \geq 0) + P(X = 5 | X \geq 0) = \frac{5}{7}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.

---