Дни рождения

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
Classic
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Случайные события (/Topics/Details?id=5)
Раздел
Классическое определение вероятностей и обратные события (/SubTopics/Details?id=30)
Дата публикации
04.09.2018
Дата последней правки
06.09.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★

Условие

На семинар пришло 20 студентов. Предположим, что каждый из них мог с равной вероятностью родиться в любой день в году.

1. Найдите вероятность события B - нет двух студентов, родившихся в один день.

2. Найдите вероятность события C - хотя бы два студента родились в один день.

3. Найдите вероятность события D - ровно (только) два студента родились в один день.

4. Найдите вероятность события G - ровно (только) 3 студента родились в один день.

5. Найдите вероятность события L - студент Лаврентий родился в декабре (в этом месяце 31 день) или в один день ровно с одним другим студентом.

6. Найдите вероятность события H - ровно (только) 4 студентам можно сопоставить другого студента, родившегося в тот же день. При этом следует учесть ситуацию, когда два студента родились в один день (например, оба 10 февраля), а два других - в другой (например, 11 февраля).

7. Найдите вероятность события Y - два студента родились в день y_1, два других студента в день y_2 и два других студента в день y_3. Причем $y_1 \neq y_2 \neq y_3$.

8. Рассмотрите, как зависит вероятность события B от численности студентов n. Докажите, что по мере увеличения численности студентов $n > 1$ вероятность события B уменьшается.

Решение

1. Количество способов, которыми можно назначить студентам даты рождения составляет 365^{20}. Поскольку каждый из 20 студентов мог родиться в один из 365 дней. Количество способов, которыми можно распределить 365 различных дней рождения по студентам составляет A_{365}^{20}. То есть мы осуществляем упорядоченный выбор 20 дней рождения без возвращения, что гарантирует то, что не будет студентов, родившихся в один день. Откуда получаем:

$$P(B) = \frac{A_{365}^{20}}{365^{20}} \approx 0.59$$

2. Событие C является обратным событию B из предыдущего пункта задачи, откуда:

$$P(C) = P(\Omega \backslash B) = 1 - P(B) = 1 - \frac{A_{365}^{20}}{365^{20}} \approx 0.41$$

3. Сначала выбираем общий для двух студентов день рождения одним из $C_{365}^{1} = 365$ способов. Затем C_{20}^{2} способами мы можем выбрать двух студентов, которым назначается соответствующий день. После этого оставшимся 18 студентам назначаем разные дни рождения A_{364}^{18} способами. В результате получаем ответ:

$$P(D) = \frac{365 C_{20}^{2} A_{364}^{18}}{365^{20}} \approx 0.323$$

4. По аналогии с предыдущим пунктом нетрудно получить:

$$P(G) = \frac{365 C_{20}^{3} A_{364}^{17}}{365^{20}} \approx 0.0056$$

5. Через L_1 обозначим событие, в соответствии с которым Лаврентий родился в один день ровно с одним другим студентом. Обозначим как L_2 событие, предполагающее, что Лаврентий родился в декабре. Вероятность искомого события составит:

$$P(L)=P(L_1\cup L_2)=P(L_1)+P(L_2)-P(L_1\cap L_2)=\frac{365C_{19}^{1}364^{18}}{365^{20}}+\frac{31\times 365^{19}}{365^{20}}-\frac{31C_{19}^{1}364^{18}}{365^{20}}$$

6. Введем два дополнительных события. Событие H_1 - все четыре студента родились в один день. Событие H_2 - два студента родились в один день, а два - в другой. Нетрудно догадаться, что:

$$P(H_1)=\frac{365C_{20}^{4}A_{364}^{16}}{365^{20}}$$

$$P(H_2)=\frac{C_{365}^{2}C_{20}^{2}C_{18}^{2}A_{363}^{16}}{365^{20}}$$

Учитывая, что события H_1 и H_2 не совместны, получаем:

$$P(H)=P(H_1\cup H_2)=P(H_1)+P(H_2)=\frac{365C_{20}^{4}A_{364}^{16}}{365^{20}}+\frac{C_{365}^{2}C_{20}^{2}C_{18}^{2}A_{363}^{16}}{365^{20}}$$

7. Сначала мы выбираем три дня из 365 одним из C_{365}^{3} способов. Затем представьте, что мы упорядочили три выбранных дня от самого меньшего, до самого большого (от ближайшего к началу года, до самого отдаленного). Далее мы выбираем одним из C_{20}^{2} способов двух студентов на первый из дней, C_{18}^{2} на второй и одним из C_{16}^{2} способов на третий. Очевидно, что так мы переберем все возможные варианты без повторов. Остальных же 14 студентов распределяем по 362-м оставшимся дням, что можно сделать A_{362}^{14} способами. Откуда получаем ответ ((365 choose 3) * (20 choose 2) * (18 choose 2) * (16 choose 2) * ((362 choose 14) * 14!) / 365^20):

$$P(Y)=\frac{C_{365}^{3}C_{20}^{2}C_{18}^{2}C_{16}^{2}A_{362}^{14}}{365^{20}}\approx 0.008$$

Обратите внимание, что несмотря на то, что мы классифицируем каждый из трех выбираемых дней от меньшего к большему, мы используем C_{365}^{3}, а не A_{365}^{3}. Это связано с тем, что мы не можем самостоятельно изменить то, какой из дней будет первым, а какой - последним: соответствующее разделение задается автоматически.

8. Рассмотрим случай с n студентами. Тогда $P(B)=\begin{cases}\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}, \text{если } n\leq 365\\ 0, \text{если } n>365\end{cases}$.

Рассмотрим отношение вероятностей события B при n и $n+1$ студентах. Покажем, что это отношение всегда больше 1. Это будет означать, что при n студентах вероятность события B была больше, чем стала при $n+1$ студентах. В итоге получаем (https://www.wolframalpha.com/input/?i=simplify+%28%28365+choose+n%29+*+n%21+%2F+%28365+%5E+n%29%29+%2F+%28%28365+choose+%28n+%2B+1%29%29++*+%28n%2B1%29%21+%2F+%28365+

$$\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}/\frac{A_{365}^{n+1}}{365^{n+1}}=\frac{365}{365-n}>1, \text{при } n>1$$

Показать решение