Простая счетная задача на Хи-квадрат распределение

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические непрерывные распределения (/Topics/Details?id=11)
Раздел
Хи-квадрат распределение (/SubTopics/Details?id=78)
Дата публикации
22.01.2019
Дата последней правки
06.12.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★⯪☆

Условие

Случайные величины $X_1, \ldots, X_5$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение:

$$X_i \sim \mathcal{N}\left(0,1\right), \forall i \in \{1, \ldots, 5\}$$

Также, имеется случайная величина $Y \sim \mathcal{N}(5, 9)$.

Наконец, положим последовательность независимых случайных величин $\xi_i \sim \chi^2(i), i \in \{1, \ldots, 100\}$

Допустим, что все обозначенные выше случайные величины независимы.

1. Найдите распределение случайной величины X_3^2

2. Найдите распределение случайной величины $X_2^2 + X_5^2 + X_1^2$

3. Найдите распределение случайной величины $\sum\limits_{i=1}^{5} X_i^2$

4. Найдите параметр β, при котором $\left((X_1 + X_2)^2 - \beta(X_1X_2 + X_2X_1)\right) \sim \chi^2(2)$

5. Найдите параметры α_1 и α_2, при которых $\left(X_5^2 + X_1^2 + \left(\frac{Y-\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\right) \sim \chi^2(3)$

6. Найдите распределение случайной величины $\xi_5 + \xi_{90}$

7. Найдите распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi_{30} + \xi_{65} + \xi_8 + X_2^2 + X_5^2$

8. Найдите вероятность того, что ξ_1 превысит 0.25.

9. Пользуясь таблицей распределения (https://people.smp.uq.edu.au/YoniNazarathy/stat_models_B_course_spring_07/distributions/chisqtab.pdf) или программными средствами найдите значение, которое случайная величина ξ_5 не превысит с вероятностью 0.95.

10. Пользуясь таблицей распределения или программными средствами найдите вероятность того, что ξ_5 превысит 3.

Решение

1. Хи-квадрат распределение с одной степенью свободы: $\chi^2(1)$

2. Хи-квадрат распределение с тремя степенями свободы: $\chi^2(3)$

3. Хи-квадрат распределение с пятью степенями свободы: $\chi^2(5)$

4. Очевидно, что при $\beta = 1$ мы получаем:

$$\left((X_1 + X_2)^2 - (X_1X_2 + X_2X_1)\right) = X_1^2 + X_2^2 \sim \chi^2(2)$$

5. При $\alpha_1 = 5$ и $\alpha_2 = 3$ случайная величина $\frac{Y-\alpha_1}{\alpha_2}$ будет иметь стандартное нормальное распределение, что, в итоге, даст необходимое распределение.

6. Пользуясь свойством аддитивности независимых хи-квадрат случайных величин, складывая их степени свободы, получаем, что:

$$(\xi_5 + \xi 90) \sim \chi^2(95)$$

7. По аналогии с предыдущим пунктом имеем:

$$\left(\xi_{30} + \xi_{65} + \xi_8 + X_2^2 + X_5^2\right) \sim \chi^2(105)$$

Поскольку математическое ожидание равняется числу степеней свободы, а дисперсия превышает их в два раза, получаем, что:

$$E\left(\xi_{30} + \xi_{65} + \xi_8 + X_2^2 + X_5^2\right) = 105$$

$$Var\left(\xi_{30} + \xi_{65} + \xi_8 + X_2^2 + X_5^2\right) = 210$$

8. Положим $\xi_1 = \tilde{X}^2$, где $\tilde{X} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда вероятность можно рассчитать следующим образом:

$$P(\xi > 0.25) = P(\tilde{X}^2 > 0.25) = P(\tilde{X} > 0.5) + P(\tilde{X} < -0.5) = 2 - 2F_{\tilde{X}}(0.5) \approx 0.617$$

9. Находим, что $P(\xi_5 \leq 11.0705) \approx 1 - 0.05 = 0.95$

10. Нетрудно рассчитать, что:

$$P(\xi_5 \geq 3) = 1 - P(\xi_5 \leq 3) = 1 - F_{\xi_5}(3) \approx 0.7$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.