

Кинофестиваль

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Сходимости (/Topics/Details?id=13)

Раздел

Центральная предельная теорема (/SubTopics/Details?id=73)

Дата публикации

10.12.2020

Дата последней правки

04.12.2022

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★★★

Условие

На кинофестивале будет показано 100 фильмов. Их продолжительности не зависят друг от друга и являются независимыми случайными величинами X_1, \dots, X_{100} . Функция плотности продолжительности фильма (в часах) имеет следующую форму:

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 6x^5, & \text{при } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. При помощи ЦПТ рассчитайте вероятность того, что суммарная продолжительность фильмов не превысит 80 часов.
2. При помощи неравенства Берри-Эссена найдите верхнюю границу погрешности при расчетах вероятности суммарной продолжительности фильмов, возникающей при использовании ЦПТ.
3. При помощи теоремы Муавра Лапласа оцените вероятность того, что продолжительность не более половины фильмов превысит полчаса.

Решение

Рассчитаем предварительные значения:

$$E(X_1) = \int_0^1 6x^5 * x dx = \frac{6}{7}$$

$$Var(X_1) = \int_0^1 6x^5 * x^2 dx - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{3}{196}$$

Отсюда получаем:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(100 * \frac{6}{7}, 100 * \frac{3}{196}\right)$$

В результате имеем:

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq 80\right) \approx \Phi\left(\frac{80 - 100 * \frac{6}{7}}{\sqrt{100 * \frac{3}{196}}}\right) \approx \Phi(-4.61) \approx 0$$

2. Предварительно рассчитаем:

$$\begin{aligned} E\left(|X_1 - E(X_1)|^3\right) &= \int_0^1 6x^5 * \left|x - \frac{6}{7}\right|^3 dx = \int_0^{\frac{6}{7}} 6x^5 * \left(\frac{6}{7} - x\right)^3 dx + \int_{\frac{6}{7}}^1 6x^5 * \left(x - \frac{6}{7}\right)^3 dx \\ &\approx 0.002973 + 0.00054349 = 0.00351649 \end{aligned}$$

В результате имеем:

$$\left| \frac{F_{\sum_{i=1}^n X_i - nE(X_1)}}{\sqrt{nVar(X_1)}}(x) - \Phi(x) \right| \leq 0.4784 * \frac{0.00351649}{\sqrt{100 * \left(\frac{3}{196}\right)^3}} \approx 0.0888388$$

3. Введем случайную величину Y_i , которая принимает значение 1, если $X_i > 0.5$ и 0 - в противном случае. Обратим внимание, что:

$$P(X_i > 0.5) = \int_{0.5}^1 6x^5 dx = 0.984375$$

Отсюда получаем, что $Y_i \sim Ber(0.984375)$, а значит, в силу теоремы Муавра-Лапласа (ЦПТ) имеем:

$$\sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathcal{N}(100 * 0.984375, 100 * 0.984375 * (1 - 0.984375)) \approx \mathcal{N}(98.438, 1.538)$$

В итоге получаем:

$$P(\sum Y_i \leq 50) \approx \Phi\left(\frac{50 - 98.438}{\sqrt{1.538}}\right) \approx 0$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.
