Ютуб и выбор без возвращения

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Основные понятия математической статистики (/Topics/Details?id=26)
Раздел
Определение выборки и её основные характеристики (/SubTopics/Details?id=94)
Дата публикации
06.02.2020
Дата последней правки
06.02.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★⯪

Условие

Вася подписался на ютуб канал, на котором выложено 10 видео. Продолжительность самого раннего по дате ролика составляет 20 секунд, а каждого следующего - на 10 секунд дольше предыдущего. Каждый раз Вася с равной вероятностью просматривает одно из ранее не просмотренных видео.

1. Найдите математическое ожидание и дисперсию продолжительности первого из просмотренных Васей видео.

2. Найдите математическое ожидание и дисперсию продолжительности второго из просмотренных Васей видео. **Подсказка**: проверьте, совпадают ли распределения X_1 и X_2.

3. Проверьте, совпадают ли распределения X_1 и X_6, а также, можно ли утверждать, что $X_1, \cdots X_{10}$ одинаково распределены.

4. Проверьте, совпадают ли распределения случайных векторов (X_1, X_2) и (X_1, X_6).

5. Вычислите математическое ожидание и дисперсию времени, которое затратит Вася на просмотр первых пяти видео.

6. Вася подписался еще на один канал, на котором выложено 6 видео. Из них 3 продолжительностью 120 секунд, 2 длятся по 60 секунд и еще одно - 30 секунд. Он случайным образом решил просмотреть три разных видео с данного канала, выбирая каждое из них с равной вероятностью. Найдите математическое ожидание и дисперсию просмотренных Васей видео.

Решение

1. Через X_i обозначим дискретную случайную величину - продолжительность i-го из просмотренных Васей видео.

В итоге получаем, что (https://www.wolframalpha.com/input/?i=%5Csum%5Climits_%7Bi%3D1%7D%5E%7B10%7D10*%28i%2B1%29*%5Cfrac%7B1%7D%7B10%7D):

$$E(X_1) = \sum_{i=1}^{10} 10 * (i+1) * P(X_i = 10 * (i+1)) = \sum_{i=1}^{10} 10 * (i+1) * \frac{1}{10} = 65$$

По аналогии имеем (https://www.wolframalpha.com/input/?i=%5Csum%5Climits_%7Bi%3D1%7D%5E%7B10%7D%2810*%28i%2B1%29%29%5E2*%5Cfrac%7B1%7D%7B10%7D):

$$E(X_1^2) = \sum_{i=1}^{10} (10 * (i+1))^2 * \frac{1}{10} = 5050$$

$$Var(X_1) = 825$$

2. Сперва отметим, что носители $R_{X^{(1)}} = \cdots = R_{X^{(10)}}$ совпадают, в связи с чем введем для них единое обозначение R_X.

Пусть $x, y \in R_X$. Обратим внимание, что:

$$P(X_2 = x \cap X_1 = y) = \begin{cases} \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}, \text{если } x \neq y \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Далее обратим внимание, что R_X включает в себя 10 элементов и воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(X_2 = x) = \sum_{y \in R_X} P(X_2 = x \cap X_1 = y) = \sum_{y \in R_X : y \neq x} \frac{1}{45} = 9 * \frac{1}{90} = \frac{1}{10}$$

Из полученного результата следует, что $E(X_2) = E(X_1) = 65$ и $Var(X_2) = Var(X_1) = 825$.

3. Пусть $x, y_1, \cdots, y_5 \in R_X$, тогда:

$$P(X_6 = x \cap X_1 = y_1 \cap \cdots \cap X_5 = y_{i-1}) = \begin{cases} \frac{1}{A_{10}^6}, \text{если } x \neq y_1 \neq \cdots \neq y_5 \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Обратим внимание, что существует A_9^5 способов выбрать различные значения $y_1, \cdots, y_5$, не совпадающие с x. Отсюда следует, что:

$$P(X_i = x) = \sum_{y_1 \in R_X} \sum_{y_2 \in R_X} \cdots \sum_{y_5 \in R_X} P(X_6 = x \cap X_1 = y_1 \cap \cdots \cap X_5 = y_5) = A_9^5 * \frac{1}{A_{10}^6} = \frac{1}{10}$$

Отсюда следует, что распределения X_1 и X_6 совпадают. По аналогии можно показать, что распределение любого из X_i, где $i \in \{1, \cdots, 10\}$, совпадает с распределением X_1, а значит они совпадают по распределению и между собой.

4. Пусть $x_1, x_2, y_1, \cdots y_4 \in R_X$. Тогда по аналогии с предыдущим пунктом получаем, что:

$$P(X_1 = x_1 \cap X_6 = x_2) = \sum_{y_1 \in R_X} \sum_{y_2 \in R_X} \cdots \sum_{y_5 \in R_X} P((X_1 = x_1 \cap X_6 = x_2) \cap (X_2 = y_1 \cap \cdots \cap X_5 = y_4)) =$$
$$= A_8^4 * \frac{1}{A_{10}^6} = \frac{1}{90} = P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2)$$

По аналогии нетрудно доказать совпадение совместных распределений для любых случайных векторов одинаковой длины, составленных из различных случайных величин X_i.

5. Математическое ожидание составит:

$$E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) = 65 * 5 = 325$$

Получить дисперсию несколько сложней. Во-первых отметим, что из полученного ранее результата следует, что для любых $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, во-первых, $Var(X_i) = Var(X_1) = 825$, а во-вторых $Cov(X_i, X_j) = Cov(X_1, X_2)$.

Для нахождения данной ковариации воспользуемся **хитрой техникой**. Обратим внимание, что по свойству ковариации случайной величины с константой имеем $Cov(X_1, X_1 + \cdots + X_{10}) = Cov(X_1, 650) = 0$. Отсюда следует, что:

$$Cov(X_1, X_1 + \cdots + X_{10}) = Cov(X_1, X_1) + \cdots + Cov(X_1, X_{10}) = Var(X_1) + 9Cov(X_1, X_2) =$$
$$= 825 + 9Cov(X_1, X_2) = 0$$

Решая данное равенство получаем, что $Cov(X_1, X_2) = \left(-\frac{275}{3}\right)$.

В итоге имеем:

$$Var(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) = Cov(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5, X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) =$$
$$= 5Var(X_1) + 5 * 4Cov(X_1, X_2) = 5 * 825 + 5 * 4 * \left(-\frac{275}{3}\right) = \frac{6875}{3}$$

6. Через Y_i обозначим длину видео просмотренного i-м, где $i \in \{1, \cdots 6\}$.

Покажем, что распределения Y_1 и Y_2 совпадают. Из условия следует, что видео бывают трех типов: длинные, средние и короткие. И, например, вероятность того, что $Y_2 = 120$ совпадает с тем, что вторым будет просмотрено длинное видео. Эта вероятность, в свою очередь, совпадает с вероятностью того, что при расстановке видео в случайном порядке длинное видео окажется на второй позиции. Поскольку вероятность нахождения длинного видео на каждой из позиций одинакова, то $P(Y_2 = 120) = P(Y_1 = 120)$. Аналогичным образом можно показать равенство и для всех остальных вероятностей, откуда следует совпадение распределений соответствующих случайных величин. Наконец, по аналогии можно показать, что совпадают совместные распределения любых случайных векторов одинаковой длины, состоящих из различных случайных величин Y_i.

Воспользуемся полученным результатом:

$E(Y_1) = \frac{3}{6} * 120 + \frac{2}{6} * 60 + \frac{1}{6} * 30 = 85$

$$E(Y_1^2) = \frac{3}{6} * 120^2 + \frac{2}{6} * 60^2 + \frac{1}{6} * 30^2 = 8550$$

$$Var(Y_1) = 8550 - 85^2 = 1325$$

$$Cov(Y_1, Y_2) = -\frac{Var(Y_1)}{6 - 1} = -\frac{1325}{5} = -265$$

$$Var(Y_1+Y_2+Y_3)=3Var(Y_1)+3*2Cov(Y_1,Y_2)=3*1325-6*265=2385$$

Показать решение