Элементарный кубик

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Случайные события (/Topics/Details?id=5)
Раздел
Классическое определение вероятностей и обратные события (/SubTopics/Details?id=30)
Дата публикации
12.07.2021
Дата последней правки
20.08.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

Василий кидает два обычных шестигранных кубика. Запишите следующие события (хотя бы по три входящих в них элементарных события) и рассчитайте их вероятности:

1. На первом из них выпадет четное число.

2. На обоих кубиках выпадет четное число.

3. По крайней мере на одном кубике выпадет четное число.

4. Ни на одном кубике не выпадет четное число.

5. На первом кубике выпадет не меньше очков, чем на втором.

Решение

Через A_1 обозначим событие, в соответствии с которым на первом кубике впало четное число, а через A_2 - на втором. Пространство элементарных событий имеет вид
$\Omega=\{((1,1),(3,5),(2,6),\cdots\}=\{(x,y):x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\}.$

1. На первом кубике может выпасть одно из $C_3^1 = 3$ чисел. На каждое из соответствующих чисел приходится по $C_6^1 = 6$ вариантов выпадения второго кубика. В итоге событию A_1 удовлетворяют $C_3^1 C_6^1 = 3 \times 6 = 18$ элементарных события. По аналогии нетрудно догадаться, что общее количество возможных результатов бросков кубиков составит $C_6^1 C_6^1 = 6 \times 6 = 36$.

В результате получаем:

$$P(A_1) = P(\{(2,1),(4,3),(6,6),\cdots\}) = \frac{C_3^1 C_6^1}{C_6^1 C_6^1} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Также, без потери общности данный пункт задачи можно помыслить в контексте эксперимента, в котором осуществляется лишь один бросок кубика. В таком случае $\Omega = \{1,\cdots,6\}$ и $A_1 = \{2,4,6\}$, откуда:

$$P(A_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. По аналогии с предыдущим пунктом имеем:

$$P(A_1 \cap A_2) = \{(2,2),(4,6),(6,2),\cdots\} = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_6^1 C_6^1} = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4}$$

3. С помощью формулы вероятности объединения событий получаем:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(\{(1,2),(4,6),(2,5),\cdots\}) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

4. Используя формулу вероятности обратного события имеем:

$$P(\overline{A_1 \cup A_2}) = P(\{(1,1),(1,3),(3,5),\cdots\}) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

5. Через $G = \{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$ обозначим событие, в соответствии с которым на кубиках выпадает равное число очков. Нетрудно догадаться, что $P(G) = \frac{1}{6}$. Через $B_1 = \{(6,1),(5,3),(2,1),\cdots\}$ обозначим событие, при котором на первом кубике выпадает больше, чем на втором, а через $B_2 = \{(1,6),(3,5),(1,2),\cdots\}$ - событие, в соответствии с которым большее число очков выпадает на втором кубике. Необходимо найти вероятность события $B_1 \cup G = \{(1,1),(6,1),(5,3),\cdots\}$.

Нетрудно догадаться (см. продвинутый комментарий 1), что события B_1 и B_2 равновероятны и не совместны, откуда:

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) = 2P(B_1)$$

Заметим (см. продвинутый комментарий 2), что объединение событий B_1 и B_2 является событием, противоположным событию G, откуда:

$$P(B_1 \cup B_2) = P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Объединяя оба полученных результата получаем:

$$2P(B_1) = \frac{5}{6} \implies P(B_1) = \frac{5}{12}$$

В итоге находим вероятность искомого события любым из двух способов (пользуясь несовместностью событий B_1 и G, либо тем, что объединение этих событий противоположно событию B_2):

$$P(B_1 \cup G) = P(B_1) + P(G) = \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$

$$P(B_1 \cup G) = 1 - P(\overline{B_1 \cup G}) = 1 - P(B_2) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

Продвинутый комментарий 1. Формально равновероятность событий B_1 и B_2 следует из того, что во-первых, эти события состоят из равновероятных элементарных событий. Во-вторых, B_1 и B_2 включают равное число элементарных событий, так как функция $f((x, y)) = (y, x)$ из B_1 в B_2 является биективной. Несовместность гарантируется тем, что из $(x, y) \in B_1$ следует $x > y$, а значит $(x, y) \notin B_2$. По аналогии из $(x, y) \in B_2$ следует $y > x$, откуда $(x, y) \notin B_1$.

Продвинутый комментарий 2. Для того, чтобы показать противоположность событий $B_1 \cup B_2$ и G достаточно обратить внимание на два обстоятельства. Во-первых, что из $(x, y) \in G$ следует $x = y$, а значит $(x, y) \notin B_1 \cup B_2$. По аналогии из $(x, y) \in B_1 \cup B_2$ следует $x > y \vee x < y$, откуда $x \neq y$, вследствие чего $(x, y) \notin G$. Во-вторых, что $(B_1 \cup B_2 \cup G) = \{(x, y) \in \Omega : x = y \vee x > y \vee x < y\} = \Omega$.

Показать решение