Гипотезы о костюмах

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Метод максимального правдоподобия (/Topics/Details?id=31)
Раздел
Введение в ММП (/SubTopics/Details?id=109)
Дата публикации
12.02.2022
Дата последней правки
14.02.2022
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

Покупатели в магазине с очень большим ассортиментом независимо друг от друга примеряют костюмы до тех пор, пока не найдут подходящий. Вероятность того, что очередной примеряемый костюм окажется подходящим, для каждого покупателя равняется $p \in (0, 1)$ и не зависит от числа примеренных ранее костюмов. Магазин посетили 225 покупателей, которые, суммарно, померяли 2250 костюмов. На уровне значимости 5% при помощи ММП оценок протестируйте (против двухсторонней альтернативы) гипотезу о том, что:

1. Вероятность того, что покупатель купит очередной примеряемый костюм, равняется 0.2.

2. Вероятность того, что покупатель найдет подходящий костюм не раньше, чем при второй примерке, составляет 0.2.

3. Математическое ожидание числа примерок покупателем равняется 5.

Решение

1. Через $X = (X_1, \ldots, X_{2250})$ обозначим выборку из числа примеренных покупателями костюмов, причем поскольку речь идет об экспоненциальном распределении с носителем, начинающимся с единицы, получаем:

$$P(X_1 = x_1) = (1-p)^{x_1-1}p$$

Тестируется гипотеза $H_0 : p = 0.2$ против альтернативы $H_1 : p > 0.2$.

Используя метод максимального правдоподобия по аналогии с задачей (https://sobopedia.azurewebsites.net/Exercises/Details?id=218) нетрудно показать, что:

$$\hat{p}_{2250}(x) = \frac{225}{2250} = 0.1 \qquad i(0.2) = \frac{1}{(1-0.2)0.2^2} = 31.25$$

Пользуясь полученными результатами рассчитаем реализацию тестовой статистики:

$$T(x) = \sqrt{2250 \times 31.25}(0.1 - 0.2) \approx -26.5$$

Отсюда получаем, что:

$$\text{p-value} = 2\min\left(1 - \Phi\left(-26.5\right), \Phi\left(-26.5\right)\right) \approx 0$$

В результате нулевая гипотеза отвергается на любом разумно уровне значимости, в том числе на 1%-м.

В качестве альтернативы можно было бы также воспользоваться реализацией оценки информации Фишера:

$$i(0.1) = \frac{1}{(1-0.1)0.1^2} \approx 111.1$$

В итоге мы бы также получили значение тестовой статистики, при котором p-value крайне близок к нулю:

$$T(x) \approx \sqrt{2250 \times 111.1}(0.1 - 0.2) \approx -50$$

$$\text{p-value} = 2\min\left(1 - \Phi\left(-50\right), \Phi\left(-50\right)\right) \approx 0$$

Наконец, данную задачу можно также решить заметив, что $E(X_1) = \frac{1}{p}$, а значит нулевую и альтернативную гипотезы можно сформулировать как $H_0 : E(X_1) = 10$ и $H_1 : E(X_1) \neq 10$, что позволяет воспользоваться тестом о равенстве математического ожидания некоторому значению. Однако, для того чтобы провести соответствующий тест в классической формулировки в задаче недостает информации о реализации исправленной выборочной дисперсии, вместо которой, впрочем, можно использовать иную состоятельную оценку дисперсии, например, полученную с помощью ММП оценки (дополнительно придется применить теорему Слуцкого). Однако, в таком случае реализация тестовой статистики и критическая область окажутся такими же, как те, что были получены выше.

2. Обратим внимание, что:

$$P(X_1 \leq 2) = g(p) = 1 - (1-p)^2 \qquad P'(X_1 \leq 2) = g'(p) = 2(1-p)$$

Тестируется гипотеза $H_0 : 1 - (1-p)^2 = 0.2$ против альтернативы $H_1 : 1 - (1-p)^2 \neq 0.2$.

Посчитаем реализацию ММП оценки соответствующей вероятности и ее производной:

$$g(0.1) = 1 - (1-0.1)^2 \approx 0.19 \qquad g'(0.1) = 2(1-0.1) = 1.8$$

Рассчитаем реализацию тестовой статистики:

$$T(x) \approx \sqrt{\frac{2250 \times 111.1}{1.8^2}}(0.19 - 0.2) \approx -2.77$$

В результате получаем:

$$\text{p-value} = 2\min(1 - \Phi\left(-2.78\right), \Phi\left(-2.78\right)) \approx 0.0027$$

Исходя из полученного p-value нулевая гипотеза отвергается на 1%-м уровне значимости.

Обратим внимание, что из $1 - (1-p)^2 = 0.2$ следует $p \approx 0.105573$. А значит в качестве альтернативного решения можно было бы также протестировать гипотезу $H_0 : p = 0.105573$ против $H_1 : p \neq 0.105573$. Нетрудно убедиться, что в таком случае будет получено крайне близкое значение p-value.

3. Обратим внимание, что:

$$E(X_1) = g(p) = \frac{1}{p} \qquad E'(X_1) = g'(p) = -\frac{1}{p^2}$$

Тестируется гипотеза $H_0 : \frac{1}{p} = 5$ против альтернативы $H_1 : \frac{1}{p} \neq 5$.

Посчитаем реализацию ММП оценки математического ожидания и его производной:

$$g(0.1) = 1/0.1 = 10 \qquad g'(0.1) = -\frac{1}{0.1^2} = -100$$

Рассчитаем реализацию тестовой статистики:

$$T(x) \approx \sqrt{\frac{2250 \times 111.1}{(-100)^2}}(10 - 5) \approx 25$$

В результате получаем:

$$\text{p-value} = 2\min(1 - \Phi\left(25\right), \Phi\left(25\right)) \approx 0$$

Исходя из полученного p-value нулевая гипотеза отвергается на 1%-м уровне значимости.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.

© 2018 – 2022 Sobopedia