

Музыкальная гипотеза

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Теория проверки статистических гипотез (/Topics/Details?id=35)

Раздел

Проверка гипотез по поводу математического ожидания и дисперсии (/SubTopics/Details?id=125)

Дата публикации

05.02.2022

Дата последней правки

25.03.2022

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★

Условие

Лаврентий и ученый кот независимо друг от друга каждый день слушают музыку. Продолжительность прослушивания музыки для каждого из них является случайной величиной, хорошо описываемой нормальным распределением. На протяжении десяти дней Лаврентий слушал музыку, в среднем, по 130 минут в день, а ученый кот - по 180 минут в день. Реализации исправленный выборочных дисперсий для них оказались равны 900 и 1600 соответственно. Для следующих гипотез вычислите p -value и проверьте, можно ли отвергнуть сформулированные нулевые гипотезы на 5%-м уровне значимости.

1. В среднем каждый день общая продолжительность прослушивания музыки для Лаврентия равняется двум с половиной часам. В качестве альтернативы предположите, что ожидаемая продолжительность прослушивания меньше.
2. В среднем Лаврентий и ученый кот слушают музыку одинаковое количество времени. В качестве альтернативы предположите, что ученый кот слушает музыку дольше. При этом предполагается, что дисперсии времени прослушивания у них совпадают.
3. Дисперсия ежедневного времени прослушивания музыки для Лаврентия равняется 1000. В качестве альтернативы предположите, что дисперсия больше.
4. Дисперсии времени прослушивания музыки для ученого кота и Лаврентия совпадают. В качестве альтернативы предположите, что дисперсии не совпадают.

Решение

1. Через $X = (X_1, \dots, X_{10})$ обозначим выборку из ежедневного времени, затрачиваемого Лаврентием на прослушивание музыки. Аналогичную выборку для ученого кота обозначим как $Y = (Y_1, \dots, Y_{10})$. При этом отметим, что $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

В данном случае необходимо протестировать гипотезу о математическом ожидании наблюдения из выборки из нормального распределения. Нулевая гипотеза и альтернатива формулируются как $H_0 : \mu_X = 150$ и $H_1 : \mu_X < 150$ соответственно. Реализация тестовой статистики принимает вид:

$$T(x) = \frac{130 - 150}{\sqrt{\frac{900}{10}}} \approx -2.11$$

Обратим внимание, что:

$$T(X)|H_0 \sim t(10 - 1)$$

Отсюда получаем:

$$\text{p-value} = F_{t(9)}(-2.11) \approx 0.032$$

Поскольку $0.032 < 0.05$, то нулевая гипотеза отвергается на 5%-м уровне значимости.

2. Необходимо протестировать гипотезу о равенстве математических ожиданий наблюдений из независимых нормальных выборок с равными дисперсия. Гипотезы имеют вид $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ и $H_1 : \mu_X < \mu_Y$.

$$\hat{\sigma}^2(x, y) = \frac{(10 - 1)900 + (10 - 1)1600}{10 + 10 - 2} = 1250$$

$$T(x) = \frac{130 - 180}{\sqrt{1250 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right)}} \approx -3.16$$

Обратим внимание, что:

$$T(X)|H_0 \sim t(10 + 10 - 2)$$

Отсюда получаем:

$$\text{p-value} = F_{t(18)}(-3.16) \approx 0.00271$$

Поскольку $0.00271 < 0.05$, то нулевая гипотеза отвергается на 5%-м уровне значимости.

3. Тестируется гипотеза $H_0 : \sigma_X^2 = 1000$ против альтернативы $H_1 : \sigma_X^2 > 1000$. Найдем реализацию тестовой статистики:

$$T(x) = \frac{(10 - 1)900}{1000} = 8.1$$

Обратим внимание, что:

$$T(X)|H_0 \sim \chi^2(10 - 1)$$

Отсюда получаем:

$$\text{p-value} = 1 - F_{\chi^2(9)}(8.1) \approx 0.524$$

Поскольку $0.524 > 0.05$, то нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.

4. Тестируется гипотеза $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ против альтернативы $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$. Найдём реализацию тестовой статистики:

$$T(x) = \frac{900}{1600} = 0.5625$$

Обратим внимание, что:

$$T(X)|H_0 \sim F(10 - 1, 10 - 1)$$

Отсюда получаем:

$$\text{p-value} = 2 \min(F_{F(9,9)}(0.5625), 1 - F_{F(9,9)}(0.5625)) \approx 2 \min(0.2, 0.8) = 0.4$$

Поскольку $0.4 > 0.05$, то нулевая гипотеза не отвергается на 5%-м уровне значимости.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.