Ютуб и Василий

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Доверительные интервалы (/Topics/Details?id=33)
Раздел
Введение в доверительные интервалы (/SubTopics/Details?id=114)
Дата публикации
18.04.2020
Дата последней правки
20.04.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★⯪

Условие

Кот Василий научился пользоваться ютубом и использует его для просмотра образовательных видео. Число просмотренных им за день роликов является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона с параметром λ и никак не зависит от числа ранее просмотренных видео.

За последние 100 дней Василий посмотрел 1000 видеов.

1. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку математическое ожидания просматриваемых за день Василием видео и информацию Фишера.

2. Используя найденную в предыдущем пункте оценку постройте 80% доверительный интервал для математического ожидания числа просматриваемых за день котом Василием видео.

3. Постройте 80% доверительный интервал для вероятности того, что Василий посмотрит за день ровно одно видео.

4. Постройте 80% асимптотический доверительный интервал для информации Фишера для одного наблюдения.

Решение

Видео с разбором задачи может быть найдено по ссылке (https://youtu.be/MPhHVRaNDb4).

1. Через $X = (X_1, \cdots, X_n)$ обозначим выборку из числа просмотренных Василием видео, а через $x = (x_1, \cdots, x_n)$ - её реализацию.

Функция правдоподобия имеет вид:

$$L(\lambda; x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

Максимизируем логарифм функции правдоподобия:

$$\max_{\lambda} \sum_{i=1}^{n} (-\lambda) + x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!)$$

Найдем условия первого порядка:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\lambda} - 1 \right) = 0$$

Решая данное равенство получаем точку экстремума:

$$\lambda^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

Убедимся в том, что был найден максимум:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\lambda} - 1 \right)}{d\lambda} \Big|_{\lambda^*} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{(\lambda^*)^2} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)^2} = -\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i} < 0$$

В результате получаем оценку метода максимального правдоподобия:

$$\hat{\lambda}_n = \overline{X}_n$$

Найдем информацию Фишера:

$$I_X(\lambda) = -E \left(-\frac{n^2}{n\lambda} \right) = \frac{n}{\lambda}$$

Таким образом, оценка информации Фишера будет:

$$\hat{I}_X(\lambda) = \frac{n}{\hat{\lambda}_n} = \frac{n}{\overline{X}_n}$$

2. Обозначим через $z_{0.9} \approx 1.28$ квантиль уровня 0.9 стандартного нормального распределения. Тогда 80% асимптотический доверительный интервал будет иметь вид:

$$\left(\hat{\lambda}_n - z_{0.9}\sqrt{\frac{1}{\hat{I}_X(\lambda)}}, \hat{\lambda}_n + z_{0.9}\sqrt{\frac{1}{\hat{I}_X(\lambda)}}\right) =$$

$$= \left(\overline{X}_n - 1.28\sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}}, \overline{X}_n + 1.28\sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}}\right)$$

Поскольку $n = 100$ и $\left(\overline{X}|X = x\right) = \frac{1000}{100} = 10$, то реализация данного асимптотического доверительного интервала примет вид:

$$\left(10 - 1.28\sqrt{\frac{10}{100}}, 10 + 1.28\sqrt{\frac{10}{100}}\right) \approx (9.595, 10.405)$$

3. Вероятность того, Василий посмотрит ровно одно видео, равняется:

$$P\left(X_1 = 1\right) = \lambda e^{-\lambda} = g(\lambda)$$

Найдем модуль производной данной функции:

$$|g'(\lambda)| = |1 - \lambda| e^{-\lambda}$$

В итоге получаем асимптотический доверительный интервал для данной вероятности:

$$\left(g(\hat{\lambda}_n) - 1.28\sqrt{\frac{\overline{X}_n * g'(\hat{\lambda}_n)^2}{n}}, g(\hat{\lambda}_n) + 1.28\sqrt{\frac{\overline{X}_n * g'(\hat{\lambda}_n)^2}{n}}\right) =$$

$$= \left(\hat{\lambda}_n e^{-\hat{\lambda}_n} - 1.28\sqrt{\frac{\overline{X}_n (1 - \hat{\lambda}_n)^2 e^{-2\hat{\lambda}_n}}{n}}, \hat{\lambda}_n e^{-\hat{\lambda}_n} + 1.28\sqrt{\frac{\overline{X}_n (1 - \hat{\lambda}_n)^2 e^{-2\hat{\lambda}_n}}{n}}\right)$$

Обратим внимание, что:

$$\left((g(\hat{\lambda}))|X = x\right) = g(10) = 10e^{-10}$$

$$\left((|g'(\hat{\lambda})|)|X = x\right) = |g'(10)| = |1 - 10| e^{-10} = 9e^{-10}$$

Используя данные результаты получаем реализацию рассматриваемого асимптотического доверительного интервала:

$$\left(10e^{-10} - 1.28 * \sqrt{0.1 * 9^2 e^{-2*10}}, 10e^{-10} + 1.28 * \sqrt{0.1 * 9^2 e^{-2*10}}\right) \approx (0.00029, 0.00062)$$

При этом, поскольку доверительный интервал является не точным, а не асимптотическим, то не удивительно, что его левая граница содержит отрицательное число, при том что доверительный интервал был построен для вероятности.

4. По аналогии с предыдущим пунктом получаем, что:

$$i_X(\lambda) = g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

Рассчитаем модуль производной:

$$|g'(\lambda)| = \frac{1}{\lambda^2}$$

Действуя по аналогии с предыдущим пунктом получаем следующую реализацию 80%-го асимптотического доверительного интервала:

$$\left(\frac{1}{10} - 1.28 * \sqrt{0.1 * \left(\frac{1}{10^2}\right)^2}, \frac{1}{10} + 1.28 * \sqrt{0.1 * \left(\frac{1}{10^2}\right)^2}\right) \approx (0.096, 0.104)$$

Показать решение