Нормальные герои всегда идут в обход

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические многомерные распределения (/Topics/Details?id=19)
Раздел
Многомерное нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=87)
Дата публикации
18.01.2019
Дата последней правки
17.02.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★★★★

Условие

Представьте, что вы играете в онлайн РПГ "Нормальные Герои" на сервере "Путь в Обход". Каждый герой обладает пятью характеристиками: силой, интеллектом, выносливостью, харизмой и рукоделием. Случайный вектор характеристик, наугад взятого игрока на сервере хорошо описывается многомерным нормальным распределением:

$$X=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\\X_5\end{bmatrix}\sim\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}10\\2\\3\\8\\20\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&-0.3&1.5&2.8&0.4\\-0.3&1&-0.9&0.8&0.6\\1.5&-0.9&9&-1.8&-1.5\\2.8&0.8&-1.8&16&3.2\\0.4&0.6&-1.5&3.2&4\end{bmatrix}\right)$$

Где X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5 - сила, интеллект. выносливость, харизма и рукоделие соответственно случайно взятого игрока.

Через $S_i=\begin{bmatrix}\text{Сила}\\\text{Интеллект}\\\text{Выносливость}\\\text{Харизма}\\\text{Рукоделие}\end{bmatrix}$, $S_i\in R^5$ обозначим вектор характеристик некоторого героя $i\in N$.

Игрок с вектором характеристик $S_1 = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \\ s_{14} \\ s_{15} \end{bmatrix}$ побеждает игрока с вектором характеристик $S_2 = \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \\ s_{24} \\ s_{25} \end{bmatrix}$, если $(s_{11} + 2s_{12} + 3s_{13}) - (s_{21} + 2s_{22} + 3s_{23}) + \epsilon > 0$, где $\epsilon \sim N(0, 1)$. В противном случае первый игрок проигрывает второму. Предположим, что ϵ и X независимы.

1. Дайте интерпретацию случайной величины ϵ: напишите, что она может отражать. Оцените, насколько реалистично допущение о независимости ϵ и X?

2. Найдите вероятность того, что случайно взятый игрок с характеристиками $s_{11} = 12$ и $s_{13} = 2$ победит случайно взятого игрока с характеристиками $s_{22} = 11, s_{24} = 7$ и $s_{25} = 25$. Объясните, в каком случае информация о рукоделии и харизме героя влияет на вероятность его победы в бою, а в каком - нет: приведите примеры.

3. Десять случайно взятых игроков были разделены на две команды одинакового размера. Каждому герою из первой команды был сопоставлен противник из второй команды. Побеждает команда, чьи герои одержали большее число побед над своими противниками. У всех участников первой команды сила равняется $\beta \in R$. Найдите значение параметра β, при котором вероятность победы первой команды превысит 0.6.

4. Рассчитайте вероятность того, что наименьшей характеристикой у случайно взятого героя окажется интеллект. Подсказка - информацию о расчете значения функции распределения многомерной нормальной случайной величины можно посмотреть, например, здесь (https://cran.r-project.org/web/packages/mvtnorm/mvtnorm.pdf) или тут. (https://stackoverflow.com/questions/30560176/multivariate-normal-cdf-in-python-using-scipy)

5. Характеристики вашего героя составляют $S = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \\ 10 \\ 18 \end{bmatrix}$. Вам предстоит бой со случайно выбранным противником. Если вы выиграете, то получите 10 очков опыта, а если проиграете, то столько же потеряете. Вы также можете отказаться от боя, избежав как прибавки к опыту, так и потерь. Значения характеристик вашего противника вам неизвестны. Перед началом боя вам предлагают узнать точные значения двух характеристик вашего противника. Если вы действуете рационально и нейтральны к риску, то какие характеристики противника вы решите узнать? Ответ обоснуйте математически, используя понятие ожидаемой полезности.

6. Характеристики вашего героя составляют $S = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix}$. Вы сражаетесь со случайно выбранным противником. Перед боем злой колдун наложил на вас комбинаторное проклятье, случайным образом поменяв местами значения вашей силы, интеллекта и выносливости. Найдите вероятность вашей победы. Затем, вычислите вероятность того, что ваш герой победит, если злой колдун наложил проклятье не на вас, а на вашего противника.

7. Случайно выбранный герой непрерывно наносит $|\eta_1|$ единиц урона в $|\eta_2|$ секунд, где η_1 и η_2 - его неизвестные значения силы и интеллекта соответственно. Найдите вероятность того, что не более чем за минуту ему удастся победить монстра с 300 единицами здоровья. При этом одна единица урона отнимает одну единицу здоровья.

8. У вас есть 30 очков, которые вы можете любым образом распределить между характеристиками вашего героя. Найдите такой вектор ваших характеристик, при котором вы будете побежать случайно выбранного героя с вероятностью 0.6.

Решение

1. Случайная величина ϵ может отражать влияние различных факторов, помимо характеристик героя, на исход боя: мастерство, случайно неправильно нажатые кнопки, перебои в работе сервера и прочее. Допущение о независимости ϵ и X не очень реалистично, поскольку, например, игроки с большими характеристиками могут быть более опытными и в сражениях между ними гораздо меньшую роль может играть случайность, в связи с чем дисперсия ϵ окажется меньше.

2. Для начала найдем условное распределение неизвестных характеристик первого и второго игрока соответственно. Обозначим первого игрока A, а второго через B. Параметры распределения этих характеристик для первого игрока будут:

$$\tilde{\mu}^A = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3 & -0.9 \\ 2.8 & -1.8 \\ 0.4 & -1.5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 1.5 & 9 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2.013333 \\ 9.991111 \\ 20.542222 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Sigma}^A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 16.0 & 3.2 \\ 0.6 & 3.2 & 4.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.3 & -0.9 \\ 2.8 & -1.8 \\ 0.4 & -1.5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 1.5 & 9 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -0.3 & -0.9 \\ 2.8 & -1.8 \\ 0.4 & -1.5 \end{bmatrix}^T =$$
$$= \begin{bmatrix} 0.904 & 0.744 & 0.476 \\ 0.744 & 13.077333 & 2.362667 \\ 0.476 & 2.362667 & 3.637333 \end{bmatrix}$$

Откуда получаем параметры распределения боевой мощи первого игрока:

$$\mu_F^A = 12 + 2 * 2.013333 + 3 * 2 = 22.02667$$

$$\Sigma_F^A = 2 * 0.904 * 2 = 3.616$$

По аналогии получаем, что:

$$\tilde{\mu}^B = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3 & 2.8 & 0.4 \\ -0.9 & -1.8 & -1.5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 16.0 & 3.2 \\ 0.6 & 3.2 & 4.0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} \right) =$$
$$= \begin{bmatrix} 5.690963 \\ -4.779518 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Sigma}^B = \begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 1.5 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.3 & 2.8 & 0.4 \\ -0.9 & -1.8 & -1.5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 16.0 & 3.2 \\ 0.6 & 3.2 & 4.0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} -0.3 & 2.8 & 0.4 \\ -0.9 & -1.8 & -1.5 \end{bmatrix} \right)^T =$$
$$= \begin{bmatrix} 3.307784 & 1.453892 \\ 1.453892 & 7.926946 \end{bmatrix}$$

$$\mu_F^B = 5.690963 + 2 * 11 - 3 * 4.779518 = 13.35241$$

$$\Sigma_F^B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.307784 & 1.453892 \\ 1.453892 & 7.926946 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 83.37365$$

Рассчитываем параметры распределения разности боевых мощностей:

$$\mu_d = 22.02667 - 13.35241 = 8.674259$$

$$\Sigma_d = 3.616 + 83.37365 + 1 = 87.98965$$

Рассчитаем итоговую вероятность победы первого игрока:

$$1 - F_Z(\frac{0 - 8.674259}{\sqrt{87.98965}}) = 1 - F_Z(-0.9247335) \approx 0.8224477$$

3. Исходя из процедуры отбора состава команд очевидно, что в каждом поединке вероятность победы первой команды одинакова. Обозначим соответствующую вероятность через p. Тогда количество побед первой команды подчиняется биномиальному распределению. Первая команда победит, если одержит не менее трех побед. Следовательно, следует решить следующее уравнение для p:

$$C_5^3 p^3 (1-p)^2 + C_5^4 p^4 (1-p)^1 + C_5^5 p^5 (1-p)^0 = 0.6$$

Решая (solve (5 choose 3)x^3(1-x)^2+(5 choose 4)x^4(1-x)^1+x^5=0.6 for x) получаем, что $p \approx 0.553746$.

Теперь следует найти такой параметр β, при котором игрок из первой команды побеждает игрока из второй с вероятностью 0.553746. Для начала найдем условное распределение характеристик случайного игрока со второй команды. Обозначим параметры его распределения через $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\Sigma}$ соответственно.

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3 \\ 1.5 \\ 2.8 \\ 0.4 \end{bmatrix} * \frac{1}{4} * (\beta - 10) = \begin{bmatrix} -0.075\beta + 2.75 \\ 0.375\beta - 0.75 \\ 0.7\beta + 1 \\ 0.1\beta + 19 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -0.9 & 0.8 & 0.6 \\ -0.9 & 9 & -1.8 & -1.5 \\ 0.8 & -1.8 & 16 & 3.2 \\ 0.6 & -1.5 & 3.2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.3 \\ 1.5 \\ 2.8 \\ 0.4 \end{bmatrix} * \frac{1}{4} * \left(\begin{bmatrix} -0.3 \\ 1.5 \\ 2.8 \\ 0.4 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 0.9775 & -0.7875 & 1.01 & 0.63 \\ -0.7875 & 8.4375 & -2.85 & -1.65 \\ 1.01 & -2.85 & 14.04 & 2.92 \\ 0.63 & -1.6500 & 2.92 & 3.96 \end{bmatrix}$$

Теперь найдем параметры распределение боевой мощи этого игрока:

$$\mu_F^2 = \beta - 2 * (0.075\beta - 2.75) + 3 * (0.375\beta - 0.75) = 1.975\beta + 3.25$$

$$\Sigma_F^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9775 & -0.7875 \\ -0.7875 & 8.4375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 70.3975$$

Параметры боевой мощи для игрока из первой команды будут:

$$\mu_F^1 = 10 + 2 * 2 + 3 * 3 = 23$$

$$\Sigma_F^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -0.3 & 1.5 \\ -0.3 & 1 & -0.9 \\ 1.5 & -0.9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 86$$

Отсюда получаем параметры распределения разницы в силах:

$$\mu_d = 1.975\beta + 3.25 - 23 = 1.975\beta - 20.25$$

$$\Sigma_d = 70.3975 + 86 + 1 = 157.3975$$

Получаем следующее выражение для вероятности, а через него и ответ:

$$1 - F_Z(\frac{20.25 - 1.975\beta}{\sqrt{157.3975}}) = 0.553746 => F_Z(\frac{20.25 - 1.975\beta}{\sqrt{157.3975}}) = 0.446254 =>$$

$$=> \frac{20.25 - 1.975\beta}{\sqrt{157.3975}} = -0.1351314 => \beta \approx 11.1116$$

4. Следует найти следующую вероятность:

$$P(X_2 < X_1 \cap X_2 < X_3 \cap X_2 < X_4 \cap X_2 < X_5) =$$
$$= P(X_2 - X_1 < 0 \cap X_2 - X_3 < 0 \cap X_2 - X_4 < 0 \cap X_2 - X_5 < 0)$$

Найдем распределение случайного вектора:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ X_2 - X_3 \\ X_2 - X_4 \\ X_2 - X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X$$

Получаем параметры распределения:

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ -6 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 5.6 & 3.7 & 3.3 & 1.1 \\ 3.7 & 11.8 & -0.7 & -0.2 \\ 3.3 & -0.7 & 15.4 & 2.8 \\ 1.1 & -0.2 & 2.8 & 3.8 \end{bmatrix}$$

Искомая вероятность будет:

$$F_{\tilde{X}}(0,0,0,0) \approx 0.5732786$$

5. В силу вашей нейтральности к риску вы будете сражаться с противником, если вероятность победы превышает 0.5, и откажетесь от боя в противном случае. Чем меньше неопределенность, тем точней вы сможете оценить вероятность вашей победы. Поэтому, следует узнать такие характеристики противника, которые позволят вам минимизировать дисперсию разницы ваших боевых мощностей. Нетрудно показать, что она будет минимальной, если вы узнаете силу и выносливость вашего противника.

6. Поскольку все возможные комбинации равновероятны, то достаточно рассчитать следующую вероятность (что тривиально):

$$\frac{1}{3!}(P(10 + 2*4 + 3*3 - X_1 - 2X_2 - 3X_3 + \epsilon > 0) + \ldots + P(3 + 2*4 + 3*10 - X_1 - 2X_2 - 3X_3 + \epsilon > 0))$$

Если злой колдун поменял характеристики вашему противнику, то по аналогии рассчитываем (способ расчета очевиден):

$$\frac{1}{3!}(P(10 + 2*4 + 3*3 - X_1 - 2X_2 - 3X_3 + \epsilon > 0) + \ldots + P(10 + 2*4 + 3*3 - X_3 - 2X_2 - 3X_1 + \epsilon > 0))$$

7. Следует рассчитать следующую вероятность:

$$P\left(\frac{|\eta_1|}{|\eta_2|} * 60 \geq 300\right) = P\left(\frac{|X_1|}{|X_2|} \geq 5\right) =$$
$$= P\left(5|X_2| - |X_1| \leq 0\right)$$

Используя формулу полной вероятности и раскрывая модули получаем:

$$
\begin{gathered}
P\left(5|X_2|-|X_1|\leq 0\right)=P\left(X_1-5X_2\leq 0\cap X_1<0\cap X_2<0\right)+\\
+P\left(5X_2+X_1\leq 0\cap X_1<0\cap X_2>0\right)+\\
+P\left(-5X_2-X_1\leq 0\cap X_1>0\cap X_2<0\right)+\\
+P\left(5X_2-X_1\leq 0\cap X_1>0\cap X_2>0\right)=\\
=P\left(X_1-5X_2\leq 0\cap X_1<0\cap X_2<0\right)+\\
+P\left(5X_2+X_1\leq 0\cap X_1<0\cap -X_2<0\right)+\\
+P\left(-5X_2-X_1\leq 0\cap -X_1<0\cap X_2<0\right)+\\
+P\left(5X_2-X_1\leq 0\cap -X_1<0\cap -X_2<0\right)
\end{gathered}
$$

Рассмотрим следующие случайные векторы:

$$
\tilde{X}_1=\begin{bmatrix}X_1-5X_2\\X_1\\X_2\end{bmatrix},\tilde{X}_2=\begin{bmatrix}5X_2+X_1\\X_1\\-X_2\end{bmatrix},\tilde{X}_3=\begin{bmatrix}-5X_2-X_1\\-X_1\\X_2\end{bmatrix},\tilde{X}_4=\begin{bmatrix}5X_2-X_1\\-X_1\\-X_2\end{bmatrix}
$$

Тогда искомую вероятность легко рассчитать следующим образом:

$$
P\left(5|X_2|-|X_1|\leq 0\right)=F_{\tilde{X}_1}(0,0,0)+F_{\tilde{X}_2}(0,0,0)+F_{\tilde{X}_3}(0,0,0)+F_{\tilde{X}_4}(0,0,0)
$$

8. Для начала рассчитаем, какой боевой мощью вы должны обладать для того, чтобы побеждать случайного противника с вероятностью 0.6. Обозначим боевую мощь вашего героя через θ. Тогда разница боевых мощностей распределена следующим образом:

$$
\mu_d=\theta-23
$$

$$
\Sigma_d=86+1=87
$$

Откуда получаем вероятностью победы:

$$
1-F_Z(\frac{23-\theta}{\sqrt{87}})=0.6
$$

Решая получаем θ=25.3631. Следовательно, самым простым вариантом будет вложить в силу 25.3631 очков, а остальные потратить на харизму.

Показать решение