

## Гномы

---

**Опубликовал**

sobodv

**Автор или источник**

sobopedia

**Предмет**

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

**Тема**

Совместное распределение (/Topics/Details?id=10)

**Раздел**

Сумма независимых непрерывных случайных величины (/SubTopics/Details?id=61)

**Дата публикации**

24.11.2018

**Дата последней правки**

17.11.2020

**Последний вносивший правки**

sobodv

**Рейтинг**

★★★

## Условие

Гномы собирают золото в шахте и пещере дракона. Количество собранного за день в шахте золота подчиняется распределению со следующей функцией плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \in [0, \sqrt{2}] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, \sqrt{2}] \end{cases}$$

В то же время функция плотности количества золота, собранного в пещере дракона, имеет следующую функцию плотности:

$$f_Y(y) = \begin{cases} y, & \text{если } y \in [0, \sqrt{2}] \\ 0, & \text{если } y \notin [0, \sqrt{2}] \end{cases}$$

Количество собранного в шахте и в пещере золота являются независимыми случайными величинами.

1. Найдите функцию плотности количества золота, собираемого гномами, в точке 1.
2. Найдите функцию плотности количества золота, собираемого гномами, в точке 2.
3. Найдите функцию плотности количества золота, собираемого гномами.
4. Найдите функцию распределения количества золота, собираемого гномами.

# Решение

1. Рассмотрим случайную величину  $Z = X + Y$ .

Нас интересует значение  $f_Z(1)$ . Заметим, что в этой точке случайная величина  $X$  меньше 1. Откуда получаем:

$$f_Z(1) = \int_0^1 x^3 * (1 - x) dx = \frac{1}{20}.$$

2. Теперь рассмотрим значение  $f_Z(2)$ . Определим минимальное и максимально возможное значения  $X$ . Минимально возможное значение будет  $2 - \sqrt{2}$ . Максимальное значение составит, очевидно,  $\sqrt{2}$ . Откуда имеем:

$$f_Z(2) = \int_{2-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^3 * (2 - x) dx \approx 0.82$$

3. Используя логику предыдущих пунктов получаем:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z x^3 * (z - x) dx, & \text{если } z \in [0, \sqrt{2}] \\ \int_{z-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^3 * (z - x) dx, & \text{если } z \in [\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \\ 0, & \text{если } z \notin [0, 2\sqrt{2}] \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{20}, & \text{если } z \in [0, \sqrt{2}] \\ -\frac{z^5}{20} + z^3 - 2\sqrt{2}z^2 + 4z - \frac{8\sqrt{2}}{5}, & \text{если } z \in [\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \\ 0, & \text{если } z \notin [0, 2\sqrt{2}] \end{cases}$$

4. Очевидно, что:

$$F_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z \frac{t^5}{20} dt, & \text{если } z \in [0, \sqrt{2}] \\ \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^5}{20} dt + \int_{\sqrt{2}}^z \left( -\frac{t^5}{20} + t^3 - 2\sqrt{2}t^2 + 4t - \frac{8\sqrt{2}}{5} \right) dt, & \text{если } z \in [\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \\ 1, & \text{если } z > 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z < 0 \\ \frac{z^6}{120}, & \text{если } z \in [0, \sqrt{2}] \\ -\frac{1}{120} \left( z^6 - 30z^4 + 80\sqrt{2}z^3 - 240z^2 + 192\sqrt{2}z - 120 \right), & \text{если } z \in [\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \\ 0, & \text{если } z \notin [0, 2\sqrt{2}] \end{cases}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.