

Выгодные страховки

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Дискретные случайные величины (/Topics/Details?id=7)

Раздел

Медиана, квантили и мода дискретных случайных величин (/SubTopics/Details?id=141)

Дата публикации

09.10.2019

Дата последней правки

20.10.2019

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★☆☆

Условие

У вас есть роскошный особняк возле моря. Однако в районе, где он находится, периодически происходят природные катаклизмы.

С вероятностью 0.5 на протяжении года может случиться ураган, с вероятностью 0.2 - цунами, а с вероятностью 0.1 - землетрясение. Катаклизмы случаются и наносят вред **независимо** друг от друга.

В случае урагана ваши потери составят 10 денежных единиц, при цунами - 20 денежных единиц, а при землетрясении - 30 денежных единиц. Если происходит несколько катаклизмов, то суммы причиненного ими ущерба складываются. Например, если произошло землетрясение и цунами, то ущерб составит $20 + 30 = 50$ денежных единиц.

За 2 денежные единицы вы можете застраховаться от урагана, за 3 - от цунами, а за 5 - от землетрясения: в случае наступления соответствующего катаклизма все расходы будут покрыты страховкой.

В распоряжении у вас имеются 80 денежных единиц и их количество изменяется только вследствие ваших расходов на страховку и покрытие последствий катаклизмов.

1. Найдите математическое ожидание и дисперсию денежных средств, которые вы **потеряете** вследствие катаклизмов, если у вас имеется страховка **только от землетрясения**. Не строя новую таблицу распределения, а лишь используя свойства математического ожидания и дисперсии укажите, как бы изменился ответ на этот вопрос, если бы ущерб от каждого из катаклизмов увеличился вдвое?

2. Найдите математическое ожидание и дисперсию денежных средств, которые у вас **останутся** к концу года, если у вас имеется страховка **только от землетрясения**. Повторите расчет математического ожидания учитывая, что у вас нет **ни одной страховки**, для чего удобно воспользоваться свойством математического ожидания суммы нескольких случайных величин.
3. Найдите моду и медиану (если таковая существует) денежных средств, которые вы **потеряете** вследствие катаклизмов, если у вас имеется страховка **только от землетрясения**.
4. Допустим, что вы еще не приобрели ни одной страховки и раздумываете над тем, какие из них купить. Вычислите, какие страховки вам следует приобрести, чтобы максимизировать математическое ожидание денежных средств, которые у вас **останутся** к концу года. Если имеются несколько равно привлекательных вариантов, то укажите их все. При этом можно купить любое количество страховок, включая все сразу или ни одной. **Подсказка:** для быстрого решения данного пункта следует воспользоваться свойством математического ожидания суммы нескольких случайных величин.
5. Предположим, что вы избегаете риска и ваша функция полезности от имеющихся у вас в распоряжении к концу года денежных единиц x имеет вид $u(x) = 2\sqrt{x}$. Найдите математическое ожидание полезности от денежных единиц, которые у вас останутся к концу года, при условии, что вы купили страховку **только от землетрясения**.
6. В предыдущем пункте вычислите, сколько должна стоить страховка от землетрясения, чтобы вы были безразличны между её приобретением и отказом от покупки данной страховки, учитывая, что вы максимизируете свою ожидаемую полезность и **уже купили страховки от цунами и от урагана**.

Решение

1. Обозначим через U , C и Z события, в соответствии с которыми произошёл ураган, цунами и землетрясение соответственно. Через X обозначим случайную величину, отражающую объем понесенных вами вследствие катаклизмов потерь, а через Y - оставшиеся в вашем распоряжении деньги. Через S_U , S_C и S_Z обозначим факт наличия у вас соответствующих страховок.

При этом $P(U) = 0.5$, $P(C) = 0.2$ и $P(Z) = 0.1$.

Рассмотрим случайную величину $X|S_Z$ и её вероятности:

$$P(X|S_Z = 0) = P(\bar{U} \cap \bar{C}) = P(\bar{U})P(\bar{C}) = (1 - 0.5) * (1 - 0.2) = 0.4$$

$$P(X|S_Z = 10) = P(U \cap \bar{C}) = P(U)P(\bar{C}) = 0.5 * (1 - 0.2) = 0.4$$

$$P(X|S_Z = 20) = P(C \cap \bar{U}) = P(C)P(\bar{U}) = 0.2 * (1 - 0.5) = 0.1$$

$$P(X|S_Z = 30) = P(U \cap C) = P(U)P(C) = 0.5 * 0.2 = 0.1$$

Пользуясь полученным результатом нетрудно рассчитать математическое ожидание и дисперсию:

$$E(X|S_Z) = 10 * 0.4 + 20 * 0.1 + 30 * 0.1 = 9$$

$$E\left((X|S_Z)^2\right) = 10^2 * 0.4 + 20^2 * 0.1 + 30^2 * 0.1 = 170$$

$$Var(X|S_Z) = 170 - 9^2 = 89$$

В случае увеличения ущерба от катаклизма вдвое получаем:

$$E(2X|S_Z) = 2E(X|S_Z) = 2 * 9 = 18$$

$$Var(2X|S_Z) = 2^2 Var(X|S_Z) = 4 * 89 = 356$$

2. Воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии:

$$E(80 - 5 - X|S_Z) = 75 - E(X|S_Z) = 75 - 9 = 66$$

$$Var(80 - 5 - X|S_Z) = Var(X|S_Z) = 89$$

Через X_U , X_C и X_Z обозначим случайные величины, отражающие ваши потери от каждого из видов катаклизма:

$$E(80 - X_U - X_C - X_Z) = 80 - E(X_U) - E(X_C) - E(X_Z) = 80 - 0.5 * 10 - 0.2 * 20 - 0.1 * 30 = 68$$

3. В данном случае модами являются значения 0 и 10, поскольку им обоим соответствуют вероятности 0.4. Нетрудно проверить, что медианой будет являться 10, так как $P(X|S_Z \geq 10) = 0.6 \geq 0.5$ и $P(X|S_Z \leq 10) = 0.8 \geq 0.5$.

4. В силу свойства линейности математического ожидания очевидно, что выгодно покупать лишь те страховки, цена которых ниже математического ожидания потерь от соответствующей стихии. Поскольку $E(X_U) = 0.5 * 10 = 5 \geq 2$, то страховку от урагана покупать выгодно. Так как $E(X_C) = 0.2 * 20 = 4 \geq 3$, то страховка от цунами также является выгодной. Наконец, в силу того, что $E(X_Z) = 0.1 * 30 = 3 \leq 5$ то страховка от землетрясения не оправдывает вложений. Следовательно, оптимально приобрести страховки только от урагана и от цунами.

5. Воспользуемся формулой для математического ожидания функции от случайной величины:

$$\begin{aligned} E\left(2\sqrt{75 - X|S_Z}\right) &= 2E\left(\sqrt{75 - X|S_Z}\right) = \\ &= 2\left(\sqrt{75} * 0.4 + \sqrt{75 - 10} * 0.4 + \sqrt{75 - 20} * 0.1 + \sqrt{75 - 30} * 0.1\right) \approx 16.2 \end{aligned}$$

6. Необходимо решить следующее равенство для γ - цены страховки от землетрясения:

$$E\left(2\sqrt{75 - X|S_U \cap Z_C}\right) = 2\sqrt{75 - 30} * 0.1 + 2\sqrt{75} * 0.9 = 2\sqrt{75 - \gamma}$$

Решая получаем, что $\gamma = 3.343$.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.