

Кошачий интеллект

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Доверительные интервалы (/Topics/Details?id=33)

Раздел

Доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии в случае нормальной выборки (/SubTopics/Details?id=115)

Дата публикации

14.01.2022

Дата последней правки

14.01.2022

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★☆☆

Условие

Ученый кот разработал специальный корм для повышения кошачьего интеллекта. После принятия корма случайным котом математическое ожидание его интеллекта повышается на $\alpha > 0$, а дисперсия - увеличивается в α^2 раз. До принятия корма интеллект случайно взятого кота хорошо описывается нормальным распределением с математическим ожиданием 100 и дисперсией 25. Постройте 90%-й односторонний (левый или правый) доверительный интервал для параметра α , а также найдите его реализацию, учитывая, что ученый кот раздал специальный корм 900 котам, средний интеллект которых после принятия корма составил 110.

Решение

Обратим внимание, что \bar{X}_n имеет нормальное распределение, причем:

$$E(\bar{X}_n) = E(X_1) = 100 + \alpha$$
$$Var(\bar{X}_n) = \frac{Var(X_1)}{n} = \frac{25\alpha^2}{n}$$

Распределение выборочного среднего позволяет построить следующую центральную статистику:

$$\frac{\bar{X}_n - (100 + \alpha)}{\frac{5\alpha}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\bar{X}_n - (100 + \alpha)}{\frac{5\alpha}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\gamma/2}\right) &= P\left(\bar{X}_n - (100 + \alpha) \leq \frac{5\alpha z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= P\left(\bar{X}_n - 100 \leq \alpha \left(\frac{\sqrt{n} + 5z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{n}}\right)\right) = P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 100)}{\sqrt{n} + 5z_{1-\gamma/2}} \leq \alpha\right) = 1 - \gamma \end{aligned}$$

Таким образом, доверительный интервал уровня $1 - \gamma$ для α будет иметь вид:

$$\left(-\infty, \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 100)}{\sqrt{n} + 5z_{1-\gamma/2}}\right]$$

Рассчитаем реализацию 90%-го доверительного интервала для α по имеющейся выборке:

$$\left(-\infty, \frac{\sqrt{900}(110 - 100)}{\sqrt{900} + 5 \times 1.28}\right] \approx (-\infty, 8.24]$$

Проверка в R:

```
n <- 10
n.sim <- 100000
mu <- 100
sigma <- 5
alpha <- 15
gamma <- 0.1
z <- qnorm(1 - gamma)
t <- rep(NA, n.sim)
s <- rep(NA, n.sim)
for (i in 1:n.sim)
{
  x <- rnorm(n, mu + alpha, sigma * alpha)
  t[i] <- (sqrt(n) * (mean(x) - mu)) / (sqrt(n) + sigma * z)
  s[i] <- (alpha >= t[i])
}
mean(s)
```

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.

