Функция правдоподобия для параметров нормального распределения

Опубликовал

sobody

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Метод максимального правдоподобия (/Topics/Details?id=31)

Раздел

Введение в ММП (/SubTopics/Details?id=109)

Дата публикации

27.10.2019

Дата последней правки

27.10.2019

Последний вносивший правки

sobody

Рейтинг

Условие

Рассмотрим выборку $X=(X_1,\ldots,X_n)$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\theta_1,\theta_2)$. В качестве данных будем рассматривать реализацию выборки $x=(x_1,\ldots x_n)$. Оцениваются оба параметра: θ_1 и θ_2 .

- 1. Выпишите функцию правдоподобия.
- 2. Найдите оценку максимального правдоподобия вектора рассматриваемых параметров. Запишите выражения для реализаций этих оценок.
- 3. Для каждой из найденных оценок проверьте соблюдение свойств несмещенности и состоятельности.
- 4. Найдите информацию Фишера.
- 5. Найдите асимптотическое распределение оценок и для каждой из них постройте асимптотический доверительный интервал уровня $1-\alpha$.
- 6. Найдите асимптотическое распределение $\sqrt{\theta_2}e^{\theta_1}$ и постройте асимптотический доверительный интервал уровня $1-\alpha$.

Решение

1. Функция правдоподобия:

$$L(heta;x) = \left(rac{1}{\sqrt{2\pi heta_2}}
ight)^n \prod_{i=1}^n e^{-rac{(x_i- heta_1)^2}{2 heta_2}}$$

2. Максимизируем логарифм функции правдоподобия:

$$\max_{ heta} - rac{n}{2} ext{ln}(2\pi) - rac{n}{2} ext{ln}(heta_2) - rac{\sum\limits_{i=1}^n (x_i - heta_1)^2}{2 heta_2}$$

Условия первого порядка для этой системы принимают вид:

$$egin{cases} rac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i- heta_1)}{ heta_2} = 0 \ rac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i- heta_1)^2}{2 heta_2^2} - rac{n}{2 heta_2} = 0 \end{cases} => egin{cases} rac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i- heta_1) = 0}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i- heta_1)^2} \ rac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i- heta_1)^2}{ heta_2} = n \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $\hat{ heta_1}^{ML} = rac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} X_i}{n} = \overline{X}$. Подставляя этот результат во второе уравнение

имеем
$$\hat{ heta_2}^{ML}=rac{\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}{n}$$
. Реализации данных оценок будут $\left(\hat{ heta_1}^{ML}|X=x
ight)=\overline{x}$ и $\left(\hat{ heta_2}^{ML}|X=x
ight)=rac{\sum\limits_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2}{n}.$

- 3. То, что оценка $\hat{\theta_1}^{ML}$ является несмещенной и состоятельной показать очень просто. По аналогии очевидно, что $\hat{\theta_2}^{ML}$ является смещенной, но состоятельной оценкой.
- 4. Найдем информацию Фишера вторым способом, поочередно находя каждый элемент матрицы вторых производных (Гессиана):

$$\begin{split} I_X \bigg(\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \bigg)_{11} &= -E \left(-\frac{n}{\theta_2} \right) = \frac{n}{\theta_2} \\ I_X \bigg(\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \bigg)_{22} &= -E \left(-\frac{\sum\limits_{i=1}^n (X_i - \theta_1)^2}{\theta_2^3} + \frac{n}{2\theta_2^2} \right) = E \left(\frac{n\theta_2}{\theta_2^3} - \frac{n}{2\theta_2^2} \right) = \frac{n}{2\theta_2^2} \\ I_X \bigg(\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \bigg)_{12} &= I_X \bigg(\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \bigg)_{21} = -E \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n (X_i - \theta_1)}{\theta_2^2} \right) = 0 \end{split}$$

5. Найдем обратную матрицу Фишера:

$$I_Xigg(egin{bmatrix} heta_1 \ heta_2 \end{bmatrix}igg)^{-1} = egin{bmatrix} rac{ heta_2}{n} & 0 \ 0 & rac{2 heta_2^2}{n} \end{bmatrix}$$

Следовательно, асимптотическое распределение принимает вид:

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1^{ML} \\ \hat{\theta}_2^{ML} \end{bmatrix} \overset{d}{\to} \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\theta_2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\theta_2^2}{n} \end{bmatrix} \right)$$

В результате асимптотический доверительный интервал уровня (1-lpha) принимает вид:

$$egin{aligned} \left(\hat{ heta}_1^{ML} - z_{rac{lpha}{2}}\sqrt{rac{ heta_2}{n}}, \hat{ heta}_1^{ML} + z_{1-rac{lpha}{2}}\sqrt{rac{ heta_2}{n}}
ight), \;$$
для $heta_1 \ \\ \left(\hat{ heta}_2^{ML} - z_{rac{lpha}{2}}\sqrt{rac{2 heta_2^2}{n}}, \hat{ heta}_2^{ML} + z_{1-rac{lpha}{2}}\sqrt{rac{2 heta_2^2}{n}}
ight), \;$ для $heta_2 \ \end{aligned}$

Реализации оценок этих доверительных интервалов имеют следующий вид:

$$egin{aligned} \left(\hat{ heta}_1^{ML} - z_{rac{lpha}{2}} \sqrt{rac{\sum\limits_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{n}}, \hat{ heta}_1^{ML} + z_{1-rac{lpha}{2}} \sqrt{rac{\sum\limits_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{n}}
ight), \; ext{для} \; heta_1 \end{aligned} , \hat{ heta}_2^{ML} - z_{rac{lpha}{2}} \sqrt{rac{2\left(\sum\limits_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{n}
ight)^2}}, \hat{ heta}_2^{ML} + z_{1-rac{lpha}{2}} \sqrt{rac{2\left(\sum\limits_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{n}
ight)^2}}
ight), \; ext{для} \; heta_2 \end{aligned} , \; ext{для} \; heta_2$$

6. Введем функцию $g(\theta_1,\theta_2) = \sqrt{\theta_2} e^{\theta_1}$. Воспользуемся дельта методом. Сперва найдем градиент:

$$g =
abla g(heta_1, heta_2) = egin{bmatrix} rac{\partial g(heta_1, heta_2)}{\partial heta_1} \ rac{\partial g(heta_1 heta_2)}{\partial heta_2}, \end{bmatrix} = egin{bmatrix} \sqrt{ heta_2} e^{ heta_1} \ rac{1}{2\sqrt{ heta_2}} e^{ heta_1} \end{bmatrix}$$

Теперь отыщем асимтотическую дисперсию рассматриваемой функции:

$$As.\,Var(\hat{g}(heta_1, heta_2)^{ML}) = \left[egin{array}{ccc} \sqrt{ heta_2}e^{ heta_1} & rac{1}{2\sqrt{ heta_2}}e^{ heta_1}
ight] \left[egin{array}{ccc} rac{ heta_2}{n} & 0 \ 0 & rac{2 heta_2^2}{n} \end{array}
ight] \left[egin{array}{ccc} \sqrt{ heta_2}e^{ heta_1} \ rac{1}{2\sqrt{ heta_2}}e^{ heta_1} \end{array}
ight] = rac{3 heta_2^2e^{2 heta_1}}{2n}$$

Подставляя вместо истинных значений параметров оценки можно получить оценку асимптотической дисперсии:

$$\widehat{As.Var}(\hat{g}(heta_1, heta_2)^{ML}) = rac{3{\left(\hat{ heta}_2^{ML}
ight)}^2}{2n}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.

© 2018 - 2022 Sobopedia