Служба поддержки маленького банка

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические дискретные распределения (/Topics/Details?id=39)
Раздел
Распределение Пуассона (/SubTopics/Details?id=136)
Дата публикации
01.10.2019
Дата последней правки
24.10.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★

Условие

В службу поддержки маленького банка каждый час поступает, в среднем, 5 звонков (математическое ожидание числа звонков равняется 5). Количество звонков за час имеет распределение Пуассона и никак не зависит от количества звонков в любой другой час.

1. Определите, с какой вероятностью за час поступит ровно 7 звонков?

2. Вычислите вероятность, с которой за час поступит более 2-х звонков?

3. Посчитайте вероятность того, что за 3 часа поступит от 16-и до 18-и звонков включительно?

4. Рассчитайте, с какой вероятность за 3 часа поступит от 16-и до 18-и звонков включительно, при условии, что за это время поступило более 2-х звонков?

5. Каждый из звонков с вероятностью 0.8 позволяет решить проблему позвонившего клиента (независимо от числа звонков или числа решенных ранее проблем клиентов). Определите, с какой вероятностью за час удастся решить проблемы ровно 5 клиентов, если известно, что поступило от 7 до 9 звонков (включительно).

Решение

1. Через X_1 обозначим случайную величину, отражающую число звонков, поступивших в первый час. Поскольку $X_1 \sim Pois(5)$, то:

$$P(X_1 = 7) = \frac{5^7}{7!}e^{-5} \approx 0.1$$

2. Вычислим искомую вероятность:

$$P(X_1 > 2) = 1 - P(X_1 \leq 2) = 1 - \frac{5^0}{0!}e^{-5} - \frac{5^1}{1!}e^{-5} - \frac{5^2}{2!}e^{-5} \approx 0.875$$

3. Введем дополнительные случайные величины X_2 и X_3, отражающие число звонков за второй и третий час соответственно. В силу независимости и одинаковой распределенности случайных величин X_1, X_2 и X_3 можно применить свойство воспроизводимости, вследствие которого:

$$(X_1 + X_2 + X_3) \sim Pois(5+5+5) = Pois(15)$$

Для краткости обозначим $Z = X_1 + X_2 + X_3$ и рассчитаем искомую вероятность:

$$\begin{gathered}P(Z \in [16, 18]) = P(Z = 16) + P(Z = 17) + P(Z = 18) = \\ = \frac{15^{16}}{16!}e^{-15} + \frac{15^{17}}{17!}e^{-15} + \frac{15^{18}}{18!}e^{-15} \approx 0.25\end{gathered}$$

4. Воспользуемся формулой условной вероятности:

$$P(Z\in[16,18]|Z>2)=\frac{P((Z\in[16,18])\cap(Z>2))}{P(Z>2)}=$$
$$=\frac{P(Z=16)+P(Z=17)+P(Z=18)}{1-P(Z=0)-P(Z=1)-P(Z=2)}=$$
$$=\frac{\frac{15^{16}}{16!}e^{-15}+\frac{15^{17}}{17!}e^{-15}+\frac{15^{18}}{18!}e^{-15}}{1-\frac{15^{0}}{0!}e^{-15}-\frac{15^{1}}{1!}e^{-15}-\frac{15^{2}}{2!}e^{-15}}\approx 0.251392$$

5. Обозначим через Y случайную величину - количество клиентов, которым удалось помочь за час. Заметим, что если в банк позвонило $n\geq 5$ клиентов, то условное распределение $(Y|X_1=n)\sim B(n,0.8)$ будет биномиальным. Рассчитаем (https://www.wolframalpha.com/input/?i=sum+%28%28t+choose+5%290.8%5E%285%29*0.2%5E%28t-5%29%29%5Cfrac%7B5%5E%28t%29%7D%7Bt%21%7De%5E%7B-5%7D%2C+t+from+5+to+infinity) соответствующую вероятность при помощи формулы полной вероятности:

$$P(Y=5|7\leq X_1\leq 9)=P(Y=5\cap X_1=7|7\leq X_1\leq 9)+P(Y=5\cap X_1=8|7\leq X_1\leq 9)+P(Y=5\cap X_1=9|7\leq X_1\leq 9)=$$

$$P(Y=5|X_1=7\cap 7\leq X_1\leq 9)P(X_1=7|7\leq X_1\leq 9)+P(Y=5|X_1=8\cap 7\leq X_1\leq 9)P(X_1=8|7\leq X_1\leq 9)+P(Y=5|X_1=8\cap 7\leq X_1\leq 9)P(X_1=9|$$

$$=P(Y=5|7\leq X_1\leq 9)=P(Y=5|X_1=7)P(X_1=7|7\leq X_1\leq 9)+P(Y=5|X_1=8)P(X_1=8|7\leq X_1\leq 9)+P(Y=5|X_1=8)P(X_1=9|7\leq X_1\leq 9)$$

Последовательно рассчитаем вероятность условия и условные вероятности:

$$P(7\leq X_1\leq 9)=\left(\frac{5^7}{7!}+\frac{5^8}{8!}+\frac{5^9}{9!}\right)e^{-5}\approx 0.206$$

$$P(X=7|7\leq X_1\leq 9)=\frac{\frac{5^7}{7!}}{\frac{5^7}{7!}+\frac{5^8}{8!}+\frac{5^9}{9!}}=\frac{72}{142}\approx 0.507$$

$$P(X=8|7\leq X_1\leq 9)=\frac{\frac{5^8}{8!}}{\frac{5^7}{7!}+\frac{5^8}{8!}+\frac{5^9}{9!}}=\frac{45}{142}\approx 0.317$$

$$P(X=9|7\leq X_1\leq 9)=\frac{\frac{5^9}{9!}}{\frac{5^7}{7!}+\frac{5^8}{8!}+\frac{5^9}{9!}}=\frac{25}{142}\approx 0.176$$

Пользуясь полученным результатом досчитаем искомую вероятность:

$$P(Y=5|7\leq X_1\leq 9)=\left(C_5^7 0.8^5(1-0.8)^2\right)\times\frac{72}{142}+\left(C_5^8 0.8^5(1-0.8)^3\right)\times\frac{45}{142}+\left(C_5^9 0.8^5(1-0.8)^4\right)\times\frac{25}{142}\approx 0.19771565$$

Проверка в R

```
n <- 100000
lambda <- 5
p <- 0.8
calls1 <- rpois(n, lambda)
calls2 <- rpois(n, lambda)
calls3 <- rpois(n, lambda)
calls <- calls1 + calls2 + calls3
problems <- rbinom(n, calls1, p)
# пункт 1
mean(calls1 == 7)
# пункт 2
mean(calls1 > 2)
# пункт 3
mean((calls >= 16) & (calls <= 18))
# пункт 4
mean(((calls >= 16) & (calls <= 18))[calls >= 2])
# пункт 5
mean((problems == 5)[(calls1 >= 7) & (calls1 <= 9)])
```

Показать решение