Орки и тролли

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Совместное распределение (/Topics/Details?id=10)
Раздел
Совместное распределение дискретных случайных величин (/SubTopics/Details?id=57)
Дата публикации
25.09.2021
Дата последней правки
29.09.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★⯪

Условие

Ваша армия состоит из 5 орков и 10 троллей. Вы кидаете обычный шестигранный кубик. Если выпадает четное число, то вы случайным образом выбираете двух воинов, а в противном случае - одного.

1. Найдите совместное распределение числа выбранных орков и троллей.

2. Посчитайте вероятность, с которой вы выберете троллей больше, чем орков.

3. Найдите маржинальное распределение числа выбранных орков и числа выбранных троллей.

4. Найдите ковариацию между числом выбранных троллей и орков.

5. Проверьте, является ли число выбранных орков и троллей - независимыми случайными величинами.

6. Запишите совместное распределение числа выбранных орков и троллей при условии, что троллей вы выбрали больше, чем орков.

7. Найдите ковариацию между числом выбранных троллей и орков, при условии, что вы выбрали троллей больше, чем орков.

8. Найдите корреляцию между числом выбранных троллей и орков.

Решение

Через O и T обозначим случайные величины, отражающие число выбранных орков и троллей соответственно. Через A обозначим событие, при котором на кубике выпадает четное число.

Найдем совместную функцию вероятностей числа выбранных орков и троллей:

$$P(O=0\cap T=1)=P(O=0\cap T=1|A)P(A)+P(O=0\cap T=1|\overline{A})P(\overline{A})=\frac{C_5^0C_{10}^1}{C_{15}^1}\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$P(O=1\cap T=0)=P(O=1\cap T=0|A)P(A)+P(O=1\cap T=0|\overline{A})P(\overline{A})=\frac{C_5^1C_{10}^0}{C_{15}^1}\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$P(O=0\cap T=2)=P(O=0\cap T=2|A)P(A)+P(O=0\cap T=2|\overline{A})P(\overline{A})=0\times\frac{1}{2}+\frac{C_5^0C_{10}^2}{C_{15}^2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$$

$$P(O=1\cap T=1)=P(O=1\cap T=1|A)P(A)+P(O=1\cap T=1|\overline{A})P(\overline{A})=0\times\frac{1}{2}+\frac{C_5^1C_{10}^1}{C_{15}^2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{21}$$

$$P(O=2\cap T=0)=P(O=2\cap T=0|A)P(A)+P(O=2\cap T=0|\overline{A})P(\overline{A})=0\times\frac{1}{2}+\frac{C_5^2C_{10}^0}{C_{15}^2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{21}$$

Зададим таблицу совместного распределения:

$$\begin{bmatrix} O\backslash T & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{14} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{21} & 0 \\ 2 & \frac{1}{21} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Искомую вероятность удобно посчитать, используя найденную выше таблицу совместного распределения:

$$P(T>O)=P(O=0\cap T=1)+P(O=0\cap T=2)=\frac{1}{3}+\frac{3}{14}=\frac{23}{42}$$

3. Найдем функцию вероятности для числа выбранных орков:

$$P(O=0)=P(O=0\cap T=0)+P(O=0\cap T=1)+P(O=0\cap T=2)=0+\frac{1}{3}+\frac{3}{14}=\frac{23}{42}$$

$$P(O=1)=P(O=1\cap T=0)+P(O=1\cap T=1)+P(O=1\cap T=2)=\frac{1}{6}+0+\frac{5}{21}=\frac{17}{42}$$

$$P(O=2)=P(O=2\cap T=0)+P(O=2\cap T=1)+P(O=2\cap T=2)=\frac{1}{21}+0+0=\frac{2}{42}$$

Для удобства запишем маржинальное распределение числа выбранных орков в форме таблицы:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ P(O=x) & \frac{23}{42} & \frac{17}{42} & \frac{2}{42} \end{bmatrix}$$

Аналогичная таблица для троллей будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ P(T=x) & \frac{3}{14} & \frac{8}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

4. Сперва рассчитаем математическое ожидание произведения числа выбранных орков и троллей. При этом для краткости записи опустим все случаи, когда осуществляется умножение на ноль.

$$E(OT) = \frac{5}{21} \times (1 \times 1) = \frac{5}{21}$$

Теперь вычислим математические ожидания маржинальных распределений:

$$E(O) = \frac{17}{42} \times 1 + \frac{2}{42} \times 2 = \frac{1}{2}$$

$$E(T) = \frac{8}{14} \times 1 + \frac{3}{14} \times 2 = 1$$

Пользуясь полученными результатами посчитаем ковариацию:

$$Cov(O,T) = E(OT) - E(O)E(T) = \frac{5}{21} - \frac{1}{2} \times 1 = -\frac{11}{42}$$

5. Поскольку в предыдущем пункте ковариация оказалась отлична от нуля, то случайные величины O и T не являются независимыми.

6. Зададим условную совместную функцию вероятностей:

$$P(O=0 \cap T=1|T>O) = \frac{P(O=0 \cap T=1)}{P(T>O)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{23}{42}} = \frac{14}{23}$$

$$P(O=0 \cap T=2|T>O) = \frac{P(O=0 \cap T=2)}{P(T>O)} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{23}{42}} = \frac{9}{23}$$

Таблица соответствующего условного распределения будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} O\backslash T|T>O & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{14}{23} & \frac{9}{23} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Для удобства из соответствующей таблицы можно убрать строки и столбцы, состоящие из нулей:

$$\begin{bmatrix} O\backslash T|T>O & 1 & 2 \\ 0 & \frac{14}{23} & \frac{9}{23} \end{bmatrix}$$

7. Поскольку при соответствующем условии число орков гарантированно будет нулевым, то речь идет о ковариации с константой, которая, по свойствам ковариации, будет равна нулю, то есть:

$$Cov(O,T|T>O) = Cov(0,T|T>O) = 0$$

8. Сперва найдем дисперсии маржинальных распределений:

$$E(O^2) = \frac{17}{42} \times 1^2 + \frac{2}{42} \times 2^2 = \frac{25}{42}$$

$$Var(O) = E(O^2) - E(O)^2 = \frac{25}{42} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{84}$$

$$E(T^2) = \frac{8}{14} \times 1^2 + \frac{3}{14} \times 2^2 = \frac{10}{7}$$

$$Var(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \frac{10}{7} - 1^2 = \frac{3}{7}$$

Теперь рассчитаем корреляцию:

$$Corr(O,T) = \frac{Cov(O,T)}{\sqrt{Var(O)Var(T)}} = \frac{-\frac{11}{42}}{\sqrt{\frac{29}{84} \times \frac{3}{7}}} \approx -0.68$$

Проверка в R

```
# Число симуляций
n <- 100000
# Отряд
x <- c(rep("orc", 5), rep("troll", 10))
# Число выбираемых войнов
n.select <- rbinom(n, 1, 0.5) + 1
# Количество орков и троллей
orcs <- rep(NA, n)
trolls <- rep(NA, n)
# Симулируем выбор войнов
for (i in 1:n)
{
 select <- sample(x, n.select[i])
 orcs[i] <- sum(select == "orc")
 trolls[i] <- n.select[i] - orcs[i]
}
# пункт 1
table(orcs, trolls) / n
# пункт 2
mean(trolls > orcs)
# пункт 3
table(orcs) / n
table(trolls) / n
# пункт 4
cov(orcs, trolls)
# пункт 6
cond <- trolls > orcs
table(orcs[cond], trolls[cond]) / sum(cond)
# пункт 8
cor(orcs, trolls)
```

Показать решение