Паранормальные явления

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические непрерывные распределения (/Topics/Details?id=11)
Раздел
Нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=68)
Дата публикации
06.12.2018
Дата последней правки
14.11.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

В некотором городе раз в год появляются приведения, чтобы питаться страхом местных жителей. Количество поглощенного приведениями страха, выраженное в страхограммах, является случайной величиной X, подчиняющейся нормальному распределению. Известно, что $E(X) = 100$ и $Var(Y) = 25$.

1. Найдите вероятность того, что приведения поглотят более 110 страхограмм страха. Сравните полученный результат с границей, полученной при помощи неравенства Маркова.

2. Найдите вероятность того, что количество поглощенного приведениями страха отклонится от математического ожидания менее, чем на 5%. Сравните полученный результат с границей, полученной при помощи неравенства Чебышева.

3. Найдите вероятность того, что за три года приведения поглотят менее 310 страхограмм страха учитывая, что количество поглощенного страха в один год никак не влияет на количество поглощенного страха в другие года.

4. Повторите предыдущий пункт учитывая, что на второй год ожидаются более страшные приведения, в связи с чем распределение поглощенного страха во второй год будет $X_2 \sim N(200, 50)$.

5. Повторите предыдущий пункт учитывая, что корреляция между количеством поглощенных страхограмм в текущем и следующем году составляет 0.1, но никак не связана с количество поглощенных страхограмм через два года.

6. Найдите математическое ожидание поглощенного приведениями страха при условии, что им удалось поглотить более 105 страхограмм.

Решение

1. Исходя из информации о математическом ожидании и дисперсии получаем, что $X \sim N(100, 25)$. Через $X^{st} \sim N(0, 1)$ обозначим стандартную нормальную величину.

Используя стандартизацию имеем:

$$P(X \geq 110) = 1 - P(X \leq 110) = 1 - F_X(110) = 1 - F_{X^{st}}(\frac{110 - 100}{\sqrt{25}}) = 1 - F_{X^{st}}(2)$$

Найдем в таблице стандартного нормального распределения (http://www.stat.purdue.edu/~jtroisi/STAT350Spring2015/tables/ZTable.pdf) значение 2, получая:

$$P(X \geq 110) = 1 - F_{X^{st}}(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

При помощи неравенства Маркова мы бы получили:

$$P(X \geq 110) \leq \frac{100}{110} = \frac{10}{11}$$

2. Данная вероятность может быть записана следующим образом:

$$P(0.95E(X) \leq X \leq 1.05E(X)) = P(95 \leq X \leq 105) = F_X(105) - F_X(95) =$$
$$= F_{X^{st}}(\frac{105 - 100}{\sqrt{25}}) - F_{X^{st}}(\frac{95 - 100}{\sqrt{25}}) = F_{X^{st}}(1) - F_{X^{st}}(-1) = 8413 - 1587 = 0.6826$$

При помощи неравенства Чебышева мы бы получили:

$$P(0.95E(X) \leq X \leq 1.05E(X)) = P(|X - E(X)| \leq 0.05E(X)) \geq 1 - \frac{25}{(0.05 * 100)^2} = 0$$

3. Обозначим через X_1, X_2 и X_3 количество страха, поглощенного приведениями за первый, второй и третий года соответственно. Пользуясь независимостью, получаем $E(X_1 + X_2 + X_3) = 300$ и $Var(X_1 + X_2 + X_3) = 75$, откуда $X_1 + X_2 + X_3 \sim N(300, 75)$. Используя информацию о распределении получаем:

$$P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 310) = P(\frac{X_1 + X_2 + X_3 - 300}{\sqrt{75}} \leq \frac{310 - 300}{\sqrt{75}}) = F_{X^{st}}(1.155) = 0.876$$

4. Пользуясь независимостью, получаем $E(X_1 + X_2 + X_3) = 400$ и $Var(X_1 + X_2 + X_3) = 100$, откуда $X_1 + X_2 + X_3 \sim N(400, 100)$.

Используя информацию о распределении получаем:

$$P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 310) = P(\frac{X_1 + X_2 + X_3 - 400}{\sqrt{100}} \leq \frac{310 - 400}{\sqrt{100}}) = F_{X^{st}}(-9) \approx 0$$

5. По сравнению с предыдущим пунктом меняется лишь дисперсия суммы:

$$Var(X_1+X_2+X_3) = 100 + 2Cov(X_1, X_2) + 2Cov(X_1, X_3) + 2Cov(X_2, X_3) =$$
$$= 100 + 2*\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}Corr(X_1, X_2) + 0 + 2*\sqrt{Var(X_2)Var(X_3)}Corr(X_2, X_3) =$$
$$= 100 + 2*\sqrt{25*50}*0.1 + 2*\sqrt{25*50}*0.1 \approx 114$$

В итоге получаем:

$$P(X_1+X_2+X_3 \leq 310) = P(\frac{X_1+X_2+X_3-400}{\sqrt{114}} \leq \frac{310-400}{\sqrt{114}}) = F_{X^{st}}(-8.43) \approx 0$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.

© 2018 – 2022 Sobopedia