Бесконечное бросание кубика

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Случайные события (/Topics/Details?id=5)
Раздел
Классическое определение вероятностей и обратные события (/SubTopics/Details?id=30)
Дата публикации
08.09.2018
Дата последней правки
21.09.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
⯪

Условие

Вы кидаете шестигранный кубик n раз.

1. Чему равна вероятность того, что за n бросков выпадет хотя бы одно четное число?
2. К чему стремиться вероятность того, что за n бросков не выпадет ни одного четного числа при $n \to \infty$
3. Чему равна вероятность того, что за $18 > n \geq 6$ бросков возникнет только одна последовательность $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Справедлив ли полученный результат для любой последовательности произвольной длины?
4. К чему стремиться вероятность того, что за $n \to \infty$ бросков возникнет по крайней мере одна последовательность $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Решение

1. Пользуясь техников рассмотрения противоположного события получаем:

$$P(\text{за n бросков выпадет хоть одно четное число}) =$$
$$= 1 - P(\text{за n бросков не выпадет ни одного четного числа}) = 1 - \frac{3^n}{6^n}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{6^n}=0$

3. Если $6\leq n\leq 11$, то вероятность встретить искомую последовательность, очевидно, составит $\frac{6^{(n-6)}(n-6+1)}{6^n}$, так как рассматриваемая последовательность может начаться с одного из $(n-6+1)$ первых бросков, а в результате других $(n-6)$ бросков могли выпасть любые иные числа.

Если $n=12$, то вероятность будет $\frac{6^{(n-6)}(n-6+1)-1}{6^n}$, так как последовательность может появиться два раза, начавшись с 1-го, а затем и с 7-го броска, в связи с чем нужно вычесть лишний способ. По аналогии, для $12\leq n<18$ имеем $\frac{(n-6)^6(n-6+1)-2\sum_{i=6}^{n-6}(n-i-6+1)}{6^n}$, так как если первая последовательность началась с одного из $(n-6+1)$ первых бросков, то вторая последовательность может начаться с одного из $(n-i-6+1)\leq n-6$ оставшихся бросков, где i - номер броска, на котором закончилась первая последовательность. Аналогичное число способов с двумя последовательностями учитывается, когда мы рассматриваем предшествовавшие броски, с чем связано умножение на 2.

4. Будем представлять, что каждые 6 бросков у нас возникает последовательность чисел. После каждых 6 бросков мы записываем одну из 6^6 возможных последовательностей. То есть мы рассматриваем упорядоченную последовательность, которая возникла из $1-6$ бросков, затем из $7-12$ бросков и т.д. Также, без потери общности допустим, что n кратно 6. Тогда, через $\frac{n}{6}$ записанных последовательностей вероятность того, что среди них не будет последовательности $1,2,3,4,5,6$, составляет $(\frac{6^6-1}{6^6})^{\frac{n}{6}}$. Принимая во внимание, что $n\to\infty$, данная вероятность будет $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{6^6-1}{6^6})^{\frac{n}{6}}=0$. Наконец, вероятность того, что искомая последовательность встретиться хотя бы один раз составит $\lim\limits_{n\to\infty}1-(\frac{6^6-1}{6^6})^{\frac{n}{6}}=1$.

Теперь рассмотрим подробней полученное выражение без предела и перепишем его в следующем виде: $\frac{6^n-(6^6-1)^{\frac{n}{6}}}{6^n}$. В знаменателе у нас стоит количество способов, которыми мы можем получить различные последовательности из 6 цифр длины n. А в числителе стоит количество способов, в которых расположены последовательности $1,2,3,4,5,6$, заканчивающиеся на бросках, номер которых кратен 6. Очевидно, что последовательности могут заканчиваться и на бросках не кратных 6 и тогда количество способов, а вместе с ними и числитель, возрастают. Что тем более гарантирует то, что вероятность будет стремиться к 1.

Данная логика применима к любой последовательности.

Показать решение