Нормальные квантили

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические непрерывные распределения (/Topics/Details?id=11)
Раздел
Нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=68)
Дата публикации
17.11.2019
Дата последней правки
26.11.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг

Условие

Случайные величины X и Y имеют совместное нормальное распределение. Найдите математическое ожидание суммы X и Y если известно, что

1. $P(X \leq 6 - Y) = \frac{1}{2}$

2. $P(X \leq 6 - Y) = \frac{1}{3}$ и $Var(X + Y) = 4$

Подсказка: вспомните про квантиль.

Решение

1. Перепишем вероятность в следующем виде, полагая $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$P(X \leq 6 - Y) = P(X + Y \leq 6) = F_{X+Y}(6) = F_Z\left(\frac{6 - (E(X) + E(Y))}{\sqrt{Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)}}\right) = \frac{1}{2}$$

Используя квантиль стандартного нормального распределения получаем, что:

$$\frac{6 - (E(X) + E(Y))}{\sqrt{Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)}} = F_X^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Исходя из полученного результата очевидно, что $E(X+Y)=6$

2. Рассмотрим сложный, но поучительный способ решения. Идея заключается в том, чтобы привести распределение не к стандартному нормальному, а к некоторому другому нормальному, у которого квантиль уровня $\frac{1}{3}$ равняется 0.

Рассмотрим случайную величину $V \sim \mathcal{N}(\alpha, 1)$ такую, что $F_V^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=0$, откуда следует, что:

$$F_V\left(F_V^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)=F_Z\left(F_V^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-\alpha\right)=F_Z(-\alpha)=\frac{1}{3}=>$$
$$=>-\alpha=-0.4307233=>\alpha=0.4307233$$

Таким образом мы получили, что $V \sim \mathcal{N}(0.4307233, 1)$. Теперь стандартизируем нашу случайную величину к данной:

$$P(X \leq 6-Y)=P\left(\frac{X+Y}{\sqrt{4}} \leq \frac{6}{\sqrt{4}}\right)=$$
$$=P\left(\frac{X+Y-(E(X)+E(Y))}{\sqrt{4}}+0.4307233 \leq \frac{6-(E(X)+E(Y))}{\sqrt{4}}+0.4307233\right)=$$
$$=F_V\left(\frac{6-(E(X)+E(Y))}{\sqrt{4}}+0.4307233\right)=\frac{1}{3}$$

Отсюда получаем, что:

$$\frac{6-(E(X)+E(Y))}{\sqrt{4}}+0.4307233=0$$

Нетрудно догадаться, что отсюда следует $E(X+Y)=6.86145$.

Показать решение