Байесовское оценивание параметров наблюдений из нормальной выборки

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Байесовская статистика (/Topics/Details?id=37)
Раздел
Введение в Байесовскую статистику (/SubTopics/Details?id=131)
Дата публикации
13.06.2019
Дата последней правки
05.06.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★★★★

Условие

Пусть $X = (X_1 \dots X_n)$ - выборка из нормального распределения $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, причем параметр θ является случайной величиной с неизвестным распределением, а параметр σ^2 - известной константой. Предположим, что априорное распределение неизвестного параметра также является нормальным $\theta \sim \mathcal{N}\left(\alpha_1, \alpha_2^2\right)$, где α_1 и α_2 - заданные константы.

1. Предположим, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ и $\sigma^2 = 1$. Найдите апостериорное распределение параметра θ.

Решение

1. Для начала запишем выражение для функции правдоподобия:

$$L(\theta^*|x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - \theta^*)^2}{2\sigma^2}}$$

Теперь выпишем априорную функцию плотности параметра:

$$P\left(\theta = \theta^*\right) = f_\theta(\theta^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha_2} e^{-\frac{(\theta^* - \alpha_1)^2}{2\alpha_2^2}}$$

Наконец, посчитаем апостериорную вероятность:

$$P\left(\theta=\theta^*|X=x\right)=f_{\theta|X=x}(\theta^*)\propto L(\theta^*|x)P\left(\theta=\theta^*\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha_2}e^{-\frac{\left(\theta^*-\alpha_1\right)^2}{2\alpha_2^2}}*\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(x_i-\theta^*\right)^2}{2\sigma^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\theta^*\right)^2}{2}}*\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x_i-\theta^*\right)^2}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}+1}}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta^*\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+(n-1)(\theta^*)^2}{2}}\propto e^{-\frac{(n-1)(\theta^*)^2-2\theta^*\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{2}}\propto e^{-\frac{\left(\theta^*-\frac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2}{2\frac{1}{n+1}}}$$

Поскольку функция плотности параметра пропорциональна полученному значению, то нетрудно догадаться, что апостериорное распределение θ будет нормальным, а именно $(\theta|X=x)\sim\mathcal{N}\left(\frac{n\bar{x}}{n+1},\frac{1}{n+1}\right)$.

Показать решение