Председатель колхоза 2. Условная вероятность.

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические многомерные распределения (/Topics/Details?id=19)
Раздел
Многомерное нормальное распределение (/SubTopics/Details?id=87)
Дата публикации
16.01.2019
Дата последней правки
18.01.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★★★★

Условие

Объем урожая кукурузы (в тоннах), собранного на четырех полях в колхозе имени Бернулли, хорошо описывается многомерным нормальным распределением:

$$X \sim N\left(\begin{bmatrix}1\\5\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.64 & 0.12 & -0.18 & 0.224\\ 0.12 & 0.25 & 0.09 & -0.05\\ -0.18 & 0.09 & 0.81 & 0.1215\\ 0.224 & -0.05 & 0.1215 & 1\end{bmatrix}\right)$$

Где компоненты вектора X, а именно, X_1, X_2, X_3, X_4, соответствуют объему урожая, собранного на первом, втором, третьем и четвертом полях соответственно.

1. Найдите вероятность того, что сумма урожаев на первом и втором полях превысит 7 тонн, если на третьем поле собрали 2 тонны кукурузы, а на четвертом - 3 тонны.

2. Найдите вероятность того, что сумма урожаев на первом и втором полях превысит 7 тонн, если на третьем и четвертом полях в сумме собрали 5 тонн.

3. Определителе, сколько в сумме должно быть собрано тонн кукурузы с третьего и четвертого полей, чтобы вероятность того, что сумма урожаев на первом и втором полях превысит 7 тонн, была не меньше 0.25.

4. Определите, с какой вероятностью с третьего и четвертого полей будет собрано столько кукурузы, что условная вероятность (при условии суммарного урожая на третьем и четвертом полях) получить с первого и второго урожаев больше 7 тонн кукурузы превысит 0.25.

Решение

1. Найдем условное распределение урожая первого и второго полей. Положим $X^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ и $X^{(2)} = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$. Тогда математические ожидания этих случайных векторов будут:

$$\mu^{(1)} = E\left(X^{(1)}\right) = E\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mu^{(2)} = E\left(X^{(2)}\right) = E\left(\begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ковариационные матрицы имеют вид:

$$\Sigma^{(11)} = Var(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.64 & 0.12 \\ 0.12 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{(22)} = Var(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.1215 \\ 0.1215 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{(12)} = Cov(X^{(1)}, X^{(2)}) = \begin{bmatrix} -0.18 & 0.224 \\ 0.09 & -0.05 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{(21)} = Cov(X^{(2)}, X^{(1)}) = \begin{bmatrix} -0.18 & 0.09 \\ 0.224 & -0.05 \end{bmatrix}$$

Учитывая, что вектор условий имеет вид $\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, получаем условное распределение:

$$\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \sim N\left(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}\right)$$

$$\tilde{\mu} = \mu^{(1)} + \Sigma^{(12)}\left(\Sigma^{(22)}\right)^{-1}(\alpha - \mu^{(2)}) =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.18 & 0.224 \\ 0.09 & -0.05 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0.81 & 0.1215 \\ 0.1215 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \approx$$
$$\approx \begin{bmatrix} 1.192124 \\ 4.962822 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma^{(11)} - \Sigma^{(12)}\left(\Sigma^{(22)}\right)^{-1}\Sigma^{(21)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.64 & 0.12 \\ 0.12 & 0.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.18 & 0.224 \\ 0.09 & -0.05 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0.81 & 0.1215 \\ 0.1215 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} -0.18 & 0.09 \\ 0.224 & -0.05 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 0.5358295 & 0.1562344 \\ 0.1562344 & 0.2358929 \end{bmatrix}$$

Исходя из полученного результата следует, что:

$$\left(X_1 + X_2 | \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \sim N\left(E\left(X_1 + X_2 | \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right), Var\left(X_1 + X_2 | \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)\right) =>$$

$$=> \left(X_1 + X_2 | \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \sim N\left(\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2, \tilde{\Sigma}_{11} + \tilde{\Sigma}_{22} + 2\tilde{\Sigma}_{12}\right) =>$$

$$=> \left(X_1 + X_2 | \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \sim N\left(1.192124 + 4.962822, 0.5358295 + 0.2358929 + 2 * 0.1562344\right) =>$$

$$=> \left(X_1 + X_2 | \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \sim N\left(6.154946, 1.08419\right)$$

Обозначим стандартную нормальную величину через $Z \sim N(0,1)$. Откуда получаем, что:

$$P\left(\left(X_1 + X_2 | \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) > 7\right) = 1 - F_Z(\frac{7 - 6.154946}{\sqrt{1.08419}}) \approx 1 - F_Z(0.81158) \approx 0.2085163$$

2. Найдем распределение вектора $\begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ X_3 + X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$.

Посчитаем математическое ожидание и ковариационную матрицу рассматриваемого случайного вектора:

$$E\left(\begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ X_3 + X_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Var\left(\begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ X_3 + X_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.64 & 0.12 & -0.18 & 0.224 \\ 0.12 & 0.25 & 0.09 & -0.05 \\ -0.18 & 0.09 & 0.81 & 0.1215 \\ 0.224 & -0.05 & 0.1215 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.13 & 0.084 \\ 0.084 & 2.053 \end{bmatrix}$$

Откуда получаем, что:

$$\begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ X_3 + X_4 \end{bmatrix} = N\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.13 & 0.084 \\ 0.084 & 2.053 \end{bmatrix}\right)$$

Для удобства сумму урожаев первого и второго полей обозначим $Y_1 = X_1 + X_2$, а сумму урожаев на третьем и четвертом через $Y_2 = X_3 + X_4$. Рассмотрим условное распределение $Y_1 | Y_2 = 5$. Его математическое ожидание и дисперсия будут:

$$E(Y_1 | Y_2 = 5) = 6 + 0.084 * \frac{1}{2.053} * (5 - 5) = 6$$

$$Var(Y_1|Y_2=5) = 1.13 - 0.084 * \frac{1}{2.053} * 0.084 \approx 0.78631$$

Таким образом, получаем условное распределение:

$$(Y_1|Y_2=5) \sim N(6, 0.78631)$$

Вычислим искомую вероятность:

$$P\left((Y_1|Y_2=5) > 7\right) = 1 - F_Z\left(\frac{7-6}{\sqrt{0.78631}}\right) = 1 - F_Z\left(1.12772\right) \approx 0.1297191$$

3. Обозначим через α объем собранного на третьем и четвертом полях урожая. В отличие от предыдущего пункта меняется только условное математического ожидание:

$$E(Y_1|Y_2=\alpha) = 6 + 0.84 * \frac{1}{2.053} * (\alpha - 5) = 0.409157\alpha + 3.95421$$

Следовательно, условное распределение принимает вид:

$$(Y_1|Y_2=5) \sim N(0.409157\alpha + 3.95421, 0.78631)$$

Рассматривая условие на вероятность и находя квантиль стандартного нормального распределения уровня 0.75 получаем ответ:

$$P\left((Y_1|Y_2=5) > 7\right) = 1 - F_Z\left(\frac{7 - 0.409157\alpha + 3.95421}{\sqrt{0.78631}}\right) > 0.25 =>$$
$$=> F_Z\left(\frac{7 - 0.409157\alpha + 3.95421}{\sqrt{1.4737}}\right) < 0.75 =>$$
$$=> \frac{7 - 0.409157\alpha + 3.95421}{\sqrt{0.78631}} < 0.6744898 =>$$
$$=> \alpha > 25.3109$$

4. Пользуясь информацией, полученной в предыдущем пункте, получаем, что:

$$P(Y_2 > 25.3109) \approx 0$$

Показать решение