

Недоверчивые гномы и эльфы

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Теория проверки статистических гипотез (/Topics/Details?id=35)

Раздел

Проверка гипотез по поводу выборки из биномиального распределения (/SubTopics/Details?id=126)

Дата публикации

05.02.2022

Дата последней правки

05.02.2022

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★

Условие

В сказочной стране опросили 100 гномов и 200 эльфов. Оказалось, что среди опрошенных гномов 85 верили в существование эльфов, а среди опрошенных эльфов - 190 верили в существование гномов.

1. На уровне значимости 25% протестируйте гипотезу о том, что каждый пятый гном не верит в существование эльфов, против двухсторонней альтернативы. Рассчитайте p-value.
2. На уровне значимости 1% протестируйте гипотезу о том, случайно выбранные гном и эльф с равной вероятностью будут верить в существование друг друга. В качестве альтернативы предположите, что гном будет верить в существование эльфа с меньшей вероятностью. Рассчитайте p-value.

Решение

1. Обозначим через $X = (X_1, \dots, X_{100})$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_{200})$ выборки из ответов гномов и эльфов по поводу веры в существование друг друга. Обратим внимание, что $X_1 \sim \text{Ber}(p_X)$ и $Y_1 \sim \text{Ber}(p_Y)$.

Сформулируем гипотезы: $H_0 : p_X = 0.8$ и $H_1 : p_X \neq 0.8$. Найдем реализацию тестовой статистики:

$$\bar{x}_{100} = 85/100 = 0.85$$

$$T(x) = \frac{0.85 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{100}}} = 1.25$$

Обратим внимание, что:

$$T(X)|H_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Отсюда получаем:

$$\text{p-value} = 2 \min(\Phi(1.25), 1 - \Phi(1.25)) \approx 2 \min(0.106, 0.894) = 0.212$$

Поскольку $0.212 < 0.25$, то нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости 25%.

2. Сформулируем гипотезы: $H_0 : p_X = p_Y$ и $H_1 : p_X < p_Y$. Найдем реализацию тестовой статистики:

$$\bar{y}_{100} = 190/200 = 0.95$$

$$z_{100,200} = \frac{80 + 190}{100 + 200} = 0.9$$

$$T(x) = \frac{0.85 - 0.95}{\sqrt{0.9(1 - 0.9)(1/100 + 1/200)}} = -2.72$$

Обратим внимание, что:

$$T(X)|H_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Отсюда получаем:

$$\text{p-value} = \Phi(-2.72) \approx 0.003$$

Поскольку $0.003 < 0.01$, то нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости 1%.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.