Семья Змея Горыныча

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические дискретные распределения (/Topics/Details?id=39)
Раздел
Биномиальное распределение и распределение Бернулли (/SubTopics/Details?id=135)
Дата публикации
22.08.2020
Дата последней правки
11.10.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

У Змея Горыныча пятеро детей. У каждого из них есть по крайней мере по одной голове. Число дополнительных голов у каждого ребенка является биномиально распределенной случайной величиной и не зависит от числа голов других детей. При этом математическое ожидание общего числа голов у каждого ребенка равняется 4, а дисперсия - 2.1.

1. Определите, с какой вероятностью у случайно взятого ребенка окажется более 2-х голов.

2. Вычислите, с какой вероятностью Змею Горынычу приходится кормить семью из 20 ртов (не считая собственных).

3. Посчитайте, с какой вероятностью у Змея Горыныча есть по крайней мере один трехголовый ребенок.

4. Найдите вероятность, с которой у Змея Горыныча не более трех трехголовых детей, если известно, что по крайней мере один ребенок имеет три головы.

5. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа трехголовых детей.

Решение

1. Обозначим через X_i случайную величину, отражающую число дополнительных голов у i-го ребенка, где $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Поскольку количества дополнительных голов одинаково распределены, то $X_i \sim B(n, p)$. Необходимо найти неизвестные параметры соответствующего распределения, а именно n и p. Обратим

внимание на то, что по условию:

$$E(X_i+1)=E(X_i)+1=np+1=4$$

$$Var(X_i+1)=Var(X_i)=np(1-p)=2.1$$

Решая соответствующую систему равенств получаем, что $n=10$ и $p=0.3$.

Поскольку число дополнительных голов у каждого ребенка имеет одно и то же распределение, то без потери общности можно предположить, что был выбран первый из детей. При этом обратим внимание, что случайная величина, отражающая общее число голов, может быть выражена как X_1+1, откуда:

$$P(X_1+1>2)=1-P(X_1+1\leq 2)=1-P(X_1\leq 1)=1-P(X_1=0)-P(X_1=1)=$$

$$=1-C_{10}^{0}0.3^{0}(1-0.3)^{10}-C_{10}^{1}0.3^{1}(1-0.3)^{9}\approx 0.85$$

2. По свойству воспроизводимости получаем, что:

$$(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)\sim B(10+10+10+10+10,0.3)=B(50,0.3)$$

Отсюда находим искомую вероятность:

$$P((X_1+1)+(X_2+1)+(X_3+1)+(X_4+1)+(X_5+1)=20)=$$

$$=P(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5=15)=$$

$$=C_{50}^{15}0.3^{15}(1-0.3)^{50-15}=0.12235$$

3. Пользуясь независимостью числа дополнительных голов рассчитаем вероятность обратного события, а именно, что у Змея Горыныча нет ни одного трехголового ребенка:

$$P(X_1+1\neq 3\cap\cdots\cap X_5+1\neq 3)$$

$$P(X_1+1\neq 3)\times\cdots\times P(X_5+1\neq 3)=(1-P(X_1=2))\times\cdots\times(1-P(X_5=2))=$$

$$(1-P(X_1=2))^5=(1-C_{10}^{2}0.3^{2}(1-0.3)^{8})^5\approx 0.264626$$

По формуле вероятности обратного события получаем:

$$P(X_1+1=3\cup\cdots\cup X_5+1=3)=1-P(X_1+1\neq 3\cap\cdots\cap X_5+1\neq 3)\approx 1-0.264626=0.735374$$

4. Введем Бернулиевскую случайную величину Y_i, принимающую значение 1, если i-й ребенок оказался трехголовым и 0 - в противном случае. Нетрудно догадаться, что:

$$P(Y_i=1)=P(X_i+1=3)=C_{10}^{2}0.3^{2}(1-0.3)^{8}\approx 0.23347$$

Обратим внимание, что число трехголовых детей является Биномиальной случайной величиной:

$$Y=Y_1+\cdots+Y_5\sim B(5,0.23347)$$

Посчитаем искомую вероятность:

$$P(Y\leq 3|Y\geq 1)=\frac{P(Y\leq 3\cap Y\geq 1)}{P(Y\geq 1)}=\frac{P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)}{1-P(Y=0)}$$

$$= \frac{C_5^1 0.23347^1(1-0.23347)^{5-1} + C_5^2 0.23347^2(1-0.23347)^{5-2} + C_5^3 0.23347^3(1-0.23347)^{5-3}}{1-(1-0.23347)^5} \approx 0.9835714$$

5. Из предыдущего пункта следует, что:

$$E(Y) \approx 5 \times 0.23347 = 1.16735$$

$$Var(Y) \approx 5 \times 0.23347 \times (1-0.23347) = 0.8948088$$

Проверка в R

```
n <- 100000
p.par <- 0.3
n.par <- 10
n.children <- 5
heads <- matrix(1 + rbinom(n = n * n.children, size = n.par, prob = p.par),
            nrow = n,
            ncol = n.children)
heads3 <- apply(heads, 1, function(x){sum(x == 3)})
# пункт 1
mean(heads > 2)
# пункт 2
mean(rowSums(heads) == 20)
# пункт 3
mean(heads3 >= 1)
# пункт 4
mean((heads3 <= 3)[heads3 >= 1])
# пункт 5
mean(heads3)
var(heads3)
```

Показать решение