Оценки параметров равномерного распределения

Опубликовал

sobody

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Оценки (/Topics/Details?id=30)

Раздел

Определение и свойства оценок (/SubTopics/Details?id=100)

Дата публикации

07.02.2019

Дата последней правки

23.02.2019

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг



Условие

Имеется выборка $X=(X_1,\dots,X_n)$ из распределения ξ . Случайная величина ξ имеет равномерное распределение. Проверьте, является ли оценка $\hat{\theta}$ параметра θ несмещенной и состоятельной, если:

1. $\xi \sim U(0,\theta)$ и $\hat{\theta} = \max(X_1,\dots,X_n)$. Если данная оценка не является несмещенной, то исправьте ситуацию предложив альтернативную оценку, а затем проверьте её состоятельность.

Решение

1. Нетрудно догадаться (https://sobopedia.azurewebsites.net/Exercises/Details?id=92), что при $x\in\{0,\theta\}$ справедливо $F_{\hat{\theta}}(x)=F_{\xi}(x)^n=\left(\frac{x}{\theta}\right)^n$. Откуда, при $x\in\{0,\theta\}$ получаем функцию плотности $f_{\hat{\theta}}(x)=\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}$. Отсюда несложно найти математическое ожидание рассматриваемой оценки и убедиться в том, что она не является несмещенной:

$$E(\hat{ heta}) = \int_0^{ heta} x rac{nx^{n-1}}{ heta^n} dx = \int_0^{ heta} rac{nx^n}{ heta^n} dx = rac{nx^{n+1}}{(n+1) heta^n}|_0^{ heta} = rac{n}{n+1} heta
eq heta$$

Однако очевидно, что оценка $\hat{\theta_2}=rac{n+1}{n}\hat{ heta}$ будет являться несмещенной. Для проверки состоятельности оценки $\hat{\theta_2}$ достаточно убедиться, что её дисперсия стремится к нулю. Найдем выражение для дисперсии этой оценки:

$$egin{split} Var(\hat{ heta_2}) &= \left(rac{n+1}{n}
ight)^2 Var(\hat{ heta}) = \left(rac{n+1}{n}
ight) (E(\hat{ heta}^2) - E(\hat{ heta})^2) = \ &= \left(rac{n+1}{n}
ight)^2 \left(\int_0^{ heta} x^2 rac{nx^{n-1}}{ heta^n} dx - \left(rac{n}{n+1} heta
ight)^2
ight) = rac{1}{n(n+2)} heta^2 \end{split}$$

Состоятельность следует из того, что:

$$\lim_{n o\infty} Var(\hat{ heta_2}) = \lim_{n o\infty} rac{1}{n(n+2)} heta^2 = 0.$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.

© 2018 - 2022 Sobopedia