Тест дракона

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Теория проверки статистических гипотез (/Topics/Details?id=35)
Раздел
Введение в теорию проверки статистических гипотез (/SubTopics/Details?id=124)
Дата публикации
10.04.2020
Дата последней правки
20.05.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★

Условие

В королевстве обитают золотые и серебряные драконы. Температура пламени случайно взятого **золотого дракона**, измеренная в **сотнях** градусов Цельсия, является случайной величиной G (gold) с функцией плотности:

$$f_G(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3060}, \text{если } x\in[7,11]\\ 0, \text{в противном случае}\end{cases}$$

Аналогичная случайная величина S (silver) для **серебряных драконов** имеет функцию плотности:

$$f_S(x)=\begin{cases}\frac{3x^2}{784}, \text{если } x\in[6,10]\\ 0, \text{в противном случае}\end{cases}$$

С целью повышения туристической привлекательности королевства король поручил Васе составить карту обитания драконов. Выполняя королевское поручение Вася обнаружил пещеру, в которой жил дракон. Пещера очень темная и заходить в нее опасно. Поэтому у Васи нет возможности установить тип дракона ориентируясь на его внешний вид. Однако, периодически из пещеры извергаются потоки жаркого пламени, порождаемые дыханием дракона. Вася решил воспользоваться данным обстоятельством и приобрел в академии магии специальный прибор, позволяющий измерить температуру пламени, извергаемого драконом.

Как правило золотые драконы извергают более горячее пламя, чем серебряные. Поэтому Вася принял решение занести дракона на карту как золотого, если температура его пламени превысит 900 градусов и как серебряного - в противном случае.

1. Укажите множество возможных распределений температуры пламени дракона, проживающего в пещере.

2. Формально опишите статистический критерий Васи, предполагая, что нулевая гипотеза соответствует золотому типу дракона: укажите нулевую и альтернативную гипотезы, а также обозначьте критическую область.

3. Опишите словами (не математически), в каком случае Вася допустит ошибку первого рода. Вычислите её вероятность и уровень значимости критерия.

4. Опишите словами (не математически), в каком случае Вася допустит ошибку второго рода. Вычислите её вероятность и мощность критерия.

5. Повторите предыдущие пункты учитывая, что Вася делает не один, а два замера температуры пламени Дракона и заносит его как золотого, если максимальная температура по результатам двух измерений оказывается выше 900. Дополнительно укажите тестовую статистику данного критерия. **Примечание**: предполагается, что для любого отдельно взятого золотого (серебряного) дракона температура пламени является случайной величиной с функцией плотности f_G (f_S).

6. Вася вновь осуществляет два замера температуры пламени Дракона и заносит его как золотого, если средняя температура по результатам двух измерений оказывается выше k. Какое значение k Васе стоит выбрать для того, чтобы уровень значимости критерия составил 0.1?

Решение

1. Обозначим через $\mathcal{D}_G$ и $\mathcal{D}_S$ распределения температур пламени золотого и серебряного драконов, то есть обладающие функциями плотности f_G и f_S соответственно. Тогда множество возможных распределений принимает вид $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_G, \mathcal{D}_S\}$.

2. Через $\mathcal{D}_X$ обозначим распределение температуры пламени дракона, сидящего в пещере. Согласно критерию Васи нулевая и альтернативная гипотезы задаются $H_0 : \mathcal{D}_X = \mathcal{D}_G$ и $H_1 : \mathcal{D}_X = D_S$ соответственно. Обратим внимание, что нулевая гипотеза является простой, поскольку множество $\mathcal{D}_0$ включает лишь один элемент.

Через $X = (X_1)$ обозначим выборку, состоящую из одного единственного наблюдения, относящегося к температуре пламени, порожденного сидящим в пещере драконом. Реализацию данной выборки обозначим через $x = (x_1)$. Нулевая гипотеза отвергается при $X_1 < 9$. Следовательно, критическая область имеет вид $x^{(1)} = \{t \in [6, 11] : t \leq 9\}$.

3. Вася допустит ошибку первого рода, если на самом деле в пещере сидит золотой дракон, но признан он будет серебряным.

Вычислим вероятностью ошибки первого рода, совпадающую с уровнем значимости критерия:

$$\alpha = P(X \in x^{(1)} | \mathcal{D}_X = D_G) = P(X_1 < 900 | \mathcal{D}_X = D_G) = \int_7^9 \frac{x^3}{3060} dx = \frac{52}{153}$$

4. Вася допустит ошибку второго рода, если на самом деле в пещере сидит серебряный дракон, но признан он будет золотым.

Вычислим вероятностью ошибки второго рода, совпадающую с разнице единицы и мощности критерия:

$$1-\beta = P(X \notin x^{(1)}|\mathcal{D}_X = D_S) = P(X_1 > 9|\mathcal{D}_X = D_S) = \int_9^{10} \frac{3x^2}{784}dx = \frac{271}{784}$$

Отсюда следует, что мощность критерия составит:

$$\beta = 1 - \frac{271}{784} = \frac{513}{784}$$

5. Теперь рассмотрим тестирование гипотезы по выборке из двух наблюдений $X = (X_1, X_2)$ с реализацией $x = (x_1, x_2)$. Нулевая и альтернативная гипотезы остаются прежними, за тем лишь исключением, что соответствующие распределения становятся двумерными в силу увеличения размерности вектора X, включающего два наблюдения. С другой стороны, учитывая одинаковую распределенность его компонент в данном случае нулевую гипотезу можно сформулировать по поводу распределения одной из его компонент вернувшись к одномерному способу определения соответствующих распределений.

Критическая область примет вид:

$$x^{(1)} = \{(t_1, t_2) : \max(t_1, t_2) < 9 \wedge t_1, t_2 \in [6, 9]\}$$

Вероятность допустить ошибку первого рода составит:

$$\alpha = P(X \in x^{(1)}|\mathcal{D}_X = D_G) = P(\max(X_1, X_2|\mathcal{D}_X = D_G) < 9) = P(X_1 < 9, X_2 < 9|\mathcal{D}_X = D_G) =$$
$$= P(X_1 < 9|\mathcal{D}_X = D_G)P(X_2 < 9|\mathcal{D}_X = D_G) = \left(\frac{52}{153}\right)^2$$

Вероятность допустить ошибку первого рода составит:

$$1-\beta = P(X \notin x^{(1)}|\mathcal{D}_X = D_S) = P(max(X_1, X_2) > 900|\mathcal{D}_X = D_S) =$$
$$= 1 - P(\max(X_1, X_2) \leq 9|\mathcal{D}_X = D_S) = 1 - P(\max(X_1, X_2) \leq 9|\mathcal{D}_X = D_S) =$$
$$= 1 - P(X_1) \leq 9|\mathcal{D}_X = D_S)P(X_2) \leq 9|\mathcal{D}_X = D_S) =$$
$$= 1 - \left(\int_6^9 \frac{3x^2}{784}dx\right)^2 = 1 - \left(\frac{513}{784}\right)^2$$

В результате мощность критерия составит:

$$\beta = \left(\frac{513}{784}\right)^2$$

6. Обратим внимание, что:

$$f_{\frac{G}{2}}(x) = f_{\frac{X_i}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{765}, \text{если } x \in [3.5, 5.5] \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}, \text{где } i \in \{1, 2\}$$

Введем обозначение $\overline{X} = \frac{X_1+X_2}{2}$. Будем использовать формулу свертки (https://sobopedia.azurewebsites.net/SubTopics/Details?id=61). В соответствии с данной формулой:

$$f_{\overline{X}}(t)=\int\limits_{0}^{5.5} f_{\frac{X_1}{2}}(x) f_{\frac{X_2}{2}}(t-x)dx$$

Обратим внимание, что подынтегральное выражение не равняется нулю, когда:

$$\begin{cases}3.5\le x\le 5.5\\ 3.5\le t-x\le 5.5\end{cases}$$

Решая данное неравенство для x получаем границы интегрирования при различных значениях t:

$$\begin{cases}x\in[3.5,t-3.5],\text{ если } t\in[7,9]\\ x\in[t-5.5,5.5],\text{ если } t\in(9,11]\end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$f_{\overline{X}}(k)=\begin{cases}\int\limits_{3.5}^{t-3.5}\frac{4x^3}{765}\frac{4(t-x)^3}{765}dx,\text{ при } t\in[7,9]\\ \int\limits_{t-5.5}^{5.5}\frac{4x^3}{765}\frac{4(t-x)^3}{765}dx,\text{ при } t\in(9,11]\end{cases}$$

Для начала допустим, что $t\in(9,11]$. Попытаемся решить данное равенство:

$$\alpha=P(\overline{X}\le k|H_0)=\int\limits_{7}^{9}\int\limits_{3.5}^{t-3.5}\frac{4x^3}{765}\frac{4(t-x)^3}{765}dxdt+\int\limits_{9}^{k}\int\limits_{t-5.5}^{5.5}\frac{4x^3}{765}\frac{4(t-x)^3}{765}dxdt=0.1$$

Решая получаем $k\approx 8.53046$, однако, в таком случае $8.53046\neq(9,11]$, а значит соответствующее решение не подходит.

Теперь допустим, что $k\in[7,9]$. В таком случае имеем:

$$\alpha=P(\overline{X}\le k|H_0)=\int\limits_{7}^{k}\int\limits_{3.5}^{t-3.5}\frac{4x^3}{765}\frac{4(t-x)^3}{765}dxdt=0.1$$

В итоге получаем подходящее решение $k=8.37391$.

Показать решение