

Инвестиционный портфель

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Совместное распределение (/Topics/Details?id=10)

Раздел

Ковариация (/SubTopics/Details?id=63)

Дата публикации

26.09.2021

Дата последней правки

25.10.2021

Последний внесивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★

Условие

Случайные величины X , Y и Z отражают стоимости акций фирм A , B и C соответственно. Известно, что $Var(X) = 4$, $Var(Y) = 9$ и $Var(Z) = 25$. Кроме того $Cov(X, Y) = 1.2$, $Cov(X, Z) = 5$ и $Corr(Y, Z) = -0.3$. Наконец, $E(X) = 10$, $E(Y) = 20$ и $E(Z) = 50$. У вас имеются 3 акции фирмы A , 5 акций фирмы B и 10 акций фирмы C .

1. Найдите $Cov(Y, Z)$.
2. Вычислите математическое ожидание стоимости вашего портфеля.
3. Рассчитайте дисперсию стоимости вашего портфеля.
4. Портфель Лаврентия содержит 2 акции фирмы A и 3 акции фирмы B . Посчитайте корреляцию стоимости вашего портфеля и портфеля Лаврентия.
5. Вы решили составить новый портфель. У вас есть 100 рублей. Каждая акция фирмы A стоит 1 рубль, а акция фирмы B - 2 рубля (акции фирмы C уже купить нельзя). Для простоты допустим, что можно покупать нецелое число акций. Вы тратите на покупку акций все свои деньги и хотите оптимально диверсифицировать риски. Сформируйте портфель, обладающий наименьшей дисперсией стоимости (наименьшим риском).

Решение

1. Подставляя числа в формулу корреляции получаем, что:

$$Corr(Y, Z) = \frac{Cov(Y, Z)}{\sqrt{Var(Y)Var(Z)}} \Rightarrow -0.3 = \frac{Cov(Y, Z)}{\sqrt{9 \times 25}} \Rightarrow Cov(Y, Z) = -4.5$$

2. Пользуясь свойством линейности математического ожидания получаем:

$$E(3X + 5Y + 10Z) = 3E(X) + 5E(Y) + 10E(Z) = 3 \times 10 + 5 \times 20 + 10 \times 50 = 630$$

3. Воспользуемся свойствами ковариации:

$$\begin{aligned} Var(3X + 5Y + 10Z) &= Cov(3X + 5Y + 10Z, 3X + 5Y + 10Z) = \\ &= 9Var(X) + 25Var(Y) + 100Var(Z) + 2 \times 3 \times 5 \times Cov(X, Y) + 2 \times 3 \times 10 \times Cov(X, Z) + 2 \times 5 \times 10 \times Cov(Y, Z) = \\ &= 9 \times 4 + 25 \times 9 + 100 \times 25 + 2 \times 3 \times 5 \times 1.2 + 2 \times 3 \times 10 \times 5 + 2 \times 5 \times 10 \times (-4.5) = 2647 \end{aligned}$$

4. Вновь применим свойства ковариации:

$$\begin{aligned} Cov(3X + 5Y + 10Z, 2X + 3Y) &= (3 \times 2) \times Var(X) + (3 \times 3) \times Cov(X, Y) + (5 \times 2) \times Cov(X, Y) + (5 \times 3) \times Var(Y) + (10 \times 2) \times Cov(X, Z) + (10 \times 3) \times \\ &= (3 \times 2) \times 4 + (3 \times 3) \times 1.2 + (5 \times 2) \times 1.2 + (5 \times 3) \times 9 + (10 \times 2) \times 5 + (10 \times 3) \times (-4.5) = 146.8 \end{aligned}$$

Посчитаем дисперсию дохода портфеля Лаврентия:

$$Var(2X + 3Y) = 4Var(X) + 9Var(Y) + 12Cov(X, Y) = 4 \times 4 + 9 \times 9 + 12 \times 1.2 = 111.4$$

Наконец, вычисли корреляцию:

$$Corr(3X + 5Y + 10Z, 2X + 3Y) = \frac{Cov(3X + 5Y + 10Z, 2X + 3Y)}{\sqrt{Var(3X + 5Y + 10Z) \times Var(2X + 3Y)}} = \frac{146.8}{\sqrt{2647 \times 111.4}} \approx 0.27$$

5. Обозначим через $\alpha \in [0, 100]$ число рублей, которые вы вкладываете в покупку акций фирмы A . В результате получаем выражение для дисперсии стоимости вашего портфеля:

$$\begin{aligned} Var(\alpha X + \frac{(100 - \alpha)}{2} \times Y) &= \alpha^2 \times Var(X) + \left(\frac{100 - \alpha}{2}\right)^2 \times Var(Y) - 2\alpha \times \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2} \times Cov(X, Y) = \\ &= \alpha^2 \times 4 + \left(\frac{100 - \alpha}{2}\right)^2 \times 9 + 2 \times \alpha \times \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2} \times 1.2 \end{aligned}$$

Минимизируя соответствующее выражение по α получаем, что $\alpha \approx 32.673$. Таким образом, необходимо купить 32.673 акции фирмы A и $100 - 32.673$ акций фирмы B .

Проверка в R

```
library("matrixcalc")
library("mvtnorm")
var <- c(4, 9, 25)
sd <- sqrt(var)
exp <- c(10, 20, 50)
cor_12 <- 0.2
cor_13 <- 0.5
cor_23 <- -0.3
cov <- matrix(c(var[1], sd[1] * sd[2] * cor_12, sd[1] * sd[3] * cor_13,
                sd[1] * sd[2] * cor_12, var[2], sd[2] * sd[3] * cor_23,
                sd[1] * sd[3] * cor_13, sd[2] * sd[3] * cor_23, var[3]),
              ncol = 3, byrow = TRUE)

#
n <- 10000000
x <- rmvnorm(n, mean = exp, sigma = cov)
# пункт 1
cov(x[, 2], x[, 3])
# пункт 2
mean(3 * x[, 1] + 5 * x[, 2] + 10 * x[, 3])
# пункт 3
var(3 * x[, 1] + 5 * x[, 2] + 10 * x[, 3])
# пункт 4
cor(3 * x[, 1] + 5 * x[, 2] + 10 * x[, 3], 2 * x[, 1] + 3 * x[, 2])
```

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.