Простая задача на доказательство на распределение Фишера

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Классические непрерывные распределения (/Topics/Details?id=11)
Раздел
Распределение Фишера (Снедкора) (/SubTopics/Details?id=93)
Дата публикации
23.01.2020
Дата последней правки
18.06.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★★★★

Условие

Рассмотрим независимые случайные величины $X \sim F(1, n)$ и V, где $n \in N$ и $P(V = -1) = P(V = 1) = 0.5$. Найдите распределение случайной величины $\sqrt{X}V$.

Решение

Данная случайная величина будет иметь распределение Стьюдента с n степенями свободы. Действительно, положим независимые случайные величины $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $Y \sim \chi^2(n)$. Обратим внимание, что $|Z|V$ имеет стандартное нормальное распределение, поскольку:

$$P(|Z|V \leq x) = P(|Z| \leq x|V = 1)P(V = 1) + P(-|Z| \leq x|V = -1)P(V = -1) = \frac{P(|Z| \leq x) + (1 - P(|Z| \leq -x))}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{P(-x \leq Z \leq x) + 1}{2}, \text{ при } x \geq 0 \\ \frac{1 - P(x \leq Z \leq -x)}{2}, \text{ при } x < 0 \end{cases} = \Phi(x)$$

Из полученного результата очевидным образом следует, что:

$$\sqrt{X}V = \left(\frac{\sqrt{Z^2}}{\sqrt{Y}} * \sqrt{\frac{n}{1}}\right) V = \frac{|Z|V}{\sqrt{\frac{1}{n}Y}} \sim t(n)$$

Показать решение