Простые задачи на ММП с классическими распределениями

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Метод максимального правдоподобия (/Topics/Details?id=31)
Раздел
Введение в ММП (/SubTopics/Details?id=109)
Дата публикации
21.02.2019
Дата последней правки
18.04.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪

Условие

Рассмотрим выборку $X = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения ξ_θ, зависящего от вектора параметров θ. В качестве данных будем рассматривать реализацию выборки $x = (x_1, \ldots x_n)$. Для следующих распределений выпишите функцию правдоподобия и найдите оценки максимального правдоподобия, доказав, что они являются решением задачи максимизации функции правдоподобия по искомому параметру. Для каждой из найденных оценок, во-первых, проверьте соблюдение свойств несмещенности и состоятельности (https://sobopedia.azurewebsites.net/SubTopics/Details?id=100). Во-вторых, найдите информацию Фишера (https://sobopedia.azurewebsites.net/SubTopics/Details?id=111) и её оценку. В-третьих, найдите асимптотическое распределение оценок и для каждой из них постройте асимптотический доверительный интервал уровня $1-\alpha$. В-четвертых, при помощи дельта метода найдите асимптотическое распределение куба каждой из оценок и постройте асимптотический доверительный интервал уровня $1-\alpha$.

1. Распределение Пуассона, то есть $\xi_\theta \sim Pois(\theta)$
2. Экспоненциальное распределение, то есть $\xi_\theta \sim EXP(\theta)$
3. Нормальное распределение, то есть $\xi_\theta = \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2)$
4. Распределение с функцией плотности $f_{\xi_\theta} = (1+\theta)x^\theta$ при $x \in [0, 1]$ и $\theta > 0$.

Решение

1. **Функция правдоподобия**:

$$L(\theta;x)=\prod_{i=1}^{n}e^{-\theta}\frac{\theta^{x_i}}{x_i!}$$

Максимизируем **логарифм функции правдоподобия**:

$$\max_{\theta}\sum_{i=1}^{n}(-\theta)+x_i\ln(\theta)-\ln(x_i!)$$

Найдем **условия первого порядка**:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}-1\right)=0$$

Решая данное равенство получаем **точку экстремума**:

$$\theta^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{x}$$

Рассмотрим следующую оценку:

$$\hat{\theta}^{ML}=\overline{X}$$

Докажем, что $\hat{\theta}^{ML}$ является оценкой максимального правдоподобия, показав, что $\theta^*=\left(\hat{\theta}^{ML}|X=x\right)$ **будет точкой глобального максимума функции правдоподобия**. Для этого проверим выполнение **условий второго порядка**:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}-1\right)}{d\theta}|_{\theta^*}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta^*}=\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}=-\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i}<0$$

Данная оценка является **несмещенной**, поскольку:

$$E(\hat{\theta}^{ML})=E(\overline{X})=E(\xi)=\theta$$

Поскольку оценка несмещенная, то для доказательства **состоятельности** достаточно показать, что:

$$\lim_{n\to\infty}Var(\hat{\theta}^{ML})=\lim_{n\to\infty}Var(\overline{X})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Var(\xi)=0$$

Найдем информацию Фишера **первым способом - через математическое ожидание квадрата градиента (в данном случае производной)**:

$$I_X(\theta) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta} - 1\right)\right)^2\right) = E\left(\left(\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i - n\right)^2\right) =$$

$$= Var\left(\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i - n\right) + E\left(\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i - n\right)^2 = \frac{n\theta}{\theta^2} + \left(\frac{n\theta}{\theta} - n\right)^2 = \frac{n}{\theta}$$

Найдем информацию Фишера **вторым способом - через Гессиан (в данном случае вторая производная)**:

$$I_X(\theta) = -E\left(-\frac{n^2}{n\theta}\right) = \frac{n}{\theta}$$

Таким образом, **оценка информации Фишера** будет:

$$\hat{I}_X(\theta) = \frac{n}{\hat{\theta}^{ML}} = \frac{n}{\overline{\overline{X}}}$$

Используя информацию Фишера найдем **асимптотическое распределение оценки**:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}^{ML} - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta)$$

На практике предполагают, что:

$$\hat{\theta}^{ML} \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\theta, \frac{\theta}{n}\right)$$

Отсюда нетрудно получить оценки асимптотического математического ожидания и асимптотической дисперсии $\hat{\theta}^{ML}$:

$$\widehat{As.\,E}(\hat{\theta}^{ML}) = \overline{X}$$

$$\widehat{As.\,Var}(\hat{\theta}^{ML}) = \frac{\overline{X}}{n}$$

Следовательно, оценка $(1-\alpha)\%$ **асимптотического доверительного интервала принимает вид**:

$$\left(\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{\overline{X}}}{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{\overline{X}}}{n}}\right)$$

Используя **дельта метод** получаем асимптотическое распределения куба оценки:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}^3 - \theta^3\right)^{ML} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \theta * \left(3\theta^2\right)^2\right)$$

Следовательно, оценка $(1-\alpha)\%$ **асимптотического доверительного интервала для рассматриваемой оценки принимает вид**:

$$\left(\overline{X}^3 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{9\overline{X}^5}{n}}, \overline{X}^3 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{9\overline{X}^5}{n}}\right)$$

2. **Функция правдоподобия**:

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-x_i \theta}$$

Максимизируем **логарифм функции правдоподобия**:

$$\max_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \ln(\theta) - x_i \theta$$

Найдем **условия первого порядка**:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} - x_i = 0$$

Решая данное равенство получаем **точку экстремума**:

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{x}}$$

Докажем, что $\hat{\theta}_{ML}$ является оценкой максимального правдоподобия, то есть точкой **глобального максимума функции правдоподобия**. Для этого проверим выполнение **условий второго порядка**:

$$\frac{\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i}{d\theta}|_{\hat{\theta}_{mle}} = -\overline{x}^2 n < 0$$

Заметим, что сумма наблюдений имеет Гамма-распределение $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \theta)$. Исходя из этого нетрудно показать, что оценка является **смещенной**, так как:

$$E\left(\frac{1}{\overline{X}}\right) = \frac{n}{n-1}\theta$$

Далее нетрудно показать, что оценка является **состоятельной**:

$$\lim_{n \to \infty} E\left(\frac{1}{\overline{X}}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n-1}\theta = \theta$$

$$\lim_{n \to \infty} Var(\frac{1}{\overline{X}}) = 0$$

Найдем **информацию Фишера первым способом**:

$$I_X(\theta) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} - x_i\right)^2\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} - x_i\right) + E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} - x_i\right)^2 =$$

$$= \frac{n}{\theta^2} + \left(\frac{n}{\theta} - \frac{n}{\theta}\right)^2 = \frac{n}{\theta^2}$$

Найдем **информацию Фишера вторым способом**:

$$I_X(\theta) = -E\left(-\frac{n}{\theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2}$$

Тогда **оценка информации Фишера** будет:

$$\hat{I}\,(\hat{\theta}^{ML}) = \frac{n}{\frac{1}{\overline{X}^2}} = n\overline{X}^2$$

Наконец, **асимптотическое распределение** будет:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

3. **Функция правдоподобия**:

$$L(\theta; x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$$

Максимизируем **логарифм функции правдоподобия**:

$$\max_\theta -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\theta_2) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2}$$

Условия первого порядка для этой системы принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)}{\theta_2} = 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2} - \frac{n}{2\theta_2} = 0 \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1) = 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}{\theta_2} = n \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $\hat{\theta}_1^{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n}}{n} = \overline{X}$. Подставляя этот результат во второе уравнение имеем $\hat{\theta}_2^{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n}$.

То, что оценка $\hat{\theta}_1^{ML}$ является несмещенной и состоятельной показать очень просто. По аналогии очевидно, что $\hat{\theta}_2^{ML}$ является смещенной, но состоятельной оценкой.

Найдем **информацию Фишера вторым способом, поочередно находя каждый элемент матрицы вторых производных (Гессиана)**:

$$I_X\left(\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix}\right)_{11} = -E\left(-\frac{n}{\theta_2}\right) = \frac{n}{\theta_2}$$

$$I_X\left(\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}\right)_{22} = -E\left(-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2}{\theta_2^3}+\frac{n}{2\theta_2^2}\right) = E\left(\frac{n\theta_2}{\theta_2^3}-\frac{n}{2\theta_2^2}\right) = \frac{n}{2\theta_2^2}$$

$$I_X\left(\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}\right)_{12} = I_X\left(\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}\right)_{21} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)}{\theta_2^2}$$

Найдем **обратную матрицу Фишера**:

$$I_X\left(\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{\theta_2}{n} & 0\\ 0 & \frac{2\theta_2^2}{n}\end{bmatrix}$$

Следовательно, **асимптотическое распределение** принимает вид:

$$\sqrt{n}\left(\begin{bmatrix}\hat{\theta}_1^{mle}\\ \hat{\theta}_2^{mle}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\theta_2 & 0\\ 0 & 2\theta_2^2\end{bmatrix}\right)$$

4. **Функция правдоподобия**:

$$L(\theta;x) = \prod_{i=1}^{n}(1+\theta)x_i^{\theta}$$

Максимизируем **логарифм функции правдоподобия**:

$$\max_{\theta}\sum_{i=1}^{n}\theta\ln(x_i)+ln(\theta+1)$$

Найдем **условия первого порядка**:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right)+\frac{n}{\theta+1} = 0$$

Решая данное равенство получаем **точку экстремума**:

$$\hat{\theta}_{ML} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)}-1 = -\frac{n}{\overline{\ln(X)}}-1$$

Докажем, что $\hat{\theta}_{mle}$ является оценкой максимального правдоподобия, то есть точкой **глобального максимума функции правдоподобия**. Для этого проверим выполнение **условий второго порядка**:

$$\frac{-n}{(\theta+1)^2} < 0$$

Найдем **информацию Фишера вторым способом**:

$$I_X(\theta) = -E\left(\frac{-n}{(1+\theta)^2}\right) = \frac{n}{(1+\theta)^2}$$

Тогда **оценка информации Фишера** будет:

$$\hat{I}\,(\hat{\theta}^{ML}) = \frac{n}{(1+\theta)^2}$$

Наконец, **асимптотическое распределение** будет:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}^{ML} - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, (1+\theta)^2)$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.
