

## Защита Башни

---

### Опубликовал

sobodv

### Автор или источник

sobopedia

### Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

### Тема

Основы комбинаторики (/Topics/Details?id=3)

### Раздел

Как определить, каким способом пользоваться (/SubTopics/Details?id=23)

### Дата публикации

10.07.2019

### Дата последней правки

13.09.2019

### Последний вносивший правки

sobodv

### Рейтинг

★★

## Условие

Представьте, что вы играете в игру, где вам нужно защитить свою базу от полчищ наступающих монстров (игры такого типа именуются Tower Defence, сокращенно TD). Вы можете противостоять чудовищам размещая защитные башни на одной из 10 возможных позиций, расположенных вдоль путей, по которым следуют монстры. Защитные башни бывают **четырёх** видов: с лучниками, с пушками, с боевыми магами и дарующая усиливающие эффекты ближайшим башням. Каждая из них, **за дополнительную плату**, может быть модифицирована в один из **двух** возможных видов: одна из модификаций увеличивает силу, а другая - скорость атаки башни (модифицировать башню можно лишь один раз лишь одним из двух способов). Стоимость каждой из башен составляет 10 монет, а модификации - 50 монет. Башни ничем не различаются кроме видов и модификаций, поэтому порядок, в котором они строятся - не важен, но при этом имеют значение сами позиции, на которых вы размещаете башни с учетом их видов и модификаций. Посчитайте количество способов, которыми вы можете разместить башни, потратив все монеты, если у вас имеется:

1. 10 монет.

2. 30 монет.

3. 100 монет.

4. Неограниченное число монет, поскольку вы воспользовались читami. Причем все деньги тратить не обязательно (поскольку невозможно), но нужно тратить их до тех пор, пока не заняты все позиции и не сделаны все улучшения.

5. 50 монет и по крайней мере две башни должны быть с лучниками, поскольку на вас надвигается полчище драконов.

6. 50 монет и рядом (хотя бы на одной из двух соседних клеток) с башнями с лучниками, пушками и магами должна стоять хотя бы одна башня усиливающего вида. При этом все 10 позиций, на которых можно ставить башни, размещены по кругу и нельзя строить более двух усиливающих башен.

## Решение

1. Поскольку вы можете позволить себе лишь одну башню, то, очевидно, что количество способов составит  $4 * 10 = 40$ , так как вы, сначала, выбираете одну позицию из 10 возможных, а затем строите на ней одну из 4 башен.

2. Вам хватает денег всего на три башни без модификаций. Сначала вам нужно выбрать 3 позиции из 10, что можно сделать  $C_{10}^3$  способами. Затем, на каждой из трех выбранных позиций вы строите по одному виду башни одним из  $4^3$  способов. Таким образом получаем ответ  $4^3 C_{10}^3$ .

3. Теперь у вас есть два варианта. Поскольку способы, соответствующие каждому из этих вариантов, не пересекаются, то можем рассмотреть их по отдельности.

Во-первых, вы можете построить 10 башен, что, очевидно, можно сделать  $4^{10}$  способами.

Во-вторых, можно построить четыре простых и одну модифицированную башню. Простые башни можно разместить, очевидно,  $4^4 C_{10}^4$  способами. На каждый из этих способов приходится по  $(4 * 2) C_{10-4}^1$  способов разместить модифицированную башню. А значит общее количество способов составит  $4^4 C_{10}^4 * (4 * 2) C_{10-4}^1$ .

Таким образом, получаем ответ  $4^{10} + 4^4 C_{10}^4 * (4 * 2) C_{10-4}^1$ .

4. Очевидно, что количество способов составит  $(4 * 2)^{10}$ .

5. Поскольку у вас всего 50 монет и вам нужно построить две башни с лучниками, то вы не сможете модифицировать ни одну из башен. Следовательно, можно построить лишь 5 простых башен. Сначала выберем место под застройку башен с лучниками, что можно сделать  $C_{10}^2$  способами. Оставшиеся башни, очевидно, можно построить  $4^3 C_{10-2}^3$  способами. Вследствие чего получаем ответ  $C_{10}^2 * 4^3 C_{10-2}^3$ .

6. Рассмотрим несколько возможных вариантов и посчитаем способы отдельно для каждого из них. **При этом представьте**, что позиции пронумерованы от 1 до 10 против часовой стрелки.

Нетрудно догадаться, что одной усиливающей башни будет недостаточно, чтобы потратить все монеты. А значит нужны по крайней мере две. Их можно построить либо рядом, либо на расстоянии в одну клетку (между ними одна клетка), либо на расстоянии в две и более клеток. При этом подходят лишь последние два случая: назовем их подходами *A* и *B*.

Если вы следуете подходу *A*, то сначала выбираете позицию для первой башни одним из 10 способов, а затем у вас остается лишь 2 способа разместить вторую усиливающую башню: через одну клетку слева или справа от первой башни. Но если учитывать оба способа, то можно посчитать лишние, а значит поступим иначе. Будем проворачивать первую башню по кругу (против часовой стрелки) вместе с зафиксированной второй (против часовой стрелки на позицию дальше) на расстоянии в одну клетку получаем 10 способов. Для каждого возможного размещения защитных башен вам доступны три позиции, на которые вы можете размещать башни другого вида  $3^3$  способами. В результате получаем, что подходу *A* соответствует  $10 * 3^3$  способов.

Рассмотрим подход *B*. В соответствии с данным подходом нетрудно заметить, что на каждый способ поставить первую усиливающую башню будет приходиться по 5 способов построить вторую. Итого 50 способов. Однако, в таком случае каждый из способов будет дублироваться, откуда общее количество способов разместить две усиливающие башни составит 25. Далее выбираем места под остальные башни одним из 4 способов: сначала выбираем одним из 2 способов возле какой из усиливающих башен строить две башни, а затем одним из 2 способов строим слева или справа одну башню рядом с усиливающей, возле которой будет стоять всего одна не усиливающая башня. Итого имеем  $25 * 4 * 3^3$  способов.

В итоге получаем ответ  $10 * 3^3 + 25 * (2 * 2) * 3^3$ .

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.