

Пришельцы и коровы

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Основные понятия математической статистики (/Topics/Details?id=26)

Раздел

Эмпирическая функция распределения (/SubTopics/Details?id=98)

Дата публикации

30.01.2019

Дата последней правки

28.11.2021

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★☆

Условие

Каждую ночь инопланетяне похищают случайную корову и измеряют её интеллект. За 7 дней они похитили коров со следующими уровнями интеллекта: 7, 5, 3.2, 8, 2.3, −1, 5.

1. Найдите реализацию выборки интеллекта коров.
2. Найдите реализацию вариационного ряда выборки интеллекта коров.
3. Запишите эмпирическую функцию распределения выборки интеллекта коров, при условии соответствующей реализации.
4. Найдите реализацию третьего начального выборочного момента.
5. Рассчитайте реализацию исправленной выборочной дисперсии.
6. Найдите математическое ожидание интеллекта самой умной из похищенных коров, если известно, что интеллект коров имеет равномерное распределение от −10 до 10.

Решение

1. Имеем следующую реализацию: $x = (7, 5, 3.2, 8, 2.3, -1, 5)$.
2. Упорядочивая имеем: $\tilde{x} = (-1, 2.3, 3.2, 5, 5, 7, 8)$
3. Получаем следующее:

$$\left(\hat{F}_X(x)|\tilde{X} = \tilde{x}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -1 \\ \frac{1}{7}, & \text{если } -1 \leq x < 2.3 \\ \frac{2}{7}, & \text{если } 2.3 \leq x < 3.2 \\ \frac{3}{7}, & \text{если } 3.2 \leq x < 5 \\ \frac{5}{7}, & \text{если } 5 \leq x < 7 \\ \frac{6}{7}, & \text{если } 7 \leq x < 8 \\ 1, & \text{если } x \geq 8 \end{cases}$$

4. Осуществим расчеты:

$$\overline{x_7^3} = \frac{-1^3 + 2.3^3 + 3.2^3 + 5^3 + 5^3 + 7^3 + 8^3}{7} \approx 164.13357$$

5. Посчитаем соответствующую реализацию:

$$\overline{x_7} = \frac{-1 + 2.3 + 3.2 + 5 + 5 + 7 + 8}{7} \approx 4.21$$

$$\hat{\sigma}^2|X = x \approx \frac{(-1 - 4.21)^2 + (2.3 - 4.21)^2 + (3.2 - 4.21)^2 + (5 - 4.21)^2 + (5 - 4.21)^2 + (7 - 4.21)^2 + (8 - 4.21)^2}{7 - 1} \approx 9.2$$

6. Поскольку речь идет о распределении экстремальной порядковой статистики, то:

$$F_{X_{(n)}}(t) = (F_{X_1}(t))^n$$

$$f_{X_{(n)}}(t) = \frac{d(F_{X_1}(t))^n}{dt} = n(F_{X_1}(t))^{n-1} f_{X_1}(t)$$

При $t \in [-10, 10]$ получаем:

$$f_{X_{(n)}}(t) = n \left(\frac{t - (-10)}{10 - (-10)} \right)^{n-1} \frac{1}{10 - (-10)} = \frac{n}{20} \left(\frac{t + 10}{20} \right)^{n-1}$$

В результате получаем математическое ожидание:

$$E(X_{(n)}) = \int_{-10}^{10} t \frac{n}{20} \left(\frac{t + 10}{20} \right)^{n-1} dt = \frac{n}{20^n} \int_{-10}^{10} t(t + 10)^{n-1} dt =$$

$$= \frac{n}{20^n} \left(\int_{-10}^{10} (t + 10)(t + 10)^{n-1} dt - 10 \int_{-10}^{10} (t + 10)^{n-1} dt \right) =$$

$$= \frac{n}{20^n} \left(\int_0^{20} (t + 10)^n d(t + 10) - 10 \int_0^{20} (t + 10)^{n-1} d(t + 10) \right) = \frac{10(n - 1)}{n + 1}$$

При $n = 7$ например, получаем;

$$E(X_{(7)}) = \frac{10 \times (7 - 1)}{7 + 1} = 7.5$$

Проверка в R

```
n <- 7
n.sim <- 100000
x <- runif(n * n.sim, min = -10, max = 10)
x <- matrix(x, nrow = n)
```

```
x.max <- apply(x, MARGIN=c(2), max)
# пункт 6
mean(x.max)
```

[Показать решение](#)

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.
