Распределение моментов и прочие приятные мелочи

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Основные понятия математической статистики (/Topics/Details?id=26)
Раздел
Выборочные моменты (/SubTopics/Details?id=99)
Дата публикации
17.01.2020
Дата последней правки
17.03.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

Рассмотрим выборку $X = (X_1, \cdots, X_{50})$ из нормального распределения с дисперсией σ^2 и нулевым математическим ожиданием.

1. Рассмотрим вектор $Y = (X_1, \cdots, X_5)$, также являющийся выборкой. Вектор реализаций данной выборки равняется $y = (-2, 5, 10, -1, 0)$. Найдите реализации вариационного ряда, экстремальных статистик, выборочного среднего, выборочной дисперсии, исправленной выборочной дисперсии, пятого центрального выборочного момента, медианы и размаха выборки.

2. Реализация (значение) второго начального момент равняется 100, а первого начального - 5. Найдите реализацию второго центрального момента X.

3. Пусть $\sigma = 1$. Найдите распределение второго начального момента, умноженного на объем выборки.

4. Пусть $\sigma = 5$. Найдите вероятность того, что второй начальный момент превысит 20.

5. Пусть $\sigma = 1$. Рассчитайте вероятность того, что 48-я порядковая статистика окажется больше 1.96.
Подсказка: разберите эту (https://sobopedia.azurewebsites.net/Exercises/Details?id=92) задачу.

6. Имеется еще одна выборка $Z = (Z_1, \cdots, Z_{10})$ из стандартного нормального распределения. Причем X и Z - независимы. Найдите вероятность того, что начальный момент второго порядка X окажется в два раза больше второго начального момента Z при $\sigma = 1$.

Решение

1. Нетрудно догадаться, что реализация вариационного ряда примет вид $(-2, -1, 0, 5, 10)$, причем реализации экстремальных статистик это $y_1 = -2$ и $y_5 = 10$. Реализации медианы и размаха составят 0 и $10 + 2 = 12$ соответственно. Также, очевидно, что:

$$(\overline{Y}|(Y = y)) = \overline{y} = \frac{-2 - 1 + 0 + 5 + 10}{5} = 2.4$$

$$(\hat{S}|(Y = y)) = \frac{(-2 - 2.4)^2 + (-1 - 2.4)^2 + (0 - 2.4)^2 + (5 - 2.4)^2 + (10 - 2.4)^2}{5} = 20.24$$

$$(\hat{S}_c|(Y = y)) = \frac{(-2 - 2.4)^2 + (-1 - 2.4)^2 + (0 - 2.4)^2 + (5 - 2.4)^2 + (10 - 2.4)^2}{5 - 1} = 25.3$$

$$(\hat{S}_5|(Y = y)) = \frac{(-2 - 2.4)^5 + (-1 - 2.4)^5 + (0 - 2.4)^5 + (5 - 2.4)^5 + (10 - 2.4)^5}{5} = 4658.18496$$

2. Воспользуемся тем, что:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{50}(x_i - \overline{x})^2}{50} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{50} x_i^2}{50} - 2\overline{x}\frac{\sum\limits_{i=1}^{50} x_i}{50} + \overline{x}^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{50} x_i^2}{50} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{50} x_i^2}{50} - \overline{x}^2 = 100 - 5^2 = 75$$

3. В данном случае получаем хи-квадрат распределение с 50-ю степенями свободы, так как:

$$\frac{X_1^2 + \cdots + X_{50}^2}{50} * 50 = X_1^2 + \cdots + X_{50}^2 \sim \chi^2(50)$$

4. Обратим внимание, что:

$$\left(\frac{X_1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_1}{5}\right)^2 \sim \chi^2(50)$$

Рассмотрим искомую вероятность:

$$P\left(\frac{X_1^2 + \cdots + X_{50}^2}{50} > 20\right) = P\left(X_1^2 + \cdots + X_{50}^2 > 1000\right) =$$

$$= P\left(\left(\frac{X_1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_1}{5}\right)^2 > \frac{1000}{5^2}\right) \approx 0.8432274$$

5. Для начала рассчитаем функцию распределения в соответствующей точке:

$$\Phi(1.96) \approx 0.975$$

Далее, рассматривая три случая, то есть когда есть ровно два, одно или ни одного наблюдения меньше 1.96, получаем:

$$P(X_{48} > 1.96) = 1 - C_{50}^{48}(1 - 0.975)^2 0.975^{48} - C_{50}^{49}(1 - 0.975)0.975^{49} - C_{50}^{50}0.975^{50} \approx 0.129$$

6. Обратим внимание, что:

$$S = \frac{\frac{X_1^2 + \cdots + X_{50}^2}{50}}{\frac{Z_1^2 + \cdots + Z_{10}^2}{10}} = \frac{X_1^2 + \cdots + X_{50}^2}{Z_1^2 + \cdots + Z_{10}^2} \frac{10}{50} \sim F(50, 10)$$

Отсюда получаем, что:

$$P\left(\frac{X_1^2 + \cdots + X_{50}^2}{50} > 2\frac{Z_1^2 + \cdots + Z_{10}^2}{10}\right) = P(S > 2) \approx 0.118$$

Показать решение