

## Доверительный интервал для фирмы

---

### Опубликовал

sobodv

### Автор или источник

sobopedia

### Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

### Тема

Доверительные интервалы (/Topics/Details?id=33)

### Раздел

Доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии в случае нормальной выборки (/SubTopics/Details?id=115)

### Дата публикации

25.04.2020

### Дата последней правки

26.03.2021

### Последний вносивший правки

sobodv

### Рейтинг

★★★

## Условие

Выручка фирмы в любой день является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием  $\mu_X$  и дисперсией  $\sigma_X^2$ . При этом она не зависит от выручки, полученной в предыдущие дни. В первый день фирма заработала 10 денежных единиц, во второй 12, в третий 15, в четвертый 18 и в пятый 25. Издержки фирмы, которые также имеют нормальное распределение  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  и не зависят от выручки, в соответствующие дни составили 5, 10, 15, 20 и 25 денежных единиц. Известно, что  $\sigma_Y^2 = 0.81\sigma_X^2$ .

1. Найдите реализацию 60%-го доверительного интервала для математического ожидания дневной выручки фирмы.
2. Повторите предыдущий пункт принимая во внимание то, что  $\sigma_X^2 = 30$  (не распространяется на последующие пункты).
3. Найдите реализацию 60%-го доверительного интервала для стандартного отклонения дневной выручки фирмы.
4. Найдите реализацию 60%-го доверительного интервала для математического ожидания прибыли фирмы, учитывая, что помимо указанных выше издержек она выплачивает налог в размере 10% от выручки.
5. Повторите предыдущий пункт учитывая, что  $\sigma_Y^2 = 50$  (не распространяется на последующие пункты).
6. Найдите реализацию 60%-го доверительного интервала для прибыли фирмы, учитывая, что распределение выручки и издержек неизвестно (прежние налоги действуют), однако их разница имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ .

## Решение

Обозначим через  $z_{0.8} = 0.8416212$  квантиль уровня 0.8 стандартного нормального распределения. Через  $t_{0.8}^4 = 0.9409646$  обозначим квантиль уровня 0.8 распределения Стьюдента с 4-мя степенями свободы. Через  $\chi_{4,0.8}^2 = 5.988617$  и  $\chi_{4,0.2}^2 = 1.648777$  обозначим квантили хи-квадрат распределения с 4-мя степенями свободы уровней 0.8 и 0.2 соответственно. Через  $t_{0.8}^8 = 0.8888895$  обозначим квантиль уровня 0.8 распределения Стьюдента с 8-ю степенями свободы.

Через  $X = (X_1, \dots, X_5)$  обозначим выборку из выручек, а через  $Y = (Y_1, \dots, Y_5)$  - выборку из издержек фирмы. Реализации данных выборок имеют вид  $x = (10, 12, 15, 18, 25)$  и  $y = (5, 10, 15, 20, 25)$ .

Реализации выборочного среднего и имеют вид:

$$\bar{x} = \frac{10 + 12 + 15 + 18 + 25}{5} = 16$$

$$\bar{y} = \frac{5 + 10 + 15 + 20 + 25}{5} = 15$$

Реализация скорректированной выборочной дисперсии имеет вид:

$$(\hat{\sigma}_X^2 | X = x) = \frac{(10 - 16)^2 + (12 - 16)^2 + (15 - 16)^2 + (18 - 16)^2 + (25 - 16)^2}{5 - 1} = 34.5$$

$$(\hat{\sigma}_Y^2 | Y = y) = \frac{(5 - 15)^2 + (10 - 15)^2 + (15 - 15)^2 + (20 - 15)^2 + (25 - 15)^2}{5 - 1} = 62.5$$

1. Получаем реализацию доверительного интервала для среднего при неизвестной дисперсии, используя квантиль распределения студента с 4-мя степенями свободы:

$$\left( 16 - 0.9409646 * \sqrt{\frac{34.5}{5}}, 16 + 0.9409646 * \sqrt{\frac{34.5}{5}} \right) \approx (13.53, 18.47)$$

2. Получаем реализацию доверительного интервала для среднего при неизвестном распределении, используя квантиль стандартного нормального распределения:

$$\left( 16 - 0.8416212 * \sqrt{\frac{30}{5}}, 16 + 0.8416212 * \sqrt{\frac{30}{5}} \right) \approx (13.94, 18.06)$$

3. Получаем реализацию доверительного интервала для стандартного отклонения при неизвестном среднем, используя квантиль хи-квадрат распределения:

$$\left( \sqrt{\frac{34.5 * (5 - 1)}{5.988617}}, \sqrt{\frac{34.5 * (5 - 1)}{1.648777}} \right) \approx (4.8, 9.15)$$

4. Введем выборку из выручек с учетом налогообложения  $V = (V_1, \dots, V_n) = (0.9X_1, \dots, 0.9X_n)$ , которая будет иметь распределение с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $0.81\sigma_x^2$ . Её реализация будет иметь вид:

$$v = (9, 10.8, 13.5, 16.2, 22.5)$$

В итоге получаем реализации выборочного среднего и выборочной дисперсии:

$$\bar{v} = \frac{9 + 10.8 + 13.5 + 16.2 + 22.5}{5} = 14.4$$

$$(\hat{\sigma}_v^2 | Y = y) = 0.81 (\hat{\sigma}_Y^2 | Y = y) = \frac{(9 - 14.4)^2 + (10.8 - 14.4)^2 + (13.5 - 14.4)^2 + (16.2 - 14.4)^2 + (22.5 - 14.4)^2}{5 - 1} = 27.945$$

Необходимо построить доверительный интервал для  $E(V_1) - E(Y_1)$  с учетом того, что  $\sigma_V^2 = \sigma_Y^2$ . То есть строим доверительный интервал для разности математических ожиданий по выборкам с равными неизвестными дисперсиями. Найдем реализацию оценки соответствующей дисперсии:

$$(\hat{\sigma}_*^2 | X = x, Y = y) = \frac{27.945 * (5 - 1) + 62.5 * (5 - 1)}{(5 - 1) + (5 - 1)} = 45.2225$$

В итоге получаем реализацию доверительного интервала:

$$\left( (14.4 - 15) - 0.8888895 * \sqrt{45.2225} * \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}, (14.4 - 15) + 0.8888895 * \sqrt{45.2225} * \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} \right) \approx (-4.38, 3.18)$$

5. Поскольку дисперсия известна и по-прежнему является такой же, то реализация доверительного интервала принимает вид:

$$\left( (14.4 - 15) - 0.8416212 * \sqrt{\frac{50}{5} + \frac{50}{5}}, (14.4 - 15) + 0.8416212 * \sqrt{\frac{50}{5} + \frac{50}{5}} \right) \approx (-4.36, 3.16)$$

6. Введем следующую выборку:

$$T = X - V = (X_1 - V_1, \dots, X_5 - V_5) = (T_1, \dots, T_5)$$

Её реализация будет иметь вид:

$$t = (0.9 * 10 - 5, 0.9 * 12 - 10, 0.9 * 15 - 15, 0.9 * 18 - 20, 0.9 * 25 - 25) = (4, 0.8 - 1.5, -3.8, -2.5)$$

Также получаем, что:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \bar{v} - \bar{y} = 14.4 - 15 = -0.6 \\ \hat{\sigma}_t^2 &= \frac{(4 + 0.6)^2 + (0.8 + 0.6)^2 + (-1.5 + 0.6)^2 + (-3.8 + 0.6)^2 + (-2.5 + 0.6)^2}{5 - 1} = 9.445 \end{aligned}$$

Обратим внимание, что по условию  $T_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , а значит искомая реализация доверительного интервала принимает вид:

$$\left( (14.4 - 15) - 0.9409646 * \sqrt{\frac{9.445}{5}}, (14.4 - 15) + 0.9409646 * \sqrt{\frac{9.445}{5}} \right) \approx (-1.89, 0.69)$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.