Оценки параметров распределения Бернулли

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Оценки (/Topics/Details?id=30)
Раздел
Определение и свойства оценок (/SubTopics/Details?id=100)
Дата публикации
31.01.2019
Дата последней правки
08.02.2023
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

Имеется выборка $X = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения ξ. Случайная величина ξ имеет распределение Бернулли (https://sobopedia.azurewebsites.net/SubTopics/Details?id=40) с параметром $p = \theta$. Проверьте, является ли оценка $\hat{\theta}$ параметра θ несмещенной и состоятельной, если:

1. $\hat{\theta} = \overline{X}$.

2. $\hat{\theta} = \overline{X} + \frac{1}{n}$.

3. $\hat{\theta} = \frac{1}{10}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{7}{10}X_3$.

4. $\hat{\theta} = \frac{2^{n-1}}{2^n-1}X_1 + \frac{2^{n-2}}{2^n-1}X_2 + \ldots + \frac{2^{n-n}}{2^n-1}X_n$.

5. $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{X_1+\gamma} + \frac{1}{X_2+\gamma} + \ldots + \frac{1}{X_n+\gamma}\right)$. Проверьте, существует ли такое значение параметра γ, при котором данная оценка будет несмещенной.

6. Проверьте, является ли несмещенной и состоятельной оценка дисперсии $\hat{Var}(\xi) = \frac{X_1(1-X_1)+\ldots+X_n(1-X_n)}{n}$. Как изменится ответ для оценки $\hat{Var}(\xi) = \frac{X_1(1-X_1)+\ldots+X_n(1-X_n)}{n-5}$?

7. $\hat{\theta} = \frac{\gamma}{n} X_2 + \ldots + \frac{\gamma}{n} X_n$, где n - четное. Найдите параметр γ, при котором данная оценка будет несмещенной и состоятельной.

8. Самостоятельно придумайте несмещенную и состоятельную оценку для 100-го начального момента $E(\xi^{100})$.

Решение

1. Оценка является несмещенной, поскольку:

$$E(\hat{\theta}) = E(\overline{X}) = \frac{n * E(\xi)}{n} = \theta$$

Оценка является состоятельной, так как:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} E(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \theta = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} Var(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} Var(\xi) = 0$$

2. Оценка является смещенной, поскольку:

$$E(\hat{\theta}) = E(\overline{X} + \frac{1}{n}) = \frac{n * E(\xi)}{n} = \theta + \frac{1}{n} \neq \theta$$

Оценка является состоятельной, так как:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \theta + \frac{1}{n} = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} Var(\overline{X} + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} Var(\xi) = 0$$

3. Оценка является несмещенной:

$$E(\hat{\theta}) = E(\frac{1}{10} X_1 + \frac{1}{5} X_2 + \frac{7}{10} X_3) = \frac{1}{10} E(\xi) + \frac{1}{5} E(\xi) + \frac{7}{10} E(\xi) = E(\xi) = \theta$$

Оценка не является состоятельной, так как:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} Var(\frac{1}{10} X_1 + \frac{1}{5} X_2 + \frac{7}{10} X_3) = \lim_{n\to\infty} Var(\frac{1}{10}\xi) + Var(\frac{1}{5}\xi) + Var(\frac{7}{10}\xi) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{25} + \frac{7}{10}\right) \theta(1-\theta) \neq 0$$

4. Заметим, что последовательность коэффициентов в выражении для оценки параметра θ формирует геометрическую прогрессию со знаменателем 0.5. Используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии нетрудно показать, что оценка является несмещенной:

$$E(\hat{\theta}) = \frac{2^{n-1}}{2^n-1}E(X_1) + \frac{2^{n-2}}{2^n-1}E(X_2) + \ldots + \frac{2^{n-n}}{2^n-1}E(X_n) =$$

$$= \theta\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1} + \frac{2^{n-2}}{2^n-1} + \ldots + \frac{2^{n-n}}{2^n-1}\right) = \frac{\frac{2^{n-1}}{2^n-1}(1-0.5^n)}{1-0.5}\theta = \theta$$

Для проверки состоятельности достаточно убедиться, что дисперсия оценки стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2^{n-n}}{2^n-1}\right)^2\right)\theta(1-\theta) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(2^{n-1}\right)^2 + \left(2^{n-2}\right)^2 + \ldots + \left(2^{n-n}\right)^2\right)\frac{\theta(1-\theta)}{(2^n-1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(4^{n-1} + 4^{n-2} + \ldots + 4^{n-n}\right)\frac{\theta(1-\theta)}{(2^n-1)^2}$$

Заметим, что знаменатель последовательности в скобках составляет 0.25. Откуда в итоге получаем (https://www.wolframalpha.com/input/?i=limit+n-%3E%5Cinfty,+%5Cfrac%7B4%5E%7Bn-1%7D(1-0.25%5En)%7D%7B1-0.25%7D*%5Cfrac%7B%5Ctheta(1-%5Ctheta)%7D%7B(2%5E%7Bn%7D-1)%5E2%7D), что такая оценка не является состоятельной:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty}\left(4^{n-1} + 4^{n-2} + \ldots + 4^{n-n}\right)\frac{\theta(1-\theta)}{(2^n-1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}(1-0.25^n)}{1-0.25} * \frac{\theta(1-\theta)}{(2^n-1)^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{3} \neq 0$$

5. В первую очередь обратим внимание, что при $\gamma \notin \{0, 1\}$:

$$E\left(\frac{1}{\xi+\gamma}\right) = \theta\frac{1}{1+\gamma} + (1-\theta)\frac{1}{\gamma} = \frac{(1-\theta)+\gamma}{\gamma(1-\gamma)}$$

Очевидно, что оценка будет несмещенной при:

$$\frac{(1-\theta)+\gamma}{\gamma(1-\gamma)} = \theta$$

Отсюда получаем, что:

$$\gamma = \pm\frac{\sqrt{1+2\theta-3\theta^2} - \theta + 1}{2\theta}$$

В результате значение параметра γ, при котором оценка $\hat{\theta}$ будет несмещенной, меняется в зависимости от θ. То есть $E(\hat{\theta}) = \theta$ будет соблюдаться для каждого $\theta \in (0, 1)$ лишь при определенном значении γ. Следовательно, не существует такого γ, при котором это равенство соблюдается для любого $\theta \in (0, 1)$. Поэтому искомого значения параметра γ не существует.

6. Оценка является несмещенной, поскольку:

$$E(\hat{Var}(\xi)) = E(\frac{X_1(1-X_1)+\ldots+X_n(1-X_n)}{n}) = \frac{1}{n}(E(X_1)E(1-X_1)+\ldots+E(X_n)E(1-X_n))) =$$
$$= \frac{1}{n}(\underbrace{p(1-p)+\ldots+p(1-p)}_{n\text{раз}}) = p(1-p) = Var(\xi)$$

Пользуясь свойством независимости убедимся в состоятельности оценки:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{Var}(\xi)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(Var(X_1-X_1^2)+\ldots+Var(X_n-X_n^2)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Var(\xi-\xi^2) = 0$$

Последнее равенство следует из того, что $Var(\xi-\xi^2)$ является константой.

Для оценки $\hat{Var}(\xi) = \frac{X_1(1-X_1)+\ldots+X_n(1-X_n)}{n-5}$ нетрудно показать, что сохранится свойство состоятельности, однако будет нарушена несмещенность.

7. Нетрудно догадаться, что оценка будет несмещенной и состоятельной при $\gamma = 2$.

8. Легко проверить, что $E(\xi) = E(\xi^{100}) = p$, в связи с чем подойдет любая состоятельная и несмещенная оценка для θ из предыдущих пунктов.

Показать решение