Совместное из условного

Опубликовал

sobody

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Совместное распределение (/Topics/Details?id=10)

Раздел

Совместное распределение непрерывных случайных величин (/SubTopics/Details?id=58)

Дата публикации

09.11.2019

Дата последней правки

03.12.2019

Последний вносивший правки

sobody

Рейтинг

Условие

Имеются две абсолютное непрерывные случайные величины X и Y, причем:

$$f_{X|Y=y}(x)=\left\{egin{array}{c} rac{\sin(x+y)}{\sin(y)+\cos(y)},\, ext{если}\ x\in[0,rac{\pi}{2}]\ 0,\, ext{иначe} \end{array}
ight.$$

Также, известна функция плотности Y:

$$f_Y(y) = \left\{ egin{array}{l} rac{\sin(y) + \cos(y)}{2}, \, ext{если} \ y \in [0, rac{\pi}{2}] \ 0, \, ext{иначе} \end{array}
ight.$$

- 1. Рассчитайте $E(X|Y=\frac{\pi}{4})$.
- 2. Найдите совместную функцию плотности X и Y.
- 3. Вычислите корреляцию между X и Y, а также проверьте, являются ли они независимыми.
- 4. Посчитайте $P\left(X>\left(Y-rac{\pi}{4}
 ight)^2
 ight)$ и $P\left(X>\left(Y-rac{\pi}{2}
 ight)^2
 ight)$.
- 5. Запишите функцию распределения, а затем функцию плотности для случайной величины $(X|X>rac{\pi}{3}).$

6. Отыщите $E(X|Y=rac{\pi}{4}\cap X>rac{\pi}{3}).$

Решение

1. Воспользуемся условной функцией плотности:

$$E\left(X|Y=rac{\pi}{4}
ight)=\int_{0}^{rac{\pi}{2}}xrac{\sin\left(x+rac{\pi}{4}
ight)}{\sqrt{2}}dx=rac{\pi}{4}$$

2. Нетрудно догадаться, что в данном случае при $x \in [0, rac{\pi}{2}]$ и $y \in [0, rac{\pi}{2}]$ имеем:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y=y}(x) f_Y(y) = rac{\sin(x+y)}{\sin(y) + \cos(y)} rac{\sin(y) + \cos(y)}{2} = rac{\sin(x+y)}{2}$$

3. Производим следующие вычисления:

$$E(X) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\sin(x+y)}{2} dx dy = \frac{\pi}{4}$$
 $E(X^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{\sin(x+y)}{2} dx dy \approx 0.8$
 $Var(X) \approx 0.8 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx 0.183$
 $E(Y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{\sin(x+y)}{2} dx dy = \frac{\pi}{4}$
 $E(Y^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \frac{\sin(x+y)}{2} dx dy \approx 0.8$
 $Var(Y) \approx 0.8 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx 0.183$
 $E(XY) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \frac{\sin(x+y)}{2} dx dy = \frac{\pi-2}{2}$
 $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{\pi-2}{2} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx -0.04605$
 $Corr(X,Y) = \frac{-0.04605}{\sqrt{0.183 * 0.183}} \approx -0.25$

Исходя из полученного значения корреляции очевидно, что данные случайные величины являются зависимыми.

4. Поскольку $\left(Y-rac{\pi}{4}
ight)^2 \in [0,rac{\pi}{2}]$, то рассчитаем искомую вероятность следующим образом:

$$egin{split} P\left(X > \left(Y - rac{\pi}{4}
ight)^2
ight) &= 1 - P\left(X \leq \left(Y - rac{\pi}{4}
ight)^2
ight) = \ &= 1 - \int_0^{rac{\pi}{2}} \int_0^{\left(y - rac{\pi}{4}
ight)^2} rac{\sin(x+y)}{2} dx dy pprox 0.892 \end{split}$$

Во втором случае получаем пределы интегрирования из решения системы (https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+x%3C%3D%28y-pi%2F2%29%5E2%2C+x%3C%3Dpi%2F2%2C+y%3C%3D+pi%2F2%2C+x%3E%3D0%2C+y%3E%3D0):

$$\left\{egin{array}{l} x \leq \left(y - rac{\pi}{2}
ight)^2 \ x, y \in [0, rac{\pi}{2}] \end{array}
ight.$$

В итоге рассчитываем искомую вероятность:

$$P\left(X>\left(Y-rac{\pi}{2}
ight)^2
ight)=\int_0^{rac{\pi}{2}}\int_{rac{\pi}{2}-\sqrt{x}}^{rac{\pi}{2}}rac{sin(x+y)}{2}dydxpprox 0.53915$$

5. Для начала найдем функцию распределения при $z \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$:

$$egin{split} F_{X|X>rac{\pi}{3}}(z) &= P(X \leq z|X>rac{\pi}{3}) = rac{P(rac{\pi}{3} \leq X \leq z)}{P(rac{\pi}{3} \leq X)} = \ &= rac{\int_0^rac{\pi}{2} \int_rac{\pi}{3} rac{\sin(x+y)}{2} dx dy}{\int_0^rac{\pi}{2} \int_rac{\pi}{3} rac{\sin(x+y)}{2} dx dy} = rac{2\sin(z) - 2\cos(z) - \sqrt{3} + 1}{3 - \sqrt{3}} \end{split}$$

Далее, путем дифференцирования функции распределения получаем функцию плотности:

$$f_{X|X>rac{\pi}{3}}(z)=\left\{egin{array}{c} rac{2\sin(z)+2\cos(z)}{3-\sqrt{3}}, ext{ если }z\in [rac{\pi}{3},rac{\pi}{2}]\ 0, ext{ иначе} \end{array}
ight.$$

6. Сперва выведем выражение для функции распределения при $z \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$:

$$F_{X|Y=rac{\pi}{4}\cap X>rac{\pi}{3}}(z) = rac{P(rac{\pi}{3} \leq \left(X|Y=rac{\pi}{4}
ight) \leq z)}{P(rac{\pi}{3} \leq X|Y=rac{\pi}{4})} = rac{\int_{rac{\pi}{3}}^z rac{\sin\left(x+rac{\pi}{4}
ight)}{\sqrt{2}} dx}{\int_{rac{\pi}{3}}^z rac{\sin\left(x+rac{\pi}{4}
ight)}{\sqrt{2}} dx} = rac{2\sin(z) - 2\cos(z) - \sqrt{3} + 1}{3 - \sqrt{3}}$$

Дифференцируя получаем функцию плотности:

$$f_{X|Y=rac{\pi}{4}\cap X>rac{\pi}{3}}(z)=\left\{ egin{array}{c} rac{2\sin(z)+2\cos(z)}{3-\sqrt{3}},\, ext{если}\ z\in [rac{\pi}{3},rac{\pi}{2}]\ 0,\, ext{иначe} \end{array}
ight.$$

Наконец, рассчитаем математическое ожидание:

$$E(X|Y=rac{\pi}{4}\cap X>rac{\pi}{3})=\int_{rac{\pi}{3}}^{rac{\pi}{2}}zrac{2\sin(z)+2\cos(z)}{3-\sqrt{3}}dzpprox 1.296$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.

© 2018 – 2022 Sobopedia