

Даша и питание

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Теория проверки статистических гипотез (/Topics/Details?id=35)

Раздел

Критерий Колмогорова (/SubTopics/Details?id=145)

Дата публикации

22.05.2020

Дата последней правки

15.03.2023

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

☆☆

Условие

Даша заказывает еду через интернет и предполагает, что время доставки является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\lambda = 0.1$. В первый день Даше доставили еду за 10 минут, во второй за 5, а в третий - за 20.

Таблица может быть найдена по ссылке

(https://drive.google.com/file/d/1vAwMmq_yGatmmP5Qbi_2NFPFE1_Tv1DR/view) (в этой таблице даны значения без необходимости умножать D_n на \sqrt{n}).

Примечание: на практике для использования теста Колмогорова необходимо иметь достаточно большое количество наблюдений, однако, в целях облегчения вычислений в задаче используется маленькая выборка.

1. Используя тест Колмогорова проверьте справедливость допущения Даши об экспоненциальном времени доставки еды на уровне значимости $\alpha = 0.1$: запишите критическую область, нулевую гипотезу и статистику теста, а также её асимптотическое распределение (при условии, что верна нулевая гипотеза) и реализацию, сопроводив полученные результаты выводом касательно нулевой гипотезы.

2. Даша заказала еду еще раз и получила её через t минут. После повторного проведения теста Колмогорова с учетом дополнительного наблюдения Даша отвергла нулевую гипотезу на уровне значимости $\alpha = 0.1$. Во-первых, проверьте, может ли быть $t = 10$. Во-вторых, укажите минимально возможное значение t .

Решение

1. Рассматривается выборка $X = (X_1, X_2, X_3)$. В соответствии с нулевой гипотезой $H_0 : X_1 \sim EXP(0.1)$. Реализация выборки имеет вид $x = (10, 5, 20)$.

Рассчитаем теоретические вероятности:

$$F_{X_1|H_0}(10) = P(X_1 \leq 10|H_0) = 1 - e^{-0.1*10} \approx 0.632121$$

$$F_{X_2|H_0}(5) = P(X_2 \leq 5|H_0) = 1 - e^{-0.1*5} \approx 0.393469$$

$$F_{X_3|H_0}(20) = P(X_3 \leq 20|H_0) = 1 - e^{-0.1*20} \approx 0.864665$$

Теперь рассчитаем эмпирические вероятности:

$$\hat{F}_3(10) = \frac{2}{3}$$

$$\hat{F}_3(5) = \frac{1}{3}$$

$$\hat{F}_3(20) = 1$$

Теперь рассчитаем тестовую статистику:

$$D_n^+ = \max(|0.632121 - \frac{2}{3}|, |0.393469 - \frac{1}{3}|, |0.864665 - 1|) = 0.135335$$

$$D_n^- = \max(|0.632121 - \frac{1}{3}|, |0.393469 - 0|, |0.864665 - \frac{2}{3}|) = 0.393469$$

$$D_n = \max(0.135335, 0.393469) = 0.393469$$

Критическая область теста задается как:

$$x^{(1)} = (K_3^{0.1}, \infty) = (0.63604, \infty)$$

Асимптотическое распределение статистики $K(3)$.

Поскольку $0.393469 < 0.63604$, то нулевая гипотеза об экспоненциальном времени доставки еды не отвергается.

2. Теперь критическая область теста задается как:

$$x^{(1)} = (K_4^{0.1}, \infty) = (0.49265, \infty)$$

Из условия следует, что $D_n \leq 0.49265$.

Обратим внимание, что:

$$F_{X_4|H_0}(t) = P(X_4 \leq t|H_0) = 1 - e^{-0.1*t}$$

Если $t = 10$, то нулевая гипотеза не отвергается, поскольку:

$$D_n^- = \max(|0.393469 - 0|, |0.632121 - 0.25|, |0.864665 - 0.75|) = 0.393469 \leq 0.49265$$

$$D_n^+ = \max(|0.393469 - 0.25|, |0.632121 - 0.5|, |0.864665 - 1|) = 0.143469 \leq 0.49265$$

По аналогии нетрудно убедиться, что при $t = 0$ нулевая гипотеза не отвергается.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.