Условный день рождения

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Случайные события (/Topics/Details?id=5)
Раздел
Условная вероятность, формула Байеса, формула полной вероятности и независимость событий (/SubTopics/Details?id=32)
Дата публикации
12.09.2021
Дата последней правки
20.09.2022
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг

Условие

Среди друзей Лаврентия есть три Маши, два Артема, а также Елена, Света, Паша, Коля и Зинаида. Он решил пригласить пятерых из них на день рождения.

1. Предположим, что Лаврентий рассылает приглашения поочередно. Найдите вероятность того, что первым приглашение получит подруга по имени Маша, вторым Артем, третьей снова Маша, четвертой Елена и пятым - Паша.

2. Найдите вероятность того, что он пригласит две Маши, Артема, Елену и Пашу.

3. Найдите условную вероятность того, что он пригласит две Маши, Артема, Елену и Пашу, если известно, что Лаврентий пригласил по крайней мере одну Машу.

Решение

1. Через M_i, A_i, E_i, S_i, P_i, K_i и Z_i обозначим события, в соответствии с которыми i-е приглашение он отправляет Маше, Артему, Елене, Свете, Паше, Коле или Зинаиде соответственно.

Применим формулу пересечения событий:

$$P(M_1 \cap A_2 \cap M_3 \cap E_4 \cap P_5) = P(M_1)P(A_2|M_1)P(M_3|A_2 \cap M_1)P(E_4|M_3 \cap A_2 \cap M_1)(P_5|E_4 \cap M_3 \cap A_2 \cap M_1) =$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2520}$$

Соответствующую задачу можно решить и с помощью комбинаторики:

$$P(M_1 \cap A_2 \cap M_3 \cap E_4 \cap P_5) = \frac{A_3^1 A_2^1 A_2^1 A_1^1 A_1^1}{A_{10}^5} = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1}{30240} = \frac{1}{2520}$$

2. Обратим внимание, что в рассматриваемом случае независимо от перестановки порядка приглашений при расчете вероятностей в числителе и в знаменателе будут перемножаться одни и те же числа. Следовательно, вероятность остается прежней независимо от порядка, в котором приглашаются гости. Соответствующих вероятностей в $\frac{5!}{2}$ раз больше, чем вероятностей, рассчитанных в предыдущем пункте (делим на 2 потому, что от перестановки местами двух приглашенных Маш событие не меняется). В результате получаем ответ:

$$\frac{5!}{2} \times \frac{1}{2520} = \frac{1}{42}$$

Также, возможно и комбинаторное решение:

$$\frac{C_3^2 C_2^1 C_1^1 C_1^1 C_1^1}{C_{10}^5} = \frac{1}{42}$$

3. Для начала рассчитаем вероятность того, что Лаврентий не пригласил ни одну Машу:

$$P(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$$

Используя формулу вероятности обратного события получаем вероятность того, что Лаврентий пригласил хотя бы одну Машу:

$$P(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5) = 1 - P(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

Применяя формулу условной вероятности и обозначая рассматриваемое событие через A в итоге имеем:

$$P(A|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5) = \frac{P(A \cap (M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5))}{P(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5)} =$$

$$= \frac{P(A)}{P(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5)} = \frac{\frac{1}{42}}{\frac{11}{12}} = \frac{2}{77}$$

Обратим внимание, что пересечения события A и события $(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5)$ дает вновь событие A, поскольку $A \subset (M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5)$.

Показать решение