

Гитарный мастер

Опубликовал

sobody

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)

Тема

Основные понятия математической статистики (/Topics/Details?id=26)

Раздел

Стратифицированная выборка (/SubTopics/Details?id=144)

Дата публикации

24.04.2020

Дата последней правки

07.05.2020

Последний вносивший правки

sobody

Рейтинг

★★☆

Условие

Мастер производит гитары низкого, среднего и высокого качества. Время на изготовление гитары является экспоненциальной случайной величиной с параметрами 1, 0.5 и 0.2 для гитар низкого, среднего и высокого качества соответственно. С вероятностью 0.5 мастеру поступают заказы на гитары низкого качества, с вероятностью 0.4 на гитары среднего качества и с вероятностью 0.1 на гитары высокого качества.

1. Найдите математическое ожидание времени, затрачиваемого мастером на производство гитары.
2. Найдите дисперсию времени, затрачиваемого мастером на производство гитары.
3. У вас имеется выборка, включающая 100, 50 и 10 наблюдений, относящихся к производству мастером гитар низкого, среднего и высокого качества соответственно. Используя данную выборку найдите дисперсию стратифицированного выборочного среднего времени, затрачиваемого мастером на производство гитары.
4. Ваша стратифицированная выборка сформирована таким образом, что у вас имеется по n наблюдений, относящихся к производству мастером гитар низкого, среднего и высокого качества. Постройте 70% асимптотический доверительный интервал для математического ожидания времени, затрачиваемого на производство одной гитары.

Решение

1. Через $X_1^{(H)}$, $X_1^{(M)}$ и $X_1^{(L)}$ обозначим случайные величины, отражающие время, затрачиваемое мастером на изготовление гитары низкого, среднего и высокого качества соответственно. Через X обозначим случайную величину, отражающую временные затраты на производство гитары.

Через H , M и L обозначим события, соответствующие заказу качественной, средней и дешевой гитар соответственно. В итоге получаем, что:

$$\begin{aligned}
 E(X_1) &= E(X_1|H)P(H) + E(X_1|M)P(M) + E(X_1|L)P(L) = \\
 &= E(X_1^H) * 0.1 + E(X_1^M) * 0.4 + E(X_1^L) * 0.5 = \\
 &= 0.1 * \frac{1}{0.2} + 0.4 * \frac{1}{0.5} + 0.5 * \frac{1}{1} = 1.8
 \end{aligned}$$

2. По аналогии с предыдущим пунктом получаем, что:

$$\begin{aligned}
 Var(X_1) &= E(X_1^2) - E(X_1)^2 = E\left((X_1^H)^2\right) * 0.1 + E\left((X_1^M)^2\right) * 0.4 + E\left((X_1^L)^2\right) * 0.5 - 1.8^2 = \\
 &= 0.1 * (Var(X_1^H) + E(X_1^H)^2) + 0.4 * (Var(X_1^M) + E(X_1^M)^2) + 0.1 * (Var(X_1^L) + E(X_1^L)^2) - 1.8^2 = \\
 &= 0.1 * 2 * \left(\frac{1}{0.2}\right)^2 + 0.4 * 2 * \left(\frac{1}{0.5}\right)^2 + 0.5 * 2 * \left(\frac{1}{1}\right)^2 - 1.8^2 = 5.96
 \end{aligned}$$

3. Через $X^{(H)}$, $X^{(M)}$ и $X^{(L)}$ обозначим выборки из соответствующих распределений. Используя свойство независимости получаем следующее выражение для дисперсии стратифицированного среднего:

$$Var(\bar{X}^{str}) = 0.5^2 * \frac{Var(X_1^L)}{100} + 0.4^2 * \frac{Var(X_1^M)}{50} + 0.1^2 * \frac{Var(X_1^H)}{10} = 0.5^2 * \frac{1}{1^2} + 0.4^2 * \frac{0.5^2}{50} + 0.1^2 * \frac{0.2^2}{10} = 0.0403$$

4. Введем обозначение $X_i^{str} = 0.1 * X_i^H + 0.4 * X_i^M + 0.5 * X_i^L$.

Обратим внимание, что:

$$E(\bar{X}^{str}) = E(X_1)$$

$$Var(X_i^{str}) = Var(0.1 * X_i^H + 0.4 * X_i^M + 0.5 * X_i^L) = 0.1^2 * \frac{1}{0.2^2} + 0.4^2 * \frac{1}{0.5^2} + 0.5^2 * \frac{1}{1^2} = 1.14$$

Используя ЦПТ получаем:

$$\frac{\bar{X}^{str} - E(X_1)}{\sqrt{\frac{1.14}{n}}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Запишем асимптотический 70% доверительный интервал для $E(X_1)$:

$$\left(\bar{X}^{str} - 1.035 \sqrt{\frac{1.14}{n}}, \bar{X}^{str} + 1.035 \sqrt{\frac{1.14}{n}} \right)$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.