Границы вероятностей

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
One Thousand Exercises in Probability
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Случайные события (/Topics/Details?id=5)
Раздел
Условная вероятность, формула Байеса, формула полной вероятности и независимость событий (/SubTopics/Details?id=32)
Дата публикации
08.09.2018
Дата последней правки
13.01.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

Известно, что $P(A) = \frac{1}{2}$ и $P(B) = \frac{2}{3}$. Найдите значения верхних b_1, b_2 и нижних a_1, a_2 границ неравенств $b_1 \geq P(A \cap B) \geq a_1$ и $b_2 \geq P(A \cup B) \geq a_2$.

Затем докажите для произвольного случая, что если $P(A|B) > P(A)$, то $P(B|A) > P(B)$.

Решение

Для начала найдем границы $P(A \cap B)$

Поскольку $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$, то $\frac{2}{3}P(A|B) = \frac{1}{2}P(B|A)$, откуда $P(B|A) = \frac{4}{3}P(A|B)$, а значит, так как $P(B|A) \leq 1$, то $P(A|B) \leq \frac{3}{4}$. Следовательно $P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(A|B) \leq \frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$, откуда $b_1 = \frac{1}{3}$.

Так как $P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - P(A \cap B) = \frac{7}{6} - P(A \cap B) \leq 1$, то $P(A \cap B) \geq \frac{1}{6}$, а значит $a_1 = \frac{1}{6}$.

Таким образом $\frac{1}{6} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

Теперь найдем границы для $P(A \cup B)$.

Как было показано ранее, $P(A \cup B) = \frac{7}{6} - P(A \cap B)$, а значит $P(A \cap B) = \frac{7}{6} - P(A \cup B)$, откуда $\frac{1}{6} \leq \frac{7}{6} - P(A \cup B) \leq \frac{1}{3}$. Решая неравенство получаем $\frac{5}{6} \leq P(A \cup B) \leq 1$, следовательно $a_2 = \frac{5}{6}$ и $b_2 = 1$.

Теперь займемся вторым доказательством.

Если $P(A|B) > P(A)$, то $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A)$, а значит $\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} > P(A)$, откуда $P(B|A) > P(B)$.

Показать решение