

Лаврентий и заколдованная монетка

Опубликовал

sobodv

Автор или источник

sobopedia

Предмет

Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)

Тема

Сходимости (/Topics/Details?id=13)

Раздел

Сходимость по вероятности (/SubTopics/Details?id=69)

Дата публикации

05.11.2021

Дата последней правки

05.11.2021

Последний вносивший правки

sobodv

Рейтинг

★★★★★

Условие

Каждый день Лаврентий подбрасывает монетку до тех пор, пока она не выпадет орлом. Монетка Лаврентия заколдована таким образом, что вероятность выпадения решки с каждым днем уменьшается в 2 раза. При этом в первый день монетка ведет себя как правильная и выпадает орлом и решкой с равной вероятностью.

1. Найдите вероятность, с которой на 3-й день у Лаврентия выпадет не менее 5-ти решек.
2. Определите, к чему стремится по вероятности число выпавших решек по прошествии бесконечного большого числа дней.

Решение

1. Число решек выпавших в i -й день является геометрической случайной величиной $X_i \sim Geop(1 - 0.5^i)$, а значит:

$$P(X_3 \geq 5) = (1 - (1 - 0.5^3))^5 \approx 0.0000305$$

2. Интуиция подсказывает, что со временем у Лаврентия почти наверняка сразу же будет выпадать орел, а значит число выпадающих решек будет стремиться к нулю. Убедимся в справедливости соответствующей интуиции:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - (1 - 0.5^n))^{\lceil \varepsilon \rceil} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0.5^{n \lceil \varepsilon \rceil} = 0$$

Где $\varepsilon > 0$ и $\lceil \varepsilon \rceil$ обозначает округление ε в большую сторону. Например, $\lceil 5.3 \rceil = 6$ и $\lceil 0.8 \rceil = 1$.

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.