Гипотеза о равномерных случайных величинах

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Теория проверки статистических гипотез (/Topics/Details?id=35)
Раздел
Введение в теорию проверки статистических гипотез (/SubTopics/Details?id=124)
Дата публикации
26.04.2020
Дата последней правки
31.01.2022
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★⯪☆

Условие

Имеется выборка из одного наблюдения $X = X_1$. Известно, что $X \sim U(0, b)$. Проверяется простая параметрическая гипотеза $H_0 : b = 10$ против альтернативы $H_1 : b = 8$. Нулевая гипотеза отвергается при $X < k$.

1. Запишите критическую область теста при $k = 5$, а также вычислите вероятности ошибок первого и второго рода.

2. Известно, что уровень значимости теста равняется 0.3, определите мощность теста.

3. Пусть нулевая гипотеза отвергается при $X \leq k_{\alpha}$, где α - уровень значимости теста. Посчитайте p-value теста, если $x = 9$.

4. Предположим, что теперь выборка включает два наблюдения $X = (X_1, X_2)$. Нулевая и альтернативная гипотезы остаются прежними. Вычислите вероятности ошибок первого и второго рода, если нулевая гипотеза отвергается при $\max(X_1, X_2) < k$, где $k = 5$.

Решение

1. Очевидно, что $x^{(1)} = [0, 5]$.

Вероятность ошибки первого рода составит:

$$\alpha = P(X < 5|H_0) = \frac{5-0}{10} = \frac{1}{2}$$

Вероятность ошибки второго рода будет равняться:

$$\beta = P(X > 5|H_1) = 1 - P(X < 5|H_1) = 1 - \frac{5-0}{8} = \frac{3}{8}$$

2. Поскольку вероятность ошибки первого рода составляет 0.3, то:

$$P(X < k|H_0) = \frac{k}{10} = 0.3$$

Отсюда следует, что $k = 3$. Используя полученное значение рассчитаем мощность теста:

$$1 - P(X > 3|H_1) = P(X < 3|H_1) = \frac{3}{8}$$

3. Рассчитаем уровень значимости теста:

$$\alpha = P(X \leq k_\alpha|H_0) = \frac{k_\alpha}{10}$$

Критическая область тестовой статистики будет иметь вид $\mathcal{T}_\alpha = (0, k_\alpha]$. Поскольку мы ищем минимальный уровень значимости, при котором, с учетом того, что $x = 9$, нулевая гипотеза отвергается, то возникает ограничение $k_\alpha \geq 9$: поскольку иначе 9 не попадет в критическую область. При этом α строго возрастает по k_α. Следовательно, минимизация α при заданном ограничении предполагает $k_\alpha = 9$. Отсюда получаем:

$$k_\alpha = 9 \implies \alpha = \frac{9}{10} = 0.9 \implies p - value = 0.9$$

4. Пользуясь формулой распределения максимума из выборки получаем, что при $t \in [0, b]$:

$$F_{T(X)}(t) = F_{\max(X_1,X_2)}(t) = \left(\frac{t}{b}\right)^2 = \frac{t^2}{b^2}$$

Вычислим вероятность ошибки первого рода:

$$\alpha = P(\max(X_1, X_2) < 5|H_0) = \left(\frac{5-0}{10}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Рассчитаем вероятность ошибки второго рода:

$$\beta = P(\max(X_1, X_2) > 5|H_1) = 1 - P(\max(X_1, X_2) < 5|H_1) = 1 - \left(\frac{5-0}{8}\right)^2 = \frac{39}{64} \approx 0.61$$

Показать решение