Случайные собственные числа

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Совместное распределение (/Topics/Details?id=10)
Раздел
Совместное распределение дискретных случайных величин (/SubTopics/Details?id=57)
Дата публикации
02.11.2019
Дата последней правки
16.11.2019
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★☆

Условие

Имеется следующая матрица:

$$A=\begin{bmatrix}X+Y & 1\\ 1 & X-Y\end{bmatrix}$$

Совместное распределение случайных величин X и Y задано следующей таблицей:

$$\begin{bmatrix}X/Y & \sqrt{8} & \sqrt{15}\\ 0 & 0.1 & 0.2\\ 1 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

Обозначим собственные числа матрицы A как λ_1 и λ_2, где $\lambda_1\leq\lambda_2$.

1. Задайте таблицу совместного распределения λ_1 и λ_2.

2. Найдите корреляцию λ_1 и λ_2 и определите, являются ли они независимыми.

3. Найдите корреляцию $5\lambda_1+2\lambda_2$ и $\lambda_2-3\lambda_1$ если известно, что $\lambda_1+\lambda_2=0$.

Решение

1. Нетрудно вычислить, что:

$$\lambda_1=X-\sqrt{1+Y^2}$$

$$\lambda_2 = X + \sqrt{1+Y^2}$$

Отсюда получаем следующую таблицу распределения:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1/\lambda_2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 0.3 & 0 \\ -3 & 0.1 & 0 & 0.4 \\ -4 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Последовательно рассчитаем необходимые значения:

$$E(\lambda_1) = -2*0.3 - 3*(0.1+0.4) - 4*0.2 = -2.9$$

$$E(\lambda_2) = 3*0.1 + 4*(0.3+0.2) + 5*0.4 = 4.3$$

$$E(\lambda_1^2) = 2^2*0.3 + 3^2*(0.1+0.4) + 4^2*0.2 = 8.9$$

$$E(\lambda_2^2) = 3^2*0.1 + 4^2*(0.3+0.2) + 5^2*0.4 = 18.9$$

$$Var(\lambda_1) = 8.9 - (-2.9)^2 = 0.49$$

$$Var(\lambda_2) = 18.9 - (4.3)^2 = 0.41$$

$$E(\lambda_1\lambda_2) = -9*0.1 - 8*0.3 - 15*0.4 - 16*0.2 = -12.5$$

$$Cov(\lambda_1, \lambda_2) = -12.5 - (-2.9*4.3) = -0.03$$

$$Corr(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{-0.03}{\sqrt{0.49*0.41}} = -0.067$$

3. Обратим внимание, что:

$$P(\lambda_1 = -3 \cap \lambda_2 = 3 | \lambda_1 + \lambda_2 = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(\lambda_1 = -4 \cap \lambda_2 = 4 | \lambda_1 + \lambda_2 = 0) = \frac{2}{3}$$

Отсюда получаем, что:

$$E(\lambda_1 | \lambda_1 + \lambda_2 = 0) = \frac{1}{3}*(-3) + \frac{2}{3}*(-4) = -\frac{11}{3}$$

$$E(\lambda_2 | \lambda_1 + \lambda_2 = 0) = \frac{1}{3}*3 + \frac{2}{3}*4 = \frac{11}{3}$$

$$E(\lambda_1^2 | \lambda_1 + \lambda_2 = 0) = \frac{1}{3}*3^2 + \frac{2}{3}*4^2 = \frac{41}{3}$$

$$E(\lambda_2^2 | \lambda_1 + \lambda_2 = 0) = \frac{1}{3}*3^2 + \frac{2}{3}*4^2 = \frac{41}{3}$$

$$Var(\lambda_1 | \lambda_1 + \lambda_2 = 0) = \frac{41}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$Var(\lambda_2 | \lambda_1 + \lambda_2 = 0) = \frac{41}{3} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$E(\lambda_1\lambda_2|\lambda_1+\lambda_2=0)=(-3*3)*\frac{1}{3}+(-4*4)*\frac{2}{3}=-\frac{41}{3}$$

$$Cov(\lambda_1,\lambda_2|\lambda_1+\lambda_2=0)=-\frac{41}{3}-\left(-\frac{11}{3}\right)*\frac{11}{3}=-\frac{2}{9}$$

$$Corr(\lambda_1,\lambda_2|\lambda_1+\lambda_2=0)=\frac{-\frac{2}{9}}{\sqrt{\frac{2}{9}*\frac{2}{9}}}=-1$$

Используя свойства ковариации и дисперсии получаем, что:

$$\begin{gathered}Cov(5\lambda_1+2\lambda_2,\lambda_2-3\lambda_1|\lambda_1+\lambda_2=0)=\\=(5-2*3)Cov(\lambda_1,\lambda_2|\lambda_1+\lambda_2=0)+2Var(\lambda_2|\lambda_1+\lambda_2=0)-15Var(\lambda_1|\lambda_1+\lambda_2=0)=\\=(5-2*3)*\left(-\frac{2}{9}\right)+2*\frac{2}{9}-15*\frac{2}{9}=-\frac{8}{3}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}Var(5\lambda_1+2\lambda_2|\lambda_1+\lambda_2=0)=25Var(\lambda_1|\lambda_1+\lambda_2=0)+4Var(\lambda_2|\lambda_1+\lambda_2=0)+20Cov(\lambda_1,\lambda_2|\lambda_1+\lambda_2=0)=\\=25*\frac{2}{9}+4*\frac{2}{9}-20*\frac{2}{9}=2\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}Var(-3\lambda_1+\lambda_2|\lambda_1+\lambda_2=0)=9Var(\lambda_1|\lambda_1+\lambda_2=0)+Var(\lambda_2|\lambda_1+\lambda_2=0)-6Cov(\lambda_1,\lambda_2|\lambda_1+\lambda_2=0)=\\=9*\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+6*\frac{2}{9}=\frac{32}{9}\end{gathered}$$

Таким образом имеем:

$$Corr(5\lambda_1+2\lambda_2,\lambda_2-3\lambda_1|\lambda_1+\lambda_2=0)=\frac{-\frac{8}{3}}{\sqrt{2*\frac{32}{9}}}=-1$$

Показать решение