Сходимость по вероятности для экспоненциального распределения

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Теория Вероятностей (/Subjects/Details?id=1)
Тема
Сходимости (/Topics/Details?id=13)
Раздел
Сходимость по вероятности (/SubTopics/Details?id=69)
Дата публикации
21.11.2019
Дата последней правки
09.10.2021
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг
★★⯪

Условие

Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \cdots$ такую, что $X_n \sim EXP\left(\lambda(n)\right)$. Проверьте следующие сходимости по вероятности:

1. $X_n \overset{p}{\to} X$ при $\lambda(n) = n$ и $X = 0$.

2. $X_n \overset{p}{\to} X$ при $\lambda(n) = \frac{n+10}{5n+100}$ и $X = 5$.

3. $X_n \overset{p}{\to} X$ при $\lambda(n) = \frac{n+10}{5n+100}$ и $X \sim EXP(5)$.

Решение

1. Покажем, что сходимость по вероятности соблюдается:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} e^{-n\epsilon} = 0$$

Также, соответствующий результат можно было бы получить при помощи неравенства Маркова, так как:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\epsilon} = 0$$

2. **В разработке**

Для начала найдем функцию распределения $|X_n - 5|$ при $x \geq 0$:

$$F_{|X_n-5|}(x) = P(|X_n - 5| \leq x) = P(-x \leq X_n - 5 \leq x) = P(5 - x \leq X_n \leq 5 + x) = \\ = F_{X_n}(5 + x) - F_{X_n}(5 - x)$$

Отсюда следует, что:

$$F_{|X_n-5|}(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ e^{-\frac{n+10}{5n+100}(5-x)} - e^{-\frac{n+10}{5n+100}(5+x)}, \text{ при } x \in [0, 5] \\ 1 - e^{-\frac{5n+10}{n+100}(5+x)}, \text{ при } x > 5 \end{cases}$$

Дифференцируя получаем функцию плотности:

$$f_{|X_n-5|}(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ \frac{5n+10}{n+100}\left(e^{-\frac{5n+10}{n+100}(5-x)} + e^{-\frac{5n+10}{n+100}(5+x)}\right), \text{ при } x \in [0, 5] \\ \frac{5n+10}{n+100} e^{-\frac{5n+10}{n+100}(5+x)}, \text{ при } x > 5 \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание:

$$E(|X_n - 5|) = \int_0^5 \frac{5n + 10}{n + 100} x \left(e^{-\frac{5n+10}{n+100}(5-x)} + e^{-\frac{5n+10}{n+100}(5+x)}\right) dx + \int_5^\infty x \frac{5n + 10}{n + 100} e^{-\frac{5n+10}{n+100}(5+x)} dx = \\ =$$

Воспользуемся неравенством Маркова:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 5| > \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - 5| \geq \epsilon) \leq \frac{E(X_n)}{\epsilon}$$

Показать решение

Пожалуйста, войдите или зарегистрируйтесь, чтобы оценивать задачи, добавлять их в избранные и совершать некоторые другие, дополнительные действия.