Зависимые выборки и их выборочные средние

Опубликовал
sobodv
Автор или источник
sobopedia
Предмет
Математическая Статистика (/Subjects/Details?id=5)
Тема
Основные понятия математической статистики (/Topics/Details?id=26)
Раздел
Выборочные моменты (/SubTopics/Details?id=99)
Дата публикации
23.01.2020
Дата последней правки
24.01.2020
Последний вносивший правки
sobodv
Рейтинг

Условие

Рассмотрим две выборки $X = (X_1, \cdots, X_5)$ и $Y = (Y_1, \cdots, Y_5)$ из стандартного нормального распределения, причем $Corr(X_i, Y_j) = \begin{cases} 0.5, \text{если } i = j \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$ и совместное распределение компонент X и Y является многомерным нормальны.

1. Найдите распределение выборочного среднего выборки X. С какой вероятностью $\overline{X}$ превысит $\sqrt{5}$?

2. Найдите совместное распределение выборочных средних выборок X и Y и определите, с какой вероятностью выборочное среднее X окажется в два раза больше выборочного среднего Y.

3. Найдите распределение выборочного среднего выборки X при условии, что реализация выборочного среднего выборки Y равняется 1. С какой вероятностью при данном условии выборочное среднее X превышает 1?

Решение

1. Поскольку выборочное среднее X представляет собой линейную комбинацию нормальных случайных величин, то:

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_5}{5}\right) = \left(\frac{E(X_1) + \cdots + E(X_5)}{5}\right) = \frac{0 + 0 + 0 + 0 + 0}{5} = 0$$

$$Var(\overline{X}) = Var\left(\frac{X_1+\dots+X_5}{5}\right) = \frac{Var(X_1)+\dots+Var(X_5)}{25} = \frac{1+1+1+1+1}{25} = \frac{1}{5}$$

$$\overline{X} = \frac{X_1+\dots+X_5}{5} \sim \mathcal{N}\left(E\left(0,\frac{1}{5}\right)\right)$$

Отсюда следует, что:

$$P(\overline{X} > \sqrt{5}) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{5}-0}{\sqrt{\frac{1}{5}}}\right) = 1 - \Phi(5) \approx 0$$

2. Найдем совместное распределение $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, которое, в данном случае, будет многомерным нормальным:

$$Cov(X_1,Y_1) = \dots = Cov(X_5,Y_5) = Corr(X_1,Y_1)\sqrt{Var(X_1)Var(Y_1)} = 0.5$$

$$Cov(\overline{X},\overline{Y}) = Cov\left(\frac{X_1+\dots+X_5}{5},\frac{Y_1+\dots+Y_5}{5}\right) = \frac{1}{25}(Cov(X_1,Y_1)+Cov(X_5,Y_5)) = \frac{1}{25}(5*0.5) = 0.1$$

$$\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\0.1 & 0.2\end{bmatrix}\right)$$

Наконец, вычислим искомую вероятность:

$$P(\overline{X} > 2\overline{Y}) = P(2\overline{Y} - \overline{X} \leq 0)$$

Найдем распределение:

$$E(2\overline{Y} - \overline{X}) = 0$$

Этой информации в данном случае нам достаточно, в итоге получаем:

$$P(2\overline{Y} - \overline{X} \leq 0) = \Phi\left(\frac{0-0}{\sqrt{Var(2\overline{Y} - \overline{X})}}\right) = 0.5$$

3. Очевидно, что:

$$E(\overline{X}|\overline{Y} = 1) = 0 + \frac{0.1}{0.2}(1-0) = 0.5$$

$$Var(\overline{X}|\overline{Y} = 1) = 0.2 - \frac{0.1^2}{0.2} = 0.15$$

$$\left(\overline{X}|\overline{Y} = 1\right) \sim \mathcal{N}(0.5, 0.15)$$

В итоге получаем:

$$P\left(\overline{X} \geq 1|\overline{Y} = 1\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1-0.5}{\sqrt{0.15}}\right) \approx 1 - \Phi\left(1.29\right) \approx 0.09852533$$

Показать решение