UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Neodređeni integral – prvi deo

Lekcija 01

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo obraditi opšte metode za integraciju i to su: Metod linearnosti, Metod smene, Metod parcijalne integracije

U ovoj lekciji će biti uveden integralni račun realne funkcije jedne realne promenljive. Ovaj račun će biti uveden preko osnovnih pojmova u vezi sa neodređenom integracijom, pravila i osobina neodređenog integrala, tablice neodređenih integral osnovnih funkcija, kao i opštih i specifičnih metoda za integraciju. U ovoj lekciji ćemo obraditi opšte metode za integraciju i to su:

- Metod linearnosti,
- Metod smene i
- Metod parcijalne integracije,

dok će specifične metode biti obrađene u narednoj lekciji.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Poglavlje 1

Primitivna funkcija i neodređeni integral

DEFINICIJA PRIMITIVNA FUNKCIJA

Funkcija $F'(x) = f(x)$ se naziva primitivna funkcija za funkciju $f(x)$.

Može se postaviti pitanje da li postoji suprotna operacija operaciji diferenciranja realnih funkcija jedne realne promenljive, tj. ako je data funkcija $y = f(x)$ može li se odrediti funkcija $F(x)$ takva da je $F'(x) = f(x)$ (ili što je ekvivalentno sa $dF = f(x)dx$)? O tome govorimo u nastavku.

Definicija. Neka je data funkcija $f(x)$. Tada njena primitivna funkcija podrazumeva funkciju $F(x)$, za koju je $F'(x) = f(x)$.

Primer. Za funkciju $f(x) = 3x^2$ primitivna funkcija je $F(x) = x^3$, jer je $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Ako posmatramo funkcije iz prethodnog primera koje se dobijaju iz funkcije $F(x) = x^3$ dodadavanjem konstante, tj.

$$x^3 - 2,\ x^3 + \sqrt{2}, x^3 + 12, x^3 + \pi\ \ldots$$

ili u opštem slučaju u obliku $x^3 + c,\ \ c \in \mathbb{R}$ vidimo da i u ovom slučaju važi $(x^3 + c)' = 3x^2 = f(x)$. Dakle, funkcija $x^3 + c$ je takođe primitivna funkcija funkcije $f(x)$.

Generalno, ako je funkcija $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, tada je i $F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ takođe njena primitivna funkcija, jer je $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$. Dakle, ako funkcija ima jednu primitivnu funkciju, tada postoji i beskonačan skup ovih funkcija.

Pitanje koje se prirodno nameće je da li skup $\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ sadrži sve primitivne funkcije za $f(x)$ ili postoje još neke primitivne funkcije za $f(x)$ van ovog skupa. O tome govori naredni stav.

Stav. Ako su $F(x)$ i $G(x)$ dve proizvoljne primitivne funkcije za $f(x)$ na nekom intervalu $[a, b]$, tada se one razlikuju za konstantu.

PRIMER

Primitivna funkcija nula funkcije na nekom intervalu (a, b) je konstatna funkcija.

Ako je $F'(x) = 0 = f(x)$ na nekom intervalu (a, b), tada je $F(x)$ konstantna funkcija.

Rešenje. Neka je $x \in (a, b)$ fiksirana vrednost i izaberimo Δx tako da važi $x + \Delta x \in (a, b)$. Prema Lagranževom stavu (iz diferencijalnog računa) postoji $\xi \in (x, x + \Delta x)$ tako da je

$$F(x + \Delta x) - F(x) = F'(\xi)\,\Delta\, x.$$

Kako je $F'(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$, tada je $F'(\xi) = 0$. Odavde dobijamo da je

$$F(x + \Delta x) - F(x) = 0, \quad \text{tj.} \quad F(x + \Delta x) = F(x),$$

za svako Δx. Dakle, vrednost funkcije za bilo koje $x + \Delta x \in (a, b)$ je jednako vrednosti funkcije u fiksiranoj tački $x \in (a, b)$ što znači da je posmatrana funkcija konstatna.

EGZISTENCIJA NEODREĐENOG INTEGRALA

Funkcija koja je neprekidna na nekom intervalu ima primitivnu funkciju.

U opštem slučaju, za datu funkciju $y = f(x)$ ne mora postojati nijedna njena primitivna funkcija. Dakle, postavlja se pitanje pod kojim uslovima će ova funkcija imati primitivnu funkciju. Odgovor na ovo pitanje daje naredni stav. U njemu je naveden dovoljan uslov da neka funkcija ima svoju primitivnu funkciju.

Stav. Svaka neprekidna funkcija $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ ima primitivnu funkciju.

Napomena. Primitivna funkcija neke funkcije mora biti diferencijabilna na posmatranom intervalu, a samim tim i neprekidna, na osnovu stava koji smo dali u vezi sa odnosom diferencijabilnosti i neprekidnosti.

Primer. Dokazati da funkcija $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \leq 0 \\ 2, & \text{za } x > 0 \end{cases}$ nema primitivnu funkciju.

Dokaz. Data funkcija ima u tački $x = 0$ prekid prve vrste (pokazati za vežbu). Pretpostavimo da ova funkcija ima primitivnu funkciju $F(x)$.

Tada, za $x < 0$ imamo da je $F'(x) = f(x) = 1$, tj. $F(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$.

S druge strane, za $x > 0$ imamo da je $F'(x) = f(x) = 2$, tj. $F(x) = 2x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Dakle, primitivna funkcija je oblika $F(x) = \begin{cases} x + c, & \text{za } x < 0 \\ 2x + c_1, & \text{za } x > 0 \end{cases}$. Kao što smo rekli primitivna funkcija je neprekidna. To znači da u tački $x = 0$ mora važiti $F(0+) = F(0-) = F(0)$. Kako je

$$F(0+) = \lim_{x \to 0+} (2x + c_1) = c_1 \;\text{ i }\; F(0-) = \lim_{x \to 0-} (x + c) = c,$$

tada je $F(0) = c = c_1$.

To dalje znači da primitivna funkcija ima oblik

$$F(x) = \begin{cases} x + c, & \text{za } x \le 0 \\ 2x + c_1, & \text{za } x > 0 \end{cases}.$$

Ova funkcija nije diferencijabilna u tački $x = 0$ (pokazati za vežbu), tako da funkcija $F(x)$ ne može biti primitivna funkcija za funkciju $f(x)$. $\square$

Napomena. Neke prekidne funkcije imaju svoje primitivne funkcije, a neke ne(kao što je to funkcija iz prethodnog primera).

NEODREĐENI INTEGRAL

Za uočenu neprekidnu funkciju $y = f(x)$ skup njenih primitivnih funkcija se naziva neodređeni integral.

Definicija. Za uočenu neprekidnu funkciju $y = f(x)$ skup njenih primitivnih funkcija je

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R},\ F - \text{jedna uočena primitivna funkcija za } f\},$$

ili kraće zapisano

$$F(x) + c, \quad c \in R.$$

Prethodno dati skup se naziva neodređeni integral funkcije f i označava sa

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Napomena. Uvedena oznaka će biti objekat preko koga će se operativno uvesti integralni račun - to je lakši način nego da je pomenuti račun uvoden preko prethodno pomenutog skupa primitivnih funkcija. U prethodnoj formuli, oznaka $\int$, predstavlja operaciju integracije funkcije. Veličina koja stoji pod ovom operacijom naziva se tzv. ''podintegralni izraz'', a funkcija u njemu ''podintegralna funkcija''. Proces nalaženja skupa primitivnih funkcija za neku funkciju f naziva se integracija (u smislu neodređenog integrala).

Proces integracije je suprotan procesu diferencijacije (što će kasnije biti dokazano), a da bi se on ostvario potrebno je generisati metodologiju za njegovo sprovođenje.

Suštinska razlika u procesima diferenciranja i integracije jeste u tome što se prilikom diferenciranja dobija jedinstven rezultat, a prilikom integracije, čitava klasa od beskonačno mnogo funkcija koje se međusobno razlikuju do na konstantu c.

U nastavku biće ukazano na odnos između diferenciranja i integracije u smislu neodređenog integrala.

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA NEODREĐENOG INTEGRALA

Neodređeni integral predstavlja familiju krivih koje se dobijaju za različite vrednosti proizvoljne konstante c. One se nazivaju integralne krive linije.

Označimo sa y neodređeni intergral funkcije $f(x)$, tj. stavimo

$$y = \int f(x)dx.$$

Tada je $y = F(x) + c$. Odavde se vidi da neodređeni integral geometrijski predstavlja familiju krivih koje se dobijaju za različite vrednosti proizvoljne konstante c. Ove krive se nazivaju integralne krive linije.

Ako se od ovih krivih traži samo ona koja prolazi kroz tačku (a, b), tada za nju važi

$$b = F(a) + c,$$

tj. za traženu krivu integraciona konstanta ima vrednost $c = b - F(a)$. Stoga, jednačina tražene integralne krive ima oblik $y = F(x) - F(a) + b$.

U ovom slučaju je se radi o tome da se iz skupa primitivnih funkcija odredi ona koja je jednaka b, za $x = a$. Ovaj problem se naziva Košijev problem.

OSOBINE NEODREĐENOG INTEGRALA

Integraljenje i diferenciranje funkcije u ovom redosledu su svojevrsni suprotni procesi.

$\mathbf{1}^\circ$ Neodređeni integral od diferencijala funkcije $F(x)$ jednak je $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
Zaista, važi da je

$$\int \big(dF(x)\big) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$\mathbf{2}^\circ$ Diferencijal neodređenog integrala jednak je podintegralnom izrazu, a izvod neodređenog integrala jednak je podintegralnoj funkciji.
Zaista, iz definicije neodređenog integrala je $\int f(x)dx = F(x) + c$ imamo da je

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = (F(x) + c)'dx = F'(x)dx = f(x)dx,$$

i

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x).$$

Prema prethodnom može se videti da su i u ovom redosledu diferenciranje i integracija svojevrsno suprotni procesi i da dx nije slučajno sastavni deo oznake za integral.

Napomena. Iako su diferenciranje i integracija suprotni procesi, integracija u odnosu na diferenciranje ima mali hendikep (zbog moći svojih metoda koje je sprovode). Naime, postoje slučajevi kod kojih rezultat integracije postoji, ali se ne može odrediti poznatim metodama (eliptički integrali o kojima ovde nećemo govoriti).

TABLICA INTEGRALA

Neodređenom integracijom neke funkcije, primenom određene metologije ili više njih, polazni integral se svodi na jedan tablični integral ili na zbir više tabličnih integrala.

Za sprovođenje procesa integracije polazna činjenica je tablica integrala, koja se zadaje na osnovu tablice diferencijala za osnovne slučajeve integracije (čitajući tablicu diferencijala unazad uz primenu prethodnog izvođenja).

1. $\displaystyle\int 0dx = c,$
2. $\displaystyle\int dx = x + c,$
3. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1;$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$
5. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\};$
6. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c;$
7. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + c;$
8. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + c;$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + c, \end{cases}$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arcctg} x + c, \end{cases}$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a > 0;$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a} + c;$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{bx}{a}\right) + c;$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c, a > 0.$

Napomena. Integrali pod rednim brojevima 13, 14, 15 i 16 nisu tablični integrali, ali ćemo ih prilikom rešavanja zadataka koristiti kao takve. U ovom i narednim predavanjima biće pokazano da oni zaista i važe.

OPŠTE METODE ZA INTEGRACIJU

U opšte metode za integraciju spadaju metod linearnosti, metod parcijalne integracije i metod smene promenljivih.

Složeniji integrali, sa kojima ćemo se sretati u nastavku, rešavaju se korišćenjem određene metodologije ili više njih tako da se polazni integral svode na zbir više tabličnih integrala. Te metodologije za sprovođenje integracije se dele na opšte i specifične metode. Opšte metode su one koje se mogu uvek primenjivati, a specifične su vezane za određene tipove podintegralnih funkcija.

U ovom lekciji ćemo govoriti o opštim metodama za integraciju u koje spadaju:

- Metod linearnosti,
- Metod smene promenljivih i
- Metod parcijalne integracije.

O njima govorimo u nastavku.

Poglavlje 2

Metod linearnosti

OSOBINA LINEARNOSTI

Metoda linearnosti je jedna od osnovnih osobina neodređenih integrala.

Stav. Neka su date funkcije $y = f(x), x \in A \subseteq \mathbb{R}$ i $y = g(x), x \in A \subseteq \mathbb{R}$, koje su neprekidne na skupu A. Takođe, neka su date konstante $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\int \Big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) \Big) dx = \alpha \cdot \int f(x) dx + \beta \cdot \int g(x) dx. \qquad (*)$$

Prethodno data formula predstavlja metod linearnosti odnosna osobina linearnosti neodređenog integrala. Ona u sebi sadrži zapravo dve osobine neodređenih integrala. Naime, sledeća osobina

$$\int \Big(f(x) + g(x) \Big) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \qquad (**)$$

koja se naziva osobina aditivnosti neodređenog integrala.

S druge strane, osobina

$$\int \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \cdot \int f(x) dx, \qquad (***)$$

se naziva osobina homogenosti neodređenog integrala. Osobine (**) i (***) se zajedno zadaju formulom (*).

Osobina linearnost se može uopštiti i na proizovoljan broj funkcija. Tada važi

$$\int \Big(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x) \Big) dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx + \ldots$$
$$+ k_n \int f_n(x) dx,$$

gde su $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$i $n \in \mathbb{N}$.

Napomena. Studenti treba da obrate pažnju na sledeće

$$\int f(x)\cdot g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx,$$

kao i

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}.$$

Metod linearnosti se koristi za pojednostavljivanje složenijih zadataka. To će biti ilustrovano sledećim primerom.

PRIMER – 1. DEO

Primena metode linearnosti za razne tipove podintegralnih funkcija.

$$\int \frac{2}{x^3}dx = 2\cdot\int \frac{1}{x^3}dx = 2\cdot\int x^{-3}dx = 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{x^2} + c;$$

$$\int\left(5x^3 - 4x^2 - 3x + \frac{5}{x}\right)dx = 5\int x^3dx - 4\int x^2dx - 3\int xdx + 5\int\frac{dx}{x} = \frac{5x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5\ln|x| + c;$$

$$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt[4]{x^3}\,dx = \int\left(x^{\frac{3}{4}} - \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^2}\right)dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx - \int x^{-\frac{5}{4}}dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} + c = \frac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + c;$$

$$\int\frac{10x^8+3}{x^4}dx = 10\int\frac{x^8}{x^4}dx + 3\int\frac{dx}{x^4} = 10\int x^4dx + 3\int x^{-4}dx = 2x^5 - \frac{1}{x^3} + c;$$

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)dx}{(1+x^2)x^2} + \int \frac{-x^2dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C.$$

PRIMER - 2. DEO

Primena metode linearnosti.

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}dx = \int \frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C.$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$\int 2^x \cdot 5^{2x} dx = \int (2 \cdot 5^2)^x dx = \int 75^x dx = \frac{75^x}{\ln 75} + C.$$

$$\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx = \int \left(\frac{2^x}{10^x} + \frac{5^x}{10^x}\right)dx = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx + \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C.$$

Poglavlje 3

Integracija metodom smene

UVOĐENJE SMENE U NEODREĐENI INTEGRAL

Ova metoda se često koristi u složenijim zadacima da bi se posmatrani zadatak pojednostavio ili sveo na tablični integral. Bazira se na formuli koja proističe iz Stava o smeni promenljive.

Neka je $x = \varphi(t)$ monotona funkcija koja je diferencijabilna u intervalu (α, β) i neka ona preslikava taj interval na interval (a, b) u kome je definisana funkcija $f(x)$. Pretpostavimo da je $\varphi(t) \neq 0$ i da je $t = \varphi^{-1}(x)$ inverzna funkcija funkcije $x = \varphi(t)$. Tada važi sledeći stav.

Stav. Ako je $\Phi(t)$ primitivna funkcija funkcije $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, tada je funkcija $F(x) = \Phi(\varphi^{-1}(x))$ primitivna za funkciju $f(x)$.

Dokaz. Uočimo da je $\frac{dF}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Takođe, iz $t = \varphi^{-1}(x)$, imamo da je $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$, kao izvod inverzne funkcije. Tada je

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$$

Ako je poznato

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \Phi(t) + c,$$

tada je

$$\int f(x)dx = \Phi(\overline{\varphi}(x)) + c \text{ ili } \int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

Integral na desnoj strani znaka jednakosti poslednje relacije je poznat, te zamenjujući u njemu $t = \overline{\varphi}(x)$ nalazimo integral s leve strane. Desna strana ove relacije dobije se iz leve strane zamenom da je $x = \varphi(t)$ i $dx = \varphi'(t)dt$. $\square$

Naime, formulom

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

dat je Stav o smeni promenljive za neodređeni integral. Ova formula se primenjuje ili samostalno ili u kombinaciji sa nekim drugim metodama, da bi po određenom planu, integracija koja sledi bila jednostavnija (bliža tabličnom integralu, tj. svedena na njega).

Nekad se u istom zadatku ova formula mora više puta primenjivati sa istim ili različitim smenama promenljive, samostalno ili u kombinaciji sa drugim metodama. Ako se pretpostavi da se posle prve primene prethodne formule dobije tablični integral po promenljivoj t , tada je

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt=\Phi(t)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Kako je $x=\varphi(t)$ monotona funkcija na (α,β), tada postoji $t=\varphi^{-1}(x)$ (gde je φ^{-1} inverzna funkcija za $\varphi(t)$), za $x\in(a,b)$. Na kraju, dobijamo da je $F(x)=\Phi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$, čime je primena metode okončana.

SKORO TABLIČNI INTEGRALI

Najjednostavniji klase funkcija za integraciju primenom metode smene. Jednostavnom smenom se ovi integrali prevode u tablične, pa se nazivaju skoro tablični integrali.

Sada ćemo govoriti o nekim klasama integrala koje se mogu rešavati metodom smene. Integrali oblika:

$$\int e^{ax+b}dx;$$

$$\int\sin(ax+b)dx;$$

$$\int\cos(ax+b)dx;$$

$$\int(ax+b)^n dx;$$

$$\int\frac{dx}{ax+b};$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2(ax+b)};$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2(ax+b)}.$$

gde su $a,b,n\in\mathbb{R},a\neq0,n\neq-1,$jednostavnom smenom $ax+b=t,dx=\frac{1}{a}dt,$ svode se na odgovarajuće tablične integrale.

PRIMER 1

Primeri uvođenja smene za prethodno date tipove funkcija.

Rešimo sledeće integrale:

a) $\int (5-2x)^9 dx;$ b) $\int \frac{dy}{3y+2};$ c) $\int e^{-\frac{1}{2}x-4} dx.$

Rešenje.

a)

$$\int (5-2x)^9 dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 5-2x=t \\ dx=-\frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int t^9 \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^9 dt = -\frac{t^{10}}{20} + c = -\frac{(5-2x)^{10}}{20} + c;$$

b)

$$\int \frac{dy}{3y+2} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 3y+2=t \\ dy=\frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln|3y+2| + c;$$

c)

$$\int e^{-\frac{1}{2}x-4} dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ -\frac{1}{2}x-4=t \\ dx=-2dt \end{bmatrix} = -2\int e^t dt = -2e^t + c = -2e^{-\frac{1}{2}x-4} + c.$$

FORMULE ZA SKORO TABLIČNE INTEGRALE

Ovako date skoro tablične integrale bi trebalo usvojiti, kao tablične integrale, jer se tako ubrzava rad.

S obzirom na jednostavnost rešavanja ovakvih oblika integrala, bilo bi korisno usvojiti sledeću tablicu ($a, b, n \in \mathbb{R},\ n \neq -1$):

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c;$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{\mathrm{tg}(ax+b)}{a} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{\mathrm{ctg}(ax+b)}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{\ln(ax+b)}{a} + c$$

Napomena. Uopšteno govoreći, važi da ako je $\int f(x)dx = F(x) + C$, tada $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

INTEGRACIJA NEKIH TIPOVA IRACIONALNIH FUNKCIJA METODOM SMENE

Integracija funkcija koje se svodi na tablični integral čija je primtivna funkcija $y = \arcsin x$.

U nastavku ćemo rešiti nekoliko integrala koji se jednostavnom smenom svode na tablični integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$$

Svakako, može se izvesti sledeća formula

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{bx}{a}\right) + c,$$

koji se nalazi u tablici integrala zbog njegovog čestog korišćenja.

Specijalno, za $b = 1$ iz prethodne formule imamo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

Naredne primere rešavamo bez primene pomenutih formula, kako bismo mogli da uvežbamo postupak rešavanja.

PRIMER 2

Primer integracije funkcija koje se svodi na tablični integral čije je rešenje funkcija $y = \arcsin x$.

Rešimo sledeće integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(1-\frac{16x^2}{9}\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4x}{3}\right)^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \frac{4x}{3}=t \\ dx=\frac{3}{4}dt \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{4}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\arcsin t + c = \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{4x}{3}\right) + c;$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^4}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{3-(x^2)^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2=t \\ xdx=\frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{3-t^2}} =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{3\left(1-\frac{t^2}{3}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \frac{t}{\sqrt{3}}=u \\ dt=\sqrt{3}du \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin u + c = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c =$$

$$\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) + c;$$

$$\int \frac{3^x dx}{\sqrt{25-9^x}} = \int \frac{3^x dx}{\sqrt{25-3^{2x}}} \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 3^x=t \\ 3^x dx=\frac{dt}{\ln 3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{\sqrt{25-t^2}} =$$

$$\frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{\sqrt{25\left(1-\frac{t^2}{25}\right)}} = \frac{1}{5\ln 3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{5}\right)^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \frac{t}{5}=u \\ dt=5du \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{5\ln 3}\int \frac{5du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\ln 3}\arcsin u + c = \frac{1}{\ln 3}\arcsin\left(\frac{t}{5}\right) + c = \frac{1}{\ln 3}\arcsin(\frac{3^x}{5}) + c;$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\cos 2x}} = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-2\sin^2 x}} = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-(\sqrt{2}\sin x)^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \sqrt{2}\sin x=t \\ \cos x dx=\frac{dt}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin t + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x) + c.$$

INTEGRACIJA NEKIH TIPOVA RACIONALNIH FUNKCIJA METODOM SMENE

Integracija funkcija koje se svodi na tablični integral čija je primtivna funkcija $y = \operatorname{arctg} x$.

U nastavku ćemo rešiti nekoliko integrala koji se jednostavnom smenom svode na tablični integral

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$$

Može se izvesti sledeća formula

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a} + c,$$

koji je dat kao tablični integral zbog njegovog čestog korišćenja.

Specijalno, za $b = 1$ iz prethodne formule imamo:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c.$$

Naredne primere rešavamo bez primene pomenutih formula, kako bismo mogli da uvežbamo postupak rešavanja.

PRIMER 3

Primer integracije funkcija koje se svodi na tablični integral čije je rešenje funkcija $y = \operatorname{arctg} x$.

Rešimo sledeće integrale:
a)

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \begin{bmatrix} \text{smena :} \\ \frac{x}{2} = t \\ dx = 2dt \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}$$
$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c;$$

b)

$$\int \frac{dx}{25+16x^2} = \int \frac{dx}{25\left(1+\frac{16x^2}{25}\right)} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{4x}{5}\right)^2} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \frac{4x}{5} = t \\ dx = \frac{5}{4}dt \end{bmatrix} = \frac{1}{25}$$

$$\int \frac{\frac{5}{4}dt}{1+t^2} = \frac{1}{20}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{20}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{20}\operatorname{arctg}\left(\frac{4x}{5}\right) + c;$$

c)

$$\int \frac{x^2dx}{16+9x^6} = \int \frac{x^2dx}{16+9(x^3)^2} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^3 = t \\ x^2dx = \frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{16+9t^2}$$

. Zadatak se dalje rešava kao pod b).

d)

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg}(\ln x) + c.$$

INTEGRALI RAZNIH KLASE FUNKCIJA ZAJEDNO SA SVOJOM IZVODNOM FUNKCIJOM

Prilikom rešavanja integrala o ovome treba voditi računa, jer se može desiti da se integral ne može rešiti na drugi način ako se ne uoči ova osobina.

U nastavku navodimo integrale oblika:

$$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c;$$

$$\int f'(x)\cdot \sin[f(x)]dx = -\cos[f(x)] + c;$$

$$\int f'(x)\cdot \cos[f(x)]dx = \sin[f(x)] + c;$$

$$\int f'(x)\cdot [f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c;$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{\cos^2[f(x)]} = \operatorname{tg}[f(x)] + c;$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sin^2[f(x)]} = -\operatorname{ctg}[f(x)] + c;$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{[f(x)]} = \ln[f(x)] + c,$$

koji se rešavaju smenom $f(x) = t,\ f'(x)dx = dt$, $n \in \mathbb{R}, n \neq -1.$

PRIMER 4

Primeri rešavanja integrala pod kojima se nalaze stepena funkcija zajedno sa svojom izvodnom funkcijom.

Primer. Posmatrajmo postupak rešavanja sledećih integrala:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 1+x^2 = t \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c;$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2+x-3 = t \\ (2x+1)dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln \mid x^2+x-3 \mid + c;$$

$$\int \frac{6x+5}{2x^2+1}dx = 6\int \frac{x}{2x^2+1}dx + 5\int \frac{dx}{2x^2+1} = \text{ završiti za vežbu;}$$

$$\int \frac{x^2dx}{x^3+1} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^3+1 = t \\ x^2dx = \frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + c = 13\ln \mid x^3+1| + c;$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2+1 = t \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + c =$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + c;$$

$$\int \frac{xdx}{x^4+1} = \int \frac{xdx}{(x^2)^2+1} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2 = t \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$$
$$+ c = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}(x^2) + c.$$

PRIMER 5

Primeri rešavanja integrala pod kojima se nalazi iracionalna, trigonometrijska ili eksponencijalna funkcija zajedno sa svojom izvodnom funkcijom.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-2}dt = -\frac{t^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{t} + c$$
$$= \frac{1}{\cos x} + c;$$

$$\int (6x+12)\cos(x^2+4x)dx = 3\int (2x+4)\cos(x^2+4x)dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2+4x = t \\ (2x+4)dx = dt \end{bmatrix} =$$
$$= 3\int \cos t dt = 3(-\sin t) + c = -3\sin(2x+4) + c;$$

$$\int \frac{e^x}{5+e^x}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ e^x + 5 = t \\ e^x dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln(5+e^x) + c;$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \end{bmatrix} = 2\int e^t dt = 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}} + c;$$

VIDEO KLIP 1

Dodatni primeri sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 6

Primeri rešavanja integrala pod kojima se nalazi logaritamska funkcija zajedno sa svojom izvodnom funkcijom.

Rešiti sledeće integrale:
a)

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 1+\ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|1+\ln x| + c;$$

b)

$$\int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t\ln t} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \ln t = u \\ \frac{dt}{t} = du \end{bmatrix} =$$
$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\ln t| + c = \ln|\ln(\ln x)| + c;$$

Napomena. Zadatak je moguće rešiti i uvođenjem smene $\ln(\ln x) = t$.

c)

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ \ln x = t^3 \\ \frac{dx}{x} = 3t^2dt \end{bmatrix} = \int 3t^3dt = \frac{3}{4}t^4 + c = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{\ln x})^4 + c.$$

Napomena. U poslednjoj jednakosti smo iz smene $\ln x = t^3$, iskoristili da je $t = \sqrt[3]{\ln x}$.

PRIMER 7

Primeri rešavanja integrala pod kojima se nalazi iracionalna funkcija zajedno sa svojom izvodnom funkcijom.

$$\int \frac{(1+x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 1-x^2 = t^2 \\ xdx = -tdt \end{bmatrix} =$$
$$= \arcsin x - \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2}} = \arcsin x - \int dt = \arcsin x - t + c =$$
$$= \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c.$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{4+x^5}} = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ 4+x^5 = t^2 \\ x^4dx = \frac{2}{5}tdt \end{bmatrix} = \frac{2}{5}\int \frac{tdt}{t} = \frac{2}{5}t + c = \frac{2}{5}\sqrt{4+x^5} + c.$$

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2+1 = t^2 \\ xdx = tdt \end{bmatrix} = \int t\sqrt{t^2}dt = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3}$$
$$+ c;$$

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}dx = \int x\cdot x^2\sqrt{x^2+1}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2+1=t^2 \Rightarrow x^2=t^2-1 \\ xdx=tdt \end{bmatrix} =$$
$$= \int (t^2-1)\sqrt{t^2}\,tdt = \int (t^4-t^2)dt = \frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+c =$$
$$= \frac{(\sqrt{x^2+1})^5}{5} - \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3} + c.$$

VIDEO KLIP 2

Youtube snimak

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

NEKI INTEGRALI IRACIONALNIH FUNKCIJA KOJI SE SVODE NA TABLIČNE

Svođenje na tablični integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c.$

Izračunati sledeći integral

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx.$$

Rešenje. Najpre ćemo dati integral transformisati na sledeći način

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-27}}.$$

Sada, imamo da je

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx = \begin{bmatrix} \text{smena}: \\ x^2+6x-27=u^2 \\ (2x+6)dx=2udu \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2udu}{\sqrt{u^2}} = u+c_1 =$$
$$= \sqrt{x^2+6x-27}+c_1.$$

S druge strane, kako je $x^2+6x-27=(x+3)^2-36,$ imamo da je

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-36}} = \begin{bmatrix} \text{smena :} \\ x+3=t \\ dx=tdt \end{bmatrix} =$$
$$= 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-36}} = 2\ln\left|t+\sqrt{t^2-36}\right| =$$
$$= 2\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2-36}\right| + c_2.$$

Napomena. Korišćenjem integrala pod rednim brojem 16 iz tablice integrala smo dobili da je

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-36}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-36}\right|.$$

Sada, ukupno dobijamo da je

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx = \sqrt{x^2+6x-27} + 2\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2-36}\right| + C,$$

gde je $C = c_1 + c_2$.

VIDEO KLIP 3

Dodatni primeri sa Youtube-a - metod smene

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Metod parcijalne integracije

FORMULA ZA PARCIJALNU INTEGRACIJU

Metod parcijalne integracije se dobija iz pravila za izvod prozvoda dve funkcije.

Metod parcijalne integracije daje delimičan odnos između integraljenja i množenja dve funkcije (samim tim i deljenja). Neka su date dve funkcije $y = u(x)$ i $y = v(x)$, $x \in A \subseteq R$, koje su diferencijabilne sa neprekidnim funkcijama na A. Za funkciju $h(x) = u(x) \cdot v(x),$ za $x \in A$ je

$$dh(x) = d\big(u(x) \cdot v(x)\big) = v(x) \cdot du + u(x) \cdot dv,$$

pa je

$$d(u(x) \cdot v(x)) - v(x)du = u(x)dv, \ x \in A.$$

Ako integralimo prethodni izraz dobijamo

$$\int (d(u(x) \cdot v(x)) - v(x)du) = \int u(x)dv.$$

Primenom metode linearnosti za neodređeni integral imamo da je

$$\int u(x)dv = \int d\big(u(x) \cdot v(x)\big) - \int v(x)du.$$

Prema tome, važi da je

$$\int u(x)dv = u(x) \cdot v(x) + c_1 - \int v(x)du,$$

odnosno

$$\int u(x)dv = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)du,$$

gde se c_1 pridružuje konstanti c_2 iz integrala na desnoj strani poslednje formule i čine konstantu ukupnog rešenja c ($c = c_1 + c_2, c \in \mathbb{R}$). Uzima se da je $c = 0$. Poslednja formula naziva se formula parcijalne integracije, koja se može napisati u obliku

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Poslednja formula se najčešće koristi pri rešavanju zadataka.

KADA PRIMENITI PARCIJALNU INTEGRACIJU?

Primena parcijalna integracija može pojednostavljivati polazni integral pažljivim odabirom funkcija za u i v', a može ga komplikovati ako je odabir pogrešan.

Primena metode parcijalne integracije naročito se preporučuje u sledećim slučajevima:

● kada se integrali proizvod jedne polinomske funkcije i jedne funkcije eksponencijalnog tipa, za u se uzima polinomska funkcija, a za v' se uzima funkcija eksponencijalnog tipa;

● kada se integrali proizvod jedne polinomske funkcije i jedne trigonometrijskog tipa, za u se uzima funkcija polinomskog tipa, a za v' funkcija trigonometrijskog tipa;

● kada se integrali proizvod jedne funkcije trigonometrijskog tipa i jedne funkcije eksponencijalnog tipa, tada je potpuno svejedno šta se uzima za u, a šta za v', ali se do kraja principijelno mora primenjivati izabrana varijanta;

● kada integralimo proizvod jedne polinomske funkcije i jedne funkcije logaritamskog tipa, za u uzećemo funkciju logaritamskog tipa, a za v' funkciju polinomskog tipa;

● kada integralimo proizvod jedne polinomske funkcije i jedne inverzne trigonometrijske funkcije, za u uzećemo inverznu trigonometrijsku funkciju, a za v' funkciju polinomskog tipa.

Napomena. Primenom parcijalne integracije se polazni integral, pažljivim odabirom funkcija za u i v', pojednostvaljuje. S druge strane, polazni integral se može iskomplikovati ako je ovaj odabir pogrešan. U mnogim zadacima, parcijalna integracija se primenjuje nekoliko puta uzastopno, dok se početni problem ne svede na tablični integral (uz pomoć drugih metoda ili samostalni), a u prva dva slučaja ona se primenjuje onoliko puta koliki je vodeći stepen polinoma pod integralom. U trećem slučaju se specifično primenjuje, i to najmanje dva puta.

Napomena. Metod parcijalne integracije se može, svakako, koristiti i kod drugih tipova podintegralnih funkcija, a ne samo kod navedenih. U nastavku je i naveden primer kada se ova metoda može koristiti kod određenih tipova integracije iracionalnih funkcija.

PRIMER 1

Primena metoda parcijalne integracije.

Rešimo sledeći integral:

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx.$$

Rešenje. Označimo sa I dati integral. Tada je

$$I = \begin{bmatrix} \text{parc. integracija:} & \\ u=\sqrt{x^2+4}, & dv=dx \\ du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx, & v=x \end{bmatrix} = x\cdot\sqrt{x^2+4}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx =$$

$$= x\cdot\sqrt{x^2+4}-\int\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}\,dx+\int\frac{4\,dx}{\sqrt{x^2+4}} =$$

$$= x\cdot\sqrt{x^2+4}-\overbrace{\int\sqrt{x^2+4}\,dx}^{I}+\ln|x+\sqrt{x^2+4}|.$$

Sada imamo da je

$$I = x\cdot\sqrt{x^2+4}-I+\ln|x+\sqrt{x^2+4}|,$$

tj.

$$2I = x\cdot\sqrt{x^2+4}+\ln|x+\sqrt{x^2+4}|.$$

Konačno je

$$I=\frac{1}{2}\Big(x\cdot\sqrt{x^2+4}+\ln|x+\sqrt{x^2+4}|\Big)+c.$$

Napomena. Rezultat

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c.$$

je dat u tablici integrala.

AUTORSKI VIDEO KLIP 1

Parcijalna integracija iracionalne funkcije.

Video klip

PRIMER 2

Rešavanje integrala čija podintegralna funkcija logaritamska funkcija.

Rešiti integral

$$\int \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)dx.$$

Rešenje. Zadatak rešavamo primenom parcijalne integracije. Tada imamo da je

$$\int \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)dx = \begin{vmatrix} \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)=u, & dx=dv \\ \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}=du, & x=v. \end{vmatrix} =$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right) - \int \frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}} \begin{vmatrix} smena: \ 4+x^2=t \\ 2xdx=dt \end{vmatrix} =$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right) - \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dx = x\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right) - \sqrt{4+x^2}+C.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP 2

Parcijalna integracija logaritamske funkcije.

Video klip

PRIMER 3

Rešavanje integrala čija podintegralna funkcija predstavlja proizvod eksponencijalne i trigonometrijske funkcije.

Rešimo sledeći integral

$$\int e^x \cdot \sin x dx.$$

Rešenje. Označimo sa I dati integral. Neka je $u(x)=\sin x$ i $v'(x)dx = e^x dx$. Tada je $u'(x) = \cos x dx$ i $v(x) = \int e^x dx = e^x$, za $c=0$. Tada dobijamo

$$I = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx.$$

Na poslednji integral primenimo još jednom parcijanu integraciju. Tu je $u(x)=\cos x$ i $v'(x)dx = e^x dx$. Tada je $u'(x) = -\sin x dx$ i $v(x) = \int e^x dx = e^x$, za $c=0$. Sada dobijamo

$$I = e^x\sin x - \left(e^x\cdot\cos x + \int \sin x e^x dx\right) = e^x(\sin x - \cos x) - \underbrace{\int e^x\cdot\sin x dx}_{I},$$

pa je

$$2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

i konačno

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Integracija pomoću rekurzivnih formula

REKURZIVNA FORMULA

Rekurzivna formula omogućava da se integral I_n svede na jednostavniji integral, a u nekim slučajevima i da se dođe do vrednosti ovog integrala.

Integracija pomoću rekurzivnih relacija nije poseban metod u integraciji u teoriji neodređene integracije, ali se može u nekim slučajevima primeniti.

Ako podintegralni izraz u neodređenom integralu (osim integracione konstante) zavisi od prirodnog broja n, tada ga često označavamo sa I_n. Slično, integrali označeni sa $I_{n-1}, I_{n-2}, \ldots$ predstavljaju integrale istog oblika, kao i integral I_n koji se iz njega dobijaju, zamenjujući n tim redom sa $n-1, n-2, \ldots$ Ako je moguće integral I_n izraziti preko integrala $I_{n-1}, I_{n-2}, \ldots$ do odgovarajućeg integrala sa najmanjim indeksom, dolazi se do relacije koja se naziva rekuzivna formula. Rekurzivna formula omogućava da se integral I_n svede na jednostavniji, a u nekim slučajevima i da se dođe do vrednosti ovog integrala.

Primer. Izračunati

$$I_n = \int \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Rešenje. Rekurzivnu formulu dobićemo pomoću parcijalne integarcije

$$\begin{aligned}
I_n = \int \sin^n x dx &= \left| \begin{matrix} \sin^{n-1} x = u & \sin x dx \\ du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.
\end{aligned}$$

Dakle, za $n \geq 2$ je

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x,$$

pri čemu je

$$I_1 = -\cos x + C, \quad I_0 = x + C.$$

Značaj ove formule je u tome što sada možemo izračunati bilo koji integral ovog tipa. Na primer,

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 - \frac{1}{2} \cos x \sin x = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cos x \sin x + c.$$

Na sličan način možemo odrediti $I_3, I_4, \ldots,$ pri čemu za određivanje ovih integrala, kao i integrala I_2 moramo znati I_1 i I_0 koji se nazivaju početne vrednosti, jer se preko njih određuju ostali integrali ovakvog oblika.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Integracija pomoću rekutzivnih formula.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Neodređeni integral – drugi deo

Lekcija 02

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo obraditi dve metode za integraciju racionalnih funkcija, koje spadaju u tzv. specifične metode, jer se mogu primeniti samo na ovu klasu funkcija.

Osim opštih metoda za integraciju, veoma su značajne specifične metode za integraciju. Ove metode se primenjuju kada se pod integralom nađe određena klasa funkcija. Na ovom predavanju ćemo govoriti o tome kako se vrši integracija racionalnih funkcija (racionalna funkcija je funkcija koja je predstavljena u obliku količnika dva polinoma). Svakako, integracija nekih racionalnih funkcija se može sprovesti i nekim drugim metodama (na primer metod smene).

Integracija racionalne funkcije se zasniva na metodama koje ih rastavljaju na zbirove tzv. elementarnih racionalnih funkcija. Primenom metode linearnosti se integracija racionalne funkcije prevodi u zbir određenog broja integrala po dobijenim elementarnim racionalnim funkcijama. Takvih racionalnih funkcija ima više tipova. Dalji rad se zasniva na poznavanju integracije ovih tipova.

Dakle, da bismo mogli da integralimo neku racionalnu funkciju potrebno je, najpre, da takvu funkciju razložimo na određeni broj elementarnih racionalnih funkcija. Za razlaganje ili dekompoziciju racionalne funkcije na elementarne racionalne funkcije se koristi:

Metod neodređenih koeficijenata i

metod Ostrogradskog za racionalne funkcije.

Ove dve metode su međusobno ravnopravne. Međutim, od slučaja do slučaja, nekada je bolje primeniti prvu, a nekada drugu metodu.

Nakon izvršene dekompozicije potrebno je znati integraliti dobijene klase elementarnih racionalnih funkcija.

Mi ćemo u izlaganju krenuti obrnutim redosledom. Dakle, prvo ćemo ukazati na to kako sa integrale sve klase elementarnih racionalnih funkcija koje se mogu dobiti primenom neke od pomenutih metoda, a nakon toga ukazati na to kako se ove metode primenjuju.

Napomena. Generalno, u racionalne funkcije spadaju i polinomi - oni se još nazivaju celi racionalni polinomi, ali o njima ovde nećemo govoriti, jer se oni rešavaju primenom tabličnih integrala, o čemu smo govorili na prethodnom času.

ELEMENTARNE RACIONALNE FUNKCIJE

Elementarne racionalne funkcije su osnova za primenu Metode neodređenih koeficijenata i Metode Ostrogradskog.

Racionalne funkcije oblika

$$\frac{A}{(x-d)^j},\ j\in\mathbb{N} \quad \text{i} \quad \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k},\ k\in\mathbb{N}$$

se nazivaju elementarne racionalne funkcije , gde rešenja polinoma $ax^2+bx+c,$kod druge od njih, nisu realna (tj. rešenja su konjugovano – kompleksna). Dakle, od interesa je upoznati se sa postupcima za rešavanje integrala oblika

$$\int \frac{A\,dx}{(x-d)^j},\ j\in\mathbb{N} \quad \text{i} \quad \int \frac{(Mx+N)\,dx}{(ax^2+bx+c)^k},\ k\in\mathbb{N}.$$

Mi ćemo ovde govoriti i o rešavanju integrala

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(ax^2+bx+c)^k},\ k\in\mathbb{N}.$$

u slučajevima kada kvadratni trinom ax^2+bx+cima i realna rešenja. Cilj nam je da ukažemo na postupke za rešavanje što većeg broja racionalnih funkcije. Za rešavanje mnogih od tako dobijenih integrala će se primenjivati opšte metode za rešavanje neodređenog integrala. Ovde ćemo govoriti o tome kako se integrale racionalne funkcije sledećih oblika:

1. $f(x)=\frac{A}{x-a},\ A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, a\in\mathbb{R},$
2. $f(x)=\frac{A}{(x-a)^n},\ A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, a\in\mathbb{R}, n=2,3,4,\dots$
3. $f(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c},\ a\neq 0,$
4. $f(x)=\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c},\ M\neq 0, a\neq 0,$
5. $f(x)=\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n},\ a\neq 0,\ n=2,3,4,\dots$
6. $f(x)=\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n},\ M\neq 0, a\neq 0, n=2,3,4,\dots$

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Poglavlje 1

Integracija racionalnih funkcija oblika 1,2 i 3

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 1 I 2

Inegracija ovih oblika se zasniva na metodi smene - ovo su skoro tablični integrali o kojima smo govorili u prethodnoj lekciji.

1. U ovom slučaju važi da je

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a| + c,\ \ A \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ a \in \mathbb{R}.$$

2. U ovom slučaju važi da je

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = \int A(x-a)^{-n}\,dx = \frac{A}{-n+1}(x-a)^{-n+1} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c,$$
$$A \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ a \in \mathbb{R},\ n = 2,3,4,\ldots.$$

Napomena. O integraciji ovih funkcija smo govorili na prethodnom predavanju (skoro tablični integrali).

Na integraciju oblika 1, odnosno oblika 2 se svode integrali oblika

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx \ \text{i} \int \frac{ax+b}{(cx+d)^n}dx,$$

, gde su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, uvođenjem smene $cx + d = t$, odakle je $x = \frac{t-d}{c}$, tj. $dx = \frac{dt}{c}$.

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 3

U zavisnosti od rešenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ moguća su tri slučaja u rešavanju ovog integrala.

Da bismo integralili funkciju $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}, a \neq 0,$ potrebno je transformisati kvadratni trinom u njenom imeniocu. Važi da je

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Tada je

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}} = \left|\begin{array}{c}\text{smena}:\\ x+\frac{b}{2a}=t\\ dx=dt\end{array}\right| = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.\ (*)$$

Sada razlikujemo tri slučaja.

1. Ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2}<0$, tada možemo staviti da je $\frac{4ac-b^2}{4a}=-\alpha^2$, pa važi $\int\frac{dt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}} = \int\frac{dt}{t^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\ln\left|\frac{t-\alpha}{t+\alpha}\right|+c$. (Poslednje važi na osnovu tabličnog integrala pod brojem 13). Dobijeno treba zameniti u integral (*) i nakon toga vratiti smenu, na argument x.

2. Ako je Ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$, tada možemo staviti da je $\frac{4ac-b^2}{4a}=\alpha^2$, pa važi $\int\frac{dt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}} = \int\frac{dt}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}+c$.(Poslednje važi na osnovu tabličnog integrala pod brojem 14). Dobijeno treba zameniti u integral (*) i nakon toga vratiti smenu, na argument x.

3. Ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0$, tada je $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{at}+c = -\frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)}+c = -\frac{2}{2ax+b}+c.$

NAPOMENA

Postojanje tri slučaja za integraciju racionalne funkcije oblika 3 je direktno povezano sa prirodnom rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$.

Rekli smo da prilikom integracije racionalnih funkcija oblika 3, razlikujemo tri slučaja. Postojanje ovih slučajeva je direktno povezano sa prirodnom rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$.Naime

1. ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2}<0$, tada je $4ac-b^2<0$ (jer je $4a^2$ uvek pozitivno), tj. $b^2-4ac>0$. Veličina b^2-4ac se naziva diskriminanta pomenute kvadratne jednačine i kada je ona pozitivna tada kvadratna jednačina ima realna i različita rešenja x_1 i x_2 . Tada je $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, pa se u ovom slučaju za integraciju može primeniti i Metod

neodređenih koeficijenata. Tada se dobijaju dva integrala racionalne funkcije oblika 1. O ovome će biti više reči kasnije na predavanjima, kao i na vežbama.

2. Ako je Ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$, tada je $4ac-b^2>0$, tj. $b^2-4ac<0$. Kako je diskriminanta pomenute kvadratne jednačine negativna, tada ona ima konjugovano-kompleksna rešenja.

3. Ako je $\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0$, tada je $b^2-4ac=0$. Kako je diskriminanta pomenute kvadratne jednačine jednaka nuli, tada ona ima realna i jednaka rešenja.

PRIMER

Integracija racionalnih funkcija oblika 3

Izračunati:

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-6x-7}$, b) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+4}$, c) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x+1}$.

Rešenje.

a) $$\int\frac{dx}{x^2-6x-7}$$
$$=\int\frac{dx}{x^2-6x+9-16}$$
$$=\int\frac{dx}{(x-3)^2-16}\left|\begin{array}{c}\text{smena}:\\ x-3=t\\ dx=dt\end{array}\right|$$
$$=\int\frac{dt}{t^2-4^2}=\frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right|+c=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right|+c.$$

b) $$\int\frac{dx}{x^2+4x+4}=\int\frac{dx}{(x+2)^2}\left|\begin{array}{c}\text{smena}:\\ x+2=t\\ dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+c=-\frac{1}{(x+2)}+c.$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

$$= \int \frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \left| \begin{array}{c} \text{smena}: \\ x-\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{3}}+c.$$

Napomena. Za rešavanje integrala pod a) je iskoriščen integral pod rednim brojem 13 iz spiska tabličnih integrala. Takođe, za rešavanje integrala pod c) je iskoriščen integral pod rednim brojem 14 iz spiska tabličnih integrala.

Napomena. Uočimo da u integralu pod a) kvadratna jednačina $x^2-6x-7=0$ ima realna i različita rešenja $x_1=-1$ i $x_2=7$. U integralu pod b) kvadratna jednačina $x^2+4x+4=0$ ima rešenja koja su realna i jednaka $x_1=x_2=-2$, dok u slučaju pod c) kvadratna jednačina $x^2+x+1=0$ nema realna rešenja. Integral pod a) ćemo kasnije ponovo rešiti, ali primenom Metode neodređenih koeficijenata.

Poglavlje 2

Integracija racionalnih funkcija oblika 4

POSTUPAK ZA INTEGRACIJU

Rešavanje ovog integrala se svodi na integraciju racionalnih funkcija oblika 3 i još jednog integrala koji se rešava metodom smene.

Da bismo integralili funkciju $f(x)=\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}, M\neq 0, a\neq 0,$ potrebno je, kao i kod integracije prethodnog oblika, kvadratni trinom u imeniocu rastaviti na isti način i nakon toga uvesti smenu $t=x+\frac{b}{2a}$. Tada je

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{(Mx+N)\,dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{M\left(t+\frac{b}{2a}\right)+N}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\,dx=$$
$$=\frac{M}{2a}\int\frac{2tdt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}+\frac{2aN-Mb}{2a^2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\,dx.$$

Imamo da je

$$\frac{M}{2a}\int\frac{2tdt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=\left|\begin{array}{c}\text{smena}:\\ t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=u\\ 2tdt=du\end{array}\right|=\frac{M}{2a}\int\frac{du}{u}=\frac{M}{2a}\ln|u|+c=\frac{M}{2a}\ln|t^2$$
$$+\frac{4ac-b^2}{4a^2}|+c=\frac{M}{2a}\ln\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right|+c.$$

Kako se rešava integral $\frac{2aN-Mb}{2a^2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\,dx$ već smo pokazali u okviru prethodnog oblika.

Napomena. U slučaju da kvadratna jednačina $ax^2+bx+c=0$ ima realna i različita rešenja x_1 i x_2, pa važi da je $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Tada se na integraciju racionalne funkcije oblika 4 može primeniti Metod neodređenih koeficijenata. O tome će biti više reči kasnije na predavanjima, kao i na vežbama.

PRIMER 1. DEO

Integracija racionalnih funkcija oblika 4

Izračunati

$$\int \frac{3x-5}{2x^2-8x-7}dx.$$

Rešenje. Imamo da je

$$\int \frac{3x-5}{2x^2-8x-7}dx = \int \frac{3x-5}{2\left(x^2-4x-\frac{7}{2}\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x-5}{\left(x^2-4x+4-\frac{15}{2}\right)}dx = \frac{1}{2} \int \frac{3x-5}{\left[(x-2)^2-\frac{15}{2}\right]}dx.$$

U poslednji integal uvodimo smenu $x-2=t$, tj. $x=t+2$ i $dx=dt$ i dobijamo

$$\frac{1}{2}\int \frac{3x-5}{\left[(x-2)^2-\frac{15}{2}\right]}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3(t+2)-5}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3t-1}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)}dt = \frac{3}{4} \int \frac{2tdt}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)}.$$

Sada imamo

$$\frac{3}{4}\int \frac{2tdt}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)} \left| \begin{array}{c} \text{smena}: \\ t^2-\frac{15}{2}=u \\ 2tdt=du \end{array} \right| = \frac{3}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{4}\ln|u|+c_1 = \frac{3}{4}\ln\left|t^2-\frac{15}{2}\right|+c_1$$
$$= \frac{3}{4}\ln\left|(x-2)^2-\frac{15}{2}\right|+c_1$$

i

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2-\frac{15}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{15}{2}}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{15}{2}}}{t+\sqrt{\frac{15}{2}}}\right|+c_2 = \frac{1}{2\sqrt{30}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{\frac{15}{2}}}{x-2+\sqrt{\frac{15}{2}}}\right|+c_2.$$

PRIMER 2. DEO

Rezultat integracije i napomene.

Konačno dobijamo da je

$$\int \frac{3x-5}{2x^2-8x-7}dx = \frac{3}{4}\ln\left|(x-2)^2 - \frac{15}{2}\right| + \frac{1}{2\sqrt{30}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{\frac{15}{2}}}{x-2+\sqrt{\frac{15}{2}}}\right| + c, \quad \text{gde je} \;\; c = c_1 + c_2.$$

Napomena. Prilikom integracije racionalnih funkcija oblika 4, može se koristiti i sledeća tehnika: odredi se izvod kvadratnog trinoma u imeniocu. U našem primeru je $(2x^2-8x-7)' = 4x-8$. Zatim se brojilac transformiše tako da sadrži ovaj izvodni polinom. U našem slučaju je $3x-5 = \frac{3}{4}(4x-8)+1$. Primenom Metode linearnosti, tada važi da je

$$\int \frac{3x-5}{2x^2-8x-7}dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x-8)+1}{2x^2-8x-7}dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x-8}{2x^2-8x-7}dx + \int \frac{dx}{2x^2-8x-7}.$$

Prvi od dobijenih integrala se rešava uvođenjem smene $2x^2-8x-7=t$ (primere kako se rešavaju ovakvi integrali smo imali na prethodnom predavanju). Drugi integral predstavlja integraciju racionalne funkcije oblika 3.

Napomena. Prilikom integracije racionalnih funkcija oblika 4, nekada se možete desiti da je polinom u brojiocu, izvod polinoma u imeniocu. Svakako, ovo bi trebalo prvo proveravati, prilikom rešavanja ovih integrala, jer se time mnogo brže i jednostavnije određuje primitivna funkcija racionalne funkcije oblika 4.

Poglavlje 3

Integracija racionalnih funkcija oblika 5 i 6

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 5

Integral ovog oblika se rešeava primenom metode rekurzivnih relacija.

Polazimo od integrala $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, n \in \mathbb{N}_0,$ koji se rešava metodom rekurentnih formula. Važi

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n},$$

pa je

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} J, \text{ pri čemu je } J = \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Primenjujući metod parcijalne integracije dobijamo

$$J = \left| \begin{array}{ll} x = u & \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n} = dv \\ dx = du & v = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} \end{array} \right| = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} =$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Dakle, za $n \geq 2$ važi

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)} I_{n-1},$$

odnosno

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Pri tom je

$$I_1 = \frac{1}{a} \text{arctg}\, \frac{x}{a} + C, \quad I_0 = x + C.$$

Na sličan način se može dobiti rekurentna relacija za integral oblika $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$.

Konačno, integral oblika $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, se transformacijom imenioca na ranije opisani način, može svesti na neki od prethodno pomenuta dva integrala.

PRIMER

Inegracija racionalne funkcije oblika 5

Izračunati

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Rešenje. Primenimo prethodno dobijeni rekurzivni obrazac

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}},$$

pri čemu je $n=3$ i $a^2=1$. Tada je

$$I_3 = \frac{3}{4}\cdot I_2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Prema istom rekurzivnom obrascu imamo da je

$$I_2 = \frac{1}{2}\cdot I_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1},$$

gde je $I_1 = \operatorname{arctg} x + c$. Tada imamo da je

$$I_2 = \frac{1}{2}\cdot(\operatorname{arctg} x + c) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + c_1,\ (c_1 = \frac{1}{2}c).$$

Konačno, dobijamo da je

$$I_3 = \frac{3}{4}\cdot(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + c_1) + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1}$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + c_2,\ (c_2 = \frac{3}{4}c_1).$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Integracija racionalnih funkcija primenom rekurzivnih formula.

Video klip

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 6

Integracija ovih racionalnih funkcija se svodi na oblik 5, kao i jedan integral koji se rešava metod smene.

Integral oblika $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,\;\; M \neq 0, a \neq 0,\;\; n = 2,3,4,\dots$ se transformiše na sledeći način

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{1}{a^n}\int \frac{Mx+N}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]^n}\,dx = \left|\begin{array}{c}\text{smena}: \\ x+\frac{b}{2a}=t \\ dx=dt\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{a^n}\int \frac{M\left(t-\frac{b}{2a}\right)+N}{\left(t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2a^n}\int \frac{2t\,dt}{\left(t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n} + \frac{2aN-bM}{2a^n}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n}.$$

Prvi od poslednja dva integrala se rešava uvođenjem smene $t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=u, 2t\,dt=du$. Drugi od ovih integrala je oblika 5.

Poglavlje 4

Metod neodređenih koeficijenata

UVOD

Svaka racionalna funkcija se može predstaviti kao zbir više elementarnih racionalnih funkcija.

Do sada smo govorili o tome kako se pojedini oblici racionalnih funkcija integrale. Sada ćemo uvesti metodologiju kako se proizvoljna racionalna funkcija integrali, korišćenjem postupaka za integraciju ranije pomenutih 6 oblika racionalnih funkcija.

Svaka racionalna funkcija predstavlja količnik dva polinoma, tj. može se zapisati u obliku

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \tag{*}$$

gde je $P_m(x)$ polinom stepena $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, a $Q_n(x)$ je polinom stepena $n\in\mathbb{N}$.

Kao što smo već rekli, racionalne funkcije oblika

$$\frac{A}{(x-d)^j},\ j\in\mathbb{N}\quad \text{i}\quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^k},\ k\in\mathbb{N}$$

se nazivaju elementarne racionalne funkcije, gde rešenja polinoma ax^2+bx+c, kod druge od njih, nisu realna (tj. rešenja su konjugovano – kompleksna).
Svaka racionalna funkcija oblika (*) se može napisati kao zbir više elementarnih racionalnih funkcija. Metode pomoću kojih se može racionalna funkcija predstaviti u obliku zbira elementarnih racionalnih funkcija su Metod neodređenih koeficijenata i Metod Ostrogradskog za integraciju racionalnih funckija. Najpre ćemo govoriti o prvoj od ovih metoda.

Pre nego što se primeni ova metoda potrebno je proveriti da li je $m\geq n$, gde su m i n stepeni polinoma posmatrane racionalne funkcije (*) u brojiocu i imeniocu tim redom. U slučaju da je ovo tačno tada treba, najpre, izvršiti deljenje polinoma iz brojioca racionalne funkcije (*), polinomom iz njenog imenioca. Kao količnik se dobija zbir jednog polinom i racionalne funkcije koja je i dalje oblika (*), ali kod koje važi da je $n>m$.

Poznato je da se polinom $Q_n(x)$ može rastaviti na činioce na sledeći način

$$Q_n(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_p)^{\alpha_p}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q},$$

gde su $a_1,\ldots,a_p$ realni koreni polinoma $Q_n(x)$, a koreni kvadratnih trinoma $x^2+b_1x+c_1,\ldots,x^2+b_qx+c_q$ su konjugovano-kompleksni brojevi i važi

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_p + 2(\beta_1 + \ldots + \beta_q) = n.$$

RASTAVLJANJE RACIONALNE FUNKCIJE NA ELEMENTARNE RACIONALNE FUNKCIJE

Rastavljanje neke racionalne funkcije na elementarne racionalne funkcije se svodi na određivanje nepoznatih koeficijenata, tako da dekompozicija te racionalne funkcije bude tačna.

Za rastavljanje racionalne funkcije $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ za $n > m$, metodom neodređenih koeficijenata imamo da važi

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} \cdots \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} \cdots \frac{A_{p1}}{x-a_p} \cdots \frac{A_{p\alpha_p}}{(x-a_p)^{\alpha_p}} \cdots \frac{B_{11}+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}$$
$$\cdots \frac{B_{1\beta_1}+C_{1\beta_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} \cdots \frac{B_{q1}+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q} \cdots \frac{B_{q\beta_q}+C_{q\beta_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}}.$$

Prethodno data formula je poznati rezultat iz Teorije polinoma i nećemo ga ovde dokazivati, ali ćemo ga koristiti. Praktična primena ove metode se, zapravo, svodi na određivanje svih nepoznatih (neodređenih) koeficijenata, koje treba odrediti tako da prethodna dekompozicija racionalne funkcije $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ za $n > m$, na elementarne racionalne funkcije bude tačna. To se radi tako što se prethodna relacija pomnoži polinom $Q_n(x)$, a nakon toga primenjujemo Stav o jednakosti dva polinoma (dva polinoma su jednaka ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki).

Nakon određivanja ovih nepoznatih koeficijenata, integral

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx,$$

za $n > m$, se može računati, primenom metode linearnosti, kao zbir od više integrala elementarnih racionalnih funkcija, za koje smo pokazali kako se rešavaju.

PRIMER 1

Integracija racionalne funkcije oblika 3 Metodom neodređenih koeficijenata, u slučaju kada je to moguće.

Izračunati

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x - 7}.$$

Rešenje. Kao što smo videli kvadratni trinom se može zapisati $x^2-6x-7=(x-7)(x+1)$. Tada važi da je

$$\frac{1}{x^2-6x-7}=\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x+1}.$$

Prethodnu relaciju ćemo pomnožiti sa x^2-6x-7 i dobijamo da je

$$1=A(x+1)+B(x-7) \quad \text{tj.} \quad 0\cdot x+1=(A+B)\cdot x+A-7B.$$

Iz jednakosti polinoma zaključujemo da mora važiti $A+B=0$ i $A-7B=1$. Odavde dobijamo da je $A=\frac{1}{8}$ i $B=-\frac{1}{8}$. Tada dobijamo da je

$$\frac{1}{x^2-6x-7}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-7}-\frac{1}{8}\cdot\frac{B}{x+1},$$

odnosno

$$\int\frac{1}{x^2-6x-7}=\frac{1}{8}\int\frac{1}{x-7}-\frac{1}{8}\int\frac{B}{x+1}=\frac{1}{8}\ln|x-7|-\frac{1}{8}\ln|x+1|+c$$
$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right|+c.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP 1

Integracija racionalnih funkcija oblika 3.

Video klip

PRIMER 2 – 1. DEO

Metod neodređenih koeficijenata – potrebno je deljenje polinoma.

Rešiti sledeći integral:

$$\int\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}dx;$$

Rešenje. Stepen brojioca podintegralne funkcije veći je od stepena imenioca, pa se prvo moraju izvršiti sledeće transformacije:

$$\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}=\frac{x^3-2x^2-15x+2x^2+13x-35}{x^2-2x-15}=$$

$$=\frac{x\left(x^2-2x-15\right)+2x^2+13x-35}{x^2-2x-15}=$$

$$=x+\frac{2x^2+13x-35}{x^2-2x-15}=$$

$$=x+2+\frac{17x-5}{x^2-2x-15}.$$

Napomenimo da prethodno izvedene transformacije zapravo predstavljaju deljenje polinoma $x^3-2x-35$ polinomom $x^2-2x-15$.

Dakle, važi da je

$$\int\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}dx=\int(x+2)dx+\int\frac{17x-5}{x^2-2x-15}dx.$$

Integral $\int\frac{17x-5}{x^2-2x-15}dx$ predstavlja integraciju racionalne funkcije oblika 4. Primetimo da kvadratna jednačina $x^2-2x-15=0$ ima realna i različita rešenja

$$x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}\ \text{ tj. }\ x_1=5\vee x_2=-3,$$

tako da kvadratni trinom $x^2-2x-15$ možemo rastaviti na činioce na sledeći način $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$. Kao što smo rekli u jednom od prethodnih napomena u ovom slučaju se ovaj integral može rešavati i primenom Metode neodređenih koeficijenata, što ćemo mi u nastavku i uraditi. Studentima ostavljamo za vežbu da ovaj integral reše postupkom uvdenim kod integracije racionalnih funkcija oblika 4.

PRIMER 2 – 2. DEO

Određivanje nepoznatih koeficijenata i rastavljanje racionalne funkcije na zbir više elementarnih.

Dalje, kako je $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$ imamo

$\frac{17x-5}{x^2-2x-15}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3}.$

Proširivanjem prethodne jednačine sa $x^2-2x-15$ dobijamo da je:

$17x-5=A(x+3)+B(x-5),$

tj.

$17x-5=(A+B)x+3A-5B,$

odakle se, korišćenjem osobine dva polinoma da su jednaki ako su im koeficijenti uz odgovarajuće članove jednaki, dobija sledeći sistem jednačina:

$$\mathrm{x}: \quad \mathrm{A} + \mathrm{B} = 17$$
$$\mathrm{x}^0: \quad 3\mathrm{A} - 5\mathrm{B} = -5$$

pa je $\mathrm{A} = 10, \quad \mathrm{B} = 7$. Dakle važi:

$$\frac{17\mathrm{x} - 5}{\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} - 15} = \frac{10}{\mathrm{x} - 5} + \frac{7}{\mathrm{x} + 3}$$

tj.

$$\frac{\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x} - 35}{\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} - 15} = \mathrm{x} + 2 + \frac{10}{\mathrm{x} - 5} + \frac{7}{\mathrm{x} + 3}$$

Prema tome je

$$\int \frac{\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x} - 35}{\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} - 15}\mathrm{dx} = \int (\mathrm{x} + 2)\mathrm{dx} + \int \frac{10}{\mathrm{x} - 5}\mathrm{dx} + \int \frac{7}{\mathrm{x} + 3}\mathrm{dx},$$

tj.

$$\int \frac{\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x} - 35}{\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} - 15}\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{x}^2}{2} + 2\mathrm{x} + 10\ln|\mathrm{x} - 5| + 7\ln|\mathrm{x} + 3| + \mathrm{c}.$$

Napomena.U postupku poslednje integracije primenjen je Metod linearnosti.

AUTORSKI VIDEO KLIP 2

Integracija racionalne funkcije metodom neodređenih koeficijenata.

Video klip

PRIMER 3 - 1. DEO

Racionalna integracija

Izračunati:

$$\int \frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)^2} dx.$$

Rešenje. Podintegralnu funkciju ćemo prikazati na sledeći način

$$\frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2},$$

gde je

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{2}, \quad E = \frac{1}{4}, \quad F = -\frac{1}{4}.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx = \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &\quad + \frac{1}{8}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{8(x^2+1)} - \frac{1}{4}J. \end{aligned}$$

PRIMER 3 - 2. DEO

Rešavanje integrala $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

NapomenaO rešavanje integrala J govorili smo u primeru u okviru integracije racionalnih funkcija oblika 5, u prethodnom objektu učenja. Međutim, izvođenje rekuretnih relacija za odgovarajuće integrale je dugotrajan proces. Stoga, od interesa je znati "prečice" za rešavanje ovih oblika integrala.Jednom od njihsmo rešili ovaj integral. O još jednom načinu za rešavanje ovog integrala pogledati deo sa zadacima za vežbu.

Uveli smo oznaku

$$J = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Rešimo ovaj integral

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{xdx}{(x^2+1)^2} \left| \begin{array}{ll} x = u & \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = dv \\ dx = du & -\frac{1}{2(x^2+1)} = \end{array} \right| = \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

Konačno dobijamo da je

$$I = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x -$$
$$- \frac{1}{8(x^2+1)} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + C.$$

VIDEO KLIP

Integracija racionalnih funkcija metodom dekompozicije.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Metod Ostrogradskog za integraciju racionalnih funkcija

UVOD

Ostrogradski je dao postupak za dekompoziciju racionalne funkcije na elementarne racionalne funkcije.

Metod Ostrogradskog se koristi za integraciju racionalnih funkcija

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

gde je polinom $P_m(x)$ stepena $m \in \mathbb{N}$, a polinom $Q_n(x)$ je stepena $n \in \mathbb{N}$. Ova metoda se primenjuje kada je $n > m$. U suprotnom prvo je potrebno podeliti ova dva polinoma. Kao količnik se dobija zbir jednog polinom i racionalne funkcije kod koje važi da je $n > m$. Dakle, u nastavku ćemo pretpostavljati da je $n > m$. Takođe, pretpostavićemo da se polinom $Q_n(x)$ može rastaviti na činioce na sledeći način

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_p)^{\alpha_p} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}.$$

gde su $a_1, \ldots, a_p$ realni koreni polinoma $Q_n(x)$, a koreni kvadratnih trinoma $x^2+b_1x+c_1, \ldots, x^2+b_qx+c_q$ su konjugovano-kompleksni brojevi i važi

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_p + 2(\beta_1 + \ldots + \beta_q) = n.$$

METOD OSTROGRADSKOG

Metod Ostrogradskog se preporučuje za primenu u situaciji kada polinomu imeniocu racionalne funkcije ima višestruke nule.

Za integraciju racionalne funkcije $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, za $n > m$, Ostrogradski je dao sledeću formulu

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \frac{R_{m-1}(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1} \cdots (x-a_p)^{\alpha_p-1} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1} \cdots (x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q-1}} +$$

$$+ \int \frac{A_1dx}{x-a_1} + \ldots + \int \frac{A_pdx}{x-a_p} + \int \frac{(B_1x+C_1)dx}{x^2+b_1x+c_1} + \ldots + \int \frac{(B_qx+C_q)dx}{x^2+b_qx+c_q},$$

gde polinom $R_{m-1}(x)$ koji je $(m-1)$. stepena treba odrediti, tj. treba odrediti njegove koeficijente, kao i koeficijente $A_1,\dots,A_p,B_1,C_1,\dots,B_q,C_q$.Traženi koeficijenti se određuju, najpre, diferenciranjem prethodne formule, a zatim nakon sređivanja tako dobijenog izraza primenjujemo stav o jednakosti dva polinoma (dva polinoma su jednaka ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki).

Napomena. Metod neodređenih koeficijenata i Metod Ostrogradskog su ravnopravne metode u primeni, s tim što od slučaja do slučaja zavisi kojom od njih će integracija izvršiti brže. C

PRIMER - 1.DEO

Integracija racionalne funkcije primenom metode Ostrogradskog - postupak dekompozicije.

Rešiti sledeći integral

$$\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)^2}dx.$$

Rešenje. Na osnovu metode Ostrogradskog možemo pisati

$$\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)^2}dx = \frac{Ax+B}{(x-1)(x+2)} + \int \frac{Cdx}{x-1} + \int \frac{Ddx}{x+2}.$$

Diferenciranjem prethodne relacije dobijamo da je

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)^2} &= \frac{A(x^2+x-2)+(Ax+B)(2x+1)}{(x-1)^2(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2} = \\ &= \frac{3Ax^2+(2A+2B)x+B-2A}{(x-1)^2(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2}.\end{aligned}$$

Poslednji izraz, proširujemo sa $(x-1)^2(x+2)^2$ i dobijamo:

$$\begin{aligned}x^2+2x-1 &= 3Ax^2+(2A+2B)x+B-2A+C(x-1)(x+2)^2+D(x-1)^2(x+2) = \\ &= 3Ax^2+(2A+2B)x+B-2A+C(x^3+3x^2-4)+D(x^3-3x+2) = \\ &= (C+D)x^3+(3A+3C-3D)x^2+(2A+2B-3D)x-2A+B-4C+2D.\end{aligned}$$

PRIMER - 2.DEO

Integracija racionalne funkcije primenom metode Ostrogradskog – određivanje nepoznatih koeficijenata i integracija dobijenih elementarnih racionalnih funkcija.

Iz jednakosti ovih polinoma dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x^3 &: C + D = 0, \\ x^2 &: 3A + 3C - 3D = 1, \\ x &: 2A + 2B - 3D = 2, \\ x^0 &: -2A + B - 4C + 2D = -1 \end{aligned}$$

Njegovim rešavanjem nalazimo da je:

$$A = -\frac{1}{9}, \quad B = -\frac{5}{9}, \quad C = \frac{8}{27}, \quad D = -\frac{8}{27}.$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2(x+2)^2} dx &= \frac{-\frac{1}{9}x - \frac{5}{9}}{(x-1)(x+2)} + \frac{8}{27} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{8}{27} \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{9}x - \frac{5}{9}}{(x-1)(x+2)} + \frac{8}{27} \ln|x-1| - \frac{8}{27} \ln|x+2| + c = \\ &= \frac{-\frac{1}{9}x - \frac{5}{9}}{(x-1)(x+2)} + \frac{8}{27} \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + c. \end{aligned}$$

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Neodređeni integral – treći deo

Lekcija 03

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

Poglavlje 1

Integracija racionalnih funkcija po sin x i cosx

SMENA $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

Kada se vrši integracija racionalne funkcije čiji su argumenti po $\sin x$ ili po $\cos x$ (potpuno svejedno, može i mešovito) preporučuje se uvođenje smene $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

U slučaju da je podintegralna funkcija oblika $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, gde je $R(\sin x, \cos x)$ racionalna funkcija po $\sin x$ ili po $\cos x$, tada se prilikom integracije ovakvih funkcija preporučuje da se za polazni integral uvede smena $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Ova smena se koristi, jer se funkcije $\sin x$ i $\cos x$ mogu predstaviti preko funkcije $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Naime, važi da je

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Deljenje brojioca i imenioca u poslednjem razlomka sa $\cos^2\frac{x}{2}$, dobijamo da je

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Takođe, važi da je

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Deljenje brojioca i imenioca u poslednjem razlomka sa $\cos^2\frac{x}{2}$, dobijamo da je

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Takođe, iz smene $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ važi da je $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, odnosno $x = 2\operatorname{arctg} t$, odakle je $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Posle uvođenja ove smene, u polaznom obliku integrala vrši se zamena veličina dx, $\sin x$ i $\cos x$ prema datim formulama. Nakon uvođenja ove smene polazni integral se prevodi na integraciju racionalne funkcije po promenljivoj t, o čemu smo već govorili.

PRIMER 1

Rešavanje integrala uvođenjem smene $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

a)

$$\int\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+2t-1+t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t(t+1)}=$$
$$=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln|t|-\ln|1+t|+C=$$
$$=\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$$

b)

$$\int\frac{dx}{2+\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+t+1}=$$
$$=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)+C=$$
$$=2\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

c)

$$\int\frac{dx}{4\sin x-3\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{3t^2+8t-3}=$$
$$=\int\frac{2dt}{(3t-1)(t+3)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{3}{3t-1}-\frac{1}{t+3}\right)dt=$$
$$=\frac{1}{5}(\ln|3t-1|-\ln|t+3|)+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3t-1}{t+3}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}\right|+C.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP 1

Integracija trigonometrijskih funkcija primenom smene $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

Video klip

SMENA $\operatorname{tg} x = t$

U nekim slučajevima je zgodno umesto smene $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ uvesti smenu $\operatorname{tg} x = t$, zbog dobijanja jednostavniji racionalnih funkcija po t za integraljenje.

Posmatrajmo podintegralnu funkciju $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, koja je racionalna funkcija po $\sin x$ i $\cos x$ i uvedimo oznake $u = \sin x$ i $v = \cos x$. Ako za ovu funkciju važi

$$R(-u, -v) = R(u, v),$$

tada se za odgovarajući integral uvodi smena $\operatorname{tg} x = t$. U tom slučaju važi

$$\operatorname{tg} x = t \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Takođe, iz osnovnog trigonometrijskog identiteta $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dobijaju sledeće transformacije

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \;/\cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Odavde se tada dobija

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Posle uvođenja ove smene, u polaznom obliku zadatka vrši se zamena veličina dx, $\sin x$ i $\cos x$ prema datim formulama. Nakon uvođenja ove smene polazni integral se prevodi na integraciju racionalne funkcije po promenljivoj t.

Prethodno rečeno ilustrujemo jednim primerom.

SMENA $\sin x = t$ I $\cos x = t$

Uvođenje smena $\sin x = t$ i $\cos x = t$ u funkciju koja racionalna po $\sin x$ i $\cos x$.

Neka je i dalje $R(\sin x, \cos x)$ racionalna funkcija po $\sin x$ i $\cos x$ i neka je $u = \sin x$ i $v = \cos x$.

Smena $t = \sin x$.

Ako je $R(u, -v) = -R(u, v)$ tj. ako je data racionalna funkcija neparna po $\cos x$, tada je najbolje uvesti smenu $t = \sin x$.

Smena $t = \cos x$.

Ukoliko je $R(-u,v) = -R(u,v)$ tj. ako je data racionalna funkcija neparna po $\sin x$, tada je najbolje uvesti smenu $t = \cos x$.

Napomena. Nakon uvođenja ovih smena dobijaju se, kao i do sada integrali racionalnih funkcija po promenljivoj t.

PRIMER 2 – 1. DEO

Uvođenjem smene t $= \operatorname{tg} x$ se racionalna funkcija po $\sin x$ i $\cos x$, svodi na racionalnu funkciju po t, koja se dalje rešava, metodom neodređenih koeficijenata.

Izračunati:

$$\text{a)} \int \frac{dx}{2+\cos^2 x}; \qquad \text{b)} \int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx; \qquad \text{c)} \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx.$$

Rešenje. a) Kako je $R(u,v) = \frac{1}{2+v^2} = \frac{1}{2+(-v)^2} = R(-u,-v)$, dati integral se može rešavati uvođenjem smene $t = \operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+\cos^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2+\frac{1}{1+t^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{3+2t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

b) Važi da je

$$f(x) = \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} = \frac{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x \cos x} = \frac{\cos x + \sin x}{2 \sin x \cos^2 x}.$$

Kako je

$$R(u,v) = \frac{v+u}{2uv^2} = \frac{(-v)+(-u)}{2(-u)(-v)^2} = R(-u,-v),$$

dati integral se može rešavati uvođenjem smene $t = \operatorname{tg} x$. Tada je

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}dx &= \int \frac{1+\operatorname{tg} x}{2\sin x\cos x}dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1+t}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{1}{2}\int\frac{1+t}{t}dt = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int dt = \\ &= \frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{2}t+C = \\ &= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C.\end{aligned}$$

PRIMER 2 - 2. DEO

Smenom $t = \operatorname{tg} x$ racionalna funkcija po $\sin x$ i $\cos x$ se svodi na racionalnu funkciju po promenljivoj t, koja se rešava metodom neodređenih koeficijenata.

c) Kako je $R(u,v) = \frac{1}{u^6+v^6} = \frac{1}{(-u)^6+(-v)^6} = R(-u,-v)$, dati integral se može rešavati uvođenjem smene $t = \operatorname{tg} x$.

Nećemo odmah uvoditi smenu, već ćemo, najpre, modifikovati podintegralnu funkciju, s ciljem snižavanja stepena. Koristeći formulu

$$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b),$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\sin^6 x+\cos^6 x &= (\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3 = \\ &= (\sin^2 x+\cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x) = \\ &= 1-3\sin^2 x\cos^2 x = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.\end{aligned}$$

Napomena. Prethodna transformacije je bila potrebna, jer da smo odmah uveli smenu, integral od tako dobijene racionalne funkcije bi biokomplikovanijeza rad u odnosu na integral koji u nastavku rešavamo.

Dakle,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx &= \int \frac{dx}{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}\left|\begin{matrix}2x=u\\ 2dx=du\end{matrix}\right| = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-\frac{3}{4}\sin^2 u} = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1-\frac{3}{4}\frac{t^2}{1+t^2}} = \\ &= 2\int \frac{dt}{4+t^2} = \\ &= \operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C = \\ &= \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2}+C.\end{aligned}$$

PRIMER 3 – 1. DEO

Uvođenje smene $\sin x = t$

Primer. Rešiti integrale:

a) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx,$ b) $\int \frac{dx}{\sin x},$ c) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x}.$

Rešenje.

a) U ovom slučaju je $R(u, -v) = -R(u, v)$, pa je smena $\sin x = t$ tj. $\cos x dx = dt$. Da bismo uveli ovu smenu brojilac i imenilac podintegralne funkcije ćemo proširiti sa $\cos x$. Tada je:

$$\int \frac{\sin^4 x\cdot\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^4 x\cdot\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{t^4 dt}{1-t^2} = \int \frac{\left(t^4-1+1\right)dt}{1-t^2} = \int \frac{\left(t^4-1\right)dt}{1-t^2} + \int \frac{dt}{1-t^2} = \; = -\int\left(t^2+1\right)dt - \int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{t^3}{3} - t -$$

Nakon vraćanja smene $\sin x = t$ dobijamo

$$\int \frac{\sin^4 x\cdot\cos x}{\cos^2 x}dx = -\frac{\sin^3 x}{3} - \sin x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + c.$$

PRIMER 3 – 2. DEO

Uvođenje smene $\cos x = t$ *i* $\operatorname{tg} x = t.$

b) U ovom slučaju je $R(-u, v) = -R(u, v)$, pa je smena $\cos x = t$, tj. $-\sin x\ dx = dt$, tj. $\sin x dx = -dt$. Da bismo uveli ovu smenu brojilac i imenilac podintegralne funkcije ćemo proširiti sa $\sin x$. Tada je:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c.$$

Nakon vraćanja smene $\cos x = t$ dobijamo

$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + c.$

c) U ovom slučaju je $R(-u, \ -v) = -R(u, \ v)$, pa je smena $\text{tg}x = \ t$, tj. $x = \text{arctg} \ t$, tj. $dx \ = \ dt \Big/ \left(1 + t^2\right)$. Već smo pokazali da je $\sin^2 x = \ t^2 \Big/ \left(1 + t^2\right)$ i $\cos^2 x \ = \ 1 \Big/ \left(1 + t^2\right)$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\left(1 + t^2\right)dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + t + c.$$

Vraćajući smenu $\text{tg} \ x = t$, dobijamo

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = -\frac{1}{\text{tg}x} + \text{tg}x + c.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP 2

Uvođenje smene $\sin x = t$, $\cos x = t$ i $\text{tg}\, x = t$.

Video klip

VIDEO KLIP 1

Kako se dolazi do odgovarajućih formula kada se uvodi smena $t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Integracija racionalnih funkcija po $\sin x$ i $\cos x$.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Integracija nekih klasa trigonometrijskih funkcija

INTEGRACIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA KOJE SE MOGU REŠAVATI SMENOM $\cos x = t$ I $\sin x = t$

Dato su pravila kada se neke klase trigonometrijskih funkcija mogu integraliti smenom $\cos x = t$ ili $\sin x = t$.

Na kraju, pomenimo još jedan pristup u rešavanju integrala nekih klasa trigonometrijskih funkcija. Naime, trigonometrijske funkcije koje su polinomske funkcije po $\sin x$ i $\cos x$ mogu se rešavati postupcima koji su izloženi u nastavku. Svakako, kako su polinomske funkcije specijalni slučajevi racionalnih funkcija, integracija pomenutih funkcija se može raditi i prethodno izloženim postupcima kada se uvode smene $t = \sin x$, $t = \cos x$ ili $\operatorname{tg} x = t$.

Integrali oblika

$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx, \qquad m, n \in \mathbb{N}$

se rešavaju:

Ako je $m = 2k - 1, \quad k \in \mathbb{N}$ smenom $\cos x = t$;

Ako je $n = 2l - 1, \quad l \in \mathbb{N}$ smenom $\sin x = t$;

Ako je $m = 2k$ i $n = 2l$, $k, l \in \mathbb{N}$, tada se koriste sledeće transformacije

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Napomenimo da se prilikom rešavanja integrala oblika pod 3) može više puta javiti primena prethodnih formula. Takođe, prilikom rešavanja integrala oblika pod 3) nekad će se javiti i slučajevi 1) i/ili 2).

PRIMER 1

Slučaj kada je bar jedan od izložilaca neparan.

Primer. Rešiti sledeći integral:

$\int \sin^4 x \cdot \cos^3 xdx;$

Rešenje.

U ovom slučaju, kako je n = 3, treba uvesti $\sin x = t$, tj. $dx = \cos xdx$. Tada imamo:

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^3 xdx = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos xdx = \int \sin^4 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot \cos xdx = \int t^4 \cdot \left(1 - t^2\right)dt = \int \left(t^4 - t^6\right)dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c$$

PRIMER 2

Slučaj kada su oba izložioca parna.

Primer. Rešiti sledeći integral:

$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 xdx.$

Rešenje. U ovom slučaju je m = 4 i n = 2, pa je:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 xdx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x}{8} dx = = \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2xdx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2xdx -$$

U poslednjem integralu, koji potpada pod slučaj 2), potrebno je uvesti smenu $\sin 2x = u$, tj. $2\cos 2xdx = du$, tj. $\cos 2x \ dx = du / 2$. Tada imamo

$$\int \left(1 - \sin^2 2x\right) \cdot \cos 2xdx = \int \left(1 - u^2\right)\frac{du}{2} = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} = \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6} + c.$$

Tada je:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 xdx = \frac{x}{8} + \frac{\sin 2x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{8}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6}\right) + c = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + c.$$

Poglavlje 3

Integracija iracionalnih funkcija oblika 1

INTEGRACIJA NEKIH KLASA IRACIONALNIH FUNKCIJA

Ojlerove smene, Metod Ostrogradskog za iracionalne funkcije, Binomni diferencijal i dr

U ovoj lekciji ćemo pokazati kako se integrale sledeće klase iracionalnih funkcija:

1.

$$f(x)=R\left(x,\sqrt[n_1]{ax+b},\sqrt[n_2]{ax+b},\ldots,\sqrt[n_k]{ax+b}\right)$$

ili

$$f(x)=R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

gde je R racionalna funkcija svojih argumenata;

2. $f(x)=R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}),\ a\neq 0,$ gde je R racionalna funkcija po x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$;

3. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0;$

4. $f(x)=\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0,\ M\neq 0;$

5. $f(x)=R(x^{2n},\sqrt{a^2\pm b^2x^2}),$ gde je R racionalna funkcija po x^{2n} i $\sqrt{a^2\pm b^2x^2}$;

6. $f(x)=(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c},\ a\neq 0,\ m\neq 0;$
7. $f(x)=\frac{1}{x^n\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0,\ n\in\mathbb{N};$

8. $f(x)=\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0,$ gde je $P_n(x)$ polinom n -tog stepena $n\in\mathbb{N}$;

9. $f(x)=x^m(a+bx^n)^p.$

Veoma važna metoda koja se koristi za integraciju iracionalnih funkcija oblika 2 naziva se Ojlerove smene (ima ih ukupno tri). Takođe od interesa su i Metod Ostrogradskog (funkcije oblika 8) i Binomni diferencijal (funkcije oblika 9).

Napomena. Cilj većine metoda za integraciju iracionalnih funkcija jeste da se njima ova integracija prevede u integraciju racionalnih funkcija. U nekim slučajevima će se prevoditi u integraciju trigonometrijskih funkcija. Svakako, osim pomenutih, postoje i druge klase iracionalnih funkcija koja se mogu integraliti, ali ovde o njima neće biti reči.

INTEGRACIJA DVA TIPA JEDNOSTAVNIJIH IRACIONALNIH FUNKCIJA

Ove klase iracionalnih funkcija se integrale metodom smene. Nakon uvođenja smene, prevode se u integrale racionalne funkcije.

Neka je podintegralna funkcija oblika $f(x) = R\big(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}\big)$, gde je R racionalna funkcija svojih argumenata. Ako je $n = NZS(n_1, n_2, \dots, n_k)$, tada je

$$\frac{n}{n_1} = m_1, \ \frac{n}{n_2} = m_2, \ \frac{n}{n_3} = m_3, \ \dots, \frac{n}{n_k} = m_k,$$

gde su $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$.Uvedimo smenu $\sqrt[n]{ax+b} = t$. Tada je

$$\sqrt[n_1]{ax+b} = t^{\frac{n}{n_1}} = t^{m_1}, \ \sqrt[n_2]{ax+b} = t^{\frac{n}{n_2}} = t^{m_2}, \ \dots, \sqrt[n_k]{ax+b} = t^{\frac{n}{n_k}} = t^{m_k}$$

i $ax + b = t^n, x = \frac{t^n - b}{a}, dx = \frac{n \cdot t^{n-1}}{a} dt$.Tada, polazni integral postaje

$$\int f(x)dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t^{m_1}, t^{m_2}, \dots, t^{m_k}\right) \frac{n \cdot t^{n-1}}{a} dt,$$

gde podintegralna funkcija u integralu s desne strane predstavlja racionalnu funkciju argumenta t.

Ako je podintegralna funkcija oblika $f(x) = R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ gde je R racionalna funkcija svojih argumenata, treba uvesti smenu $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, gde je $n = NZS(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Posle ove smene podintegralna funkcija se svodi na racionalnu funkciju argumenta t.

PRIMER 1

Integracija funkcije oblika $f(x) = R\left(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}\right)$.

Izračunati

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$$

Rešenje. Kako je $6 = NZS(2,3)$, zadatak rešavamo uvođenjem smene $\sqrt[6]{x+1} = t$, tj. $x+1 = t^6$, tj. $x = t^6 - 1$. Tada je $dx = 6t^5\,dt$ i dobijamo

$$\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{(t^6-1)^2+\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{t^6}} 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^{12}+2t^6-1+t^3}{t^2} t^5\,dt =$$
$$= 6\int (t^{12}+2t^6-1+t^3)\cdot t^3\,dt = 6\int (t^{15}+2t^9-t^3+t^6)\,dt =$$
$$= 6\left(\frac{t^{16}}{16}+2\cdot\frac{t^{10}}{10}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^7}{7}\right)+c =$$
$$6\left(\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{16}}{16}+\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{10}}{5}-\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{4}}{4}+\frac{(\sqrt[6]{x+1})^{7}}{7}\right)+c$$

PRIMER 2

Integracija funkcije oblika $f(x) = R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$.

Izračunati

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x^2\left(1+\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\right)}dx.$$

Rešenje. Uvšćemo smenu $\sqrt[6]{\frac{x}{x-1}} = t$, jer je $6 = NZS(2,3)$. Tada se dobija

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x^2\left(1+\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\right)}dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x}{x-1} = t^6, \quad x = \frac{t^6}{t^6-1} \\ dx = -\frac{6t^5}{(t^6-1)^2} \end{array} \right| = \int \frac{-6dt}{t^4(t^2+1)} =$$
$$= \int \frac{Adt}{t} + \int \frac{Bdt}{t^2} + \int \frac{Cdt}{t^3} + \int \frac{Ddt}{t^4} + \int \frac{(Ex+F)dt}{t^2+1} =$$

(za vežbu odrediti koeficijente A, B, C, D, E i F)

$$= -6\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{2}{t^3} - 6\frac{1}{t} - 6\,\mathrm{arctg}\,t + C =$$
$$= 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} - 6\sqrt[6]{\frac{x-1}{x}} - 6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{\frac{x}{x-1}} + C.$$

Poglavlje 4

Integracija iracionalnih funkcija oblika 2

PRVA OJLEROVA SMENA

Prva Ojlerova smena se primenjuje u slučaju da u kvadratnom trinomu ax^2+bx+c važi da je $a>0$.

Integracija iracionalnih funkcija ako je podintegralna funkcija oblika

$$f(x)=R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$$

gde je R racionalna funkcija po x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$, $a\neq 0$, a tokođe polinom ax^2+bx+c nema realna i jednaka rešenja može se rešavati Ojlerovim smenama.

Prva Ojlerova smena podrazumeva slučaj da u kvadratnom trinomu ax^2+bx+c, funkcije f, važi da je $a>0$. Tada se takav integral rešava smenom

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}.$$

Odavde, kvadriranjem dobijamo da je

$$ax^2+bx+c=t^2\pm 2tx\sqrt{a}+ax^2.$$

Potiranjem ax^2 na levoj i desnoj strani poslednje jednakosti možemo da izrazimo x. Tada je

$$x=\frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}t}. \qquad (*)$$

S jedne strane, dobijeno u (*) zamenjujemo u polaznu smenu i dobijamo da je

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\frac{(t^2-c)\sqrt{a}}{b\mp 2\sqrt{a}t}$$

S druge strane, dobijeno u (*) diferenciramo i dobijamo da je

$$dx=\frac{\mp 2\sqrt{a}t^2+2tb\pm 2c\sqrt{a}}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,dt.$$

Sada, smena može da se uvede u integral. Nakon njenog uvođenja, integracija polazne iracionalne funkcije prelazi u integraciju racionalne funkcije po promenljivoj t.

Napomena. Od oblika iracionalne funkcije koja se integrali zavisi da li će se prethodna smena uvodi sa znakom minus ili plus.

Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

PRIMER 1

Uvođenje prve Ojlerove smene nakon uočavanja da su ispunjeni uslovi za njenu primenu. Prva Ojlerova smena integraciju iracionalne funkcije prevodi u integraciju racionalne funkcije.

Primer. Rešiti sledeće integrale: a) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$; b) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+x+1}}$.

Rešenje. a) Kako je koeficijent uz x^2 pozitivan za rešavanje ovog integral može se koristiti prva Ojlerova smena. Tada imamo da je

$\sqrt{x^2+a^2} = t - x \Rightarrow x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow 2tx = t^2 + a^2 \Rightarrow x = \frac{t^2+a^2}{2t}$

Sada imamo da je $dx = \frac{t^2-a^2}{2t^2}dt$. Takođe važi da je

$$\sqrt{x^2+a^2} = t - x \Rightarrow \sqrt{x^2+a^2} = t - \frac{t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2-a^2}{2t}.$$

Konačno, ako dobijeno uvrstimo u prolazni integral imamo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}dt}{\frac{t^2-a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + c.$$

Iz početne smene imamo da je $\sqrt{x^2+a^2} = t - x \Rightarrow t = x + \sqrt{x^2+a^2}$,pa je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c.$$

Napomena. Ovaj integral je dat kao tablični, može se koristiti na ispitu kao takav, tj. bez prethodno datog rešavanja.

b) Uvodimo smenu $\sqrt{x^2+x+1} = t + x$. Kvadriranjem i sređivanjem ove smene, dobijamo da je $x = \frac{t^2-1}{1-2t}$. Tada je $\sqrt{x^2+x+1} = t + x = t + \frac{t^2-1}{1-2t} = \frac{-t^2+t-1}{1-2t}$, kao i $x - \sqrt{x^2+x+1} = x = \frac{t^2-1}{1-2t} - \frac{-t^2+t-1}{1-2t} = \ldots = -t$. Takođe je $dx = \frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}$. Konačno imamo da je

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\frac{-(2t^2-2t+2)}{(1-2t)^2}}{-t} dt = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2} dt =$$

$$= \int \left(-\frac{2}{t} + \frac{3}{2t-1} - \frac{3}{(2t-1)^2}\right) dt =$$

$$= -2\ln|t| + \frac{3}{2(2t-1)} + \frac{3}{2}\ln|2t-1| + c =$$

$$= -2\ln(x+\sqrt{x^2+x+1}) + \frac{3}{2(2x+2\sqrt{x^2+x+1}-1)} +$$

$$+ \frac{3}{2}\ln(2x+2\sqrt{x^2+x+1}-1) + c.$$

DRUGA OJLEROVA SMENA

Druga Ojlerova smena se primenjuje u slučaju da u kvadratnom trinomu ax^2+bx+c važi da je $c>0$.

U slučaju da je koeficijent $a<0$ u kvadratnom trinomu ax^2+bx+c podintegralne funkcije oblika

$$f(x) = R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), \; a \neq 0,$$

tada je prva Ojlerova smena neupotrebljiva. Međutim, ako je u kvadratnom trinomu ax^2+bx+c koeficijent $c>0$, tada se na ovakve integrale može primeniti druga Ojlerova smena koja glasi

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x \cdot t \pm \sqrt{c}.$$

Dalje, potrebno je uraditi analogno onome što rađeno kod prve Ojlerove smene. Dakle, potrebno je smenu kvadrirati i iz izraziti čemu je jednako x. Tada se ovako izraženo x, po novoj promenljivoj t vraća u polaznu smenu i izrazi se čemu je jednako $\sqrt{ax^2+bx+c}$ u odnosu na t. S druge strane, treba diferencirati dobijeni jednakost u kojoj je x izraženo preko t, i tako dobiti čime smenjujemo dx.

Napomena. Od oblika iracionalne funkcije koja se integrali zavisi dali će se prethodna smena uvodi sa znakom minus ili plus. Nakon uvođenja ove smene, integracija po iracionalnoj funkcije prelazi u intgraciju racionalne funkcije.

Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

PRIMER 2 – 1. DEO

Uvođenje druge Ojlerove smene nakon uočavanja da su ispunjeni uslovi za njenu primenu. Ona integraciju iracionalne funkcije prevodi u integraciju racionalne funkcije.

Primer. Rešiti integral

$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{1+x-x^2}}.$$

Rešenje. Kako je $a=-1$, ne može se primeniti prva Ojlerova smena, a kako je $c=1$, može se primeniti druga Ojlerova smena. Ona u ovom slučaju glasi

$$\sqrt{1+x-x^2}=tx-1 \Rightarrow 1+x-x^2=t^2x^2-2tx+1 \Rightarrow x-x^2=t^2x^2-2tx/:x$$
$$\Rightarrow 1-x=t^2x-2t.$$

Ako iz polednje relacije izrazimo x, tada dobijamo $x=\frac{2t+1}{t^2+1}$. Odavde je $dx=\frac{-2t^2-2t+2}{(t^2+1)^2}dt$, dok je s druge strane

$$\sqrt{1+x-x^2}=tx-1=t\cdot\frac{2t+1}{t^2+1}-1=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$

Sada $\sqrt{1+x-x^2}$ i dx iz početnog integrala možemo smeniti po novoj promenljivoj t. Tada dobijamo

$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{\frac{-2t^2-2t+2}{(t^2+1)^2}}{1-\frac{t^2+t-1}{t^2+1}}dt=\int\frac{\frac{-2t^2-2t+2}{(t^2+1)^2}}{\frac{2-t}{t^2+1}}dt=$$
$$=\int\frac{(-2t^2-2t+2)dt}{(2-t)(t^2+1)}.$$

PRIMER 2 – 2. DEO

Dekompozicija racionalne funkcije primenom metode neodređenih koeficijenata.

Važi da je

$$\frac{-2t^2-2t+2}{(2-t)(t^2+1)}=\frac{A}{2-t}+\frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Proširivanjem prethodne jednačine sa $(2-t)(t^2+1)$ dobijamo da je

$$-2t^2 - 2t + 2 = A(t^2+1) + (Bt+C)(2-t) \text{ tj. } -2t^2 - 2t + 2 = (A-B)t^2 + (2B-C)t + A + 2C.$$

Sada je

$$\begin{aligned} t^2 :& \quad A - B &= -2 \\ t^1 :& \quad 2B - C &= -2 \\ t^0 :& \quad A + 2C &= 2. \end{aligned}$$

Rešenja ovog sistema su $A=-2$, $B=0$ i $C=2$. Tada je

$$\frac{-2t^2-2t+2}{(2-t)(t^2+1)} = \frac{-2}{2-t} + \frac{2}{t^2+1},$$

pa je

$$\int \frac{-2t^2-2t+2}{(2-t)(t^2+1)} = \int \frac{-2}{2-t} + \int \frac{2}{t^2+1} = -2\ln|2-t| + 2\operatorname{arctg} t + c.$$

PRIMER 2 – 3. DEO

Integracija elementarnih racionalnih funkcija.

Vraćajući smenu

$$t = \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x},$$

dobijamo da je

$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{1+x-x^2}} = -2\ln\left|2 - \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right) + c =$$
$$= -2\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right) + c.$$

TREĆA OJLEROVA SMENA

Može se desiti da ni prva ni druga Ojlerova smena ne mogu da se primene. Ako kvadratni trinom ax^2+bx+c ima realna rešenja, tada se može primeniti treća Ojlerova smena.

Prilikom integracije iracionalnih funkcija ako je podintegralna funkcija oblika

$$f(x) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$$

gde je R racionalna funkcija po x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$ može se desiti da polinom ax^2+bx+c ima realna i različita rešenja x_1 i x_2 , tj. može se zapisati na sledeći način,tj. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Tada je od interesa sledeća smena

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1), \text{ ili } \sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2),$$

koja se naziva treća Ojlerova smena.

Metodologija rešavanja ovog slučaja veoma je slična prethodno opisanim slučajevima, tj potrebno je, najpre, smenu kvadriratit i izraziti x u funkciji od nove promenljive t, a zatim odrediti i dx. Treća Ojlerova smena se primenjuje u situacijama kada kvadratna jednačina $ax^2+bx+c=0$ ima rešenja koja su realna i različita, nezavosno od toga da li je $a>0$, pa se možemo primeniti prva Ojlerova smena, ili je $a<0$ i $c>0$, pa se može primeniti druga Ojlerova smena. Dakle, može se desiti da se na neki integral može primeniti i prva i treća Ojlerova smena, ili druga i treća Ojlerova smena.

Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

PRIMER 3 - 1. DEO

Treća Ojlerova smena, kao i prve dve Ojlerove smene, dovodi integraciju iracionalne funkcije, na integraciju racionalne funkcije.

Primer. Rešiti integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-6}}$.

Rešenje. Kako je $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$, možemo uvesti treću Ojlerovu smenu. Tada je

$$\sqrt{x^2+x-6}=t(x-2) \;\; (\text{mogli smo da uvedemo i smenu } \sqrt{x^2+x-6}=t(x+3)).$$

Kvadriranjem smene dobijamo da je

$$(x+3)(x-2)=t^2(x-2)^2/:(x-2) \;\Rightarrow\; x+3=t^2(x-2),$$

odakle je $x=\dfrac{2t^2+3}{t^2-1}$. Diferenciranjem poslednje relacije dobijamo da je $dx=\dfrac{-10t}{(t-2)^2}dt$. Takođe, važi da je

$$\sqrt{x^2+x-6}=t(x-2)=t\left(\frac{2t^2+3}{t^2-1}-2\right)=\frac{5t}{t^2-1}$$

i

$$x+1=\frac{2t^2+3}{t^2-1}+1=\frac{3t^2+2}{t^2-1}.$$

PRIMER 3 - 2. DEO

Dobili smo integral koji smo dali kao tablični, tako da primenjujemo formulu za određivanje njegove primitivne funkcije.

Konačno, polazni integral, nakon uvođenja ovih smena, postaje integral:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-6}} = \int \frac{\frac{-10t}{(t-2)^2}}{\frac{3t^2+2}{t^2-1}\cdot\frac{5t}{t^2-1}} = -2\int \frac{dt}{3t^2+2.}$$

Kako se rešava poslednji integral već smo govorili (a dat je i kao tablični integral), tako da je

$$\int \frac{dt}{3t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Vraćajući smenu

$$\sqrt{x^2+x-6} = t(x-2) \;\Rightarrow\; t = \frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x-2}$$

konačno je

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-6}} = \frac{-2}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+x-6}}{\sqrt{3}(x-2)}\right) + c.$$

Poglavlje 5

Integracija iracionalnih funkcija oblika 3 i 4

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 3

Ove klase iracionalnih funkcija se integrale metodom smene. Nakon uvođenja smene, prevode se u tablične integrale.

Integral oblika

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

za $a>0,$ se rešava dovođenjem kvadratnog trinoma ax^2+bx+cna kanonski oblik, tj.

$$ax^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

i uvođenjem smene $x+\frac{b}{2a}=t$, odakle je $dx=dt$. Tada se polazni integral svodi na integral

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$$

koji smo dali kao tablični.

U slučaju da je u polaznom integralu $a<0,$ tada se on svođenjem na kanonski oblik (prethodnim izvlačenjem minusa kao zajedničkog za ceo kvadratni trinom, jer je $a<0$) i uvođenjem smene svodi ili na prethodni integral ili na integral oblika

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}},$$

koji smo takođe dali kao tablični.

PRIMER 1

Integracija funkcije oblika $f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax^2+b+x+c}}$.

Izračunati sledeće integrale:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Rešenje.
a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \left| \begin{array}{c} x+\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2-\frac{1}{4}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|$$

$$+C=$$

$$= \ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+C = \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C.$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} = \left| \begin{array}{c} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C = \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C.$$

c)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \left| \begin{array}{c} x+2=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3}+C$$

$$= \arcsin\frac{x+2}{3}+C.$$

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA OBLIKA 4

Ove klase iracionalnih funkcija se integrale metodom smene. Nakon uvođenja smene, prevode se u dva integrala, jedan dat kao tablični integral i drugi o čijem smo rešavanju već govorili.

Integral oblika

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

se rešava dovođenjem kvadratnog trinoma ax^2+bx+c, za $a>0$, na kanonski oblik, tj.

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{Mx+N}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}dx$$

gde treba uvesti smenu $x+\frac{b}{2a}=t$, odakle je $x=t-\frac{b}{2a}$ i $dx=dt$. Tada važi

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{M_1t+N_1}{\sqrt{t^2\pm k^2}}dt = M_1\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}} + N_1\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}.$$

Integral $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ se rešava metodom smene i o njemu smo već govorili, dok je integral $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ dat kao tablični integral. Slično, se postupa ako je $a < 0$ u kvadratnom trinomu $ax^2 + bx + c$. Tada se nakon uvođenja odgovarajuće smene umesto integrala $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ može javiti integral $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}$.

Napomena. Prilikom integracije iracionalnih funkcija oblika 4, može se koristiti tehnika koju smo naveli kod integracije racionalnih funkcija oblika 4. Radi se o tome da se vrši "nameštanje" brojioca, da predstavlja izvod imenioca. Prilikom ovakvog rešavanja integrala oblika 4, on se svodi na dva integrala, od kojih je jedan oblika integracije iracionalne funkcije oblika 3, dok je drugi integral (nakon uvođenja smene)oblika $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ tj. tablični je. O tome govori naredni primer.

PRIMER 2

Integracija funkcije oblika $\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

Izračunati sledeće integrale:

$$\text{a)} \int \frac{x+3}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx; \qquad \text{b)} \int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx.$$

Rešenje.

a)

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-6}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx = \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{27+6x-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{-12}{\sqrt{27+6x-x^2}} = \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + 6\int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-3)^2}} = \\ &= -\sqrt{27+6x-x^2} + 6\arcsin\left(\frac{x-3}{6}\right) + c.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x-27}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-36}} = \\ &= \sqrt{x^2+6x-27} + 2\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2-36}\right| + c.\end{aligned}$$

Poglavlje 6

Integracija iracionalnih funkcija oblika 5

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA KOD KOJIH JE MOGUĆE UVOĐENJE TRIGONOMETRIJSKE SMENE

Integracija nekih klasa iracionalnih funkcija uvođenjem trigonometrijskih smena.

● Ako je podintegralna funkcija oblika

$$f(x)=R\left(x^{2n},\sqrt{a^2-b^2x^2}\right),n\in\mathbb{Z},a,b\in\mathbb{R}^+,$$

gde je R racionalna funkcija po x^{2n} i $\sqrt{a^2-b^2x^2}$, tada se uvodi $\text{smena } x=\frac{a}{b}\sin t$ koja dovodi do

$$\sqrt{a^2-b^2x^2}=\sqrt{a^2-b^2\frac{a^2}{b^2}\sin t}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cdot\cos t.$$

● Ako je podintegralna funkcija oblika

$$f(x)=R\big(x^{2n},\sqrt{a^2+b^2x^2}\big),n\in\mathbb{Z},a,b\in\mathbb{R}^+,$$

gde je R racionalna funkcija po x^{2n} i $\sqrt{a^2+b^2x^2}$, tada se uvodi $\text{smena }\ =\frac{a}{b}\operatorname{tg} t$ koja dovodi do

$$\sqrt{a^2+b^2x^2}=\sqrt{a^2+b^2\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2 t}=\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t}=a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}=\frac{a}{\cos t}.$$

● Ako je podintegralna funkcija iracionalna funkcija oblika

$$f(x)=R\big(x^{2n},\sqrt{b^2x^2-a^2}\big),n\in\mathbb{Z},a,b\in\mathbb{R}^+,$$

gde je R racionalna funkcija po x^{2n} i $\sqrt{b^2x^2-a^2}$, tada se uvodi $\text{smena } x=\frac{a}{b\cos t}$ koja dovodi do

$$\sqrt{b^2x^2-a^2}=\sqrt{b^2\frac{a^2}{b^2\cdot\cos^2 t}-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{cos^2t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{cos^2t}}=a\sqrt{\frac{\sin^2 t}{cos^2t}}$$
$$=a\operatorname{tg} t.$$

Uvođenjem neke od tri pomenute smene, polazni integral postaje integral trigonometrijske funkcije po novoj promenljivoj t. Ovo je jedini slučaj gde ćemo primenom metode smene integraciju iracionalne funkcije, prevoditi u integraciju trigonometrijske funkcije. U svim ostalim slučajevima koje ćemo ovde pomenuti (ili smo ih već pomenuli), one će se prevoditi u integraciju racionalne funkcije.

Napomena. Iracionalne funkcije oblika 5 se mogu integraliti na još dva načina. Prvi je metod parcijalne integracije (videtiorvulekciju gde smo jedan takav integral rešavali). Drugi način je primenom Metode Ostrogradskog za iracionalne funkcije o kojoj govorimo kasnije.

PRIMER 1

Uvođenje trigonometrijske smene u integral iracionalne funkcije.

Primer: Izračunati sledeće integrale*:*

a) $\int \sqrt{16-x^2}dx;$ b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}};$

c) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx.$

Rešenje.

a) Ako stavimo $x=4\sin t,$ tada je $\sqrt{16-x^2}=4\cos t$ i $dx=4\cos t\ \ dt,$ pa se dobija

$$\int \sqrt{16-x^2}dx=\int 16\cos^2 tdt=8\int(1+\cos 2t)dt=8t+4\sin 2t+C=8t+8\sin t\cos t+C=8\arcsin\frac{x}{4}+\frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2}+C.$$

b) Posle smene $x=3\mathrm{tg}t,\quad dx=\frac{3dt}{\cos^2 t}$ i $\sqrt{x^2+9}=\frac{1}{\cos t},$ dobijamo

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}=\int\frac{3\frac{dt}{\cos^2 t}}{27\mathrm{tg}^2 t\frac{1}{\cos t}}=\frac{1}{9}\int\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}$$

Dalje se koristi smena $u=\sin t,\quad du=\cos tdt$ i sledi

$$\frac{1}{9}\int\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}=\frac{1}{9}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{9\sin t}+C=-\frac{1}{\frac{3}{\cos t}\cdot 3\mathrm{tg}t}+C=-\frac{1}{3x\sqrt{x^2+9}}+C.$$

c) Posle smene $x=\frac{2}{\cos t},\quad dx=\frac{2\sin tdt}{\cos^2 t},$ koristeći relaciju $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\mathrm{tg}t,$ dobijamo

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx=\int\frac{4\mathrm{tg}t\cos^2 t\sin t}{4\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t}dt.$$

Dalje se uvodi smena $u=\sin t,\quad du=\cos t\ \ dt,$ i dobija se

$$\int \frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{u^2}{1-u^2}du = -u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = -\sin t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + C = = -\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}\right| + C = -\sqrt{}$$

VIDEO KLIP

Integracija nekih tipova iracionalnih funkcija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Integracija iracionalnih funkcija oblika 6 i 7

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA OBLIK 6

Prilikom integracije iracionalne funkcije oblika 6 u jednom koraku se dobija i funkcija oblika 5.

Integral oblika

$$\int (mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

se izračunava dovođenjem kvadratog trinoma u podintegralnoj funkciji na kanonski oblik i primenom smene o kojoj smo prethodno govorili.

Napomena. Prilikom integracije iracionalne funkcije oblika 6 u jednom koraku se dobija i funkcija oblika 5.

PRIMER 1

Postupak integracije iracionalne funkcije oblika 6.

Izračunati integral

$$\int (x+1)\sqrt{x^2-2x+3}dx.$$

Rešenje. Kako je $x^2-2x+3=(x-1)^2+2,$ tada smenom $x-1=t,$ tj. $x=t+1$ i $dx=dt$ polazni integral postaje

$$\int (x+1)\sqrt{x^2-2x+3}dx=\int (t+2)\sqrt{t^2+2}dt=\int t\sqrt{t^2+2}dt+2\int \sqrt{t^2+2}dt.$$

Inegral $\int t\sqrt{t^2+2}dt$ se rešava smenom $t^2+2=u$, pa je $2t\,dt=du$, tj. $t\,dt=\frac{du}{2}$. Dobijamo da je

$$\int t\sqrt{t^2+2}dt=\int \frac{\sqrt{t}\,dt}{2}=\cdots=\frac{\sqrt{(x^2-2x+3)^3}}{3}+c_1.$$

Drugi integral predstavlja integraciju iracionalne funkcije oblika 5 i važi da je

$$2\int\sqrt{t^2+2}dt = \ldots = (x-1)\sqrt{x^2-2x+3} + 2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right| + c_2.$$

Tada je

$$\int (x+1)\sqrt{x^2-2x+3}dx = \frac{\sqrt{(x^2-2x+3)^3}}{3} + (x-1)\sqrt{x^2-2x+3}$$
$$+ 2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right| + c, \ (c = c_1 + c_2).$$

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA OBLIK 7

Integracije iracionalne funkcije oblika 6se zasniva na Metodi smene. Tom prilikom dobija ili integracija funkcije oblika 5 ili se dobijeni integral uvođenjem još smene svodi na tablični.

Integral oblika

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

se izračunava tako što se uvede smena $x = \frac{1}{t}$. Odavde je $dx = -\frac{dt}{t^2}$, pa je

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 \pm a^2}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^n}\sqrt{\frac{1}{t^2} \pm a^2}} = -\int \frac{t^{n-1}\,dt}{\sqrt{1 \pm a^2t^2}}.$$

U slučaju da je $n-1$ parno, poslednji integral je oblika 5. U slučaju da je $n-1$ neparno, tada poslednji integral zapisujemo

$$-\int \frac{t^{n-1}\,dt}{\sqrt{1 \pm a^2t^2}} = -\int \frac{t \cdot t^{n-2}\,dt}{\sqrt{1 \pm a^2t^2}}$$

i rešavamo uvođenjem smene $1 \pm a^2t^2 = u^2$, pri čemu je $2a^2t\,dt = 2u\,du$, tj. $t\,dt = \frac{u\,du}{a^2}$, nakon čega on postaje tablični integral.

PRIMER 2

Postupak integracije iracionalne funkcije oblika 7.

Izračunati

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} \qquad (x \neq 0).$$

Rešenje. Uvodimo smenu $x = \frac{1}{t}$, odakle je $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Tada polazni integral postaje

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{1+t^2} + c = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c.$$

Poglavlje 8

Integracija iracionalnih funkcija oblika 8

METOD OSTROGRADSKOG ZA INTEGRACIJU IRACIONALNIH FUNKCIJA

Metod Ostrogradskog, integraciju posmatrane iracionalne funkcije prevodi u integraciju koja se može rešiti primenom Ojlerovih smena.

Sada će biti reči o integraljenju još nekim klasama funkcija za koje se mogu definisati specijalne metode, ali one ne moraju nužno dovesti do integrala racionalnih funkcija. Svakako, svaka od metodakoja će biti ovde pomenuta će nas dovoditi do integrala za koje smo metodologiju njihovih rešavanja već izneli.

Prva koju navodimo od njih je metod Ostrogradskog za integraciju iracionalnih funkcija koji se koristi za određivanje primitivne funkcije sledećeg tipa iracionalnih integrala

$$\int \frac{Pn(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Pri čemu je $P_n(x)$ dati polinom n -tog reda i a, b i c ($a \neq 0$) su dati realni brojevi. Za rešavanje integrala prethodnog oblika Ostrogradski je dao sledeću formulu

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gde koeficijente polinoma $Q_{n-1}(x)$ koji je $(n-1)$. reda, kao i koeficijent λ treba odrediti, tako da prethodno data formula bude tačna. Njih određujemo tako što diferenciramo prethodnu formulu.

Prethodno izneto ćemo ilustruvati u naredna dva primera.

PRIMER – 1. DEO

Primena metode Ostrogradskog i određivanje nepoznatih koeficijenata.

Primer. Izračunati sladeće integrale*:*

a) $\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx;$

b) $\int \sqrt{x^2+1}dx.$

Rešenja.

a) U ovom slučaju je

$$\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Diferenciranjem prethodnog izraza dobija se

$$\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\sqrt{x^2+x+1} + (Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Množenjem leve i desne strane sa $2\sqrt{x^2+x+1}$ dobija se:

$$2\left(x^2+x+2\right) = 2A\left(x^2+x+1\right) + (Ax+B)(2x+1) + 2\lambda,$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4A &= 2 \\ 3A+B &= 2 \\ 2A+B+2\lambda &= 4 \end{aligned}$$

čije je rešenje $A = 1/2, \quad B = 1/4 \quad \text{i} \quad \lambda = 11/8.$

PRIMER – 2. DEO

Nakon određivanja nepoznatih koeficijenata, ostaje da se reši jedan integral iraconalne funkcije na koji se može primeniti jedna od Ojlerovih smena.

Prema tome je

$$\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{11}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Poslednji integral se napiše kao

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

što posle smene

$$t = x+\frac{1}{2}, \quad dt = dx,$$

postaje

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left|x+\frac{1}{2}\right|^2+\frac{3}{4}}\right| + C = \ln\left|2x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

Na kraju je

$$\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{11}{8}\ln\left|2x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

PRIMER – 3. DEO

Primena metode Ostrogradskog i Ojlerovih smena.

b) Pre svega je

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+1} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Diferenciranjem poslednje jednakosti dobija se

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = A\sqrt{x^2+1} + (Ax+B)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Množenjem leve i desne strane sa $\sqrt{x^2+1}$ dobija se

$$x^2+1 = A\left(x^2+1\right) + (Ax+B)x + \lambda,$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ B &= 0 \\ A+\lambda &= 1 \end{aligned}$$

pa je $A = 1/2, \quad B = 0 \;\; \text{i} \;\; \lambda = 1/2$. Prema tome je

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Poslednji integral je tablični, pa je

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Integracija iracionalne funkcije primenom formule Ostrogradskog.

Poglavlje 9

Integracija iracionalnih funkcija oblika 9

BINOMNI DIFERENCIJAL

Binomni diferencijal integraciju posmatrane funkcije prevodi u integraciju racionalne funkcije.

Integrali oblika

$$\int x^m\left(a + bx^n\right)^p dx$$

mogu se rešiti (tj. mogu se svesti na integral racionalne funkcije) samo u sledeća tri slučaja:

- ako je p ceo broj;
- ako je p racionalan broj i $\frac{m+1}{n}$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^s = a + bx^n$, gde je s imenilac razlomka p;
- ako je p racionalan broj i $\frac{m+1}{n} + p$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^s = ax^{-n} + b$, gde je s imenilac razlomka p.

Za svaki od navedenih slučajeva ćemo dati po jedan primer.

Primer. Izračunati sledeće integrale:

$$a)\ \int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt{x})^2};$$

$$b)\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}};$$

$$c)\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{x^2}-1}.$$

Metoda koja je opisana se naziva Binomni diferencijal.

REŠENJA PRIMERA

Svi slučajevi primene Binomnog diferencijala.

Rešenja.

a) U ovom slučaju je *p*=–2, tj. *p* je ceo broj, pa se integral rešava smenom $t^2 = x, \quad 2tdt = dx$:

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt{x})^2} = 2\int\frac{t^2dt}{(1+t)^2} = 2\left(t+1-2\ln|t+1| - \frac{1}{t+1}\right) + C = 2\left(\sqrt{x}+1-2\ln|\sqrt{x}+1| - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) + C.$$

b) U ovom slučaju je m=1, n=2/3 i p=–1/2, tj. p je razlomak, ali je broj $\frac{m+1}{n} = \frac{1+1}{2/3} = 3$ ceo. Ako uvedemo smenu $t^2 = 1+\sqrt[3]{x^2}$, tj. $x = \sqrt{\left(t^2-1\right)^3}$, ili $x^{1/3} = \sqrt{t^2-1}$, tada dobijamo $2tdt = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}dx, \quad dx = 3\sqrt{t^2-1}tdt$, tada dobijamo

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3\int\frac{\left(t^2-1\right)^2tdt}{t} = 3\int\left(t^2-1\right)^2dt = \frac{3}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^5 - 2\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^3 + 3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} + C$$

c) U ovom slučaju je m=–6, n=2, p=–1/2, pa je $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-5}{2} + \frac{-1}{2}$ ceo broj. Prema tome, može se uvesti smena $t^2 = 1 - x^{-2}, \quad tdt = \frac{dx}{x^3}, \quad x^{-2} = 1 - t^2,$ pa je

$$\int\frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{dx}{x^3x^4\sqrt{1-x^{-2}}} = \int\left(t^2-1\right)^2dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t + C = = \frac{\left(\sqrt{1-x^{-2}}\right)^5}{5} - 2\frac{\left(\sqrt{1-x^{-2}}\right)^3}{3} + \sqrt{1-x^{-2}} + C$$

NAPOMENA O INTEGRACIJI U KONAČNOM OBLIKU - ZAVRŠNO RAZMATRANJE

Primitivna funkcija elementarne funkcije može biti elementarna funkcija. Međutim, postoje elementarne funkcije čije primitivne funkcije nisu elementarne funkcije.

Primitivna funkcija elementarne funkcije može biti elementarna funkcija. Međutim, postoje elementarne funkcije čije primitivne funkcije nisu elementarne funkcije. U tom slučaju se kaže da se integracija elementarnih funkcija ne može izvršiti u konačnom obliku.

Takav je slučaj sa integralima oblika

$$\int x^m(bx^n+a)^p dx,$$

kada nijedan od brojeva p, $\frac{m+1}{n}$ i $p+\frac{m+1}{n}$ nije ceo broj, kao i svi integrali koji se odgovarajućim smenama mogu svesti na ovaj integral. Na primer, $\int\sqrt{\sin x}dx$ se smenom $\sin x = t$, pri čemu je $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, svodi na integral $\int t^{\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt.$

Isto tako integrali oblika

$$\int x^\alpha e^{\pm x}, \int x^\alpha \sin x, \int x^\alpha \cos x, \quad \text{gde je} \ \ \alpha \notin \mathbb{N},$$

ne mogu se izraziti elementarnih funkcijama. Na njih se svode integrali oblika

$$\int e^{x^2}dx,\ \int \frac{dx}{\ln x},\ \int \sin x^2 dx.$$

Neelementarne funkcije

$$\int \frac{e^x}{x}dx = \int \frac{dt}{\ln t} = li\,x \text{ (integralni logaritam)}$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = si\,x$$

$$\int \frac{\cos x}{x}dx = si\,x \text{ (integralni logaritam)}$$

predstavljaju nove transcedentne funkcije koje su predmet posebnog izučavanja u matematici.

Integrali oblika

$$\int R\left(x, \sqrt{P_n(x)}\right)\,dx$$

gde je R racionalna funkcija, a $P_n(x)$ polinom trećeg ili četvrtog stepena nazivaju se eliptički integrali, a izražavaju se tzv. eliptičkim funkcijama koje predstavljaju neelementarne funkcije koje se posebno proučavaju, a imaju velike primene. Primer eliptičkog integrala je integral oblika

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx \ \ (|k|<1).$$

UNIVERZITET
METROPOLITAN
BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Određeni integral

Lekcija 04

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

Poglavlje 1

Pojam određenog integrala

JEDAN OD PROBLEMA KOJI DOVODI DO POJMA ODREĐENOG INTEGRALA

Određivanje površine krivolinijskog trapeza je jedan od problema koji dovodi do pojma određenog integrala. U prirodnim i tehničkim naukama postoji čitav niz takvih problema.

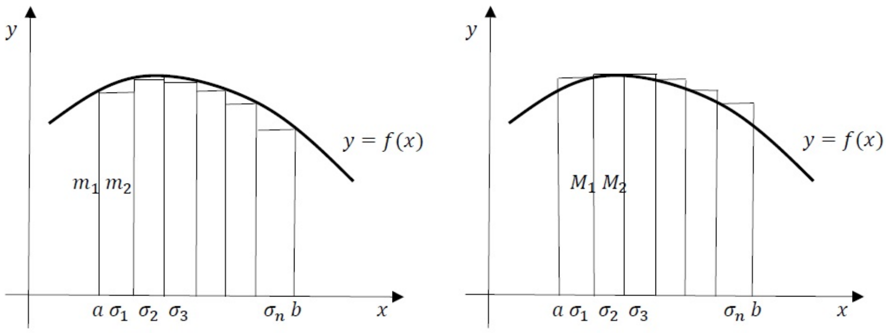
Neka je $y=f(x)$ neprekidna i nenegativna funkcija na segmentu $[a,b]$. Posmatrajmo figuru ograničenu delom grafika ove funkcije nad segmentom $[a,b]$ i pravama $x=a$ i $x=b$. Takvu figuru nazivamo krivilinijski trapez sa osnovom $[a,b]$. Postavlja se pitanje da li za ovakvu figuru možemo da izračunamo njenu površinu. Stoga, podelimo segment $[a,b]$ na n parcijalnih segmenata $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n, n\in\mathbb{N}$, pri čemu ćemo sa $\sigma_i, i\in\{1,2,\ldots,n\}, n\in\mathbb{N}$ označavati i dužinu i -tog parcijalnog segmenta. Označimo sa $m_1,m_2,\ldots,m_n, n\in\mathbb{N}$,najmanje ordinate grafika na segmentima $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n, n\in\mathbb{N}$,tim redom. Proizvodi $m_1\sigma_1$, $m_2\sigma_2$, ... $m_n\sigma_n, n\in\mathbb{N}$ prestavljaju površine "upisanih" pravougaonika u krivolinijski trapez. Zbir $m_1\cdot\sigma_1+m_2\cdot\sigma_2+\ldots+m_n\cdot\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\sigma_i$ predstavlja površinu stepenastog poligona koji obrazuju upisani pravougaonici (videti sliku levo). Za svaku proizvoljnu podelu segmenta $[a,b]$ na parcijalne segmente postoji po jedan ovakav upisan poligon koji se sadrži u krivolinijskom trapezu.

Neka su $M_1,M_2,\ldots M_n, n\in\mathbb{N}$ najveće ordinate grafika funkcije $y=f(x)$ nad parcijalnim segmentima $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n, n\in\mathbb{N}$. Zbir $M_1\cdot\sigma_1+M_2\cdot\sigma_2+\ldots+M_n\cdot\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\sigma_i$predstavlja površinu stepenastog poligona opisanog oko posmatranog krivolinijskog trapeza za proizvoljnu podelu segmenta $[a,b]$ na parcijalne segmente $\sigma_i, i\in\{1,2,\ldots,n\}, n\in\mathbb{N}$(videti sliku desno).

Ako sa P označimo površinu krivolinijskog trapeza, tada očigledno važi

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i \le P \le \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i.$$

Dakle, ako postoji jedinstveni broj P koji ispunjava prethodnu nejednakost, tada ovaj broj predstavlja površinu uočenog krivolinijskog trapeza.



Slika 1.1 Upisani stepenasti poligon u krivolinijski trapez (slika levo) i opisani stepenasti poligon oko krivolinijskog trapeza (slika desno) [Izvor: Autor].

Napomena. Problem određivanja rada promenljive sile pri pravolinijskom kretanju u slučaju kada se pravac puta poklapa sa pravcem sile jeste još jedan od problema koji dovodi do pojma određenog integrala.

GORNJA I DONJA DARBUOVA SUMA

Skup svih gornjih (donjih) Darbuovih suma ograničene funkcije na nekom segmentu je ograničen.

Neka je data ograničena funkcija $f(x)$ na ograničenom intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}, (a<b)$. Za sistem tačaka $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ koji ima osobinu $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$se kaže da je podela P intervala $[a,b]$. Tačke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se nazivaju podeone tačke podele P, a segmenti

$$\sigma_1 = [a, x_1], \ \sigma_2 = [x_1, x_2], \ \sigma_3 = [x_1, x_2], \ \ldots, \ \sigma_n = [x_{n-1}, x_n],$$

se nazivaju podeoni segmenti podele P. Kao i do sada sa $\sigma_i, (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ ćemo istovremeno označava dužine odgovarajućih podeonih intervala.

Napomena. $M \in \mathbb{R}$ je gornja međa funkcije f na segmentu $[a,b]$ ($m \in \mathbb{R}$ je donja međa funkcije f na segmentu $[a,b]$) ako važi da je

$$(\forall x \in [a,b]) \ f(x) \leq M \quad ((\forall x \in [a,b]) \ m \leq f(x)).$$

Neka su M i m tim redom, gornja i donja međa funkcije f na segmentu $[a,b]$, a M_i i m_i tim redom, gornja i donja međa funkcije f na podeonom segmentu $\sigma_i, (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$.

Definicija. Suma proizvoda

$$\overline{S}(\sigma) = M_1 \cdot \sigma_1 + M_2 \cdot \sigma_2 + \ldots + M_n \cdot \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \sigma_i$$

naziva se gornja Darbuova suma funkcije f za datu podelu P segmenta $[a,b]$.

Definicija. Suma proizvoda

$$\underline{S}(\sigma) = m_1 \cdot \sigma_1 + m_2 \cdot \sigma_2 + \ldots + m_n \cdot \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \sigma_i$$

naziva se donja Darbuova suma funkcije f za datu podelu P segmenta $[a, b]$.

OSOBINE DARBUOVIH SUMA

Gornja i donja Darbuova suma, tim redom, predstavljaju površine opisanog, odnosno upisanog stepenastog poligona.

Za svaku podelu P segmenta $[a, b]$ mogu se formirati gornja i donja Darbuova suma za datu ograničenu funkcije f na tom segmentu. Za skup ovih suma važi sledeći stav.

Stav. Skup svih gornjih i i skup svih donjih Darbuovih suma funkcije ograničene na segmentu $[a, b]$ su ograničeni skupovi.

Dokaz. Za proizvoljni podeoni segment σ_i važi proširena nejednakost $m \leq m_i \leq M_i \leq M.$ Njenim množenjem σ_i dobijamo da važi $m \cdot \sigma_i \leq m_i \cdot \sigma_i \leq M_i \cdot \sigma_i \leq M \cdot \sigma_i$ Sabiranjem ovih nejednakosti za $i = 1, 2, \ldots, n$ dobijamo

$$m \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i \leq M \sum_{i=1}^{n} \sigma_i.$$

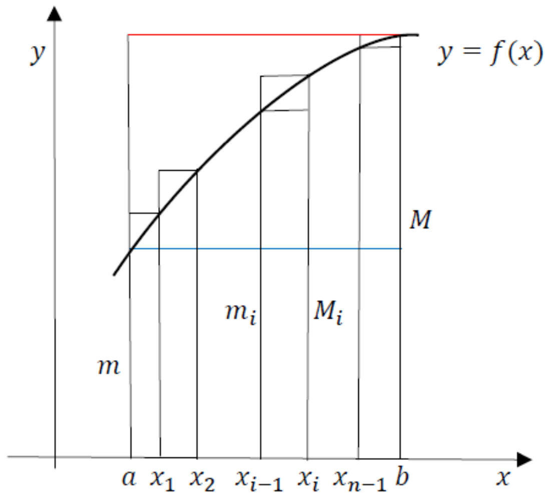
Kako važi da je $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i = b - a,$ prethodna nejednakost postaje

$$m(b-a) \leq \underline{S}(\sigma) \leq \overline{S}(\sigma) \leq M(b-a). \square$$

Darbuove sume $\overline{S}(\sigma)$ i $\underline{S}(\sigma)$, tim redom, predstavljaju površine opisanog, odnosno upisanog stepenastog poligona. Proizvodi $M(b-a)$ i $m(b-a)$ su površine pravougaonika čija je jedna stranica dužine $b-a$, a druga dužine M, odnosno m. Nejednakost

$$m(b-a) \leq \underline{S}(\sigma) \leq \overline{S}(\sigma) \leq M(b-a)$$

označava da se gornja i donja Darbuova suma nalaze između površine upisanog i opisanog pravougaonika za uočeni krivolinijski trapez.



Slika 1.2 Geometrijska interpretacija datog stava [Izvor:Autor].

INTEGRALNE SUME

Integralna suma predstavlja površinu poligona koja nije veća od površine opisanog i nije manja od površine upisanog stepenastog poligona.

Uočimo, za neku podelu P, skup parcijalnih segmenata $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n$segmenta $[a, b]$ i označimo sa $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n,$ tim redom proizvoljno odabrane tačke u odgovarajućim podeonim segmentima.

Definicija. Integralna suma ili Rimanova suma funkcije f jeste suma proizvoda dužina podeonih segmenata $\sigma_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i vrednosti $f(\xi_1)$ funkcije f u tačkama $\xi_1 \in \sigma_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tj.

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i = f(\xi_1)\sigma_1 + f(\xi_2)\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n)\sigma_n.$$

Za datu funkciju f integralne sume su definisane ako je fiksirana podela P segmenta i izvršen izbor tačaka ξ_i na odgovarajućim podeonom segmentu $\sigma_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

U opštem slučaju gornja i donja Darbuova suma ne moraju biti oblika $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i$, jer gornja i donja međa funkcije f na podeonom segmentu $\sigma_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ne mora predstavljati vrednost funkcije f u nekoj tački ξ_i.

Međutim, za neprekidnu funkciju uvek se može naći par tačaka ξ_i i η_i iz podeonog segmenta $\sigma_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takve da važi $f(\xi_i) = m_i$ i $f(\eta_i) = M_i$. Za proizvoljnu podelu P važi

$$\underline{S}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i = \overline{S}(\sigma),$$

jer je $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Integralna suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i$ predstavlja površinu stepenastog poligona sastavljenog od pravougaonika čija je jedna stranica dužine σ_i, a druga dužine $f(\xi_i)$. Površina tog poligona nije veća od površine opisanog i nije manja od površine upisanog stepenastog poligona.

DEFINICIJA ODREĐENOG INTEGRALA

Određeni integral predstavlja graničnu vrednost svih integralnih suma.To je jedinstven broj.

Definicija. Broj I se naziva granica integralnih suma funkcije f ograničene na segmentu $[a, b]$ ako za proizvoljan unapred dati broj $\varepsilon > 0$, postoji broj $\delta > 0$, takav da je nejednakost

$$|S - I| < \varepsilon$$

ispunjena za proizvoljnu integralnu sumu S obrazovanu pri proizvoljnoj podeli P segmenta $[a, b]$, takvoj da je $\max \sigma_i < \delta$.

Ovo znači da ma kako bila izvršena podela segmenta $[a, b]$ i ma kako bio izvršen izbor tačaka ξ_i u odgovarajućim podeonim segmentima nejednakost

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i - I \right| < \varepsilon$$

ispunjena je ako su dijametri svakog od podeonih segmenata manji od δ.

Ovu činjenicu zapisujemo na sledeći način

$$\lim S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i = I.$$

Definicija. Funkcija f ograničena na segmentu $[a, b]$ je integrabilna na segmentu $[a, b]$ ako postoji granična vrednost njenih integralnih suma. Granica integralnih suma naziva se određeni integral funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Oznaka za određeni integral je

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

U prethodnoj oznaci, segment $[a, b]$ se naziva interval integracije. Broj a se naziva donja granica, dok se broj b naziva gornja granica određenog integrala. Funkcija f se naziva podintegralna funkcija.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

USLOVI INTEGRABILNOSTI FUNKCIJE NA SEGMENTU

Gornje i donje sume ne zavise od izbora podele P iz skupa svih podela koje se mogu izvršiti na segmentu $[a,b]$.

Ako je funkcija f ograničena na segmentu $[a,b]$, tada se za nju može formirati po jedan skup gornjih i donjih suma. Ovi skupovi su ograničeni, te imaju konačnu gornju i donju među.

Stav (Darbuov stav) Za funkciju f ograničenu na segmentu $[a,b]$:

1° Postoji granična vrednost gornjih integralnih suma jednaka donjoj međi skupa svih gornjih suma, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i = \overline{I};$$

2° Postoji granična vrednost donjih integralnih suma jednaka gornjoj međi skupa svih donjih suma, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i = \underline{I}.$$

Brojevi $\underline{I}$ i $\overline{I}$ ne zavise od izbora podele P iz skupa svih podela koje se mogu izvršiti na segmentu $[a,b]$.

Potrebni i dovoljni uslovi integrabilnosti neke funkcije dati su u narednom stavu.

Stav. Da bi funkcija f, koja je ograničena na segmentu $[a,b]$ bila integrabilna na tom segmentu potrebno je i dovoljno da granica gornjih suma bude jednaka granici donjih suma, tj. da je $\underline{I} = \overline{I}$.

PRIMER

Integracija funkcije $f(x)=e^x$ na segmentu $[a,b]$.

Integraliti funkciju $f(x)=e^x$ na segmentu $[a,b]$.

Rešenje. Funkcija $f(x)=e^x$ na segmentu $[a,b]$ je ograničena, za svako

$a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)$. Podelimo segment $[a, b]$ na n jednakih delova, uzimajući da je $\frac{b-a}{n} = h$. Tada su parcijalni segmenti ovako izvršene podele dati na sledeći način

$$\sigma_1 = [a, a+h],\ \sigma_2 = [a+h, a+2h],\ \ldots,\ \sigma_{i+1} = [a+ih, a+(i+1)h],\ \ldots,\ \sigma_n = [a+(n-1)h, b].$$

Funkcija $f(x) = e^x$ je rastuća funkcija, pa je

$$m_1 = e^a,\ m_2 = e^{a+h} = e^a \cdot e^h,\ \ldots,\ m_{i+1} = e^a \cdot e^{ih},\ \ldots,\ m_n = e^a \cdot e^{(n-1)h},$$
$$M_1 = e^{a+h} = e^a \cdot e^h,\ M_2 = e^a \cdot e^{2h},\ \ldots,\ M_i = e^a \cdot e^{ih},\ \ldots,\ M_n = e^a \cdot e^{nh}.$$

Donja Darbuova suma je data je data izrazom

$$\begin{aligned}\underline{S} &= he^a + he^a e^h + \ldots + he^a e^{ih} + \ldots he^a e^{(n-1)h} = \\ &= he^a(1 + e^h + e^{2h} + \ldots + e^{ih} + \ldots + e^{n-1}h) = \\ &= he^a \cdot \frac{e^{nh}-1}{e^h-1} = h \cdot \frac{e^{a+nh}-e^a}{e^h-1} = (e^b - e^a) \cdot \frac{h}{e^h-1}.\end{aligned}$$

Gornja Darbuova suma je data je data izrazom

$$\begin{aligned}\overline{S} &= he^a(e^h + e^{2h} + \ldots + e^{ih} + \ldots + e^{nh}) = \\ &= he^a \cdot \frac{e^{nh}-e^h}{e^h-1} = he^h \cdot \frac{e^{a+nh}-e^a}{e^h-1} = (e^b - e^a)\frac{he^h}{e^h-1}.\end{aligned}$$

Važi da je

$$\lim \underline{S} = (e^b - e^a) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^h-1} = e^b - e^a$$

i

$$\lim \overline{S} = (e^b - e^a) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{he^h}{e^h-1} = e^b - e^a.$$

Kako je

$$\lim \overline{S} = \lim \underline{S} = \int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a.$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Pojam određenog integrala

Video klip

Poglavlje 2

Integrabilnost određenih klasa funkcije

KLASE INTEGRABILNIH FUNKCIJA

Datim stavovima su uvedene klase funkcija koje su integrabilne na segmentu.

Stav. Ako je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$ tada je i funkcija $|f|$ integrabilna na tom segmentu.

Stav. Neprekidna funkcija f na segmentu $[a, b]$ integrabilna je na tom segmentu.

Napomena. Prethodni stav ne mora da važi u obrnutom smeru. Takođe, u prethodnom stavu u pretpostavci neprekidnosti je (prema Koši-Bolcanovom stavu) sadržana i pretpostavka ograničenosti funkcije f.

Stav. Ako je funkcija f ograničena na segmentu $[a, b]$ i na njemu ima konačno mnogo tačaka prekida, tada je ona integrabilna na tom segmentu.

Stav. Ako je funkcija ograničena i monotona na segmentu $[a, b]$, tada je ona integrabilna na tom segmentu.

PRIMER

Primer prekidne funkcije koja nije integrabilna.

Dokazati da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ iracionalan broj} \\ 0, & x \text{ racionalan broj} \end{cases}$$

nije integrabilna na proizvoljnom intervalu $[a, b]$, (a < b).

Rešenje. Za proizvoljni podeoni segment σ_i važi da je $M_i = 1$ i $m_i = 0$, za $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\overline{S} = \sum_i M_i \sigma_i = \sum_i \sigma_i = 1 \quad \text{i} \quad \underline{S} = \sum_i m_i \sigma_i = 0.$$

Dobili smo da je

$$\lim \overline{S} \neq \lim \underline{S},$$

pa zaključujemo da $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ne postoji.

Napomena. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ iracionalan broj} \\ 0, & x \text{ racionalan broj} \end{cases}$$

se zove Dirihleova funkcija.

Poglavlje 3

Osnovne osobine određenog integrala

METOD LINEARNOST, METOD PARCIJALNE INTEGRACIJE I METOD SMENE ZA ODREĐENI INTEGRAL

U stavu su iskazane najvažnije osobine određenog integrala, izražene preko uvedene oznake.

Stav. Neka su date neprekidne funkcije $y=f(x)$ i $y=g(x)$ na zatvorenom intervalu $[a,b]$. Važi da je:

a) $\int\limits_a^a f(x)dx=0;$

b) $\int\limits_b^a f(x)dx=-\int\limits_a^b f(x)dx;$

c) $\int\limits_a^b \big(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\big)dx=\alpha\int\limits_a^b f(x)dx+\beta\int\limits_a^b g(x)dx;$

d) $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$, gde je $c\in[a,b]$;

e) $\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)dx$ $-$ parcijalna integracija za određene integrale.

f) $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_p^q f(x(t))\cdot x'(t)dt,$ gde je $x=x(t),\ t\in[p,q]\subseteq\mathbb{R}$, jedna strogo monotona i diferencijabilna funkcija sa neprekidnom izvodnom funkcijom, gde je $a=x(p)$ i $b=x(q)$.

g) Ako je funkcija $y=f(x)$ neparna funkcija, tada je $\int\limits_{-a}^a f(x)dx=0;$

h) Ako je funkcija $y=f(x)$ parna funkcija, tada je $\int\limits_{-a}^a f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx.$

Napomena. Osobine pod a) i pod b) su direktna posledica Rimanovog integrala.

Osobina c) se naziva linearnost određenog integrala po podintegralnoj funkciji.

Osobina d) (veoma važna osobina) naziva se svojstvo aditivnosti određenog integrala po domenu integracije.

Osobina e) je pravilo parcijalne integracije za određeni integral i u njemu pretpostavljamo dodatno da funkcije f i g imaju neprekidne izvodne funkcije. U e) važi

$$f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a).$$

Svojstvo f) je pravilo smene promenljive za određeni integral (ovde naročito treba voditi računa o promeni granica prilikom primene ovog svojstva).

PRIMER

Primena formule za parcijalnu integraciju određenog integrala.

Određeni integral

$$\int_0^1 xe^x\,dx$$

primenom formule za parcijalnu integraciju određenog integrala, znajući da u ovom slučaju treba staviti da je $x = u$, tj. $dx = du$ i $e^x dx = dv$, tj. da je $e^x = v$ možemo zapisati u obliku

$$\int_0^1 xe^x\,dx = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx.$$

Važi da je

$$xe^x|_0^1 = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 = e.$$

Iz jednog od prethodnih primera smo videli da je

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a, \text{ pa je } \int_0^1 e^x\,dx = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Tada je

$$\int_0^1 xe^x\,dx = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e-1) = 1.$$

POZITIVNOST I MONOTONOST ODREĐENOG INTEGRALA

U stavu je dato nekoliko bitnih svojstava određenog integrala u vezi sa poretkom na realnoj pravoj.

U narednom stavu zadaćemo nekoliko bitnih svojstava određenog integrala u vezi sa poretkom na realnoj pravoj.
Neka su date neprekidne funkcije $y=f(x)$ i $y=g(x),$ za $x\in[a,b]$.

a) Ako je $f(x)\geq 0,$ za $x\in[a,b]$, tada je $\int\limits_a^b f(x)dx\geq 0;$

b) Ako je $f(x)\leq g(x),$ za $x\in[a,b]$, tada je $\int\limits_a^b f(x)dx\leq \int_a^b g(x)dx;$

c) Važi da je $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\leq \int\limits_a^b |f(x)|dx;$

d) Ako je $M=\max\left\{|f(x)|\mid x\in[a,b]\right\}\in\mathbb{R}$, tada je

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\leq M\cdot(b-a).$$

Svojstvo a) naziva se pozitivnost određenog integrala, a svojstvo b) naziva se monotonost određenog integrala.

Svojstvo d) se dobija iz činjenice

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

i

$$\int\limits_a^b M\cdot dx=M\cdot\int\limits_a^b dx=M\int\limits_a^b 1\cdot dx,$$

a može se dokazati da je

$$\int_a^b 1 \cdot dx = b - a.$$

ODREĐENI INTEGRAL SA PROMENLJIVOM GORNJOM GRANICOM. LAGRANŽEVA TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI

Lagranževa teorema o srednjoj vrednosti određenog integrala dokazuje se uz primenu pravila za određenu integraciju sa promenljivom gornjom granicom.

Stav. Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x)$, za $x \in [a, b.]$ Posmatrajmo funkciju

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad \text{za } x \in [a, b].$$

Tada je

$$\Phi'(x) = f(x), \qquad \text{za } x \in [a, b].$$

Prethodni stav predstavlja pravilo određene integracije sa promenljivom gornjom granicom.

Stav. Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x)$, za $x \in [a, b]$. Tada postoji neko $c \in [a, b]$, tako da je

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Ovaj stav se naziva Lagranževa teorema o srednjoj vrednosti određenog integrala i dokazuje se primenom prethodnog stava.

Poglavlje 4

Veza između određene i neodređene integracije

UVOD

Određena i neodređena integracija nisu istog reda, ali se mogu dovesti u vezu preko Njutn-Lajbnicove formule.

Krajem 17. veka, Isak Njutn i Gotfrid Vilhem Lajbnic zasnovali su diferencijalni i integralni račun, nezavisno jedan od drugog. Takođe, oni su istovremeno formulisali i teoremu o određenoj integraciji sa promenljivom gornjom granicom. Uz pomoć te teoreme izvedena je Njutn-Lajbnicova formula koja omogućava jednostavniji rad sa određenim integralima.
Integralni račun realnih funkcija jedne realne promenljive obrađuje se u dva aspekta i to kao:

- neodređena integracija,
- određena integracija.

Ove dve vrste integracija nisu istog reda, ali se mogu dovesti u vezu preko Njutn-Lajbnicove formule. Zapravo, na osnovu ovog stava mnoga svojstva za određeni integral se mogu dobiti iz odgovarajućih pravila za neodređeni integral.

NJUTN-LAJBNICOVA FORMULA

Primenom Njutn-Lajbnicove formule se računanje određenog integrala neke funkcije na nekom intervalu izvršava određivanjem njene primitivne funkcije.

Stav. Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x)$, za $x \in [a,b]$. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gde je F jedna (bilo koja) primitivna funkcija za funkciju f.

Dokaz. Neka su $F(x)$ i $\Phi(x)$ primitivne funkcije za $f(x)$ na $[a,b]$ koje se razlikuju za konstantu, tj. $\Phi(x) = F(x) + c$. Tada prema pravilu za određenu integraciju sa promenljivom gornjom granicom važi da je

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c. \qquad (*)$$

Ako u formulu $(*)$ stavimo da je $x = a$, dobijamo $0 = F(a) + c \Longrightarrow c = -F(a)$. Tada, formula $(*)$ se može zapisati u obliku

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Ako sada stavimo u formulu (*) da je $x = b$ dobijamo da je

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

odnosno, ako se promenljiva u podintegralnom izrazu u formuli (*) označi sa x imamo da

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

PRIMER 1

Primena Njutn - Lajbnicova formula i Metode linearnosti za određivanje vrednosti određenog integrala.

Rešiti integrale:
a)

$$\int_{-1}^{4} (8x^3 + 3x^2 + 1),$$

b)

$$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + \sqrt{-x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx.$$

Rešenje.
a)

$$\int_{-1}^{4} (8x^3 + 3x^2 + 1)\, dx = \left(8\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + x \right)\Big|_{-1}^{4} =$$

$$2 \cdot 4^4 + 4^3 + 4 - (2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)) = 580.$$

b)

$$\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+\sqrt{-x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\left(-\frac{1}{2x^2}+\ln|x|-\frac{2(-x)^{3/2}}{3}-3\sqrt[3]{x}\right)\Big|_{-3}^{-1}=$$

$$\frac{1}{2(-1)^2}+\ln|-1|-\frac{2(1)^{3/2}}{3}-3\sqrt[3]{(-1)}$$

$$-\left(-\frac{1}{2(-3)^2}+\ln|-3|-\frac{2(3)^{3/2}}{3}-3\sqrt[3]{(-3)}\right)=\frac{17}{9}-\ln 3-3\sqrt[3]{3}+2\sqrt{3}.$$

PRIMER 2

Primena Njutn - Lajbnicova formula, kao i metode linearnosti i metode smene za određivanje vrednosti određenog integrala.

Rešiti sledeće integrale:

a) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{3}\left(2e^{3x}+\frac{3}{x^2+9}+1\right)dx$; b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3}\left(\sin x+\operatorname{tg} x+2\cos\frac{x}{2}\right)dx.$

Rešenje.

a)

$$\int_{\sqrt{3}}^{3}\left(2e^{3x}+\frac{3}{x^2+9}+1\right)dx=\left(\frac{2}{3}e^{3x}+\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+x\right)\Big|_{\sqrt{3}}^{3}=$$

$$=\frac{2}{3}e^{3\cdot 3}+\operatorname{arctg}(3/3)+3-\frac{2}{3}e^{3\cdot\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3)-\sqrt{3}=$$

$$=\frac{2}{3}\left(e^{9}-e^{3\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{12}+3-\sqrt{3}.$$

b)

$$\int_{0}^{\pi/3}\left(\sin x+\operatorname{tg} x+2\cos\frac{x}{2}\right)dx=\left(-\cos x-\ln|\cos x|+4\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi/3}=$$

$$=-\cos(\pi/3)-\ln|\cos(\pi/3)|+4\sin\frac{\pi/3}{2}+\cos 0+\ln|\cos 0|+4\sin\frac{0}{2}=\frac{5}{2}+\ln 2.$$

PRIMER 3

Primena Njutn - Lajbnicova formula i Metode parcijalne integracije za određivanje vrednosti određenog integrala.

Rešiti integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx.$$

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx &= \begin{bmatrix} \text{parcijalna} & \text{integracija :} \\ u = x^2, & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \\
&+ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \begin{bmatrix} \text{parcijalna} & \text{integracija :} \\ u = x, & dv = \cos x dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{bmatrix} = \\
&= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\frac{\pi}{2} + 0^2 \cos 0 + 2\left(x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) = \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2} - 0 \sin 0\right) - 2(-\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}) = \\
&= \pi + 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \\
&= \pi - 2.
\end{aligned}$$

Koristili smo da je $\sin\frac{\pi}{2} = \cos 0 = 1$ i $\cos\frac{\pi}{2} = \sin 0 = 1$.

PRIMER 4

Primena Njutn - Lajbnicova formula i smene $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ za određivanje vrednosti određenog integrala.

Rešiti integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \cos x}.$$

Rešenje.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x} = \begin{bmatrix} \text{smena : } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{tg} 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4+2t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{2(2+t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{0}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

PRIMER 5

Primena Njutn - Lajbnicova formula i smene $x = a\sin t$ za određivanje vrednosti određenog integrala.

Rešiti integral

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx.$$

Rešenje.

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx = \begin{bmatrix} \text{smena : } x = 3\sin t, \\ dx = 3\cos t dt \\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin 0 = 0 \\ x = 3 \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-9\sin^2 t}\, 3\cos t dt =$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt =$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cdot cost dt = \begin{bmatrix} \text{važi da je :} \\ |\cos t| = \cos t, \text{ za } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{bmatrix} =$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{9}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\sin\pi}{2} - \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{9\pi}{4}.$$

Poglavlje 5

Geometrijska integracija određenog integrala

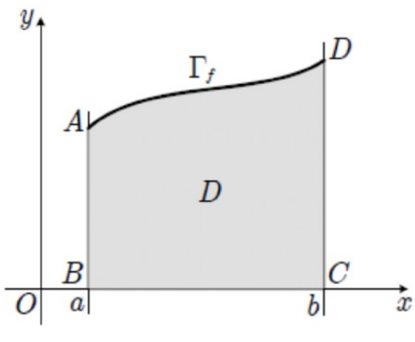
ODREĐIVANJE POVRŠINE OBLASTI U RAVNI PRIMENOM ODREĐENOG INTEGRALA U SLUČAJU DA JE GRAFIK FUNKCIJE IZNAD OX OSE ILI JE DODIRUJE

Geometrijski, određeni integral neke funkcije $y=f(x)$ na intervalu $[a,b]$ predstavlja površinu dela ravni ograničene pravama $y=0$, $x=a$ i $x=b$, kao i delom krive na tom intervalu.

Neka je data neprekidna funkcija $y=f(x)$, za $x\in[a,b]$ i neka je $f(x)>0$, za $x\in[a,b]$. Figura D na datoj slici naziva se $''$krivolinijski trapez$''$, a Γ_f je grafik (kriva) funkcije f od tačke A do tačke D koji prestavlja jednu stranicu tog krivolinijskog trapeza. U nastavku će se govoriti o geometrijskoj interpretaciji i primenama određenog integrala.
Može se dokazati da je

$$P_{(D)}=\int_a^b f(x)dx.$$

gde je $P_{(D)}$ površina krivolinijskog trapeza D koji je dat na slici.



Slika 5.1 Krivolinijski trapez kada je $f(x)>0$, za $x\in[a,b]$ [Izvor:Autor].

Prethodna formula važi ako je $f(x)\geq 0$, za $x\in[a,b]$ (tj. ako za neko $x\in[a,b]$ važi da je $f(x)=0$). U tom slučaju se figura D, takođe, naziva krivolinijski trapez koji je dat u degenerativnom obliku. Na primer, figure date na sledećoj slici predstavljaju krivolinijske trapeze u degenerisanom obliku.

Slika 5.2 Degenerisani oblik krivolinijskog trapeza kada je $f(x) \geq 0,$ za $x \in [a, b]$ [Izvor:Autor].

ODREĐIVANJE POVRŠINE OBLASTI U RAVNI PRIMENOM ODREĐENOG INTEGRALA U SLUČAJU DA JE GRAFIK FUNKCIJE ISPOD OX OSE

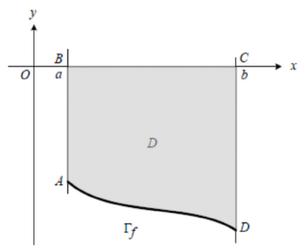
U ovom slučaju je interpretacija slična kao i u prethodnom slučaju, s tim što se ispred površine posmatrane figure stavlja predznak minus.

Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x),$ za $x \in [a, b],$ i da je $f(x) < 0,$ za $x \in [a, b].$

Figura D sa date slike je krivolinijski trapez i važi da je:

$$P_{(D)} = -\int_a^b f(x)dx.$$

Sve rečene o mogućim degenerisanim oblicima krivilinijskog trapeza u slučaju da je $f(x) \geq 0,$ važi i u slučaju da je $f(x) \leq 0.$



Slika 5.3 Krivoliniski trapez za $f(x) < 0,$ za $x \in [a, b]$ [Izvor:Autor].

Ako je data neprekidna funkcija $y = f(x),$ za $x \in [a, b]$ takva da menja znak na svom domenu (barem jednom), na primer, kao na sledećoj slici.

Slika 5.4 Krivolinijski trapez u situaciji kada funkcija y = f(x) menja znak za $x \in [a, b]$ [Izvor:Autor].

U ovom slučaju se može postaviti pitanje izračunavanjem površine figure koja je ograničena krivom Γ_f , x-osom i pravama $x = a$ i $x = b$. Koristeći prethodne slučajeve i svojstvo aditivnosti određenog integrala po domenu integracije ova površina se može izračunati na sledeći način

$$P_{(D)} = P_{(D_1)} + P_{(D_2)} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

Prethodna tehnika se može primeniti i na izračunavanje komplikovanijih figura datih u ravni, a koje se pomoću pravih linija mogu podeliti na konačan broj slučajeva.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Površina dela ravni obuhvaćena datim krivama

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

POVRŠINA DELA RAVNI OBUHVAĆENA DATIM KRIVAMA. PRIMER

Data je formula koja se primenjuje u ovim situacijama. Površina određena presekom dve sinusoide.

Ako su f i g neprekidne funkcije na $[a,b]$ i važi $f(x)\geq g(x),$ za sve $x\in[a,b]$, tada je površina ograničena krivama f i g i ordinatama u tačkama a i b jednaka

$$P=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$

$\mathbf{Primer.}$Izračunati površinu između krivih $y=\sin x$ i $y=\sin 2x$ na intervalu $[0,\pi]$.

$\mathbf{Rešenje.}$Na intervalu $[0,\pi]$ funkcije $y=\sin x$ i $y=\sin 2x$ imaju tri presečne tačke, koje se dobijaju kao rešenje jednačine $\sin x=\sin 2x$. Zaista, ako rešimo ovu jednačinu imamo

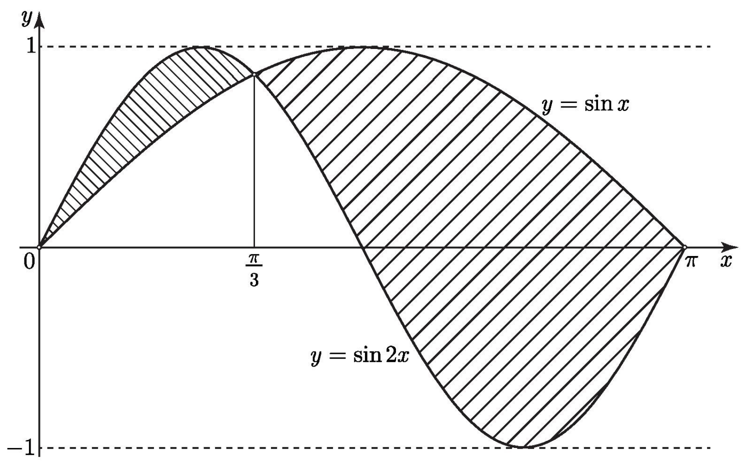
$$\sin x=\sin 2x\Leftrightarrow \sin x-\sin 2x=0\Leftrightarrow \sin x-2\sin x\cos x=0\Leftrightarrow \sin x\cdot(1-2\cos x)=0.$$

Tada dobijamo da je $\sin x=0\vee 1-2\cos x=0$. Na intervalu $[0,\pi]$ prethodne dve jednačine imaju tri rešenja $x=0\vee x=\pi\vee x=\frac{\pi}{3}$.

Na intervalu $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ važi da je $\sin 2x\geq\sin x,$ dok na intervalu $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ važi da je $\sin x\geq\sin 2x$ (videti sliku).

Zbog toga je tražena površina

$$\begin{aligned}P&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx=\\&=\left[-\frac{\cos 2x}{2}+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\cos x+\frac{\cos 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{2}.\end{aligned}$$



Slika 5.5 Deo ravni ograničen datim sinusoidama [Izvor:Autor].

AUTORSKI VIDEO KLIP

Izračunavanje površine dela ravni ograničene sa dve krive.

Video klip

PRIMER

Površina oblasti dobijena kao presek krive i dve prave.

Odrediti površinu ograničenu krivom $y = x^3$ i pravama $y = x + 6$ i $y = -\frac{x}{2}$.

Rešenje. Presek pravih $y = 6 + x$ i $2y + x = 0$ je tačka $A(-4, 2)$, a presek krive $y = x^3$ sa pravom $2y + x = 0$ je tačka $O(0, 0)$ (koordinatni početak), dok je presek krive $y = x^3$ sa pravom $y = 6 + x$ tačka $B(2, 8)$ (videti sliku). Svaka od ovih presečnih tačaka dobija se rešavanjem odgovarajućih sistema jednačina:

tačka $A : y = 6 + x \wedge 2y + x = 0,$

tačka $O : y = x^3 \wedge 2y + x = 0,$

tačka $B : y = 6 + x \wedge y = x^3.$

Tražena površina se dobija kao zbir $P = P_1 + P_2$, gde je

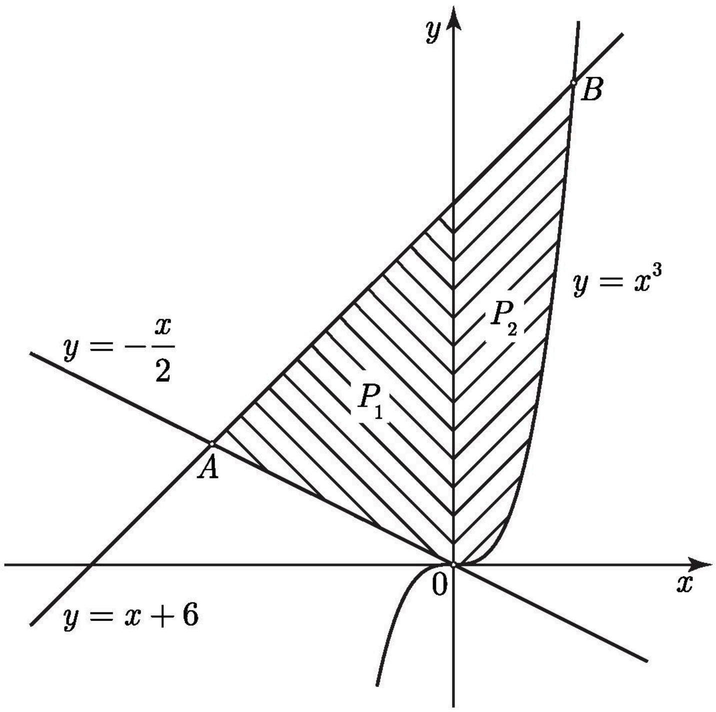
$$P_1 = \int_{-4}^{0} \left(6 + x - \left(-\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) dx =$$

$$= \int_{-4}^{0} \left(6 + \frac{3x}{2}\right) dx = \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right)\Bigg|_{-4}^{0} =$$

$$= 24 - 12 = 12,$$

$$P_2 = \int_{0}^{2} \left(6 + x - x^3\right) dx = \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2} = 12 + 2 - 4 = 10.$$

Prema tome je $P = P_1 + P_2 = 12 + 10 = 22.$



Slika 5.6 Deo ravni dobijen presekom date krive i datih pravih [Izvor:Autor].

ODREĐIVANJE POVRŠINE DELA RAVNI - FUNKCIJA JE ZADATA U PARAMETARSKOM OBLIKU

Površina dela ravni se može izračunavati, ako je kriva po kojoj se integrali zadata u parametarskom obliku.

Neka je funkcija zadata u parametarkom obliku

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

gde je $t \in [t_1, t_2]$ i neka su funkcije φ i ψ neprekidne na intervalu $[t_1, t_2]$.

Ako pretpostavimo da je funkcija φ strogo monotona na intervalu $[t_1, t_2]$ i da važi da je $\varphi(t_1) = a$ i $\varphi(t_2) = b$, tada je

$$P = \int_a^b y\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\, dt,$$

pri čemu smo iskoristili da je $dx = \varphi'(t)\, dt$.

Primer. Izračunati površinu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Rešenje. Jednačina elipse se može zadati u parametarkom obliku (o tome smo govorili u Matematici 1) na sledeći način

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$$

gde je gde je $t \in [0, 2\pi]$.
Mi ćemo izračunati površinu četvrtine elipse, odnosno de elipse koji se nalazi u prvom kvadrantu. Očigledno da u tom slučaju važi $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Ako sa P označimo površinu elipse, tada je

$$\frac{P}{4} = \int_0^a y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t \cdot (-a \sin t)\, dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{ab\, \pi}{4}.$$

Odavde dobijamo da je $P = ab\, \pi$. Specijalno, za $a = b = r$ dobijamo krug poluprečnika r čija je površina $P = r^2\, \pi$.

Napomena. Svakako, u prvom kvadrantu jednačina elipse glasi $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, gde je $x \in [0, a]$. Dakle, ovaj zadatak se može rešavati i posmatranjem funkcije koja definiše jednačinu elipse u eksplicitnom obliku i određivanjem integrala $\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$. Svakako, rešavanje ovog integrala je komplikovanije, nego integrala koji smo dobili prelaskom na parametarski oblik jednačine elipse. Sam prelazak je realizovan tako da uzeli da je $y = b\, \sin t$ i $dx = -a\, \sin t dt$, pri čemu za $x = 0$ nalazimo da je u prvom kvadrantu $t = \frac{\pi}{2}$, dok za $x = a$ je $t = 0$.

Poglavlje 1

Određivanje dužine luka krive primenom određenog integrala

FORMULA ZA ODREĐIVANJE DUŽINA LUKA KRIVE

Datom formulom se određuje dužina luke krive koja je zadata u eksplicitnom obliku. Pokazano je kako se može izvesti formula za obim kruga.

Neka je data neprekidna funkcija $y=f(x),\ \ x\in[a,b]$. Takođe, neka postoji funkcija $y=f'(x)$, koja je neprekidna na $[a,b]$. Posmatrajmo krivu Γ_f datu funkcijom f. Tada je

$$d_{(l)}=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx,$$

gde je $l=\Gamma_f$, a $d_{(l)}$ dužina te krive.

U slučaju da je kriva zadata parametarski u obliku $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ za $t\in[t_1,t_2]$, gde su funkcije neprekidno-diferencijalbilne na $[t_1,t_2]$ i φ je strogo monotona na $[t_1,t_2]$. Takođe, neka je $\varphi(t_1)=a$ i $\varphi(t_2)=b$.

Tada, $f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi'(t)\,dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$,pa imamo da je

$$d_{(l)}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\varphi'(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}{\varphi'(t)}\varphi'(t)\,dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

PRIMER 1

Određivanje obima kruga na dva načina: jednačina kruga je zadata eksplicitno i jednačina kruga je zadata parametarski.

Odredimo obim kruga $x^2 + y^2 = r^2$.

Rešenje. Posmatraćemo dužinu luka kružnica $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, u oznaci $d_{(l)}$, u prvom kvadrantu i ona predstavlja četvrtinu obima kruga. Tada imamo da je:

$$d_{(l)} = \int\limits_0^r \sqrt{1 + \left((\sqrt{r^2 - x^2})'\right)^2} dx = \int\limits_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$

$$= \int\limits_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int\limits_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Poslednji integral je dat kao tablični integral i imamo da je

$$l = r \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_0^r = r \cdot (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{r\pi}{2},$$

gde je $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ i $\arcsin 0 = 0$. Ako sa O označimo traženi obim kruga, tada imamo da je

$$O = 4d_{(l)} = 2r\pi.$$

Zadatak možemo rešiti koristeći parametarsko zadavanje jednačine kružnice. Za datu kružnicu, važi da je $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$, gde je $t \in [0, 2\pi)$. Posmatraćemo dužinu luka kružnice u prvom kvadrantu. Tada je

$$d_{(l)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}\, dt = r \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{r\pi}{2}$$

Ako sa O označimo traženi obim kruga, tada imamo da je

$$O = 4d_{(l)} = 2r\pi.$$

PRIMER 2

Određivanje dužine luka krive.

Odrediti dužinu luka krive $f(x) = 3x^{2/3} - 10$ od tačke $A(8, 2)$ do tačke $B(27, 17)$.

Rešenje. Kako je $f'(x) = 2x^{-1/3}$, to je tražena dužina luka

$$l = \int_8^{27} \sqrt{1 + (2x^{-1/3})^2} dx = \int_8^{27} \sqrt{1 + \frac{4}{x^{2/3}}} dx = \int_8^{27} \frac{\sqrt{4 + x^{2/3}}}{x^{1/3}} dx.$$

Poslednji integral se rešava smenom $t = x^{2/3} + 4$, $dt = \frac{2}{3}x^{-1/3}dx$, pri čemu je za $x = 8$, $t = 8$, a za $x = 27$, $t = 13$. Tako se dobija

$$l = \frac{3}{2}\int_{8}^{13}\sqrt{t}dt = t^{3/2}\Big|_{8}^{13} = \sqrt{13^3} - \sqrt{8^3} \approx 24,245\,.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a - primer izračunavanja dužine luka krive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

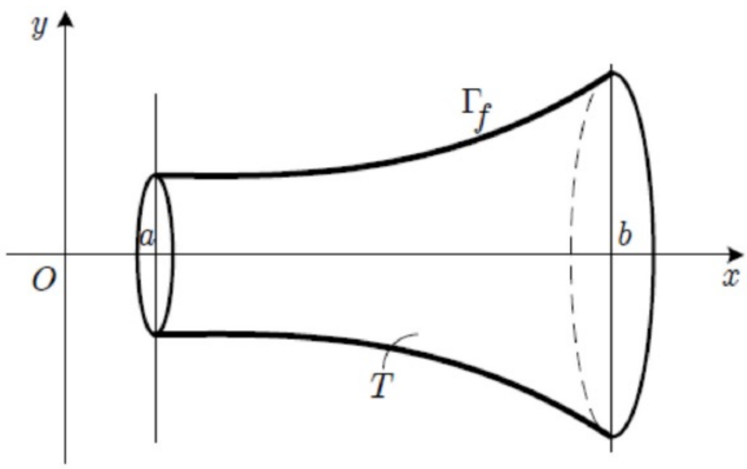
Poglavlje 2

Određivanje zapremine rotacionog tela

ZAPREMINA ROTACIONOG TELA

Ovde posmatramo slučaj kada deo neprekidne funkcije rotira oko x-ose. Analogno se mogu izvesti formule kada se rotacija vrši oko y-ose ili generalnije oko proizvoljne prave.

Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x),\ x \in [a,b]$. Pod rotacionim telom $T \subseteq \mathbb{R}^3$ koje je u ovom slučaju generisano krivom $l = \Gamma_f$ podrazumeva se telo nastalo rotacijom te krive oko x-ose za 2π .



Slika 2.1 Rotaciono telo u slučaju $y = f(x) > 0,$ za $x \in [a,b]$ [Izvor: Autor].

Napomena. Na potpuno analogan način mogu se posmatrati rotaciona tela nastala rotacijom oko y-ose. U generalnijem slučaju (koji ovde neće biti razmatran), rotaciono telo može nastati rotacijom krive oko bilo koje prave u $\mathbb{R}^2$, kao ose.

Za slučaj dat na prethodnoj slici biće data formula za izračunavanje zapremine tela T primenom određenog integrala. Pod omotačem tela T podrazumevamo površinu u $\mathbb{R}^3$ koja je nastala kao trag rotacije krive Γ_f. Za telo T tada važi da se njegova zapremina računa prema formuli

$$V_{(T)} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Moguće je razmatrati slučajeve i kada je funkcija negativna, tj. $y = f(x) < 0$ ili ako funkcija uzima za neke vrednosti promenljive x vrednost nula ili menja znak na svom domenu, analogno ovom slučaju.

U slučaju da je kriva zadata parametarski u obliku $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ za $t \in [t_1, t_2]$, gde su funkcije neprekidno-diferencijalbilne na $[t_1, t_2]$ i φ je strogo monotona na $[t_1, t_2]$. Takođe, neka je $\varphi(t_1) = a$ i $\varphi(t_2) = b$. Koristeći prethodnu formulu i činjenicu da je $dx = \varphi'(t)\, dt$ dobijamo da se, ako je kriva zadata parametarski, površina odgovarajućeg rotacionog tela računa po formuli

$$V_{(T)} = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)\varphi'(t)\, dt.$$

PRIMER

Izračunavanje zapremine torusa.

Odrediti zapreminu torusa koji se dobija obrtanjem kružnice $x^2 + (y-3)^2 = 4$oko $Ox-$ ose.

Rešenje. Označimo sa $f_1(x) = 3 + \sqrt{4-x^2}$ i $f_2(x) = 3 - \sqrt{4-x^2}$. Tada je tražena zapremina

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-r}^{r} (f_1(x))^2\, dx - \pi \int_{-r}^{r} (f_2(x))^2\, dx.$$

Prema tome je

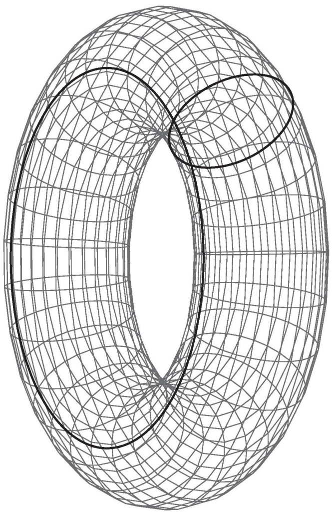
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{2} \left((3 + \sqrt{4-x^2})^2 - (3 - \sqrt{4-x^2})^2 \right) dx = \\ &= \pi \int_{-2}^{2} \left(9 + 6\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2 - 9 + 6\sqrt{4-x^2} - 4 + x^2 \right) dx = \\ &= 12\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}. \end{aligned}$$

Kako je funkcija $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ parna funkcija, tada na osnovu ranije pomenute osobine za određeni integral važi

$$12\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} = 2 \cdot 12\pi \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = 24\pi \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx.$$

Poslednji integral se rešava smenom $x = 2\sin t$, gde je $dx = 2\cos t\,dt$. Za $x = 0$ nakon uvođenja smene donja granica postaje $t = 0$. Slično za $x = 2$ je $t = \frac{\pi}{2}$. Konačno imamo da je

$$V = 96\pi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 96\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= 96\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 24\pi^2.$$



Slika 2.2 Torus koji se dobija rotacijom kružnice čiji centar nije na Ox osi oko Ox ose [Izvor: Autor].

AUTORSKI VIDEO KLIP

Primena određenog integrala na izračunavanje zapremine torusa.

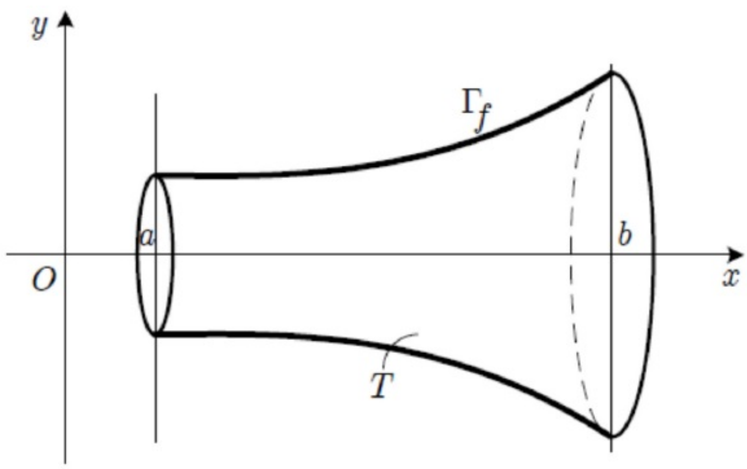
Poglavlje 3

Određivanje površine rotacionog tela

POVRŠINA ROTACIONOG TELA

Ovde posmatramo slučaj kada deo neprekidne funkcije rotira oko x-ose. Analogno se mogu izvesti formule kada se rotacija vrši oko y-ose ili generalnije oko proizvoljne prave.

Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Pod rotacionim telom $T \subseteq \mathbb{R}^3$ koje je u ovom slučaju generisano krivom $l = \Gamma_f$ podrazumeva se telo nastalo rotacijom te krive oko x-ose za 2π .



Slika 3.1 Rotaciono telo u slučaju $y = f(x) > 0,$ za $x \in [a, b]$ [Izvor: Autor].

Na potpuno analogan način mogu se posmatrati rotaciona tela nastala rotacijom oko y-ose. U generalnijem slučaju (koji ovde neće biti razmatran), rotaciono telo može nastati rotacijom krive oko bilo koje prave u $\mathbb{R}^2$, kao ose.

Za slučaj dat na prethodnoj slici biće data formula za izračunavanje površine omotača M, primenom određenog integrala. Pod omotačem tela T podrazumevamo površinu u $\mathbb{R}^3$ koja je nastala kao trag rotacije krive Γ_f. Površina omotača M tela T se računa prema formuli

$$M_{(T)} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Moguće je razmatrati slučajeve i kada je funkcija negativna, tj. $y = f(x) < 0$ ili ako funkcija uzima za neke vrednosti promenljive x vrednost nula ili menja znak na svom domenu, analogno ovom slučaju.

U slučaju da je kriva zadata parametarski u obliku $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ za $t \in [t_1, t_2]$, gde su funkcije neprekidno-diferencijalbilne na $[t_1, t_2]$ i φ je strogo monotona na $[t_1, t_2]$. Takođe, neka je $\varphi(t_1) = a$ i $\varphi(t_2) = b$. Koristeći prethodnu formulu i činjenicu da je $dx = \varphi'(t)\,dt$ dobijamo da se površina odgovarajućeg rotacionog tela računa po formuli

$$M_{(T)} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \sqrt{1 + \left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)^2}\, \varphi'(t)\,dt =$$

$$2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \frac{\sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)}}{\varphi'(t)} \varphi'(t)\,dt = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)}\,dt.$$

PRIMER

Određivanje površine lopte.

Odrediti površinu lopte koja se dobije rotacijom kružnice $x^2 + y^2 = 4$ oko Ox -ose.

Rešenje. Rotiranjem gornjeg dela polukružnice zadate funkcijom $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ oko $Ox -$ ose dobija se lopta čija se površina izračunava po formuli

$$P = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{4 - x^2}\right)'\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx =$$

$$= 4\pi x|_{-2}^{2} = 16\pi.$$

Gornji deo polukružnice se može zadati parametarski na sledeći način $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, gde je $t \in [0, \pi]$. Tada je

$$
\begin{aligned}
M_{(T)} &= 2\pi \int\limits_0^\pi 2\sin t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt = \\
&= 8\pi \int\limits_0^\pi \sin t\, dt = -8\pi \cos t|_0^\pi = \\
&= 16\pi.
\end{aligned}
$$

AUTORSKI VIDEO KLIP

Primena određenog integrala na izračunavanje površine lopte.

Poglavlje 4

Nesvojstveni integral

UOPŠTENJE ODREĐENOG INTEGRALA

Ovde uvodimo novu vrste integracije koja predstavlja uopštenje određenog integrala realne funkcije jedne realne promenljive.

Prilikom definisanja određenog integrala imamo zahteve da je podintegralna funkcija ograničena na intervalu integracije i da je taj interval konačan. Oslobađajući se jednog od ovih zahteva dobijamo dva tipa nesvojstvenih integrala realnih funkcija jedne realne promenljive.

Izostavljanjem zahteva da je interval na kome vršimo integraciju konačan, dobijamo da određeni (svojstven) integral postaje nesvojstven integral prve vrste, dok izostavljanje zahteva ograničenosti podintegralne funkcije, dobijamo da određeni (svojstven) integral postaje nesvojstven integral druge vrste.

Postoje i nesvojstveni integrali kod kojih istovremeno pomenuta dva zahteva nisu ispunjena na intervalu integracije, ali postoje tehnike kojima se takvi integrali svode na nesvojstvene integrale prve i/ili druge vrste.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Pojam nesvojstvenog integrala.

4.1 Nesvojstveni integral prve vrste

INTEGRAL SA BESKONAČNOM GORNJOM GRANICOM

Situacija kada je samo gornja granica integrala beskonačna.

Neka je dat interval $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, i neka je data funkcija $y = f(x)$ koja je ograničena na $[a, +\infty)$. Tada ima smisla posmatrati integral

$$\int_a^c f(x)dx, \qquad \text{za} \quad c \geq a,$$

i sledeći limes:

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx.$$

Granična vrednost prethodnog limesa naziva se nesvojstven integral prve vrste funkcije f u $+\infty$ i on može postojati u $\mathbb{R}$ ili ne (u zavisnosti da li ova granična vrednost konvergira ili ne). Shodno tome, za posmatrani nesvojstven integral se kaže da konvergira ili ne u $+\infty$.

U slučaju da integral konvergira u $\mathbb{R}$ ta vrednost se naziva istim imenom - nesvojstven integral prve vrste funkcije f u $+\infty$. Ako posmatrani limes postoji postoji u $\mathbb{R}$, tada se on označava sa

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Napomena. Da bi integrali u intervalu $[a, \ c]$ egzistirali, pretpostavka je da je funkcija f neprekidna; Prilikom zadavanja zadatka, poslednjom oznakom vrlo često se označava dati limes, ne znajući da li on postoji u $\mathbb{R}$ ili ne.

PRIMER 1

Rešavanje nesvojstvenog integrala sa beskonačnom gornjom granicom.

Odrediti vrednost integrala $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$.

Rešenje. Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ je neprekidna za $x \geq 2$, ali kako je interval integracije beskonačan, polazni integral je nesvojstveni integral prve vrste. Tada je

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} &= \lim_{c\to+\infty} \int_2^c \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{c\to+\infty} \left(\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \Big|_2^c = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{c\to+\infty} \left(\ln \left| \frac{c-1}{c+1} \right| \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\lim_{c\to+\infty} \left| \frac{c-1}{c+1} \right| \right) - \frac{1}{2} (\ln 1 - \ln 3) = \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \lim_{c\to+\infty} \frac{c-1}{c+1} \right| + \frac{1}{2} \ln 3 = \\
&= \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln 3.
\end{aligned}$$

Ovde je iskorišćeno da je

$$\lim_{c\to+\infty} \frac{c-1}{c+1} = 1.$$

Dakle, posmatrani nesvojstveni integral konvergira.

PRIMER 2

Veoma važan integral koji ćemo sretati u narednim lekcijama.

Ispitati konvergenciju integrala $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, za $\alpha > 0$.

Rešenje. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ je neprekidna funkcija za $x \geq 1$ i $\alpha > 0$, ali je interval konvergencije beskonačan, pa se radi o nesvojstvenom integralu prve vrste. Imamo da je

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1},$$

za $\alpha \neq 1$. Kako je

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{ako je } 0 < \alpha < 1, \\ 0, & \text{ako je } \alpha > 1, \end{cases}$$

tada je

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{ako je } 0 < \alpha < 1, \\ -\frac{1}{-\alpha+1}, & \text{ako je } \alpha > 1. \end{cases}$$

Ispitajmo sada slučaj $\alpha = 1$. Tada je

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln|x|\big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty.$$

Dakle, posmatrani integral konvergira za $\alpha > 1$, dok za $0 < \alpha \leq 1$ divergira.

AUTORSKI VIDEO KLIP

Integral sa beskonačnom gornjom granicom.

VIDEO KLIP 1

Integral sa beskonačnom gornjom granicom - parcijalna integracija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

INTEGRAL SA BESKONAČNOM DONJOM GRANICOM

Situacija kada je samo donja granica integrala beskonačna.

Neka je dat interval $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$ i neka je data funkcija $y = f(x)$ koja je ograničena na $(-\infty, b]$. Tada ima smisla posmatrati integral

$$\int_c^b f(x)dx, \qquad \text{za} \quad c \leq b,$$

i sledeći limes:

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

Data granična vrednost naziva se nesvojstven integral prve vrste funkcije f u $-\infty$ i on može postojati u $\mathbb{R}$, ili ne. Ako prethodni limes postoji u $\mathbb{R}$, tada se koristi oznaka

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx.$$

Napomena. U ovom slučaju ostaju na snazi svi komentari koji su dati u slučaju kada je gornja granica integrala beskonačna.

INTEGRAL SA BESKONAČNOM DONJOM I GORNJOM GRANICOM

Situacija kada je donja i gornja granica integrala beskonačna.

Neka je data neprekidna funkcija $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Tada je za tu funkciju pretpostavka da je ograničena na $\mathbb{R}$.

Granična vrednost:

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx + \lim_{c \to +\infty} \int_b^c f(x)dx$$

koja se označava i sa

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ c \to +\infty}} \int_a^c f(x)dx$$

ako postojati u $\mathbb{R}$, tada za nju kažemo da je nesvojstven integral prve vrste funkcije f u $\mathbb{R}$. U tom slučaju se i za rezultat prethodne granične vrednosti kaže isto. U ovom slučaju se koristi oznaka:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Napomena. Svi komentari koji su dati u vezi sa prethodnim slučajevima važe analogno i u ovom slučaju.

Odrediti vrednost integrala $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Rešenje. Imamo da je

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \operatorname{arctg} x|_a^b =$$
$$= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Dakle, posmatrani integral konvergira.

VIDEO KLIP 2

Integral sa beskonačnom donjom i gornjom granicom

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

GLAVNA VREDNOST INTEGRALA

Ako granična vrednost u (2) ne postoji, ali postoji granična vrednost (1), tada za nju kažemo da je Košijev integral ili glavna vrednost integrala.

Neka je data neprekidna i ograničena funkcija $y = f(x),\ x \in \mathbb{R}$. Posmatrajmo sledeću graničnu vrednost

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx\,. \qquad (1)$$

Ako granična vrednost (1) postojati u $\mathbb{R}$, tada za nju kažemo da je Košijev integral funkcije f u $\mathbb{R}$, odnosno glavna vrednost integrala

$$\lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx + \lim_{c\to+\infty} \int\limits_{b}^{c} f(x)dx \qquad (2)$$

i označavamo

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Napomena. Oznaka $\mathbf{v.p.}$ potiče od francuskog izraza valeur principal, što znači glavna vrednost. Integral dat sa (1) je specijalan slučaj integrala datog sa (2) i veoma je bitan objekat u matematici i inženjerskim naukama.

4.2 Nesvojstveni integral druge vrste

INTEGRAL NEOGRANIČENE FUNKCIJE NA POSMATRANOM OGRANIČENOM INTERVALU

Nesvojstveni integral druge vrste se javlja kada je podintegralna funkcija neograničena u nekoj tački (ili tačkama) unutar intevala integracije ili u njegovim rubnim tačkama.

Neka je funkcija $y = f(x)$ neprekidna funkcija na svakom intervalu $[a, b - \varepsilon]$, $(\varepsilon > 0)$ i neograničena u tački b. Tada je:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Analogno je moguće definisati nesvojstveni integral druge vrste za neograničenu funkciju $y = f(x)$ u tački a i koja je neprekidna u svim tačkama intervala $[a + \delta, b]$, $(\delta > 0)$ na sledeći način:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

U slučaju da je funkcija $y = f(x)$ neograničena u tački $c \in (a, b)$, a neprekidna u svakoj tački intervala $[a, c - \varepsilon]$, $(\varepsilon > 0)$ i $[c + \delta, b]$, $(\delta > 0)$, tada važi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0+} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Kao i kod nesvojstvenog integrala prve vrste može se definisati glavna vrednost prethodnog integrala i to preko sledeće granične vrednosti:

$$\text{v.p.} \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right).$$

Sve napomene koje su date kod nesvojstvenog integrala prve vrste analogno važe i ovde, samo što se ovde govori o neograničenim podintegralnim funkcijama na domenu integracije koji je ograničen.

PRIMER 1

Rešavanje nesvojstvenog integrala druge vrste.

Odrediti vrednost integrala $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Rešenje. Funkcija $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ u tački $x = 1 \in [0,2]$ ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 1$ jer je $\lim\limits_{x\to 1\pm} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. Dakle, ova funkcija je neograničena u tački $x = 1$, ali je neprekidna na intervalima $[0,1)$ i $(1,2]$. Tada je:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{1+\delta}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\frac{1}{x-1}\Big|_0^{1-\varepsilon} \right) + \lim_{\delta\to 0+} \left(-\frac{1}{x-1}\Big|_{1+\delta}^{2} \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon} - 1 - 1 + \lim_{\delta\to 0+} \frac{1}{\delta} = \\
&= \infty - 1 - 1 + \infty = \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Napomena.U nekim situacijama se može desiti da podintegralna funkcija nije definisana u nekoj tački integracionog intervala koji je konačan, ali da ona nije neograničena u njenoj okolini. Tada posmatrani integral nije nesvojstven, već je integrabilan u Rimanovom smislu.

VIDEO KLIP

Integral neograničene funkcije na posmatranom ograničenom intervalu.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Jedna geometrijska interpretacija

JEDNA GEOMETRIJSKA INTEPRETACIJA NESVOJSTVENOG INTEGRALA 1. VRSTE

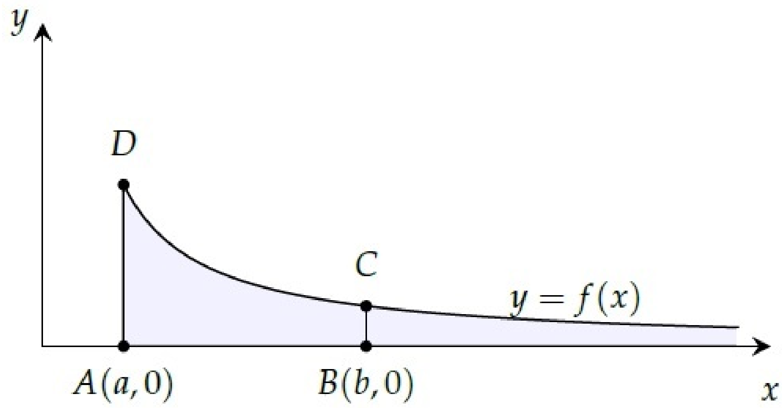
U pojedinim slučajevima, iako je jedna granica integrala beskonačna, može se desiti da je postoji konačna površina krivolinijskog trapeza.

Na datoj slici je predstavljen deo ravni Q koji je ograničen datom krivom $y = f(x)$, za koju je x -osa horizontalna asimptota, apscisnom osom i pravom $x = a$. Ako postoji konačna granična vrednost površine krivolinskog trapeza $ABCD$, u oznaci P_{ABCD}, tj.

$$\lim_{b \to +\infty} P_{ABCD},$$

tada je nazivamo površina dela ravni Q, u oznaci P_Q. Važi da je

$$P_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{dok je} \quad P_Q = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$



Slika 5.1 Grafički prikaz površine dela ravni Q [Izvor: Autor].

Primer. Izračunati površinu između krive $y = \frac{1}{1+x^2}$, apscisne i ordinatne ose za $x > 0$.

Rešenje. Ovde je

$$P_Q = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Napomena. Svi pomenuti slučajevi u vezi sa izračunavanjem površine krivolinijskog trapeza kod određenog integrala (kada se deo krive posmatrane funkcije nalazi ispod x -ose, ili se na jednom delu nalazi iznad, a drugom delu ispod x -ose) važe i u ovom slučaju.

JEDNA GEOMETRIJSKA INTEPRETACIJA NESVOJSTVENOG INTEGRALA 2. VRSTE

U pojedinim slučajevima, iako je funkcija neograničena u jednoj granici integrala, može se desiti da postoji konačna površina krivolinijskog trapeza.

Analogno prethodnom, na datoj slici je predstavljen deo ravni Q koji je ograničen datom krivom $y = f(x)$, za koju je prava $x = b$ vertikalna asimptota, apscisnom osom i pravom $x = a$. Ako postoji konačna granična vrednost površine krivolinskog trapeza $APCD$, u oznaci P_{APCD}, tj.

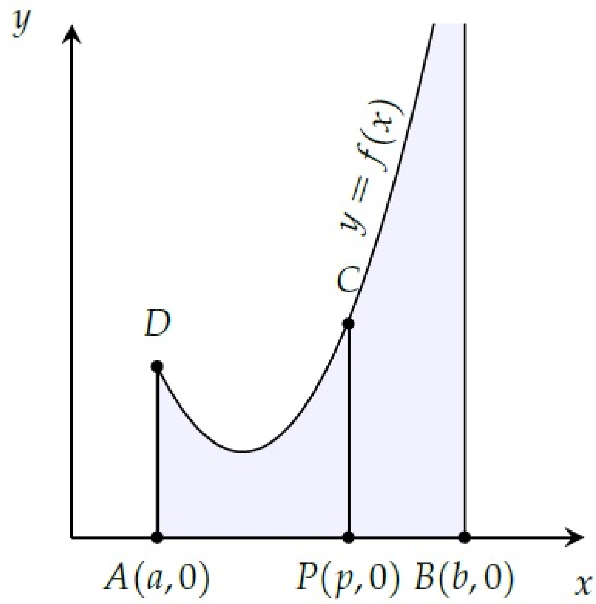
$$\lim_{p \to b} P_{APCD},$$

tada je nazivamo površina dela ravni Q, u oznaci P_Q. Važi da je

$$P_{APCD} = \int_a^p f(x)\,dx$$

dok je

$$P_Q = \lim_{p \to b} \int_a^p f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Slika 5.2 Grafički prikaz površine dela ravni Q [Izvor: Autor].

Napomena. Ako se u intervalu integracije $[a, b]$ postoji konačan broj tačaka $c_1, c_2, \ldots, c_n$ u kojima posmatrana funkcija $y = f(x)$ ima prekid ili neograničeno raste, potrebno je poći od osobine aditivnosti

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx,$$

pa ispitati konvergenciju svakog od integrala sa desne strane znaka jednakosti. Ukoliko svi ovi integrali konvergiraju, tada konvergira i integral s leve strane znaka jednakosti. Kako se u ovom slučaju integralima na desnoj strani znaka jednakosti izračunavaju površine dela posmatranog krivolinijskog trapeza, treba uzeti u obzir da li je funkcija nenegativna, odnosno negativna na svakom od intervala integracije. Tamo gde je negativna, treba uzeti apsolutnu vrednost od dobijene vrednosti integrala (ako je konačna), prilikom izračunavanja površine.

UNIVERZITET
METROPOLITAN
BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Realna funkcija dve realne promenljive – definicija, osobine, lokalne ekstremumi

Lekcija 06

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

Uvod

UVOD

U ovoj lekciji ćemo se baviti realnim funkcijama dve realne promenljive.

Uočimo ceo racionalan algebarski izraz $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Ako posmatramo jednakostraničan trougao čija je stranica dužine x, tada važi da je $P(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ površina tog trougla. Domen funkcije $P(x)$ je skup pozitivnih realnih brojeva, jer x predstavlja dužinu stranice. Funkcija $P(x)$ je realna funkcija jedne realne promenljive.

Uočimo, sada, ceo racionalan algebarski izraz $x^2 + 2xy$. Ako posmatramo pravilnu četvorostranu piramidu gde je x dužina osnovice te piramide, a y dužina bočne visine (apoteme), tada $P(x, y) = x^2 + 2xy$, predstavlja površinu te piramide. U ovom slučaju, površina $P(x, y)$ je realna funkcija dve realne promenljive za koje važi da je $x > 0$ i $y > 0$.

Iz prethodnog vidimo da se slično realnim funkcijama jedne realne promenljive mogu posmatrati i realne funkcije više realnih promenljivih. Mnoge pojave u prirodnim i tehničkim naukama opisuju se ovakvim funkcijama.

U ovoj lekciji ćemo se baviti realnim funkcijama dve realne promenljive, a sve izloženo važi i za realne funkcije sa tri ili više realnih promenljivih.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Poglavlje 1

Pojam funkcije dve promenljive

DEFINICIJA I GRAFIK FUNKCIJE DVE PROMENLJIVE

Funkcija dve promenljive, isto kao i funkcija jedne promenljive, može biti zadana u eksplicitnom, parametarskom obliku, ili u implicitnom obliku.

Definicija. Realna funkcija dve realne promenljive je bilo koje pravilo ili zakon po kome se svakom uređenom paru (x, y) iz nekog skupa $A \subseteq \mathbb{R}^2$ pridružuje tačno jedan broj $z \in B \subseteq \mathbb{R}$.

Napomena. Ubuduće ćemo realnu funkciju dve realne promenljive kraće zvati funkcija dve promenljive.

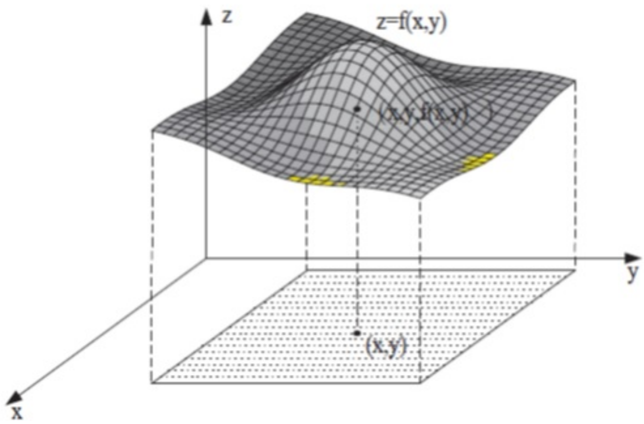
Skup A se naziva domen funkcije ili oblast definisanosti funkcije, a skup B se naziva skup vrednosti ili kodomen funkcije. Vrednosti x i y se nazivaju nezavisno promenljive (ili argumenti), a vrednost z se naziva zavisno promenljiva.

Funkciju dve promenljive u eksplicitnom obliku zapisujemo sa $z = f(x, y)$. Ona može biti data u parametarskom, kao i u implicitnom obliku, o čemu će biti reči kasnije.

Oblast definisanosti funkcije dve promenljive je skup tačaka $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje $z = f(x, y)$ može da se odredi. Ovde važe iste napomene u vezi sa oblašću definisanosti kao i kod funkcije jedne promenljive.

Grafik generisan realnom funkcijom dve realne promenljive (videti sliku) predstavlja skup tačaka u $\mathbb{R}^3$ dat sa

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$



Slika 1.1 Grafik realne funkcije dve realne promenljive [Izvor: Autor].

U našem razmatranju isključivo ćemo se baviti funkcijama koje će za grafik imati neprekidnu, ili na malom delu prekidnu površ.

Napomena. Na način kako je definisana funkcije dve promenljive, analogno se može definisati i funkciju tri ili više promenljivih.

PRIMER

Određivanje domena funkcije dve promenljive.

Odrediti domene sledećih funkcija:

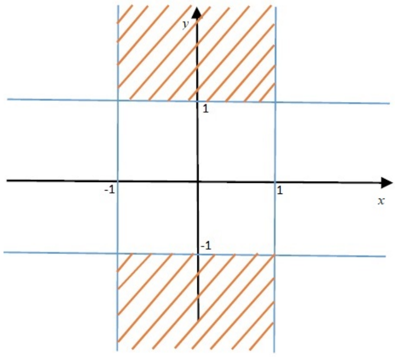
$$a)\; z = x^2 + y^2 + 2x - 1, \qquad b)\; z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1},$$
$$c)\; z = \ln(4 - x^2 - y^2), \qquad d)\; z = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2+y^2}}.$$

Rešenje.

a) U ovom slučaju nema nikakvih ograničenja, pa je domen $\mathbb{R}^2$.

b) Zbog korena parnog reda neophodno je da bude $1 - x^2 \geq 0$ i $y^2 - 1 \geq 0$. Tada je domen ove funkcije skup

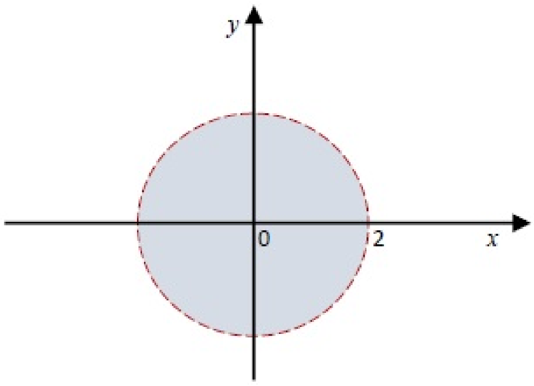
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1] \wedge y \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\}.$$



Slika 1.2 Domen funkcije $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$ [Izvor: Autor].

c) Zbog logaritamske funkcije mora biti $4-x^2-y^2>0,$ tj. $x^2+y^2<4.$ Dakle, domen ove funkcije je unutrašnjost kruga $x^2+y^2=4,$ bez kružnice, tj.

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\}.$$



Slika 1.3 Domen funkcije $z = \ln(4-x^2-y^2)$ [Izvor: Autor].

d) Kako imamo koren neparnog reda, zbog njega nema nikakvih ograničenja i jedino ograničenje je $x^2+y^2\neq 0,$ tj.

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0 \wedge y\neq 0\}.$$

Dakle, domen funkcije su sve tačke iz ravni, bez koordinatnog početka, tj. $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a - određivanje domena funkcije dve promenljive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

DVODIMENZIONALNA OBLAST

Uvedeni su pojmovi: otvoren skup, povezan skup, granica, zatvorena oblast, ograničena oblast i neograničena oblast u prostoru $\mathbb{R}^2$.

Uvešćemo sada pojam dvodimenzionalne oblasti, koji nam je potreban za dalje izlaganje. Da bismo ga definisali, najpre, moramo definisati pojmove otvoreni skup i povezani skup u $\mathbb{R}^2$.

Definicija. U prostoru $\mathbb{R}^2$ za skup se kaže da je otvoren ako i samo ako se oko svake njegove tačke može opisati krug koji ceo pripada njemu.

Definicija. U prostoru $\mathbb{R}^2$ za skup se kaže da je povezan ako i samo ako je putno povezan.

Napomena. Neki skup je putno povezan ako svake dve njegove različite tačke možemo spojiti putem koji ceo pripada skupu (put je bilo koja neprekidna kriva u $\mathbb{R}^2$).

Definicija. Neki skup nazivamo oblast u $\mathbb{R}^2$ ili dvodimenzionalna oblast ako i samo je taj skup otvoren i povezan u prostoru $\mathbb{R}^2$,

Definicija. Tačka A se naziva granična tačka neke oblasti E ako i samo ako svaka okolina tačke A, pored tačaka iz oblasti E, sadrži i tačke koje ne pripadaju oblasti E.

Skup svih graničnih tačaka neke oblasti E nazivamo granica oblasti i označavamo ∂E.

Ako nekoj otvorenoj oblasti E pridružimo sve njene granične tačke dobijamo skup tačaka koje zovemo zatvorena oblast i nju označavamo sa $\overline{E}$ (tj. važi $\overline{E} = E \cup \partial E$).

Ako za datu oblast možemo naći krug konačnog poluprečnika, koji pokriva tu oblast, onda tu oblast nazivamo ograničena oblast. U suprotnom oblast nazivamo neograničena oblast.

Poglavlje 2

Granična vrednost funkcije dve promenljive

DEFINICIJA GRANIČNE VREDNOSTI

Za granične vrednosti funkcije dve ili više promenljivih važe analogni stavovi kao za granične vrednosti funkcije jedne promenljive.

Da bismo definisali graničnu vrednost funkcije dve promenljive potrebno je, najpre, definisati pojam okoline tačke $A(x_0, y_0)$.

Definicija. Proizvoljan skup tačaka u ravni se naziva okolina tačke $A(x_0, y_0)$ ako i samo ako sadrži unutrašnjost kruga sa centrom u tački A poluprečnika ε, gde je ε pozitivan broj.

Specijalno, unutrašnjost kruga sa centrom u tački A poluprečnika ε, zovemo $\varepsilon -$ okolinom tačke A . Označavaćemo je sa $U_\varepsilon(A)$.

Definicija. Broj b se naziva granična vrednost funkcije $z = f(x, y)$, kada $x \to x_0, y \to y_0$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji δ -okolina tačke $A(x_0, y_0)$ takva da za sve tačke iz te okoline, osim možda u tački A, važi nejednakost

$$\left| f(x, y) - b \right| < \varepsilon.$$

Tada pišemo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = b, \quad \text{ili} \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = b.$$

Analogno se može definisati i granična vrednost funkcije tri i više promenljivih.

Napomena. Ako granična vrednost funkcije dve promenljive postoji u nekoj tački, ona mora davati istu konačnu vrednost, bez obzira kako joj prilazimo. To znači da, ako želimo da dokažemo da granična vrednost u nekoj tački ne postoji, dovoljno je naći dva pravca po kojima prilazimo posmatranoj tački, a da pri tom dobijamo različite vrednosti posmatranih limesa (konačne ili beskonačne).

PRIMER 1

Određivanje granične vrednosti funkcije dve promenljive.

Ispitati da li postoje sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$;

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$;

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6-y^6}{x^3+y^3}$;

Rešenje. a) Posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$. Naime, ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $x=0$ (tj. po $y-$ osi), tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3,$$

a ako se približava po pravoj $y=0$ (tj. po $x-$ osi), onda je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Dakle, posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$.

b) Posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$. Ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=2x$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{x^2+16x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{1+16x^2} = 0.$$

Međutim, ako se tačka (x,y) približava tački $(0,0)$ po paraboli $y=\sqrt{x}$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$.

c) Posmatrana granična vrednost postoji, jer je

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6-y^6}{x^3+y^3} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^3-y^3\right) = 0.\end{aligned}$$

PRIMER 2

Određivanje granične vrednosti funkcije primenom polarnih koordinata. Ona je pogodna za primenu kada se pod limesom javljaju funkcije koje sadrže kvadratne forme x^2+y^2.

Napomena. U situacijama kada se pod limesom javljaju funkcije koje sadrže kvadratne forme x^2+y^2, odnosno njihova uopštenja, takvi limesi se mogu rešavati uvođenjem polarnih koordinata $x=\rho\cos\theta$ i $y=\rho\sin\theta$, ili njihovih uopštenja, gde je $\rho>0$ i $\theta\in(0,2\pi]$. Na ovaj način se dobija granična vrednost samo po promenljivoj ρ kojom se prilazi tački u kojoj se ispituje granična vrednost, dok se veličinom θ "pokrivaju" svi pravci kojima se može prići toj tački.

Ispitati da li postoji granična vrednost

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}.$$

Rešenje. Shodno prethodno rečenom, ovaj zadatak možemo rešiti na sledeći način

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to0}\frac{e^{-\rho}-1}{\rho}=-\lim_{\rho\to0}\frac{e^{-\rho}-1}{-\rho}=-1,$$

gde imamo da, zbog $x\to0$ i $y\to0$, važi $\rho\to0$, gde je $\theta\in(0,2\pi]$.

HAJNEOVA DEFINICIJA GRANIČNE VREDNOSTI

Hajneova definicija se koristi za utvrđivanje nepostojanja granične vrednosti funkcije u datoj tački.

Prethodno data definicija granična vrednosti funkcije dve promenljive je poznata kao okolinska ili Košijeva definicija. Pored nje može se uvesti i Hajneova definicija granične vrednosti preko nizova. Ta definicija je analogna onoj koju smo uveli prilikom definisanja granične vrednosti funkcije jedne promenljive.

Definicija. Važi da $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=b$ ako i samo ako za niz $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$, kada $n\to\infty$, važi da $f(x_n,y_n)\to b$, kada $n\to\infty$.

Napomena. Hajneova i Košijeva definicija granične vrednosti su ekvivalentne.

Primer. Ispitati da li postoji granična vrednost

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

Rešenje. Uočimo dva niza $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ i $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Za ova dva niza važi $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to(0,0)$, kada $n\to+\infty$ i $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to(0,0)$, kada $n\to+\infty$. Tada imamo da je

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n}\right)^4}}=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{2}}{n^2}}\to\frac{1}{\sqrt{2}},\ n\to+\infty.$$

S druge strane, imamo da je

$$f\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n}\right)^4}}=\frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{2}}{n^2}}\to-\frac{1}{\sqrt{2}},\ n\to+\infty.$$

Dakle, posmatrana granična vrednost ne postoji u tački $(0,0)$.

ODREĐIVANJE DVE UZASTOPNE GRANIČNE VREDNOSTI

Postojanje istovremene granične vrednosti neke funkcije dve promenljive u nekoj tački, ne mora povući postojanje uzastopnih graničnih vrednosti.

Oznaka $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ se koristi prilikom traženje istovremene granične vrednosti funkcije $z=f(x,y)$ u tački (a,b), tj. kada istovremeno $x\to a$ i $y\to b$, za $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Istovremena granična vrednost se označava i sa $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a}} f(x,y)$.

S druge strane, $\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f\left(x,y\right)\right)$ označava izračunavanje dva uzastopna limesa, gde se prvo određuje $\lim_{y\to b} f\left(x,y\right)$, dok je promenljiva x fiksirana. Nakon toga se od dobijenog rezultata, računa limes kada $x\to a$. Analogno važi za $\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f\left(x,y\right)\right)$.

Veza između ovih limesa je sledeća: ako postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l_1\in\mathbb{R}$ i ako za svako x postoji granična vrednost $\lim_{y\to b} f\left(x,y\right)$, tada postoji uzastopna granična vrednost $\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f\left(x,y\right)\right)=l_2\in\mathbb{R}$, pri čemu je $l_1=l_2$. Obrnuto ne mora da važi, što ćemo pokazati u narednom zadatku. Analogno važi za $\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f\left(x,y\right)\right)$.

Primer. Ako je $f\left(x,y\right)=\frac{x-y}{3x+2y}$, ispitati da li postoje sledeće uzastopne granične vrednosti $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f\left(x,y\right)\right)$ i $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f\left(x,y\right)\right)$? Da li postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Rešenje. Važi da je

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{3x+2y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

S druge strane, imamo da je

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{3x+2y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{2y}=-\frac{1}{2}.$$

Ako se tačka (x, y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=2x$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{3x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{7x}=-\frac{1}{7},$$

a ako se tačka (x, y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y=x$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{3x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{2x}=0.$$

Dakle, granična vrednost u tački $(0,0)$ ne postoji.

Poglavlje 3

Neprekidnost funkcije dve promenljive

DEFINICIJA NEPREKIDNOSTI

Uveden je pojam neprekidnosti funkcije u tački i pojam neprekidnosti funkcije na zatvorenoj oblasti.

Pojam neprekidnosti funkcija dve ili više promenljivih u tački se zadaje analogno kao i u slučaju funkcije jedne promenljive.

Definicija. Funkcija $z = f(x, y)$ je neprekidna u tački $A(x_0, y_0)$ ako je definisana u nekoj okolini ove tačke i ako je

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Za funkcije dve ili više promenljivih koje su neprekidne u nekoj tački važe analogni stavovi kao za funkcije jedne promenljive. Kod funkcije jedne promenljive smo neprekidnost posmatrali na intervalu, dok se kod funkcija dve ili više promenljivih posmatra neprekidnost funkcije u odgovarajućoj oblasti na analogan način i sa analognim stavovima.

Poznajući pojam dvodimenzionalne oblasti možemo definisati neprekidnosti funkcije na oblasti u $\mathbb{R}^2$.

Pri definisanju pojma neprekidnosti na zatvorenoj oblasti zahteva se neprekidnost u svakoj tački te oblasti, pri čemu se podrazumeva da je funkcija neprekidna u graničnoj tački A, ako je ispunjena jednakost

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

gde tačke (x, y) teže ka tački $A(x_0, y_0)$ po tačkama iz te oblasti.

Za funkcije neprekidne u ograničenoj zatvorenoj oblasti D važi da su u toj oblasti:

1. ograničene,

2. dostižu u toj oblasti najveću i najmanju vrednost,

3. dostižu u toj oblasti svaku vrednost između najveće i najmanje vrednosti.

PRIMERI

Provera neprekidnosti funkcije u tački.

Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Rešenje. Ova funkcija je neprekidna u svakoj tački ravni $\mathbb{R}^2$, osim možda u tački $(0,0)$. Proverimo šta se dešava u njoj. Za $x=y$ imamo da je

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

dok za $x=-y$ važi

$$f(x,-x)=\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$$

ne postoji, pa je funkcija $f(x,y)$ prekidna u tački $(0,0)$.
Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Rešenje. Ova funkcija je neprekidna u svakoj tački ravni $\mathbb{R}^2$, osim možda u tački $(0,0)$. Kako važi

$$f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}=x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\quad \text{i}\quad 0\leq\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq 1,$$

imamo da je

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0).$$

Poslednje važi, jer predstavlja proizvod beskonačno male veličine (to je x) i ograničene funkcije (to je $\frac{x^2}{x^2+y^2}$).
Dakle, posmatrana funkcija je neprekidna na celom $\mathbb{R}^2$.

Poglavlje 4

Prvi parcijalni izvodi

TOTALNI PRIRAŠTAJ

Korišćenjem pojmova totalni priraštaj funkcije i parcijalni priraštaj funkcije po odgovarajućoj promenljivoj, mogu se uvesti pojmovi parcijalni izvod funkcije po odgovarajućoj promenljivoj.

Kao što smo rekli, pod pojmom funkcije dve promenljive definisane na $\mathcal{D}$ (što će najčešće biti oznaka za domen) podrazumevamo jednoznačno dodeljivanje

$$(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

gde $(x, y) \in \mathcal{D}$.
Formulom (1) zadat je pojam navedene funkcije čije vrednosti na $\mathcal{D}$ se generišu pravilom f i ona može biti data u eksplicitnom, implicitnom ili parametarskom obliku. Mi ćemo u većini razmatranja koristiti eksplicitan oblik zadavanja, a analogne teorije postoje i za druga dva oblika.
Grafik generisan formulom (1) predstavlja skup tačaka u $\mathbb{R}^3$ dat sa

$$\Gamma_f = \Big\{ \big(x, y, f(x, y)\big) \mid (x, y) \in D \Big\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

U našem razmatranju isključivo ćemo se baviti funkcijama koje će za grafik imati neprekidnu, ili na malom delu prekidnu površ. Znači, ubuduće imamo posla sa funkcijama oblika

$$z = f(x, y), \quad \text{za } (x, y) \in \mathcal{D}\,.$$

Da ponovimo, kod ovakvih funkcija veličine x i y su nezavisne promenljive, a veličina z je zavisna realna promenljiva.
Neka je data oblast $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je data tačka $A = (a_1, a_2) \in \mathcal{D}$. Takođe, neka je na D data funkcija $z = f(x, y)$.

Definicija. Totalni priraštaj funkcije f u tački A (sa priraštajima argumenata Δx i Δy), u oznaci Δf, je veličina

$$\Delta f = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)\,, \tag{2}$$

gde su Δx i Δy realne veličine različite od nule.

U slučaju kada u (2) važi da je:

1° $\Delta y = 0$ -- tada $\Delta f = f(a_1 + \Delta x, a_2) - f(a_1, a_2)$nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije f u tački A po prvoj promenljivoj (po x) i označavamo sa $\Delta_x f$.

2° $\Delta x = 0$ -- tada $\Delta f = f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)$nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije f u tački A po drugoj promenljivoj (po y) i označavamo sa $\Delta_y f$.

PARCIJALNI IZVODI FUNKCIJE DVE PROMENLJIVE

Parcijalni izvod neke funkcije može da postoji ili ne u $\mathbb{R}$ u $\pm\infty$.

Koristeći 1° i 2° kreirajmo sledeće granične vrednosti:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}, \tag{3.1}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}. \tag{3.2}$$

Granične vrednosti (3.1) i (3.2) mogu postojati ili ne u $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ako su konačne, nazovamo ih parcijalni izvodi prvog reda funkcije f u tački $A \in \mathcal{D}$ po prvoj, odnosno po drugoj promenljivoj, respektivno. U tom slučaju koristimo jednu od sledećih oznaka

$$f'_x(x,y)\big|_A, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{ili} \quad f'_x(A),$$
$$f'_y(x,y)\big|_A, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{ili} \quad f'_y(A).$$

Za ova dva parcijalna izvoda prvog reda možemo kreirati funkcije tih parcijalnih izvoda

$$f'_x(x,y), \quad \text{za } (x,y) \in \mathcal{D},$$
$$f'_y(x,y), \quad \text{za } (x,y) \in \mathcal{D}.$$

Prethodno date funkcije su opet funkcije po promenljivim x i y.

NapomenaPraktično nalaženje funkcija koje su parcijalni izvodi početne funkcije se može uraditi na sledeći način:
- polaznu funkciju $f(x,y)$ diferenciramo samo po x (y smatramo konstantom) i time dobijemo $f'_x(x,y)$, za $(x,y) \in \mathcal{D}$,

- polaznu funkciju $f(x,y)$ diferenciramo samo po y (x smatramo konstantom) i time dobijemo $f'_y(x,y)$, za $(x,y) \in \mathcal{D}$.

PRIMER

Određivanje prvih parcijalnih izvoda.

Naći odgovarajuće parcijalne izvode funkcija:

$$a)\; z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \qquad b)\; z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ u tački } A(1,1).$$

Rešenje.
a)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{-x}{y^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{-x}{y^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

b)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Tada je: $z'_x(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $z'_y(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

PRVI PARCIJALNI IZVODI SLOŽENE FUNKCIJE

Pravilo za određivanje prvih parcijalnih izvoda u situaciji kada funkcija složena. Analogno pravilo smo dali i prilikom određivanje prvog izvoda funkcije jedne promenljive.

Funkcije više promenljivih mogu biti složene, pa tako ako je $z=f(u,v)$ funkcija od u i v, pri čemu su $u=u(x,y)$ i $v=v(x,y)$ funkcije od x i y, onda je z složena funkcija od x i y

$$z=f(u(x,y),v(x,y))=g(x,y)$$

a njeni parcijalni izvodi po x i y se dobijaju kao

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Parcijalni izvodi višeg reda

DRUGI PARCIJALNI IZVODI

Parcijalni izvodi drugog reda se dobijaju traženjem parcijalnih izvoda od parcijalnih izvoda prvog reda.

Za funkciju f u tački $A \in D$ možemo formirati parcijalne izvode drugog reda po jednoj, odnosno po drugoj promenljivoj na sledeći način: neka su date izvodne funkcije parcijalnih izvoda prvog reda funkcije $z = f(x,\ \ y),\ \ (x,\ \ y) \in D$ sa

$$f'_x(x, y), \qquad f'_y(x, y), \qquad (x, y) \in D.$$

Za njih je moguće (ponaosob) potražiti parcijalne izvode prvog reda u tački $A \in D$ (ako su za to obezbedeni uslovi) i time dobijamo:

$$f'_x x, y||'_x\Big|_A,\ f'_x x, y||'_y\Big|_A,\ f'_y x, y||'_x\Big|_A,\ f'_y x, y||'_y\Big|_A,$$

gde je $A = (\ a1,\ a2)\ \in D$.

Standardne oznake za prethodno date parcijalne izvode su:

$$f''_{xx}x, y||_A,\ f''_{xy}x, y||_A,\ f''_{yx}x, y||_A,\ f''_{yy}x, y||_A$$

ili

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Takodje, umesto oznaka

$$f''_{xx}x, y||_A,\ f''_{yy}x, y||_A$$

mogu se koristiti i oznake

$$f''_{x^2}x, y|\Big|_A,\ f''_{y^2}x, y|\Big|_A.$$

Parcijalni izvodi $f''_{xy}(x, y)|_A$ i $f''_{yx}(x, y)|_A$ se nazivaju mešoviti parcijalni izvodi drugog reda.

Umesto oznaka

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

mogu se koristiti i oznake:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Napomena. Od posmatrane funkcije f (ako su obezbedjeni uslovi) možemo kreirati i parcijalne izvode k-tog reda ($k \geq 3$), na analogan način kao što smo formirali parcijalne izvode drugog reda. Oznake za takve parcijalne izvode i rasudjivanje o njima je potpuno analogno sa oznakama i rasudjivanjem kao kod parcijalnih izvoda drugog reda. Parcijalnih izvoda k-tog reda ima 2^k.

PRIMER

Određivanje drugih parcijalnih izvoda.

Odrediti druge parcijalne izvode funkcije:

$$z = \frac{x^2}{2-y}$$

Rešenje. Prvi parcijalni izvodi su:

$$z_x' = \left(\frac{x^2}{2-y}\right)_x' = \frac{2x}{2-y} \quad \wedge z_y' = \left(\frac{x^2}{2-y}\right)_y' = \frac{x^2}{(2-y)^2}.$$

Drugi parcijalni izvodi su:

$$z_{xx}'' = \left(z_x'\right)_x' = \left(\frac{2x}{2-y}\right)_x' = \frac{2}{2-y}$$

$$z_{xy}'' = \left(z_x'\right)_y' = \left(\frac{2x}{2-y}\right)_y' = \frac{2x}{(2-y)^2}$$

$$z_{yx}'' = \left(z_y'\right)_x' = \left(\frac{x^2}{2-y}\right)_x' = \frac{2x}{(2-y)^2}$$

$$z_{yy}'' = \left(z_y'\right)_y' = \left(\frac{x^2}{(2-y)^2}\right)_y' = \frac{2x^2}{(2-y)^3}$$

Primećujemo da je $z_{xy}'' = z_{yx}''$ što važi uvek kada su parcijalni izvodi neprekidne funkcije.

STAV O JEDNAKOSTI MEŠOVITIH PARCIJALNIH IZVODA DRUGOG REDA

Pomenuta neprekidnost u prethodnom stavu nije najširi uslov da bi važila prethodna jednakost, ali za naše potrebe ovaj stav će biti dovoljan.

Mešoviti parcijalni izvodi drugog reda neke funkcije $z = f(x, y)$ u nekoj tački A ne moraju biti jednaki u opštem slučaju. Za naš dalji rad će biti od interesa kada su oni jednaki. O tome govori naredni stav.

Stav. Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ na oblasti $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka ova funkcija na $\mathcal{D}$ ima parcijalne izvode prvog i drugog reda. Uočimo tačku $A(a_1, a_2) \in D$ i pretpostavimo da su $f''_{xy}(x, y)$ i $f''_{yx}(x, y)$ neprekidni (kao funkcije) na nekom krugu sa centrom u tački A pozitivnog poluprečnika koji ceo pripada oblasti $\mathcal{D}$.
Tada je

$$f''_{xy}(A) = f''_{yx}(A)$$

Napomena. Pomenuta neprekidnost u prethodnom stavu nije najširi uslov da bi važila prethodna jednakost, ali za naše potrebe ovaj stav će biti dovoljan.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Lokalni ekstremi funkcije dve promenljive

STACIONARNE TAČKE

Stacionarne tačke funkcije dve promenljive se određuju iz sistema čije jednačine predstavljaju prvi parcijalni izvodi te funkcije izjednačeni sa nulom.

Neka je data funkcija $z = f(x,y)$ na oblasti $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada za tačku $M_1 = (x_1, y_1) \in \mathcal{D}$ kažemo da je lokalni minimum, ako postoji barem jedna njena ε -okolina, u oznaci $\mathcal{O}_1$, gde je $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{D}$, takva da je $f(x_1, y_1) \leq f(x,y)$, za svako $(x,y) \in \mathcal{O}_1$. Takođe, za tačku $M_2 = (x_2, y_2) \in \mathcal{D}$ kažemo da je lokalni maksimum, ako postoji barem jedna njena ε -okolina, u oznaci $\mathcal{O}_2$, gde je $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{D}$, takva da je $f(x_2, y_2) \geq f(x,y)$, za svako $(x,y) \in \mathcal{O}_2$. Tačke lokalnih minimuma i maksimuma se nazivaju i lokalni ekstremi funkcije f na $\mathcal{D}$.

U narednom razmatranju ćemo dati jedan postupak za određivanje tačaka lokalnih ekstrema posmatrane funkcije (ako ih ona uopšte ima).

Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definisana na oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Za tačku $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ kažemo da je stacionarna tačka funkcije f ako je rešenje sistema:

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= 0\,,\\
f'_y(x,y) &= 0\,,
\end{aligned}
$$

na $\mathcal{D}$.

Skup rešenja prethodnog sistema označimo sa S. On može biti prazan ili neprazan.

Stav. Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definisana na oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je S skup stacionarnih tačaka za tu funkciju na $\mathcal{D}$. Tada svaka tačka lokalnog ekstrema funkcije na oblasti D pripada skupu S .

Napomena. Iz prethodnog stava možemo zaključiti da ako je $S = \varnothing$, tada funkcija f na $\mathcal{D}$ nema lokalne ekstreme. Međutim, on ne važi u suprotnom smeru. To znači da sve tačke koje pripadaju skupu S ne moraju biti lokalni ekstremi. Stoga se nameće pitanje, ako je skup S neprazan, kako ćemo od svih tačaka koje mu pripadaju, izdvojiti one koje su lokalni ekstremi i kako ćemo znati da li su one lokalni maksimumi ili minimumi. O tome govorimo u nastavku.

SILVESTEROVO PRAVILO

Primena ovog pravila omogućava jednostavno određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije dve promenljive. U slučaju da je $\gamma = 0$, ovo pravilo ne daje odgovor.

Naredno tvrđenje će nam omogućiti da iz skupa S izdvajamo one tačke koje predstavljaju lokalni maksimum ili minimum određene funkcije dve promenljive, uz pretpostavku da je skup S neprazan.

Stav (Silvesterovo pravilo) Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisan na $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je S skup njenih stacionarnih tačaka na $\mathcal{D}$ takav da je $S \neq \varnothing$. Dalje, neka je $M_0(x_0, y_0) \in S$. Takođe, neka je

$$f''_{x^2}(M_0) = A, \quad f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0) = B, \quad f''_{y^2}(M_0) = C.$$

Označimo sa $\gamma = A \cdot C - B^2$. Tada

a) ako je $\gamma > 0$ i $A > 0$, tačka M_0 je lokalni minimum funkcije f na D;

b) ako je $\gamma > 0$ i $A < 0$, tačka M_0 je lokalni maksimum funkcije f na D;

c) ako je $\gamma < 0$, funkcija f u tački M_0 nema lokalnih ekstrema;

d) ako je $\gamma = 0$, za tačku M_0 nemamo nikakav odgovor po pitanju lokalnih ekstrema.

Napomena. 1) Silvesterovo pravilo je veoma značajan rezultat. Postoji opšta verzija ovog pravila za realne funkcije od k realnih promenljivih $(k \geq 2)$, iskazana preko pojma pozitivno definitne forme o kome ovde neće biti reči.

2) Nedostatak ovog pravila je da u slučaju pod d) ne možemo dobiti odgovor o postojanju lokalnog ekstrema funkcije f u posmatranoj tački M_0 . Ovaj nedostatak možemo prevazići analizom znaka drugog diferencijala funkcije f u okolini te tačke M_0 o kome ćemo govoriti u nastavku.

PRIMER

Primena Silvesterovog kriterijuma za određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije.

Odrediti lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y.$$

Rešenje. Iz sistema

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3 = 0,$$
$$f'_y(x,y) = 6y^2 - 6 = 0,$$

imamo da je $x^2 = 1$ i $y^2 = 1$, pa dobijamo četiri stacionarne tačke: $M_1(1,1)$, $M_2(-1,1)$, $M_3(1,-1)$, i $M_4(-1,-1)$. Odredimo, sada, druge parcijalne izvode, kako bismo proverili da li ove tačke jesu lokalni ekstremi

$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{y^2} = -12y.$$

Provera za tačku M_1.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_1) = 6$, $B = f''_{xy}(M_1) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_1) = -12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = -72 < 0$, pa tačka M_1 nije lokalni ekstrem funkcije $f(x,y)$.

Provera za tačku M_2.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_2) = -6$, $B = f''_{xy}(M_2) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_2) = -12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = 72 > 0$, pa tačka M_2 je lokalni maksimum jer je $A < 0$. Tada je $f_{max}(-1,1) = 6$.

Provera za tačku M_3.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_3) = 6$, $B = f''_{xy}(M_3) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_3) = 12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = 72 > 0$, pa tačka M_3 je lokalni minimum jer je $A > 0$. Tada je $f_{min}(1,-1) = -6$.

Provera za tačku M_4.
Imamo da je $A = f''_{x^2}(M_4) = -6$, $B = f''_{xy}(M_4) = 0$ i $C = f''_{y^2}(M_4) = 12$. Na osnovu Silvesterovog kriterijuma imamo da je $\gamma = AC - B^2 = -72 < 0$, pa tačka M_4 nije lokalni ekstrem funkcije $f(x,y)$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Totalni diferencijal prvog reda

DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJE U TAČKI

Kao i kod funkcije jedne promenljive diferencijabilnost funkcije u tački povlači i njenu neprekidnost u toj tački. Obrnuto ne mora da važi.

Neka je data funkcija $z = f(x,y)$ na $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Takođe, neka je $A(a_1,a_2) \in D$. Za funkciju f kažemo da je diferencijabilna u tački A ako je

$$\begin{aligned}\Delta f = f(a_1+\Delta x, a_2+\Delta y) - f(a_1,a_2) = \\ = C\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \rho\cdot\alpha(t),\end{aligned}$$

gde je $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, a Δx i Δy su priraštaji argumenta x, odnosno y, tim redom, pri čemu su C i B dve realne fiksirane konstante i $\alpha(t) \to 0,$ kada $t \to 0.$
Iz prethodne formule kojom se zadaje diferencijabilnost funkcije f u tački A, vidimo da kod funkcija dve (iil više) promenljivih nemamo jedinstvenu numeričku veličinu koja će predstavljati njen izvod u tački A, što je bio slučaj kod funkcije jedne promenljive, već za to imamo dva različita kandidata C i B .

Pojam diferencijabilnost funkcije dve promenljive (kao i funkcije jedne promenljive), ravnopravan je sa činjenicom da je grafik posmatrane funkcije u toj tački gladak i za to imamo sledeće geometrijsko tumačenje: za funkciju f u tački A važi prethodna formula ako i samo ako Γ_f u tački $(a_1,a_2), f(a_1,a_2))$ ima jedinstvenu tangentnu ravan. Prva dva sabirka na desnoj strani prethodne formule čine glavni ili linearni deo posmatranog totalnog priraštaja, a treći sabirak njegov zanemarljiv deo. U slučaju funkcije dve promenljive, kao i u slučaju funkcije jedne promenljive, svojstvo diferencijabilnosti dato prethodnom formulom povlači svojstvo neprekidnosti te funkcije u tački A. Obrnuto ne mora da važi.
Stav. Funkcija $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ je diferencijabilna u tački $A(a_1,a_2)$ ako i samo ako u prethodno datoj formuli važi da je

$$C = f'_x(a_1,a_2) \text{ i } B = f'_y(a_1,a_2).$$

Napomena. Na osnovu prethodnog stava možemo zaključiti da diferencijabilna funkcija f u tački A poseduje parcijalne izvode u toj tački. Obrnuto ne mora da važi.

U narednom stavu navodimo dovoljan uslov pod kojim će činjenice iz prethodne napomene i u obrnutom smeru da važe.

Stav. Neka je data funkcija $z = f(x,y), (x,y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $A(a_1,a_2) \in \mathcal{D}$. Takođe, neka u tački A postoje parcijalni izvodi $f'_x(a_1,a_2)$ i $f'_y(a_1,a_2)$ i neka su neprekidni kao funkcije u tački $A(a_1, a_2)$ i neka su definisani na nekoj kružnoj okolini tačke A oblasti $\mathcal{D}$. Tada je funkcija f diferencijabilna u tački A.

NAPOMENE

Napomene u vezi sa diferencijabilnošću funkcije dve promenljive.

Napomena. Efektivno, redosled provere diferencijabilnosti funkcije dve promenljive $y = f(x, y)$ u nekoj tački $M_0(x_0, y_0)$ bi bio sledeći:

1) odrede se parcijalni izvodi funkcije f u tački $M_0(x_0, y_0)$;

2) ako su oni neprekidni, funkcija je diferencijabilna u ovoj tački, a ako ovi izvodi ne postoje, tada funkcija nije diferencijabilna u njoj;

3) ako parcijalni izvodi postoje, a prekidni su funkcija može biti diferencijabilna. Tada treba proveriti da li totalni priraštaj funkcije f u tački $M(x_0, y_0)$ može da se predstavi na jedna od sledeća dva načina:

- $\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot g + o\left(\sqrt{h^2 + g^2}\right)$, kad $h \to 0$ i $g \to 0$, ili
- $\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot g + \alpha(h, g) \cdot h + \beta(h, g) \cdot g$, kad $h \to 0$ i $g \to 0$,

Napomena. Govorili smo za funkciju jedne promenljive, da kada određujemo njene lokalne ekstreme, može se desiti da ona nije diferencijabilna u nekoj tački svog domena. Takva tačka je takođe stacionarna tačka (ili kritična tačka) i ona može biti lokalni ekstrem funkcije. Analogno važi i za funkciju dve ili više promenljivih. U ovom slučaju za proveru se ne može koristi Silvesterov kriterijum. To ilustrujemo narednim promerom.

PRIMER

Određivanje lokalnih ekstrema funkcije u slučajevima kada funkcija nije diferencijabilna.

Odrediti lokalne ekstremume funkcije

$$f(x, y) = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}.$$

Rešenje. Primetimo, najpre, da je domen ove funkcije cela realna ravan $\mathbb{R}^2$. Dalje, važi da je

$$f_x' = \frac{-2x}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad f_y' = \frac{-2y}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}},$$

pri čemu je $x^2 + y^2 \neq 0$, tj. $(x, y) \neq (0, 0)$. Za dobijanje stacionarnih tačaka treba rešiti sistem $\begin{cases} f_x'(x, y) = 0, \\ f_y'(x, y) = 0 \end{cases}$ koji ima jedinstveno rešenje tačku $(0, 0)$. Kako se ova tačka nalazi u domenu funkcije, ona predstavlja jedinu stacionarnu tačku funkcije f. Međutim, ova funkcija ne ispunjava uslov $(x, y) \neq (0,0)$. Dakle, treba da proverimo da li je funkcija f diferencijabilna u ovoj tački. Parcijalne izvode funkcije f u tački (0,0) tražimo po definiciji

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{2 - h^{\frac{2}{3}} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = \begin{cases} -\infty, & h \to 0- \\ +\infty, & h \to 0+ \end{cases},$$

tj. u tački $(0,0)$ ne postoje parcijalni izvodi, pa funkcija f tačka $(0,0)$ nije diferencijabilna.

Međutim, važi da je

$$f(x, y) = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}3 \leq 2 = f(0,0),$$

za svako $x, y \in \mathbb{R}$, pa je tačka $(0,0)$ lokalni maksimum funkcije.

TOTALNI DIFERENCIJAL PRVOG REDA U TAČKI

Iz pojma diferencijabilnosti funkcije u tački možemo izvesti pojam totalnog diferencijala u tački.

Iz formule

$$\Delta f = f(a_1 + \Delta x, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2) = C \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \rho \cdot \alpha(t),$$

uočimo glavni deo

$$df = f'_x(a_1, a_2) \cdot \Delta x + f'_y(a_1, a_2) \cdot \Delta y.$$

On se naziva totalni diferencijal prvog reda funkcije f u tački A.

Važi da je $\Delta x = dx$ i $\Delta y = dy$, gde su dx i dy diferencijali funkcija $x = g(x)$ i $y = h(y)$ jedne realne promenljive (nezavisno po x i po y), pa totalni diferencijal prvog reda može zapisati i u obliku

$$df = f'_x(a_1, a_2) \cdot dx + f'_y(a_1, a_2) \cdot dy.$$

Poglavlje 8

Totalni diferencijal višeg reda

TOTALNI DIFERENCIJAL DRUGOG REDA

Totalni diferencijal drugog reda se koristi za odrešivanje lokalnih ekstrema.

Posmatrajmo ponovo formulu

$$df = f'_x(a_1, a_2) \cdot dx + f'_y(a_1, a_2) \cdot dy.$$

Možemo smatrati da je df funkcija dve nezavisne promenljive sa domenom u $\mathcal{D}$ i ponovo potražiti totalni diferencijal u tački A. Na taj način dobijemo totalni diferencijal drugog reda funkcije f u tački A, koji označavamo sa d^2f. Tada je

$$\begin{aligned} d^2f &= (df)'_x dx + (df)'_y dy = \\ &= (f''_{xx}dx + f''_{yx}dy)dx + (f''_{xy}dx + f''_{yy}dy)dy = \\ &= f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}(dx)(dy) + f''_{yy}(dy)^2. \end{aligned}$$

Obično se $(dx)^2$ označava sa dx^2 i $(dy)^2$ sa dy^2, pa prethodno možemo zapisati

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2.$$

Kao što smo već rekli drugi totalni diferencijal funkcije igra važnu ulogu prilikom određivanja da li je neka stacionarna tačka $M_0(x_0, y_0) \in S$ lokalni ekstrem, kada u Silvesterovom pravilu za tu tačku dobijemo da je $\gamma = 0$. Naime, ako je totalni diferencijal drugog reda funkcije f u tački M_0, odnosno

$$d^2f(M_0) = f''_{xx}(M_0)\,dx^2 + 2f''_{xy}(M_0)\,dxdy + f''_{yy}(M_0)\,dy^2.$$

stalnog znaka, nezavisno od dx i dy imamo da:
1) za $d^2f(M_0) > 0$ funkcija u tački M_0 ima lokalni minimum,
2) za $d^2f(M_0) < 0$ funkcija u tački M_0 ima lokalni maksimum,
3) za $d^2f(M_0) = 0$ ne može se ništa zaključiti o lokalnim ekstremima u tački M_0 i analiziranje se mora proširiti na diferencijale višeg reda, o čemu ovde neće biti reči.
Ako je $d^2f(M_0)$ menja znak, zavisno od promene dx i dy , tada početna funkcija nema lokalni ekstrem u tački M_0. Uočimo da u prethodnoj formuli veličine $f''_{xx}(M_0)$, $f''_{xy}(M_0)$ i $f''_{yy}(M_0)$ predstavljaju tim redom veličine A, B i C iz Silvesterovog kriterijuma.

PRIMER

Određivanje lokalnih ekstrema funkcije analizom znaka drugog diferencijala funkcije u tački.

Odrediti lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y.$$

Rešenje. Iz sistema

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3 = 0,$$
$$f'_y(x,y) = 6y^2 - 6 = 0,$$

imamo da je $x^2 = 1$ i $y^2 = 1$, pa dobijamo četiri stacionarne tačke: $M_1(1,1)$, $M_2(-1,1)$, $M_3(1,-1)$, i $M_4(-1,-1)$. Odredimo, sada, druge parcijalne izvode, kako bismo proverili da li ove tačke jesu lokalni ekstremi

$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{y^2} = -12y.$$

Provera za tačku M_1.
Imamo da je $f''_{x^2}(M_1) = 6$, $f''_{xy}(M_1) = 0$ i $f''_{y^2}(M_1) = -12$. Tada je

$$d^2 f(M_1) = 6dx^2 - 12dy^2.$$

Ako je $dy = dx$ tada je $d^2 f(M_1) = -6dx^2 < 0$, dok za $dy = \frac{1}{2}dx$ imamo $d^2 f(M_1) = 3dx^2 > 0$. Kako je $d^2 f(M_1)$ promenljivog znaka nema lokalnih ekstremnih vrednosti.
Provera za tačku M_2.
Imamo da je $f''_{x^2}(M_2) = -6$, $f''_{xy}(M_2) = 0$ i $f''_{y^2}(M_2) = -12$, pa je

$$d^2 f(M_2) = -6dx^2 - 12dy^2 = -(6dx^2 + 12dy^2) < 0,$$

za $dx^2 + dy^2 \neq 0$, pa imamo lokalni maksimum. Tada je $f_{max}(-1,1) = 6$.
Provera za tačku M_3.
Imamo da je $f''_{x^2}(M_3) = 6$, $f''_{xy}(M_3) = 0$ i $f''_{y^2}(M_3) = 12$, pa je

$$d^2 f(M_3) = 6dx^2 + 12dy^2 > 0,$$

za $dx^2 + dy^2 \neq 0$, pa imamo lokalni minimum. Tada je $f_{min}(1,-1) = -6$.
Provera za tačku M_4.
Imamo da je $f''_{x^2}(M_4) = -6$, $f''_{xy}(M_4) = 0$ i $f''_{y^2}(M_4) = 12$, pa je

$$d^2(M_4) = -6dx^2 + 12dy^2.$$

Ako je $dy = dx$ tada je $d^2 f(M_4) = 6dx^2 > 0$, dok za $dy = \frac{1}{2}dx$ imamo $d^2 f(M_4) = -3dx^2 < 0$. Kako je $d^2 f(M_4)$ promenljivog znaka nema lokalnih ekstremnih vrednosti.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Realna funkcija dve realne promenljive – Uslovni i apsolutni ekstremi. Implicitno zadata funkcija. Kanoničke jednačine površi drugog reda

Lekcija 07

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

Poglavlje 1

Tejlorov polinom funkcije dve promenljive

TOTALNI DIFERENCIJAL n -TOG REDA

Pojam totalnog diferencijala se koristi prilikom definisanja Tejlorovog polinoma za realnu funkciju dve realne promenljive.

Pretpostavimo da je $z=f(x,y)$ realna funkcija dve promenljive definisana u nekoj $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Ako pretpostavimo da u toj oblasti posmatrana funkcija ima sve moguće parcijalne izvode, tada su svi oni neprekidni u oblasti D, pa funkcija u posmatranoj oblasti ima sve moguće diferencijale $d^n f, n=0,1,2,\ldots$ Stoga, za prozvoljnu fiksiranu tačku $M(x_0,y_0)\in D$ i prozvoljnu tačku $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, možemo da uočimo n-ti diferencijal u tački M, u oznaci $d^n f(M), n=0,1,2,\ldots$ definisan sa

$$d^0 f(M)=f(M),$$

$$d^1 f(M)=f'_x(M)(x-x_0)+f'_y(M)(y-y_0),$$

$$d^2 f(M)=f''_{xx}(M)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(M)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(M)(y-y_0)^2,$$

$$\vdots$$

$$d^n f(M)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n-k}\underbrace{y\ldots y}_{k}}(M)(x-x_0)^{n-k}(y-y_0)^k.$$

Kako je D otvoren skup tačaka i tačka $M_1(x_1,y_1)\in D$, postoji neko $\varepsilon>0$, tako da cela okolina

$$U_\varepsilon(M_1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x-x_1{}^2+y-y_1{}^2}<\varepsilon\right\}$$

sadržana u oblasti D . Dalje, za proizvoljne tačke $P(x_1,y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ u ravni $\mathbb{R}^2$ označimo sa (P,Q) otvorenu duž koja spaja te tačke i definišimo je na sledeći način

$$(P,Q)=\{(x_1,y_1)+t\cdot(x_2-x_1,y_2-y_1)\mid 0<t<1\}.$$

TEJLOROV POLINOM

Datim stavom se uvodi Tejlorova formula za funkciju dve promenljive.

Stav. Ako funkcija $z = f(x,y)$ ima sve potrebne parcijalne izvode na oblasti D, tačka $M_0(x_0,y_0) \in D$ i tačka $M(x,y) \in U_\varepsilon(M_0)$, tada postoji izvesna tačka A na otvorenoj duži ($M_0M)$, takva da važi

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(M_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(A)}{(n+1)!}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Pritom, za svako $n = 0,1,2,\ldots$ imamo da je

$$d^{n+1} f(A) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n+1-k}\underbrace{y\ldots y}_{k}}(A)(x-x_0)^{n+1-k}(y-y_0)^k.$$

Polinom stepena $n \in \mathbb{N}$ oblika

$$T_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(M_0)}{k!},$$

naziva se Tejlorov polinom n-tog stepena koji odgovara funkciji $z = f(x,y)$ i fiksiranoj tački $M_0(x_0,y_0) \in D$.

Može se uočiti da je

$$T_n(M_0) = f(x_0,y_0), \quad \frac{\partial T_n(M_0)}{\partial x} = f'_x(x_0,y_0), \quad \frac{\partial T_n(x,y)(M_0)}{\partial y} = f'_y(x_0,y_0), \ldots$$

ANALITIČKA FUNKCIJA

Sve elementarne funkcije dve promenljive su analitičke funkcije u svojim oblastima definisanosti, tako da se u praksi najčešće srećemo sa analitičkim funkcijama.

Kaže se da je funkcija $f(x,y)$ analitička funkcija u oblasti D ukoliko za bilo koju tačku $M_0(x_0,y_0) \in D$ postoji neka okolina $U_\varepsilon(M_0)$ takva da za proizvoljnu tačku $(x,y) \in U_\varepsilon(M_0)$ izraz $R_n(x,y) = f(x,y) - T_n(x,y) \to 0$, kada $n \to \infty$, tj. $T_n(x,y) \to f(x,y)$, kada $n \to \infty$. Prethodni uslov označava da se funkcija $z = f(x,y)$ u nekoj okolini tačke $M_0(x_0,y_0)$ može razviti u tzv. Tejlorov red, tj. da za svako $(x,y) \in U_\varepsilon(M_0)$ važi jednakost

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f(M_0)}{k!}.$$

Dakle, po definiciji svaka funkcija dve promenljive $z = f(x,y)$ je analitička funkcija u nekoj oblasti D, ako se u nekoj okolini proizvoljne tačke $(x_0,y_0) \in D$ može razviti u red dat prethodnom formulom. Ako se posmatra tačka $M_0(0,0) \in D$, tada se odgovarajući Tejlorov red naziva Maklorenov red, a odgovarajući razvoj analitičke funkcije $z = f(x,y)$ u tački $M_0(0,0) \in D$ se naziva Maklorenov razvoj i on glasi

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f(0,0)}{k!}.$$

PRIMER

Određivanje Tejlorovog polinoma.

Razviti funkciju $z = x^{y+2} (x > 0, x \neq 1)$ u okolini tačke $(1,3)$ u Tejlorov polinom drugog stepena.

Rešenje. Prvo ćemo odrediti parcijalne izvode funkcije $z = x^{y+2} (x > 0, x \neq 1)$ prvog i drugog reda. Tada imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y+2)x^{y+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^{y+2} \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (y+2)(y+1)x^y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^{y+2} \ln^2 x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y+1}(1 + (y+2) \ln x),$$

pa dobijamo da je

$$f(1,3) = 1, \quad \frac{\partial f(1,3)}{\partial x} = 5, \quad \frac{\partial f(1,3)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(1,3)}{\partial x^2} = 20, \quad \frac{\partial^2 f(1,3)}{\partial x \partial y} = 1 \quad \frac{\partial^2 f(1,3)}{\partial y^2} = 0.$$

Tada Tejlorov polinom drugog reda glasi

$$x^{y+2} = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + (x-1)(y-3) + R_2.$$

Veličina R_2 predstavlja grešku koja se čini prilikom razvoja početne funkcije u polinom.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Uslovni ekstremi funkcije dve promenljive

LAGRANŽEV METOD MULTIPLIKATORA

Određivanje uslovnih ekstrema primenom Lagranževe metode je bazirano na znaku drugog diferencijala u tački koja je kandidat da u njoj bude lokalni ekstrem.

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na oblasti $E \subseteq \mathbb{R}^2$ i uočimo zatvorenu oblast $\overline{E} = E \cup \partial E$. Takođe, neka je implicitno zadata funkcija $\varphi(x, y) = 0$ u $\overline{E}$. Pretpostavimo da funkcija f ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda, kao i funkcija φ. Posmatrajmo sledeću funkciju

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y).$$

Funkcija F naziva se Lagranževa funkcija sa multiplikatorom λ i ona nam je osnov za izračunavanje uslovnih ekstrema funkcije f, pri datom uslovu $\varphi(x, y) = 0$ na datoj oblasti. Lagranževa funkcija zavisi od tri nepoznate i to x, y i λ. Veličina λ je novouvedena nepoznata koju nazivamo multiplikator. Određivanja uslovnih ekstrema funkcije f, pri uslovu $\varphi(x, y) = 0$ se svodi na određivanje lokalnih ekstrema funkcije F.

Prvo formirajmo sistem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \quad \text{odnosno} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo kandidate za uslovne ekstreme. Tada, za svaki od tih kandidata sprovedemo selekciju po pitanju analize znaka d^2F. U slučaju da je tačka $M(x_0, y_0, \lambda)$ lokalni ekstrem za F, tada je tačka $M(x_0, y_0)$ uslovnog ekstrema funkcije f pri uslovu $\varphi(x, y) = 0$ na $\overline{E}$. U zavisnosti od znaka drugog diferencijala u tački $M(x_0, y_0)$ za uslovni ekstrem imamo dve mogućnosti:

1° za $d^2F(M_0) > 0$ funkcija u tački M_0 ima uslovni minimum,

2° za $d^2F(M_0) < 0$ funkcija u tački M_0 ima uslovni maksimum.

Ponekad je potrebno odrediti dodatne veze između dx i dy diferencijacijom uslova $\varphi(x,y)=0$, kako bi se odredio znak drugog diferencijala u tački $M_0(x_0,y_0)$.

Napomena. Za $d^2F(M_0)=0$ ne može se ništa zaključiti ouslovnim ekstremima u tački M_0 i analiziranje se mora proširiti na diferencijale višeg reda, o čemu ovde neće biti reči.

Napomena. U slučaju da je funkcija f realna funkcija od tri ili više promenljivih, potpuno istom metodologijom možemo tražiti uslovne ekstreme. Pritom,možemo imati više od jednog uslova, pri čemu je njihov broj uvek manji od broja promenljivih u polaznoj funkciji.

PRIMER – 1. DEO

Određivanje uslovnih ekstrema primenom Lagranževe metode – određivanje stacionarnih tačaka i drugih parcijalnih izvoda.

Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $f(x,y)=x\cdot y$, pri uslovu $x^2+y^2=2$.

Rešenje. Formirajmo Lagranževu funkciju

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y^2-2).$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=y+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=x+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2&=2.\end{aligned}$$

Sada imamo da je

$$\left.\begin{aligned}y=-2\lambda x,\\ x+2\lambda(-2\lambda x)=0,\\ x^2+y^2=2.\end{aligned}\right\}\quad\Leftrightarrow\quad\left.\begin{aligned}y&=-2\lambda x,\\ x(1-4\lambda^2)&=0,\\ x^2+y^2&=2.\end{aligned}\right\}$$

Poslednji sistem se raspada na sledeća dva sistema:

$$\left.\begin{aligned}x=0,\\ y=0,\\ 0=2.\end{aligned}\right\}\quad\vee\quad\left.\begin{aligned}y&=-2\lambda x,\\ (1-4\lambda^2)&=0,\\ x^2+y^2&=2.\end{aligned}\right\}$$

Prvi sistem je nemoguć, a iz druge jednačine drugog sistema dobijamo da je $\lambda_{1/2}=\pm\frac{1}{2}$.

<u>Za $\lambda=-\frac{1}{2}$</u> : iz prve jednačine poslednjeg sistema imamo da je $y=x$, i zamenom ovoga u trećoj jednačini dobijamo da je $x^2=1$, tj. $x=\pm1$. Tada dobijamo dve stacionarne tačke

$M_1(1,1)$ i $M_2(-1,-1)$ za $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ odnosno $M_1'\left(1,1,-\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_2'\left(-1,-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

$\underline{\text{Za } \lambda=\frac{1}{2}}$: iz prve jednačine poslednjeg sistema imamo da je $y=-x$, i zamenom ovoga u trećoj jednačini dobijamo da je $x^2=1$, tj. $x=\pm 1$. Tada dobijamo dve stacionarne tačke $M_3(1,-1)$ i $M_4(-1,1)$ za $\lambda=\dfrac{1}{2}$ odnosno $M_3'\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_4'\left(-1,1,\dfrac{1}{2}\right)$.

Sada određujemo

$$F''_{x^2}=2\lambda,\quad F''_{xy}=1,\quad F''_{y^2}=2\lambda.$$

Dalje, imamo da je

$$d^2F=2\lambda dx^2+2dxdy+2\lambda dy^2.$$

PRIMER – 2. DEO

Određivanje uslovnih ekstrema primenom Lagranževe metode – diskusija da li dobijene stacionarne tačke jesu uslovni ekstremi.

U tačkama $M_1'\left(1,1,-\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_2'\left(-1,-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ imamo da je

$$d^2F(M_1')=d^2F(M_2')=-dx^2+2dxdy-dy^2=-(dx-dy)^2\leq 0, \qquad (*)$$

odakle ne možemo izvesti zaključak o lokalnim ekstremnim vrednostima. Kako je $x^2+y^2=2$ imamo da je $2xdx+2ydy=0$, tj. $xdx+ydy=0$.

Za tačku $M_1(1,1)$ tada iz $xdx+ydy=0$ imamo $1\cdot dx+1\cdot dy=0$, tj. $dy=-dx\neq 0$. Ubacujući prethodno u $(*)$ imamo da je

$$d^2F(M_1')=-4dx^2<0,$$

Dakle, tačka $M_1(1,1)$ je lokalni uslovni maksimum funkcije $f(x,y)$.

Za tačku $M_2(-1,-1)$ tada iz $xdx+ydy=0$ imamo $(-1)\cdot dx+(-1)\cdot dy=0$, tj. $dy=-dx\neq 0$. Ubacujući prethodno u $(*)$ imamo da je

$$d^2F(M_2')=-4dx^2<0,$$

Dakle, tačka $M_2(-1,-1)$ je lokalni uslovni maksimum funkcije $f(x,y)$.
U tačkama $M_3'\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$ i $M_4'\left(-1,1,\dfrac{1}{2}\right)$ imamo da je

$$d^2F(M_3')=d^2F(M_4')=dx^2+2dxdy+dy^2=(dx+dy)^2\geq 0, \qquad (**)$$

odakle ne možemo izvesti zaključak o lokalnim ekstremnim vrednostima. Kako je $x^2 + y^2 = 2$ imamo da je $2xdx + 2ydy = 0$, tj. $xdx + ydy = 0$.

Za tačku $M_3(1, -1)$ tada iz $xdx + ydy = 0$ imamo $1 \cdot dx + (-1) \cdot dy = 0$, tj. $dy = dx \neq 0$. Ubacujući prethodno u $(**)$ imamo da je

$$d^2F(M_3') = 4dx^2 > 0,$$

Dakle, tačka $M_3(1, -1)$ je lokalni uslovni minimum funkcije $f(x, y)$.

Za tačku $M_4(-1, 1)$ tada iz $xdx + ydy = 0$ imamo $(-1) \cdot dx + 1 \cdot dy = 0$, tj. $dy = dx \neq 0$. Ubacujući prethodno u $(**)$ imamo da je

$$d^2F(M_4') = 4dx^2 > 0,$$

Dakle, tačka $M_4(-1, 1)$ je lokalni uslovni minimum funkcije $f(x, y)$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

METOD ELIMINACIJE

U nekim situacijama određivanja uslovnih ekstrema funkcije dve promenljive se može svesti na određivanje lokalnih ekstrema funkcije jedne promenljive.

U nekim situacijama određivanja uslovnih ekstrema funkcije dve promenljive se može svesti na određivanje lokalnih ekstrema funkcije jedne promenljive. To je slučaj kada se iz datog uslova može jedna promenljiva izraziti preko one druge, a onda se njenom eliminacijom iz date funkcije, ova svodi na funkciju jedne promenljive. Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Naći lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, pri uslovu $x - y + 4 = 0$.

Rešenje. Iz uslova $x - y + 4 = 0$ imamo $y = x + 4$. Tada funkcija $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, posle eliminacije promenljive y iz nje postaje

$$f(x) = 2x^2 + (x + 4)^2 = 3x^2 + 8x + 16.$$

Sada, potražimo $f'(x) = 6x + 8$, pa je moguća lokalna ekstremna vrednost za $f'(x) = 0$ i to je tačka $x_0 = -\dfrac{4}{3}$. Kako je $f''(x) = 6 > 0$, posmatrana funkcija $f(x, y)$ ima lokalni minimum u tački $M_0\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$, gde je $y_0 = x_0 + 4 = \dfrac{8}{3}$.

Napomena. Funkcija dve promenljive može imati najviše jedan uslov tako da se ovaj metod kod njih često primenjuje, pod uslovom da je moguće y eksplicitno izraziti u funkciji od x ili obrnuto.

Napomena. Primer koji smo rešavali Lagranževom metodom i gde je trebalo odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $f(x, y) = x \cdot y$, pri uslovu $x^2 + y^2 = 2$ se takođe može rešavati metodom eliminacije. Tada treba voditi računa da iz $x^2 + y^2 = 2$ imamo da je $y = \pm\sqrt{2 - x^2}$, tako da u jednom slučaju treba odrediti lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x \cdot \sqrt{2 - x^2}$, a u drugom treba odrediti lokalne ekstreme funkcije $f(x) = -x \cdot \sqrt{2 - x^2}$.

Poglavlje 3

Apsolutni ekstremi

POSTUPAK ODREĐIVANJA APSOLUTNIH EKSTREMA NA ZATVORENOJ OBLASTI

Od lokalnih ekstrema unutar posmatrane oblasti i uslovnih ekstremima sa granice te oblasti bira se, najveća, odnosno najmanja vrednost.

Postupak određivanja apsolutnih ekstrema (najveću i najmanju vrednost) neke funkcije $z=f(x,y)$ u nekoj zatvorenoj oblasti $\overline{E}\subseteq\mathbb{R}^2$ ($\overline{E}=E\cup\partial E,$)je sledeći:

- Odredimo sve moguće stacionarne tačke funkcije $z=f(x,y)$ i izdvojimo one koje se nalaze unutar otvorene oblasti E i izračunamo vrednosti funkcije $z=f(x,y)$ u tako dobijenim tačkama.

- Posebno na granici te oblasti E (tj. na ∂E) , odredimo ekstremne vrednosti funkcije $z=f(x,y)$ i izračunamo vrednosti funkcije $z=f(x,y)$ u tako dobijenim tačkama – dakle, treba odrediti sve uslovne ekstreme funkcije $z=f(x,y)$, a uslov je da se oni nalazi na granici te oblasti koja je sastavljena od jedne ili više krivih oblika $\varphi(x,y)=0,$

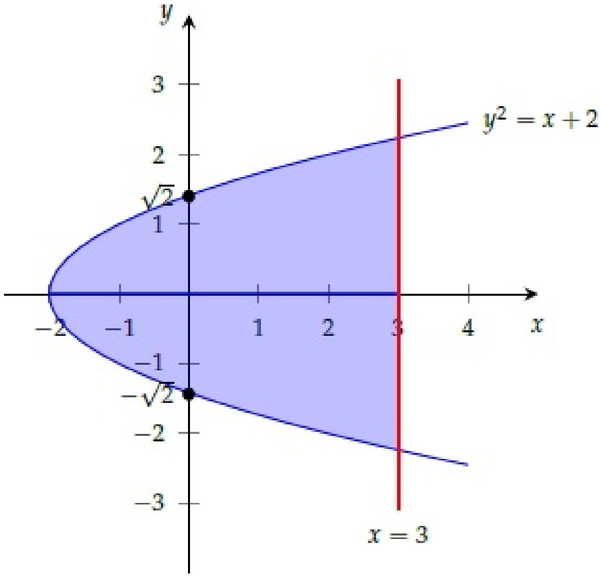
- Na kraju od svih ovako dobijenih vrednosti za funkciju $z=f(x,y)$, izdvojimo najveću, odnosnu najmanju vrednost funkcije na toj zatvorenoj oblasti $\overline{E}$. Svakako, takvih vrednosti može biti i više od jedne.

PRIMER – 1. DEO

Grafičko predstavljanje oblasti.

Odrediti najmanju i najveću vrednost funkcije $z(x,y)=2y^2-x^2+2x+1$ na oblasti $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2-2\leq x\leq 3\}$.

Rešenje. Najpre ćemo grafički predstaviti zatvorenu oblast $\overline{E}$. Ona je ograničena kvadratnom parabolom $x=y^2-2$ i pravom $x=3$. Zatvorena oblast $\overline{E}$ je šrafirana na datoj slici, koja uključuje i njenu granicu određenu delom parabolom $x=y^2-2$ (crvena linija na slici) i delom prave $x=3$ (plava linija na slici).



Slika 3.1 Grafički prikaz zatvorene oblasti na kojoj tražimo apsolutne ekstreme.

Zatvorenu oblast $\overline{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y^2-2\leq x\leq 3\}$ ćemo podeliti na otvorenu oblast $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y^2-2<x<3\}$ i granicu oblasti $\partial E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y^2-2=x\wedge x=3\}$.

PRIMER – 2. DEO

Određivanje apsolutnih ekstrema.

Odredimo, najpre, lokalne ekstremne vrednosti unutar otvorene oblasti E. Stoga je potrebno rešiti sistem

$$\begin{aligned} f'_x&=0 \\ f'_y&=0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} -2x+2&=0. \\ 4y&=0. \end{aligned}$$

Dakle, stacionarna tačka je $S(1,0)$. Ona se očigledno nalazi unutar otvorene oblasti E i važi $z(S)=2$.

Granicu oblasti E, u oznaci ∂E, čine prava $x-3=0$, kao i parabola $y^2-x-2=0$.

Najpre, ćemo odrediti uslovni ekstrem funkcije $z(x,y)=2y^2-x^2+2x+1$, pri uslovu $x-3=0$. Ovde ćemo primeniti metod eliminacije, jer je $x=3$, pa treba odrediti lokalne ekstreme funkcije jedne promenljive $z(y)=2y^2-2$. Sada je $z'(y)=4y$, pa se lokalna ekstremna vrednost za poslednju funkciju postiže za $y=0$, tj. lokalni ekstrem početne funkcije treba tražiti i u tački $A(3,0)$. Tada je $z(A)=-2$.

Na kraju ćemo odrediti uslovni ekstrem funkcije $z(x,y)=2y^2-x^2+2x+1$, pri uslovu $y^2-x-2=0$. Ovde ćemo, takođe, primeniti metod eliminacije. Ako uslov $x=y^2-2$ zamenimo u polaznoj funkciji ona postaje funkcija jedne promenljive $z(y)=-y^4+8y^2-7$. Lokalne ekstreme poslednje funkcije tražimo iz njenog prvog izvoda.

Tada dobijamo $z'(y) = -4y^3 + 16y = -4y(y^2 - 4)$. Dakle, mogući ekstremi se postižu za $y = 0$ ili $y = 2$ ili $y = -2$. Ovo znači da za moguće ekstreme početne funkcije treba uzeti u obzir tačke $B(-2,0), C(2,2)$ i $D(2,-2)$. Sada imamo da je $z(B) = -7, z(C) = z(D) = 9$.

Dakle, najveća vrednost na zatvorenoj oblasti $\overline{E}$, postiže se u tačkama C i D, a najmanja u tački B.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Implicitno zadate funkcije

UVOD

Implicitno zadate funkcije dve realne promenljive.

Kada smo govorili o realnim funkcijama jedne realne promenljive uveli smo pojam izvoda implicitno zadate funkcije jedne promenljive. Naime, ako je neka realna funkcija jedne realne promenljive zadata u implicitnom obliku $F(x,y)=0$ i ako je funkcija $F(x,y)$ diferencijabilna u svim tačkama (x, y) neke oblasti $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, tada se na osnovu teoreme o implicitnoj funkciji, izvodna funkcija $y'(x)$ može odrediti po formuli

$$y\,\acute{}_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Izvodi višeg reda se mogu dobiti uzastopnim diferenciranjem prethodne formule.

Realna funkcija dve realne promenljive je zadata u implicitnom obliku, ako je zadata jednačinom $F(x,y,z)=0$, pri čemu je $F(x,y,z)$ data funkcija tri promenljive u nekoj oblasti $D_3 \subseteq \mathbb{R}^3$. Da bi funkcija dve promenljive bila definisana na ovaj način na nekoj oblasti, potrebno je da u toj oblasti jednačina $F(x,y,z)=0$ ima jednistveno rešenje po nezavisno promenljivoj.

Primer. Ako posmatramo sferu u prostoru $\mathbb{R}^3$, čiji je centar u koordinatnom početku i poluprečnik R, tada njena jednačina glasi $x^2+y^2+z^2=R^2$.Razmotrimo, sada, broj rešenja ove jednačine po z. Imamo da je

$$z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Svakako, u ovom slučaju mora da važi da je $x^2+y^2 \leq R^2$, tj. izbor tačaka (x,y) mora biti takav da je

$$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq R^2\},$$

tj. tačke (x,y) se moraju izabrati tako da zadovoljavaju uslov $x^2+y^2<R^2$ (tj. da pripadaju unutrašnosti kruga) ili da zadovoljavaju uslov $x^2+y^2=R^2$ (tj. da se nalaze na kružnici). Za svaku tačku iz unutrašnosti kruga posmatrana jednačina ima po dva rešenja z_1 i z_2, od kojih je jedno pozitivno (na primer z_1) za koje važi $0<z_1<R$, a drugo negativno (na primer z_2) za koje važi $-R<z_2<0$. S druge strane, ako se tačka (x,y) izabere sa kružnice $x^2+y^2=R^2$, tada dobijamo jedinstveno rešenje $z=0$. Dakle, da bismo jednačinom $x^2+y^2+z^2=R^2$ implicitno definisali funkciju, potrebno je da uvedemo još neko dodatno ograničenje kako bi ona uvek imala jedinstveno rešenje. U ovom slučaju bismo mogli da stavimo da je $z \geq 0$ (ili analogno $z \leq 0$). Na ovaj način postižemo da jednom originalu (u ovom slučaju tački iz ravni) odgovara tačno jedna slika (u ovom slučaju broj).

STAV O IMPLICITNO ZADATOJ FUNKCIJI

Datim stavom se uvodi način zadavanja o funkcije u implicitnom obliku.

Stav. Pretpostavimo da je funkcija $F(x,y,z)$ diferencijabilna u oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^3$, izvod F'_z je neprekidan i različit od nule u celoj oblasti D. Neka je dalje D' projekcija oblasti D u $\mathbb{R}^2$. Tada, za proizvoljnu tačku (x_0,y_0,z_0) iz $\mathbb{R}^3$, postoji neko $\varepsilon > 0$, tako da u okolini $U_\varepsilon > (x_0,y_0)$ postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija $z = f(x,y)$ takva da je $|f(x,y) - z_0| < \varepsilon$ i osim toga važi

$$F(x,y,f(x,y)) \equiv 0,$$

za proizvoljnu tačku $(x_1,y_1) \in U_\varepsilon(x_0,y_0)$.

Napomena. Za neku proizvoljnu oblast D iz $\mathbb{R}^3$, skup svih tačaka (x,y) iz $\mathbb{R}^2$, u oznaci D', takvih da postoji bar jedna realna vrednost z, takva da tačka $(x,y,z) \in D$, predstavlja takođe oblast u $\mathbb{R}^2$ i D' predstavlja projekciju oblasti D u prostor $\mathbb{R}^2$.

PRVI I DRUGI PARCIJALNI IZVODI

Postupak za određivanje prvih i drugih parcijalnih izvoda funkcije zadate implicitno.

Ako prepostavimo da jednačina $F(x,y,z) = 0$ zadovoljava uslove prethodne teoreme, tada njenim diferenciranjem po promenljivoj x dobijamo $F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$odakle je

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

Slično, ako izvršimo diferenciranje po y dobijamo $F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0$odakle je

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Dalje, odgovarajućim diferencijaranjem dobijamo

$$z''_{xx} = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xz} \cdot z'_x) \cdot F'_z - (F''_{zx} + F''_{zz} \cdot z'_x) \cdot F'_x}{(F'_z)^2},$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{(F''_{xy} + F''_{xz} \cdot z'_y) \cdot F'_z - (F''_{zy} + F''_{zz} \cdot z'_y) \cdot F'_x}{(F'_z)^2},$$

i

$$z''_{yy} = -\frac{(F''_{yy} + F''_{yz} \cdot z'_y) \cdot F'_z - (F''_{zy} + F''_{zz} \cdot z'_y) \cdot F'_y}{(F'_z)^2}.$$

Ako u prethodnim formulama izvršimo deljenje brojioca i imenioca sa F'_z, a zatim iskoristimo dobijene izraze za z'_x i z'_y, tada ove formule možemo zapisati na sledeći način

$$z''_{xx} = -\frac{F''_{xx} + 2F''_{xz} \cdot z'_x + F''_{zz} \cdot (z'_x)^2}{(F'_z)^3},$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{F''_{xy} + F''_{xz} \cdot z'_y + F''_{zy} \cdot z'_x + F''_{zz} \cdot z'_x \cdot z'_y}{(F'_z)^2},$$

i

$$z''_{yy} = -\frac{F''_{yy} + 2F''_{yz} \cdot z'_y + F''_{zz}(\cdot z'_y)^2}{(F'_z)^2}.$$

Napomena. Diferencijal prvog i višeg reda se kod funkcija zadatih implicitnim jednačinama određuje na istovetan način kao i kod funkcija dve promenljive koje su zadate u eksplicitnom obliku. Takođe, određivanje lokalnih ekstremnih vrednosti se sprovodi po istom postupku.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

4.1 Određivanja lokalnih ekstrema implicitno zadate funkcije

PRIMER – 1. DEO

Određivanje lokalnih ekstrema funkcije zadate implicitno – prvi parcijalni izvodi i stacionarne tačke.

Odrediti lokalne ekstreme funkcije $z^3 + z^2y - x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0, \quad z \neq 0.$

Rešenje. Primenićemo Silvesterov kriterijum. Dakle, potrebno je odrediti prve parcijalne izvode, kako bismo našli stacionarne tačke. Ako izvršimo, najpre, diferenciranje polazne jednačine po x, dobijamo

$$3z^2 \cdot z'_x + 2zy \cdot z'_x - 2x + 4 = 0,$$

odakle dobijamo

$$z'_x = \frac{2x-4}{3z^2+2zy}(*).$$

Slično, ako potražimo prvi parcijalni izvod po y dobijamo

$$3z^2 \cdot z'_y + 2zy \cdot z'_y + z^2 - 2y = 0,$$

pa imamo

$$z'_y = \frac{2y-z^2}{3z^2+2zy}(**).$$

Stacionarne tačke se odredjuju iz sledećeg sistema

$$z'_x = 0 \wedge z'_y = 0 \wedge F(x,y,z) = 0,$$

tj.

$$\frac{2x-4}{3z^2+2zy} = 0 \wedge \frac{2y-z^2}{3z^2+2zy} = 0 \wedge z^3 + z^2y - x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0.$$

Iz prve jednačine sistema dobijamo da je $x = 2$, a iz druge imamo da je $y = \frac{z^2}{2}$. Zamenom ovih vrednosti u treću jednačinu sistema, dobijamo

$$z^3 + \frac{z^4}{2} - 4 - \frac{z^4}{4} + 8 - 4 = 0, \quad z \neq 0,$$

tj.

$$\frac{z^4}{4} + z^3 = 0, \quad z \neq 0.$$

Odavde dobijamo da je $z = -4$. Dakle, stacionarna tačka je $S(2,8)$, pri čemu je $z(S) =-4$.

PRIMER – 2. DEO

Određivanje lokalnih ekstrema funkcije zadate implicitno – drugi parcijalni izvodi i primena Silvesterovog kriterijuma.

Sada treba odrediti druge parcijalne izvode polazne implicitno zadate funkcije kako bismo proverili, primenom Silvesterovog kriterijuma, da li je tačka S lokalni ekstrem. Diferenciranjem formule (*) po promenljivoj x , odnosno y dobijamo:

$$6zz'_x z'_x + 3z^2 z''_{x^2} + 2yz'_x z'_x + 2zyz''_{x^2} - 2 = 0,$$

odnosno

$$6zz'_y z'_x + 3z^2 z''_{xy} + 2yz'_y z'_x + 2zz'_x = 0,$$

tj.

$$z''_{x^2} = \frac{-6z - 2y \cdot {z'_x}^2 + 2}{3z^2 + 2yz}$$

$$z''_{xy} = \frac{-6z \cdot z'_y - 2y \cdot z'_y + 2z \cdot z'_x}{3z^2}.$$

S druge strane, ako diferenciramo formulu (**) po promenljivoj y dobijamo

$$6zz'_y z'_y + 3z^2 z''_{y^2} + 2yz'_y z'_y + 2zyz''_{y^2} - 2zz'_y - 2 = 0.$$

Odavde je

$$z''_{y^2} = \frac{-6z - 2y \cdot {z'_y}^2 - 4z \cdot z'_y + 2}{3z^2 + 2yz}.$$

Kako važi da je $z'_x(S) = z'_y(S) = 0$ i $z(S) = -4$, tada za tačku $S(2,8)$ imamo $A = z''_{x^2}(S) = -\frac{1}{8}, B = z''_{xy}(S) = 0,$ i $C = z''_{y^2}(S) = -\frac{1}{8}$.Konačno je

$$\gamma = A \cdot C - B^2 = \frac{1}{64} > 0 \quad \text{i} \quad A = -\frac{1}{8} < 0,$$

pa je tačka $S(2,8)$ na osnovu Silvesterovog kriterijuma tačka lokalnog maksimuma i $z_{max} = -4$.

Poglavlje 5

Kanoničke jednačine površi drugog reda

UVOD

Jednačina površi drugog reda koja se dobija transformacijom koordinatnog sistema u novi u kome ona ima najjednostavniji mogući oblik u smislu zapisa je kanonički oblik jednačine površi.

Pod površima drugog reda u $\mathbb{R}^3$ podrazumevaju se površi koji predstavljaju grafike realnih funkcija dve realne promenljive zadate implicitnom jednačinom

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

gde su $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \mathbb{R}$ bar jedan od koeficijenata A , B ili C je različit od nule. Postoji postupak kojim se jednačina neke površi data prethodnom formulom prevodi na tzv. kanonički oblik jednačine površi drugog reda . Naime, rotacijama i translacijama koordinatnog sistema u kome je, prvobitno, površ zadata prethodnom jednačinom, moguće je izabrati novi koordinantni sistem u kome ova jednačina ima najjednostavniji mogući oblik u smislu zapisa. Takav zapis se naziva kanonički oblik jednačine površi . O ovom postupku transformacije koordinatnog sistema ovde neće biti reči.

Za jednačinu površi drugog reda se kaže da je u kanonskom obliku ukoliko ona zadovoljava sledeća četiri uslova:

- nema mešovitih članova, tj. u takvoj jednačini se ne javljaju niti jedan od članova xy, xz, yz;

- nijedna koordinata x, y ili z ne sme da se javlja istovremeno i sa kvadratom i kao linearan član (npr. u takvoj jednačini ne sme da se javlja x^2 i x istovremeno);

- linearnih članova ne sme da ima više od jednog (dakle u njoj sme da se javlja samo x ili samo y ili samo z);

- ukoliko se javlja neki linearan član onda ne sme da se javlja slobodan član, tj. slobodan član mora biti jednak nuli.

KLASIFIKACIJA POVRŠI DRUGOG REDA

U odnosu na izabrani Dekartov koordinatni sistem iz opšte jednačine površi drugog reda može se dobiti 17 različitih površi drugog reda u kanonskom obliku.

Može se pokazati da jednačina površi drugog reda

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0,$$

gde su $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J \in \mathbb{R}$ i bar jedan od koeficijenata A , B ili C je različit od nule, u odnosu na izabrani Dekartov koordinatni sistem opisuje jednu od 17 sledećih površi u kanonskom obliku:

1. $x^2+y^2+z^2=1$– elipsoid (sfera);

2. $x^2+y^2+z^2=-1$– imaginarni elipsoid;

3. $x^2+y^2-z^2=1$– jednokrilni hiperboloid;

4. $x^2+y^2-z^2=-1$– dvokrilni hiperboloid;

5. $x^2+y^2-z^2=0$– realni konus;

6. $x^2+y^2+z^2=0$– imaginarni konus;

7. $x^2+y^2=2z$– eliptički paraboloid;

8. $x^2-y^2=2z$– hiperbolički paraboloid;

9. $x^2+y^2=1$– realni eliptički (kružni) cilindar;
10. $x^2+y^2=-1$– imaginarni eliptički cilindar;

11. $x^2-y^2=1$– hiperbolički cilindar;

12. $x^2+y^2=0$– dve imaginarne ravni koje se seku;

13. $x^2-y^2=0$– dve realne ravni koje se seku;

14. $x^2=2y$– parabolički cilindar;

15. $x^2=1$ – dve realne paralelne ravni;

16. $x^2=-1$ – dve imaginarne paralelne ravni;

17. $x^2=0$ – dve ravni koje se poklapaju.

Napomena. Imaginarne površi predstavljaju prazne skupove tačaka u prostoru $\mathbb{R}^3$ (tj. one realno ne postoje).

Ovde ćemo navesti neke od kanoničkih oblika površi drugog reda i dati njihovu geometrijsku interpretaciju. Ove površi, kao i njihove geometrijske interpretacije će nam biti bitne za dalje izlaganje gradiva.

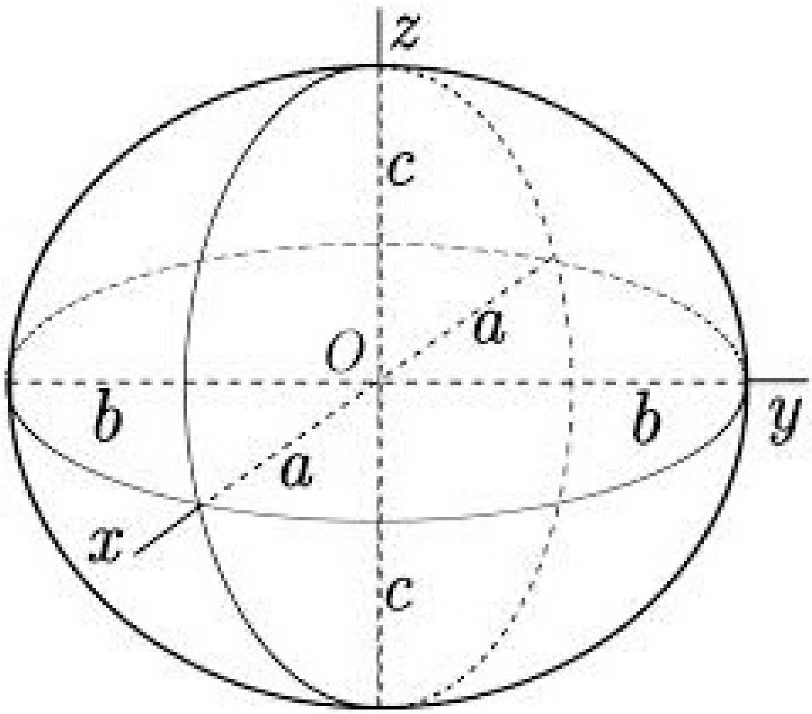
ELIPSOID

Kanonička jednačina elipsoida.

Površ čija je kanonička jednačina

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a\cdot b\cdot c\neq 0,$$

naziva se elipsoid, gde su a, b i c pozitivni realni brojevi koju predstavljaju poluose elipsoida. Ovaj elipsoid se naziva centralni elipsoid, jer mu je centar u koordinatnom početku.



Slika 5.1 Elipsoid.

Često se u zadacima javlja i jedan nekanonički oblik elipsoida

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}+\frac{(z-r)^2}{c^2}=1,\quad a\cdot b\cdot c\neq 0.$$

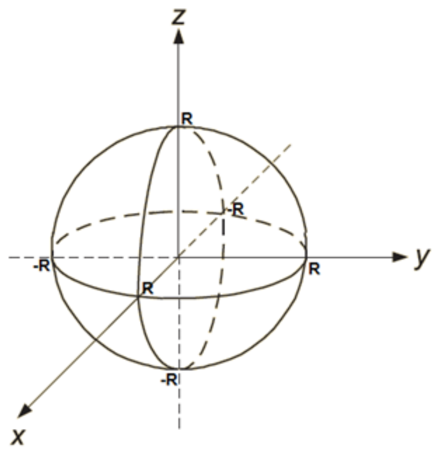
U ovom slučaju se centar elipsoida ne nalazi u koordinatnom početku, već u tački $C(p,\ q,\ r)$. Njegove poluose su i dalje, dužina a, b i c respetivno.

SFERA

Kanonička jednačina sfere.

Kanonička jednačina sfere je specijalan slučaj kanoničke jednačine elipsoida, gde je $a=b=c$. Centar ove sfere je u koordinatnom početku, pa se ona naziva centralna sfera, poluprečnika R. Njena jednačina je

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$



Slika 5.2 Centralna sfera.

Specijalan slučaj elipsoida kome centar nije u koordinatnom početku, za $a=b=c$, jeste sfera,

$$(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=R^2,$$

čiji je centar tačka $C(p,\ q,\ r)$ i poluprečnik R .

Primer. Neka je data jednačina

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-11=0.$$

Važi da je

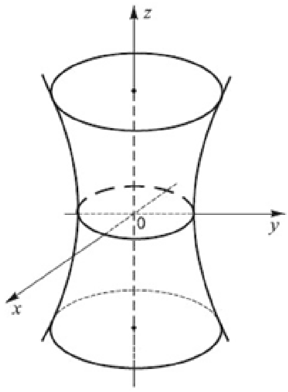
$$x^2-2x+1-1+y^2+4y+4-4+z^2-11=0, \quad \text{tj.} \quad (x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = 16.$$

Dakle, zadata površ jeste sfera čiji centar se nalazi u tački $C(1,-2,0)$, poluprečnika 4.

JEDNOKRILNI (JEDNOLISNI) HIPERBOLOID

Kanonička jednačina jednokrilnog (jednolisnog) hiperboloida.

Jednokrilni ili jednolisni hiperboloid, ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

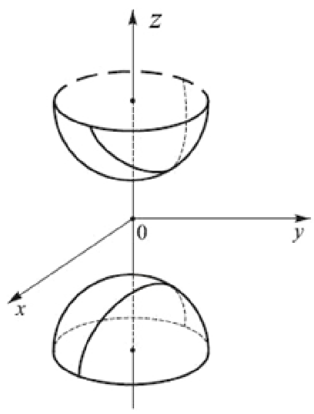


Slika 5.3 Jednokrilni (jednolisni) hiperboloid.

DVOKRILNI (DVOLISNI) PARABOLOID

Kanonička jednačina dvokrilnog (dvolisnog) paraboloida.

Dvokrilni ili dvolisni hiperboloid, je površ koja ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \;\; a\cdot b\cdot c\neq 0.$

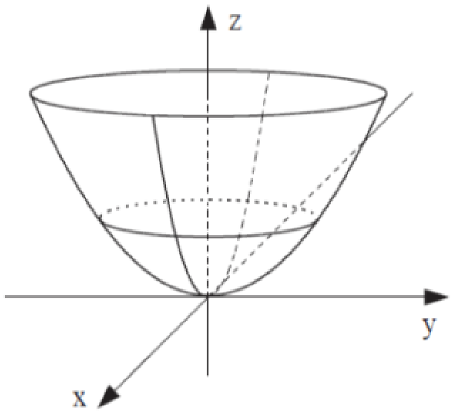


Slika 5.4 Dvokrilni (dvolisni) paraboloid.

ELIPTIČKI PARABOLOID

Kanonička jednačina eliptičkog paraboloida.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \;\; p,q>0$,naziva se eliptički paraboloid.



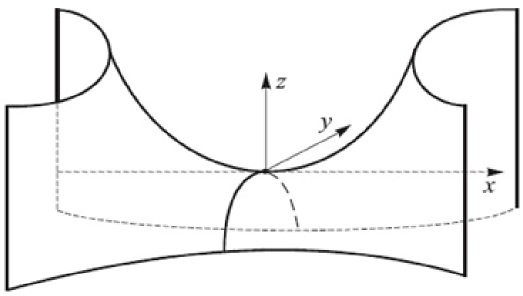
Slika 5.5 Eliptički paraboloid.

Svakako, ovaj paraboloid može biti kružni. Primer jednačine kružnog paraboloida glasi $x^2 + y^2 = z$.

HIPERBOLIČKI PARABOLOID

Kanonička jednačina hiperboličkog paraboloida.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0$,naziva se hiperbolički paraboloid. Često se u literaturi ova površ naziva sedlo.

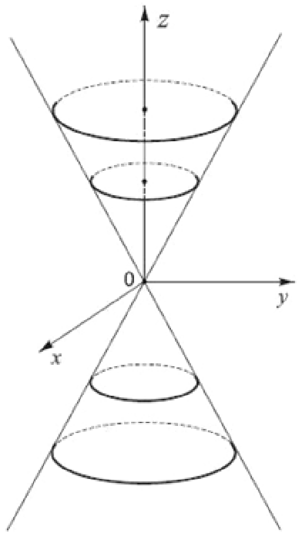


Slika 5.6 Hiperbolički paraboloid.

KONUS DRUGOG REDA

Kanonska jednačina konusa drugog reda.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a \cdot b \cdot c \neq 0$,naziva se eliptički konus drugog reda.



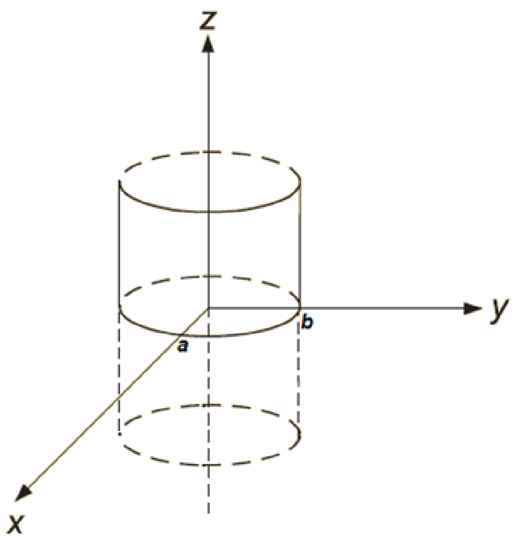
Slika 5.7 Konus drugog reda.

Specijalno, ako je $a = b = c$, tada dobijamo površ čija je jednačina $x^2 + y^2 - z^2 = 0$i koja se naziva kružni konus drugog reda.

ELIPTIČKI CILINDAR

Kanonaska jednačina eliptičkog cilindra.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \cdot b \neq 0$,naziva se eliptički cilindar.



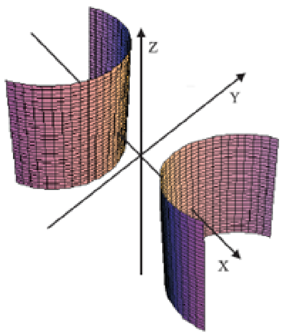
Slika 5.8 Eliptički cilindar.

Specijalan slučaj, za $a = b$, predstavlja kružni cilindar čija je jednačina $x^2 + y^2 = R^2$.

HIPERBOLIČKI CILINDAR

Kanonska jednačina hiperboličkog cilindra.

Površ čija je jednačina $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \;\; a \cdot b \neq 0$,naziva se hiperbolički cilindar.

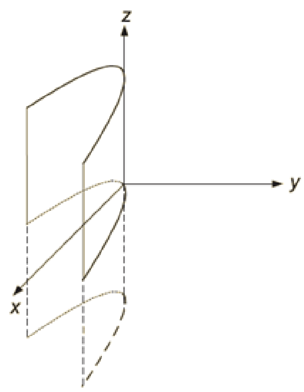


Slika 5.9 Hiperbolički cilindar.

PARABOLIČKI CILINDAR

Kanonska jednačina paraboličkog cilindra.

Površ čija je jednačina $y^2 = 2px$, naziva se parabolički cilindar.

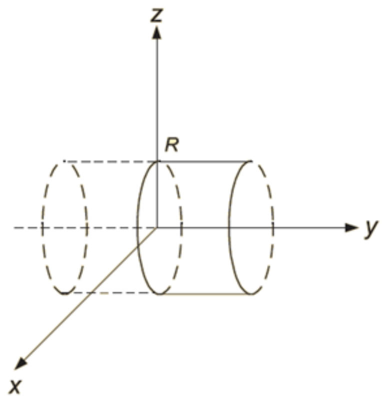


Slika 5.10 Parabolički cilindar $y^2 = 2px, p > 0$.

NAPOMENA 1

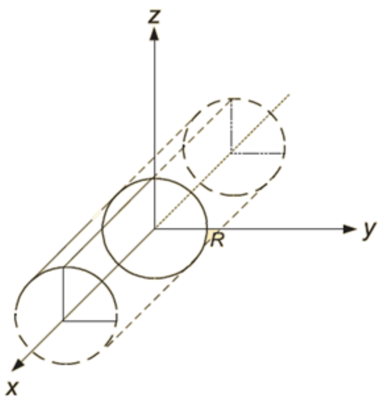
Prethodnim jednačinama su dati samo “reprezenti” odgovarajućih površi u kanonskom obliku. Na primer, kružni cilindar može biti zadat i jednačinom $x^2 + z^2 = R^2$ ili $y^2 + z^2 = R^2$.

Prethodnim jednačinama su zadati samo “reprezenti” odgovarajućih površi u kanonskom obliku. Na primer, kružni cilindar može biti zadat i sledećom jednačinom $x^2 + z^2 = R^2$.Tada ova površ ima grafik dat na narednoj slici.



Slika 5.11 Kružni cilindar.

Slično, površ $y^2 + z^2 = R^2$predstavlja kružni cilindar čiji je grafik dat na sledećoj slici.

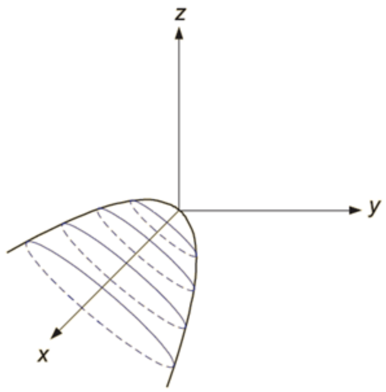


Slika 5.12 Kružni cilindar.

NAPOMENA 2

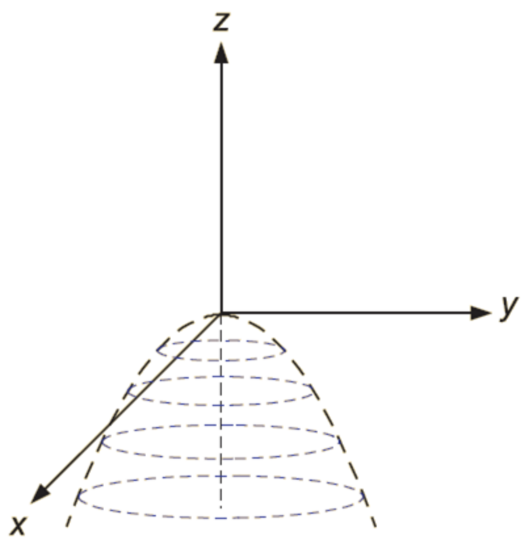
Prethodnim jednačinama su dati samo “reprezenti” odgovarajućih površi u kanonskom obliku. Na primer, eliptički paraboloid može biti zadat i datim jednačinama.

Slično, eliptički paraboloid $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x,\ p, q > 0,$ima grafik dat na sledećoj slici.



Slika 5.13 Eliptički paraboloid.

Moguće je, takođe, da važi $p, q < 0$. Tada, površ $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,\ p, q < 0,$ ima oblik dat na sledećoj slici.



Slika 5.14 Eliptički paraboloid.

Poglavlje 6

Tangentna ravan i normala površi

TANGENTNA RAVAN

Ravan koja dodiruje (tangira) datu površ u datoj tački naziva se tangentna ravan.

Funkcija $z = f(x, y)$ definiše neku površ u prostoru $\mathbb{R}^3$ koju čine tačke $M(x, y, f(x, y))$, odnosno tačke koje zadovoljavaju jednačinu $f(x, y) - z = 0$. Ako je ova funkcija diferencijabilna u tački (x_0, y_0), onda svaka kriva kroz tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$, gde je $z_0 = f(x_0, y_0)$ koja se dobija presecanjem te površi sa ravni upravnom na koordinatnu ravan Oxy ima u toj tački svoju tangentu, a sve te tangente leže u jednoj ravni čija je jednačina

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0),$$

gde je $p = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}$. Ova ravan se naziva tangentna ravan površi $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i ona je dodirna tačka površi i tangentne ravni.
Ako je površ data u implicitnom obliku jednačinom $F(x, y, z) = 0$, pri čemu je funkcija $F(x, y, z)$ diferencijalbilna i važi

$$(F_x')^2 + (F_y')^2 + (F_z')^2 > 0,$$

u svakoj tački $M(x, y, z)$, tada se pokazuje da je jednačina njene tangentne ravni u tački M_0 data sa

$$F_x'(M_0)(x - x_0) + F_y'(M_0)(y - y_0) + F_z'(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Primer. Odrediti tangentnu ravan na površ $z(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ u tački $M(1, 2, 3)$.

Rešenje. Važi da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 3y^2,$$

pa je $p = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 = -3$, kao i $q = -3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 = 9$. Tada jednačina tangentne ravni glasi

$$z - 3 = -3(x - 1) + 9(y - 2) \quad \text{tj.} \quad -3x + 9y - z - 12 = 0.$$

NORMALA POVRŠI

Prava koja je normalna na tangentnu ravan u datoj tački, naziva se normala površi.

Prava koja prolazi kroz tačku $M_0(\ x_0,\ y_0,\ z_0)$ i normalna je na tangentnu ravan naziva se normala površi $z = f(x, y)$. Njena jednačina glasi

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Ako je površ data u implicitnom obliku jednačinom $F(x, y, z) = 0$, pri čemu je funkcija $F(x, y, z)$ diferencijalbilna i važi

$$\left(F_x^{'}\right)^2+\left(F_y^{'}\right)^2+\left(F_z^{'}\right)^2>0,$$

u svakoj tački $M(x, y, z)$, tada se pokazuje da je jednačina normale u tački $M_0(\ x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x-x_0}{F_x^{'}\left(M_0\right)}=\frac{y-y_0}{F_y^{'}\left(M_0\right)}=\frac{z-z_0}{F_z^{'}\left(M_0\right)}.$$

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Diferencijalne jednačine prvog reda

Lekcija 08

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

Poglavlje 1

Obične diferencijalne jednačine prvog reda

POJAM DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

Diferencijalne jednačine su veoma značajne u procesu modeliranja raznih pojava u prirodnim i tehničkim naukama.

Neka je dat interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ i neka je na tom intervalu definisana funkcija $y = y(x)$ koja će biti nepoznata u posmatranim jednačinama. Neka je funkcija $y(x)$ diferencijabilna i neka je na intervalu $[a, b]$ funkcija $y'(x)$ neprekidna funkcija.

Obična diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina koja uključuje nepoznatu funkciju jedne promenljive (koju treba odrediti), kao i njen prvi izvod. Ovom jednačinom se opisuje veza između takve funkcije i njenog prvog izvoda. Ona može biti zadata u implicitnom ili eksplicitnom obliku.

Opšti implicitni oblik diferencijalne jednačine prvog reda je svaki izraz oblika

$$F(x, y, y') = 0,$$

gde je F realna funkcija od tri nezavisne realne promenljive sa dopustivim domenom.
Opšti eksplicitni oblik diferencijalne jednačine prvog reda je svaki izraz oblika

$$y' = f(x, y),$$

gde je f realna funkcija od dve nezavisne realne promenljive sa dopustivim domenom.

Napomena. Za funkciju F domen je dopustiv ako po svakoj od koordinata obuhvata sve potrebne vrednosti za x, y, odnosno y' dok je za funkciju f domen dopustiv, ako po svakoj od koordinata obuhvata sve potrebne vrednosti za x i y.

Generalno govoreći, diferencijalne jednačine su veoma značajne u procesu modeliranja raznih pojava u prirodnim i tehničkim naukama. Određivanjem njihovih rešenja (ako postoje) definišemo funkcijske odnose između veličina u procesu koji modeliramo.

Napomena. Diferencijalne jednačine prvog reda se mogu, pored implicitnog i eksplicitnog oblika, zadati u obliku preko diferencijala tj. u obliku

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

S ovog oblika se može preći na eksplicitni ili implicitni oblik diferencijalne jednačine, kao i obrnuto.

Primer. U nastavku su navedene neke diferencijalne jednačine prvog reda:

1. $xdx + \sqrt{x^2+y^2}dy = 0$, zadata preko diferencijala,

2. $3xy' - x^2y = \ln(\operatorname{tg} x)y^2$, zadata u implicitnom obliku,

3. $y' = \dfrac{3y-5x-6}{4y+3x-8}$ zadata u eksplicitnom obliku.

OPŠTE, PARTIKULARNO I SINGULARNO REŠENJE

Opšta i partikularna rešenja se dobijaju nekom od metoda za integraljenje. Svako drugo rešenje se naziva singularno rešenje, tj. ono se ne može dobiti iz opšteg.

Opšte rešenje ili opšti integral jednačine

$$F(x,y,y') = 0,$$

odnosno, jednačine $y' = f(x,y)$, (ako postoji) je svaka funkcija oblika $\varphi(x,y,C) = 0$, gde su $x \in [a,b]$ i $C \in \mathbb{R}$ koja ih zadovoljava. Funkcija $\varphi(x,y,C) = 0$, gde su $x \in [a,b]$ i $C \in \mathbb{R}$ u ravni $\mathbb{R}^2$ predstavlja familiju krivih koje zavise od jednog parametra C. One se nazivaju integralne krive za date diferencijalne jednačine. Kroz proizvoljnu tačku $M(x_0,y_0)$ ravni može prolaziti jedna ili više integralnih krivih ako je zadovoljen uslov $\varphi(x_0,y_0,C) = 0$, odakle se može odrediti realna vrednost za C. Svakoj realnoj vrednost dobijenoj za C iz poslednjeg uslova odgovaraće po jedna integralna kriva, ako tu vrednost za C zamenimo u opštem rešenju diferencijalne jednačine. Takva kriva predstavlja partikularno rešenje za posmatrane diferencijalne jednačine. Zadavanje tačke $M(x_0,y_0)$, tj. postavljanje uslova da za $x = x_0$, je $y_0 = y(x_0)$ se naziva početni uslov ili početni vrednost .

Opšta i partikularna rešenja diferencijalnih jednačina prvog reda, ako postoje, se dobijaju nekom od metoda za integraciju. Za takvu diferencijalnu jednačinu se kaže da je rešiva pomoću kvadratura. Svako drugo rešenje diferencijalne jednačine se naziva singularno rešenje. Dakle, to je rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za koju vrednost konstante $C \in \mathbb{R}$.

Napomena. Za svaku jednačinu oblika $F(x,y,y') = 0$, odnosno $y' = f(x,y)$, pod uslovom neprekidnosti i pod još jednim uslovom koji treba da važi za funkciju F, odnosno f – uslovom fiksne tačke, može se preko Koši – Pikarove teoreme (o kojoj ovde neće biti reči) dokazati postojanje i jedinstvenost jednog njenog partikularnog rešenja, ako je dat početni uslov da je za $x = x_0$, $y_0 = y(x_0)$. Ovaj uslov se naziva Košijev uslov , a problem određivanja pomenutog partikularnog rešenja naziva se Košijev problem ili Košijev zadatak .

Uopšteno govoreći, svaka diferencijalna jednačina prvog reda može biti ili rešiva (ima barem jedno rešenje) ili nerešiva (skup rešenja je prazan). Rešavanje ove jednačine podrazumeva poznavanje postupka koji nam za rezultat daje sva njena rešenja (ako ih ima).

Rešive jednačine mogu biti takve da je poznat postupak za njihovo rešavanje ili da se takav postupak ne zna. One jednačine koje su rešive, a za koje je nepoznat postupak za njihovo rešavanje se dele na: jednačine za koje se može dokazati da postoji postupak za njihovo rešavanje, ali da još uvek nema teorijskih dostignuća da bi se taj postupak odredio i na jednačine koje su rešive i za koje se dokazuje da ne postoji konstruktivni postupak za njihovo rešavanje bez dodatnih uslova (takva je npr. Rikatijeva jednačina).

Napomena. Osim pomenutih rešenja za diferencijalne jednačine postoje još približna i granična (asimptotska) rešenja, ali se njima ovde nećemo baviti.

TIPOVI OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA

U ovoj lekciji će biti obrađene diferencijalne jednačina prvog reda za koje znamo postupke za određivanje njihovog ukupnog rešenja (opšte rešenje + singularna rešenja).

U nastavku ćemo razmotriti nekoliko tipova rešivih diferencijalnih jednačina prvog reda za koje znamo postupke za određivanje njihovog ukupnog rešenja (opšte rešenje + singularna rešenja). Od takvih diferencijalnih jednačina prvog reda ćemo obraditi:

- Jednačinu koja razdvaja promenljive,
- Homogenu jednačinu,
- Jednačinu koja se može svesti na homogenu jednačinu,
- Linearnu jednačinu,
- Bernulijevu jednačinu,
- Jednačina koja predstavlja totalni diferencijal neke funkcije,
- Rikatijevu jednačinu.
- Lagranžovu jednačinu,
- Kleroovu jednačinu.

Poglavlje 2

Jednačina koja razdvaja promenljive

POSTUPAK ZA REŠAVANJE

Postupak za rešavanje jednačine ovog tipa se zasniva na razdvajanju promenljivih na različite strane znaka jednakosti, a nakon toga se izvršava integracija cele jednakosti.

Pretpostavimo da je na intervalu $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ nepoznata funkcija $y=f(x), x\in[a,b]$ neprekidna funkcija zajedno sa svojom izvodnom funkcijom $y'(x)$. Sada ćemo razmotriti rešavanje diferencijalnih jednačina prvog reda koje imaju oblik (ili se mogu na njega svesti)

$$y'=f(x)\cdot g(y),$$

odnosno,

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y),$$

gde je $f(x)$ neprekidna funkcija na $x\in[a,b]$ i $g(y)$ neprekidna funkcija na $y\in[c,d]\subseteq\mathbb{R}$, gde je $g(y)\neq 0$, za svako $y\in[c,d]$.

Ovakva jednačina naziva se diferencijalna jednačina kod kojih se promenljive mogu razdvojiti i ona je rešiva po nepoznatoj funkciji $y(x)$, tj. njena rešenja se mogu dobiti integracionim metodama. Ona se rešava na sledeći način

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)\Leftrightarrow\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx\Leftrightarrow\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx\Leftrightarrow G(y)+C_1=$$
$$F(x)+C_2,(C_1,C_2\in\mathbb{R})\Leftrightarrow G(y)=F(x)+C,$$

gde je $C=(C_2-C_1)\in\mathbb{R}$, a funkcije G i F su primitivne funkcije za funkcije $\frac{1}{g(y)}$ i $f(x)$, tim redom.

Funkcija $G(y)=F(x)+C$ predstavlja opšte rešenje diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive u implicitnom obliku i njena partikularna rešenja se mogu dobiti zadavanjem pojedinačnih vrednosti za $C\in\mathbb{R}$. Ako je moguće, funkciju $G(y)=F(x)+C$ koja predstavlja opšte rešenje jednačine koja razdvaja promenljive potrebno je prevesti u eksplicitan oblik.

Napomena.U slučaju da je funkcija $g(y)\neq 0$, ali da za neko y_0 važi da je $g(y_0)=0$, tada je $y=y_0$ rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja, tj. ono je singularno rešenje. To ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'^2 + y^2 - 1 = 0$. Da li ova diferencijalna jednačina ima singularna rešenja?

Diferencijalnu jednačinu $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ možemo zapisati u obliku $y' = \pm\sqrt{1-y^2}$, odakle dobijamo $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx$, za $y \in (-1,1)$. Dalje, integracijom dobijamo $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm \int dx$, odnosno $\arcsin y = C \pm x$. Dakle, opšte rešenje ove diferencijalne jednačine je $y = \sin(C \pm x)$.

Može se proveriti da $y_1 = 1$ i $y_2 = -1$ jesu rešenja diferencijalne jednačine $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ koja se ne mogu dobiti iz opšteg rešenja (niti za jednu vrednost konstante C,) pa $y_1 = 1$ i $y_2 = -1$ predstavljaju singularna rešenja ove diferencijalne jednačine.

PRIMER

Rešavanje diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x^3 - (y+1)^3 y' = 0.$$

Rešenje. Ako iskoristimo da je $y' = \frac{dy}{dx}$, data jednačina se može napisati u sledećem obliku

$$\begin{aligned} x^3 - (y+1)^3 \frac{dy}{dx} = 0 \;&\Leftrightarrow\; x^3 dx - (y+1)^3 dy = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x^3 dx = (y+1)^3 dy \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; \int x^3 dx = \int (y+1)^3 dy \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; \frac{x^4}{4} + c = \frac{(y+1)^4}{4}. \end{aligned}$$

Proširivanjem prethodne jednačine sa 4 i uvođenjem da je $c_1 = 4c$, imamo da je $(y+1)^4 = x^4 + c_1$. Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y = -1 \pm \sqrt[4]{x^4 + c_1}.$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: primena diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 3

Homogena jednačina po x i y

POSTUPAK REŠAVANJA

Prilikom rešavanja ovog tipa diferencijalne jednačine potrebno je, najpre, proveriti da li je ona homogena, a nakon toga uvesti novu nepoznatu funkciju.

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{odnosno} \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

ili svaka diferencijalna jednačina koja se može svesti na ovaj oblik, naziva se homogena diferencijalna jednačina po x i y. Za neku jednačinu kažemo da je homogena po x i y ako se $f\left(\frac{y}{x}\right)$ ne menja zamenom x sa kx i y sa ky, gde je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, tada važi

$$y' = f\left(\frac{ky}{kx}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Primer. Jednačina oblika $xyy' = x^2 + y^2$ jeste homogena jednačina po x i y, jer se može predstaviti u obliku

$$x^2 + y^2 = xyy' / : xy \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Takođe, važi da je

$$y' = \frac{1}{\frac{ky}{kx}} + \frac{ky}{kx} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ovu jednačina je moguće rešavati pomoću kvadratura. U tu svrhu treba uvesti smenu $z = \frac{y}{x}$, gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Odavde dobijamo da je $y = x \cdot z$, tj. $y' = z + xz'$.

Početna jednačina, sada, postaje

$$z + xz' = f(z), \quad \text{tj.} \quad z + x\frac{dz}{dx} = f(z).$$

Ona predstavlja jednačinu koja razdvaja promenljive. Tada je

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}.$$

Integracijom ove jednačine dobijamo da je

$$x = c \cdot e^{\int \frac{dz}{f(z)-z}},$$

što predstavlja opšte rešenje jednačine koja razdvaja promenljive, po funkciji z. Opšte rešenje polazne jednačine se dobija vraćanjem uvedene smene i tada je

$$x = c \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Napomena. U prethodnom postupku, za dobijenu diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive po z može se desiti da za određenu vrednost $z = z_0$ važi da je $f(z_0) - z_0 = 0$. Tada je $z = z_0$ jedno njeno rešenje. Stoga, za polaznu homogenu jednačinu, s obzirom na smenu, imamo da je $y = z_0 \cdot x$, jedno njeno rešenje.

PRIMER - 1. DEO

Homogena diferencijalna jednačina – provera i uvođenje smene.

Rešiti diferencijalnu jednačinu:

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx.$$

Rešenje. Nakon deobe prethodne jednačine sa dx, ova diferencijalna jednačina se može napisati u obliku

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Prethodna jednačina nakon deobe sa x, postaje

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dalje, ako uvedemo smene $x = k \cdot x, y = k \cdot y, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, imamo da je

$$y' = f\left(\frac{ky}{kx}\right) = \frac{ky}{kx} + \sqrt{1 + \left(\frac{ky}{kx}\right)^2} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

Ovo znači da je jednačina

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad (*)$$

homogena po x i y.

Homogenu jednačinu po x i y rešavamo uvođenjem smene $z = \frac{y}{x}$, gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Iz smene je $y = x \cdot z$ imamo da je $y' = z + x \cdot z'$. Zamenom dobijenog u jednačini (*) dobijamo da je

$$z + xz' = z + \sqrt{1 + z^2}.$$

Odavde imamo da je

$$x\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}.$$

Dobijena jednačina predstavlja onu koja razdvaja promenljive. Razdvajanjem promenljivih ona postaje

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

PRIMER - 2. DEO

Homogena diferencijalna jednačina – rešavanje dobijene diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive.

Dobijenu jednačinu rešavamo integraljenjem

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}.$$

Imamo da je

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|x| + \ln|c|, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Dalje, imamo da je

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|cx|, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Opšte rešenje po z glasi

$$z+\sqrt{1+z^2} = cx, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Dalje, izrazimo funkciju $z = z(x)$, kako bismo odredili opšte rešenje polazne jednačine po y.

Tada imamo

$$\begin{aligned}\sqrt{1+z^2} = cx - z \quad &\Rightarrow \quad 1+z^2 = c^2x^2 - 2cxz + z^2 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad z = \frac{c^2x^2-1}{cx}, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

Kako je $y = x \cdot z$, tada je

$$y = \frac{c^2x^2-1}{c}, \ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Napomena. U prethodnom primeru smo uzeli da je konstanta u obliku $\ln|c|$. Ovo je dozvoljeno raditi i često se koristi u zadacima kako bi se omogućilo zapisivanje opšteg rešenja u što jednostavnijem obliku.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: homogena jednačina.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

3.1 Diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu

POSTUPAK REŠAVANJA - PRVI SLUČAJ

Ako za koeficijente važi $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ tada se takva jednačina uvođenjem odgovarajuće smene svodi na homogenu jednačinu.

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

gde su $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$se može svesti na homogenu jednačinu uvođenjem određenih smena. Moguća su dva slučaja.

U prvom slučaju, ako je

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

tada se uvodi sledeća smena

$$x = X + \alpha,$$

$$y = Y + \beta.$$

de je X nova nepoznata, $Y = Y(X)$ nova nepoznata funkcija, a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstante koje treba odrediti, kako bi se polazna jednačina svela na homogenu. Uvodeći smenu u polaznu jednačinu dobijamo

$$Y' = f\left(\frac{a_1 X + a_1\alpha + b_1 Y + b_1\beta + c_1}{a_2 X + a_2\alpha + b_2 Y + b_2\beta + c_2}\right)$$

a koeficijente α i β određujemo iz sledećih zahteva

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0,$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0.$$

Ovako određene konstante α i β dovode do jednačine

$$Y' = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right),$$

odnosno,

$$Y' = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{Y}{X}}{a_2 + b_2 \frac{Y}{X}}\right),$$

tj.

$$Y' = g\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Poslednja jednačina predstavlja homogenu jednačinu po X i Y, koja se rešava po već izloženom metodu. Na kraju je potrebno vratiti sve uvedene smene.

POSTUPAK REŠAVANJA – DRUGI SLUČAJ

Ako za koeficijente važi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ tada se takva jednačina rešava na uvođenjem nove nepoznate funkcije $u = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y$..

Drugi slučaj podrazumeva situaciju da je u diferencijalnoj jednačini oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

gde su $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$,važi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ovo znači da je su a_1 i a_2, kao i b_1 i b_2 proporcionalne veličine, tj.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \alpha, \ \ \alpha \in \mathbb{R},$$

pa je tada $a_1 = \alpha \cdot a_2, b_1 = \alpha \cdot b_2, \alpha \in \mathbb{R}$. U ovoj situaciji se uvodi nova nepoznata funkcija $u = u(x)$ koja je oblika

$$u = a_1 x + b_1 y \quad \Rightarrow \quad u' = a_1 + b_1 y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u' - a_1}{b_1}.$$

Uvođenjem ove smene u polaznu jednačinu, ona postaje jednačina

$$u' = a_1 + b_1 f\left(\frac{u + c_1}{ku + c_1}\right)$$

i predstavlja diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

PRIMER

Diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu.

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = \left(\frac{x-y-1}{2x-2y+1}\right)^2.$$

Rešenje: Kako je $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, uvodimo novu funkciju $u(x) = x - y$, pa je $u' = 1 - y'$. Zamenom, u polaznoj jednačini

$$1 - u' = \left(\frac{u-1}{2u+1}\right)^2,$$

tj. dobijena jednačina je ona koja razdvaja promenljive. Tada je

$$\frac{du}{dx} = 1 - \left(\frac{u-1}{2u+1}\right)^2 = \frac{3u^2+6u}{4u^2+4u+1}.$$

Sada imamo

$$\int \frac{4u^2+4u+1}{3u(u+2)}du = \int dx.$$

Rešimo integral na levoj strani

$$\int \frac{4u^2+4u+1}{3u(u+2)}du = \int\left(\frac{4u(u+2)}{3u(u+2)} + \frac{1-4u}{3u(u+2)}\right)du = \frac{4}{3}\int du + \frac{1}{3}\int\frac{1-4u}{u(u+2)}du.$$

Integral $\int\frac{1-4u}{u(u+2)}du$ ćemo rešavati metodom neodređenih koeficijenata i imamo

$$\frac{1-4u}{u(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2},$$

odakle dobijamo da je $A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{9}{2}$. Tada je:

$$\int \frac{4u^2+4u+1}{3u(u+2)}du = \frac{4}{3}u + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|u| - \frac{9}{2}\ln|u+2|\right).$$

Tada je:

$$\frac{4}{3}u + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|u| - \frac{9}{2}\ln|u+2|\right) = x + C,$$

odnosno

$$\frac{1}{6}\left(8u + \ln|u| - 9\ln|u+2|\right) = x + C.$$

Vraćajući smenu $u(x) = x - y$ i množenjem prethodnog izraza sa 6, nakon sređivanja, dobijamo:

$$2x - 8y + \ln|x-y| - 9\ln|x-y+2| = C_1,\ C_1 = 6C.$$

Poglavlje 4

Linearna jednačina

POSTUPAK REŠAVANJA – HOMOGENA LINEARNA JEDNAČINA

Linearna jednačina je rešiva i postoji postupak za njeno rešavanje. Sva njena rešenja su partikularna, tj. nema singularnih rešenja.

Svaka jednačina oblika

$$y' + a(x)y = b(x),$$

ili bilo koja druga čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $a(x)$ i $b(x)$ neprekidne funkcije na $[a, b]$, naziva se linearna (obična) diferencijalna jednačina prvog reda. Data jednačina je rešiva i postoji postupak za njeno rešavanje. Sva njena rešenja su partikularna, tj. nema singularnih rešenja.

Ako je $b(x) = 0$, za svako $x \in [a, b]$, tada se prethodna jednačina naziva homogena linearna (obična) diferencijalna jednačina prvog reda, a ako je $b(x) \neq 0$, za barem jedno $x \in [a, b]$, tada ovu jednačinu nazivamo nehomogena linearna (obična) diferencijalna jednačina prvog reda.

Kada je data jednačina u homogenoj varijanti, onda se kroz određeni integracioni postupak može doći do formule za njeno opšte rešenje. Naime, tada imamo

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x)y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -\int a(x)dx + c_0, c_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tada imamo da je

$$y(x) = e^{c_0} e^{-\int a(x)dx}, c_0 \in \mathbb{R}.$$

Poslednji rezultat može se napisati u obliku

$$y(x) = ce^{-\int a(x)dx}, c = e_0^c, c_0 \in \mathbb{R}.$$

POSTUPAK REŠAVANJA – NEHOMOGENA LINEARNA JEDNAČINA

Jedan od metoda za nalaženje rešenja ove jednačine jeste Lagranžev metod varijacije konstanti o kome će biti više reči na sledećem predavanju.

Međutim, ako je jednačina nehomogenog karaktera, tj. oblika

$$y' + a(x)y = b(x)$$

onda je postupak za njeno rešavanje takav da koristeći opšte rešenje homogene jednačine i $\text{metod varijacije konstanti}$ (o kome će biti više reči u sledećoj lekciji) ili kako se još naziva Lagranžev metod dolazimo do opšteg rešenja nehomogene jednačine. Ovaj metod se zasniva na tome da se u opštem rešenju homogene jednačine, konstanta c proglasi funkcijom $c(x)$, koju treba tek odrediti. Tada je opšte rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine prvog reda oblika

$$y(x) = c(x)e^{-\int a(x)dx}, c \in \mathbb{R}.$$

gde funkciju $c(x)$ određujemo iz uslova $c'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$.

Tada je

$$c'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx},$$

odnosno nakon integracije poslednjeg izraza dobijamo

$$c(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c, c \in \mathbb{R}.$$

OPŠTE REŠENJE LINEARNE JEDNAČINE

Postoje i drugi postupci, osim pomenutog Lagranževog metoda, za određivanje opšteg rešenja linearne diferencijalne jednačine, ali o njima ovde neće biti reči.

Prethodna razmatranje indukuje sledeću formulu koja predstavlja opšte rešenje jednačine linearne jednačine, bilo da je ona homogenog ili nehomogenog karaktera, i to dato u eksplicitnom obliku

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c\right),$$

gde je $c \in \mathbb{R}$, a konstante iz integracija u eksponentima se ignorišu.

Napomena. Dato opšte rešenje se prilikom rešavanja zadataka može koristiti bez izvođenja prethodne formule. Dakle, na ispitu će biti dozvoljeno da se koristi ova formula.

Napomena. U nekim situacijama može se desiti da posmatrana diferencijalna jednačina nije linearna jednačina, u odnosu na posmatranu nepoznatu funkciju $y = y(x)$, ali da jeste linearna jednačina kada se posmatra da je $x = x(y)$ nepoznata funkcija. Tada je ova jednačina oblika

$$x' + a(y)x = b(y)$$

i treba je tako i rešavati.

PRIMER

Rešavanje linearne diferencijalne jednačine prvog reda.

Rešiti jednačinu

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x.$$

Rešenje. Data jednačina je linearna, pri čemu je $a(x) = -\operatorname{tg} x,\ b(x) = \cos x.$ Tada je

$$e^{-\int a(x)dx} = e^{-\int -\operatorname{tg} x dx} = e^{\int \operatorname{tg} x dx} = e^{-\ln|\cos x|} = e^{\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|} = \frac{1}{\cos x}.$$

S druge strane, imamo da je

$$\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

Opšte rešenje je oblika

$$y(x) = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c\right).$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: linearna diferencijalna jednačina

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Bernulijeva jednačina

POSTUPAK ZA REŠAVANJE

Bernulijeva jednačina je jako slična linearnoj. Njeno rešavanje se nakon uvođenja smene svodi na rešavanje linearne jednačine.

Svaka jednačina oblika

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha},$$

ili bilo koja druga čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $a(x)$ i $b(x)$ neprekidne funkcije na intervalu $[a, b]$ i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, naziva se Bernulijeva diferencijalna jednačina.

Napomena. U slučaju da je $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$, prethodna jednačina se svodi na linearnu jednačinu.

Ova jednačina je rešiva i poseduje konstruktivni postupak za rešavanje, a njeno ukupno rešenje je sačinjeno od opštih rešenja -- singularnih nema.

Postupak za rešavanje Bernulijeve jednačine se ogleda u tome što se u nju, najpre, uvede smena

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

gde je $y = y(x), x \in [a, b]$, a $z = z(x), x \in [a, b]$ nova nepoznata funkcija. Nakon uvođenja ove smene, Bernulijeva jednačina postaje obična linearna diferencijalna jednačina prvog reda po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$ neprekidnoj na intervalu $[a, b]$.

Na kraju je potrebno dobijenu linearnu jednačinu rešiti po nepoznatoj funkciji z i vraćajući pomenutu smenu dobijamo opšte rešenje Bernulijeve jednačine.

Napomena. U nekim situacijama može se desiti da posmatrana diferencijalna jednačina nije Bernulijeva jednačina u odnosu na posmatranu nepoznatu funkciju $y = y(x)$, ali da jeste Bernulijeva jednačina kada se posmatra da je $x = x(y)$ nepoznata funkcija. Tada posmatranu jednačinu treba tako i rešavati.

PRIMER

Rešavanje Bernulijeve jednačine i uveđenjem smene i njenim svođenjem na linearnu jednačinu.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' - \frac{4x}{x^2+1}y - (2x^2+8)\sqrt{y} = 0.$$

Rešenje. Datu jednačinu zapisaćemo u obliku

$$y' - \frac{4x}{x^2+1}y = (2x^2+8)\sqrt{y}$$

iz kojeg je jasno da se radi o Bernulijevoj diferencijalnoj jednačini. Deljenjem sa $\sqrt{y}$, dobićemo

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4x}{x^2+1}\sqrt{y} = 2x^2+8.$$

Dalje, uvodimo smenu $\sqrt{y} = z$, pri čemu je $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = z'$, tj. $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$, pa se data jednačina transformiše u oblik

$$2z' - \frac{4x}{x^2+1}z = 2x^2+8,$$

tj. nakon deljenja sa 2 prethodne jednačine dobijamo

$$z' - \frac{2x}{x^2+1}z = x^2+4.$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina čije je rešenje određeno sa

$$\begin{aligned}
z &= e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx}\left(C + \int (x^2+4)e^{-\int \frac{2x}{x^2+1}dx}dx\right) \\
&= e^{\ln(x^2+1)}\left(C + \int (x^2+4)e^{-\ln(x^2+1)}dx\right) \\
&= (x^2+1)\left(C + \int \frac{x^2+4}{x^2+1}dx\right) \\
&= (x^2+1)\left(C + \int \left(1 + \frac{3}{x^2+1}dx\right)\right) \\
&= (x^2+1)\left(C + x + 3\operatorname{arctg} x\right).
\end{aligned}$$

Odavde dobijamo da je rešenje početne jednačine

$$\sqrt{y} = (x^2+1)\left(C + x + 3\operatorname{arctg} x\right),$$

odnosno

$$y = (x^2+1)^2(C + x + 3\operatorname{arctg} x)^2.$$

Poglavlje 6

Jednačina koja predstavlja totalni diferencijal

POJAM

Može se desiti da diferencijalna jednačina prvog reda nekog drugog tipa bude i jednačina sa totalnim diferencijalom.

Svaki jednačina oblika

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (*)$$

ili bilo koja druga jednačina čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne funkcije na dopustivim domenima u $\mathbb{R}^2$ za $x \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}, y \in [c,d] \subseteq \mathbb{R},$ naziva se obična diferencijalna jednačina sa totalnim diferencijalom ako postoji funkcija $U(x,y)$ sa dopustivim domenom takva da je

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \text{ i } \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y).$$

U tom slučaju polazna jednačina se može zapisati

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = du = 0. \qquad (**)$$

U ovom slučaju primećujemo da je jednačina oblika $(*)$ ekvivalentna jednačini oblika $(**)$, a iz jednačine $(**)$ imamo da je

$$U(x,y) = C, C \in \mathbb{R}.$$

Sama funkcija $U(x,y)$ naziva se potencijal jednačine (*) , a formulom $U(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$, zadato je opšte rešenje jednačine $(*)$ u implicitnom obliku što ćemo pokazati kasnije.
Ova jednačina nema singularnih rešenja. Ako je potrebno i ako je moguće iz rešenja oblika $U(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$, može se izvesti i eksplicitan oblik tog rešenja.

Da bi za jednačinu $(*)$ tražili pomenuti potencijal, potrebno je prvo ustanoviti kriterijum da li on uopšte i postoji. Tome govori sledeći stav.

Stav. Za jednačinu (*) postoji potencijal $U(x,y)$ ako i samo ako su $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ neprekidne funkcije na dopustivim domenima za $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ i ako je

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

na preseku pomenutih domena.

ODREĐIVANJE OPŠTEG REŠENJA

Prilikom određivanje opšteg rešenja potrebno je primeniti tzv. parcijalno integraljenje, tj. integraljenje funkcije dve promenljive, po jednoj od promenljivih.

U sledećem razmatranju izložimo ukratko postupak nalaženja funkcije $U(x,y)$ za jednačinu $(*)$, uz pretpostavku da je ispunjen uslov $P'_x(x,y)=Q'_y(x,y)$. Najpre, iz jednakosti $U'_x(x,y)=P(x,y)$ imamo da je

$$U(x,y)=\int P(x,y)\partial x=p(x,y)+C(y),$$

gde je $p(x,y)$ primitivna funkcija (po promenljivoj x) za funkciju $P(x,y)$ i važi da je

$$U'_x(x,y)=p'_x(x,y)+\underbrace{(C(y))'_x}_{=0}=P(x,y).$$

Dalje, iz $U'_y(x,y)=Q(x,y)$, imamo da je

$$U'_y(x,y)=p'_y(x,y)+\underbrace{(C(y))'_y}_{=0}=Q(x,y).$$

pa je

$$Q(x,y)=p'_y(x,y)+C'_y(y),$$

Na kraju, rešavamo poslednju jednačinu po $C(y)$, gde pretpostavlja se da je ona trivijalnog karaktera i da ima samo opšte rešenje dato sa $C(y)=\varphi(x,y)+C_1,(C_1\in\mathbb{R})$.

Tada je

$$U(x,y)=\int P(x,y)\partial x=p(x,y)+\varphi(x,y)+C_1,(C_1\in\mathbb{R}),$$

potencijal jednačine $(*)$ i njeno opšte rešenje je dato sa

$$p(x,y)+\varphi(x,y)+C_1=C_2,(C_1,C_2\in\mathbb{R}),$$

odnosno sa

$$p(x,y)+\varphi(x,y)=C,\ C=(C_1-C_2)\in\mathbb{R}.$$

Napomena. Svakako, jednačina data sa $(*)$ ne mora biti jednačina sa totalnim diferencijalom, tj. ne mora da bude ispunjen uslov

$$P'_x(x,y) = Q'_y(x,y).$$

Međutim, može se desiti da nakon množenja jednačine (*), nekom funkcijom (koja je funkcija samo po promenljivoj x ili samo po promenljivoj y ili je funkcija dve promenljive x i y) ona postane jednačina sa totalnim diferencijalom. Ova funkcija se naziva integracioni faktor jednačine $(*)$. U teoriji postoje postupci za određivanje ovakvih funkcija, ako one postoje, i sami postupci su uslovljeni time da li je integracioni faktor funkcija samo po promenljivoj x ili samo po promenljivoj y ili je funkcija dve promenljive x i y. O ovome neće biti reči u okviru ove lekcije.

PRIMER

Jednačina sa totalnim diferencijalom.

Rešiti jednačinu:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Rešenje. Imamo da je: $P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$ i $Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3$. Kako je

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y) = 12xy,$$

ova jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu sa totalnim diferencijalom. Tada postoji $U(x,y)$ takvo da je

$$U'_x(x,y) = P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2,\ U'_y(x,y) = Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3.$$

Iz prve jednačine, integracijom po promenljivoj x (promenljivu y posmatramo kao konstantu u ovoj integraciji) imamo da je

$$U(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + f(y),$$

gde je $f(y)$ nepoznata funkcija po promenljivoj y koju treba odrediti. Ako uradimo izvod po promenljivoj y od prethodne funkcije dobijamo

$$U'_y(x,y) = 6x^2y + f'(y).$$

Kako smo već ustanovili da mora biti $U'_y(x,y) = Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3$, iz ove i prethodne jednačine, njihovim izjednačavanjem dobijamo da je:

$$f'(y) = 4y^3 \Rightarrow f(x) = y^4 + c.$$

Dakle, imamo da je

$$U(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + f(y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c.$$

S druge strane je $du(x,y) = 0$, pa je $u(x,y) = c_1$, $(c_1 \in \mathbb{R})$. Ukupno imamo da je: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c = c_1$,tj.

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}\ (c_2 = c_1 - c).$$

Poglavlje 7

Rikatijeva jednačina

REŠAVANJE RIKATIJEVE JEDNAČINE AKO JE POZNATO PARTIKULARNO REŠENJE

Ova jednačina nije rešiva uz pomoć kvadratura u opštem slučaju, ali uz dodatni uslov može se dobiti konstruktivni postupak za takvo rešavanje.

Svaka jednačina oblika

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y = r(x),$$

ili bilo koja druga jednačina čiji se oblik može svesti na ovaj, gde su $p(x), q(x)$ i $r(x)$ neprekidne funkcije na intervalu $[a, b]$, naziva se Rikatijeva diferencijalna jednačina.

Napomena. Ova jednačina je rešiva i može se dokazati da ne postoji konstruktivan postupak za njeno rešavanje u opštem slučaju, tj. da nije rešiva pomoću kvadratura. Međutim, uz dodatne uslove moguće je napraviti algoritam za njeno rešavanje. Ona ima opšte rešenje, dok singularnih rešenja nema.

Da bi se Rikatijeva jednačina rešavala integracijom može se uvesti dodatni uslov da je poznato jedno njeno partikularno rešenje $y_0 = y_0(x)$, za $x = x_0$, $x_0 \in [a, b]$. Tada se u Rikatijevu jednačinu može uvesti smena

$$y = y(x) = y_0 + \frac{1}{z},$$

gde je $z = z(x)$, $x \in [a, b]$ nova nepoznata funkcije $(z(x) \neq 0,\ x \in [a, b])$, koja u tom slučaju postaje diferencijalna jednačina prvog reda koja je ili linearna ili koja razdvaja promenljive (po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$, $x \in [a, b]$).

Nakon rešavanja poslednje jednačine po $z = z(x)$ i vraćanja smene, dobijamo opšte rešenje za Rikatijevu jednačinu pod navedenim uslovom.

PRIMER

Rešavanje Rikatijeve diferencijalne jednačine.

Rešiti jednačinu

$$y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x,$$

ako se zna da je funkcija $y_0 = e^x$ jedno njeno partikularno rešenje.

Rešenje. Sada u Rikatijevu jednačinu možemo uvesti smenu

$$y = y(x) = e^x + \frac{1}{z},$$

gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Takođe, da bi uveli smenu u početnu jednačinu treba odrediti

$$y' = e^x - \frac{1}{z^2} z'.$$

Tada imamo, zamenom svih ovih veličina u početnoj jednačini dobijamo

$$e^x - \frac{1}{z^2} z' - \left(e^x + \frac{1}{z}\right)^2 + 2e^x \left(e^x + \frac{1}{z}\right) = e^{2x} + e^x \Rightarrow \frac{1}{z^2} z' + \frac{1}{z^2} = 0 \Rightarrow z' + 1 = 0.$$

Dobijena jednačina je ona koja razdvaja promenljive čijim rešavanjem dobijamo da je

$$z(x) = -x + c, \ (c \in \mathbb{R})$$

pa imamo da je

$$y(x) = e^x + \frac{1}{-x + c}, \ c \in \mathbb{R}.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Rikatijeva jednačina.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 8

Lagranževa i Kleroova jednačina

LAGRANŽEVA JEDNAČINA

Za Lagranževu jednačinu postoji njeno opšte rešenje, kao i postupak za njegovo određivanje.

Svaki izraz oblika

$$y = x \cdot f(y') + g(y'),$$

ili bilo koji drugi čiji se oblik može svesti na ovaj, gde je $y = y(x)$ nepoznata funkcija za $x \in [a, b]$ i gde su f i g neprekidne funkcije na dopustivom domenu, naziva se Lagranževa diferencijalna jednačina.

Ova jednačina ima samo opšte rešenje i postoji postupak za njeno određivanje. Naime, uvedimo (parametar)

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \ i \ dy = pdx.$$

Sada je

$$y = x \cdot f(p) + g(p).$$

Ako potražimo diferencijal prethodne jednačine dobijamo

$$dy = d[x \cdot f(p) + g(p)],$$

tj.

$$pdx = f(p)dx + x \cdot f'(p)dp + g'(p)dp.$$

Odavde dobijamo da je

$$(f(p) - p)dx + (x \cdot f'(p) + g'(p))dp = 0.$$

Nakon deobe poslednje jednačine sa dp $(dp \neq 0)$ dobijamo

$$(f(p) - p)\frac{dx}{dp} + x \cdot f'(p) + g'(p) = 0.$$

Na kraju, poslednju jednačinu delimo sa $f(p) - p$, $(f(p) - p \neq 0)$ i dobijamo sledeću jednačinu

$$\frac{dx}{dp}+\frac{f'(p)}{f(p)-p}\cdot x=-\frac{g'(p)}{f(p)-p'}$$

koja predstavlja linearnu jednačinu po $x=x(p)$.

Njenim rešavanjem po već izloženom postupku dobijamo funkciju $x=x(p)$, čime traženu funkciju $y=y(x)$ dobijamo u parametarskom obliku

$$y=x\cdot f(p)+g(p),\ x=x(p).$$

Napomena. Rešenje Lagranževe jednačine se obično zadržava u ovakvom parametarskom obliku. Međutim,ako je moguće iz ovog oblika eliminisati parametar p, tako da opšte rešenje bude u eksplicitnom obliku $y=y(x)$, to treba i učiniti.

PRIMER 1

Određivanje opšteg rešenja Lagranževe jednačine.

Rešiti jednačinu

$$y=\frac{3}{2}xy'+e^{y'}.$$

Rešenje. Uvođenjem parametra $p=y'$, pri čemu je $f(p)=\frac{3}{2}p$ i $g(p)=e^{p}$, polazna jednačina postaje:

$$y=\frac{3}{2}xp+e^{p}.$$

Ako potražimo prvi diferencijal prethodne jednačine, dobijamo

$$dy=d\left[\frac{3}{2}x\cdot p+e^{p}\right],$$

a koristeći da je $dy=pdx$, imamo

$$pdx=\frac{3}{2}pdx+\frac{3}{2}xdp+e^{p}dp,$$

tj.

$$\frac{1}{2}pdx+\frac{3}{2}xdp=-e^{p}dp.$$

Nakon deobe poslednje jednačine sa dp $(dp\neq 0)$ dobijamo

$$\frac{1}{2}p\frac{dx}{dp}+\frac{3}{2}x=-e^{p}.$$

Sada je još samo potrebno poslednju jednačinu podeliti sa $\frac{1}{2}p$ $(p\neq 0)$. Tada dobijamo

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3}{p}x = \frac{-2e^p}{p}.$$

Dobijena diferencijalna jednačina je linearna diferencijalna jednačina prvog reda po $x = x(p)$. Njenim rešavanjem (ostavlja se za vežbu studentu) dobijamo da je

$$x(p) = \frac{1}{p^3}(c + (p^2 - 2p + 2)e^p),$$

što predstavlja opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

KLEROOVA JEDNAČINA

Kleroova jednačina predstavlja poseban oblik Lagranževe jednačine.

Svaki izraz oblika

$$y = x \cdot y' + g(y'),$$

ili bilo koji drugi čiji se oblik može svesti na ovaj, gde je $y = y(x)$ nepoznata funkcija za $x \in [a, b]$ i g neprekidna funkcija na dopustivom domenu, naziva se Kleroova diferencijalna jednačina. Kleroova jednačina je poseban oblik Lagranževe funkcije.

Postupak za rešavanje Kleroove jednačine je sličan kao i kod rešavanja Lagranževe jednačine. Najpre, uvodimo parametar p na sledeći način $p = y' = \frac{dy}{dx}$ i $dy = pdx$.

Sada je

$$y = x \cdot p + g(p).$$

Ako potražimo diferencijal prethodne jednačine dobijamo

$$dy = d[x \cdot p + g(p),]$$

tj.

$$pdx = pdx + xdp + g'(p)dp.$$

Odavde dobijamo da je

$$x + g'(p)dp = 0.$$

Ako, najpre, pretpostavimo da je $dp = 0$, integraljenjem prethodne jednačine dobijamo da je $p = c,\ c \in \mathbb{R}$. Tada je

$$y = x \cdot p + g(p) = cx + g(c),\ c \in \mathbb{R}.$$

opšte rešenje Kleroove jednačine.

Ako pretpostavimo da je $x + g'(p) = 0$, imamo da je $x = -g'(p)$.

Ako uvrstimo uz ovu jednačinu i Klerovu jednačinu u obliku $y = x \cdot p + g(p)$ tj.

$$y = x \cdot p + g(p),\ x = -g'(p)$$

gde je p parametar uveden na početku, dobijamo singularno rešenje Kleroove jednačine, zadato preko parametra p. Ovo rešenje nije opšte rešenje, jer nije dobijeno integralnim računom. Potrebno je na kraju, ako je to moguće, iz ovog rešenja eliminisati parametar p i dobiti rešenje u eksplicitnom obliku.

PRIMER 2

Određivanje opšteg rešenja Kleroove jednačine.

Rešiti jednačinu

$$y = x \cdot y' + (y')^2.$$

Rešenje. Prema prethodno izloženom, pri čemu je $g(y') = (y')^2$, imamo da je

$$y = x \cdot p + g(p) = cx + g(c),\ c \in \mathbb{R}.$$

opšte rešenje Kleroove jednačine.

Singularno rešenje tražimo iz uslova

$$y = x \cdot p + g(p),\ x = -g'(p),$$

tj. u našem slučaju, za $p = y'$ i $g(p) = p^2$, je

$$y = x \cdot p + p^2,\ x = -2p.$$

Kako je moguće p izraziti u funkciji od x, tada imamo da je $p = -\frac{x}{2}$, pa je singularno rešenje oblika

$$y = x \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4}.$$

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Diferencijalne jednačine višeg reda

Lekcija 09

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

Uvod

UVOD

Diferencijalne jednačine višeg reda.

Od diferencijalnih jednačina višeg reda obradićemo homogene i nehomogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstatnim koeficijentima, kao i postupke za njihovo rešavanje. Takođe, upoznaćemo se sa Koši-Ojlerovom jednačinom čije se rešavanje svodi na prethodno pomenute diferencijalne jednačine više reda.

Diferencijalne jednačine su od fundamentalnog značaja u nauci i tehnici jer se čitav niz pojava, zakonitosti i problema izražavaju diferencijalnim jednačinama. One posebno mesto zauzimaju u fizici, hemiji, biologiji, mehanici drugim naukama.

UVODNI VIDEO KLIP

Ovaj video snimak treba da studentima olakša razumevanje sadržaja lekcije.

Poglavlje 1

Diferencijalne jednačine višeg reda

UVOD

Kao i u slučaju običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, rešenje diferencijalne jednačine n -tog reda može biti: opšte, partikularno i singularno.

Opšti oblik obične diferencijalne jednačine $n-$ tog reda je

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0,$$

gde je x nezavisna promenljiva, a $y = y(x)$ nepoznata funkcija koju treba odrediti, koja se u jednačini javlja zajedno sa svojim izvodima. Red diferencijalne jednačine određuje najviši stepen izvoda koji se javlja u njoj.

Termin obična diferencijalna jednačina podrazumeva slučaj da je nepoznata funkcija $y = y(x)$, funkcija jedne promenljive.

Napomena. Postoje diferencijalne jednačine kod kojih je nepoznata funkcija, funkcija više nezavisno promenljivih. Takve diferencijalne jednačine se nazivaju parcijalne diferencijalne jednačine i njima se ovde nećemo baviti.

Nekada je moguće izraziti iz opšteg oblika diferencijalne jednačine $n-$ tog reda, $y^{(n)}$ u funkciji preostalih veličina i tada tu diferencijalnu jednačinu zapisujemo u obliku

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Rešiti običnu diferencijalnu jednačinu $n-$ tog reda podrazumeva određivanje funkcije $y = g(x)$ koja ima neprekidne izvode $n-$ tog reda i koja zajedno sa svojim izvodim zadovoljava tu jednačinu.
Kao i u slučaju običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, rešenje diferencijalne jednačine $n-$ tog reda može biti: opšte rešenje, partikularno rešenje i singularno rešenje.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine $n-$ tog reda predstavlja jednu klasu funkcija, s tim što se broj integracionih konstanti poklapa sa najvišim redom izvoda koji u njoj figuriše tj. n i ono je oblika

$$y = g(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \text{ ili } h(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

Konstante $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se nazivaju integracione konstante i one se javljaju prilikom rešavanje diferencijalne jednačine neodređenom integracijom.

Partikularno rešenje se može dobiti iz opšteg rešenja kada se zadaju tzv. početni uslovi

$$y(x_0) = y_{01},\; y'(x_0) = y_{02},\; y''(x_0) = y_{02},\; \ldots,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n},$$

koje opšte rešenje treba da zadovolji, gde su $x_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n} \in \mathbb{R}$dati brojevi. Na taj način se iz klase funkcija koje prestavljaju opšte rešenje izdvaja samo jedna funkcija. Početni uslovi se još nazivaju i Košijevi uslovi, a dobijeno partikularno rešenje se naziva Košijevi rešenje.

Singularno rešenje se ne može dobiti iz opšteg i najčešće se dobija iz ograničenja koje važe za tu diferencijalnu jednačinu.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA KOJIMA SE MOŽE SNIZITI RED

Postoje diferencijalne jednačine drugog reda kojima se odgovarajućom smenom može sniziti red.

Navešćemo nekoliko specijalnih tipova diferencijalnih jednačina drugog reda kod kojih se opšte rešenje može naći pomoću uzastopnih integracija, odnosno pomoću sniženja reda jednačina, tj. svodeći polaznu jednačinu na jednačinu prvog reda. Ovakve jednačine se nazivaju diferencijalne jednačine kojima se može sniziti red.

1. Kod diferencijalnih jednačina oblika $y'' = f(x)$, kako je $\frac{dy'}{dx} = y''$ imamo $\frac{dy'}{dx} = f(x)$, tj. $dy' = f(x)dx$, a odavde integracijom

$$y' = \int f(x)\, dx + c_1.$$

Ovo je diferencijalna jednačina prvog reda, pa ponovnom integracijom nalazimo

$$y = \int \left(\int f(x)\, dx + c_1 \right)\, dx$$

tj. za opšte rešenje polazne jednačine dobijamo

$$y = \int \left(\int f(x)\, dx \right)\, dx + c_1 x + c_2,$$

2. Jednačina $y'' = f(y)$ ne sadrži eksplicitno argument x. Red ove jednačine može se sniziti i svesti na jednačinu prvog reda smenom $y' = p$. Smatrajući p kao funkciju od y i primenjujući teoremu za izvod složene funkcije, dobijamo

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Zato je polazna jednačina oblika $p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y)$, tj. njen je red snižen i ona je svedena na jednačinu prvog reda. U njoj se promenljive mogu razdvojiti, tj. $pdp = f(y)dy$, odakle nakon integracije imamo

$$\frac{p^2}{2} = \int f(y)\,dy + \frac{c_1}{2} \quad \text{tj.} \quad p = \pm\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}.$$

Kako je $p = \frac{dy}{dx}$ imamo da je $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}$. Odavde razdvajanjem promenljivih i integracijom nalazimo da je

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}} = \pm(x + c_2),$$

što predstavlja opšte rešenje polazne jednačine.

3. Jednačina drugog reda koja ne sadrzi argument x i funkciju y je oblik $y'' = f(y')$. Njen red se može sniziti i ona se svodi na jednačinu prvog reda smenom $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$. Tada je ona oblika $\frac{dp}{dx} = f(p)$. U ovoj jednačini promenljive se mogu razdvojiti, te imamo $\frac{dp}{f(p)} = dx$, dok integracijom dobijamo

$$\int \frac{dp}{f(p)} = x + c_1.$$

Neka je $p = \varphi(x, c_1)$ opšte rešenje poslednje jednačine. Kako je $p = y' = \frac{dy}{dx}$, imamo da je $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, c_1)$, odakle je opšte rešenje jednačine drugog reda oblika

$$y = \int \varphi(x, c_1)\,dx + c_2.$$

NAPOMENE I PRIMERI

Rešavanje diferencijalnih jednačina kojima se može sniziti red.

Napomena. Opštiji tip diferencijalne jednačine drugog reda od onoga pod 2. bio bi y ”$= f(y, y')$. Smenom $y' = p$, iz koje je y ”$= p \cdot \frac{dp}{dy}$ ova jednačina se svodi na jednačinu prvog reda.

Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 2y(y')^3 = 0$.

Rešenje. Smenom $y' = p$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ data jednačina se svodi na

$$p \cdot \frac{dp}{dy} + 2yp^3 = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{dp}{dy} + 2yp^2 = 0$$

kako je $p=0$. Ovo je jednačina prvog reda u kojoj se promenljive mogu razdvojiti, pa je $\frac{dp}{p^2}=-2y\,dy$. Integracijom ove jednačine imamo $-\frac{1}{p}=-c_1-y^2$, tj. $\frac{1}{p}=c_1+y^2$. Odavde dobijamo da je $p=\frac{1}{c_1+y^2}$ ili

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{c_1+y^2}.$$

Razdvajanjem promenljivih u ovoj jednačini dobijamo $(c_1+y^2)\,dy=dx$, ili posle integracije

$$c_1y+\frac{y^3}{3}+c_2=x,$$

što predstavlja opšte rešenje polazne jednačine.

Napomena. Opštiji tip diferencijalne jednačine drugog reda od onoga pod 3. bio bi $y''=f(x,y')$. Smenom $y'=p$, iz koje je $y''=\frac{dp}{dx}$ svodi se na jednačinu prvog reda.

Primer. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''x\ln x=y'$.

Rešenje. Smenom $y'=p$ i $y''=\frac{dp}{dx}$ data jednačina se svodi na jednačinu prvog reda

$$\frac{dp}{dx}x\ln x=p.$$

U ovoj jednacini promenljive se mogu razdvojiti, te dobijamo

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x\ln x}$$

Integracijom dobijamo $\ln|p|=\ln|c_1\ln x|$, odakle je $p=c_1\ln x$. Kako je $\frac{dy}{dx}=c_1\ln x$, ili $dy=c_1\ln x\,dx$, tada ponovnom integracijom dobijamo

$$y=c_1x(\ln x-1)+c_2,$$

što predstavlja opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Napomena. U opštijem slučaju datih tipova od 1. do 3. (i u opštenijih tipova datih u napomenama) mogu biti i diferencijalne jednačine višeg reda od dva. Ideja za njihovo rešavanje je analogna datim, s tim što broj integracija kojim se dolazi do opšteg rešenja odgovara redu takve jednačine.

LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA VIŠEG REDA

Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda se tako naziva jer je nepoznata funkcija y, kao i svi njeni izvodi koji se javljaju u jednačini prvog stepena.

Jednačina oblika

$$y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+a_2(x)y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x),$$

se naziva $\text{linearna diferencijalna jednačina } n-\text{tog reda}$, gde su $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ proizvoljne funkcije po x ili konstante, pri čemu je funkcija $f(x)$ neprekidna na realnom intervalu $x \in D$.

U slučaju da je $f(x)=0$, ova jednačina se naziva $\text{homogena linearna jednačina } n-\text{tog reda}$, a u slučaju $f(x)\neq 0$ se naziva $\text{nehomogena linearna jednačina } n-\text{tog reda}$, $n-$tog reda.

Mi ćemo se ovde baviti slučajem kada su u prethodnoj jednačini $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ i tada se prethodna jednačina $\text{naziva linearna jednačina } n-\text{tog reda sa konstantnim koeficijentima}$. O ovim diferencijalnim jednačinama ćemo govorimo u nastavku.

Najpre ćemo izložiti metodologiju za određivanje opšteg rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda, jer određivanje opšteg rešenja nehomogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda direktno zavisi od odgovarajuće homogene. Postupak za određivanje ovih rešenja ćemo prvo pokazati za homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda, a zatim uopštiti za proizvoljan red.

Za dobijanje opšteg rešenja nehomogene diferencijalne jednačine, pored određivanja opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine, potrebno je odrediti i jedno njeno partikularno rešenje. Ovde će biti izložene dve metode za njihovo određivanje. U opštem slučaju ovo nije jednostavno uraditi. Prva od njih se naziva $\text{Metoda neodređenih koeficijenata}$ i ona se može primenjivati samo za određene klase funkcija $f(x)$. Druga se naziva $\text{Metoda varijacije konstanti}$ ili Lagranževa metoda i ona je opštija od Metode neodređenih koeficijenata, jer ne postoje ograničenja kakvoj klasi funkcija pripada funkcija $f(x)$. Ipak, Metod neodređenih koeficijenata se primenjuje, kada je to moguće, pre nego Metod varijacije konstanti zbog jednostavnijeg postupka u određivanju partikularnog rešenja (u njemu nema neodređene integracije). Metod neodređenih koeficijenata zbog lakšeg razumevanja ćemo, prvo, izučiti za nehomogene linearne jednačine drugog reda, a nakon toga uopštiti. S druge strane, Metod varijacije konstanti ćemo odmah izlagati u najopštem slučaju.

Poglavlje 2

Homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda

POJAM

Bilo koja dva linarno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda čine njen tzv. fundamentalni sistem rešenja.

U ovom delu razmatraćemo homogenu linearnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima, tj. jednačinu oblika

$$y''(x)+a_1y'(x)+a_2y(x)=0,\ (x\in D).$$

Ako uvedemo izraz

$$L(y)=y''+a_1y'+a_2y$$

definisan za dvaput diferencijabilne funkcije na intervalu D (diferencijalni operator drugog reda), jednačinu $y''+a_1y'+a_2y=0$možemo napisati u obliku $L(y)=0$.

Ova jednačina će uvek imati trivijalno rešenje $y(x)\equiv 0$ koje ćemo isključiti iz daljeg razmatranja. Važi sledeći stav.

Stav. Ako su y_1 i y_2 bilo koja dva rešenja posmatrane jednačine, tada je i svaka njihova linearna kombinacija, tj. funkcija

$$y=C_1y_1+C_2y_2,\ (C_1,C_2\in\mathbb{R}),$$

takođe rešenje ove jednačine.

S obzirom da je pojam opšteg rešenja jednačine $y''+a_1y'+a_2y=0$suštinski vezan za dva linearno nezavisna rešenja te jednačine, navodimo, najpre, kriterijum za proveru linearne nezavisnosti rešenja y_1 i y_2 ove jednačine.

Stav. Rešenja $y_1=y_1(x)$ i $y_2=y_2(x)$ homogene jednačine $y''+a_1y'+a_2y=0$ biće linearno nezavisna na intervalu D ako i samo ako za njihov Vronskijan, tj. sledeću funkcionalnu determinantu važi

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\neq 0, \quad \text{za } x\in D.$$

Primer. Bilo koje dve funkcije x^m i x^n, $(m, n \in \mathbb{R},\ m \neq n)$, su linearno nezavisne u svakom intervalu $D = (a, b)$, jer je

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^m & x^n \\ mx^{m-1} & nx^{n-1} \end{vmatrix} = (n-m)x^{m+n-1} \neq 0.$$

Bilo koja dva linearno nezavisna rešenja y_1 i y_2 homogene jednačine $L(y) = 0$ obrazuju njen fundamentalni sistem rešenja. Svaki fundamentalni sistem rešenja je od ogromnog značaja, jer se pomoću njega može obrazovati opšte rešenje te jednačine.

Značaj fundamentalnog sistema rešenja se vidi iz narednog stava.

Stav. Ako je y_1 i y_2 bilo koji fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$,tada je jedno njeno opšte rešenje dato sa

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE SISTEMA FUNDAMENTALNIH REŠENJA

Postupak se zasniva na određivanju karakteristične jednačine i njenih rešenja. U zavisnosti kakva je priroda tih rešenja razlikujemo tri slučaja.

Potražimo rešenje jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$u obliku $y = e^{\lambda x}$, gde je λ konstanta koju tek treba da odredimo. Tada je $y' = \lambda e^{\lambda x}$ i $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, pa zamenom ovih vrednosti u homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačini drugog reda sa konstantnim koeficijentima ona postaje

$$L(y) = \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} = 0.$$

Kako je $e^{\lambda x} \neq 0$, za svako $x \in D$, nakon deobe prethodne jednačine sa $e^{\lambda x}$ dobijamo jednačinu

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0,$$

koja se naziva karakteristična jednačina diferencijalne jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobijamo njena rešenja λ_1 i λ_2. U zavisnosti od prirode ovih rešenja razlikovaćemo tri slučaja.

Prvi slučaj. Rešenja λ_1 i λ_2 realna i različita. Tada su funkcije $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ rešenja jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.Za odgovarajući Vronskijan važi da je:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0.$$

pa imamo da $e^{\lambda_1 x}$ i $e^{\lambda_2 x}$ čine fundamentalni sistem rešenja.

Stoga je funkcija

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

opšte rešenje homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Drugi slučaj. Rešenja λ_1 i λ_2 su realni i jednaka. Tada se može pokazati da je zajedno sa funkcijom $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ i funkcija $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ rešenje posmatrane jednačine. U ovom slučaju, takođe, važi da je $W(y_1, y_2) \neq 0$, pa imamo da funkcije $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ čine fundamentalni sistem rešenja.

Stoga je funkcija

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$$

opšte rešenje posmatrane jednačine.

Treći slučaj. Rešenja λ_1 i λ_2 konjugovano-kompleksna, tj. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Može se pokazati da je funkcije $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ i funkcija $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$. I u ovom slučaju važi da je $W(y_1, y_2) \neq 0$, pa ove dve funkcije obrazuju fundamentalni sistem rešenja posmatrane jednačine. Stoga je njeno opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

PRIMERI

Određivanje opšteg rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Primer 1. Za jednačinu

$$y'' - 5y' + 6y = 0,$$

njena karakteristična jednačina glasi

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$.
Dakle, fundamentalan sistem rešenja biće e^{2x} i e^{3x}, pa je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Primer 2. Za jednačinu

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

njena karakteristična jednačina glasi:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.
Dakle, fundamentalan sistem rešenja biće e^{2x} i xe^{2x}, pa je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Primer 3. Za jednačinu

$$y'' + 2y' + 2y = 0,$$

njena karakteristična jednačina glasi

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.
Ovde je $\alpha = -1$ i $\beta = 1$. Dakle, fundamentalan sistem rešenja biće $y_1(x) = e^{-x}\cos x$ i $y_2(x) = e^{-x}\sin x$, pa je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x.$$

Poglavlje 3

Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

POJAM

Prethodno navedeni rezultati za homogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima se uopštavaju na linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima višeg reda.

Homogena linearna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ je jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}y'(x) + a_n y(x) = 0, \quad (x \in D).$$

Nju, koristeći operator L, možemo zapisati u obliku $L(y) = 0$. Kao i za slučaj $n = 2$ rešenja ove jednačine imaće sledeću karakterističnu osobinu.

Stav. Ako su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proizvoljna rešenja homogene linearne jednačine n -tog reda, tada je i svaka njihova linearna kombinacija, tj. funkcija $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, takođe rešenje ove jednačine.

Kod nalaženja realnih rešenja jednačine često koristimo i njena kompleksna rešenja. Reći ćemo, naime, da je kompleksna funkcija $y(x)$ realnog argumenta x, $(x \in D)$ ako je oblika

$$y(x) = u(x) + i \cdot v(x),$$

(gde su $u(x)$ i $v(x)$ odgovarajuće realne funkcije) rešenje posmatrane jednačine, ako važi jednakost $L(y) = 0$.

Pritom definišemo $y'(x) = u'(x) + i \cdot v'(x)$, $y''(x) = u''(x) + i \cdot v''(x)$, ... , $y^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + i \cdot v^{(n)}(x)$. Može se dokazati da je tada $L(y) = L(u) + iL(v)$, odakle sledi da su i funkcije $u(x)$ i $v(x)$ realna rešenja jednačine.

Kod obrazovanja opšteg rešenja jednačine koristi se, kao i za $n = 2, n$ linearno nezavisnih rešenja te jednačine, pri čemu se prethodno dokazuje da takvih n rešenja zaista i postoji.

Da bi se ispitala njihova linearna nezavisnost, uvodi se ponovo pojam Vronskijana koji odgovara tim rešenjima. Pretpostavimo opštije da su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bilo kojih n funkcija, $n-1$ puta diferencijabilnih na intervalu D (ako su one istovremeno i rešenja jednačine, neposredno sledi da moraju biti $n-$ puta diferencijabilne na intervalu D). Tada je na osnovu definicije, njihov Vronskijan funkcionalna determinanta

$$W(x)=W(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1^{'} & y_2^{'} & \cdots & y_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Stav. Rešenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ homogene jednačine biće linearno nezavisna u intervalu D ako i samo ako je odgovarajući Vronskijan $W(x) \neq 0$, za svako $x \in D$.

Napomena. Za Vronskijan n partikularnih rešenja homogene jednačine važi sledeća formula Ostrogorski – Liuvil $W(x) = W(x_0)e^{-a_1(x-x_0)}$ iz koje ponovo dobijamo dve osobine implicitno dokazane u prethodnom stavu: ako je $W(x_0) = 0$ $(x_0 \in D)$ tada je $W(x) \equiv 0$ i ako je $W(x_0) \neq 0$ $(x_0 \in D)$ tada je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in D$.

FUNDAMENTALNI SISTEM REŠENJA

Skup od n proizvoljnih linearno nezavisnih rešenja homogene jednačine nazivamo fundamentalni sistem rešenja ovejednačine.

Kao i za $n = 2$, skup od n proizvoljnih linearno nezavisnih rešenja homogene jednačine nazivaćemo fundamentalni sistem rešenja te jednačine. Slično kao i za $n = 2$, imamo sledeća dva stava.

Stav. Uvek postoji bar jedan sistem fundamentalnih rešenja homogene jednačine.

Stav. Ako je $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bilo koji fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine, tada je (jedno) njeno opšte rešenje dato sa

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n.$$

pri čemu su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne realne konstante.

Iz poslednjeg stava neposredno dobijamo narednu posledicu.

Posledica. Bilo kojih $n + 1$ rešenja jednačine jesu linearno zavisna.

Opišimo sada kao i za slučaj $n = 2$ postupak određivanja bar jednog fundamentalnog sistema rešenja homogene jednačine sa konstantnim koeficijentima. Potražimo naime rešenje te jednačine u obliku $y = e^{\lambda x}$, gde je λ konstanta koju tek treba da odredimo. Tada je $y‘= \lambda e^{\lambda x}$, $y‘‘= \lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots, y^{(n-1)} = \lambda^{n-1}e^{\lambda x}$, $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$Polazna homogena jednačina je tada oblika:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0$$

Deobom sa $e^{\lambda x}$ poslednje jednačine dobijamo karakterističnu jednačinu za polaznu homogenu jednačinu:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Napomena. Rešenje karakteristične jednačine može biti realno ili kompleksno, tako da će ova jednačina imati n realnih ili konjugovan-kompleksnih rešenja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n,$ pri čemu realna rešenja mogu biti jednostruka ili višestruka.
Razlikovaćemo, stoga, više slučajeva, zavisno od toga da li su koreni homogene jednačine realni i pri tom da li su jednostruki ili višestruki, ili da li su rešenja konjugovano-kompleksna. O tome govorimo u nastavku.

PRVI SLUČAJ - REŠENJA SU REALNA I RAZLIČITA

Sva rešenja karakteristične jednačine su realna i različita.

Stav. Neka su rešenja karakteristične jednačine

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

koja odgovara homogenoj jednačini

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}y'(x) + a_n y(x) = 0,$$

sa konstantnim koeficijentima $a_1, a_2, \cdots, a_n,$ realna i različita. Tada je jedan fundamentalan sistem rešenje

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

a opšte rešenje posmatrane homogene jednačine glasi:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

PRIMER 1

Rešenja karakteristične jednačine su realna i različita.

Odrediti opšte rešenje jednačine

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date homogene jednačine je oblika

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0,$$

odakle, ako za prvi i treći član izvučemo λ kao zajednički činilac, a za drugi i četvrti -2, dobijamo

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0,$$

nalazimo da je

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2.$$

Kako su dobijena rešenja realna i različita tada je odgovarajući sistem fundamenatalnih rešenja dat sa

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}.$$

PRIMER 2

Homogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima trećeg reda.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' - 13y' - 12y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina je

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = 0.$$

Podsetimo se kako se određuju koreni polinom sa celobrojnim koeficijentima

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0, \;\; a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Posmatra se koeficijent a_n i svi njegovi delioci u oznaci p (posmatrani i sa predznakom + i -), kao i delioci koeficijenta a_0, u oznaci q (posmatrani i sa predznakom + i -). Ako posmatrani polinom imam racionalna rešenja (korene), tada su oni oblika $\frac{q}{p}$.

U našem slučaju imamo da je kod polinoma $P_3(x) = \lambda^3 - 13\lambda - 12$ koeficijent $a_3 = 1$, a $a_0 = -12$. U ovom slučaju moguće nule polinoma su brojevi $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm12$. Nula polinoma je ona vrednost koju kada zamenimo u posmatranom polinomu dobijemo vrednost 0 . Dakle, krenimo od vrednosti $\lambda = 1$. Imamo da je $P_3(1) = 1^3 - 13 - 12 \neq 0$, pa ova vrednost nije nula polinoma. Dalje, važi da je $P_3(-1) = (-1)^3 + 13 - 12 = 0$, pa je vrednost $\lambda_1 = -1$, nula posmatranog polinoma. To dalje znači da je polinom $P_3(x) = \lambda^3 - 13\lambda - 12$ deljiv polinomom $\lambda - \lambda_1$, tj. $\lambda + 1$.

Tada je

$$(\lambda^3 - 13\lambda - 12) : (\lambda + 1) = \lambda^2 - \lambda - 12,$$

tj.

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 12).$$

Na kraju rešavajući kvadratnu jednačinu $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ dobijamo da je $\lambda_2 = -3$ i $\lambda_3 = 4$. Dakle,

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = (\lambda + 1)(\lambda + 3)(\lambda - 4).$$

Kako su $\lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = -3$ i $\lambda_3 = 4$ nule karakteristične jednačine $\lambda^3 - 13\lambda - 12 = 0$, opšte rešenje glasi:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{4x}.$$

DRUGI SLUČAJ - REŠENJA SU REALNA I NEKA OD NJIH SU JEDNAKA

Sva rešenja karakteristične jednačine su realna i neka od njih su višestruka

Pretpostavimo da su svi koreni λ_1, λ_2, ..., λ_n karakteristične jednačine realni, ali su neki od njih i višestruki i da su koreni λ_1, λ_2,..., λ_r ($r < n$) medjusobno različiti, a da su oni odgovarajuće višestrukosti m_1, m_2, ..., m_r, tim redom, pri čemu važi $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$. Ovo znači da se karakteristični polinom

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

može faktorisati u obliku

$$(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdot\cdots\cdot(x-\lambda_r)^{m_r} = 0.$$

Stav. Pri navedenim pretpostavkama, fundamentalni sistem rešenja jednačine

$$y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}y'(x) + a_ny(x) = 0,$$

sa konstantnim koeficijentima $a_1, a_2, \cdots, a_n$ obrazovaće funkcije

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & x^2e^{\lambda_1 x}, & \ldots & x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & x^2e^{\lambda_2 x}, & \ldots & x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ e^{\lambda_r x}, & xe^{\lambda_r x}, & x^2e^{\lambda_r x}, & \ldots & x^{m_r-1}e^{\lambda_r x} \end{cases}$$

Primer. Nađimo opšte rešenje homogene jednačine

$$y''' - 3y' + 2y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date homogene jednačine je oblika:

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Tada imamo da je

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = \lambda^3 - \lambda - 2\lambda + 2 = \lambda(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) =$$
$$= (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0.$$

nalazimo da je $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Stoga je jedan njen fundamentalni sistem rešenja { $\{e^x, xe^x, e^{-2x}\}$) , a opšte rešenje

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-2x}.$$

TREĆI SLUČAJ - NEKA REŠENJA SU KONJUGOVANO-KOMPLEKSNA

Među rešenjima karakteristične jednačine, neka su konjugovano-kompleksna, odgovarajuće višestrukosti.

Neka su (različiti) koreni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednačine u opštem slučaju kompleksni i neka su im odgovarajuće višestrukosti redom $m_1, m_2, \ldots, m_r$, tim redom, pri čemu važi $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$.

Stav. Ako je $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \ \ (\beta_k \neq 0)\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ kompleksan koren karakteristične jednačine višestrukosti $m_j\ (1 \leq j \leq r)$, tada je i konjugovano kompleksan broj $\overline{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k(\beta_k \neq 0)\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ takođe njen koren iste višestrukosti, a deo fundamentalnog sistema rešenja koji odgovara korenima $\alpha_k + i\beta_k$, za $\alpha_k \neq 0$, sadržaće $2 \cdot m_j$ funkcija oblika

$$x^p e^{\alpha_k x} \cos \beta_k \ \ i \ \ x^p e^{\alpha_k x} \sin \beta_k, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m_j,$$

dok za $\alpha_k = 0$, sadržaće $2 \cdot m_j$ funkcija oblika

$$x^p \cos \beta_k \ \ i \ \ x^p \sin \beta_k, \ \ p = 0, 1, 2, \ldots, m_j.$$

Napomena. U slučaju realnog korena λ_k, tj. za $\beta_k = 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, n)$, iz prethodnog slučaja za određivanje odgovarajućeg dela fundamentalnog sistema rešenja, koristi se postupak opisan u prethodna dva stava. Zapravo, treći slučaj predstavlja opšti postupak za rešavanje jednačine

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0,$$

jer su prva dva sadržana u njemu. Naime, za $\beta_k = 0, (k = 1, 2, \ldots, n)$ u prethodnom slučaju (tj. kada je rešenje realno) dobijamo, partikularna rešenja, kao i fundamentalni skup rešenje za prva dva slučaja.

PRIMER 3

Homogena jednačina n-tog reda.

Primer. Odrediti opšte rešenje homogene jednačine

$$y''' + 4y' = 0.$$

Rešenje. Odgovarajuća karakteristična jednačina glasi

$$\lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4) = 0.$$

Odavde vidimo da su rešenje ovog polinoma $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm 2i,$ pa jedan njen fundamentalan sistem rešenja obrazuju funkcije $y_1 = 1, y_2 = \cos 2x$ i $y_3 = \sin 2x$.

Stoga je njeno opšte rešenje

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Primer. Odrediti opšte rešenje homogene jednačine

$$y^{iv} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date jednačine biće

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0,$$

pa su njena rešenja $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ višestrukosti 2.

Stoga je fundamentalni sistem rešenja obrazovan funkcijama $y_1 = e^{-x} \cos x,\ y_2 = e^{-x} \sin x,\ y_3 = xe^{-x} \cos x$ i $y_4 = xe^{-x} \sin x,$ a opšte rešenje je

$$y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + C_3 x e^{-x} \cos x + C_4 x e^{-x} \sin x.$$

Poglavlje 4

Nehomogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda

POJAM

Rešavanje nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima u tesnoj je vezi sa rešavanjem odgovarajuće homogene jednačine.

Jednačina oblika

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),$$

se naziva nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, pri čemu je funkcija $f(x) \neq 0$ neprekidna na intervalu D. Prethodna jednačina će imati jedinstveno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_{01}$ i $y'(x_0) = y_{02}$ tj. postojaće jedna jedinstvena integralna kriva koja prolazi kroz tačku (x_0, y_{01}, y_{02}).

Primer. Jednačina oblika

$$y'' + y' + y = x^3 + 3x - 2 - e^x$$

je jedna nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Rešavanje nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima u tesnoj je vezi sa rešavanjem odgovarajuće homogene jednačine. Pokazuje se naime da važi sledeći stav.

Stav. Ako je $y_p = y_p(x)$ bilo koje partikularno rešenje jednačine

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),$$

a $y_1(x)$ i $y_2(x)$ bilo koja dva linearno nezavisna rešenja odgovarajuće homogene jednačine, tada je $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$,opšte rešenje nehomogene jednačine.

Iz prethodnog stava vidimo da nam je za određivanje opšteg rešenja nehomogene jednačine potrebno, pored određivanja opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine i jedno nehomogene jednačine partikularno rešenje

METOD NEODREĐENIH KOEFICIJENATA

Primena metode neodređenih koeficijenata za određivanje opšteg rešenja nehomogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Sada ćemo izneti jednu metodu za određivanje jednog partikularnog rešenja nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima, ali koja važi samo za izvesne tipove funkcije $f(x)$. Ova metoda se naziva metod neodređenih koeficijenata i može se primeniti samo za slučajeve kada je funkcija $f(x)$ oblika

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (*)$$

pri čemu su polinomi $P_n(x)$ i $Q_m(x)$, tim redom, stepena n, odnosno m. Specijalni slučajevi prethodnog, koji se često javljaju u zadacima, su $f(x) = P_n(x)$, $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, gde su $A, B \in \mathbb{R}$. Partikularno rešenje $y_p(x)$ nehomogene jednačine

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),$$

gde je $f(x)$ oblika $(*)$ određujemo zavisno od toga da li je kompleksan broj $\lambda = \alpha + i\cdot\beta$ rešenje ili ne karakteristične jednačine za odgovarajuću homogenu jednačinu.

U slučaju da $\lambda = \alpha + i\cdot\beta$ nije rešenje karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine, tada partikularno rešenje $y_p(x)$ tražimo u obliku

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x),$$

gde su $R_s(x)$ i $T_s(x)$ nepoznati polinomi čije koeficijente treba odrediti, a s je stepen polinoma koji je jednak višem od stepena n i m, tj. $s = \max\{n, m\}$.
Ako pretpostavimo, ne umanjujući opštost, da je $n = max\{n, m\}$ tada važi da je

$$R(x) = r_0x^n + r_1x^{n-1} + \ldots + r_{n-1}x + r_n$$

i

$$S(x) = s_0x^n + s_1x^{n-1} + \ldots + s_{n-1}x + s_n$$

čije koeficijente $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n$ i $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n$ treba odrediti.

Drugi slučaj podrazumeva situaciju da je $\lambda = \alpha + i\cdot\beta$ rešenje karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine, tada partikularno rešenje $y_p(x)$ tražimo u obliku

$$y_p(x) = xe^{\alpha x}(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x)$$

gde koeficijente polinoma $R(x)$ i $S(x)$ treba odrediti, kao i u prethodnom slučaju.

Ako se u okviru funkcije $f(x)$ na desnoj strani nalazi više sabiraka oblika $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ tada se za svaki od ovih sabiraka traži odgovarajuće partikularno rešenje, a ukupno partikularno rešenje koje odgovara funkciji $f(x)$ je jednako zbiru svih pojedinačnih partikularnih rešenja. Ovakav postupak rešavanja se u teorija naziva metod superpozicije.

PRIMER

Primena metode neodređenih koeficijenata za određivanje partikularnog rešenja nehomogene linearne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima - princip superpozicije.

Odredimo opšte rešenje nehomogene jednačine

$$y'' - y' - 2y = x^2 - 1 + 3e^{-x}.$$

Rešenje. Kako karakteristična jednačina $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ima rešenja $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 2$ odgovarajući fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine biće $y_1 = e^{-x}$ i $y_2 = e^{2x}$.
Funkcija $f(x)$ predstavlja zbir dve funkcije, tako da, prvo određujemo partikularna rešenja $y_{p_1}(x)$ i $y_{p_2}(x)$ koje odgovaraju jednačinama

$$y'' - y' - 2y = x^2 - 1 \;\; i \;\; y'' - y' - 2y = 3e^{-x},$$

tim redom, a partikularno rešenje $y_p(x)$ cele nehomogene jednačine je $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$. U nastavku ćemo odrediti funkcije $y_{p_1}(x)$ i $y_{p_2}(x)$.

U slučaju jednačine $y'' - y' - 2y = x^2 - 1$, kako je $\alpha = \beta = 0$, tada se proverava da li je $\lambda = 0$ rešenje karakteristične jednačine, što nije tačno, tako da je $y_{p_1}(x) = ax^2 + bx + c$, pri čemu koeficijente a, b i c treba odrediti.

Kako je $y'_{p_1}(x) = 2ax + b$ i $y''_{p_1}(x) = 2a$, vraćajući ovo u posmatranu jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} &2a - 2ax - b - 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2ax^2 + (-2a - 2b)x + 2a - b - 2c = x^2 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2a = 1 \wedge -2a - 2b = 0 \wedge 2a - b - 2c = 1. \end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ i $c = -\frac{1}{4}$. Tada je traženo partikularno rešenje oblika

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

U slučaju jednačine $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$, kako je $\alpha = \; -1$ i $\beta = 0$, tada se proverava da li je $\lambda = -1 + i \cdot 0$ jeste rešenje karakteristične jednačine. Vidimo da je jedno rešenje karakteristične jednačine $\lambda_1 = -1$, pa je $y_{p_2}(x) = Axe^{-x}$, pri čemu koeficijent A treba odrediti. Kako je $y'_{p_2}(x) = A(1-x)e^{-x}$ i $y''_{p_2}(x) = A(2+x)e^{-x}$, vraćajući ove veličine u posmatranu jednačinu dobijamo

$$A(2+x)e^{-x} - A(1-x)e^{-x} - 2Axe^{-x} = 3e^{-x}.$$

Nakon deljenja poslednje jednačina sa e^{-x} dobijamo da je $-3A=3,$ tj. $A=-1.$ Tada je $y_{p_2}(x)=-xe^{-x}.$

Stoga je opšte rešenje date nehomogene jednačine:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}-xe^{-x}.$$

VIDEO KLIP

Snimci sa Youtube-a: postupak za rešavanje Koši - Ojlerove jednačine je drugačiji od izloženog i odnosi se na jednačine drugog reda.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 5

Nehomogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

POJAM

Za određivanje partikularnog rešenja linearne nehomogene diferencijalne jednačine višeg reda se koriste Metoda neodređenih koeficijenata i Metoda varijacije konstanti.

Jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x),$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$, se naziva nehomogena linearna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima, pri čemu je funkcija $f(x) \neq 0$ neprekidna na realnom intervalu $x \in D$.

Može se pokazati da važi sledeći stav.

Stav. Ako je $y_p = y_p(x)$ bilo koje partikularno rešenje nehomogene jednačine

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x),$$

i $u = u(x)$ opšte rešenje odgovarajuće linearne homogene jednačine sa konstantnim koeficijentima, tada je

$$y(x) = u(x) + y_p(x)$$

opšte rešenje date nehomogene jednačine.

U nastavku ćemo najpre izložiti Metod neodređenih koeficijenata, a zatim i Metod varijacije konstanti ili kako se još naziva Lagranžev metod za određivanje partikularnog rešenja posmatrane nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

METODA NEODREĐENIH KOEFICIJENATA

Ova metoda se može primeniti samo za određene klase funkcija $f(x)$.

Isto kao i za nehomogenu linearnu jednačinu drugog reda, ako je slobodan član jednačine

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

gde su $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n\in\mathbb{R}$,funkcija $f(x)\neq 0$ oblika

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x),$$

tada se partikularno rešenje polazne jednačine može odrediti neposredno, metodom neodredjenih koeficijenata, pri čemu su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stepena n, odnosno m, tim redom.

Uočimo karakterističnu jednačinu, odgovarajuće homogene jednačine koja glasi:

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

Sada razlikujemo sledeća dva slučaja:

1° Ako kompleksan broj $\lambda=\alpha+i\cdot\beta$ nije rešenje odgovarajuće karakteristične jednačine, tada postoji partikularno rešenje posmatrane jednačine oblika

$$y_p(x)=e^{\alpha x}(R_s(x)\cos\beta x+T_s(x)\sin\beta x),$$

gde su $R_s(x)$ i $T_s(x)$ polinomi čije koeficijente treba odrediti, a s je stepen polinoma koji je jednak višem od stepena n i m.

2° Ako kompleksan broj $\lambda=\alpha+i\cdot\beta$ jeste rešenje odgovarajuće karakteristične jednačine, višestrukosti $p\,(1\leq p\leq n)$, tada postoji partikularno rešenje posmatrane nehomogene jednačine oblika

$$y_p(x)=x_pe^{\alpha x}(R_s(x)\cos\beta x+T_s(x)\sin\beta x).$$

Napomena. Ako se u okviru funkcije $f(x)$ na desnoj strani nalazi više sabiraka oblika $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$ tada se za svaki od ovih sabiraka traži odgovarajuće partikularno rešenje, a ukupno partikularno rešenje koje odgovara funkciji $f(x)$ je jednako zbiru svih pojedinačnih partikularnih rešenja. Ovakav postupak rešavanja se u teorija naziva metod superpozicije.

METOD VARIJACIJE KONSTANTI – POSTAVLJANJE SISTEMA ZA ODREĐIVANJE OPŠTEG REŠENJA

U opštem slučaju, kada je funkcija $f(x)$ izvesna elementarna funkcija, za određivanje partikularnog rešenja posmatrane nehomogene jednačine može se koristi Lagranžev metod.

Nedostatak pomenute metode neodređenih koeficijenata za rešavanje nehomogene linearne diferencijalne jednačine $n-$ tog reda

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$,je u tome što se može primeniti samo na određene klase funkcija $f(x)$, o čemu je već bilo reči.

U opštem slučaju, kada je funkcija $f(x)$, što je u praksi najčešće slučaj, izvesna elementarna funkcija, za određivanje partikularnog rešenja posmatrane nehomogene jednačine može se koristiti Metoda varijacije konstanti ili kako se još naziva Lagranževa metoda.

On se, dakle, sastoji u tome da opšte rešenje $y(x)$ tražimo u obliku

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

gde je $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ bilo koji fundamentalni sistem rešenja odgovarajuće homogene jednačine i gde su nepoznate funkcije $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ koje treba odrediti.

Može se pokazati da se ove funkcije mogu odrediti iz sledećeg sistema jednačina

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n &= 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' &= 0, \\ C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + \ldots + C_n'y_n'' &= 0, \\ &\vdots \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned}$$

METODA VARIJACIJE KONSTANTI – ODREĐIVANJE OPŠTEG REŠENJA

Za razliku od Metode neodređenih koeficijenata, prilikom primene Metode varijacije konstanti do opšteg rešenja se dolazi neodređenom integracijom izvesnih funkcija.

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je:

$$C_1'(x) = \varphi_1(x),\ C_2'(x) = \varphi_2(x),\ \ldots, C_n'(x) = \varphi_n(x)$$

tj.

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \varphi_1(x)dx + D_1 = \alpha_1(x) + D_1, \\ C_2(x) &= \int \varphi_2(x)dx + D_2 = \alpha_2(x) + D_2, \\ &\vdots \\ C_n(x) &= \int \varphi_n(x)dx + D_n = \alpha_n(x) + D_n. \end{aligned}$$

Tada je opšte rešenje posmatrane nehomogene jednačine oblika

$$\begin{aligned} y(x) = \big(\alpha_1(x)+D_1\big)\cdot y_1 + \big(\alpha_2(x)+D_2\big)\cdot y_2 + \cdots + \big(\alpha_n(x)+D_n\big)\cdot y_n = \\ = u(x) + y_p(x), \end{aligned}$$

gde

$$u(x) = D_1\cdot y_1 + D_2\cdot y_2 + \cdots + D_n\cdot y_n,$$

predstavlja rešenje odgovarajuće homogene jednačine, dok funkcija

$$y_p(x) = \alpha_1(x)\cdot y_1 + \alpha_2(x)\cdot y_2 + \alpha_n(x)\cdot y_n$$

predstavlja partikularno rešenje.

Napomena. Metoda varijacije konstanti se može koristiti za određivanje partikularnog rešenja nehomogenih diferencijalnih jednačina drugog i više reda za proizvoljnu klasu funkcija $f(x)$. Utom smislu ovaj metod je opštiji od metoda neodređenih koeficijenata. Međutim, u slučaju kada funkcija $f(x)$ pripada klasina kojese može primeniti taj metod,preporučuje se njegova primena, jer se na jednostavniji način dolazi do rešenja (izbegava se integracija).

PRIMER

Rešavanje diferencijalne jednačine primenom Metode varijacije konstanti.

Metodom varijacije konstanti rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 2y' = e^x \sin x$.

Rešenje. Posmatrajmo odgovarajuću homogenu jednačinu $y'' - 2y' = 0$. Njena karakteristična jednačina je $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, čiji su koreni $r_1 = 0$, $r_2 = 2$. Fundamentalni sistem rešenja odgovarajuće homogena diferencijalne jednačine su funkcije 1 i e^{2x}. Opšte rešenje polazne jednačine je oblika

$$y(x) = C_1(x)\cdot 1 + C_2(x)\cdot e^{2x},$$

gde funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ treba odrediti iz sistema

$$\begin{aligned} C_1'(x) + C_2'(x)e^{2x} &= 0, \\ C_1'(x)\cdot 0 + 2C_2'(x)e^{2x} &= e^x \sin x. \end{aligned}$$

Iz druge jednačine sistema dobijamo da je $C_2'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$. Tada je

$$\begin{aligned} C_2(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}\sin x\,dx = \text{ostavlja se za vežbu studentima} = \\ -\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x + \cos x) + D_2. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine sistema, važi da je $C_1'(x) = -C_2'(x)e^{2x} = -\frac{1}{2}e^x \sin x$. Tada je

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int e^x \sin x\, dx = \text{ostavlja se za vežbu studentima} =$$
$$-\frac{1}{4}e^x(\sin x - \cos x) + D_1.$$

Opšte rešenje, polazne jednačine je tada

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^x(\sin x - \cos x) + D_1 + \left(-\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x + \cos x) + D_2\right)\cdot e^{2x} =$$
$$= D_1 + D_2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Metod varijacije konstanti.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Koši - Ojlerova jednačina

POJAM

Poseban slučaj linearne homogene ili nehomogene diferencijalne jednačine višeg reda čiji su koeficijenti funkcije predstavlja Koši-Ojlerova jednačina.

Do sada smo razmatrali linearnu homogenu i nehomogenu diferencijalnu jednačinu višeg reda oblika

$$y^{(n)}x + a_1 y^{(n-1)}x + a_2 y^{(n-2)}x + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x),$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$,pri čemu je funkcija $f(x) \neq 0$ neprekidna na realnom intervalu $x \in D$.

Međutim, kao što smo u uvodu rekli, koeficijenti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ mogu biti i proizvoljne funkcije, po promenljivoj x. Sada ćemo obraditi jedan specifičan slučaj ovakvih jednačina, u smislu da koeficijenti koji su funkcije imaju specifičan oblik. Naime, posmatrajmo jednačinu oblika

$$c_n(ax+b)^n y^{(n)}(x) + c_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + c_1(ax+b)y' + c_0 y = f(x).$$

Ova jednačina se naziva Koši - Ojlerova jednačina koja se smenom $ax + b = e^t$ prevodi u nehomogenu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima, gde su $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{R}$.

Pri uvođenju prethodne smene treba voditi računa o sledećem

$$ax + b = e^t \Rightarrow adx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = ae^{-t}.$$

Kako se u polaznu Koši-Ojlerovu jednačinu uvodi nova promenljiva t, potrebno je odrediti izvod funkcije y po promenljivoj t.
Tada imamo:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = a\dot{y}e^{-t},$$

gde je uvedena oznaka $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Slično, možemo dobiti da je

$$\begin{aligned} y'' = \frac{dy'}{dx} &= \frac{d(a\dot{y}e^{-t})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \\ &= a(\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t})e^{-t} = \\ &= a\ddot{y}e^{-2t} - a\dot{y}e^{-2t}, \end{aligned}$$

gde je $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$.

Nastavljajući ovaj postupak, sve do $n-$ tog izvoda, i nakon uvođenja pomenute smene, polazna Ojlerova jednačina postaje nehomogena diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima, koja se može rešavati već pomenutom Metodom neodređenih koeficijenata ili Metodom varijacije konstanti u zavisnosti od toga kakva je funkcija $f(x)$.

PRIMER 1. DEO

Postupak rešavanja Ojlerove jednačine.

Odrediti opšte rešenje sledeće diferencijalne jednačine

$$(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$$

Rešenje. Ovo je Koši-Ojlerova diferencijalna jednačina i nju rešavamo smenom $2x+3 = e^t \Rightarrow 2dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2e^{-t}$.

Tada imamo da je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2\dot{y}e^{-t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(2\dot{y}_t e^{-t})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2(\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t})e^{-t} = 2\ddot{y}e^{-2t} - 2\dot{y}_t e^{-2t},$$

$$\begin{aligned} y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(2\ddot{y}e^{-2t} - 2\dot{y}e^{-2t})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} &= 2(\dddot{y}e^{-2t} - 2\ddot{y}e^{-2t} - (\ddot{y}e^{-2t} - 2\dot{y}e^{-2t}))e^{-t} \\ &= 2\dddot{y}e^{-3t} - 6\ddot{y}e^{-3t} + 4\dot{y}e^{-3t}. \end{aligned}$$

Uvodeći sve dobijene smene u početni jednačinu imamo

$$\begin{aligned} (2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = e^{3t}(2\dddot{y}e^{-3t} - 6\ddot{y}e^{-3t} + 4\dot{y}e^{-3t} + 3e^t \cdot 2\dot{y}e^{-t} - 6y \\ = 0, \end{aligned}$$

tj.

$$2\dddot{y} - 6\ddot{y} + 10\dot{y} - 6y = 0 / : 2 \Rightarrow \dddot{y} - 3\ddot{y} + 5\dot{y} - 3y = 0$$

Dobijena je homogena linearna diferencijalna jednačina trećeg reda sa konstantnim koeficijentima. Karakteristična jednačina tada glasi

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3 = 0.$$

PRIMER 2. DEO

Određivanje nula karakterističnog polinoma.

Podsetimo se kako se određuju koreni polinom sa celobrojnim koeficijentima

$$P_n(x) = a_n(x)^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gde su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Posmatra se koeficijent a_n i svi njegovi delioci u oznaci p (posmatrani i sa predznakom + i -), kao i delioci koeficijenta a_0, u oznaci q (posmatrani i sa predznakom + i -). Ako posmatrani polinom imam racionalna rešenja (korene), oni su oblika $\frac{q}{p}$.

U našem slučaju imamo da je kod polinoma $P_3(x) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3$ koeficijent $a_3 = 1$, a $a_0 = -3$. U ovom slučaju celobrojne nule, ako ih polinom ima, su brojevi $\pm 1, \pm 3$. Nula polinoma je ona vrednost koju kada zamenimo u posmatranom polinomu dobijemo vrednost 0 . Dakle, krenimo od vrednosti $\lambda = 1$. Imamo da je $P_3(1) = 0$, pa je vrednost $\lambda_1 = 1$, nula posmatranog polinoma. To dalje znači da je polinom $P_3(x) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3$ deljiv polinomom $\lambda - \lambda_1$, tj. $\lambda - 1$.

Tada je

$$(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 3,$$

$$tj. \qquad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3)$$

Na kraju rešavajući kvadratnu jednačinu $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ dobijamo da je $\lambda_{2,3} = 1 + i\sqrt{2}$.

Dakle,

$$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3).$$

Tada je

$$y(t) = C_1 e^t + e^t C_2 \cos\sqrt{2t} + C_3 \sin\sqrt{2t}.$$

Tada je

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{\frac{1}{2}t} + C_3 e^{\frac{3}{2}t}$$

Vraćajući uvedenu smenu $2x + 3 = e^t$, odnosno $t = \ln(2x+3)$, dobijamo opšte rešenje polazne jednačine

$$y(x) = C_1(2x+3) + C_2 e^{\frac{1}{2}\ln(2x+3)} + C_3 e^{\frac{3}{2}\ln(2x+3)} = C_1(2x+3) + C_2\sqrt{2x+3} + C_3\sqrt{2x+3}^3$$

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Koši-Ojlerova homogena jednačina.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Brojni redovi

Lekcija 10

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

Poglavlje 1

Brojni niz

DEFINICIJA

Skup realnih brojeva $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ naziva se brojni niz ako je svakom elementu a_n skupa A korespondiran jedan i samo jedan prirodan broj kao njegov indeks.

Za uočeni neprazan skup $A \subseteq \mathbb{R}$ i neprazan skup $B \subseteq \mathbb{R}$, svaku uređenu trojku (A, B, f) gde je f pravilo po kojem se, na jednoznačan način, svakom $x \in A$ dodeljuje tačno jedno $y \in B$ naziva se realna funkcija jedne realne promenljive. Za pomenutu funkciju najčešća oznaka je $y = f(x), \ \ x \in A$, tj. kada je ona zadata u eksplicitnom obliku, što će ovde biti slučaj.

Skup realnih brojeva $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ naziva se brojni niz ako je svakom elementu a_n skupa A korespondiran jedan i samo jedan prirodan broj kao njegov indeks. Dakle,

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots \end{array}$$

Element iz skupa A kome je indeks 1 naziva se prvim članom niza i označava se sa a_1. Analogno, a_2 je drugi član niza, a_3 je treći član niza i tako redom, uopšte a_n je $n-$ ti član niza, za $n \in \mathbb{N}$. Član a_n se naziva opšti član niza , koji igra veoma važnu ulogu u određivanju osobina posmatranog niza. Drugim rečima, za svaku funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kažemo da je jedan brojni (realan niz) i to se zapisuje: $a_n = f(n), (n \in \mathbb{N})$.

Niz sa članovima $a_n, (n \in \mathbb{N})$ se označava sa $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ili kraće sa (a_n). Nizovi se najčešće zadaju preko opšteg člana. To je ilustrovano narednim primerom.

Primer. Niz prirodnih brojeva se zadaje sa $a_n = f(n) = n$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz parnih prirodnih brojeva se zadaje sa $a_n = f(n) = 2n$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz neparnih prirodnih brojeva se zadaje sa $a_n = f(n) = 2n - 1$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz recipročnih vrednosti prirodnim brojevima se zadaje sa $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Niz čiji je opšti član $a_n = f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ je od posebnog interesa u matematici.

Nizovi mogu biti sa konačnim brojem članova i tada se nazivaju konačni nizovi, dok ako imaju beskonačno mnogo članova, tada se nazivaju beskonačni nizovi. Ovde će biti proučavane osobine beskonačnih nizova.

OGRANIČENOST BROJNOG NIZA

Za niz se kaže da je ograničen ako je ograničen i odozdo i odozgo. Supremum (infimum) niza (ako postoji) predstavlja njegovo najmanje (najveće) gornje (donje) ograničenje.

Neka je dat niz (a_n). Za njega se kaže da je ograničen odozgo ako postoji $M \in \mathbb{R}$ tako da je $a_n \leq M$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Svako gornje ograničenje niza (a_n) naziva se *majoranta* za taj niz.

Neka je dat niz (a_n). Za njega se kaže da je ograničen odozdo ako postoji $m \in \mathbb{R}$ tako da je $a_n \geq m$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Svako donje ograničenje niza (a_n) naziva se *minoranta* za taj niz.

Niz (a_n) je ograničen niz ako je ograničen i odozdo i odozgo. To, zapravo, znači da se svi članovi tog niza nalaze u intervalu $[m, M]$.

Primer. Niz $a_n = \frac{n+2}{n+1}$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ je ograničen niz, jer je:

$$a_n = \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

Očigledno je $1 < a_n < 2$, gde je broj 1 minoranta, a broj 2 majoranta niza.
U prethodnom primeru su samo grubo određene granice u kojima se vrednosti niza nalaze. Može se postaviti pitanje da li se za dati niz mogu preciznije odrediti granice intervala u kojima se nalaze sve vrednosti niza.

Broj G se naziva supremum niza (a_n) ako važi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq G,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N}) a_{n_1} > G - \varepsilon.$$

Ako je supremum niza konačan broj, tada se piše da je $\sup(a_n) = G$, a u suprotnom po definiciji je $\sup(a_n) = +\infty$. Ako supremum pripada nizu naziva se maksimum i označava se sa $\max(a_n)$.

Broj g se naziva infimum niza (a_n) ako važi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq g,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N}) a_{n_2} < g + \varepsilon.$$

Ako takav konačan broj postoji tada se piše da je $\inf(a_n) = g$, a u suprotnom po definiciji je $\inf(a_n) = -\infty$.
Ako infimum pripada nizu naziva se minimum i označava se sa $min(a_n)$.

Za posmatrani niz (a_n), ako postoje vrednosti za $n \in \mathbb{N}$ takve da nije ispunjen uslov $|a_n| < M$, gde je M realan broj koji ne zavisi od n , tada se kaže da taj niz nije ograničen, tj. da je neograničen.

Primer. Niz $a_n = \frac{n^2+1}{n-1}$, za $n = 2, 3, 4, \ldots$ je neograničen niz. Zaista

$$|a_n| = \left|\frac{n^2+1}{n-1}\right| > \frac{n^2-1}{n-1} = n+1 > M,$$

za $n = 2, 3, 4 \ldots$

MONOTONOST NIZA

Rastući nizovi su ujedno i neopadajući, ali obrnuto ne mora da važi. Analogno važi i za opadajuće i nerastuće nizove.

Niz (a_n) se naziva rastući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n > 0$.

Niz (a_n) se naziva neopadajući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

Niz (a_n) se naziva opadajući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n < 0$.

Niz (a_n) se naziva nerastući niz , ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

Nizovi koji imaju jednu od pobrojanih osobina se nazivaju monotoni nizovi.

Napomena. Treba uočiti da su rastući nizovi ujedno i neopadajući, a obrnuto ne mora da važi. Analogno važi i za opadajuće i nerastuće nizove.

Neka je (a_n) niz pozitivnih brojeva, tj. važi $a_n > 0, (\forall n \in \mathbb{N})$. Tada je niz (a_n) rastući ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, a (a_n) je opadajući ako za svako $n \in \mathbb{N}$, važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

DEFINICIJA PODNIZA

Za zadati niz se na beskonačno mnogo načina može, od njega, formirati novih nizova koji predstavljaju njegove podnizove

Ako je zadat niz (a_n) od njega se na beskonačno mnogo načina može formirati novi niz a_{n_k}, tj niz

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

gde su indeksi n_k prirodni brojevi takvi da važi $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$Ovako formirani niz naziva se podniz niza (a_n).

Primer. Od niza $(a_n) = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$ tj.

$$-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$$

možemo formirati npr. dva podniza uzimajući da prvi podniz, u oznaci (a'_{n_k}) čine članovi niza za koje je $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ a drugi u oznaci (a''_{n_k}) za koje je $n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$. Dakle, niz (a'_{n_k}) koji ima članove

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}, \ldots$$

je opadajući niz dok je niz (a''_{n_k}) koji ima članove

$$-2, -\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}, -\frac{8}{7}, -\frac{10}{9}, \ldots$$

je rastući niz. Primetimo da početni niz nije monoton ali se sastoji od monotonih podnizova.

DEFINICIJA TAČKE NAGOMILAVANJA NIZA

Tačka nagomilavanja je ona tačka u čijoj se okolini nalazi beskonačno mnogo članova toga niza.

Definicija. Broj a je tačka nagomilavanja niza (a_n) ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji podniz (a_{n_k}) datog niza takav da svi elementi datog podniza imaju osobinu $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Tačka nagomilavanja je ona tačka u čijoj se okolini nalazi beskonačno mnogo članova toga niza. Niz ne mora imati tačke nagomilavanja, a ako ih ima, tada može imati jednu ili više takvih tačaka. Ako postoji tačka nagomilavanja nekog niza ona može, a i ne mora pripadati tom nizu. Niz iz prethodnog primera ima dve tačke nagomilavanja i to su broj 1 (za one članove koji su pozitivni) i broj -1 (za one članove koji su negativni).

Sada, će biti dat iskaz jednog važnog stava, koji daje vezu između ograničenosti niza i postojanja tačaka nagomilavanja.

Stav. (Bolcano–Vajerštrasov stav). Ograničeni niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Pod pretpostavkom da je posmatrani niz i monoton, tada važi sledeći stav.

Stav. Svaki ograničeni i monoton niz ima tačno jednu tačku nagomilavanja.
Primer. Niz $a_n = (-1)^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ ima dve tačke nagomilavanja. Naime, $a_{2k} = 1$, za $n = 2k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$ dok je $a_{2k-1} = -1$, za $n = 2k-1,\ k = 1, 2, 3, \ldots$

Niz $a_n = n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ je niz koji nema tačaka nagomilavanja, (ovo je neograničen niz).

Niz $a_n = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$ ima jednu tačku nagomilavanja, jer se svi članovi tog niza okupljaju oko vrednosti 0.

DEFINICIJA KONVERGENCIJE BROJNOG NIZA

Za ispitivanje osobine konvergentnosti nekog brojnog niza dovoljno je tretirati taj niz počev od nekog mesta, pa na dalje (tj. može se izostaviti konačno mnogo početnih članova tog niza).

Za posmatrani niz, najvažnije pitanje je pitanje njegove konvergencije.

Definicija. Za niz (a_n) se kaže da je konvergentan ako postoji $A \in \mathbb{R}$ takvo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ i da pri tom važi da je $|a_n - A| < \varepsilon$, za $n > n_0$.

Dakle, oko tačke A se "okupljaju" skoro svi članovi niza, tj. svi članovi niza osim njih konačno mnogo.

Ako niz (a_n) nije konvergentan, tada se za njega kaže da je divergentan.

Za konvergentan niz (a_n) vrednost A iz prethodne definicije predstavlja njegovu graničnu vrednost i to se označava sa

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A \quad ili \quad a_n \to A,\ n \to +\infty.$$

U slučaju da je $A = 0$ takav niz se naziva nula-niz.

Stav. Neka je dat niz (a_n). Tada je on konvergentan ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tako da je

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

za svako $n, m > n_0(\varepsilon)$.

Niz sa prethodnom osobinom se naziva Košijev niz.

Napomena. Prethodni stav se naziva Košijev princip konvergencije realnih nizova. Košijev princip je ravnopravan prethodnoj definiciji i ima svoje prednosti i nedostatke u odnosu na nju. Prednost je u tome što se za njegovu primenu ne mora znati kandidat za graničnu vrednost niza, a mana je da ako se njime utvrdi da je posmatrani niz konvergentan, tada se granična vrednost tog niza ne zna.

Za ispitivanje svojstva konvergentnosti posmatranog niza, sasvim je dovoljno tretirati taj niz počev od nekog mesta, pa na dalje (tj. može se preskočiti početnih konačno mnogo elemenata tog niza).

Pod opštim članom posmatranog niza se podrazumeva n -ti član kada n nije fiksirano.

PRIMER 1

Primena definicije za dokazivanje konvergencije određenih nizova.

Za niz sa opštim članom $a_n = q^n,\ n \in \mathbb{N}$,važi da je

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

Rešenje. Dokažimo, najpre, da je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0,\ |q| < 1.$ Očigledno je da za $q = 0$ prethodno važi. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i $0 < |q| < 1$. Tada je

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \frac{1}{|q|} - 1\right)^n > 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Odavde imamo da je

$$|q|^n = |q^n| < \frac{|q|}{n(1-|q|)} < \varepsilon,\ \ za\ \ n > \frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}.$$

Sada ćemo dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \infty,\ |q| > 1.$ Neka je, stoga, $|q| > 1$ i $\delta > 0$ proizvoljno. Tada je

$$|q|^n > (1 + (|q| - 1))^n > 1 + n(|q| - 1) > n(|q| - 1) > \delta,$$

za

$$n > \frac{\delta}{|q| - 1}.$$

Specijalno za $q = 1$, ovaj niz je konvergentan, dok za $q = -1$, on očigledno ima dve tačke nagomilavanja 1 i -1, pa je divergentan.

Pomenućemo i poznati niz sa opštim članom

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n,\ \ n \in \mathbb{N},$$

koji se naziva geometrijska progresija. Opšti član ovog niza se može zapisati i na sledeći način

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

U slučaju da je $|q| < 1$, tada na osnovu prethodnog niza iz ovog primera važi da je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1 - q}.$$

ARITMETIČKE OSOBINE KONVERGENTNIH NIZOVA

Kada su dva niza konvergentna, tada se postavlja pitanje šta je s njihovim zbirom, razlikom, proizvodom, količnikom...

Neka su (a_n) i (b_n) dva realna niza. Tada se nizovi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ nazivaju, tim redom zbir, razlika i proizvod nizova (a_n) i (b_n). Ako je, $b_n \neq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada se niz $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ naziva količnikom nizova (a_n) i (b_n).

Kada su nizovi (a_n) i (b_n) konvergentni, tada se postavlja pitanje šta je s njihovim zbirom, razlikom, proizvodom i količnikom. Odgovor na to pitanje daje naredni stav.

Stav. Neka su (a_n) i (b_n) konvergetni nizovi tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$i neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada važi:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a \pm b,$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a \cdot b,$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n} = \dfrac{a}{b},\ b \neq 0,$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha \cdot a,$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^k = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right)^k = a^k,\ \ k \in \mathbb{N},$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n} = \sqrt[k]{a},\ \ k \in \mathbb{N},$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right| = |a|.$

Napomena. Data tvrđenja olakšavaju određivanje graničnih vrednosti.

STAVOVI ZA KONVERGENCIJU

Monoton i ograničen brojni niz je konvergentan.

Stav. Neka je dat niz (a_n) i neka je ograničen odozdo. Ako je (a_n) nerastući niz, tada je on konvergentan.

Stav. Neka je dat niz (a_n) i neka je ograničen odozgo. Ako je (a_n) neopadajući niz, tada je on konvergentan.

U opštem slučaju obrnuto ne mora da važi u oba stava.

Stav. Neka je dat niz (a_n) i neka je on konvergentan. Tada je (a_n) ograničen niz. Obrnuto ne mora da važi.

Napomena. Prethodni stav daje dobru metodologiju za dokazivanje da je niz divergentan ako se dokaže da nije ograničen.

PRIMER 2

Broj e se naziva Ojlerov broj i on je jedan od najvažnih konstanti u matematici. On je iracionalan transcendentan broj.

Primer. Neka je dat niz $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, za $n \in \mathbb{N}$. Ovaj niz je rastući što smo već pokazali. Može se dokazati da je on ograničen odozgo brojem 3.

Na osnovu Binomne formule, zaista, imamo da važi da je

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= 1+\frac{n}{n}+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \\
&< 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = \\
&= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2-\frac{1}{2^{n-1}} < 3
\end{aligned}
$$

Prema prethodnom stavu ovaj niz je konvergentan i postoji broj $e \in (2,3)$, tako da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Broj e se naziva Ojlerov broj i on je jedan od najvažnih konstanti u matematici. Broj e je iracionalan transcendentan broj. Numerički se može proračunati bilo koja njegova decimala i važi da je $e = 2,71828\ldots$

STAV O TRI NIZA

Ovaj stav ima poseban značaj jer se prilikom njegove primene za neki konvergentan niz (c_n) odmah dobija i granična vrednost niza.

Sledeći stav predstavlja veoma važan i često korišćen kriterijum za ispitivanje konvergencije nizova.

Stav. Neka su dati nizovi (a_n) i (b_n) i neka je

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = A \in \mathbb{R},$$

Ako je za niz (c_n) ispunjeno da je $a_n \leq c_n \leq b_n,$ za $n \geq n_0,$ tada je niz (c_n) konvergentan i važi :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = A.$$

Napomena. Ovaj stav ima poseban značaj jer se prilikom njegove primene za konvergentan niz (c_n) odmah dobija i granična vrednost niza. Ovaj stav se u literaturi naziva Stav o tri niza, a često se naziva i Lema o dva policajca.

PRIMERI 3 I 4

Primena Leme o dva policajca za dokazivanje konvergencije nizova.

Dokazati da važi:

$a)$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0,$ $\qquad b)$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Dokaz.

$a)$ Za $a = 1$ očigledno je tačno. Za $a > 1$ je $\sqrt[n]{a} > 1$ i imamo da je

$$a = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Ako posmatramo $a > n(\sqrt[n]{a} - 1)$ sledi da je $\frac{a}{n} > \sqrt[n]{a} - 1,$ tj. imamo da je:

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = 0$ sledi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0,$ tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$ Ako je konačno $0 < a < 1,$ tada imamo da je $\frac{1}{a} > 1.$ Tada na osnovu prethodnog važi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1,$ pa imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

b) Važi da je

$$\begin{aligned} n &= (1+(\sqrt[n]{n}-1))^n > \\ &> 1 + n(\sqrt[n]{n}-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n}-1)^2 + \cdots + (\sqrt[n]{n}-1)^n > \\ &> \frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n}-1)^2 \end{aligned}$$

Dakle, imamo da važi

$$\frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n}-1)^2 < n,$$

tj.

$$(\sqrt[n]{n}-1)^2 < \frac{2}{n-1},$$

tj.

$$|\sqrt[n]{n}-1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Kako je $0 < |\sqrt[n]{n}-1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ i važi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0,$ tada imamo, na osnovu Leme o dva policajca, da važi tvrđenje.

KLASA NEOGRANIČENIH NIZOVA

Beskonačan niz, ograničen sa donje strane, koji u konačnosti nema tačaka nagomilavanja naziva se određeno divergentan niz.

Sada će biti razmotrene ukratko neke klase neograničenih nizova. Beskonačan niz, ograničen sa donje strane, koji u konačnosti nema tačaka nagomilavanja naziva se određeno divergentan niz. Kaže se da je tačka beskonačnosti njegova jedina tačka nagomilavanja i piše se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \text{ili} \quad a_n \to +\infty,\ n \to +\infty.$$

Slično prethodnom, može se uvesti pojam nizova koji divergiraju ka $-\infty$.

Kod određeno divergentnog niza može se desiti da su njegovi članovi počev od nekog indeksa $n_0 \in \mathbb{N}$ proizvoljno veliki tj.

$$a_n \geq M, \quad \text{za} \quad n \geq n_0(M).$$

Ovakvi nizovi koji teže u $+\infty$ čine klasu uslovno divergentnih nizova. Slično, mogu se definisati i uslovno divergentni nizovi koji teže u $-\infty$. Određeno divergentni nizovi, se po svojoj strukturi ne razlikuju mnogo od konvergentnih nizova. U osnovi oni se podudaraju jer i jedni i drugi imaju jednu tačku nagomilavanja. Mnogi stavovi koji važe za konvergentne nizove važe i za određeno divergentne nizove.

Poglavlje 2

Pojam brojnog reda

DEFINICIJA BROJNOG REDA

Oznaka koja se koristi za sumu konvergentnog reda se vrlo često koristi u literaturi i za zadavanje samog reda, bez obzira da li je on konvergentan ili ne.

Neka je dat realan niz $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ kao i realan niz

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Tada se niz $(S_n)_n \in \mathbb{N}$ naziva brojni red, a njegov n -ti član $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ se naziva n-ta parcijalna suma. Za razmatrani red $(S_n)_n \in \mathbb{N}$ vrednost $a_n = S_n - S_{n-1},\ n \in \mathbb{N}$, je njegov opšti član (ili osnovni član). Svaki beskonačan zbir brojeva $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k,\ (m \in \mathbb{N}_0)$, se, takođe, naziva brojni red.

Konvergencija datog reda podrazumeva da postoji neko $S \in \mathbb{R}$ takvo da za niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, važi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Kako važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S$, to se često koristi oznaka

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S,$$

gde se S naziva suma brojnog reda. U slučaju da je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ ili da $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ne postoji, takav red se naziva divergentan, s tim što se u prva dva slučaja kaže da je određeno divergentan.
Sada ćemo navesti primere nekih redova čije poznavanje konvergentnosti će biti od interesa za dalji rad.

Primer. Red $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ je konvergentan red za $|q| < 1$, dok je za $|q| \geq 1$ divergentan. Ovaj red se naziva geometrijski red i njegova suma za $|q| < 1$ iznosi $S = \frac{1}{1-q}$.

Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je divergentan red i on se naziva harmonijski red.

Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$, dok za $\alpha \leq 1$ divergerira. Ovaj red se naziva hiperharmonijski red. Na primer važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Definicija. Neka je red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan, čija je suma S i neka je S_n njegova n -ta parcijalna suma. Razlika

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

naziva se ostatak reda.

PRIMER 1

Određivanje sume geometrijskog reda.

Odrediti sumu geometrijskog reda

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k.$$

Posmatrajmo n -tu parcijalnu sumu ovog reda

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poznajući činjenicu da se suma prvih n članova geometrijskog niza može zapisati

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1, \ n \in \mathbb{N},$$

kao i da je $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0,$ za $|q| < 1,$ važi da je

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{za } \ |q| < 1.$$

Tada je

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{za } \ |q| < 1.$$

S druge strane, imamo da je

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} +\infty, & \text{ako je } \ q \geq 1, \\ \text{ne postoji}, & \text{ako je } \ q \leq -1. \end{cases}$$

Dakle, geometrijski red određeno divergira, za $q \geq 1$, dok neodređeno divergira, za $q \leq -1$. Ukupno, geometrijski red divergira za $q \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Napomena. Na osnovu prethodnog primera nije teško uočiti da važi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Možemo izvoditi i sledeće zaključke

$$1 + q^2 + q^4 + q^6 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k = \frac{1}{1-q^2},$$

za $|q| < 1$, zatim

$$1 - q + q^2 - q^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-q)^k = \frac{1}{1-(-q)} = \frac{1}{1+q},$$

za $|q| < 1$, kao i mnoge druge.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: konvergencija geometrijskih reda.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

PRIMER 2

Određivanje sume reda.

Izračunati sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

Rešenje. Opšti član ovog reda je $a_n = \frac{1}{4n^2-1}$, i pri tom za svako $n \in \mathbb{N}$ važi jednakost

$$a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Stoga je

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$,neposredno sledi da je dati red konvergentan i njegov zbir je $S = \frac{1}{2}$.

Napomena. $a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ se dobija korišćenjem metode neodređenih koeficijenata koja je uvedena i objašnjena u lekciji o neodređenim integralima.

Napomena. Harmonijski red je specijalan slučaj hiperharmonijskog reda, za $\alpha = 1$. Harmonijski red ima sumu $+\infty$ i veoma je bitan za ispitivanje konvergencije nekog složenijeg reda. Niz njegovih parcijalnih suma se ponaša veoma blisko vrednosti $\ln n$ i razlikuju se od nje do na Ojlerovu konstantu $c = 0,57722\ldots$

Poglavlje 3

Redovi s pozitivnim i znakopromenljivim članovima

BROJNI RED SA POZITIVNIM (NENEGATIVNIM) ČLANOVIMA

Brojni red se sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ili će biti konvergentan red ili će biti određeno divergentan.

U okviru ove lekcije obradićemo, najpre, pojam brojnog reda sa pozitivnim (nenegativnim) članovima. Pošto su redovi nizovi parcijalnih suma, sve tehnike za ispitivanje konvergencije nizova se i ovde mogu primeniti. Međutim, ovde ćemo uvesti aspekt određivanja konvergencije reda preko opšteg člana posmatranog reda.

Prvo, dajemo definiciju brojnog reda sa pozitivnim (nenegativnim) članovima.

Definicija. Brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ se naziva brojni red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ako važi $a_k > 0 \; (a_k \geq 0)$, za svako $k \in \mathbb{N}$.

Brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ kod koga je $a_k < 0$ ($a_k \leq 0$), za svako $k \in \mathbb{N}$, se naziva brojni red sa negativnim (nepozotovnim) članovima. Međutim, ako neki brojni red ima konačno mnogo negativnih članova, a svi ostali njegovi članovi su pozitivni (nenegativni), tada je taj brojni red, red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima.

Brojni red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ili će biti konvergentan red ili će biti određeno divergentan ka $+\infty$.

Stav. Brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima je konvergentan ako i samo ako je niz njegovih parcijalnih suma $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen niz.

U nastavku ćemo dati razne kriterijume za proveru konvergentnosti brojnih redova sa pozitivnim (nenegativnim) članovima, koji se zadaju, kao što smo rekli, preko opšteg člana posmatranog reda. Pre toga ćemo govoriti o još nekim klasa brojnih redova.

BROJNI RED SA ČLANOVIMA PROMENLJIVOG ZNAKA

Najopštiji brojni red je onaj čiji članovi mogu biti promenljivog znaka.

Prethodno smo govorili o redovima sa pozitivnim (ili nenegativnim), odnosno negativnim (nepozitivnim) članovima. Sada ćemo nešto reći o brojnim redovima čiji članovi ne moraju biti istog znaka, tj. koji menjaju znak. Takvi redovi se nazivaju znakopromenljivi brojni redovi ili brojni redovi sa članovima promenljivog znaka.

Neka je takav red $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Pored ovog reda posmatrajmo i red sa nenegativnim članovima $|a_k|$, tj. $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$. Sa S_n i S_n' označimo njihove parcijalne sume, tj. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ i $S_n' = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ i primetimo da je

$$|S_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = S_n'.$$

Ovo znači da je red $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ uvek konvergentan kada konvergira red $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$. Obrnuto ne važi, tj. kada je prvi red konvergentan, drugi red može biti konvergentan ili divergentan. Na ispitivanje konvergencije reda $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ možemo primenjivati sve kriterijume koje ćemo u nastavku razmatrati u vezi sa brojnim redovima sa pozitivnim (nenegativnim) članovima.

Primer. Brojni red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin k$$

ima članove koji su promenljivog znaka. Zaista, važi da je

$$\sin 1 > 0, \sin 2 > 0, \sin 3 > 0, \sin 4 < 0, \sin 5 < 0, \sin 6 < 0, \sin 7 > 0, \ldots$$

ALTERNATIVNI REDOVI

U alternativnom brojnom redu važi da njegovi članovi naizmenično menjaju znak.

Alternativni redovi su specijalan slučaj redova sa članovima promenljivog znaka. Kod redova ;iji su članovi promenljivog znaka, promena znaka ne mora da podleže nekoj posebnoj pravilnosti kao kod alternativnih redova. Za neki brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kažemo da je alternativan red ako važi da njegovi članovi naizmenično menjaju znak, tj. u alternativnom redu važi da je

$$a_1 < 0,\ a_2 > 0,\ a_3 < 0,\ a_4 > 0, \ldots$$

ili

$$a_1 > 0,\ a_2 < 0,\ a_3 > 0,\ a_4 < 0, \ldots$$

Ako uvedemo oznaku $b_k = |a_k|,\ k \in \mathbb{N},$ tada možemo alternativni red zapisati u obliku u kome se on najčečće i zapisuje

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k \quad ili \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} b_k,$$

u zavisnosti da li je prvi član tog alternativnog reda pozitivan ili negativan. Svakako, važi da je $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} b_k = -\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k.$

Primer. Red

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

je alternativni brojni red.

OPERACIJE SA KONVERGENTNIM REDOVIMA

Konvergentan red pomnožen konstantom ostaje konvergentan, zbir ili razlika dva konvergetna reda jednaka je zbiru njihovih suma.

Osnovni zadatak u radu sa redovima jeste ispitivanje konvergencije redova i određivanje suma za konvergentne redove. Kod redova, slično kao i kod nizova, od divergentnih redova najinteresantniji su oni koji određeno ili uslovno divergiraju (tj. oni čije su sume $+\infty$ ili $-\infty$). Prilikom određivanja da li je neki red konvergentan ili divergentan, uvek se može zanemariti prvih konačno mnogo članova u njemu, ali ako je red konvergentan prilikom određivanja njegove sume, moraju se svi članova uzeti u obzir. Prvo ćemo govoriti o nekim osobinama konvergentnih redova.

Stav. Neka je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan red sa sumom

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

i neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Tada je konvergentan i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ i važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot S.$$

Stav. Neka su $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentni redovi sa sumama

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = T.$$

Tada je konvergentan red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ i važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = S \pm T.$$

Pod pretpostavkama datim u prethodnih stavovima, možemo prethodna dva stava objediniti u sledeći zapis

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k \pm \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \alpha S \pm \beta T, \ \beta \in \mathbb{R}.$$

Stav. Brojni redovi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ $(m = 2, 3, 4, \ldots)$ su istovremeno konvergentni ili divergetni redovi.

Dakle, ovakvi redovi su ekvikonvergetni (istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju), ali im sume, u slučaju konvergencije, neće biti iste.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: o brojnim redovima

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Konvergencija redova sa pozitivnim članovima

PRVI POREDBENI KRITERIJUM

Prvim poredbenim kriterijumom se preko opštih članova dati red poredni sa redom za koji znamo da je konvergentan, odnosno divergentan upoređivanjem njihovih vrednosti.

Stav. Neka su dati brojni redovi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ za koje je $a_k, b_k \geq 0$, za svako $k \in \mathbb{N}$, pri čemu je $a_k \leq b_k$, za svako $k \in \mathbb{N}$. Tada

1. ako red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergira, konvergira i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$;
2. ako red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira, divergira i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$;

Napomena. Prethodnim stavom je zadat tzv. Prvi poredbeni kriterijum. Za poređenje njegovom primenom se najčešće koriste harmonijski, hiperhamonijski i geometrijski red.

Primer. Brojni red $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ je divergentan red. To zaključujemo iz sledećeg: $\ln k < k \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{\ln k}, k = 2, 3, 4, \ldots$.Dalje, kako je brojni red $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergentan red (harmonijski red), na osnovu prethodnog stava pod 2. zaključujemo da je polazni red divergentan.

Primer. Brojni red $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$ je konvergentan red. To zaključujemo iz sledećeg

$$(k-1)^2 \leq k! \Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)^2}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

Kako je brojni red $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2}$, tj. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ hiperharmonijski red koji je konvergentan, na osnovu prethodnog stava pod 1. zaključujemo da je i polazni red konvergentan. Poznato je da važi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots = e.$$

Primer. Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^k+3}}$ je konvergentan red jer važi

$$\frac{1}{\sqrt{4^k+3}} < \frac{1}{\sqrt{4^k}} = \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Kako je red $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konvergentan red, kao geometrijski red za koji važi $q = \frac{1}{2} < 1$, tada zaključujemo da i polazni red konvergira.

DRUGI POREDBENI KRITERIJUM

Drugim poredbenim kriterijumom se preko opštih članova dati red poredni sa redom za koji znamo da je konvergentan, odnosno divergentan, preko granične vrednosti njihovog količnika.

Stav. Neka je brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ red sa nenegativnim članovima, a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ brojni red sa pozitivnim članovima. Ako je

$$l = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k},$$

pri čemu je $l \in (0, +\infty)$, tada za brojne redove $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ kažemo da su istovremeno konvergetni ili istovremeno divergentni.

Napomena. Prethodnim stavom je zadat Drugi poredbeni kriterijum. Za brojne redove za koje se ustanovi njihova konvergentnost ili divergentnost, kaže se da je ekvikonvergentan sa redom sa kojim je upoređivan.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+2}{k^3+k+2}.$$

Rešenje. Posmatrani red ćemo upoređivati sa redom $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Tada imamo da je

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\frac{3k+2}{k^3+k+2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \to \infty} \frac{3k^3+2k^2}{k^3+k+2} = 3 \in (0, +\infty).$$

Na osnovu drugog poredbenog kriterijuma je posmatrani red ekvikonvergentan sa redom $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, a kako je ovaj red konvergentan kao hiperharmonijski red, tada zaključujemo da je i polazni red konvergentan.

Stav. Neka su dati brojni redovi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sa pozitivnim članovima, pri čemu je

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k},$$

za svako $k \in \mathbb{N}$.

- Ako brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergira, tada i brojni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

- Ako brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira, tada i brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergira.

KOŠIJEV KORENI KRITERIJUM

Nedostatak Košijevog korenog kriterijuma jeste da postoji situacija kada on ne može dati odgovor u vezi za konvergencijom ili divergencijom posmatranog brojnog reda.

Stav (Košijev koreni kriterijum). Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, tj. $a_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i neka pritom postoji granična vrednost

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = c.$$

- Ako je $0 \leq c < 1$ posmatrani red konvergira,
- Ako je $c > 1$ posmatrani red divergira,
- Ako je $c = 1$ onda ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji posmatranog reda, već se mora primeniti neki drugi kriterijum.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}.$$

Rešenje. Kako je $a_k = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}$, tada je

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k-1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{k-1}{k+1} - 1\right)^{k-1} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{k+1}\right)^{k-1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{k+1}{-2}}\right)^{\frac{k+1}{-2}\cdot\frac{-2}{k+1}\cdot(k-1)} = e^{\lim_{k\to\infty} \frac{-2}{k+1}\cdot(k-1)} = e^{-2} < 1.$$

Zaključujemo na osnovu Košijevog korenog kriterijuma da posmatrani red konvergira.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Dalamberov kriterijum (Root test).

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

DALAMBEROV KRITERIJUM

Nedostatak Dalamberovog kriterijuma jeste da postoji situacija kada on ne može dati odgovor u vezi za konvergencijom ili divergencijom posmatranog brojnog reda.

Stav. (Dalamberov kriterijum) Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, tj. $a_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i neka pritom postoji granična vrednost

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = d.$$

• Ako je $0 \leq d < 1$ posmatrani red konvergira,
• Ako je $d > 1$ posmatrani red divergira,
• Ako je $d = 1$ onda ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji posmatranog reda, već se mora primeniti neki drugi kriterijum.

Primer. Pokazaćemo Dalamberovim kriterijumom da red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2+k}$ divergira. Imamo da je

$$a_k = \frac{2^k}{k^2+k} \qquad \text{i} \qquad a_{k+1} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)^2+k+1} = \frac{2^{k+1}}{k^2+3k+2}.$$

Tada je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2^{k+1}}{k^2+3k+2}}{\frac{2^k}{k^2+k}} = 2 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+k}{k^2+3k+2} = 2 > 1.$$

Napomena. Košijev koreni kriterijum je precizniji od Dalamberovog, jer postoje slučajevi u kojima se konvergencija nekog brojnog reda može dokazati Košijevim, a ne može Dalamberovim, dok obrnuto ne važi.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Dalamberov kriterijum (Ratio test).

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

RABEOV KRITERIJUM

Rabeov kriterijum je opštiji od Dalamberovog kriterijuma.

Stav. (Rabeov kriterijum) Neka je dat red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, tj. $a_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i neka pritom postoji granična vrednost

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = r.$$

• Ako je $0 \le r < 1$ posmatrani red divergira,
• Ako je $r > 1$ posmatrani red konvergira,
• Ako je $r = 1$ onda ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji posmatranog reda, već se mora primeniti neki drugi kriterijum.

Napomena. Osim Dalamberovog i Rabeovog kriterijuma, često se koriste i Kumerov, Gausov, Bertranov i drugi kriterijumi. De Morgan je dao hijerarhiju među pomenutim kriterijumima. Najslabiji od ovih kriterijuma je Dalamberov. Precizniji od njega je Rabeov kriterijum, a od njega su precizniji Bertranov i Gausov kriterijum. Na vrhu hijerarhije je Kumerov kriterijum, kao najopštiji. Njegova posledica su Bertranov i Gausov kriterijum. U praksi se konvergentnost brojnog reda proverava u skladu sa pomenutom hijerarhijom. Dakle, prvo se proverava po Dalamberovom kriterijumu i ako je $d = 1$, primenjuje se Rabeov kriterijum i tako redom.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k!}}{(2+\sqrt{1}) \cdot (2+\sqrt{2}) \cdot \ldots \cdot (2+\sqrt{k})}$$

Prvo proveravamo konvergentnost po Dalamberovom kriterijumu. Tada je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{\sqrt{(k+1)!}}{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{k})\cdot(2+\sqrt{k+1})}}{\frac{\sqrt{k!}}{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{k})}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{2+\sqrt{k+1}} = 1,$$

pa prema Dalamberovom kriterijumu nemamo odgovor. Primenjujemo Rabeov kriterijum

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = \lim_{k\to\infty} k \cdot \left(\frac{2+\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}} - 1 \right) = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{\sqrt{k+1}} = +\infty.$$

Na osnovu Rabeovog kriterijuma zaključujemo da posmatrani red konvergira.

KOŠIJEV INTEGRALNI KRITERIJUM

Ovim kriterijumom se ispituje konvergencija reda, ispitivanjem konvergencije odgovarjućeg nesvojstvenog integrala. Oni su ekvikonvergentni.

Stav. (Košijev integralni kriterijum) Neka $y = f(x)$ neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na intervalu $[m, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$. Tada je red $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f(k)$ ekvikonvergentan sa integralom

$$\int_m^{+\infty} f(x)dx.$$

Ekvikonvergentnost, kao što smo već rekli, znači da red i integral istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju. Dakle, ako nesvojstveni integral ima vrednost $\pm\infty$ ili ta vrednost ne postoji, tada je odgovarajući red divergentan, dok u slučaju da je vrednost integrala konačan broj, tada posmatrani red konvergira. Kao i u slučaju ostalih kriterijuma o kojima smo govorili, Košijevim integralnim kriterijumom se samo proverava njegova konvergencija i u slučaju da on konvergira ne znamo sumu tog reda.

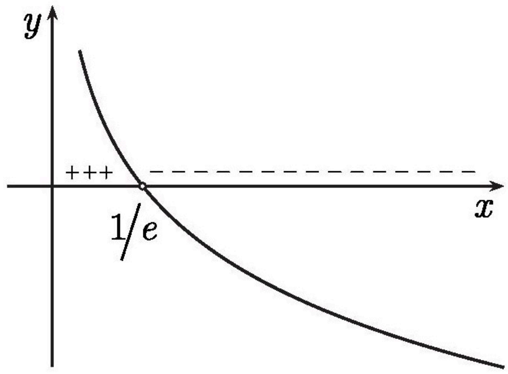
Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k \cdot \ln k}$.

Rešenje. Ispitivanje vršimo primenom Košijevog integralnog kriterijuma. Najpre, za funkciju $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ treba proveriti da li ona neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na intervalu $[2, +\infty)$. Domen ove funkcije je $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, tako da je ona neprekidna, a takođe je pozitivna funkcija na intervalu $[2, +\infty)$.
Ostaje još da proverimo da li je nerastuća funkcija. Stoga, odredimo prvi izvod ove funkcije i proverimo kakvoj znaka na intervalu $[2, +\infty)$.

Tada imamo $f\,'(x) = \frac{-\ln x - 1}{(x \cdot \ln x)^2}$. Grafik funkcija $g(x) = -\ln x - 1$ je dat na slici. Kako je $f'(x) < 0$, za $x \in [2, +\infty)$, tada je funkcija $y = f(x)$ nerastuća $x \in [2, +\infty)$.
Dakle, ispunjene su pretpostavke kriterijuma. Potrebno je sada odrediti vrednost integrala:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x dx} = \ldots = +\infty \text{ (uraditi za vežbu)}.$$

Dakle, ovaj integral divergira, a to znači, na osnovu Košijevog integralnog kriterijuma da divergira i početni red.



Slika 4.1 Grafik funkcije $f(x) = -lnx - 1$ [Izvor: Autor].

PRIMER

Košijev integralni kriterijum.

Primenom Košijevog integralnog kriterijuma ćemo dokazati da hiperharmonijski red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$, dok za $\alpha \leq 1$ divergerira.

Očigledno, ako je $\alpha \leq 0$, red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{\alpha}}$ je divergentan red. Stoga ćemo proveriti šta se dešava za $\alpha > 0$. Najpre, za funkciju $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ treba proveriti da li ona neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na intervalu $[1, +\infty)$. Domen ove funkcije je $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, tako da je ona neprekidna, a takođe je pozitivna funkcija na intervalu $[1, +\infty)$. Ostaje još da proverimo da li je ovo nerastuća funkcija na intervalu $[1, +\infty)$. Stoga, odredimo prvi izvod ove funkcije i proverimo kakvog je on znaka na intervalu $[1, +\infty)$. Tada imamo $f'(x) = \dfrac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$, za $\alpha > 0$ i $x \in [1, +\infty)$.

Dakle, posmatrani red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{\alpha}}$ je ekvikonvergentan sa nesvojstvenim integralom $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}$. Na prethodnim predavanjima smo videli da je

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} +\infty, & za\ \ 0 < \alpha \leq 1, \\ -\frac{1}{-p+1}, & za\ \ \alpha > 1 \end{cases}$$

Na osnovu ekvikonvergencije posmatranog integrala i polaznog reda zaključujemo da hiperharmonijski red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$, dok za $\alpha \leq 1$ divergerira.

KOŠIJEV PRINCIP KONVERGENCIJE

Ovaj stav je ekvivalentan definiciji konvergenciji redova.

Na kraju ovog dela navodimo i navodimo i Košijev opšti princip za konvergenciju brojnih redova koji je zasnovan na Košijevom principu za konvergenciju brojnih nizova. Ovaj kriterijum ima veliki teorijski značaj, ali se zbog složenosti retko primenjuje u praksi.

Stav. (Košijev princip konvergencije) Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Tada je on konvergentan ako i samo ako je za svako proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji broj m $(m \in \mathbb{N})$, takav da za svako $n > m$ važi

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

Napomena. Prethodni stav je ekvivalentan definiciji konvergencije za redove i u odnosu na nju ima svoje prednosti i mane (kao i kod nizova). Određena prednost ovog kriterijuma konvergencije sastoji se u tome što je, da bi se ispitala konvergencija nekog reda je dovoljno znati sve njegove članove, ali ne i tačnu vrednost njegove sume koja se u opštem slučaju teško može eksplicitno odrediti.

Primer. Pomenuli smo da je harmonijski red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergentan red. To se može pokazati primenom Košijevog principa konvergencije. Tada imamo, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \\ &= n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Iz prethodnog vidimo da je za $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ i $m = 2n$ Košijev princip konvergencije očigledno nije ispunjen, pa je posmatrani red divergentan.

STAV ZA DOKAZIVANJE DIVERGENCIJE BROJNOG REDA

Ako opšti član brojnog reda ne teži nuli, tada taj red divergira.

Stav. Neka je dat red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ koji je konvergentan. Tada je $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dokaz. Kako je dati red konvergentan, tada je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$. Takođe je i $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = S$, pa imamo da je $\lim\limits_{k\to\infty} S_{k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) = S$. Kako je $a_k = S_k - S_{k-1}$, za svako $k \in \mathbb{N}$, to je

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0.$$

Napomena. Prethodni stav je odličan za ispitivanje divergencije datog reda, jer na osnovu zakona o kontrapoziciji prethodni stav se može interpretirati na sledeći način: ako opšti član brojnog reda ne teži nuli, tada taj red divergira.

Primer. Red $\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ je divergentan red. Zaista, kako je

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = 1 \neq 0,$$

na osnovu prethodnog iznetog zaključujemo da je posmatrani red divergentan.

Poglavlje 5

Brojni redovi sa članovima promenljivog znaka

APSOLUTNA I USLOVNA KONVERGENCIJA

Kod brojnih redova sa članovima promenljivog znaka, uključujući i alternativne redove, postoje dve vrste konvergencije: apsolutna i uslovna konvergencija.

Kod redova sa članovima promenljivog znaka postoje dve vrste konvergencije: apsolutna konvergencija i uslovna konvergencija.

Definicija. Brojni red sa članovima promenljivog znaka $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ naziva se apsolutno konvergentan ako konvergira odgovarajući red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Iz prethodne definicije može se uvideti da je apsolutna konvergencija nekog reda sa članovima promenljivog znaka ista kao i konvergencija reda odgovarajućeg reda sa pozitivnim (nenegativnim) članovima. Stoga se za ispitivanje apsolutne konvergencije mogu primenjivati svi pomenuti kriterijumi za redove sa pozitivnim (nenegativnim) ćlanovima i važi sledeći stav.

Stav. Ako brojni red sa članovima promenljivog znaka $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergira, tada on i konvergira.

Napomena.U prethodnom stavu obrnuto ne mora da važi. Takođe, iz prethodnog stava važi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| .$$

Redovi koji su konvergentni, a nisu apsolutno konvergentni nazivaju se uslovno konvergentni redovi (ili semi konvergentni redovi). Na sledećoj slici je predstavljen odnos između apsolutno, uslovno konvergentnih i divergentnih redova.

Slika 5.1 Apsolutno i uslovno konvergetni redovi, kao i divergentni redovi [Izvor: Autor].

PRIMER 1

Ispitivanje apsolutne konvergencije brojnog reda.

Ispitati konvergenciju brojnog reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} 3^k}{(2k-1)^k}.$$

Rešenje. Ovaj red je primer reda sa članovima promenljivog znaka, jer je opšti član $a_k = \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} 3^k}{(2k-1)^k}$, $k = 1, 2, 3 \ldots$ Tada je $|a_k| = \frac{3^k}{(2k-1)^k}$. Dakle, red

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(2k-1)^k}$$

je red sa pozitivnim članovima i na ispitivanje njegove konvergencije ćemo primeniti Košijev koreni kriterijum. Imamo da je

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{3^k}{(2k-1)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{2k-1} = 0 < 1.$$

Tada na osnovu Košijevog korenog kriterijuma zaključujemo da je red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(2k-1)^k}$ konvergentan, a samim tim je i red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} 3^k}{(2k-1)^k}$ apsolutno konvergentan.

LAJBNICOV KRITERIJUM

Ovaj kriterijum se koristi za ispitivanje konvergencije alternativnih redova.

Opšte osobine konvergentnih redova koje smo već naveli, važe i za alternativne redove. Međutim, pomenuti kriterijumi za konvergenciju brojnih redova sa pozitivnim (nenegativnim) članovima ne važe za alternativne redove. U nastavku dajemo jedan kriterijum za konvergenciju alternativnih redova.

Stav (Lajbnicov kriterijum). Neka je dat alternativni red $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$. Ako važi da je niz $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nerastući i da je $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0,$ tada je red $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ konvergentan red.

Primer. Ispitaćemo konvergenciju reda $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Posmatrani red je alternativan. Niz $b_k = \frac{1}{k},\ k\in\mathbb{N}$ je opadajući niz. Zaista, važi da je

$$(\forall k\in\mathbb{N})b_{k+1} - b_k \leq 0 \Leftrightarrow (\forall k\in\mathbb{N})\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \leq 0 \Leftrightarrow (\forall k\in\mathbb{N})\frac{-1}{k(k+1)} \leq 0.$$

Takođe, važi da je

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0,$$

pa na osnovu Lajbnicovog kriterijuma zaključujemo da posmatrani red konvergira.

Napomena. Ako je neki red alternativan tada se proverava, najpre, njegova apsolutna konvergencija. Ako ona ne važi, tada se uslovna konvergencija može proveriti Lajbnicovim kriterijumom.

Videli smo, u prethodnom primeru, da red $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergira na osnovu Lajbnicovog kriterijuma, ali on ne konvergira apsolutno, jer je red

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

harmonijski red koji divergira, već uslovno.

U slučaju da alternatnivni red konvergira, tada ostatak tog reda, oznaci R_n, je po apsolutnoj vrednosti manji od prvog zanemarenog člana i ima isti znak kao i taj član, tj.

$$R_n = S - Sn = \lambda(-1)^n a_{n+1}\ (0 < \lambda < 1),$$

gde su S i S_n suma reda i n -ta parcijalna suma, respektivno. Često se to zapisuje na sledeći način

$$R_n < |a_{n+1}|.$$

Prema Lajbnicovom kriterijumu red iz prethodnog primera je konvergentan, a za ostatak R_n važi ocena $|R_n| < \dfrac{1}{n+1}$.

DIVERGENCIJA REDOVA SA ČLANOVIMA PROMENLJIVOG ZNAKA

Divergencija u slučaju znakopromenljivih brojnih redova (kao i alternativnih redova) podrazumeva dva slučaja.

U radu sa znakopromenljivim brojnim redovima (kao i alternativnih redova) divergencija podrazumeva dva slučaja. Prvi slučaj je da suma tog reda iznosi $-\infty$ ili $+\infty$. Drugi slučaj je da se divergencija javlja kada parcijalne sume takvog reda osciliraju između, na primer, dve vrednosti. To ilustrujemo sledećim primerom.

Primer Ispitati konvergenciju alternativnog reda $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}$.

Rešenje. Za n -tu parcijalnu sumu datog reda važi $S_n = 1$, za $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$ i $S_n = 0$, za $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n = 2k-1, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{ako je } n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ovaj red oscilira između dve vrednosti 0 i 1. Ovakvi redovi se nazivaju oscilatorni redovi. Dakle, dati red je oscilatoran i prema tome divergentan.

Napomena. Stav za dokazivanje divergencije brojnog reda sa nenegativnim članovima o kome smo već govorili važi i za brojne redove sa članovima koji su promenljivog znaka. Dakle, ako opšti član brojnog reda sa članovima koji su promenljivog znaka ne teži nuli, tada taj red divergira.

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Apsolutna i uslovna konvergencija i divergencija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: Poredbeni kriterijum

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

STAVOVI O ZBIRU KONVERGENTNIH BROJNIH REDOVA

Kod konvergetnih i apsolutno konvergetnih redova njihova suma se ne menja promenom rasporeda članova, dok to ne važi za uslovno konvergetne redove.

Sada ćemo dati neke opšte stavove o konvergenciji brojnih redova.

Stav. Ako izvestan red sa pozitivnim (nenegativnim) članovima konvergira, tada se pri bilo kakvoj permutaciji njegovih članova dobija red koji je, takođe, konvergentan i ima isti zbir kao i početni red.

Na osnovu definicije apsolutno konvergetnih redova prethodni stav se može primeniti i na njih.

Stav. Ako izvestan red sa članovima prozvoljnog znaka apsolutno konvergira, tada se pri bilo kakvoj permutaciji njegovih članova dobija red koji je, takođe, apsolutno konvergentan i ima isti zbir kao i početni red.

Sledeći stav govori i o sumi uslovno konvergetnih redova.

Stav. Ako izvestan red sa članovima prozvoljnog znaka uslovno konvergira, tada za proizvoljan realan broj A postoji određena permutacija njegovih članova takva da je suma tog reda jednaka A. Takodje, postoji bar jedna permutacija članova tog reda, takva da je dobijeni red divergentan.

Na osnovu prethodnog stava vidimo da se pravila za sumiranje konačno mnogo članova i beskonačno mnogo članova nekog brojnog reda u opštem slučaju ne poklapaju.

Prethodni stav ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Posmatrajmo ponovo uslovno converegentan red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$. Pretpostavimo da je suma tog reda S. Imamo da je

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \dots$$

Ako posmatramo red

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Sabiranjem ova dva reda, dobijamo

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Poslednji red je isti kao i polazni samo mu je redosled sumiranja članova promenjen. Pogrešno bi bilo zaključiti da je $\frac{3}{2}S = S,$ jer bi odatle dobili da je $S = 0,$ što nije tačno jer je iz samog reda $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ lako videti da je $\frac{1}{2} < S < 1.$

Dakle, permutovanje članova u sumiranju beskonačnog uslovno konvergetnog reda dovodi do toga da se dobijaju različiti zbirovi, za isti red.

VIDEO KLIP 3

Youtube snimak

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Funkcionalni redovi

Lekcija 11

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

Poglavlje 1

Funkcionalni niz

POJAM

Kada kažemo da je funkcionalni niz definisan na nekom skupu, smatramo da je svaka funkcija tog niza definisana na tom skupu (oblast definisanosti svake funkcije je taj skup).

Uređeni skup realnih funkcija jedne realne promenljive $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, koje su definisane na istom domenu $A \subseteq \mathbb{R}$ i koji zapisujemo

$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots),$$

naziva se funkcionalni niz.

Funkcionalni niz ćemo slično, kao i brojni niz, označavati na sledeći način $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ili kraće $(f_n(x))$.

Funkcija $f_n(x)$ se naziva opšti član funkcionalnog niza $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ i funkcionalni niz se najčešće zadaje preko njega.

Primer. Posmatrajmo funkcionalni niz $\left(\frac{x}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, pri čemu je opšti član $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$. Tada, prvih nekoliko članova ovog niza je

$$f_1(x) = \frac{x}{1},\ f_2(x) = \frac{x}{4},\ f_3(x) = \frac{x}{9},\ f_4(x) = \frac{x}{16}, \ldots,$$

odakle vidimo da su članovi ovog reda, zapravo, linearne funkcije, čiji grafici sadrže koordinatni početak. Oblast definisanosti svih članova ovoga niza tj. funkcija je $\mathbb{R}$.

S druge strane, ako izaberemo neku konkretnu vrednost za $x \in \mathbb{R}$, na primer $x = 1$, tada posmatrani funkcionalni red postaje brojni red $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Osobine ovih nizova smo obrađivali u okviru Matematike 1, a kratko podsećanje je dato u okviru prethodne lekcije.

Kao i kod brojnih redova, pojam konvergencije je najvažnije pitanje u vezi sa funkcionalnim redovima. O tome govorimo u nastavku.

KONVERGENCIJA FUNKCIONALNOG NIZA U TAČKI I NA INTERVALU

Kod funkcionalnih nizova se definiše konvergencija u tački, konvergencija na intervalu i uniformna konvergencija.

Kod funkcionalnih nizova se definiše konvergencija u tački, konvergencija na intervalu i uniformna konvergencija.

Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u tački $x = x_0 \in A$, ako konvergira brojni niz $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$, tj. ako postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Ako ne postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$, tada kažemo da funkcionalni niz divergira u tački $x_0 \in A$. Skup svih tačaka $x_0 \in A$ za koje dobijeni brojni niz konvergira, predstavlja oblast konvergencije posmatranog funkcionalnog niza.

Pretpostavimo da je oblast konvergencije neki interval (a, b) (može biti i neki od interval $[a, b]$ ili $[a, b)$ ili $(a, b]$). Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira na intervalu $(a, b) \in A$ ka funkciji $f(x)$, $x \in (a, b)$, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, za svako $x \in (a, b)$. Iz prethodnog sledi da za svako $\varepsilon > 0$ i svako fiksirano $x \in (a, b)$, postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, takav da važi da je

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

za svako $n > n_0$.

Za funkcionalni niz kažemo da divergira na intervalu (a, b), ako divergira u svakoj tački tog intervala.

Primer. Posmatrajmo funkcionalni niz

$$f_n(x) = \frac{nx + x^2}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

za $x \in \mathbb{R}$. Tada za svaki realan broj x važi da je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx + x^2}{n^2} = x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} + x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Dakle, na čitavom skupu $\mathbb{R}$ posmatrani funkcionalni niz konvergira ka funkciji $f(x) = 0$.

PRIMER 1 I 2

Konvergencija i divergencija funkcionalnog reda.

Primer. Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza

$$f_n(x) = \cos^n x, \; n \in \mathbb{N},$$

na intervalu $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rešenje. Za $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ važi da je $0 \leq \cos x < 1$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \cos^n x = 0.$$

Za $x = 0$ imamo da $f_n(0) = \cos^n 0 = 1$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Stoga, funkcionalni niz

$$f_n(x) = \cos^n x, \ n \in \mathbb{N},$$

na intervalu $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ konvergira ka funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Napomena. Iz ovog primera bi trebalo uočiti da funkcija $f(x)$ ne mora biti obavezno neprekidna funkcija, iako je funkcionalni niz sastavljen od neprekidnih funkcija.

Primer. Da li funkcionalni niz

$$f_n(x) = n^2 x^n, \ n \in \mathbb{N},$$

konvergira na intervalu $x \in [0, 1]$?

Rešenje. Za $x = 0$ važi da je $f_n(0) = 0$, za svako $n \in \mathbb{N}$, pa posmatrani niz konvergira u tački 0.

Za $0 < x < 1$ imamo da je $n^2 x^n = n^2 e^{n \ln x}$. Kako je $\ln x < 0$, za $0 < x < 1$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 e^{n \ln x} = 0.$$

(Pokazati za vežbu da ovo važi.) Dakle, posmatrani niz konvergira na intervalu $(0, 1)$ ka funkciji $f(x) = 0$.

Za $x = 1$ imamo da $f_n(1) = n^2$, pa je očigledno početni funkcionalni niz ne konvergira u tački $x = 1$.

Dakle, posmatrani funkcionalni niz ne konvergira na intervalu $[0, 1]$, jer ne konvergira u svakoj tački tog intervala.

RAVNOMERNA (UNIFORMNA) KONVERGENCIJA FUNKCIONALNOG NIZA

Svaki uniformno (ravnomerno) konvergentan niz je konvergentan, dok obrnuto u opštem slučaju ne važi.

U jednom od prethodnih primera smo videli da “prolaz limesa kroz neprekidnu funkciju” nije moguć u opštem slučaju. Zato nas može interesovati da li se mogu postaviti uslovi koji obezbeđuju neprekidnost funkcije koja je predstavlja graničnu vrednost konvergentnog funkcionalnog niza neprekidnih funkcija. To nas dovodi do pojma ravnomerne (uniformne) konvergencije funkcionalnih redova na intervalu (ne definiše se uniformna konvergencija u tački).

Definicija. Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ravnomerno (ili uniformno) na intervalu (a,b) ka funkciji $f(x),\ x\in(a,b)$, ako za svako $\varepsilon>0$, postoji prirodan broj $n_0=n_0(\varepsilon)$, takav da važi

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

za svako $n>n_0$ i svako $x\in(a,b)$.

Uniformna konvergencija se označava sa $f_n(x)\rightrightarrows f(x),\ x\in(a,b),\ n\to\infty$.

Ravnomernu konvergenciju zadatog funkcionalnog niza $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jednostavnije je ispitati primenom sledećeg stava nego prethodno datom definicijom.

Stav. Funkcionalni niz konvergira ravnomerno na intervalu (a,b), ka funkciji $f(x),\ x\in(a,b)$ ako i samo važi da je

1° $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in(a,b)}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$

2° Postoji realni nula niz (c_n) koji ne zavisi od $x\in(a,b)$, takav da je $|f_n(x)-f(x)|<c_n$, za svaki $x\in(a,b)$ i skoro svaki $n\in\mathbb{N}$.

Napomena. Treba istaći da u prethodno datoj definiciji prirodan broj n_0 zavisi jedino od ε (ne i od x.) Stoga uniforma konvergencija povlači (običnu) konvergenciju na intervalu, dok obrnuto, u op[tem slučajune važi.

PRIMER 3

Ovim primerom pokazujemo da konvergentan funkcionalni niz ne mora biti uniformno konvergentan. Primer kojim se obara neko tvrđenje se u matematici naziva kontraprimer.

Primer. Posmatrajmo funkcionalni niz

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\ n\in\mathbb{N},$$

za $x\in(0,\infty)$.

Ovaj niz konvergira na intervalu $(0, \infty)$ ka funkciji $f(x) = 0$. Naime, $1 + n^2x^2 \sim n^2x^2$, kada $n \to \infty$ (asimptotski se ponaša isto), pa imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{x^2n^2} = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

S druge strane, za $\varepsilon < \frac{1}{2}$ imamo da je

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{2} - 0 > \varepsilon.$$

Stoga, posmatrani funkcionalni niz ne konvergira ravnomerno (uniformno).

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: konvergencija funkcionalnog niza.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

VIDEO KLIP 2

Snimak sa Youtube-a: uniformna konvergencija funkcionalnog niza.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 2

Funkcionalni red

POJAM

Posebno mesto u radu sa funkcionalnim redovima, predstavlja ispitivanje njihove konvergencije.

Neka je dat funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, za $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, $(A \neq \emptyset)$. Beskonačan zbir

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

naziva se funkcionalni red.

Napomena. Treba istaći da se i beskonačan zbir funkcija

$$\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

gde je $p \in \mathbb{N}_0$, takođe naziva funkcionalan red. U mnogim slučajevima prilikom rada sa ovakvim redovima može se desiti da brojač n kreće od nule. Funkcionalni redovi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x)$, za $p \neq 1$, se razlikuju za konačno mnogo članova.

Veoma važni primeri funkcionalnih redova su

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

koji su od posebnog interesa u matematici i primenama, i oni će biti obrađeni na ovom i narednom predavanju.

Posebno mesto u radu sa funkcionalnim redovima, jeste ispitivanje njihove konvergencije. Za funkcionalne redove može se definisati konvergencija u tački, konvergencija na intervalu, apsolutna konvergencija i uniformna konvergencija.

SUMA FUNKCIONALNOG REDA

Funkcionalni red konvergira na nekom intervalu ako njegov niz parcijalnih suma konvergira na tom intervalu. Ta granična funkcija se naziva suma funkcionalnog reda.

Zbir prvih n članova funkcionalnog niza $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, u oznaci $S_n(x)$, tj.

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

gde su $x \in A,\ n \in \mathbb{N}$, predstavlja n-tu parcijalnu sumu funkcionalnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Na ovaj način se može generisati funkcionalni niz $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, definisan za $x \in A$, funkcionalnim nizom $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, za $x \in A$.

Funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira na intervalu $A_1 \subseteq A$, ako niz parcijalnih suma $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira na tom intervalu. Dakle, ako posmatramo sledeću graničnu vrednost

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

za $x \in A$ i ako granica prethodnog limesa postoji u $\mathbb{R}$ (označimo je sa $S(x)$), tada za nju kažemo da je suma funkcijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A_1 \subseteq A$. Tada zapisujemo

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in A_1 \subseteq A.$$

Beskonačan zbir, u oznaci $R_n(x)$, oblika

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots$$

se naziva ostatak funkcionalnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

PRIMER

Određivanje sume geometrijskog reda.

Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

se naziva geometrijski red, koji je konvergentan za $-1 < x < 1$, za koji je poznato da važi

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Takođe, red

Poglavlje 3

Konvergencija funkcionalnog reda u tački i na intervalu

POJAM

Konvergencija funkcionalnog reda u tački se poklapa sa konvergencijom odgovarajućeg brojnog reda. Skup svih tačaka u kojima posmatrani red konvergira se nalazi oblast konvergencije.

Konvergencija (divergencija) funkcionalnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ u tački $x_0 \in A$ poklapa se sa konvergencijom (divergencijom) brojnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Skup svih tačaka $A_1 \subseteq A$ za koje posmatrani funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira naziva se oblast konvergencije posmatranog reda. Ta oblast može biti prazan skup tačaka, a može se poklopiti i sa skupom A. Konvergencija na intervalu, zapravo, predstavlja konvergenciju u svakoj tački tog intervala.

Napomena. Oblast konvergencije u ovom slučaju predstavlja interval konvergencije jer se tačke x_0 u kojima funkcionalni red konvergira nalaze u $\mathbb{R}$.

Koristeći pojam ostatka funkcionalnog reda, možemo definisati konvergenciju na intervalu $A_1 \subseteq A$ na sledeći način: funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira na intervalu $A_1 \subseteq A$, ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj n_0 koji zavisi od x i ε, tj. $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ takav da je

$$R_n(x) = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$

za svako $n > n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ i svako fiksirano $x \in A_1$.

PRIMER

Određivanje oblasti konvergencije funkcionalnog reda primenom hiperharmonijskog reda.

Odrediti oblast konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$.

Rešenje. Funkcije $f_n(x) = n^{\ln x}$, za $n \in \mathbb{N}$, su definisane za $x > 0$ (zbog funkcije $y = \ln x$), pa će oblast konveregencije, svakako, biti interval koji je podskup ovog skupa (ili njemu jednak). Takođe, sve pomenute funkcije su uvek pozitivne za $x > 0$, pa govorimo o konvergenciji reda (ne o apsolutnoj konvergenciji o kojoj će biti reči kasnije), jer je ovo red sa pozitivnim članovima. Opšti član ovog reda se može zapisati u oblik

$$f_n(x) = n^{\ln x} = \frac{1}{n^{-\ln x}}.$$

Videli smo da brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ sa pozitivnim članovima, koji se naziva hiperharmonijski red, konvergira za $p > 1$, a da za $p \leq 1$ divergira. Tada će i polazni red konvergirati za $-\ln x > 1$, tj. za $\ln x < -1$, tj. za $x < e^{-1}$. Kako važi da je $x > 0$, tada je $0 < x < e^{-1}$, tj. $x \in (0, e^{-1})$, što predstavlja oblast konvergencije polaznog reda. Svakako, za $x \geq e^{-1}$ polazni red divergira.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 4

Uniformna konvergencija funkcionalnog reda

POJAM UNIFORMNE KONVERGENCIJE

Neprekidnost članova konvergentnog funkcionalnog reda, u opštem slučaju, ne povlači neprekidnost njegove sume. Od posebnog interesa su funkcionalni redovi kod kojih ovo važi.

Može se zapaziti veoma važna činjenica da neprekidnost članova konvergentnog funkcionalnog reda ne povlači, u opštem slučaju, neprekidnost njegove sume $S(x)$, tj.

$$\lim_{x\to x_0} S(x) \neq S(x_0).$$

ili što je isto sa tvrdnjom

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Dakle, “prolaz limesa kroz sumu” nije moguć u opštem slučaju. U daljem tekstu interesovaće nas dovoljni uslovi koji obezbeđuju neprekidnost sume konvergentnog reda neprekidnih funkcija, tj. koji garantuju jednakost u prethodnim izrazima. To nas dovodi do pojma ravnomerne (uniformne) konvergencije kod funkcionalnih redova na intervalu (ne definiše se uniformna konvergencija u tački).

Neka je dat funkcionalan red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ i neka je suma $S(x)$ definisana za $x \in A_1 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Takođe, neka je $B \subseteq A_1$ $(B \neq \emptyset)$. Tada za posmatrani red kažemo da uniformno (ravnomerno) konvergira ka $S(x)$ na B, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tako da za svako $x \in B$ i svako $n \geq n_0$ važi da je

$$R_n(x) = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Napomena. Za razliku od obične konvergencije, kod ravnomerno konvergentnih funkcionalnih redova prethodna procena važi nezavisno od $x \in B$.

Ravnomerna konvergencija se može predstaviti i sledećom karakterizacijom.

Stav. Neka je dat funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, i neka je $S(x)$ definisano za $x \in A_1 \subseteq \mathbb{R}$. Tada je, za neko $B \subseteq A$, $(B \neq \emptyset)$, ovaj rad uniformno konvergentan ka $S(x)$, za $x \in B$, ako i samo ako je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in B} |S(x) - S_n(x)| \right) = 0$$

Napomena. Prethodna formula je veoma bitan alat za ispitivanje ravnomerne konvergencije u zadacima. U skoro svim zadacima „sup" (supremum) iz prethodne formule biće kod nas „max" (maksimum).

Za funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ koji uniformno konvergira ka $S(x)$ za $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ uvodimo oznaku

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x),\ n \to \infty.$$

Napomena. Uslov ravnomerne konvergencije jači je od uslova obične konvergencije na nekom intervalu. Drugim rečima, ako je neki funkcionalni red ravnomerno konvergentan, tada je on konvergentan, dok obrnuto u opštem slučaju ne važi.

VAJEŠTRASOV KRITERIJUM

Za ispitivanje uniformne konvergencije postoji više kriterijuma, kao što su Vajerštrasov kriterijum, Dirihletov kriterijum, Abelov kriterijum.

Ispitivanje konvergencije na intervalu se svodi na ispitivanje konvergencije u tačkama tog intervala, tj. na ispitivanje konvergencije brojnih redova. Zato za običnu konvergenciju nisu razvijeni nikakvi posebni kriterijumi.

Za ispitivanje uniformne konvergencije postoji više kriterijuma, kao što su Vajerštrasov kriterijum, Dirihletov kriterijum, Abelov kriterijum. Najpoznatiji među njima je Vajerštrasov kriterijum i njega navodimo u nastavku.

Stav (Vajerštrasov kriterijum). Neka je dat funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definisan za $x \in A$, i neka je dat niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \geq 0$, za svako $n \in \mathbb{N}$, tako da je ispunjeno

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

za svako $x \in A$ i za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira na intervalu A, ako nenegativan brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Napomena. Vajerštrasov kriterijum daje samo dovoljne, ali ne i potrebne uslove za konvergenciju nekog funkcionalnog reda.

Prethodno rečeno ilustrujemo sledećim primerom.

PRIMER 1

Vajerštrasov kriterijum daje samo dovoljne, ali ne i potrebne uslove za konvergenciju nekog funkcionalnog reda.

Ispitati uniformnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$

Rešenje. Primena Vajerštrasovog kriterijuma u ovom slučaju nije moguća jer važi

$$\frac{(-1)^n}{n+x^2} \le \frac{1}{n}.$$

Naime, brojni red čiji je opšti član $\frac{1}{n}$ je poznati harmonijski red koji je divergentan. Međutim, polazni red konvergira, jer za ostatak tog reda važi

$$\begin{aligned} R_n(x) &= |S(x) - S_n(x)| = \\ &= \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x^2} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+2+x^2} + \dots \right| \le \\ &\le \frac{1}{n+1+x^2} \le \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Odavde zaključujemo da za svako $\varepsilon > 0$, važi

$$R_n(x) < \varepsilon,$$

za svako $x \in \mathbb{R}$ uzimajući da je $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ odakle zaključujemo da n_0 zavisi samo od ε, a ne i od x. Dakle, dati funkcionalni red konvergira uniformno.

OSOBINE UNIFORMNO KONVERGENTNIH REDOVA

Suma neprekidnih funkcija koja uniformno konvergira je neprekidna funkcija.

Zbog velikog praktičnog značaja, navodimo osobine uniformno konvergentnih redova.

Stav. Neka je dat funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A$. Takođe, neka je $g(x)$ ograničena funkcija na A. Tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(x)\cdot f_n(x)$ uniformno konvergira na A.

U sledećem tvrđenju iskazaćemo jednu od najvažnijih osobina uniformno konvergentnih redova.

Stav. Neka je dat funkcionalan red red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A$. Takođe, neka $f_n(x)$, za $x \in A$, neprekidne funkcije, za svako $n \in \mathbb{N}$, i neka je posmatrani red uniformno konvergentan na intervalu A. Tada je i funkcija

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in A,$$

neprekidna na A, gde $S(x)$ predstavlja sumu tog reda.

Kao što smo već rekli, ako neki funkcionalni red nije uniformno konvergentan, a jeste konvergentan, za $x \in A$, tada granična funkcija $S(x)$ ne mora biti neprekidna na A.

INTEGRACIJA UNIFORMNO KONVERGENTNOG FUNKCIONALNOG REDA ČLAN PO ČLAN

U opštem slučaju funkcionalni red koji ne konvergira uniformno ne može integraliti član po član.

Stav. Neka je dat funkcionalan red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, za $x \in A$, koji je uniformno konvergentan na A. Takođe, neka je $x_0 \in (a,b) \subseteq A$ fiksirano, a $x \in (a,b)$ proizvoljno. Tada važi da je:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \right),$$

gde su funkcije $f_n(t)$ neprekidne na (a,b) za svako $n \in \mathbb{N}$.

Prethodna formula se u literaturi često naziva integracija funkcionalnog reda član po član. Pretpostavka da je red uniformno konvergentan je veoma važna, jer se u opštem slučaju red koji ne konvergira uniformno ne može integraliti član po član. Drugo, iz ove formule vidimo da je funkcija zbira posmatranog funkcionalnog reda integrabilna u smislu određenog integrala. Najzad, funkcionalni red na desnoj strani u ovoj formuli je takođe uniformno konvergentan na skupu A.

PRIMER 2

Integracija uniformno konvergentnog funkcionalnog reda član po član.

Da li se red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2},$$

može integraliti član po član, za svako $x \in \mathbb{R}$?

Rešenje. Potrebno je proveriti da li su uslovi prethodnog stava ispunjeni. Dakle, potrebno je proveriti da li su funkcije $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}, n \in \mathbb{N}$, neprekidne, za svako $x \in \mathbb{R}$, što je očigledno tačno, kao i da li posmatrani red uniformno konvergira. Kako važi da je

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

i kako je brojni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentan red, tada na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma imamo da je posmatrani red uniformno konvergentan. Dakle, polazni red se može integraliti član po član i tada važi

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + t^2} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{1}{n^2 + t^2} dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$$

jer je

$$\int_0^x \frac{1}{n^2 + t^2} dt = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{t}{n} |_0^x = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n},$$

što se ostavlja studentima da urade za vežbu.

DIFERENCIRANJE UNIFORMNO KONVERGENTNOG FUNKCIONALNOG REDA ČLAN PO ČLAN

Primena ovog stava na određeni funkcionalni red je dozvoljena samo uz ispunjenja navedenih pretpostavki.

Stav. Neka je dat funkcionalan red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A$, i neka on konvergira (obično) za barem jedno $x_0 \in A$. Pretpostavimo još da su funkcije $f_n(x)$ diferencijabilne i $f'_n(x)$ neprekidne, za $x \in A$ i za svako $n \in \mathbb{N}$ i da funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ uniformno konvergira na A. Tada je

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

za svako $x \in A$.

Prethodna formula se u literaturi često naziva diferenciranje reda član po član i bez navedenih pretpostavki u stavu je ne smemo koristiti.

Poglavlje 5

Apsolutna konvergencija funkcionalnog reda

POJAM

Ako se primenom Vajerštrasovog kriterijuma dokaže uniformna konvergencija nekog funkcionalnog reda, tada važi i njegova apsolutna konvergencija.

Osim konvergencije i uniformne konvergencije, kod funkcionalnih redova se uvodi i pojam apsolutne konvergencije.

Definicija. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A$ kažemo da je apsolutno konvergentan u tački $x_0 \in A$, ako je brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ konvergira.

Stav. Funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in A$ je apsolutno konvergentan na intervalu $A_1 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, ako je apsolutno konvergentan u svakoj tački tog intervala.

Napomena. Prilikom ispitivanja apsolutne konvergencije u tački nekog funkcionalnog reda može se desiti da on ne konvergira apsolutno, ali da konvergira uslovno, jer se radi o konvergenciji brojnog reda.

Istakli smo već da iz apsolutne konvergencije sledi konvergencija, ali da obrnuto ne važi. Međutim, apsolutna i uniformna konvergencija ne mogu se porede na ovaj način.

Napomena. Ako se primenom Vajerštrasovog kriterijuma dokaže uniformna konvergencija nekog funkcionalnog reda, tada važi i njegova apsolutna konvergencija. Ovo sledi iz samog dokaza Vajerštrasovog kriterijuma.

PRIMER

Određivanje oblasti konvergencije funkcionalnog reda sa znakopromenljivim članovima.

Odrediti oblast konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^n}{n}.$$

Rešenje. Ovde se vrši određivanje apsolutne konvergencije, jer su članovi reda očigledno znakopromenljivi. Primenićemo Dalamberov kriterijum. Tada imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n(2x)^n}{n}} \right| = |2x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |2x|.$$

Na osnovu Dalamberovog kriterijuma, imamo da važi

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \begin{cases} \text{za } D > 1, & \text{posmatrani red divergira,} \\ \text{za } 0 \le D < 1, & \text{posmatrani red konvergira,} \\ \text{za } D = 1, & \text{nemamo odgovor po ovom kriterijumu.} \end{cases}$$

Dakle, ako je $|2x| < 1,$ tj. $|x| < \frac{1}{2}$ posmatrani red konvergira, dok za $|x| > \frac{1}{2}$ divergira. Ostaje jedino još pitanje šta se dešava u slučaju kada je $|2x| = 1,$ tj. kada je $x = \frac{1}{2}$ ili $x = -\frac{1}{2}$ I oni se posebno ispituju.
Za $x = \frac{1}{2}$, početni red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

koji je uslovno konvergentan na osnovu Lajbnivcovog kriterijuma.

Za $x = -\frac{1}{2}$, početni red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

koji je divergentan red (ovo je harmonijski red).

Dakle, oblast konvergencije polaznog reda je $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: konvergencija funkcionalnog reda.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 6

Stepeni redovi

POJAM

Među funkcionalnim redovima najznačajniji su stepeni redovi zbog svojih osobina.

Među funkcionalnim redovima najznačajniji su stepeni i trigonometrijski redovi, a među trigonometrijskim redovima najznačajniji su Furijeovi redovi. Stepene i Furijeove redove, kao i njihovu konvergenciju, ćemo posebno razmatrati. Ovde, najpre, govorimo o stepenim redovima.

Stepeni redovi ili potencijalni redovi imaju sve karakteristike iz opšte teorije funkcionalnih redova i još neke dodatne.

Naime, za funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $x \in \mathbb{R}$ kažemo da je potencijalni red ako je

$$f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$$

za $n \in \mathbb{N}$, gde je a_n niz realnih brojeva, a x_0 fiksirana vrednost iz $\mathbb{R}$ i x realna promenljiva.

U našem razmatranju posmatraćemo slučaj $x_0 = 0$, dok se slučaj $x_0 \neq 0$ može svesti na slučaj $x_0 = 0$, uvođenjem smene $x - x_0 = t$, gde je t nova realna promenljiva. Kada je $x_0 = 0$ takve stepene redove nazivamo centrirani stepeni redovi.

Zbog važnosti u primenama, posmatraćemo stepene redove kod kojih je prva vrednost za brojač $n = 0$, tj. posmatraćemo potencijalne redove oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

za $x \in \mathbb{R}$, gde je a_0 dodatni (prvi) član za već postojeći niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tj. imamo niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Treba napomenuti da se niz brojeva $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ naziva niz koeficijenata posmatranog reda. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ važi sve dosad izneto iz opšte teorije o redovima.

KRITERIJUM ZA KONVERGENCIJU STEPENIH REDOVA

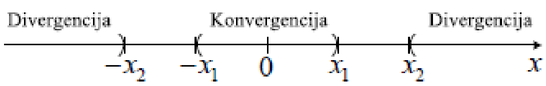
Najpoznatiji kriterijum za utvrđivanje konvergencije stepenih redova je Abelov kriterijum.

Svaki stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira barem za $x=0$, jer se svodi na vrednost a_0. Za ostale vrednosti $x \in \mathbb{R}$ posmatrani stepeni red može konvergirati ili ne (u zavisnosti od slučaja do slučaja). Postoje stepeni redovi koji ne konvergiraju ni za jedno $x \neq 0$.

Najpoznatiji kriterijum za utvrđivanje konvergencije potencijalnih redova je Abelov kriterijum.

Stav. (Abelov kriterijum) Neka je dat stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ako konvergira za $x_1 \in \mathbb{R}$, tada apsolutno konvergira za svako $x \in (-|x_1|, |x_1|)$. Ako divergira za $x_2 \in \mathbb{R}$, tada divergira za svako $x \in (-\infty, |x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$.

Grafički prikaz prethodnog stava, pod pretpostavkom da je $x_2 > x_1 > 0$, je dat na sledećoj slici.



Slika 6.1 Oblast konvergencije stepenog reda [Izvor: Autor].

Umesto Abelovog stava, u praksi se često koristi njegova posladica.

Stav. Neka je dat stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tada postoji $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ tako da dati stepeni red apsolutno konvergira na intervalu $(-R, R)$ i divergira na intervalu $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$.

Vrednost R se naziva poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Kada je R jednak $+\infty$, tada posmatrani stepeni red konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$. U slučaju da je $R = 0$, posmatrani stepeni red konvergira samo za $x = 0$. Prema prethodnom stavu za dati stepeni red razmatra se konvergencije za sve vrednosti $x \in \mathbb{R}$, osim za $x = R$ i $x = -R$. U tim slučajevima moramo dodatno uraditi sledeće: zameniti vrednost $x = R$ u datom stepenom redu i ispitati konvergenciju nastalog brojnog reda, a zatim isto uraditi i za $x = -R$. U slučaju da dati stepeni red konvergira u nekoj od pomenutih vrednosti, tu vrednost pridružujemo ostalim iz oblasti konvergencije tog stepenog reda.

METODOLOGIJE ZA ODREĐIVANJE POLUPREČNIKA KONVERGENCIJE

Poluprečnik konvergencije stepenog reda se određuje uz pomoć Dalmaberovog i Košijevog metoda.

Stav (Dalamberov metod). Neka je dat stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Takođe, neka je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in (0,+\infty)\cup\{+\infty\}.$$

Tada je $R=\frac{1}{l}$.

Napomena. Ovaj metod proističe iz Dalamberovog kriterijuma za konvergenciju brojnih redova.

Stav (Košijev metod). Neka je dat stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Takođe, neka je

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l \in (0,+\infty)\cup\{+\infty\}.$$

Tada je $R=\frac{1}{l}$.

Napomena. Ovaj metod proističe iz Košijevog korenog kriterijuma za konvergenciju brojnih redova.
Napomena. U slučaju obe metode kada je $l=0$, uzimamo $R=+\infty$, a kada je $l=+\infty$, uzimamo $R=0$.

Univerzalan metod za određivanje vrednosti za R je Koši-Ademarov metod i on u sebi kao specijalne slučajeve sadrži prethodna dva stava. U ovom slučaju važi da je

$$l = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

gde se koristi limes superior za određivanje veličine l. Tada je $R=\frac{1}{l}$.

Primećujemo da o konvergenciji stepenog reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ odlučuju samo koeficijenti tog reda.

PRIMERI

Određivanje poluprečnika i oblasti konvergencije stepenog reda.

Primer. Odrediti interval konvergenicije za sledeće stepene redove:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n-1)!} x^n$.

Rešenje. Za prvi red ćemo primeniti Dalamberov metod, pri čemu imamo da je $|a_n| = \dfrac{1}{n+1}$, $|a_{n+1}| = \dfrac{1}{n+2}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1,$$

pa imamo da je $R = 1$. Dakle, interval konvergencije je $(-1, 1)$. Ostaje da proverimo šta se dešava za $x = 1$ i $x = -1$.
Za $x = 1$ je dobijamo red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ koji je uslovno konvergentan red, po Lajbnicovom kriterijumu.
Za $x = -1$ imamo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$koji je divergentan red, kao harmonijski red. Dakle, interval konvergencije je $(-1, 1]$.

b) Za ovaj red ćemo, takođe, primeniti Dalamberov metod. Kako je $|a_n| = \dfrac{n}{(n-1)!}$, $|a_{n+1}| = \dfrac{n+1}{n!}$, važi da je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n-1)!}{n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0,$$

pa je i poluprečnik konvergencije $R = +\infty$. Dakle, interval konvergencije je $(-\infty, +\infty)$.

Primer. Za stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(2 - \frac{(-1)^n}{5}\right)^n x^n$ odrediti poluprečnik konvergencije.

Rešenje. U ovom slučaju nije moguće odrediti poluprečnik konvergencije primenom niti Dalamberove, niti Košijeve formule, s obzirom da odgvovarajuće granične vrednosti ne postoje. Međutim, kako je $a_n = \left(2 - \frac{(-1)^n}{5}\right)^n$ primenom Koši-Ademarove formule dobijamo

$$l = \limsup_{n\to\infty} \left(2 - \frac{(-1)^n}{5}\right) = \frac{11}{5},$$

pa je $R = \frac{5}{11}$.

UNIFORMNA KONVERGENCIJA STEPENIH REDOVA

Stepeni red je na proizvoljnom intervalu koji je podskup intervala konvergencije uniformno konvergentan i tada se može integraliti i diferencirati član po član.

Sada ćemo govoriti o uniformnoj konvergenciji za stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gde će R predstavlja poluprečnik (radijus) konvergencije.

Stav. Stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa poluprečnikom konvergencije R uniformno konvergira na segmentu $[a,b] \subset (-R,R)$, gde su a i b proizvoljni, takvi da važi $a < b$.

Sledeća dva stava imaju veliku praktičnu primenu, a posledica su uniformne konvergencije stepenih redova.

Stav. Ako je R poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tada je funkcija $S(x)$ koja predstavlja zbir stepenog reda, tj.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

neprekidna funkcija na svakom segmentu $[a,b] \subset (-R,R)$, gde su a i b proizvoljni, takvi da važi $a < b$.

Stav. Ako je R poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tada ovaj stepeni red na segmentu $[a,b] \subset (-R,R)$, gde su a i b proizvoljni, takvi da važi $a < b$, možemo proizvoljan broj puta integraliti i diferencirati, pri čemu se dobijaju redovi koji imaju poluprečnik konvergencije R.

Napomena. Konvergencija stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i redova koji nastaju njegovom integracijom ili diferenciranjem može da se razlikuje u tačkama $x = \pm R$. Na primer, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ može da bude divergentan u $x = R$, a red koji se dobija integracijom (ili diferenciranjem) konvergentan i obrnuto.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: diferenciranje stepenog reda član po član.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

Poglavlje 7

Tejlorovi redovi

TEJLOROVI KOEFICIJENTI

Maklorenova teorija je specijalni slučaj Tejlorove teorije i tada funkciju koju razvijamo kažemo da je razvijena u centrirani stepeni red.

U mnogim matematičkim disciplinama i tehničkim naukama često je potrebno neku posmatranu funkciju predstaviti jednostavnijim oblikom (recimo polinomom) koji je operativniji za rad.

Neka je data funkcija $y = f(x),\ x \in D(f)$. Ako postoji centrirani stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ čiji je poluprečnik konvergencije $R > 0$, tako da je $(-R, R) \subseteq D_f$ i da je

$$f(x) = S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

za $x \in (-R, R)$, tada za funkciju f kažemo da je analitička funkcija na $(-R, R)$. Klasu svih takvih funkcija na $(-R, R)$, označavamo sa ?$(-R, R)$.

Napomena. Svaka analitička funkcija po definiciji ima osobinu da se može predstaviti (razviti) nekim stepenim redom na domenu konvergencije tog stepenog reda.

Posmatrajmo još klasu beskonačno diferencijabilnih funkcija na $(-R, R)$, u oznaci $C^{\infty}(-R, R)$, za koje postoje izvodi funkcije bilo kog reda u svim tačkama intervala $(-R, R)$.

Stav. Neka je data funkcija $f \in$?$(-R, R)$ i neka je $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ za $x \in (-R, R)$. Tada važi da

1. $f \in C^{\infty}(-R, R)$.

2. $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Koeficijenti dati prethodnom formulom za posmatranu analitičku funkciju nazivaju se Tejlorovi koeficijenti, i oni da su jedinstveni. Stepeni red koji se kreira preko Tejlorovih koeficijenata naziva se Tejlorov red. Za posmatranu funkciju f on predstavlja jedinstven razvoj. Dakle, u ovom slučaju funkcija f se može razviti u red oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

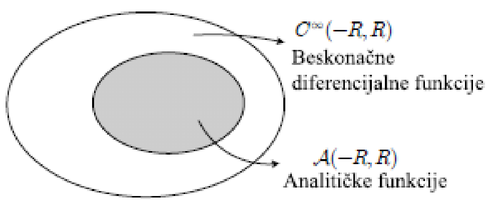
na $(-R, R)$.

Napomena. Činjenice na kojima smo zasnovali razvijanje funkcija date prethodnom formulom nazivamo osnovama Maklorenove teorije. Maklorenova teorija je specijalni slučaj Tejlorove teorije, kada posmatramo centrirani stepeni red i tada za funkciju koju razvijamo kažemo da je razvijena u okolini tačke 0 (nula).

KLASA BESKONAČNO DIFERENCIJABILNIH FUNKCIJA I KLASA ANALITIČKIH FUNKCIJA

Važi da je klasa analitičkih funkcija potklasa klase beskonačno diferencijabilnih funkcija.

U vezi sa prethodnom datim stavom potrebno je istaći da ako je $f \in C^{\infty}(-R, R)$, tada se može dokazati da za funkciju f ne mora da važi $f \in ?(-R, R)$, tj. važi da je $?(-R, R) \subset C^{\infty}(-R, R)$ (videti sliku). Drugim rečima, to znači da Tejlorov red funkcije za koju je $f \in C^{\infty}(-R, R)$, a ne važi $f \in ?(-R, R)$, nije obavezno konvergentan na $(-R, R)$ (osim u tački $x_0 = 0$ u kojoj je sigurno konvergentan). Dakle, u opštem slučaju ne može se svaka ovakva funkcija razviti u odgovarajući Tejlorov red.



Slika 7.1 Klasa analitičkih funkcija je podskup klase beskonačno diferencijabilnih funkcija [Izvor: Autor].

KARAKTERIZACIJA ANALITIČNOSTI BESKONAČNO DIFERENCIJABILNIH FUNKCIJA

Datim stavovima se može proveriti da li je neka beskonačno diferencijabilna funkcija, analitička.

Stav. Neka je data funkcija je $f \in C^{\infty}(-R, R), R > 0$. Tada je $f(x) \in ?(-R, R)$ ako i samo ako je

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right\} = 0$$

za svako $x \in (-R, R)$.

Napomena. Prethodni stav je veoma slab za operativnu upotrebu u zadacima i zato navedimo sledeća dva kriterijuma koji su njegove posledice – oni su dobri alati za rad u zadacima.

Stav. Neka je data funkcija $f \in C^{\infty}(-R, R),\ R > 0$ i neka je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ za $x \in (-R, R)$, njome kreiran stepeni red po Tejlorovom principu. Ako postoji niz nenegativan realnih brojeva $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i konstanta $B > 0$, tako da je

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n,$$

za $x \in (-R, R),\ n \in \mathbb{N}$, i da je

$$\frac{M_n B^n}{n!} \to 0,\ n \to \infty.$$

tada je $f \in ?(-R, R)$.
Sledeće tvrđenje je pojednostavljenje prethodnog stava i najčešće se koristi kao kriterijum u zadacima (najvažnije za određivanje konvergencije reda i da li je funkcija analitička).

Stav. Neka je data funkcija $f \in C^{\infty}(-R, R),\ R > 0$. Ako postoji broj $M > 0$, tako da je

$$|f^{(n)}(x)| \leq M,$$

za $x \in (-R, R),\ n \in \mathbb{N}$, tada je $f \in ?(-R, R)$.

Napomena. Prethodnim stavom se daje uslov pod kojim se funkcija $f \in C^{\infty}(-R, R),\ R > 0$ može razviti u Tejlorov red na sledeći način $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, za $x \in (-R, R)$.

MAKLORENOV RAZVOJ NEKIH ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Ovo su razvoji koji se najčešće koriste u primenama.

1. Za funkciju $f(x) = e^x$ poluprečnik konvergencije je $(-\infty, +\infty)$ i važi da je

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

2. Za funkciju $f(x) = \sin x$ poluprečnik konvergencije je $(-\infty, +\infty)$ i važi da je

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots,$$

3. Za funkciju $f(x) = \cos x$ poluprečnik konvergencije je $(-\infty, +\infty)$ i važi da je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots,$$

4. Za funkciju $f(x) = \ln(1+x)$ poluprečnik konvergencije je $(-1, 1]$ i važi da je

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

5. Za funkciju $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, poluprečnik konvergencije je $(-1, 1)$ i važi da je

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Specijalno, za $\alpha = -1$ imamo da je

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Ako u poslednjem razvoju zamenimo x sa $-x$ on postaje

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Za oba ova razvoja je poluprečnik konvergencije $(-1, 1)$.

TEJLOROV RED

Maklorenov red je samo specijalni slučaj Tejlorove teorije redova.

Opšta Tejlorova teorija redova je potpuno analogna Maklorenovoj teoriji, s tim što se u tom slučaju posmatra stepeni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Ako je R poluprečnik konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tada prethodni red konvergira u intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$. Na analogan način prethodno izloženom, neka funkcija f može se razviti u stepeni red po stepenima $x - x_0$, tj.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

za $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Tada za koeficijente ovog razvoja važi $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, pa se posmatrana funkcija f može razviti u red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Izloženo o klasi beskonačno diferencijabilnih i klasi analitičkih funkcija važi i ako se pomatraju Tejlorovi redovi iz prethodne napomene, za koje je $x_0 \neq 0$, samo što se tada posmatraju intervali $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Međutim, ovde ćemo mahom izučavati Maklorenovu teoriju zbog njene primene u nematematičkim problemima, koje ovaj deo matematike modelira.

MAKLORENOV POLINOM

Pitanje konvergencije Tejlorovog reda može se razmatrati primenom Tejlorove polinoma za datu funkciju.

Pitanje konvergencije Tejlorovog reda može se razmatrati primenom Tejlorove polinoma za datu funkciju

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

gde je Tejlorov polinom $n-$ tog reda (u Maklorenovom obliku) dat sa

$$T_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

a ostatak $n-$ tog reda (u Maklorenovom obliku) dat sa:

$$R_n(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots$$

Prethodno znači da mi možemo određenu funkciju f aproksimirati polinomom $T_n(x)$, pri čemu činimo grešku koja je jednaka ostatku $R_n(x)$. Prilikom vršenja aproksimacije određene funkcije Tejlorovim polinom mogu se javiti određeni zahtevi. Na primer, da se funkcija aproksimira polinom tačno određenog stepena i da se za takvu aproksimaciju odredi greška koja je tom prilikom načinjena. U vezi sa ovim od interesa su razni oblici ostatka $R_n(x)$, o kojima student može pogledati 14. predavanje iz MA101. Drugi zahtev može biti da se određena aproksimacija vrši sa unapred zadatom greškom, odnosno postavlja se pitanje do kog stepena Tejlorovog polinoma izvršiti aproksimaciju određene funkcije, a da greška aproksimacije ne bude veća od unapred zadate greške. U ovakvim situacijama često se u zadacima koristi procena $R_n(x) < |a_{n+1}|$.

PRIMER 1. DEO

Primena Maklorenovog razvoja funkcije na određivanje približne vrednosti određenog integrala.

Izračunati vrednost određenog integrala $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$, sa greškom manjom od 10^{-3}.

Rešenje. Razvijmo, najpre, funkciju e^{-x^2} u red. Poznato je da važi

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!},$$

za $x \in (-\infty, +\infty)$. Tada je

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!},$$

za $x \in (-\infty, +\infty)$. Tada je

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} x^{2k+1}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}.$$

Da bismo odredili približnu vrednost datog određenog integrala, sa greškom manjom od 10^{-3} , potrebno je izvršiti razvijanje dobijenog alternativnog reda do određenog člana, tako da postavljena tačnost bude zadovoljena. Postavlja se pitanje koliko prvih članova ovog reda treba uzeti? Poznato je da za ostatak R_k i prvi zanemareni član a_{k+1} nekog konvergentnog alternativnog reda važi $|R_k| < |a_{k+1}|$, za svako $k \in \mathbb{N}$.

U našem slučaju je $|a_k| = \dfrac{1}{(2k+1)k!}$, pa je $|a_{k+1}| = \dfrac{1}{(2k+3)(k+1)!}$, $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Stoga, treba da odredimo najmanje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ za koje je zadovoljena nejednakost

$$|a_{k+1}| = \frac{1}{(2k+3)(k+1)!} < 10^{-3}.$$

PRIMER 2. DEO

Određivanje do kog člana treba raviti funkciju u polinom kako bi se postigla željena tačnost.

Na ovaj način smo sigurni da će onaj deo reda koji zanemarujemo tj. ostatak reda biti manji od 10^{-3}, jer važi $|R_k| < |a_{k+1}|$, pa će samim tim i greška koju činimo biti manja od 10^{-3}. Tada imamo

1° Za $k = 0$ je $|a_1| = \frac{1}{3 \cdot 1!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

2° Za $k = 1$ je $|a_2| = \frac{1}{5 \cdot 2!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

3° Za $k = 2$ je $|a_3| = \frac{1}{7 \cdot 3!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

4° Za $k = 3$ je $|a_4| = \frac{1}{9 \cdot 4!} > 0,001$, pa prethodna nejednakost ne važi.

5° Za $k = 4$ je $|a_5| = \frac{1}{11 \cdot 5!} < 0,001$, pa prethodna nejednakost važi.

Dakle, počev od člana a_5 možemo da zanemarimo ostale članove posmatranog reda, pri čemu dobijemo željenu tačnost. Tada je

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} =$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0,747.$$

UNIVERZITET METROPOLITAN BEOGRAD

MA202 - MATEMATIKA 2

Furijeovi redovi

Lekcija 12

PRIRUČNIK ZA STUDENTE

Uvod

UVOD

Furijevi redovi

Kao što smo videli iz prethodne dve lekcije, osnovna primena Teorije redova je u tome da se njima može približno izraziti neka funkcija odgovarajućim polinom, ili približno izračunati neka vrednosti uz kontrolu greške koju pritom činimo.

Ideja francuskog matematičara Furijea je bila da polazeći od funkcija $f(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ koje su neparne funkcije (tj. $\sin(-nx) = -\sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$), periodične funkcije (tj. $\sin(nx + 2\pi) = \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) i za koje važi $\sin n\pi = \sin 0\pi = 0$, posmatramo beskonačnu sumu njihovih linearnih kombinacija

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots b_n \sin nx + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

On je dokazao da, pod određenim uslovima za koeficijente $b_n, n = 1, 2, 3, \ldots$, prethodna beskonačna suma ima konačni zapis u obliku funkcije $S(x)$. Štaviše, za ovu funkciju će, takođe, važiti da je $S(-x) = S(x)$, $S(x + 2\pi) = S(x)$ i $S(0) = S(\pi) = 0$. To dalje znači da se bilo koja funkcija koja ima prethodno pomenute tri osobine može razviti u red po sinusnim funkcijama. Ovaj rezultat je izazvao veliko interesovanje, tako da je ova oblast intenzivno izučavana poslednjih 200 godina. Danas, Furijeovi redovi predstavljaju beskonačne sume linearnih kombinacija po kosinusnim i sinusnim funkcijama i zbog toga se nazivaju trigonometrijskim redovi. Šire gledano, oni spadaju u funkcionalne redove. Trigonometrijski redovi predstavljaju izuzetno važan pojam u matematici i tehničkim naukama i glavni su objekti čuvene Furijeove analize. Za njih važi sve izneto iz opšte teorije funkcionalnih redova, kao i neki specifičnosti koje ćemo u ovoj lekciji razmatrati.

Glavni deo razmatranja u ovoj lekciji biće posvećen funkcijama koje su sa osnovnom periodom 2π. Neka manja razmatranja daćemo i za funkcije sa drugačijom osnovnom periodom.

Na kraju ove lekcije ćemo se upoznati sa Furijeovom transformacijom koja predstavlja uopštenje – granični slučaj Furijeovih redova, kao i sa inverznom Furijeovom transformacijom koja predstavlja uopštenje Furijeovih koeficijenata.

Kroz celu ovu lekciju će se provlačiti pojmovi periodičnost funkcije, kao i pojam ortogonalnost funkcija. Najpre, ćemo se podsetiti pojma periodičnosti funkcije (sa kojim ste se susretali u dosadašnjem školovanju), a onda uvesti i pojam ortogonalnih funkcija.

Poglavlje 1

Periodične funkcije

POJAM

Trigonometrijski redovi su poseban oblik funkcionalnih redova.

Mnogi procesi u prirodi su periodičnog karaktera i opisuju se periodičnim funkcijama. Na primer, postoje procesi koji se u pravilnim vremenskim razmacima ponavljaju.

Definicija. Neka je data funkcija $y = f(x)$, za $x \in D_f$, gde je D_f domen date funkcije. Za f kažemo da je periodična funkcija ako postoji $T > 0$, tako da je

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x),$$

za svako $x \in D_f$. Primećujemo da domen D_f kod periodične funkcije ne može biti ograničen ni odozdo, niti odozgo.

Veličina T iz prethodne definicije se naziva perioda funkcije f. Ako je T perioda funkcije, tada je i nT, $n \in \mathbb{Z}$ takođe perioda te funkcije. Takođe, ako su T_1 i T_2 periode posmtrane funkcije i ako su $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$,tada važi da je perioda posmtrane funkcije $k_1 \cdot T_1 + k_2 \cdot T_2$.Prema tome, svaka periodična funkciju ima beskonačno mnogo perioda.
Prirodno se postavlja sledeće pitanje: da li svaka periodična funkcija ima najmanju pozitivnu periodu? Odgovor je u opštem slučaju negativan. O tome pod kojim uslovom neka periodična funkcija ima najmanju periodu govori naredni stav.

Stav. Ako je neprekidna periodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ različita od konstantne funkcije, tada ona ima najmanju periodu.

Najmanja pozitivna perioda neke funkcije naziva se osnovna perioda funkcije f, u oznaci T_0 i definiše se na sledeći način

$$T_0 = \inf\{T \mid T \text{ je perioda od } f\}.$$

Stav. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična sa osnovnom periodom T_0. Ako je funkcija f integrabilna u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu na segmentu $[0, T_0]$, tada je ona integrabilna na svakom konačnom segmentu realne prave. Pri tome važi

$$\int\limits_a^{a+T_0} f(x)dx = \int\limits_0^{T_0} f(x)dx,$$

za svako $a \in \mathbb{R}$.

PRIMERI

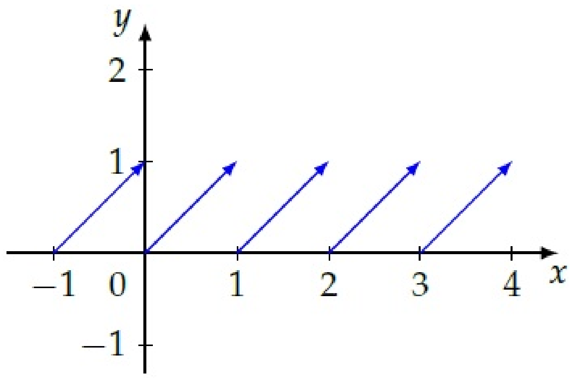
Primeri periodičnih funkcija.

Trigonometrijske funkcije $f(x)=\sin x$ i $f(x)=\cos x$ su periodične s osnovnom preiodom $T_0=2\pi$.

Funkciju, u oznaci $\{x\}$, nazivamo razlomljeni deo realnog broja $x=n+z$, gde je $n\in\mathbb{Z}, 0\leq z<1,$ pri čemu važi $\{x\}=z$. Važi da je $\{n\}=0$, za $n\in\mathbb{Z}$. Primenjujući funkciju ceo deo na realni broj x, u oznaci $\lfloor x\rfloor$, pri čemu je $\lfloor x\rfloor=n, n\in\mathbb{Z}$ možemo definisati razlomljeni deo realnog broja x na sledeći način

$$\{x\}=x-\lfloor x\rfloor,$$

svako $x\in[n,n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$. Na narednoj slici je dat njen grafik, odakle vidimo da je ova funkcija periodična. Kako važi da je $\{x+1\}=\{x\}$ i ne postoji manji realan broj za koji ovo važi, zaključujemo da je broj 1 osnovna perioda funkcije razlomljeni deo.



Slika 1.1 Funkcija razlomljeni deo [Izvor: Autor].

Funkcija

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

se naziva Dirihleova funkcija.

Primetimo da je ova funkcija periodična, jer za svaki racionalan broj q važi da je $f(x+q)=f(x)$, bilo da je x racionalan broj (jer je zbir dva racionalna opet racionalan broj), bilo da je x iracionalan broj (jer je zbir iracionalnog i racionalnog broja iracionalan broj). Međutim, ne postoji najmanji pozitivan racionalan broj q za koji važi $f(x+q)=f(x)$, tako da Dirihleova funkcija nema osnovnu periodu.

Poglavlje 2

Ortogonalnost funkcija

POJAM

Ortogonalnost funkcija je bitan pojam prilikom definisana Furijeovih redova.

Sada ćemo uvesti pojam ortogonalnost funkcija.

Posmatrajmo funkcije $y=f(x)$ i $y=g(x)$, za $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}$. Za funkcije f i g kažemo da su međusobno ortogonalne ako su one neprekidne funkcije na $[a,b]$ i ako važi:

$$1. \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=0,$$

$$2. \int_a^b f^2(x)\neq 0 \text{ i } \int_a^b g^2(x)\neq 0.$$

Posmatrajmo niz funkcija $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}},$ za $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}$. Za taj niz kažemo da čini sistem međusobno ortogonalnih funkcija ako je:

$$1. \int_a^b f_i(x)\cdot f_j(x)dx=0, \text{ za } i\neq j,\ i,j\in\mathbb{N},$$

$$2. \int_a^b f_i^2(x)\neq 0, \text{ za svako } i\in\mathbb{N}.$$

SISTEM ORTOGONALNIH FUNKCIJA. PRIMER

Sistem funkcija $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \dots$, je sistem ortogonalnih funkcija na svakom intervalu dužine 2π.

Sistem ortogonalnih funkcija na nekom intervalu, jeste skup linearno nezavisnih funkcija kod koga su svake dve funkcije tog sistema ortogonalne na posmatranom intervalu.

Primer. Istorijski gledano, prvi i najvažniji ortogonalni sistem funkcija je sistem $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots$, za $x \in [-\pi, \pi]$. Da je on zaista ortogonalan važi iz sledećeg

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

za $m \neq n$. Slično, može se pokazati da važi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad \text{i} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0,$$

za $m \neq n$.

Može se pokazati da je sistem funkcija $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots,$ ortogonalan i na intervalu $x \in [0, 2\pi]$ ili još opštije on je ortogonalan na svakom intervalu dužine 2π.

Dalje, ako svaku od funkcija $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, ..., za $x \in [-\pi, \pi]$, rastegnemo ili sabijemo duž x -ose sa koeficijentom $\dfrac{l}{\pi}$, $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dobijamo sistem funkcija

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots,$$

za $x \in [-l, l]$, koji je na ovom intervalu ortogonalan.

Osobinu ortogonalnosti imaju mnogi sistemi funkcija, ali o tome ovde neće biti reči.

Napomena. Od bilo kog sistema linearno nezavisnih funkcija, može se konstruisati sistem ortogonalnih funkcija koji zadovoljava prethodno date uslove $1.$ i $2.$ Taj postupak se naziva ortogonalizacija sistema funkcija.

REDOVI ORTOGONALNIH FUNKCIJA

Uslovi pod kojima je moguće određenu funkciju razviti u red po ortogonalnim funkcijama.

Neka je dati sistem funkcija

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$$

ortogonalan na intervalu $x \in (a, b)$. Može se postavi pitanje da li se proizvoljna funkcija $f(x)$ može razviti u red na zadatom intervalu po prethodno datim funkcijama, tj. razviti u konvergentan red oblika

$$f(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \ldots + a_n g_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x),$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ realni ili kompleksni brojevi. Tada se postavljaju i dva dodatna pitanja, da li je moguće svaku funkciju $f(x)$ razviti na ovaj način i kako odrediti koeficijente $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$,tako da ovaj razvoj važi. Radi jednostavnosti izlaganja pretpostavimo da je interval (a, b) konačan (tj. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$) i da su sve posmatrane funkcije konačne na njemu.

Ako je prethodni razvoj moguć za svaku funkciju $f(x)$, tada se sistem $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$ naziva potpun sistem. Može se dokazati da je svaki ortogonalni sistem funkcija potpun sistem.

Nalaženje koeficijenata $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$se obavlja tako što izraz

$$f(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \ldots + a_n g_n(x) + \ldots$$

pomnoži sa $g_n(x)$ (pod pretpostavkom da je $g_n(x) \neq 0$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$). Tada integraljenjem dobijene jednačine na intervalu (a, b) dobijamo da je

$$\int_a^b f(x) g_n(x) dx = a_1 \int_a^b g_1(x) g_n(x) dx + a_2 \int_a^b g_2(x) g_n(x) dx + \ldots + a_n \int_a^b g_n(x) g_n(x) dx + \ldots =$$
$$= a_n \int_a^b g_n(x) g_n(x) dx,$$

zbog ortogonalnosti funkcija $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$ Tada imamo da je

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) g_n(x) dx}{\int_a^b g_n(x) g_n(x) dx}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Poglavlje 3

Furijeov red periodične funkcije sa periodom 2π

TRIGONOMETRIJSKI REDOVI

Razvoj funkcije u trigonometrijski red.

Posmatrajmo ponovo sistem funkcija $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ za $x \in [-\pi, \pi]$. Proizvoljnu konačnu funkciju $f(x)$ definisanu na intervalu $[-\pi, \pi]$ možemo da razvijemo u red oblika

$$f(x) = a_1 + a_2 \cos x + a_3 \sin x + a_4 \cos 2x + a_3 \sin 2x + \ldots$$

Kako bismo olakšali rad, promenićemo oznake koeficijentima u prethodnom razvoj i predstaviti ih na sledeći način

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned}$$

Ove koeficijente određujemo na sledeći način

$$a_n = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gde je

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi.$$

Neka red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konvergira u nekoj oblasti $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ i označimo njegovu sumu sa $S(x)$, za $x \in A$. Pošto je $S(x)$, $x \in A$, zbirna funkcija ovog reda, ona mora takođe biti 2π -periodična (jer su takvi svi sabirci u datom trigonometrijskom redu). Odnosno, mora da važi $S(x+2\pi) = S(x-2\pi) = S(x)$, za $x \in A$, pa skup A ne može biti ograničen skup (niti odozgo, niti odozdo) u $\mathbb{R}$. Kažemo da se neka funkcija $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ može razviti u trigonometrijski red, ako postoji red prethodno datog oblika koji konvergira na celoj realnoj osi $\mathbb{R}$ i čiji je zbir jednak datoj funkciji $f(x)$.

Stav. Ako su brojni redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergentni, tada je trigonometrijski red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

apsolutno i uniformno konvergentan funkcionalni red, za svako $x \in \mathbb{R}$.

FURIJEOV RED PERIODIČNE FUNKCIJE SA PERIODOM 2π

Za 2π -periodičnu funkciju dat je postupak kako se ona može razviti u trigonometrijski red.

Stav. Neka je data 2π -periodična funkcija $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Takođe, neka je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

za svako $x \in \mathbb{R}$ i neke realni brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ i $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ Takođe, pretpostavimo da trigonometrijski red iz datog razvoja uniformno konvergira za $[-\pi, \pi]$. Tada je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, ako posmatramo funkciju $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, koja je 2π -periodična i neprekidna funkcija na intervalu $[-\pi, \pi]$, za koju važi da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

tada se trigometrijski red, dat na desnoj strani prethodne formule, naziva Furijeov red funkcije $f(x)$. Koeficijenti a_n $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ i b_n $(n \in \mathbb{N})$ koji se jednoznačno određuju formulama datim u prethodnom stavu, tako da ovaj razvoj važi, nazivaju se Furijeovi koeficijenti .

Furijeova konstrukcija za određivanje koeficijenata $a_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $b_n,\ n \in \mathbb{N}$ iz prethodnog stava jedino ima smisla za formiranje odgovarajućeg trigonometrijskog reda (Furijeovog reda) ako želimo da razmatramo pitanje razvoja polazne funkcije f u taj trigonometrijski red.

Za egzistenciju Furijeovih koeficijenata određenih datim formulama dovoljno je da funkcija f bude apsolutno integrabilna na segmentu $[-\pi, \pi]$. Pri tome se za svaku apsolutno integrabilnu funkciju smatra da je integrabilna u svojstvenom smislu na svakom konačnom intervalu koji ne sadrži tačke u odnosu na koje je taj integral nesvojstven.

ŽORDAN-DIRIHLEOV KRITERIJUM

Za razvoj 2π -periodične funkcije $y = f(x)$ u Furijeov red, ne postoji potreban i dovoljan uslov (oblika ako i samo ako), već mnogo uporedivih (i neuporedivih) potrebnih uslova.

Ako za polaznu funkciju kreiramo njoj odgovarajući Furijeov red, postavlja se pitanje da li se taj trigonometrijski red mora poklopiti sa polaznom funkcijom za svako $x \in \mathbb{R}$, ili ne, tj. da li će važiti $S(x) = f(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Odgovor na ovo pitanje ne mora biti potvrdan bez dodatnih uslova.

Za pitanje razvoja 2π -periodične funkcije f u odgovarajući Furijeov red na skupu $\mathbb{R}$, ne postoji potreban i dovoljan uslov (oblika ako i samo ako), već mnogo uporedivih (i neuporedivih) potrebnih uslova. U daljem razmatranju navešćemo jedan od njih.

Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je deo po deo monotona na intervalu $[-\pi, \pi]$ ako postoji konačan broj tačaka x_0, x_1, ... , x_n, $n \in \mathbb{N}$, takvih da je

$$-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \pi,$$

pri čemu je funkcija f monotona, tj. nerastuća ili neopadajuća na intervalima $[x_i, x_{i+1})$, za $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Stav (Žordan-Dirihleov kriterijum). Neka je data 2π -periodična funkcija $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, i neka je deo po deo monotona i ograničena na $[-\pi, \pi]$. Tada njen Furijeov red konvergira u svakoj tački tog integrala. Zbir odgovarajućeg Furijeovog reda

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ispunjava sledeće uslove:

1. ako je funkcija f neprekidna u tački $x \in (-\pi, \pi)$, tada je $f(x) = S(x)$;

2. ako funkcija f ima prekid prve vrste u tački $x_0 \in (-\pi, \pi)$, tada je

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0+} f(x) + \lim_{x \to x_0-} f(x)\right);$$

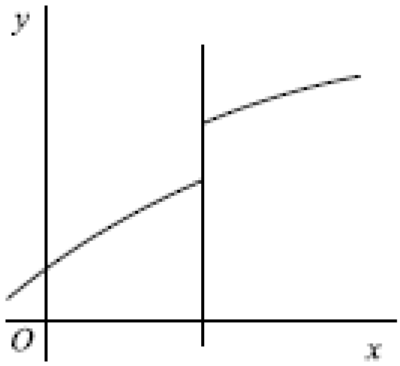
3. važi da je

$$S(\pi)=S(-\pi)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi_+} f(x)+\lim_{x\to\pi_-} f(x)\right).$$

BITNE NAPOMENE

Prethodni stav predstavlja osnovni alat za rešavanje zadataka – naročito primena dela tvrđenja pod 1.

Uslov iskorišćen u prethodnom stavu (da je funkcija $y=f(x)$ deo po deo monotona funkcija) je specijalan slučaj uslova ograničene varijacije posmatrane funkcije. Posmatrani uslov (deo po deo monotona funkcija) nam ukazuje na to da posmatranu funkciju možemo integraliti u formulama za određivanje koeficijenata $a_n(n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ i $b_n(n\in\mathbb{N})$ i ukazuje na to da funkcija može imati samo prekide prve vrste (videti sliku).



Slika 3.1 Primer funkcije koja ima prekid prve vrste [Izvor: Autor].

Žordan-Dirihleov kriterijum ništa ne govori o funkciji $y=f(x)$ van segmenta $[-\pi,\pi]$, tj. ona ne mora biti $2\pi-$ periodična funkcija, čak ne mora biti ni definisana van ovog intervala. Govorili smo već tome da se u ovom slučaju može napraviti ekstenzija funkcije $f(x)$ tako da postane $2\pi-$ periodična funkcija. Ako funkciju $f(x)$ periodično produžimo tako da ona postane $2\pi-$ periodična, Žordan-Dirihleov kriterijum tada važi za svako $x\in\mathbb{R}$. Da bi produženje bilo jednoznačno, funkcija $f(x)$ se najčešće ne zadaje na segmentu $[-\pi,\pi]$, nego na intervalima $(-\pi,\pi]$, $[-\pi,\pi)$, ili $(-\pi,\pi)$, tim pre što u opštem slučaju važi $F(\pi)\neq f(-\pi)$. Žordan-Dirihleov kriterijum može se analogno sprovesti za bilo koju $l-$ periodičnu funkciju $(l>0)$, o čemu ćemo govoriti kasnije.

FURIJEOV RAZVOJ PARNIH I NEPARNIH 2π - PERIODIČNIH FUNKCIJA

Specijalni slučajevi za određivanje koeficijenata u Furijeovom razvoju se dešavaju kada je posmatrana funkcija parna ili neparna.

Specijalni slučajevi prethodno navedenih formula za određivanje koeficijenata $a_n,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ i $b_n,\ n\in\mathbb{N}$, prilikom razvoja neke funkcije u Furijeov red na segmentu $[-\pi,\pi]$ nastaju kada je $f(x)$ parna, odnosno neparna funkcija.

Neka je $f(x)$ parna funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$ i neka zadovoljava Žordan-Dirihleov kriterijum. Tada je funkcija $f(x) \cdot \cos nx$ parna, a $f(x) \cdot \sin nx$ neparna, pa imamo da važi

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx, \; a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \; b_n = 0, \; n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je razvoj parne funkcije $f(x)$ u Furijeov red je oblika

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

gde se koeficijenti a_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, određuju po prethodno datim formulama. Ovakav red se naziva Furijeov kosinusni red.

Neka je, sada, $f(x)$ neparna funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$ i neka zadovoljava Žordan-Dirihleov kriterijum. Tada je funkcija $f(x) \cdot \cos nx$ neparna, a $f(x) \cdot \sin nx$ parna, pa imamo da važi

$$a_0 = 0, \; a_n = 0, \; b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx, \; n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je razvoj neparne funkcije $f(x)$ u Furijeov red je oblika

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

gde se koeficijenti b_n $(n \in \mathbb{N})$, određuju po prethodno datim formulama. Ovakav red se naziva Furijeov sinusni red.

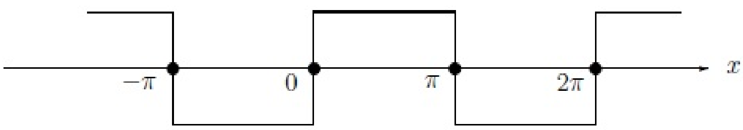
PRIMER

Primena Furijeovog sinusnog reda.

Jedan od najvažnijih primena Furijeov sinusnog reda, jeste razvoj funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi \vee x = 0 \vee x = \pi. \end{cases}$$

u njega. Ova funkcija se naziva " neparni kvadratni talas " (odd square wave) i njen grafik je prikazan na sledećoj slici.



Slika 3.2 Neparni kvadratni talas [Izvor: Autor].

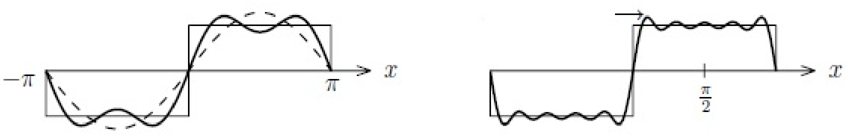
Odredimo koeficijente b_n, $n \in \mathbb{N}$ za razvoj funkcije f u Furijeov sinusni red. Tada je

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\cos nx}{n}\Big)\Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{2}{n\pi}(-\cos n\pi + 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Tada dobijamo da je

$$
f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \dots\right)
$$

Kao što smo ranije govorili, što uzimamo više članova reda iz dobijene sume, time je aproksimacija sve tačnija i tačnija, što je prikazano na narednoj slici. Na slici levo isprekidanom linijom je aproksimirana funkcija f izrazom $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin x}{1}$, dok je punom linijom predstavljena njena aproksimacija sa $\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3}\right)$. Na datoj slici desno, aproksimacija je izvršena izrazom $\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9}\right)$.



Slika 3.3 Aproksimacija funkcije Furijeovim redom [Izvor: Autor].

U vezi sa aproksimaranjem prekidnih funkcija (tačnije rečeno onih koje imaju prekid prvog reda) Furijeovim redom, javlja se tzv. Gibsov fenomen. On se javlja u okolini tačke u kojoj funkcija ima prekid, u smislu da aproksimacija ima najveće odstupanje u okolini te tačke u odnosu na posmatranu funkciju. To odstupanje nekada može biti značajno, čak i kada se aproksimacija vrši većim brojem članova u parcijanoj sumi. Na datoj slici desno na Gibsov fenomen je ukazano strelicom.

Poglavlje 4

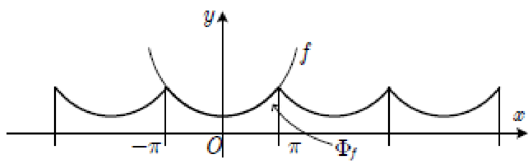
Furijeov razvoj drugih tipova funkcija

RAZVOJ FUNKCIJE KOJA NIJE 2π PERIODIČNA FUNKCIJA

2π -periodična ekstenzija funkcije f sa intervala $[-\pi, \pi)$ na skup $\mathbb{R}$.

Pretpostavimo sada da je data funkcija $y = f(x),\ x \in R$, koja nije 2π -periodična. Za takvu funkciju ne može se sprovesti Furijeova konstrukcija direktno, ali se može uraditi sledeće: za funkciju f na intervalu $[-\pi, \pi)$ se formira funkcija $\Phi_f(x),\ x \in \mathbb{R}$, tako da je $\Phi_f(x) = f(x)$ za $x \in [-\pi, \pi)$ i da je $\Phi_f(x)$ za $x \in \mathbb{R}$, 2π -periodična funkcija (videti sliku). Funkcija $\Phi_f(x),\ x \in \mathbb{R}$, naziva se " 2π -periodična ekstenzija funkcije f sa intervala $[-\pi, \pi)$ ".

Za ovakvu ekstenziju možemo sprovesti kompletnu Furijeovu konstrukciju. Ako iz ove konstrukcije dobijemo razvoja funkcije $\Phi_f(x)$ preko Furijeovog reda, to će biti razvoj i za funkciju f u intervalu $[-\pi, \pi)$.



Slika 4.1 2π -periodična ekstenzija funkcije f sa intervala $[-\pi, \pi)$ na skup $\mathbb{R}$ [Izvor: Autor].

RAZVOJ U FURIJEOV RED FUNKCIJE NA INTERVALU $[0, \pi]$

Parno i neparno produženje funkcije.

Neka je data ograničena deo po deo monotona funkcija $f(x)$ na intervalu $[0, \pi]$ Ako ovu funkciju na izvestan način možemo produžiti na interval $[-\pi, 0]$ tako da na njemu funkcija $f(x)$ bude, takođe, ograničena deo po deo monotona, tada je nju na intervalu $[-\pi, \pi]$ razviti u Furijeov red. Videli smo da je Furijeov razvoj neke funkcije kosinusni, ako je ta funkcija parna, a sinusni ako je ona neparna na segmentu $[-\pi, \pi]$. Zato bi trebalo produženje funkcije $f(x)$ na intervalu $[-\pi, 0)$ vršiti tako da novodobijena funkcija bude parna, odnosno neparna.

Parno produženje funkcije $f(x)$ je funkcija

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

i tako dobijena funkcija zadovoljava sve uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, a odgovarajući Furijeov red će sadržati samo kosinuse.

Neparno produženje funkcije $f(x)$ je funkcija

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Ovako dobijena funkcija zadovoljava sve uslove Žordan-Dirihleovog kriterijuma, a odgovarajući Furijeov red će sadržati samo sinuse.

FURIJEOV RED FUNKCIJE NA INTERVALU $[0, l]$, $l > 0$

Moguće je funkciju koja je periodična, sa nekom periodom $2l$, razviti u Furijeov red.

Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ periodična funkcija sa periodom $2l$ $(l > 0)$. Da bismo ovu funkciju razvili u Furijeov red na intervalu $[-l, l]$, izvršićemo smenu promenljive tako da je $x = \dfrac{lt}{\pi}$. Tada je funkcija $F(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ periodična po promenljivoj t i njena perioda je je jednaka 2π. Naime, imamo da je

$$F(t + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = F(t).$$

Stoga, funkcija $F(t)$ se pod uslovima Žordan-Dirihleovog kriterijuma može razviti u Furijeov red na interval $[-\pi, \pi]$. Tada je

$$F(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

pri ovome važi da je

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ntdt,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin ntdt,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ako vratimo promenljivu x, tj. izrazimo t iz date smene, imamo $t = \frac{\pi x}{l}$, tj. $dt = \frac{\pi dx}{l}$, pa ukupno dobijamo da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}) \qquad (*)$$

gde se Furijeovi koeficijenti računaju po formulama

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 0,1,2,3,\ldots \qquad (**)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1,2,3,\ldots \qquad (***)$$

Napomena. U ovom slučaju se, zapravo, koristi ortogonalni sistem funkcija $1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},$ ..., prilikom kreiranja trigonometrijskog reda.

Napomena. U ovom slučaju se može desiti da posmatrana funkcija $2l$ -periodična bude parna ili neparna funkcija, pa se mogu konstruisati Furijeovi koeficijenti za takve slučajeve, na potpuno analogan način kao što smo to uradili za 2π -periodične funkcije.

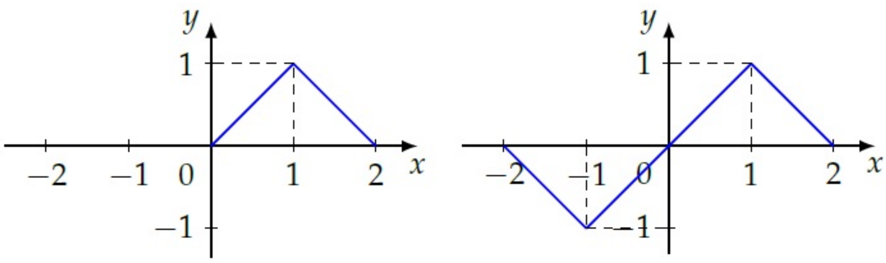
PRIMER

Furijeov red funkcije proizvoljne periode koja ima neparano produženje.

Razviti u sinusni red funkciju, definisanu sa

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2-x, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Rešenje. Grafik ove funkcije je na slici dat s leve strane. Primetimo da data funkcija ima neparno produženje na intervalu $[-2,0]$ što je prikazano na datoj slici s desne strane. U ovom slučaju je $l = 2$.



Slika 4.2 Funkcija f i njeno neparno produženje [Izvor: Autor].

Datu funkciju možemo, svakako, sada da produžimo na celu brojevnu osu sa osnovnom periodom $2l$, tj. 4. Koristimo formule (**) i (***) za izračunavanje Furijeovih koeficijenata, u slučaju kada je $l = 2$. S obzirom da se radi o neparnom produženju polazne funkcije, dobijamo da je $a_k = 0$, za $k = 0,1,2,\ldots$ i

$$b_k = \int_0^1 x \sin \frac{k\pi x}{2}\, dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{k\pi x}{2}\, dx, k \in \mathbb{N}.$$

U ove integrale, ćemo najpre uvesti smenu $\frac{\pi x}{2} = t$, odakle je $x = \frac{2t}{\pi}$, tj. $dx = \frac{2}{\pi} dt$. Iz smene imamo da za $x = 0$ je $t = 0$, za $x = 1$ je $t = \frac{\pi}{2}$, dok za $x = 2$ je $t = \pi$. Prethodni integral, tada postaje

$$b_k = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin kt\, dt + \frac{4}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t) \sin kt\, dt =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin kt\, dt + \frac{4}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin kt\, dt, -\frac{4}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \sin kt\, dt, k \in \mathbb{N}.$$

Prvi i treći integral se rešavaju metodom parcijalne integracije, dok se drugi integral može direktno rešiti, što se ostavlja studentu za vežbu. Dobijamo da je

$$b_k = \frac{8}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, traženi sinusni red, prema (*), glasi

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \cdot \sin \frac{k\pi x}{2}}{k^2} =$$
$$= \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{2} - \dots \right).$$

VIDEO KLIP 1

Snimak sa Youtube-a: Furijeov red za funkciju periode 2.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

FURIJEOV RAZVOJ FUNKCIJE NA PROIZVOLJNOM INTERVALU

Uopštavanjem prethodno datog razvoja, može se izvršiti razvoj funkcije na proizvoljnom intervalu.

Opštije, analognim postupkom se može dobiti Furijeov razvoj funkcije $f(x)$ na proizvoljnom intervalu $[\alpha, \beta]$. Tada važi da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} \right)$$

gde se Furijeovi koeficijenti računaju po formulama

$$a_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} dx,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Poglavlje 5

Furijeova transformacija

UVOD

Furijeova transformacija ima primenu u mnogim oblastima nauke i inženjerstva.

Sada ćemo proučiti Furijeovu transformaciju i njen inverz. Furijeova transformacija se može shvatiti kao neprekidni oblik Furijeovog reda. Naime, Furijeov red razlaže funkciju definisanu na intervalu $[-\pi, \pi]$, na komponente koje osciluju s celobrojnom periodom. S druge strane, Furijeova transformacija razlaže funkciju definisanu na celoj realnoj pravoj, na komponente s periodama koje mogu biti bilo koji realni ili kompleksni broj.

Metode zasnovane na Furijeovoj transformaciji imaju raznoliku primenu u svim oblastima nauke i inženjerstva. Furijeova transformacija se koristi u obradi signala, na primer prilikom kompresije slike ili digitalnog audio-zapisa. Sem toga, može pomoći u rešavanju diferencijalnih jednačina ili u praćenju dinamike tržišta i berze.

KOMPLEKSAN OBLIK FURIJEOVOG REDA

Sa datog oblika Furijeovog reda može se preći na njegov kompleksan oblik.

Za periodičnu funkciju $f(x)$ sa periodom $2l$ $(l > 0)$, sada ćemo, najpre, dati njen kompleksan oblik. Da bismo dobili kompleksan oblik Furijeovog reda ove funkciju na intervalu $[-l, l]$, iskoristićimo poznatu Ojlerovu formulu,

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos x &= \tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \\ \sin x &= \tfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

Tada imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} \left(e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} \left(e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) - \frac{ib_n}{2} \left(e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2} \right) e^{\frac{in\pi x}{l}} + \left(\frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2} \right) e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right). \end{aligned}$$

Ako uvedimo oznake

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \alpha_n = \frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2}, \alpha_{-n} = \frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tada možemo dati kompleksan oblik Furijeovog reda za posmatranu funkciju $f(x)$, na intervalu $[-l, l]$ na sledeći način

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n e^{\frac{inx\pi}{l}} + \alpha_{-n} e^{-\frac{inx\pi}{l}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{\frac{inx\pi}{l}}.$$

Koeficijente ovako definisanog Furijeovog reda određujemo iz formule:

$$\alpha_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t) e^{-\frac{int\pi}{l}} dt.$$

Članovi $e^{\frac{inx\pi}{l}}$ se nazivaju kompleksni harmonici, dok se članovi α_n nazivaju kompleksne amplitude.

FURIJEOV INTEGRAL

Odgovarajuća suma koja se javlja u Furijeovom razvoju predstavlja odgovarajuću integralnu sumu, kada se intervala $[-l, l]$ pređe na $\mathbb{R}$, tj. kada se pusti da $l \to +\infty$.

Sada ćemo u Furijeovom redu funkcije f, definisane na čitavom skupu $\mathbb{R}$, koja je data u kompleksnom obliku pustiti da parametar l teži u beskonačnost i razmotriti šta će se u tom slučaju događati sa navedenim formulama. Zato ćemo u Furijeov red dat u komplesnom obliku uvrstiti izraz za α_n. Tada dobijamo

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t) e^{-\frac{in\pi t}{l}} dt\right) e^{\frac{in\pi x}{l}}\right] =$$
$$= \lim_{l\to\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t) e^{-\frac{in\pi(x-t)}{l}} dt\right).$$

Uvedimo sada oznaku $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, kao i $\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l}$,za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tada je

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(t) e^{\lambda_n i(x-t)} dt\right]\Delta\lambda. \qquad (*)$$

Neka je sada

$$F_l(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt.$$

Tada sumu u formuli $(*)$ možemo zapisati

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_l(\lambda_n) \Delta\lambda_n.$$

Odavde se može videti da prethodna suma predstavlja zapravo integralnu sumu kada $l \to +\infty$, tj. tada $\Delta\lambda \to 0$, pa imamo da se $(*)$ može zapisati kao

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} F_l(\lambda) d\lambda.$$

Dalje, $F_l(\lambda)$ formalno postaje integral

$$F_l(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt$$

kada $l \to +\infty$. Tada imamo da je

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt d\lambda,$$

pri čemu se prethodno dobijeni integral se naziva Furijeov integral.

VIDEO KLIP

Snimak sa Youtube-a: Furijeova transformacija.

Ova lekcija sadrži video materijal. Ukoliko želite da pogledate ovaj video morate da otvorite LAMS lekciju.

FURIJEOVA TRANSFORMACIJA I INVERZNA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA

Furijeova i inverzna Furijeova transformacija se zadaju u kompleksnom obliku.

Furijeova i inverzna Furijeova transformacija u kompleksnom obliku je data sa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Za unutrašnji integral uvedimo oznaku

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Ova funkcija se naziva Furijeova transformacija funkcije f u kompleksnom obliku. Tada imamo da je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda.$$

Prethodna formula se naziva inverzna Furijeova transformacija funkcije f.
Ako uvedemo oznaku $F[f]$ za Furijeovu transformaciju funkcije f, kao i oznaku $F^{-1}[f]$ za inverznu Furijeovu transformaciju. Tada možemo navesti neke od osobina Furijeove transformacije:

$$F[f \pm g] = F[f] \pm F[g],\ F[c \cdot f] = c \cdot F[f]$$
$$F^{-1}[f \pm g] = F^{-1}[f] \pm F^{-1}[g],\ F^{-1}[c \cdot f] = c \cdot F^{-1}[f]$$

Na osnovu prethodnog možemo uvideti da je Furijeova transformacija, kao i inverzna Furijeova transformacija linearni operator.

Napomena. Za egzistenciju Furijeove transformacije funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dovoljno je:

1. da je ona apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$, tj. da važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty,$$

2. da ona ima konačan broj ekstremnih vrijednosti (minimuma i maksimuma) u proizvoljno odabranom konačnom intervalu;

3. da ona ima konačan broj prekida (prekida prve vrste) u proizvoljno odbranom konačnom intervalu.

Ovi uslovi su ekvivalentni uslovima Žordan-Dirihleovog kriterijuma kod Furijeovog reda. Uslov apsolutne integrabilnosti je dovoljan za egzistenciju Furijeove transformacije većine realnih funkcija. Međutim, uslov apsolutne integrabilnosti nije i potreban uslov, jer postoje realne funkcije koji nisu apsolutno integrabilni, ali se za njih, ipak, može odrediti Furijeova transformacija.

PRIMER

Određivanje Furijeove transformacije za datu funkciju.

Neka je zadata funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \notin (-1,1) \\ 1, & \text{za } x \in (-1,1). \end{cases}$$

Odrediti njenu Furijeovu transformaciju.

Rešenje. Važi da je

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot e^{-i\lambda t} dt + \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-i\lambda t} dt + \int_{1}^{\infty} 0 \cdot e^{-i\lambda t} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (\cos(-\lambda t) + i \sin(-\lambda t))\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (\cos(\lambda t) - i \sin(\lambda t))\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \Big|_{-1}^{1} + i \cdot \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \Big|_{-1}^{1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin\lambda}{\lambda} - \frac{\sin(-\lambda)}{\lambda} + i \cdot \left(\frac{\cos\lambda}{\lambda} - \frac{\cos(-\lambda)}{\lambda} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\lambda}{\lambda} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$