Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

2η Σειρά Γραπτών ασκήσεων

Χειμερινό Εξάμηνο 2013-2014 — Μπογιόκας Δημήτριος - ΜΠΛΑ

Άσκηση 1(α) Το πρόβλημα λύνεται με τον παρακάτω άπληστο αλγόριθμο. Θεωρώ τα n αιτήματα ταξινομημένα ως προς τα f_i, σε αύξουσα σειρά. Αρχικά θεωρώ ότι κανένα μάθημα δεν γίνεται στις αίθουσες. Στη συνέχεια, με τη σειρά, για κάθε i ελέγχω αν το μάθημα i μπορεί να γίνει σε κάποια αίθουσα (σύμφωνα με αυτά που έχω αποφασίσει μέχρι το προηγούμενο βήμα) και αν ναι, ανάμεσα σε αυτές που τη χρονική στιγμή s_i είναι άδειες, επιλέγω εκείνη που μέχρι το προηγούμενο βήμα αργεί περισσότερο να αδειάσει (ελαχιστοποιώ την ώρα που κάθε αίθουσα μένει άδεια) και αποφασίζω ότι το μάθημα i θα γίνει σε αυτή. Αν δεν υπάρχει άδεια αίθουσα τη στιγμή s_i αποφασίζω ότι το μάθημα δε θα γίνει. Ο αλγόριθμος υλοποιημένος σε C++ είναι:

```cpp
[...] //headers
int n,k;
int room[n+1]; //final room for every i, 0 stands for no room
int last[k+1]; //f_i of the last lesson programmed to be accomplished in room s, for every s
int request[n+1][2]; //request[i][0]=s_i, request[i][1]=f_i

void greedy(int i) {
  int mins=0;
  int mind=INT_MAX;
  for(int s=1;s<=k;s++) {
    if(request[i][0]>=last[s]&&mind>request[i][0]-last[s]) {
      mins=s;
      mind=request[i][0]-last[s];
    }
  }
  if(mins>0) {
    last[mins]=request[i][1];
    room[i]=mins;
  }
  if(i<n) greedy(i+1);
}

int main() {
[...] //input, sorting
  greedy(1);
[...] //output
  return 0;
}
```

Για να δείξω την ορθότητα, υποθέτω μία βέλτιστη λύση που ταυτίζεται για τα αιτήματα $1, \ldots, i-1$ με τη λύση που δίνει ο παραπάνω αλγόριθμος και διαφέρει από το αίτημα i και μετά. Θα δείξω ότι υπάρχει μια διαφορετική βέλτιστη λύση που να ταυτίζεται με τη λύση του παραπάνω αλγορίθμου για τα αιτήματα $1, \ldots, i$ (υποθέτω πάλι ότι τα αιτήματα διατάσσονται κατά αύξουσα σειρά ως προς τα f_i). Πρέπει να εξετάσω τις ακόλουθες 3 περιπτώσεις:

- Ο παραπάνω αλγόριθμος να μην ικανοποιεί το αίτημα i, ενώ η βέλτιστη λύση να το ικανοποιεί στην αίθουσα s. Αυτό δεν θα μπορούσε ποτέ να γίνει, από τη συνθήκη του παραπάνω αλγορίθμου να απορρίπτει ένα αίτημα μόνο εάν όλες οι αίθουσες είναι κατειλλημένες ήδη την ώρα s_i, από το βήμα $i-1$. Αφού οι λύσεις ταυτίζονται για $i-1$, δεν υπάρχει ελεύθερη αίθουσα να ικανοποιηθεί το αίτημα i στη βέλτιστη λύση.
- Ο παραπάνω αλγόριθμος να ικανοποιεί το αίτημα i στη θέση s, ενώ η βέλτιστη λύση να μην το ικανοποιεί. Στην περίπτωση αυτή, έστω j το πρώτο αίτημα που ικανοποιείται στην αίθουσα i από τη χρονική στιγμή s_i και μετά. Αφαιρώ το αίτημα j από τη βέλτιστη λύση και το αντικαθιστώ με το αίτημα i. Ο συνολικός αριθμός των αιτημάτων που ικανοποιούνται δεν μεταβάλλεται, αφού $f_i \leq f_j$ και άρα όλα τα υπόλοιπα αιτήματα στην αίθουσα s της βέλτιστης λύσης δεν επηρεάζονται. Άρα προκύπτει μια διαφορετική βέλτιστη λύση που ταυτίζεται από το αίτημα 1 έως και το i με τη λύση που δίνει ο παραπάνω αλγόριθμος.
- Ο παραπάνω αλγόριθμος να ικανοποιεί το αίτημα i στην αίθουσα s, ενώ η βέλτιστη λύση να το ικανοποιεί στην αίθουσα t. Έστω j το πρώτο αίτημα που ικανοποιείται στην αίθουσα s, στη βέλτιστη λύση, από τη χρονική στιγμή s_i και μετά. Αντιμεταθέτω τότε, στη βέλτιστη λύση, όλα τα αιτήματα που ικανοποιούνται στην αίθουσα s από το j και μετά με όλα τα αιτήματα που ικανοποιούνται στην αίθουσα t από το i και μετά. Η συγκεκριμένη αντιμετάθεση μπορεί να γίνει. Πράγματι, το αίτημα i (και κατά συνέπεια όλα τα επόμενα) ικανοποιείται στην αίθουσα s, αφού έτσι είναι η λύση που δίνει ο παραπάνω αλγόριθμος. Επίσης, το αίτημα j (και κατά συνέπεια όλα τα επόμενα) ικανοποιείται στην αίθουσα t. Πράγματι, αν λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μόνο τα πρώτα $i-1$ αιτήματα, οι αίθουσες s και t είναι κατειλλημένες έως τις χρονικές στιγμές $last_s$ και $last_t$ αντιστοίχως, τότε από την άπληστη επιλογή του παραπάνω αλγορίθμου, ισχύει $last_s \geq last_t \geq s_j$. Άρα, προκύπτει μια διαφορετική βέλτιστη λύση που ταυτίζεται από το αίτημα 1 έως και το i με τη λύση που δίνει ο παραπάνω αλγόριθμος.

Επίσης, κάθε βέλτιστη λύση ταυτίζεται με την παραπάνω με τετριμμένο τρόπο για $i = 0$, άρα, επαγωγικά, υπάρχει κάποια βέλτιστη λύση που να ταυτίζεται με την παραπάνω για όλα τα αιτήματα από 1 έως n, δηλαδή η παραπάνω λύση είναι βέλτιστη. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $\Theta\left(nlogn + kn\right)$. Πράγματι, πέρα από την ταξινόμηση

($\Theta(nlogn)$) ο αλγόριθμος κάνει k επαναλήψεις για κάθε μάθημα, για να βρει αν και σε ποιά αίθουσα θα το ικανοποιήσει.

Άσκηση 1(β) Προφανώς ο αλγόριθμος του (α) δεν εγγυάται τον υπολογισμό μιας βέλτιστης λύσης. π.χ. για $k = 1$, $n = 3$, $w_1 = 100, w_2 = w_3 = 1$, $s_1 = s_2 = 0, s_3 = 1$ και $f_1 = f_3 = 2, f_2 = 1$ ο αλγόριθμος θα επιλέξει να γίνουν τα μαθήματα $2, 3$, ενώ η βέλτιστη λύση είναι να γίνει το μάθημα 1. Το παράδειγμα αυτό δείχνει μάλιστα ότι η βέλτιστη λύση μπορεί να απέχει αυθαίρετα πολύ από τη λύση που προκύπτει από τον παραπάνω αλγόριθμο, δηλαδή δεν είναι ούτε προσεγγιστικά καλός. Ένας αποδοτικός αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού είναι ο εξής:
Θεωρώ τα αιτήματα ταξινομημένα σε αύξουσα σειρά ως προς τα f_i. Για κάθε επιλογή $k+1$ δεικτών $(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1})$, με $i_1 < i_2 < \cdots < i_{k+1}$ ορίζω συνάρτηση $b : \{0, 1, \ldots, n\}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ που εκφράζει τη μερική βέλτιστη λύση του προβλήματος, όταν οι αίθουσες θεωρούνται άδειες από τις χρονικές στιγμές $f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}$ και μετά και έχω να αποφασίσω για τα μαθήματα $i_{k+1}+1, \ldots, n$ (Θεωρώ τη σταθερά f_0 με $f_0 = 0$, για να είναι καλά ορισμένη η συνάρτηση στην αρχική περίπτωση). Η αναδρομική σχέση που ισχύει για τη συνάρτηση b είναι η ακόλουθη:

$$b\left(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad i_{k+1} = n \\ \max\left(\left\{b\left(i_1, \ldots, \widehat{i_m}, \ldots, i_{k+1}, i_{k+1}+1\right) + w_{i_{k+1}+1} : m \in \{1, \ldots, k\} \wedge f_{i_m} \leq s_{i_{k+1}+1}\right\} \cup \left\{b\left(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}+1\right)\right\}\right) & , \quad i_{k+1} < n \end{cases}$$

όπου με $\widehat{i_m}$ συμβολίζω ότι το i_m δεν περιέχεται στην $k+1$-άδα των αριθμών. Δηλαδή, η μερική βέλτιστη λύση ισούται με το μέγιστο ανάμεσα:

- στο να ικανοποιήσω το αίτημα $i_{k+1}+1$ σε κάποια άδεια αίθουσα (που είχε ικανοποιήσει πριν το αίτημα i_m), κερδίζοντας $w_{i_{k+1}+1}$ και όσο είναι το βέλτιστο με τις καινούριες συνθήκες (δηλαδή οι αίθουσες αδειάζουν όπως πριν, εκτός από αυτή που άδειαζε την χρονική στιγμή f_{i_m} και τώρα αδειάζει την χρονική στιγμή $f_{i_{k+1}+1}$ και το μάθημα μέχρι το οποίο έχει τελειώσει η εξέταση να είναι το $i_{k+1}+1$), πάνω από όλα τα m που ικανοποιούν τη συνθήκη η αντίστοιχη αίθουσα να είναι άδεια.
- και στο να μην ικανοποιήσω το αίτημα $i_{k+1}+1$, κερδίζοντας όσο είναι το βελτιστο με τις καινούριες συνθήκες (δηλαδή οι αίθουσες να αδειάζουν όπως πριν και το μάθημα μέχρι το οποίο να έχει τελειώσει η εξέταση να είναι το $i_{k+1}+1$)

Στην παραπάνω αναδρομική σχέση δεν λαμβάνω υπ' όψιν συμμετρίες που προκύπτουν από μεταθέσεις των αιθουσών, αλλά τις αναδιατάσω κάθε φορά ώστε $f_{i_1} < f_{i_2} < \cdots < f_{i_k}$, χωρίς βλάβη της γενικότητας.
Προφανώς η λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός $b(0, \ldots, 0)$ δηλαδή όλες τις αίθουσες τις θεωρώ άδειες από τη χρονική στιγμή $f_0 = 0$ και τα μαθήματα που μένουν να εξεαστούν είναι τα $1, \ldots, n$.

Το πλήθος των διαφορετικών εισόδων της συνάτησης b είναι το πλήθος του συνόλου $\{0,\ldots,n\}^{k+1}$, δηλαδή $(n+1)^{k+1}$ όπου με μία top-bottom υλοποίηση το πλήθος μειώνεται σε $\sum_{l=0}^{k+1}\binom{n}{k+1-l}$ (l είναι το πλήθος των μηδενικών και στις υπόλοιπες $k+1-l$ θέσεις επιλέγω να βάλω έναν διαφορετικό αριθμό από το $\{1,\ldots,n\}$), που όμως είναι ασυμπτωτικά, για σταθερό k, ίσο με $\Theta\left(n^{k+1}\right)$. Σε κάθε υπολογισμό μίας τιμής της συνάρτησης, ο αλγόριθμος χρειάζεται $k+1$ επαναλήψεις για να βρει το μέγιστο ανάμεσα στις πιθανές τιμές που έχει υπολογίσει ήδη. Τελικά, σε κάθε περίπτωση, ο χρόνος που χρειάζεται ο αλγόριθμος είναι της τάξης $\mathcal{O}\left((k+1)(n+1)^{k+1}\right)$.

Άσκηση 2 Το πρόβημα λύνεται με τον παρακάτω άπληστο αλγόριθμο. Θεωρώ τις A κάρτες ταξινομημένες σε φθίνουσα σειρά ως προς τα v_i και τις B κάρτες ταξινομημένες σε αύξουσα σειρά ως προς τα b_i. Αρχικά θεωρώ ότι κανένα ταίριασμα δεν έχει γίνει. Στη συνέχεια, με τη σειρά για κάθε i εξετάζω εάν η A κάρτα i μπορεί να κερδίσει κάποια ελεύθερη B κάρτα (αν υπάρχει δηλαδή κάποιο j που δεν έχω επιλέξει ήδη με $a_i > b_j$). Σε αυτή την περίπτωση επιλέγω το μέγιστο τέτοιο j. Διαφορετικά επιλέγω το μέγιστο j που δεν έχω επιλέξει μέχρι τότε (και χάνω την κάρτα). Ο αλγόριθμος υλοποιημένος σε C++ είναι:

```
[...] //headers
int n;
int A[n+1][2]; //A[i][0]=a_i, A[i][1]=v_i
int B[n+1][2]; //B[i][0]=b_i, B[i][1]=j (the A card matched)
int score=0; //solution

int quickselectB(int x, int start, int end) {
  int med=(start+end)/2;
  if(start==end) return start;
  if(x<=B[med][0]) return quickselectB(x,start,med);
  else return quickselectB(x,med+1,end);
}

void greedy(int i) {
  int l=quickselectB(A[i][0], 1, n);
  if(l>0) {
    while(B[l][1]>0&&l>0) l--;
    if(l>0) {
      B[l][1]=i;
      score+=A[i][1];
    }
  }
  if(l==0) {
    int p=n;
    while(B[p][1]>0) p--;
```

```
      B[p][1]=i;
    }
    if(i<n) greedy(i+1);
}

int main() {
[...] //input, sorting
    greedy(1);
[...] //output
    return 0;
}
```

Για να δείξω την ορθότητα, υποθέτω μία βέλτιστη λύση που ταυτίζεται για τις A κάρτες $1, \ldots, i-1$ με τη λύση που δίνει ο παραπάνω αλγόριθμος και διαφέρει από την A κάρτα i και μετά. Θα δείξω ότι υπάρχει μια διαφορετική βέλτιστη λύση που να ταυτίζεται με τη λύση του παραπάνω αλγορίθμου για τις A κάρτες $1, \ldots, i$ (υποθέτω πάλι ότι οι A κάρτες διατάσσονται κατά αύξουσα σειρά ως προς τα v_i και ότι οι κάρτες B διατάσσονται κατά αύξουσα σειρά ως προς τα b_i). Πρέπει να εξετάσω την εξής περίπτωση: Έστω ότι ο παραπάνω αλγόριθμος αντιστοιχίζει την i A κάρτα στην j B κάρτα, ενώ η βέλτιστη λύση αντιστοιχίζει την $i' > i$ A κάρτα στην j B κάρτα και την i κάρτα στην j' B κάρτα. Έστω ψ η αξία όλων των κερδισμένων καρτών του βέλτιστου αλγορίθμου, εκτός από τις A κάρτες i και i'. Έτσι, η συνολική αξία των κερδισμένων καρτών στη βέλτιστη λύση είναι ίση με:

$$\mu = \psi + v_{i'} \mathbb{1}_{(b_j,+\infty)}(a_{i'}) + v_i \mathbb{1}_{\left(b_{j'},+\infty\right)}(a_i)$$

Αν αντικαταστήσω στην βέλτιστη λύση το ταίριασμα $(i, j'), (i', j)$ με το ταίριασμα $(i, j), (i', j')$, τότε η συνολική αξία των κερδισμένων καρτών θα είναι ίση με

$$\mu' = \psi + v_i \mathbb{1}_{(b_j,+\infty)}(a_i) + v_{i'} \mathbb{1}_{\left(b_{j'},+\infty\right)}(a_{i'})$$

Έχουμε δηλαδή:

$$\mu' - \mu = v_i \mathbb{1}_{(b_j,+\infty)}(a_i) + v_{i'} \mathbb{1}_{\left(b_{j'},+\infty\right)}(a_{i'}) - v_{i'} \mathbb{1}_{(b_j,+\infty)}(a_{i'}) - v_i \mathbb{1}_{\left(b_{j'},+\infty\right)}(a_i)$$

Διακρίνω τις εξής δύο περιπτώσεις:

- $b_j < b_{j'}$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει $b_j < a_i \leq b_{j'}$. Πράγματι, αν $a_i \leq b_j$ τότε η κάρτα δε θα κερδιζόταν, οπότε ο αλγόριθμος θα επέλεγε το μέγιστο b_j με αυτή την ιδιότητα, άτοπο. Ομοίως, αν $a_i > b_{j'}$ τότε η κάρτα θα κερδιζόταν, οπότε ο αλγόριθμος θα επέλεγε το μέγιστο b_j με αυτή την ιδιότητα, επίσης άτοπο. Τέλος, λόγω της διάταξης έχουμε $v_i \geq v_{i'}$. Άρα ισχύει:

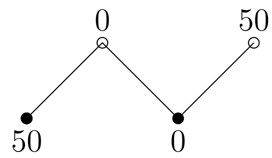
$$\begin{aligned} \mu' - \mu &= v_i - v_{i'}\left(\mathbb{1}_{(b_j,+\infty)}(a_{i'}) - \mathbb{1}_{\left(b_{j'},+\infty\right)}(a_{i'})\right) \\ &= v_i - v_{i'}\mathbb{1}_{\left(b_j,b_{j'}\right]}(a_{i'}) \\ &\geq v_i - v_{i'} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

- $b_{j'} \leq b_j$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει $a_i \notin (b_{j'}, b_j]$. Πράγματι, αν $a_i > b_{j'}$ από την επιλογή του παραπάνω αλγορίθμου θα ισχύει και $a_i > b_j$ (αν υπάρχει τρόπος να κερδιθεί η κάρτα i, τότε κερδίζεται). Ομοίως με αντιθετοαντιστροφή, αν $a_i \leq b_j$ πάλι από την επιλογή του παραπάνω αλγορίθμου, θα ισχύει και $a_i \leq b_{j'}$ (αν η κάρτα i δεν κερδιζει την j, τότε δεν υπάρχει κανένα j' που να κερδίζει). Άρα ισχύει:

$$\begin{aligned} \mu' - \mu &= v_{i'}\left(\mathbb{1}_{\left(b_{j'},+\infty\right)}(a_{i'}) - \mathbb{1}_{(b_j,+\infty)}(a_{i'})\right) - v_i\left(\mathbb{1}_{\left(b_{j'},+\infty\right)}(a_i) - \mathbb{1}_{(b_j,+\infty)}(a_i)\right) \\ &= v_{i'}\mathbb{1}_{\left(b_{j'},b_j\right)}(a_{i'}) - v_i\mathbb{1}_{\left(b_{j'},b_j\right)}(a_i) \\ &= v_{i'}\mathbb{1}_{\left(b_{j'},b_j\right)}(a_{i'}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση ισχύει $\mu' \geq \mu$, άρα βρήκα μια βέλτιστη λύση που ταυτίζεται με την λύση του παραπάνω αλγόριθμου στις πρώτες i Α κάρτες. Επίσης, για $i = 0$ οι λύσεις ταυτίζονται με τετριμμένο τρόπο, άρα από επαγωγή η παραπάνω λύση είναι βέλτιστη. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι $\mathcal{O}(n^2)$. Πράγματι, πέρα από την ταξινόμηση, ο αλγόριθμος κάνει n επαναλήψεις, όπου σε κάθε μία από αυτές κάνει $logn$ επαναλήψεις να βρει μια θέση του πίνακα Β, κοντά στην οποία αρχίζει να ψάχνει γραμμικά για κάποιο στοιχείο που δεν έχει χρησιμοποιηθεί. Δε θα χρειαστεί πάνω από n επαναλήψεις σε αυτό το σημείο, εξ ου και το $\mathcal{O}(n^2)$, αλλά το φράγμα δεν είναι ακριβές και ενδεχομένως με μια καλύτερη δομή δεδομένων να επιτυγχάνεται χρόνος $\Theta(nlogn)$.

***Άσκηση* 3**(α) Ένα δέντρο χρωματίζεται με δύο χρώματα, σε γραμμικό χρόνο ως εξής: Χρωματίζουμε αυθαίρετα μία κορυφή με το χρώμα 1, στη συνέχεια τις κορυφές που απέχουν 1 από αυτή με το χρώμα 2, τις κορυφές που απέχουν 2 με το χρώμα 1 κ.ο.κ. Αποκλείεται να ενώνονται 2 κορυφές ίδιας απόστασης, γιατί τότε θα είχε κύκλο το γράφημα, το οποίο αποκλείεται επειδή είναι δέντρο. Στο ακόλουθο παράδειγμα:



ο αλγόριθμος αυτός επιλέγει είτε τις μαύρες, είτε τις λευκές κουκίδες. Σε κάθε περίπτωση επιλέγει συνολικό βάρος ίσο με 50, ενώ θα μπορούσε να επιλέξει μόνο τις 2 ακραίες κορυφές και να έχει συνολικό βάρος ίσο με 100. Ο αλγόριθμος αυτός όμως θα επιστρέφει πάντα τουλάχιστον το 50% του βέλτιστου συνολικού βάρους. Ένα παράδειγμα που το κάνει είναι το παραπάνω και η απόδειξη ότι ποτέ δε θα επιστρέψει λιγότερο από 50% είναι η εξής: $w = \max\{w(I_0), w(I_1)\} \geq \frac{w(I_0)+w(I_1)}{2} = 50\% w(V(T)) \geq 50\% w'$ όπου w το αποτέλεσμα του αλγορίθμου και w' το βέλτιστο συνολικό βάρος.

Άσκηση 3(β) Ένας δυναμικός αλγόριθμος που λύνει αυτό το πρόβλημα βασίζεται στις εξής αναδρομικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} weight(T, v, -1) &= \sum_{u \in N_T(v)} \max\{weight(C_u, u, 1), weight(C_u, u, -1)\} \\ weight(T, v, 1) &= w(v) + \sum_{u \in N_T(v)} weight(C_u, u, -1) \end{aligned}$$

όπου $N_T(v)$ η περιοχή του σημείου v μέσα στο T και C_u η συνεκτική συνιστώσα του $T \setminus v$, που περιέχει το u. Επίσης το ± 1 ως τρίτη παράμετρος συμβολίζει το κατά πόσον η v θα συμπεριληφθεί τελικά στη λύση. Αν διαλέξω μια αρχική κορυφή, αυθαίρετα, ως ρίζα, η σχέση γράφεται διαφορετικά ως εξής:

$$\begin{aligned} weight(v, -1) &= \sum_{\substack{u \in N_T(v) \\ u \neq parent(v)}} \max\{weight(u, 1), weight(u, -1)\} \\ weight(v, 1) &= w(v) + \sum_{\substack{u \in N_T(v) \\ u \neq parent(v)}} weight(u, -1) \end{aligned}$$

Όλες οι ενδιάμεσες τιμές της συνάρτησης αποθηκεύονται σε έναν πίνακα με 2 γραμμές και n στήλες. Κάθε στήλη αντιστοιχεί σε έναν κόμβο, η μία γραμμη στην μερική βέλτιστη λύση χωρίς τον κόμβο και η άλλη στην μερική βέλτιστη λύση με τον κόμβο. Η δομή δεδομένων που θα χρησιμοποιήσω για την αποθήκευση του δέντρου είναι αυτή της λίστας από συνδεδεμένες λίστες, αφού το γράφημα είναι τόσο αραιό. Τελικά ο αλγόριθμος θα εξετάσει 2 φορές κάθε ακμή, δηλαδή τελικά θα χρειαστεί γραμμικό χρόνο. Ο αλγόριθμος αυτός (η up-down μορφή του) υλοποιημένος σε C++ είναι:

```
[...] //headers
struct node {
  node* prev;
  node* next;
  int name;
};
int n;
node N[n+1];
int w[n+1];
int dynweight[n+1][2];

int max(int x,int y) {
  if(x>y) return x;
  else return y;
}

int weight(node u,node v, bool sign) {
  int solution=0;
  node p=N[u.name];
  while(p.next!=NULL) {
    if(p.name!=v.name) {
      if(sign) {
        if(dynweight[p.next->name][0]==0) dynweight[p.next->name][0]=weight(*(p.next),u,!sign);
        solution+=dynweight[p.next->name][0];
      }
      else {
        if(dynweight[p.next->name][0]==0) dynweight[p.next->name][0]=weight(*(p.next),u,sign);
        if(dynweight[p.next->name][1]==0) dynweight[p.next->name][1]=weight(*(p.next),u,!sign);
        solution+=max(dynweight[p.next->name][0],dynweight[p.next->name][1]);
      }
    }
    p=*(p.next);
  }
  if(sign) solution+=w[u.name];
  return solution;
}

int main() {
[...] //input
  node foo={NULL,NULL,0};
  int final=max(weight(N[1],foo,true),weight(N[1],foo,false));
[...] //output
```

```
  return 0;
}
```

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρώ ότι όλες οι κορυφές έχουν θετικό βάρος, οπότε αρχικοποιώ τον $dynweight[][]$ με μηδενικά που σημαίνουν «δεν έχει εξεταστεί η περίπτωση». Μια παραλλαγή του κώδικα ώστε να μην χάνει χρόνο σε μηδενικές τιμές θα ήταν να αρχικοποιήσω τον πίνακα με τιμές ίσες με -1.

Άσκηση 4 Το πρόβλημα λύνεται με τον παρακάτω δυναμικό αλγόριθμο. Ορίζω την ακόλουθη ποσότητα (για τον πληθάριθμο ενός συνόλου K χρησιμοποιώ τον συμβολισμό $\#K$, αντί για το $|K|$):

$$a_i\left(k\right) = \#\left\{S \subset N \setminus \{i\} : w\left(s\right) = k\right\}$$

για κάθε $i \in N$ και $k \in \{0, \ldots, w\left(N\right)\}$. Δηλαδή το πλήθος των συνασπισμών που δε συμμετέχει το κόμμα i και συγκεντρώνουν ακριβώς k έδρες. Προφανώς τότε, για το ζητούμενο b_i ισχύει:

$$b_i = \sum_{k=Q-w_i}^{Q-1} a_i\left(k\right)$$

Αρκεί δηλαδή να κατασκευαστεί ένας πίνακας $n \times Q$ που θα αποθηκεύει κάθε $a_i\left(k\right)$ για $i \in N$ και $k \in \{0, \ldots, Q\}$. Τον πίνακα αυτόν τον κατασκευάζω ως εξής: Έστω $M = \left(m_{ij}\right)_{1\leq i\leq n\ ,\ 0\leq j\leq Q-1}$ ένας πίνακας που αρχικοποιείται με 0 σε κάθε του συντεταγμένη, εκτός από την πρώτη στήλη που αρχικοποιείται με 1, δηλαδή $m_{i0} = 1$ για κάθε i και $m_{ij} = 0$ για κάθε i και κάθε $j > 0$. Κατασκευάζω τον τελικό πίνακα σε n διαδοχικά βήματα που κάθε βήμα μετασχηματίζει τον πίνακα M στον πίνακα $M' = \left(m'_{ij}\right)$ που χρησιμοποιείται στο επόμενο βήμα. Στο i βήμα ορίζω τα m'_{xy} από την ακόλουθη σχέση:

$$m'_{xy} = \begin{cases} m_{xy} & ,\quad x = i \\ m_{xy} & ,\quad x \neq i \wedge y < w_i \\ m_{xy} + m_{x(y-w_i)} & ,\quad x \neq i \wedge y \geq w_i \end{cases}$$

Δηλαδή:

- Η i γραμμή μένει αναλλοίωτη, αφού σε αυτή τη γραμμή μετράω το πλήθος των συνασπισμών που δεν περιέχουν το i
- Ένας συνασπισμός ανάμεσα στα κόμματα $\{1, \ldots, i\}$ έχει ακριβώς k έδρες, είτε χωρίς το i (m_{xk} διαφορετικές επιλογές), είτε μαζί με το i (όπου σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν $m_{x(k-w_i)}$ επιλογές για τα υπόλοιπα κόμματα). Το συνολικό πλήθος επιλογών αντιστοιχεί στο άθροισμα των δύο αυτών αριθμών.

Μετά από το i-οστό βήμα, ο πίνακας περιγράφει τη μερική βέλτιστη λύση, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν τα κόμματα 1 έως i. Άρα, ο τελικός πίνακας, μετά το $n-$οστό βήμα έχει για στοιχεία m_{xy} ακριβώς το πλήθος των διαφορετικών συνασπισμών που δε συμμετέχει το x και έχουν y έδρες συνολικά, δηλαδή το ζητούμενο $a_x(y)$. Ο πίνακας αυτός για να κατασκευαστεί χρειάστηκε n επαναλήψεις που σε κάθε μία υπολογίζονται nQ το πλήθος στοιχεία, άρα τελικά χρόνο $\mathcal{O}(n^2Q)$. Στη συνέχεια υπολογίζω τα n το πλήθος b_i με w_i επαναλήψεις το κάθε ένα, όπου $w_i \leq Q$. Τέλος υπολογίζω σε χρόνο γραμμικό το $\bar{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i$ και το ζητούμενο $B_i = \frac{b_i}{\bar{b}}$. Δηλαδή συνολικά απαιτείται χρόνος $\mathcal{O}(n^2Q)$. Στην πραγματικότητα η κατασκευή αυτού του πίνακα δεν είναι απαραίτητη. Αυτό φαίνεται από την εξής παρατήρηση: Αν κατασκευάσω τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας της γραμμής l στο βήμα $i-1$, έστω

$$G_l^{i-1}(x) = \sum_{y=0}^{Q-1} m_{ly} x^y$$

τότε η επαγωγική κατασκευή (αν $l \neq i$) περιγράφεται ακριβώς από τη σχέση:

$$G_l^{i}(x) = (1 + x^{w_i}) G_l^{i-1}(x)$$

επίσης ισχύει $G_0(x) = 1$. Μετά το n-οστό βήμα, για κάθε γραμμή θα ισχύει το εξής:

$$A_i(x) = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} (1 + x^{w_j})$$

όπου έχω θέσει $A_i(x) = G_i^n(x)$. Για κάθε $A_i(x)$ κατασκευάζω δηλαδή μια γραμμή i με τους συντελεστές του πολυωνύμου. Τα πολυώνυμα αυτά όμως τελικά δεν διαφέρουν πάρα πολύ μεταξύ τους, δηλαδή μπορώ να γράψω:

$$A_i(x) = \frac{\prod_{j \in N} (1 + x^{w_j})}{1 + x^{w_i}}$$

Θέτοντας δηλαδή $A(x) = \prod_{j \in N} (1 + x^{w_j})$ και χρησιμοποιόντας το $A_i(x) = \sum_{j=0}^{Q-1} a_i(j) x^j$ έχω τη σχέση:

$$\sum_{j=0}^{Q-1} a_i(j) x^j = \frac{A(x)}{1 + x^{w_i}} \qquad (1)$$

Έστω ότι $A(x) = \sum_{k=0}^{w(N)} v_k x^k$. Τους πρώτους Q συντελεστές του πολυωνύμου αυτού μπορώ να τους προσδιορίσω με την μέθοδο που κατασκεύασα τον πρώτο πίνακα, χρησιμοποιόντας αυτή τη φορά έναν πίνακα $1 \times Q$, σε χρόνο $\mathcal{O}(nQ)$. Αρκεί τώρα να υπολογίσω τους συντελεστές $a_i\left(j\right)$ χωρίς να χρειαστεί να αποθηκεύσω κάτι άλλο. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιώ τη γνωστή ταυτότητα των γεννήτριων συναρτήσεων:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{s=0}^{\infty}x^s$$

Δηλαδή, η σχέση (1) γίνεται:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{Q-1}a_i\left(j\right) &= \frac{A\left(x\right)}{1-\left(-x^{w_i}\right)}\\ &= \left(\sum_{s=0}^{\infty}\left(-1\right)^s x^{sw_i}\right)\left(\sum_{k=0}^{w(N)}v_k x^k\right)\end{aligned}$$

και από τον κανόνα γινομένου των δυναμοσειρών έχουμε:

$$a_i\left(j\right)=\sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{j}{w_i}\right\rfloor}\left(-1\right)^s v_{j-w_i s}$$

το παραπάνω ισχύει επειδή όλοι οι συντελεστές των x^k για $k\not\equiv 0 \mod w_i$ είναι ίσοι με 0 στην αριστερή δυναμοσειρά, άρα μένουν μόνο οι συντελεστές των $1,x^{w_i},x^{2w_i},\ldots$ που είναι ±1. Δηλαδή ισχύει τελικά:

$$b_i=\sum_{k=Q-w_i}^{Q-1}\sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{k}{w_i}\right\rfloor}\left(-1\right)^s v_{k-w_i s}$$

για το πλήθος T_i των επαναλήψεων που χρειάζονται για τον υπολογισμό του κάθε b_i ισχύει:

$$T_i=\sum_{k=Q-w_i}^{Q-1}\frac{k}{w_i}\leq\sum_{k=Q-w_i}^{Q-1}\frac{Q}{w_i}=w_i\frac{Q}{w_i}=Q$$

και καθώς τα b_i είναι n το πλήθος, συνολικά χρειαζόμαστε χρόνο $\mathcal{O}\left(nQ\right)$. Μετά από αυτό ο αλγόριθμος συνεχίζει όπως πριν στον υπολογισμό του $\bar{b}$ και τελικά των B_i. Συνολικά ο αλγόριθμος χρειάζεται λοιπόν $\mathcal{O}\left(nQ\right)$ χρόνο να υπολογίσει τους συντελεστές του $A\left(x\right)$, στη συνέχεια $\mathcal{O}\left(nQ\right)$ χρόνο να υπολογίσει τα b_i με το εναλλασσόμενο άθροισμα και τελικά γραμμικό χρόνο για να υπολογίσει τα B_i, δηλαδή συνολικό χρόνο $\mathcal{O}\left(nQ\right)$. Ένα πρόγραμμα που υλοποιεί τον παραπάνω αλγόριθμο σε C++ είναι το ακόλουθο:

```
[...] //headers
int N;
int Q;
int w[N+1];
int A[Q];
int b[N+1];
int barb;
double B[N+1];

void makeA() {
  A[0]=1;
  int B[Q];
  for(int i=1;i<=N;i++) {
    for(int j=0;j<Q;j++) B[j]=0;
    int k=0;
    while(k+w[i]<Q) {
      B[k+w[i]]=A[k];
      k++;
    }
    for(int j=0;j<Q;j++) A[j]+=B[j];
  }
}

void makeb() {
  for(int i=1;i<=N;i++) {
    for(int k=Q-w[i];k<Q;k++) {
      for(int s=0;s<=k/w[i];s++) {
        if(s%2==0) b[i]+=A[k-w[i]*s];
        else b[i]-=A[k-w[i]*s];
      }
    }
  }
}

void makebarb() {
  for(int i=1;i<=N;i++) barb+=b[i];
}

void makeB() {
  for(int i=1;i<=N;i++) B[i]=(double)b[i]/barb;
}

int main() {
[...] //input
  makeA();
  makeb();
```

```
  makebarb();
  makeB();
[...] //output
  return 0;
}
```

Άσκηση 5 Ένας δυναμικός αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα βασίζεται στην παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$\mathcal{E}\left(k\right)=\begin{cases}\left(\prod_{i=1}^{k}p_i\right)k^4+\sum_{s=1}^{k}(1-p_s)\left(\prod_{i=s+1}^{k}p_i\right)\left(\mathcal{E}\left(s-1\right)+(k-s)^4\right) & , \quad k>0\\ 0 & , \quad k=0\end{cases}$$

Ο αλγόριθμος γεμίζει δυναμικά δύο πίνακες: έναν $n\times n$ που στην (i,j) θέση αποθηκεύει την τιμή $\prod_{l=i}^{j}p_l$, για να έχει ο αλγόριθμος πρόσβαση σε αυτά σε σταθερό χρόνο και τον βασικό πίνακα-γραμμή με τη μερική βέλτιστη λύση, που στην θέση k αποθηκεύει την τιμή της παραπάνω συνάρτησης, δηλαδή ποιό είναι το αναμενόμενο κέρδος μέχρι και την ερώτηση k. Μια υλοποίηση του αλγορίθμου σε C++ είναι η εξής:

```
[...] //headers
int n;
double prob[n+1];
double prod[n+1][n+1];
double E[n+1];

double product(int i, int j) {
  if(i>j) return 1;
  if(prod[i][j]==0) {
    prod[i][j]=product(i,j-1)*prob[j];
  }
  return prod[i][j];
}

double profit(int k) {
  if(k==0) return 0;
  else if(E[k]==0) {
    E[k]+=product(1,k)*pow(k,4);
    for(int s=1;s<=k;s++) {
      E[k]+=(1-prob[s])*product(s+1,k)*(profit(s-1)+pow(k-s,4));
    }
  }
  return E[k];
}

```

```
int main() {
[...] //input
  int solution=profit(n);
[...] //output
  return 0;
}
```

Ο αλγόριθμος χρειάζεται τετραγωνικό χρόνο, επειδή κάνει k επαναλήψεις για κάθε k, ώστε να υπολογίσει το άθροισμα του αναδρομικού τύπου και επειδή ο πίνακας που αποθηκεύει τα γινόμενα, χρειάζεται και αυτός τετραγωνικό χρόνο για να δημιουργηθεί, αφού οι τιμές υπολογίζονται αναδρομικά με το αναδρομικό βήμα να χρειάζεται σταθερό χρόνο.