

**Projekt - streszczenie artykułu  
Temat 15.**

Autorzy: **Bogna Jaszcak, Agnieszka Skoracka**

22.01.2021

## Spis treści:

<b>1</b>	<b>Informacje o artykule</b>	<b>3</b>
1.1	Cel artykułu . . . . .	3
1.2	Zastosowana metodologia . . . . .	3
1.3	Oznaczenia . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Wstęp</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Przegląd literatury</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Model opisujący koszt gwarancji</b>	<b>6</b>
4.1	Modelowanie liczby roszczeń gwarancyjnych . . . . .	7
4.2	Analiza kosztu gwarancji . . . . .	8
4.2.1	Koszt fazy 1. . . . .	8
4.2.2	Koszt fazy 2. . . . .	8
<b>5</b>	<b>Rozwiązanie dla modelu</b>	<b>10</b>
5.1	Analiza poszczególnych składowych kosztu . . . . .	10
5.2	Analiza istnienia optymalnego rozwiązania . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Rozbudowana strategia gwarancyjna uwzględniająca wybór klientów</b>	<b>11</b>
6.1	Liczba roszczeń w strategii II . . . . .	11
6.2	Koszt gwarancji w strategii II . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Eksperymenty numeryczne</b>	<b>13</b>
7.1	Analiza różnych modeli intensywności awarii . . . . .	13
7.2	Analiza wrażliwości modelu na poszczególne parametry . . . . .	14
7.2.1	Intensywność awarii . . . . .	14
7.2.2	Współczynniki związane z kosztami gwarancji . . . . .	15
7.3	Porównanie strategii I i strategii II . . . . .	19
<b>8</b>	<b>Podsumowanie i wnioski</b>	<b>20</b>
<b>9</b>	<b>Polemika</b>	<b>22</b>
9.1	Konstrukcja ankiety . . . . .	22
9.2	Badana grupa . . . . .	23
9.3	Wyniki ankiety a model liniowy . . . . .	23
9.4	Propozycja nowego modelu $\varphi(t)$ . . . . .	24
9.5	Porównanie modeli . . . . .	25
9.5.1	Analiza wizualna . . . . .	25
9.5.2	Analiza wizualna w zależności od wieku ankietowanych . . . . .	26
9.5.3	Analiza wizualna w zależności od płci ankietowanych . . . . .	30
9.5.4	Analiza statystyk . . . . .	30
9.5.5	Wpływ rozważanych modeli na całkowity koszt gwarancji . . . . .	31
9.6	Podsumowanie i wnioski . . . . .	32

# 1 Informacje o artykule

Opracowywany przez nas artykuł autorstwa Yanronga Li, Qingqinga Zhao oraz Shuguanga He z Tianjin University nosi tytuł „*Wyznaczenie momentu zmiany metody obsługi serwisu gwarancyjnego produktów starej generacji po pojawieniu się na rynku produktów nowej generacji*” („Determination of the warranty service method switch time of old generation products after new generation products launched”). Ukazał się on w 2018 roku w piśmie *International Journal of Quality & Reliability Management*.

## 1.1 Cel artykułu

Celem artykułu było stworzenie modelu opisującego koszt gwarancji urządzeń elektronicznych o krótkim cyklu życia, których nowe generacje pojawiają się w stosunkowo krótkich odstępach czasu. Model ten umożliwia znalezienie optymalnego momentu, w którym producent powinien zmienić sposób obsługi gwarancyjnej: z naprawiania uszkodzonego urządzenia (faza 1.) na wydawanie klientowi urządzenia nowej generacji (faza 2.). Analizowany jest również model mieszany, w którym w fazie 1. klient decyduje, czy chce naprawić stare urządzenie, czy też woli zakupić urządzenie nowej generacji za obniżoną cenę.

## 1.2 Zastosowana metodologia

W modelu brane są pod uwagę takie czynniki jak koszt magazynowania części zapasowych, koszt naprawy urządzenia starej generacji czy koszt produkcji urządzenia nowej generacji. W artykule przedstawione są zarówno rozważania analityczne, jak i eksperymenty numeryczne, które pozwalają oszacować wpływ poszczególnych czynników na optymalny czas wprowadzenia fazy 2.

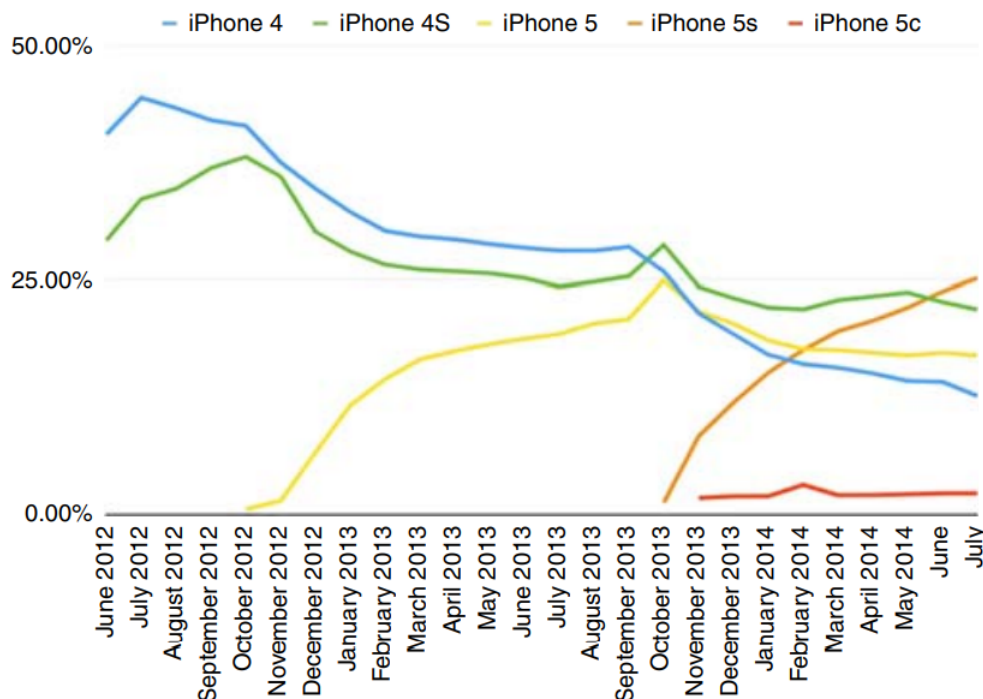
### 1.3 Oznaczenia

- $T_0$  - moment zakończenia produkcji urządzeń starej generacji,
- $T_e$  - moment pojawienia się produktów nowej generacji na rynku,
- $T$  - moment zmiany metody gwarancyjnej,
- $T_{end}$  - koniec gwarancji dla produktów starej generacji,
- $T_w$  - okres gwarancji urządzeń,
- $T^*$  - optymalny moment zmiany metody gwarancyjnej,
- $q$  - czynnik określający ułamek zepsutych urządzeń, które nie wymagają użycia części zamiennych w trakcie naprawy,
- $n$  - optymalna liczba części zamiennych,
- $COG$  - koszt produkcji urządzenia starej generacji,
- $CNG$  - koszt produkcji urządzenia nowej generacji,
- $C_r$  - koszt naprawy produktu starej generacji,
- $C_{r2}$  - koszt naprawy produktu nowej generacji,
- $C_e$  - pewien ustalony koszt dla produktu starej generacji,
- $C_h$  - koszt magazynowania części zamiennych.

## 2 Wstęp

**Gwarancja** jest zobowiązaniem producentów/sprzedawców produktów trwałych, dotyczącym niezawodności dostarczanych przez nich produktów. W oparciu o politykę gwarancyjną producenci/sprzedawcy zobowiązani są do naprawy lub wymiany uszkodzonego produktu na ustalonych warunkach. Gwarancja odgrywa coraz większą rolę na bardzo konkurencyjnym rynku produktów trwałych. Z jednej strony jest ona bardzo korzystna dla klientów, którzy mogą naprawić stare urządzenie lub otrzymać nowy produkt za darmo, z drugiej strony może mieć bardzo negatywny wpływ na zyski producenta. Aby pokazać skalę problemu, autorzy przytaczają przykład firmy Apple, której wydatki na serwis gwarancyjny tylko na rynku chińskim wyniosły około 410 milionów dolarów (Chinese News, 2013, raport kwartalny). Celem producentów powinno być zminimalizowanie kosztu obsługi gwarancyjnej przy jednoczesnym zachowaniu wysokiej jakości obsługi klienta.

Wraz z postępem technologii cykl życia jednej generacji elektroniki użytkowej staje się coraz krótszy. Producenci tego rodzaju produktów muszą szybko wprowadzać nowe produkty na rynek, by zachować przewagę nad konkurencją. Prowadzi to do sytuacji, w której na rynku znajduje się jednocześnie więcej niż jedna generacja tego samego produktu. Dotyczy to w szczególności smartfonów, laptopów oraz dysków zewnętrznych. Jako przykład autorzy podają jednoczesne funkcjonowanie kilku generacji iPhone'ów na rynku między czerwcem 2012 roku a lipcem 2014 roku. Jak widać na Wykresie 1, od listopada 2013 roku do lipca 2014 roku w sprzedaży znajdowało się jednocześnie aż pięć generacji tego samego urządzenia.



Wykres 1: Wielkość sprzedaży kolejnych generacji iPhone'ów (źródło: artykuł).

W artykule rozważana jest nowa metoda realizacji gwarancji: zastępowanie uszkodzonego urządzenia starej generacji urządzeniem nowej generacji. W wyniku zachodzących w kolejnych generacjach ulepszeń zarówno w użytych częściach, jak i wyglądzie produktu, producenci muszą utrzymywać możliwość serwisowania produktów starej generacji oraz

magazynować części zamienne przez długi czas, aż do wygaśnięcia gwarancji wszystkich urządzeń starej generacji, co generuje koszty.

Po pojawieniu się na rynku produktu nowej generacji spada sprzedaż urządzeń starej generacji, a wraz z nią liczba roszczeń gwarancyjnych. Wprowadzenie nowej metody wydaje się wówczas korzystne zarówno dla producenta, jak i dla klienta. Producent nie ponosi kosztów utrzymywania możliwości serwisowych dla starych urządzeń, zaś klient otrzymuje bardziej zaawansowany technologicznie produkt. W artykule poszukiwana jest odpowiedź na pytanie w którym momencie producent powinien wprowadzić opisaną metodę, by ponoszony przez niego koszt gwarancji był jak najniższy.

### 3 Przegląd literatury

W ciągu ostatnich kilku lat kwestie związane z gwarancją coraz bardziej interesowały badaczy z dziedzin zarządzania operacyjnego i niezawodności. Thorelli (1985) zauważył, że minimalizacja kosztów gwarancji jest nadal wyzwaniem dla producentów, do którego realizacji potrzebne są dwa aspekty badań: dokładne prognozowanie roszczeń gwarancyjnych i właściwe projektowanie strategii gwarancyjnej.

Na temat prognozowania roszczeń gwarancyjnych napisano wiele prac. Podjęli się tego m.in.: Kalbfleisch i inni (1991), Pal i Murthy (2003), Karim i Suzuki (2005), Ion i inni (2007), Akbarov i Wu (2012), Comert i inni (2015).

Powstało także wiele prac dotyczących drugiego ważnego aspektu, czyli strategii gwarancyjnych. Na ten temat pisali m.in.: Kim i Park (2008), Pourakbar i inni (2010), Pourakbar i Dekker (2011), Inderfurth i Kleber (2012), Diaz i inni (2012).

### 4 Model opisujący koszt gwarancji

Na Wykresie 2 przedstawiono wielkość sprzedaży produktów starej oraz nowej generacji w zależności od czasu.

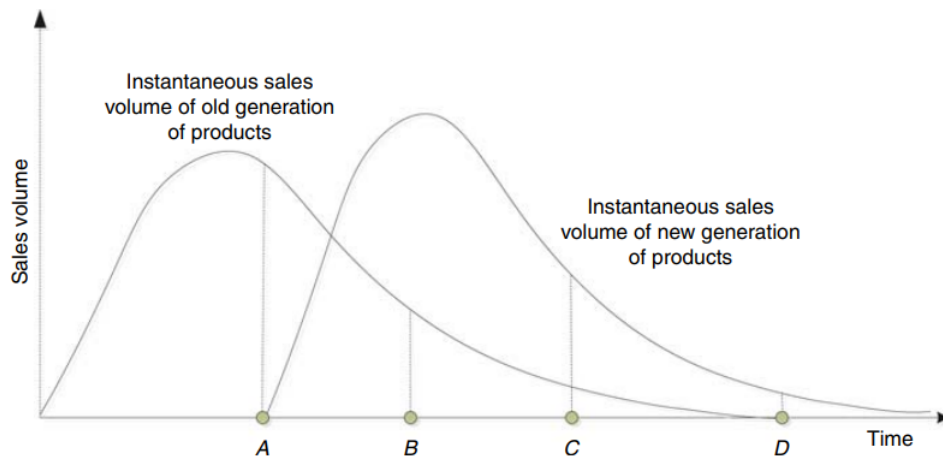
Przez  $T_e$  oznaczamy moment wprowadzenia na rynek produktów nowej generacji. Widzimy, że od tego momentu sprzedaż produktów starej generacji spada przy jednoczesnym wzroście sprzedaży produktów nowej generacji.

Moment  $T_0$  jest momentem zakończenia produkcji produktów starej generacji. Od tego momentu wyraźnie spada sprzedaż produktów starej generacji, a wraz z nią liczba awarii.  $T_{end}$  oznacza moment wygaśnięcia gwarancji na wszystkie produkty starej generacji.

Zmienną decyzyjną jest  $T$ , czyli moment zmiany sposobu obsługi gwarancyjnej. Strategia gwarancyjna obejmuje dwa ciągłe etapy, które są zdefiniowane w następujący sposób:

- **Faza 1.** - uszkodzone produkty starej generacji są naprawiane. Faza ta realizowana jest do momentu  $T$ . Ponoszone przez producenta koszty wynikają z utrzymywania gotowości serwisowej, kosztów naprawy oraz magazynowania części zamiennych.
- **Faza 2.** - w miejsce uszkodzonego produktu starej generacji klient otrzymuje za darmo produkt nowej generacji. Ponoszone przez producenta koszty wynikają z kosztów produkcji urządzeń nowej generacji.

Zawarte w tym paragrafie informacje podsumowane są w Tabeli 1.



Wykres 2: Wielkość sprzedaży produktów starej oraz nowej generacji (źródło: artykuł).

Tabela 1: Objasnienia użytych oznaczeń

	A	B	C	D
Znaczenie	Pojawienie się na rynku produktów nowej generacji	Zakończenie produkcji urządzeń starej generacji	Moment transformacji z fazy 1. na fazę 2.	Koniec gwarancji dla produktów starej generacji
Oznaczenie	$T_e$	<b>Time 0</b> ( $T_0$ )	<b>T</b>	$T_{end}$
Faza	Faza 1.		Faza 2.	

## 4.1 Modelowanie liczby roszczeń gwarancyjnych

Liczba roszczeń gwarancyjnych związana jest z dwoma czynnikami: wielkością sprzedaży produktów starej generacji oraz intensywnością awarii.

Funkcję opisującą popyt na produkty starej generacji po momencie  $T_0$  definiujemy w następujący sposób:

$$\mu(t) = \alpha e^{-\beta t}, \quad (1)$$

gdzie  $\alpha > 0$  to wielkość sprzedaży produktów starej generacji w momencie  $T_0$ , a  $\beta > 0$  to pewien parametr związany z czasem.

W przypadku intensywności awarii można rozważać różne modele: o rozkładzie jednostajnym, o dwuparametrowym rozkładzie Weibulla lub model liniowy. W artykule autorzy stosują model liniowy:

$$\lambda(\tau) = \gamma \tau, \quad (2)$$

gdzie  $\tau$  to czas użytkowania produktu, zaś  $\gamma > 0$  to pewna stała. Jednostką czasu jest miesiąc.

Wiążąc oba powyższe równania otrzymujemy wzór opisujący liczbę awarii w określonym momencie  $t$ :

$$M(t) = \int_{t-T_w}^t \mu(x) \lambda(t-x) dx, \quad (3)$$

gdzie  $t \geq T_0 = 0$ , zaś  $T_w$  to długość okresu gwarancji. Zauważmy, że we wzorze uwzględniane są jedynie produkty zakupione nie dawniej niż długość okresu gwarancji od momentu  $t$ . Wynika to z faktu, że prodcent jest zobowiązany do darmowej naprawy tylko tych produktów, które wciąż są na gwarancji.

## 4.2 Analiza kosztu gwarancji

### 4.2.1 Koszt fazy 1.

Kluczową kwestią dla producenta jest zamówienie odpowiedniej ilości części zamiennych wykorzystywanych do naprawy produktów starej generacji. Zużycie wszystkich części zamiennych jest równoznaczne z wprowadzeniem fazy 2.

Zbyt duże zamówienie będzie skutkowało podwyższonym kosztem magazynowania części, zbyt małe - zwiększonymi kosztami związanymi z wydawaniem klientom produktów nowej generacji, których koszt produkcji jest początkowo relatywnie wysoki.

Ilość części zamiennych, którą powinien zamówić producent może być wyliczona z poniższego wzoru:

$$n = \int_0^T (1 - q)M(t)dt, \quad (4)$$

gdzie  $0 < q < 1$  to parametr określający, jaka część zepsutych urządzeń może być naprawiona bez wykorzystania części zamiennych.

Koszt magazynowania części zamiennych można zatem wyrazić za pomocą wzoru:

$$C_1(T) = C_h \int_0^T \left( n - \int_0^x (1 - q)M(t)dt \right) dx, \quad (5)$$

gdzie  $C_h$  koszt magazynowania części zamiennych na sztukę na jednostkę czasu, a wyrażenie

$$\left( n - \int_0^x (1 - q)M(t)dt \right)$$

oznacza stan magazynowanych części w każdej z chwil od 0 do  $T$ .

Wyznaczając całkowity koszt naprawy urządzeń ( $C_2$ ) ponoszony przez producenta w fazie 1. zakładamy, że koszt naprawy jednego urządzenia na jednostkę czasu jest stały i równy  $C_r$ .

$$C_2(T) = \int_0^T C_r M(t)dt \quad (6)$$

W modelu uwzględniony jest również stały koszt serwisu gwarancyjnego. Obejmuje on m.in. wynagrodzenia pracowników oraz koszt ich wyszkolenia i wyrażony jest wzorem:

$$C_3(T) = C_e T, \quad (7)$$

gdzie  $C_e$  to stały koszt wymienionych czynników w przeliczeniu na jednostkę czasu.

Całkowity koszt gwarancji w fazie 1. wyliczany jest zatem ze wzoru:

$$C_{S_1}(T) = C_1(T) + C_2(T) + C_3(T). \quad (8)$$

### 4.2.2 Koszt fazy 2.

W fazie 2. uszkodzone produkty starej generacji wymieniane są na produkty nowej generacji. Koszt ponoszony przez producenta to zatem koszt produkcji urządzenia nowej generacji pomniejszony o wartość części urządzenia starej generacji.



W związku z tzw. "efektem uczenia" koszt produkcji często spada wraz z upływem czasu. Koszt produkcji w przeliczeniu na jednostkę definiujemy wzorem:

$$C_{NG}(t) = C_0(t - T_0 + 1)^{-\delta} \quad T_0 < t < T_{end}, \quad (9)$$

gdzie  $T_0 < t < T_{end}$ ,  $C_0$  to koszt produkcji urządzenia nowej generacji w chwili  $T_0$ , zaś  $\delta$  to parametr efektu uczenia. Rozważany jest jedynie przedział czasu między  $T_0$  a  $T_{end}$ , gdyż nieopłacalnym jest wprowadzenie fazy 2. przed zakończeniem produkcji urządzeń starej generacji.

Części oddawanych przez klientów uszkodzonych urządzeń starej generacji wciąż mają pewną wartość. Można ją wyliczyć ze wzoru:

$$E(V_s(t)) = C_{OG} \left( 1 - \frac{E(S(t))}{T_w} \right), \quad (10)$$

gdzie

$$E(S(t)) = \frac{\int_{t-T_w}^t \lambda(t-x)\mu(t)(t-x)dx}{M(t)} \quad (11)$$

to oczekiwany czas do awarii urządzeń starej generacji. Im bardziej wartość  $E(S(t))$  zbliża się do  $T_w$ , tym mniej producent zarabia na częściach oddawanych mu urządzeń starej generacji. Wiąże się to bezpośrednio z faktem, że maleje liczba urządzeń, których awaria następuje w okresie gwarancji.

Korzystając z powyższych równań możemy wyznaczyć koszt wymiany uszkodzonego urządzenia starej generacji na produkt nowej generacji:

$$C_4(T) = \int_T^{T_{end}} (C_{NG}(t) - E(V_s(t))) M(t) dt. \quad (12)$$

Funkcja podcałkowa to koszt produkcji urządzenia nowej generacji pomniejszony o wartość części zwracanego produktu starej generacji pomnożony przez liczbę awarii w danej chwili. W przypadku, gdy urządzenie nowej generacji ulegnie awarii przed upłynięciem okresu gwarancji zastępowanego produktu starej generacji, producent zobowiązany jest do pokrycia kosztów naprawy.

Koszt naprawy urządzenia nowej generacji można opisać wzorem:

$$C_5(T) = \int_T^{T_{end}} C_{r2} N(t) dt, \quad (13)$$

gdzie

$$N(T) = \int_{\max[T, t-T_w]}^t \kappa(t-x) M(x) dx \quad (14)$$

to liczba awarii urządzeń nowej generacji oraz

$$\kappa(t-x) = \begin{cases} \lambda(t-x) & t-x < T_w - s(x) \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases} \quad (15)$$

to ich intensywność. Dolna granica całki w  $N(T)$  musi być większa od  $T$ , gdyż gwarancja nie odnawia się po wymianie urządzenia. Intensywność awarii nie jest równa 0 tylko wtedy, gdy awaria produktu nowej generacji następuje przed zakończeniem okresu gwarancji zastępowanego urządzenia. W przeciwnym wypadku producent nie jest zobowiązany do pokrywania kosztów naprawy.

Podsumowując, koszt fazy 2. to:

$$C_{S_{II}} = C_4(T) + C_5(T), \quad (16)$$

zaś całkowity koszt gwarancji wyraża się wzorem:

$$C_{total} = C_{S_I} + C_{S_{II}}. \quad (17)$$

## 5 Rozwiązanie dla modelu

W tym rozdziale autorzy omawiają metodę minimalizacji całkowitego kosztu gwarancji zdefiniowanego w równaniu (17) w celu znalezienie optymalnego momentu zmiany strategii  $T^*$ . Dla ułatwienia z początku parametry funkcji popytu oraz funkcji intensywności awarii są stałe. Później udowodnione jest także istnienie optymalnego rozwiązania modelu dla zmiennych parametrów.

### 5.1 Analiza poszczególnych składowych kosztu

Autorzy ustalają parametry funkcji popytu jako  $\alpha = 10^6$  i  $\beta = 1$  oraz intensywność awarii  $\gamma = 0.02$ . Analiza odpowiednich pochodnych doprowadziła do wniosków przedstawionych w tabeli 2.

Składowa kosztu	Faza serwisu gwarancyjnego	Czas	Monotoniczność
$C_1$ - koszt magazynowania	Faza I	$0 \leq t < T$	Rośnie wraz ze wzrostem $T$
$C_2$ - koszt naprawy			
$C_3$ - stały koszt serwisu gwarancyjnego			
$C_4$ - koszt wymiany	Faza II	$t \geq T$	Maleje wraz ze wzrostem $T$
$C_5$ - koszt drugiej usterki			

Tabela 2: Monotoniczność składowych kosztu

### 5.2 Analiza istnienia optymalnego rozwiązania

W przypadku ogólnym, gdy parametry  $\alpha, \beta$  oraz  $\gamma$  nie są odgórnie ustalone, pochodna całkowitego kosztu gwarancji jest dana następująco:

$$\begin{aligned}
\frac{dC_{total}(T)}{dT} = & - \frac{C_{r2}\alpha\gamma^2 \left( e^{(T_{end}-T)\beta} \left( 2e^{T_w} + T_w^2 e^{\beta T_w} - 2T_w \beta e^{\beta T_w} - 2 \right) + (\beta^2 - 1)T_w^2 e^{\beta T_w} \right)}{\beta e^{\beta T}} \\
& - \frac{(e^{T_w} - 1)(C_h\alpha(1 - q)(\beta - \beta e^{\beta T} - \beta T + e^{\beta T} - 1) + (100\alpha(e^{\beta T} - 1)))}{\beta e^{\beta T}} \\
& - \frac{\alpha(e^{\beta T_w} - 1) \left( \frac{C_0}{(T+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_{OG}\gamma(e^{\beta T_w} + 72\beta^2 e^{\beta T_w} - 12\beta e^{\beta T_w} - 1)}{6\beta^2(e^{\beta T_w} - 1)} \right)}{\beta e^{\beta T}} \\
& + \frac{C_h\alpha T(e^{\beta T_w} - 1)}{\beta^2} + \frac{C_r\alpha(e^{\beta T} - 1)(e^{\beta T_w}(T_w - T) + T)}{\beta^2 e^{\beta T}} + C_e
\end{aligned} \quad (18)$$

Wiedząc, że  $\alpha \gg \beta > \gamma$  zauważyć można, że dla małych wartości  $T$  powyższa pochodna przyjmuje wartości ujemne, a gdy  $T$  dąży do  $T_{end}$  - dodatnie.

Co więcej, druga pochodna  $\frac{d^2 C_{total}(T)}{dT^2}$  jest także dodatnia (funkcja  $C_{total}(T)$  jest wypukła), zatem optymalny czas zmiany strategii serwisowania  $T^*$  istnieje.

## 6 Rozbudowana strategia gwarancyjna uwzględniająca wybór klientów

W modelu mieszanym uszkodzone urządzenia są naprawiane w fazie 1. oraz wymieniane na nowe w fazie 2. Podobnie jak w strategii I, w momencie  $T$  następuje zmiana metody serwisowania. Dodatkowo, w fazie 1. klient może zdecydować, czy chce naprawić stare urządzenie, czy też woli zakupić urządzenie nowej generacji za obniżoną cenę.

### 6.1 Liczba roszczeń w strategii II

W pierwszej fazie strategii II klientów można podzielić na dwie grupy - tych, którzy chcą naprawić stare urządzenie oraz tych, którzy decydują się zakupić nowe urządzenie po obniżonej cenie.  $\varphi$  to odsetek klientów, którzy decydują się zapłacić za wymianę urządzenia na nowe. Liczbę klientów, którzy decydują się wymienić uszkodzone urządzenie na nowe można przedstawić następująco:

$$M_Y(t) = \varphi(t)M(t), \quad (19)$$

gdzie  $\varphi$  jest rosnącą funkcją liniową:

$$\varphi(t) = \frac{t}{T} \quad 0 < t < T, \quad (20)$$

a  $M(t)$  jest liczbą awarii w momencie  $t$  (wzór (3)).

Stąd, liczba klientów decydujących się na naprawę uszkodzonego urządzenia, zdefiniowana jest jako:

$$M_N = (1 - \varphi(t)) M(t) \quad (21)$$

Ponadto, współczynnik dyskonta jest dany następująco:

$$r(t) = 1 - \frac{t}{T} \quad 0 < t < T \quad (22)$$

Współczynnik ten maleje od 1 w momencie 0 (klient płaci pełną cenę za urządzenie nowej generacji) do 0 w momencie zmiany strategii serwisowania  $T$  (klient otrzymuje urządzenie za darmo). Po czasie  $T$  koszty wymiany urządzenia pokrywa producent -  $r$  jest równe 0.

### 6.2 Koszt gwarancji w strategii II

W strategii II koszty takie jak: koszt magazynowania części zamiennych, koszt naprawy, koszt wymiany i koszt drugiej awarii różnią się od analogicznych kosztów w strategii I. Wynika to z faktu uwzględnienia decyzji klienta.

W tej strategii magazynowanie części zamiennych do urządzeń starej generacji służy wyłącznie do obsługi serwisowej klientów, którzy nie decydują się na kupno nowego urządzenia. Zatem optymalna ilość części zamiennych dana jest jako:

$$n_{II} = \int_0^T (1 - q) M_N(t) dt, \quad (23)$$

a koszt ich magazynowania jako:

$$C_1^{II}(T) = C_h \int_0^T \left( n_{II} - \int_0^x (1 - q) M_N(t) dt \right) dx \quad (24)$$

Koszt naprawy urządzenia starej generacji liczony jest ze wzoru:

$$C_2^{II}(T) = \int_0^T C_r M_N(t) dt, \quad (25)$$

a koszt wymiany urządzenia na nowe:

$$C_6 = \int_0^T (C_{NG}(t) - E(V_s(t)) - r(t) \cdot P) M_Y(t) dt \quad (26)$$

Jest to koszt produkcji urządzenia nowej generacji pomniejszony o wartość części zwracanych produktów oraz odpowiednio obniżoną cenę nowego urządzenia, pomnożony przez liczbę klientów decydujących się na wymianę.

W porównaniu do strategii I, strategia II z góry zapewnia produkty nowej generacji w celu obsługi serwisowej w fazie I. Liczbę awarii urządzeń nowej generacji, które zastąpiły uszkodzone urządzenia starej generacji, opisuje wzór (3) w rozdziale 4. W sytuacji, gdy kolejna awaria następuje w fazie I, tzn. przed momentem zmiany strategii, to jej koszt, zwany kosztem drugiej awarii, wyrażony jest wzorem:

$$C_7(T) = \int_0^T C_{r2} N_{II}(t) dt, \quad (27)$$

gdzie

$$N_{II}(t) = \int_{\max[0, t-T_w]}^t k(t-x) \mu_Y(x) dx \quad (28)$$

to liczba awarii urządzeń nowej generacji, a

$$k(t-x) = \begin{cases} \lambda(t-x) & t-x < T_w - S(x) \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases} \quad (29)$$

to intensywność awarii urządzeń nowej generacji. Jest ona zdefiniowana analogicznie jak w strategii I.

Całkowity koszt gwarancji w strategii II wyrażony jest zatem następująco:

$$C_{II}(T) = C_1^{II}(T) + C_2^{II}(T) + C_3(T) + C_4(T) + C_5(T) + C_6(T) + C_7(T), \quad (30)$$

gdzie  $C_3(T), C_4(T), C_5(T)$  są takie same jak w strategii I. Różnice w całkowitym koszcie gwarancji oraz optymalnym momencie zmiany strategii pomiędzy obiema strategiami rozważane są w kolejnym rozdziale.

## 7 Eksperymenty numeryczne

W celu sprawdzenia poprawności stworzonego modelu przeprowadzone zostały eksperymenty numeryczne. Wykresy przedstawione w poniższym rozdziale wygenerowane zostały z wykorzystaniem własnej implementacji w środowisku MATLAB. W związku z brakiem pełnej informacji o przyjmowanych przez autorów wartościach parametrów, współczynniki zostały ustalone zgodnie z poniższą tabelą (Tabela 3).

Tabela 3: Wyjściowe wartości współczynników w symulacjach

parametr	wartość
strategia	strategia I
intensywność awarii	liniowa
$\alpha$	$10^6$
$\beta$	1
$\delta$	0.3
$\gamma$	$\frac{1}{75}$
$T_0$	0
$T_{end}$	30
$T_w$	12
$C_h$	7
$C_r$	50
$C_{r2}$	70
$C_e$	$10^7$
$C_0$	1000
$COG$	650
P	1100
q	0.8

### 7.1 Analiza różnych modeli intensywności awarii

Najczęściej używanymi w praktyce modelami intensywności awarii są modele o rozkładzie Weibulla, liniowe oraz o stałej intensywności. Aby możliwe było ich porównanie, parametry zostały dobrane tak, że

$$\int_0^{12} \lambda(t) dt = 0.96,$$

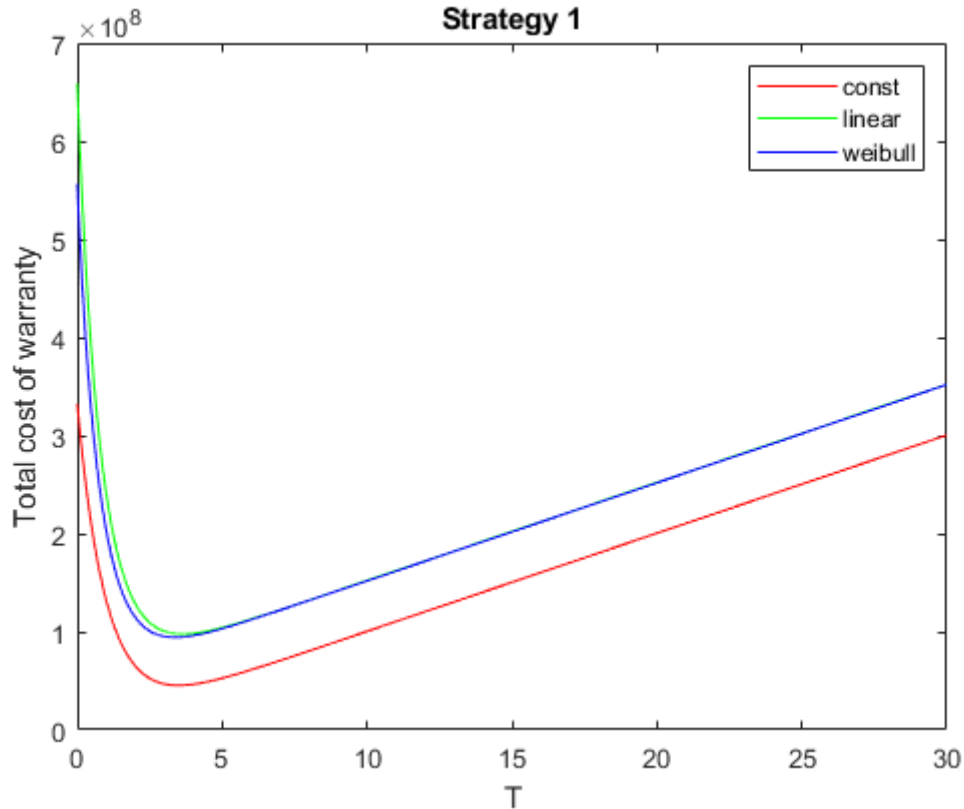
gdzie  $\lambda(t)$  to odpowienia funkcja intensywności awarii, a górna granica całkowania to ustalone przez nas  $T_w$ , czyli okres gwarancji.

Dla każdej z wymienionych intensywności awarii przeprowadzono eksperymenty numeryczne. Otrzymane rezultaty zaprezentowano w Tabeli 4 oraz na Wykresie 3.

Tabela 4: Optymalny czas zmiany metody gwarancyjnej w zależności od modelu intensywności awarii

model	$\lambda(\tau)$	$T^*$
stała intensywność	0.08	3.49
liniowy	$\frac{1}{75}\tau$	3.59
Weibulla	$\left(\frac{2}{6.68}\right) \left(\frac{\tau}{6.68}\right) e^{\left(\frac{\tau}{6.68}\right)^2}$	3.39

Optymalny moment zmiany strategii następuje najpóźniej w przypadku modelu liniowego. Dla tego samego modelu najwyższy jest całkowity koszt gwarancji. Wynika to z dużej liczby awarii pod koniec okresu gwarancyjnego. Średni czas do awarii jest dłuższy, stąd producent zarabia mniej na częściach oddawanych urządzeń starej generacji.



Wykres 3: Całkowity koszt gwarancji w zależności od wybranego modelu intensywności awarii (źródło: opracowanie własne).

## 7.2 Analiza wrażliwości modelu na poszczególne parametry

### 7.2.1 Intensywność awarii

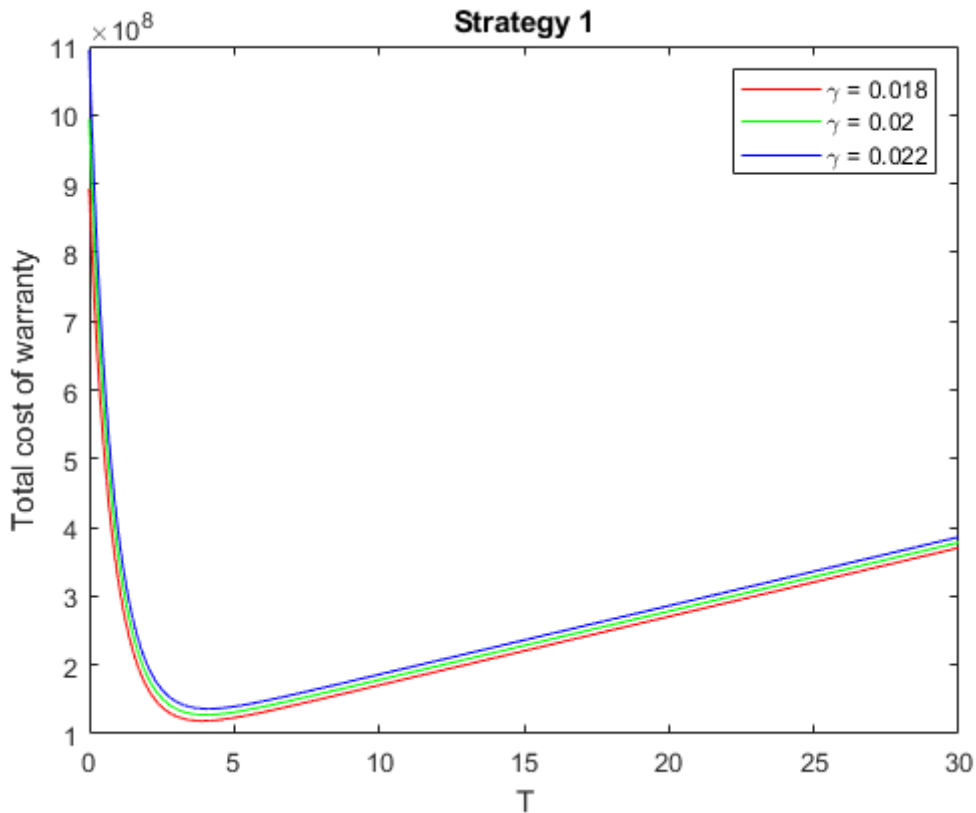
Rozważając wpływ intensywności awarii na całkowity koszt gwarancji oraz optymalny moment zmiany sposobu obsługi gwarancyjnej, będziemy operowali parametrem  $\gamma$  w modelu liniowym. Większa wartość parametru  $\gamma$  odpowiada gorszej jakości produktu. Otrzymane w wyniku eksperymentu rezultaty zaprezentowano w Tabeli 5 oraz na Wykresie 4.

Tabela 5: Optymalny czas zmiany metody gwarancyjnej w zależności od intensywności awarii

$\gamma$	$T^*$
0.018	3.89
0.020	3.99
0.022	4.09

Gdy intensywność awarii jest najmniejsza, najniższy jest też oczywiście całkowity koszt

gwarancji. Wyższa wartość parametru  $\gamma$  skutkuje późniejszym optymalnym momentem zmiany metody gwarancyjnej, gdyż przy dużej liczbie roszczeń gwarancyjnych bardziej opłacalna jest naprawa urządzeń niż wydawanie drogich produktów starej generacji.



Wykres 4: Całkowity koszt gwarancji w zależności od intensywności awarii (źródło: opracowanie własne).

### 7.2.2 Współczynniki związane z kosztami gwarancji

Rozważyć należy również wpływ parametrów związanych z kosztami na model. Zbadamy, jak zmienia się całkowity koszt gwarancji oraz optymalny moment zmiany metody gwarancyjnej w zależności od wartości  $C_h$ ,  $C_r$ ,  $C_r$  oraz  $C_{r2}$ .

- $C_h$  - koszt magazynowania części zamiennych

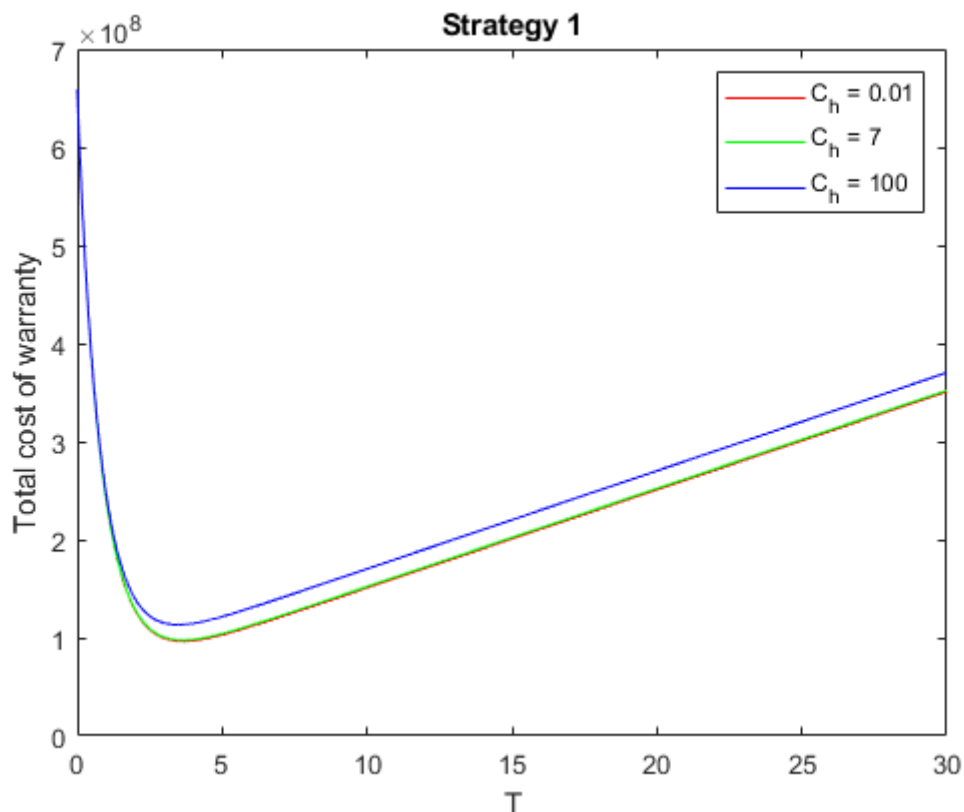
Otrzymane w wyniku eksperymentu rezultaty zaprezentowano w Tabeli 6 oraz na Wykresie 5.

Tabela 6: Optymalny czas zmiany metody gwarancyjnej w zależności od kosztu magazynowania części zamiennych

$C_h$	$T^*$
0.01	3.69
7	3.59
100	3.49

Wyższy koszt magazynowania części zamiennych wiąże się oczywiście z wyższym całkowitym kosztem gwarancji, a także szybszym wprowadzeniem fazy 2. Wynika to

z faktu, że koszt ten ponoszony jest tylko w fazie 1., więc korzystnym dla producenta jest dążenie do jej skrócenia.



Wykres 5: Całkowity koszt gwarancji w zależności od kosztu magazynowania części zamiennych (źródło: opracowanie własne).

- $C_r$  - koszt naprawy urządzenia starej generacji

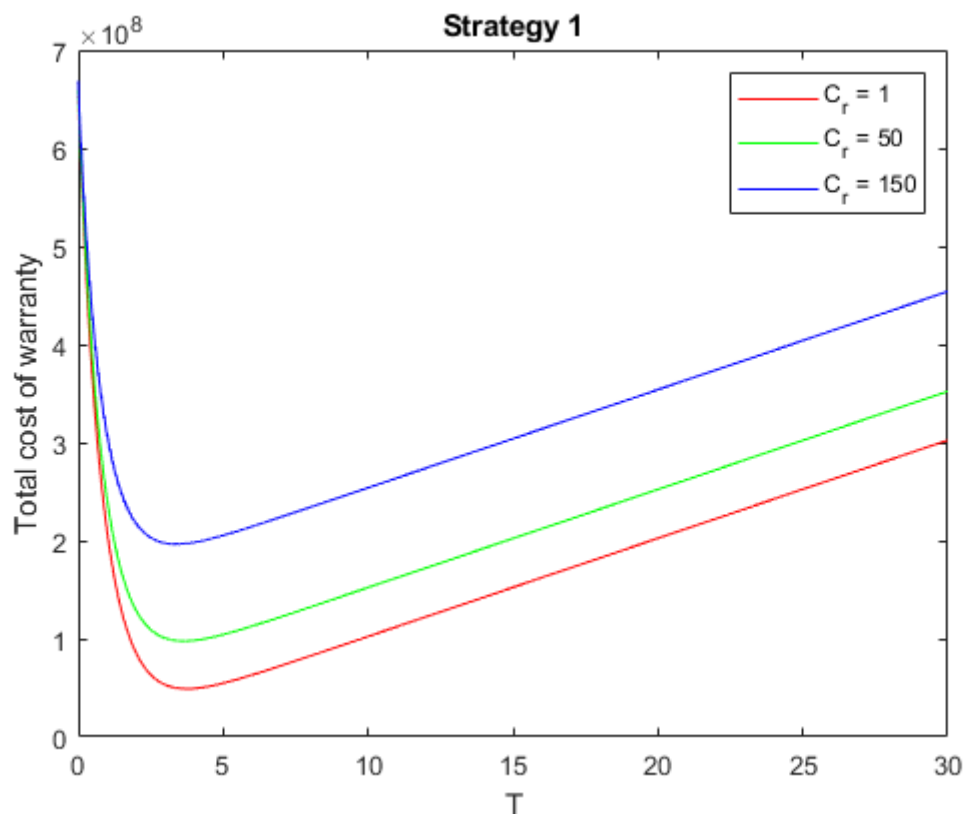
Otrzymane w wyniku eksperymentu rezultaty zaprezentowano w Tabeli 7 oraz na Wykresie 6.

Tabela 7: Optymalny czas zmiany metody gwarancyjnej w zależności od kosztu naprawy urządzenia starej generacji

$C_r$	$T^*$
1	3.76
50	3.59
150	3.39

Wpływ wielkości  $C_r$  na model jest analogiczny do wpływu parametru  $C_h$ . Wraz ze wzrostem wartości kosztu naprawy urządzenia starej generacji rośnie całkowity koszt gwarancji. Wyższa wartość  $C_r$  prowadzi również do wcześniejszego optymalnego momentu zmiany metody gwarancyjnej, ponieważ koszt ten jest ponoszony tylko w fazie 1.





Wykres 6: Całkowity koszt gwarancji w zależności od kosztu naprawy urządzeń starej generacji (źródło: opracowanie własne).

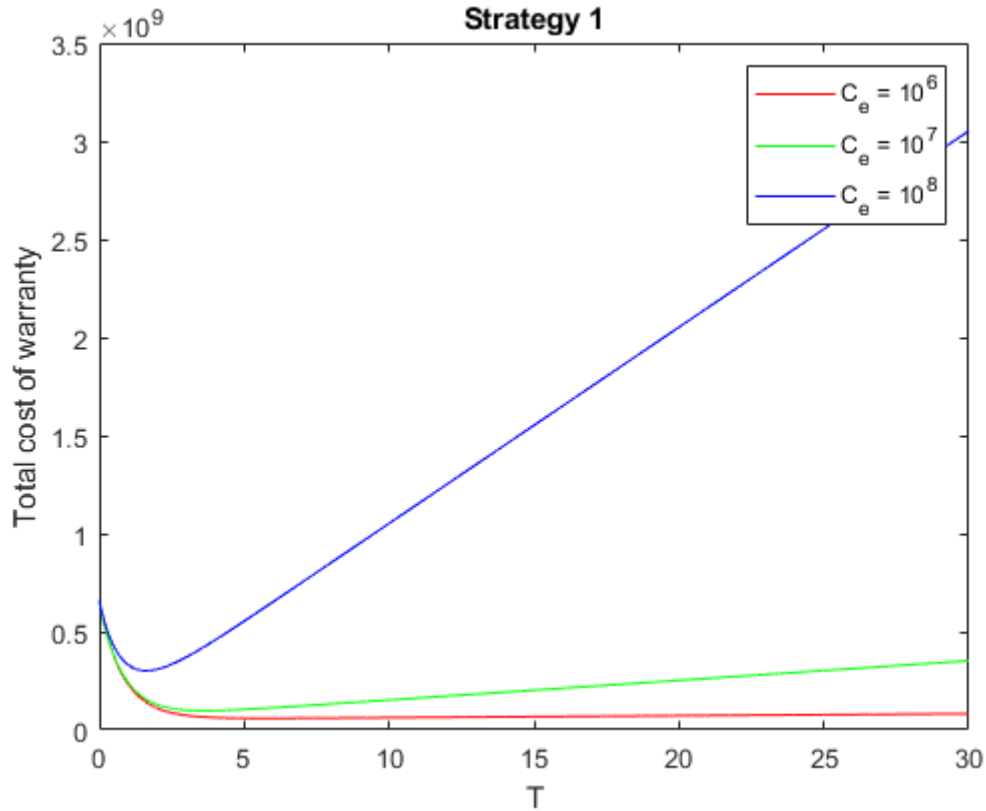
- $C_e$  - ustalony koszt dla urządzeń starej generacji

Otrzymane w wyniku eksperymentu rezultaty zaprezentowano w Tabeli 8 oraz na Wykresie 7.

Tabela 8: Optymalny czas zmiany metody gwarancyjnej w zależności od ustalonego dla urządzeń starej generacji kosztu

$C_e$	$T^*$
$10^6$	5.69
$10^7$	3.59
$10^8$	1.54

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, wzrost wartości  $C_e$  skutkuje wzrostem całkowitego kosztu gwarancji oraz przyspieszeniem wprowadzenia fazy 2. Ciekawą obserwacją jest, że im mniejsza wartość parametru  $C_e$ , tym bardziej krzywa całkowitego kosztu gwarancji jest spłaszczona.



Wykres 7: Całkowity koszt gwarancji w zależności od ustalonego dla urządzeń starej generacji kosztu (źródło: opracowanie własne).

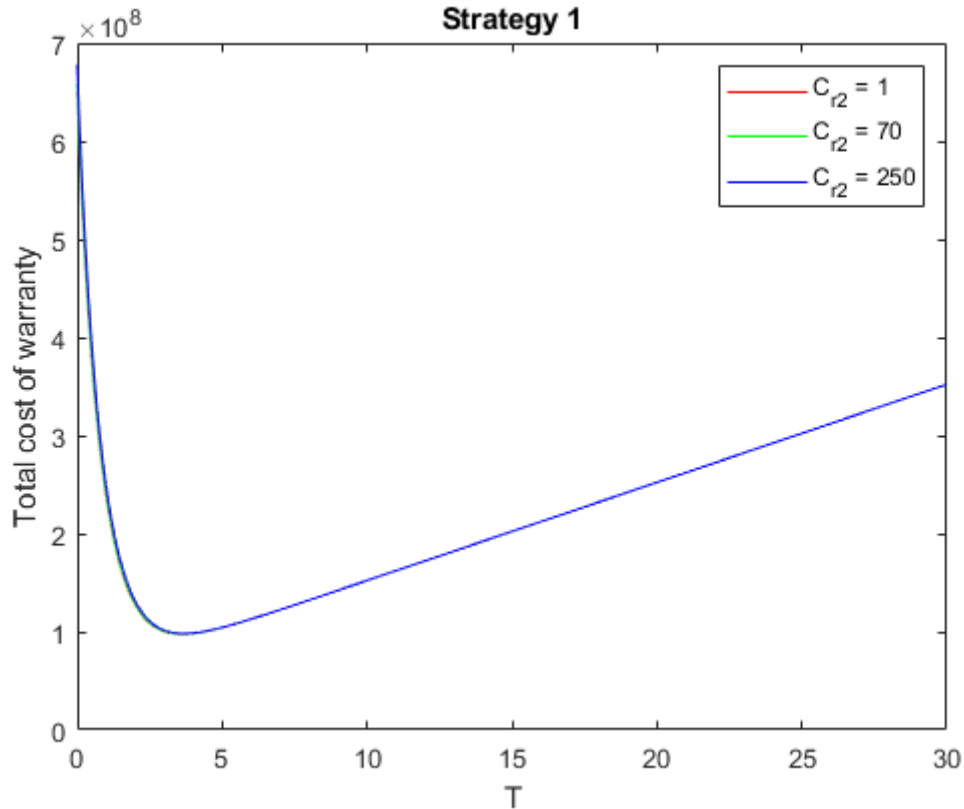
- $C_{r2}$  - koszt naprawy urządzenia nowej generacji

Otrzymane w wyniku eksperymentu rezultaty zaprezentowano w Tabeli 9 oraz na Wykresie 8.

Tabela 9: Optymalny czas zmiany metody gwarancyjnej w zależności od kosztu naprawy urządzenia nowej generacji

$C_{r2}$	$T^*$
1	3.59
70	3.59
250	3.69

Jak widać wielkość parametru  $C_{r2}$  nie ma prawie żadnego wpływu na całkowity koszt gwarancji oraz optymalny moment zmiany metody gwarancyjnej. Wygenerowane krzywe pokrywają się niemal dokładnie. Wynika to z faktu, że wystąpienie awarii urządzenia nowej generacji przed upływem okresu gwarancji jest bardzo mało prawdopodobne.



Wykres 8: Całkowity koszt gwarancji w zależności od kosztu naprawy urządzenia nowej generacji (źródło: opracowanie własne).

### 7.3 Porównanie strategii I i strategii II

Otrzymane w wyniku eksperymentu rezultaty zaprezentowano w Tabeli 10 oraz na Wykresie 9.

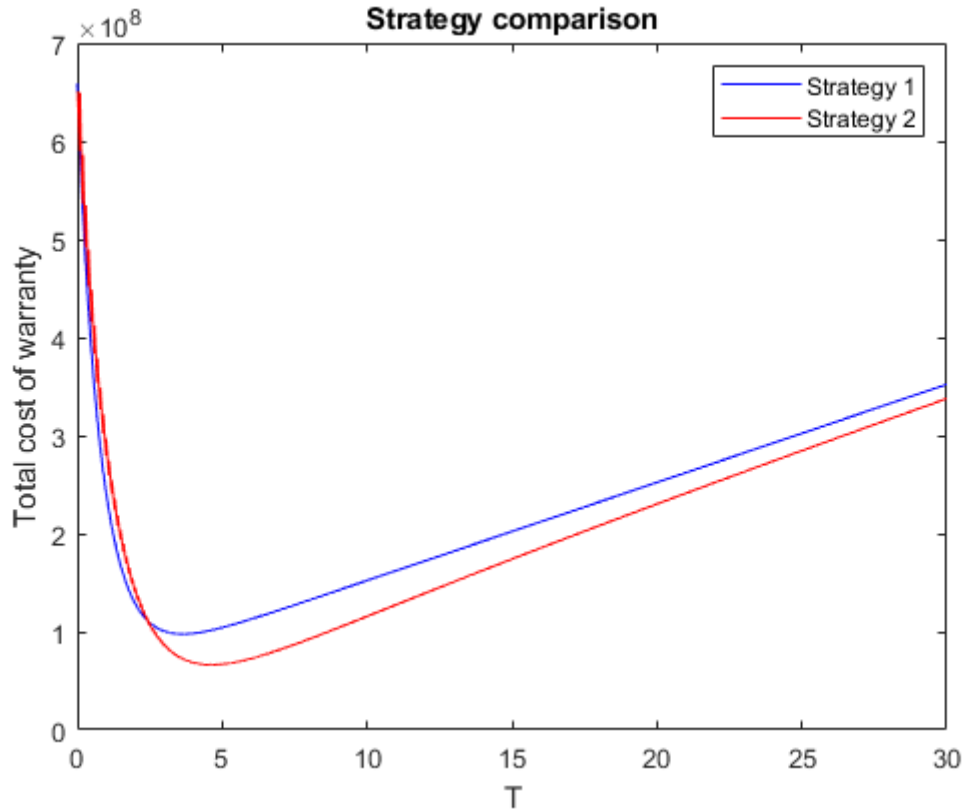
Tabela 10: Optymalny czas zmiany metody gwarancyjnej w zależności od obranej strategii

strategia	$T^*$
strategia I	3.59
strategia II	4.59

Jak można zauważyć, koszt strategii II jest na ogół niższy niż koszt strategii I. Wynika to z faktu, że w pierwszej fazie strategii II część klientów płaci za wydanie im urządzenia nowej generacji. Dodatkowo potrzebnych jest mniej części zamiennych, co obniża koszt ich magazynowania.

Dla małych wartości  $T$  koszt strategii I jest jednak niższy niż strategii II, gdyż wysoki jest wtedy zarówno koszt produkcji urządzenia nowej generacji, jak i opłata proponowana klientowi za jego nabycie w miejsce starego produktu (przez co mniej osób decyduje się na taki sposób realizacji gwarancji).

Optymalny moment zmiany metody gwarancyjnej następuje wcześniej w przypadku strategii I niż strategii II. Wynika to z faktu, że w przypadku strategii II opłacalnym dla producenta jest przedłużenie fazy 1., gdyż coraz większe obniżki ceny urządzenia nowej generacji zachęcają klientów do tego, by je zakupić, a nie naprawiać stare produkty.



Wykres 9: Całkowity koszt gwarancji w zależności od obranej strategii (źródło: opracowanie własne).

## 8 Podsumowanie i wnioski

Gwarancja to rodzaj zapewnienia o jakości produktów i usług, w ramach których producenci/sprzedawcy zobowiązani są do naprawy lub wymiany uszkodzonego produktu na ustalonych warunkach. Z powodu negatywnego wpływu na zyski producenci starają się zminimalizować koszty gwarancji. W tym artykule rozważane były produkty o krótkim cyklu życia, takie jak elektronika użytkowa, smartfony czy komputery. Producenci tego rodzaju produktów muszą często unowocześniać swoje produkty, aby zachować przewagę nad konkurencją, co prowadzi do sytuacji, w której na rynku znajduje się jednocześnie więcej niż jedna generacja tego samego produktu.

W artykule rozważana była nowa metoda realizacji gwarancji, obejmująca dwa etapy - fazę 1., w której uszkodzone produkty starej generacji są naprawiane oraz fazę 2., w której w miejsce uszkodzonego produktu starej generacji klient otrzymuje za darmo produkt nowej generacji. Badano, czy istnieje optymalny punkt  $T^*$  zmiany strategii serwisowania, tzn. moment, w którym uszkodzone urządzenia nie są dłużej naprawiane, a wymieniane na nowe. Uwzględnione zostały koszt naprawy, koszt magazynowania części zamiennych oraz koszt urządzeń nowej generacji, a także tzw. "efekt uczenia". Udowodniono zostało, że optymalny moment  $T^*$  minimalizujący koszty gwarancji istnieje.

Następnie przeanalizowana została rozbudowana strategia gwarancyjna, w której dodatkowo w fazie 1. klient może zdecydować, czy chce naprawiać uszkodzone urządzenie, czy

woli zakupić urządzenie nowej generacji za obniżoną cenę.

Przeprowadzone zostały także eksperymenty numeryczne. Analizowano wpływ różnych czynników na całkowity koszt gwarancji oraz optymalny moment zmiany strategii serwisowania. Porównane zostały różne modele intensywności awarii oraz wrażliwość modelu na poszczególne parametry, takie jak intensywność awarii, czy parametry związane z kosztami gwarancji. Na podstawie otrzymanych rezultatów wyznaczono optymalne momenty zmiany metody serwisowania dla obu strategii.

Autorzy artykułu zauważają jednak, że nie rozważyli wszystkich czynników, które mogą mieć wpływ na badany problem. Wskazują, że w dalszych badaniach warto byłoby uwzględnić wartość pieniądza w czasie, a także sytuację, w której na rynku znajduje się więcej niż dwie generacje danego produktu. Dodatkowo, ciekawe byłoby sprawdzenie, czy strategia II, w której produkty starej generacji mogą być wymieniane na produkty nowej generacji ma wpływ na popyt na urządzenia obu generacji.

## 9 Polemika

Jak wiemy, w fazie 1. strategii II klienci mają możliwość zdecydować, czy chcą naprawić uszkodzone urządzenie, czy wolą zakupić urządzenie nowej generacji po obniżonej cenie. W opracowywanym przez nas artykule przyjęty został liniowy model funkcji  $\varphi$  określającej odsetek klientów decydujących się wymienić urządzenie na nowe. Oznacza to, że liczba klientów, którzy postanawiają zapłacić za wymianę urządzenia zwiększa się liniowo wraz z upływem czasu. W celu sprawdzenia jak dobrze przyjęty model sprawdza się w praktyce, przeprowadziłyśmy ankietę.

### 9.1 Konstrukcja ankiety

Konstruując ankietę, zdecydowałyśmy się zbadać, jaki odsetek osób decyduje się na zakup urządzenia nowej generacji za obniżoną cenę w kolejnych miesiącach fazy 1., gdy trwa ona rok, tzn.  $T = 12$ . Wybór takiego horyzontu czasowego wynikał z dwóch przyczyn:

1. ankieta nie mogła być zbyt długa, gdyż mogłoby to spowodować, że respondenci odpowiadaliby na pytania losowo,
2. pytań musiało być na tyle dużo, by na podstawie wyników ankiety dało się zaobserwować zależności pomiędzy czasem  $t$  (zniżką równą  $\frac{t}{T}$ ) a odsetkiem osób, którzy preferują zakup nowego urządzenia nad darmową naprawą uszkodzonego.

Na początku ankiety znalazła się informacja, która miała na celu wytłumaczenie badanym sytuacji rozważanej w ankiecie:

*W każdym z pytań zostanie Państwu opisana sytuacja, w której urządzenie ulega awarii w stosunkowo krótkim czasie od momentu jego zakupu. Możliwe są dwa sposoby realizacji gwarancji:*

- *naprawa uszkodzonego urządzenia na koszt producenta,*
- *oddanie producentowi uszkodzonego urządzenia (bez zwrotu pieniędzy) i zakup wyższego modelu za obniżoną cenę (np. zwracają Państwo producentowi iPhone'a 4, a w zamian kupują iPhone'a 5 ze zniżką).*

*W każdym z pytań proszeni są Państwo o zaznaczenie tej metody realizacji gwarancji, która wydaje się Państwu bardziej korzystna.*

Następnie respondenci odpowiadali na 11 pytań (odpowiadających kolejnym miesiącom upływającym od zakupu urządzenia) mających formułę:

**Urządzenie zepsuło się 1 miesiąc od momentu jego zakupu. Decydują się Państwo na:**

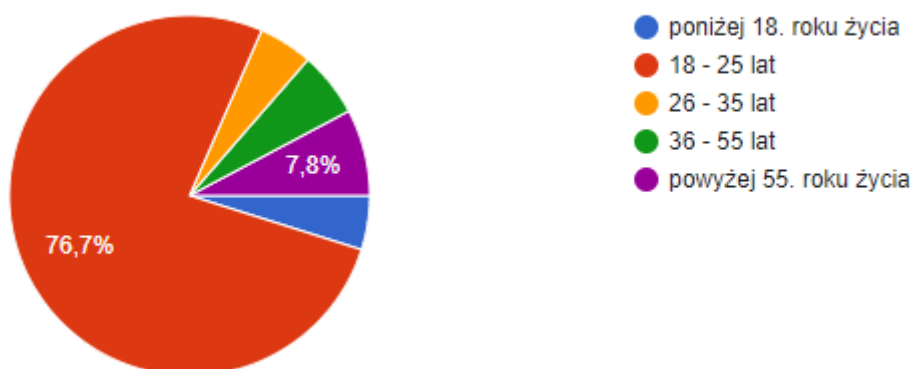
- ☐ **naprawę urządzenia na koszt producenta**
- ☐ **zakup urządzenia nowszej generacji ze zniżką 8.33%**

Na końcu ankiety znalazła się metryczka, w której zadane zostały pytania o wiek i płeć respondentów.

## 9.2 Badana grupa

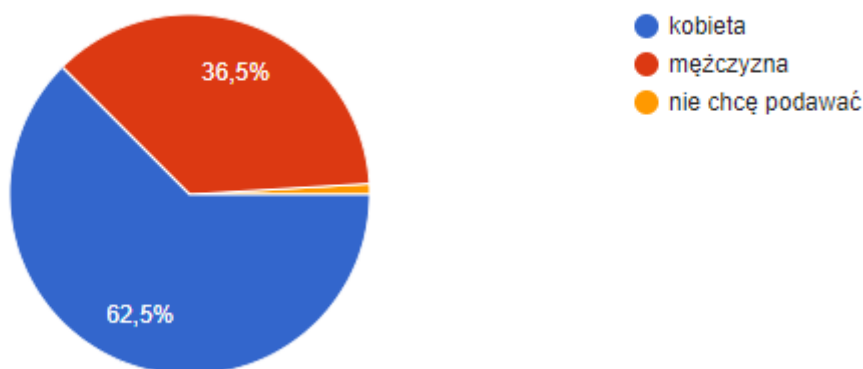
Badana grupa liczyła 104 osoby.

Osoby w wieku 18-25 lat stanowiły aż 76.7 % badanych. Udział respondentów z każdej z pozostałych grup wiekowych nie przekraczał 8 %. Strukturę wieku osób biorących udział w ankiecie przedstawiono na Wykresie 10.



Wykres 10: Struktura wieku osób biorących udział w ankiecie. (źródło: opracowanie własne).

Wśród badanych największą grupę stanowiły kobiety (62.5% badanych), mężczyźni stanowili 36.5 %, a jedna osoba zdecydowała, że nie chce udzielać odpowiedzi na to pytanie. Strukturę płci badanych przedstawia Wykres 11.



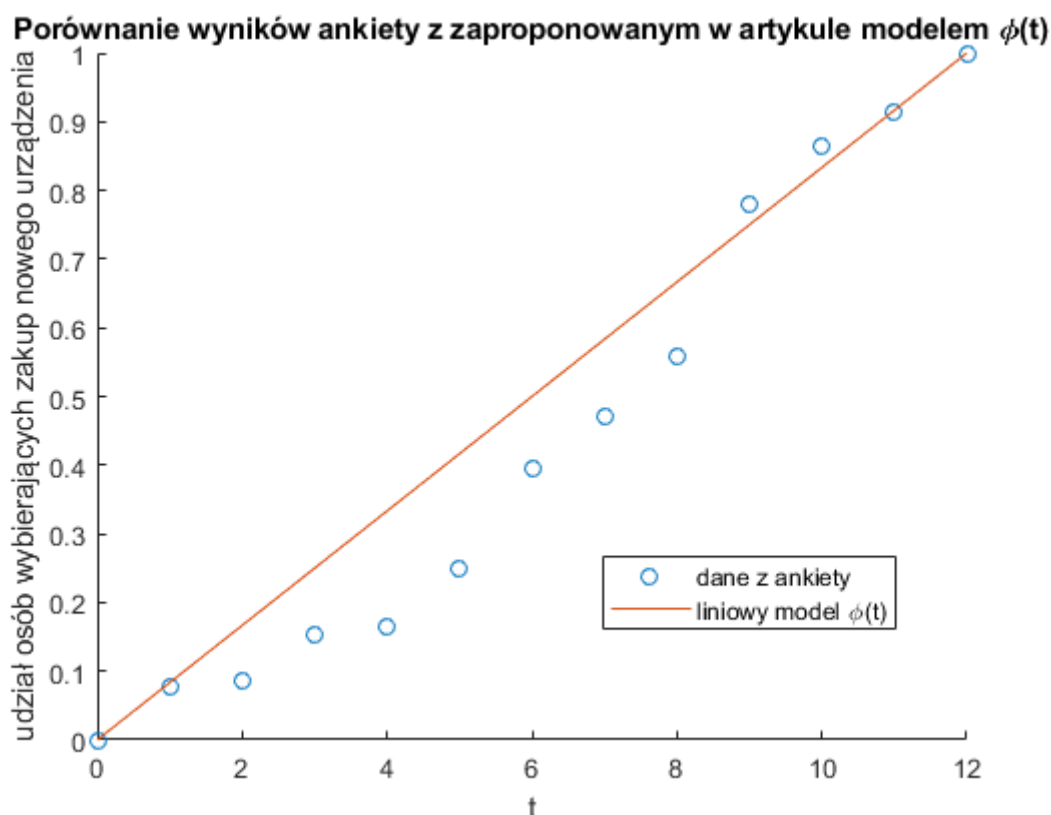
Wykres 11: Struktura płci osób biorących udział w ankiecie. (źródło: opracowanie własne).

## 9.3 Wyniki ankiety a model liniowy

Przypomnijmy, że model zaprezentowany przez autorów artykułu wyrażony jest wzorem:

$$\varphi(t) = \frac{t}{T}, \quad 0 < t < T.$$

Porównanie wyników ankiety z modelem liniowym zaproponowanym w artykule zaprezentowano na Wykresie 12. Wartość 0 w chwili  $t = 0$  oraz 1 w chwili  $t = T$  zostały dodane, by w pełni zobrazować sytuację opisaną w artykule.



Wykres 12: Wyniki ankiety porównane z modelem liniowym (źródło: opracowanie własne).

Możemy zaobserwować, że poza skrajnymi wartościami  $t$  występują dość wyraźne różnice pomiędzy modelem liniowym a danymi zebranych w ankietach. Zauważalna jest przede wszystkim mniejsza tendencja do wyboru zakupu nowego urządzenia dla  $2 \leq t \leq 8$ .

Dla pozostałych wartości  $t$  wyniki z ankiet są zbliżone do funkcji liniowej. Można jednak zauważyć, że między momentami  $t = 8$  i  $t = 9$  następuje wyraźny przeskok i wartości danych ankietowych są większe od tych przewidzianych przez model z artykułu.

## 9.4 Propozycja nowego modelu $\varphi(t)$

W odpowiedzi na rozbieżności między danymi z ankiety a modelem liniowym opisane w poprzednim paragrafie, zdecydowałyśmy się stworzyć własną propozycję funkcji  $\varphi(t)$ . W trakcie jej konstruowania na uwadze musiałyśmy mieć następujące własności:

- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 0$ ,
- $\lim_{t \rightarrow T^-} \varphi(t) = 1$ ,
- $\varphi(t)$  jest ciągła na  $(0, T)$ .

Dane empiryczne zdają się układać w krzywą przypominającą spłaszczoną literę „S”. Budzi to skojarzenie z kształtem funkcji  $\exp(-x^2)$ , którą to funkcję potraktowałyśmy

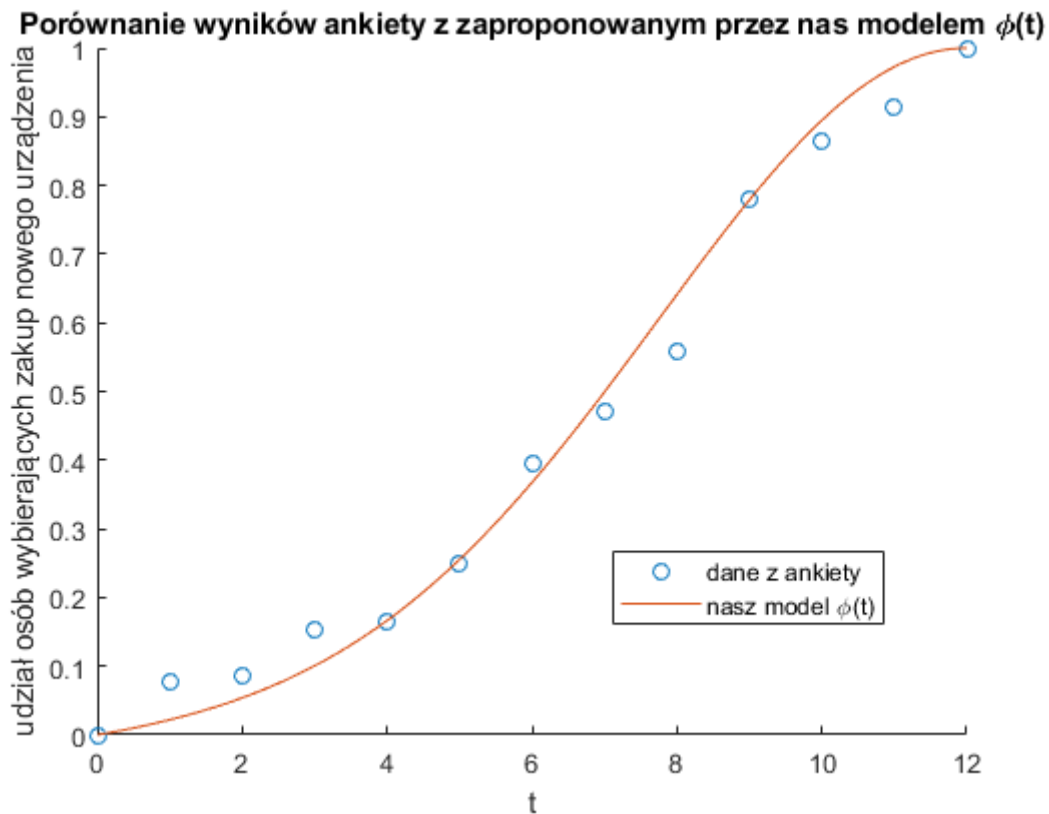


jako wyjściową do dalszych rozważań. Należało ją oczywiście odpowiednio przesunąć oraz unormować, by przyjmowała wartości od 0 do 1.

Ostateczna postać proponowanego przez nas modelu to:

$$\varphi(t) = \exp\left(-\left(\frac{t-T}{\frac{T}{2}}\right)^2\right) - \exp\left(-\frac{4T}{T-t}\right), \quad 0 < t < T$$

Porównanie naszego modelu z wynikami ankiety zaprezentowano na Wykresie 13. Jak można zaobserwować, kształt krzywej dobrze oddaje zachowanie danych empirycznych. Żaden z punktów nie odstaje znacząco od zaproponowanego modelu.



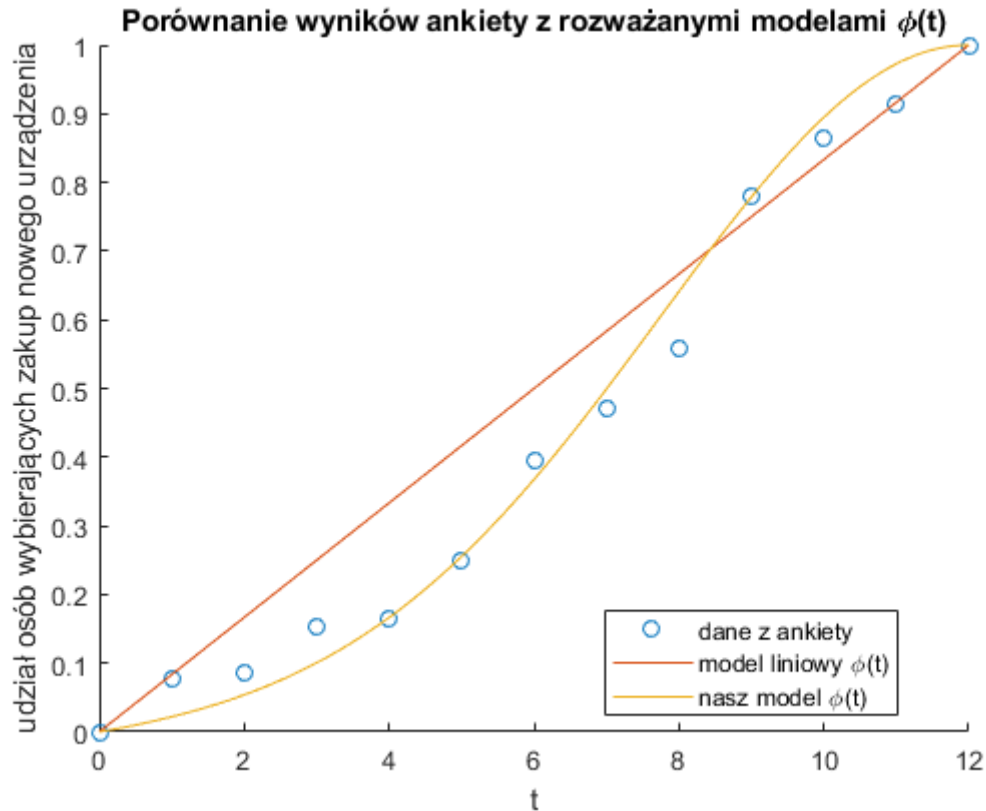
Wykres 13: Wyniki ankiety porównane z naszym modelem (źródło: opracowanie własne).

## 9.5 Porównanie modeli

Kolejnym krokiem naszych rozważań jest porównanie modelu liniowego stosowanego w artykule z naszym modelem.

### 9.5.1 Analiza wizualna

Na Wykresie 14 zaprezentowano porównanie danych ankietowych z rozważanymi modelami. Jak widać, model liniowy spisuje się lepiej dla skrajnych wartości:  $t = 1$  oraz  $t = 11$ , kiedy to dane leżą niemal dokładnie na prostej. Dla  $1 < t < 11$  wartości empiryczne są zdecydowanie bardziej zbliżone do zaproponowanego przez nas modelu.

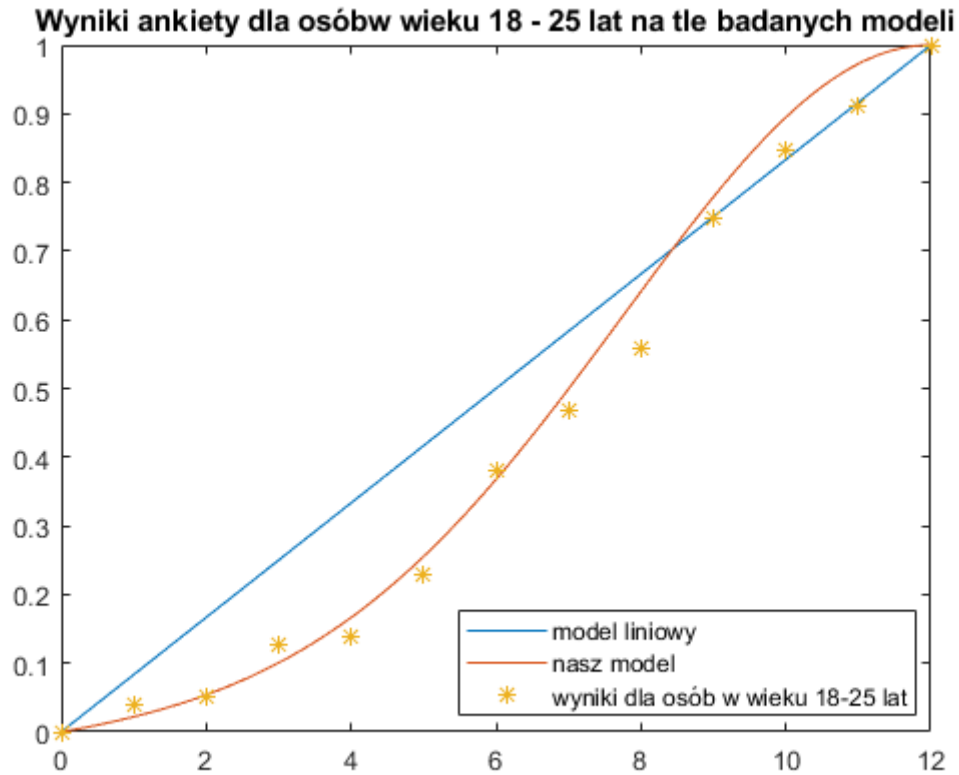


Wykres 14: Wyniki ankiety porównane z rozważanymi modelami (źródło: opracowanie własne).

### 9.5.2 Analiza wizualna w zależności od wieku ankietowanych

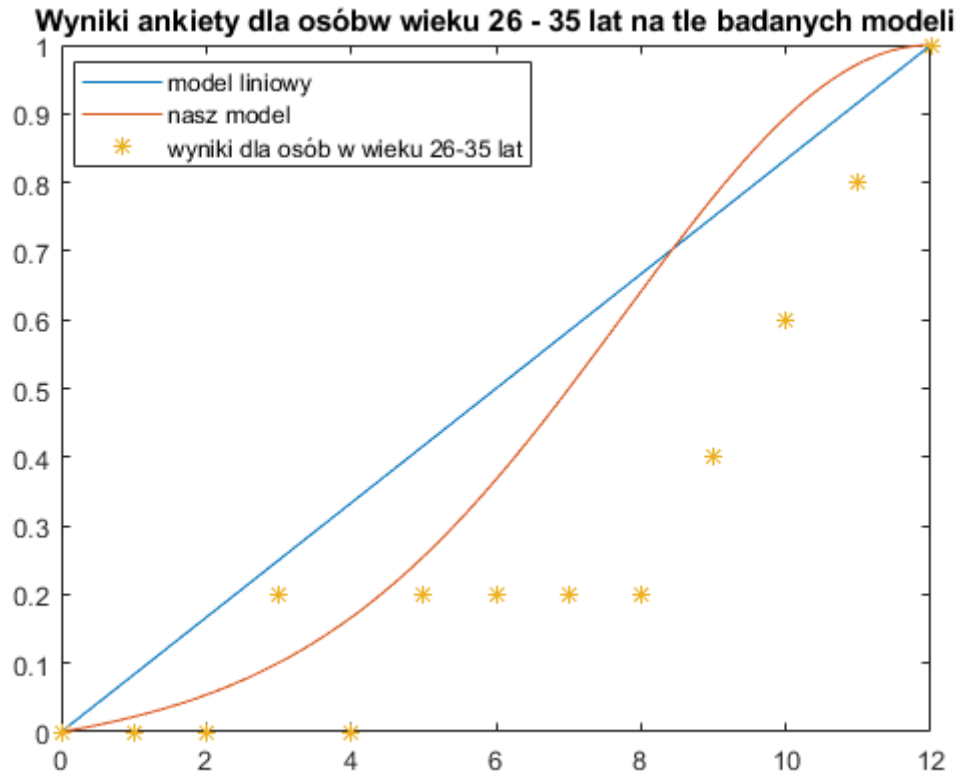
Poniższe wykresy przedstawiają wyniki przeprowadzonej ankiety z podziałem na odpowiednie grupy wiekowe.

Najliczniejszą grupą wśród respondentów były osoby w wieku 18-25 lat i to ich odpowiedzi miały największy wpływ na ostateczny wynik. Widać to wyraźnie na Wykresie 15. Zebrane dane leżą niemal dokładnie na wyznaczonej przez nas krzywej. Dzieje się tak aż do momentu, w którym oba modele się przecinają - od tej chwili wyniki lepiej opisuje model liniowy.



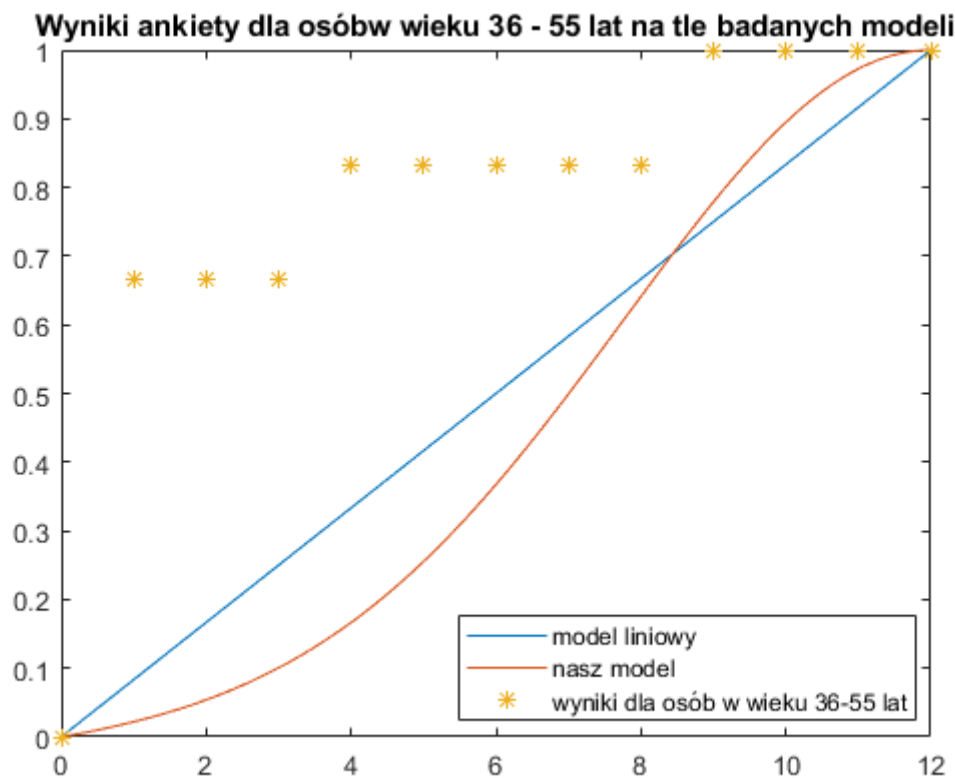
Wykres 15: Wyniki ankiety dla osób w wieku 18-25 lat porównane z rozważanymi modelami (źródło: opracowanie własne).

Wyniki ankiety dla osób w wieku 26-35 lat przedstawia Wykres 16. W tej grupie wiekowej, poza jedną odstającą obserwacją, widać wyraźnie, że ankietowani byli mniej skłonni wymienić urządzenie na nowe niż zakłada zarówno nasz model, jak i model liniowy. Co ciekawe, do momentu, w którym obniżona cena nowego urządzenia jest większa niż 33% ceny podstawowej, na wymianę urządzenia decyduje się nie więcej niż 20% badanych.



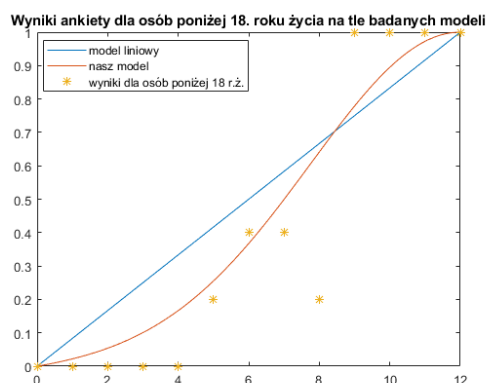
Wykres 16: Wyniki ankiety dla osób w wieku 26-35 lat porównane z rozważanymi modelami (źródło: opracowanie własne).

Kolejną badaną grupą były osoby w wieku 36-55 lat. Na Wykresie 17 widać, że respondenci byli dużo bardziej skłonni kupować nowe urządzenia niż zakładają oba modele. Ponad 60% badanych decyduje się na to już po miesiącu, tzn. gdy wartość obniżki nie przekracza 8% ceny. Co więcej, od momentu, w którym wartość obniżki wynosi 75% ceny, wszyscy badani decydowali się na zakup nowego urządzenia.

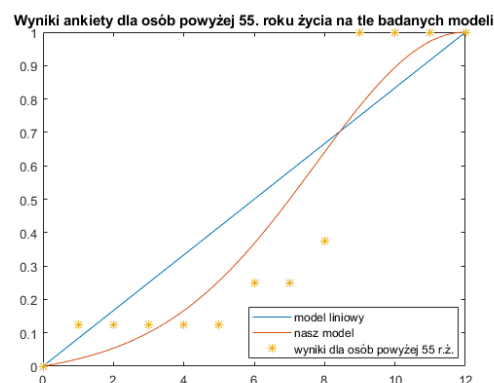


Wykres 17: Wyniki ankiety dla osób w wieku 36-55 lat porównane z rozważanymi modelami (źródło: opracowanie własne).

Wśród osób poniżej 18. roku życia (Wykres 18a) zauważyć można, że przez większość czasu nikt lub niewielki odsetek badanych decyduje się na zakup nowego urządzenia. Podobnie sytuacja wygląda w grupie osób powyżej 55. roku życia (Wykres 18b). W obu grupach w momencie przecięcia się modeli następuje wyraźny skok - wszyscy badani decydują się zakupić nowe urządzenie, gdy wartość obniżki jest większa lub równa 75% ceny.



(a) Wyniki ankiety dla osób poniżej 18. roku życia

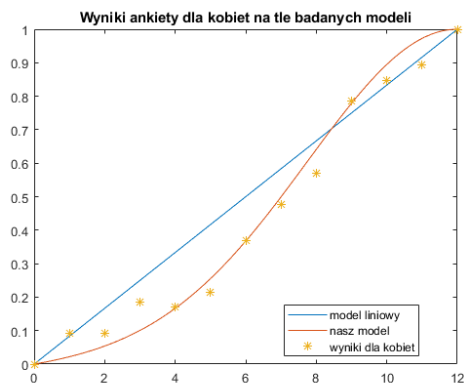


(b) Wyniki ankiety dla osób powyżej 55. roku życia

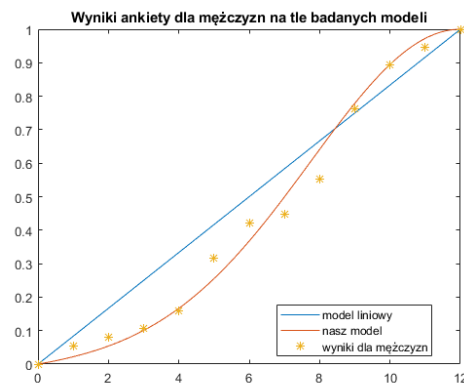
Wykres 18: Wyniki ankiety dla osób poniżej 18. roku życia oraz powyżej 55. roku życia porównane z rozważanymi modelami (źródło: opracowanie własne).

### 9.5.3 Analiza wizualna w zależności od płci ankietowanych

Rozważony został także podział ankietowanych ze względu na płeć. Analizując Wykres 19 możemy zauważyć, że zarówno dla grupy kobiet, jak i mężczyzn wyniki są bardzo podobne. W obu przypadkach dane leżą bardzo blisko krzywej reprezentującej nasz model. Wywnioskować więc można, że płeć badanych nie ma wpływu na wyniki ankiety.



(a) Wyniki ankiety dla kobiet



(b) Wyniki ankiety dla mężczyzn

Wykres 19: Wyniki ankiety dla kobiet i mężczyzn porównane z rozważanymi modelami (źródło: opracowanie własne).

### 9.5.4 Analiza statystyk

Aby porównać, jak dobrze modele są dopasowane do danych, wyznaczyliśmy **średni błąd bezwzględny (MAE)** oraz **błąd średniokwadratowy (MSE)**.

**Średni błąd bezwzględny** wyznaczany jest ze wzoru:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N |y_i - \hat{y}_i|,$$

gdzie:

- $y_i$  to kolejne wartości otrzymane na podstawie ankiet,
- $\hat{y}_i$  to kolejne wartości przyjmowane przez odpowiedni model.

Im mniejsza wartość MAE, tym lepsze dopasowanie modelu do danych.

**Błąd średniokwadratowy** wyznaczany jest ze wzoru:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Im mniejsza wartość MSE, tym lepsze dopasowanie modelu do danych.

Wartości MAE oraz MSE dla obu modeli przedstawione zostały w Tabeli 11.

Tabela 11: Porównanie wartości MAE i MSE.

	MAE	MSE
model liniowy	0.0700	0.0085
nasz model	0.0289	0.0015

W przypadku naszego modelu mniejsza jest zarówno wartość MAE, jak i MSE. Świadczy to o tym, że zaproponowany przez nas model jest lepiej dopasowany do zebranych w ankiecie danych.

### 9.5.5 Wpływ rozważanych modeli na całkowity koszt gwarancji

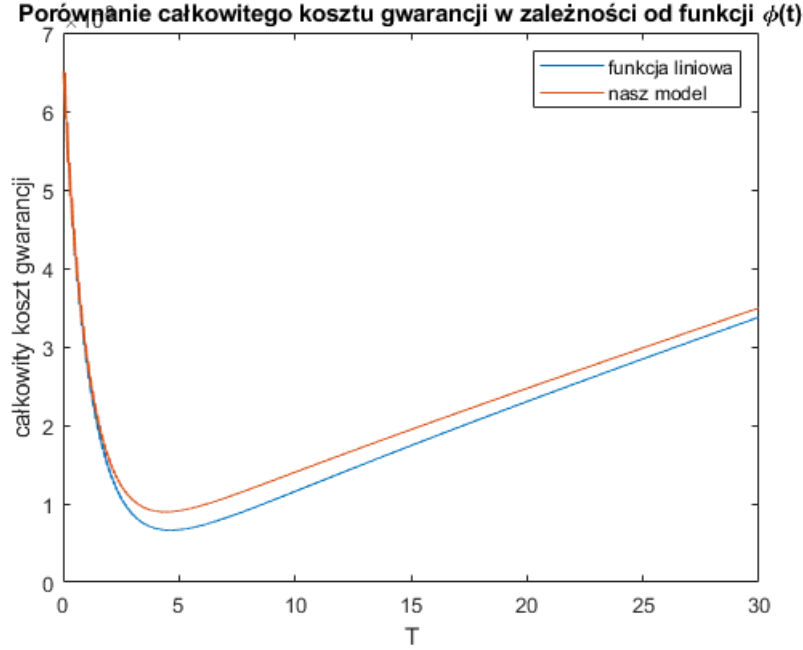
Najważniejszym powodem definiowania nowej funkcji  $\varphi(t)$  jest lepsze oszacowanie całkowitego kosztu gwarancji. Dla producenta kluczową kwestią jest przewidzenie, jakie wydatki będzie musiał ponieść oraz kiedy nastąpi optymalny moment zmiany metody gwarancyjnej.

W celu sprawdzenia, jak zmiana modelu opisującego odsetek osób preferujących zakup nowego urządzenia wpłynie na całkowity koszt gwarancji, wykonano eksperymenty numeryczne. Parametry wywołania zostały przyjęte zgodnie z Tabelą 3. Wyniki zostały przedstawione na Wykresie 20 oraz Tabeli 12.

Tabela 12: Optymalny moment zmiany metody gwarancyjnej w zależności od wybranego modelu  $\varphi(t)$

model	$T^*$
model liniowy	4.59
nasz model	4.39

W przypadku zaproponowanego przez nas modelu całkowity koszt gwarancji jest wyższy, a optymalny moment wprowadzenia fazy 2. następuje szybciej. Wynika to z faktu, że w początkowych miesiącach, kiedy klienci płacą najwyższe kwoty za nowe urządzenie, nasz model przewodzi mniej osób chętnych na taki sposób realizacji gwarancji niż model liniowy. Wyższe są zatem koszty ponoszone za naprawę urządzeń starej generacji. W związku z wyższymi kosztami fazy 1., korzystniejsza dla producenta jest wcześniejsza niż w przypadku modelu liniowego zmiana metody gwarancyjnej.



Wykres 20: Całkowity koszt gwarancji w zależności od wybranego modelu  $\varphi(t)$  (źródło: opracowanie własne).

## 9.6 Podsumowanie i wnioski

W celu zbadania poprawności zaproponowanego przez autorów modelu liniowego funkcji  $\varphi(t)$ , przeprowadzona została ankieta, w której udział wzięły 104 osoby. Dominującą grupą ze względu na wiek były osoby w wieku 18-25 lat, które stanowiły 76.7 % badanych. Wśród ankietowanych 62.5 % stanowiły kobiety, a 36.5 % mężczyźni. Porównanie danych ankietowych z modelem teoretycznym wykazało rozbieżności. W odpowiedzi na ten problem zaproponowany został nowy model opisujący odsetek osób preferujących oddanie uszkodzonego urządzenia producentowi i zakup produktu nowej generacji za obniżoną cenę.

Analiza wizualna oraz porównanie statystyk: MAE oraz MSE wskazały, że nasz model jest lepiej dopasowany do posiadanych danych empirycznych.

Przeprowadzona została także analiza wyników ze względu na wiek i płeć badanych. Okazało się, że odpowiedzi różniły się w zależności od grupy wiekowej. Płeć badanych nie miała wpływu na wyniki ankiety.

Eksperymenty numeryczne wykazały, że wybór modelu  $\varphi(t)$  ma wpływ na całkowity koszt gwarancji oraz optymalny moment wprowadzenia fazy 2. Całkowity koszt gwarancji jest wyższy, a optymalny moment zmiany metody następuje wcześniej.

W dalszych badaniach nad problemem należałoby przeprowadzić ankietę wśród większej grupy osób, w której liczebność poszczególnych grup wiekowych byłaby zbliżona. Ankietę należałoby również poszerzyć o pytania dotyczące powodów wybrania poszczególnych metod realizacji gwarancji oraz rozważyć horyzonty czasowe inne niż  $T = 12$ .