

Projekt : obwody RLC jako filtry pasywne

Bogna Jaszczak
249811

1 sierpnia 2021

1 Cel projektu

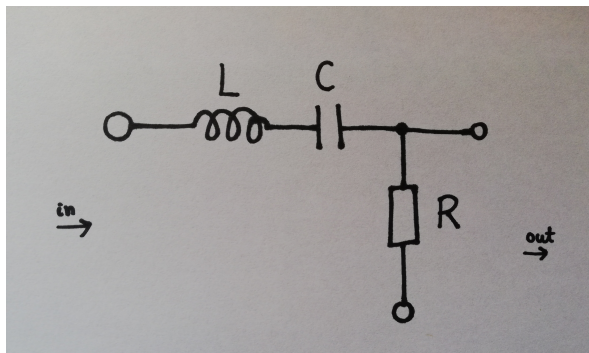
Celem projektu było:

- ustalenie, jakim filtrem jest szeregowy obwód RLC z zaciskami prądu wyjściowego podłączonymi na rezystorze,
- zbadanie charakterystyk częstotliwościowych filtra dla różnych parametrów R , L , C ,
- zbadanie skutków działania filtra dla własnego sygnału,
- sprawdzenie, czy uzyskano filtr idealny.

2 Obliczenia

2.1 Obwód

Rozważamy szeregowy układ RLC, do którego podłączono prąd o napięciu $u(t)$. Zaciski prądu wyjściowego zostały podłączone na rezystorze R (rys.1).



Rysunek 1: Schemat badanego obwodu.

Przypomnijmy prawa Kirchhoffa dla prądu zmiennego [1]:

- **I prawo Kirchhoffa**

Dla każdego węzła obwodu elektrycznego prądu zmiennego suma wartości chwilowych prądów jest równa zero.

- **II prawo Kirchhoffa**

W dowolnym oczku obwodu elektrycznego prądu zmiennego suma wartości chwilowych napięć źródłowych jest równa sumie wartości chwilowych napięć na elementach R , L , C występujących w rozpatrywanym oczku.

Możemy stąd zapisać równanie:

$$u(t) = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t) = L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(x) dx + RI(t).$$

2.2 Transformata Laplace'a

Korzystając z własności transformaty Laplace'a (liniowość, transformata pochodnej, transformata całki) [2] otrzymujemy postać operatorową powyższego równania:

$$U(s) = Ls\hat{I}(s) + \frac{1}{sC}\hat{I}(s) + R\hat{I}(s), \quad s \in \mathbb{C}$$

2.3 Transmitancja

Zaciski prądu wyjściowego podłączone są do rezystora, zatem transmitancja jest stosunkiem napięcia na rezystorze do napięcia $U(s)$:

$$\begin{aligned} H(s) = \frac{U_R(s)}{U(s)} &= \frac{R\hat{I}(s)}{Ls\hat{I}(s) + \frac{1}{sC}\hat{I}(s) + R\hat{I}(s)} = \frac{R}{Ls + \frac{1}{sC} + R} = \frac{1}{\frac{L}{R}s + \frac{1}{RsC} + 1} = \\ &= \left(\frac{R}{L}\right) \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że układ nie ma zer, ale ma dwa bieguny. Aby znaleźć ich wartości należy wyznaczyć pierwiastki równania kwadratowego z mianownika:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}.$$

W zależności od wartości wyróżnika trójmianu kwadratowego Δ otrzymamy różne rozwiązania.

$$\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}$$

Rozważmy trzy przypadki:

1. $\Delta > 0$, dwa pierwiastki rzeczywiste

$$s_1 = \frac{-R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$s_2 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Jest to sytuacja, w której $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Obwód jest wówczas **silnie tłumiony**.

2. $\Delta = 0$, podwójny pierwiastek rzeczywisty

$$s_1 = s_2 = \frac{-R}{2L}$$

Jest to sytuacja, w której $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Występuje wówczas **tłumienie krytyczne**.

3. $\Delta < 0$, dwa pierwiastki zespolone

$$s_1 = \frac{-R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$s_2 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Jest to sytuacja, w której $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Obwód jest wówczas **słabo tłumiony**.

2.4 Charakterystyki częstotliwościowe

W celu wyznaczenia charakterystyk częstotliwościowych musimy w pierw znaleźć wzór na transmitancję widmową. Aby go uzyskać należy we wzorze na transmitancję operatorową podstawić $s = i\omega$. Transformata Laplace'a odpowiada wtedy transformacie Fouriera, a co za tym idzie - to część urojona ma wpływ na filtrowane częstotliwości.

$$H(i\omega) = \left(\frac{R}{L}\right) \frac{i\omega}{(i\omega)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)(i\omega) + \frac{1}{LC}} = \left(\frac{R}{L}\right) \frac{i\omega}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + \frac{R}{L}i\omega}$$

- **Charakterystyka amplitudowa**

$$M(\omega) = |H(i\omega)| = \left| \left(\frac{R}{L} \right) \frac{i\omega}{(\frac{1}{LC} - \omega^2) + \frac{R}{L}i\omega} \right| = \frac{\left(\frac{R}{L} \right) \omega}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R}{L}\omega)^2}}$$

Zbadamy teraz przebieg charakterystyki amplitudowej. Ze względu na interpretację fizyczną interesują nas jedynie dodatnie wartości ω .

- **granice**

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} M(\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega) = 0$$

- **ekstrema i monotoniczność**

Aby znaleźć ekstrema funkcji policzymy pochodną i przyrównamy ją do zera:

$$\frac{dM(\omega)}{d\omega} = \frac{R(1 - (CL\omega^2)^2)}{L\sqrt{(\omega^2 - \frac{1}{CL})^2 + (\frac{R}{L}\omega)^2} \cdot (C^2\omega^2(L^2\omega^2 + R^2) - 2CL\omega^2 + 1)} = 0.$$

Funkcja osiąga maksimum lokalne, gdy $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$M(\omega)$ przyjmuje wówczas wartość 1.

Na przedziale $\omega \in (0, \frac{1}{\sqrt{LC}})$ $M(\omega)$ jest rosnąca, zaś na przedziale

$\omega \in (\frac{1}{\sqrt{LC}}, \infty)$ jest malejąca.

Przebieg $M(\omega)$ wskazuje zatem na **filtr środkowoprzepustowy**.

Pulsacja środkowa układu to

$$\omega_C = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

zaś **częstotliwość środkowa**

$$f_C = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

- **szerokość pasma**

Spadek charakterystyki amplitudowej o 3 dB następuje gdy

$M^2(\omega) = \frac{1}{2}$, gdyż

$$20 \log_{10}(M(\omega)) = -10 \log_{10}(2) \approx -3.$$

Aby wyznaczyć miejsca spadku dla badanego układu należy rozwiązać równanie:

$$\frac{\left(\frac{R}{L} \right) \omega}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R}{L}\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC})^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Stąd

$$(\omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC})^2 + 1 = 2$$

$$\omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC} = \pm 1$$

$$L\omega^2 \pm R\omega - \frac{1}{C} = 0$$

Po rozwiązaniu układu otrzymujemy cztery pierwiastki:

$$\omega_1 = \frac{-R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_2 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_3 = \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_4 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Fizyczną interpretację mają tylko dwa z nich: te, które są rzeczywiste i dodatnie. Są to **pulsacje graniczne**, definiujące szerokość pasma przepustowego.

$$\omega_L = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_H = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Tym samym **szerokość pasma przepustowego** to

$$\beta = \omega_H - \omega_L = \frac{R}{L}.$$

Dla filtrów środkowoprzepustowych często wyznacza się współczynnik Q , zwany też **dobrocią układu**, czyli stosunek pulsacji środkowej do szerokości pasma przepustowego:

$$Q = \frac{\omega_C}{\beta} = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC}}}{\frac{R}{L}} = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}.$$

Dobroć układu stanowi **miarę selektywności filtra**, czyli zdolności do tłumienia przebiegów o częstotliwościach różniących się od jego częstotliwości rezonansowej [3].

Wartość współczynnika Q określa zachowanie układu:

- * $Q < \frac{1}{2}$ - układ jest silnie tłumiony,
- * $Q = \frac{1}{2}$ - układ jest krytycznie tłumiony,
- * $Q > \frac{1}{2}$ - układ jest słabo tłumiony.

Ważny jest również **współczynnik tłumienia** ζ :

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Wartość tłumienia ζ określa zachowanie układu:

- * $\zeta > 1$ - układ jest silnie tłumiony,
- * $\zeta = 1$ - układ jest krytycznie tłumiony,
- * $\zeta < 1$ - układ jest słabo tłumiony.

• Charakterystyka fazowa

Aby wyznaczyć $\Phi(\omega)$ musimy znać część rzeczywistą oraz urojoną transmitancji:

$$Re(H(i\omega)) = \frac{(\frac{R}{L}\omega)^2}{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R}{L}\omega)^2}$$

$$Im(H(i\omega)) = \frac{\frac{R}{L^2C}\omega - \frac{R}{L}\omega^3}{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R}{L}\omega)^2}$$

$$\Phi(\omega) = \arctg\left(\frac{Im(H(i\omega))}{Re(H(i\omega))}\right) = \arctg\left(\frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{\omega \frac{R}{L}}\right).$$

Zbadamy teraz przebieg $\Phi(\omega)$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = \frac{-\pi}{2}$$

$$\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = 0.$$

3 Charakterystyki częstotliwościowe dla różnych parametrów R, L, C

Zbadamy teraz, jak zmienia się kształt i przebieg charakterystyk częstotliwościowych w trzech wymienionych w paragrafie 1.3 przypadkach: gdy oba bieguny są rzeczywiste, gdy jest jeden podwójny biegun rzeczywisty oraz gdy oba bieguny są zespolone.

Przyjmijmy, że chcemy, aby nasz filtr przepuszczał częstotliwość 50 Hz, co odpowiada pulsacji $100\pi \frac{rad}{s}$. Zgodnie z wyliczonym wcześniej wzorem

$$\omega_C = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

możemy dobrać odpowiednie parametry.

Przyjmijmy zatem $L = 0.1 \text{ H}$ oraz $C = \frac{1}{1000\pi^2} \approx 101.32118364234 \cdot 10^{-6} \text{ F}$. Zbadamy charakterystyki częstotliwościowe dla trzech różnych wartości R:

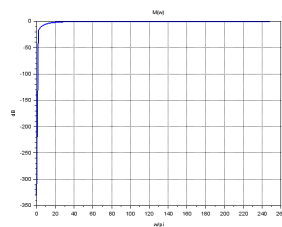
- $R = 200 \Omega$, $\Delta > 0$,
- $R = 20\pi \approx 62.831853071796 \Omega$, $\Delta = 0$,
- $R = 1 \Omega$, $\Delta < 0$.

Przyjrzyjmy się wpierw charakterystyce amplitudowej.

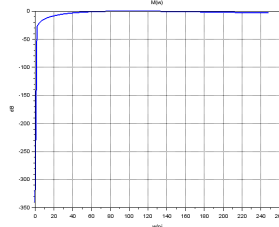
Dla dużej wartości R (rys. 2) funkcja z początku rośnie bardzo szybko, później zaś przyjmuje wartości bliskie zera i bardzo powoli opada. Oznacza to, że poza bardzo niskimi częstotliwościami sygnał niemal nie zostanie wygaszony.

Dla krytycznej wartości R (rys. 3) widoczne jest już wygaszenie pewnych częstotliwości powyżej oraz poniżej ω_C , jednak pasmo przepustowe wciąż jest bardzo szerokie, a przebieg funkcji podobny do wcześniej opisanego.

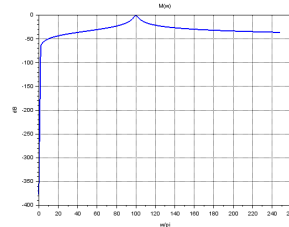
Dla małej wartości R (rys. 4) bardzo widoczna jest "górką" na wysokości ω_C . Oznacza to, że częstotliwości spoza wąskiego pasma przepustowego są silnie wygaszane.



Rysunek 2: $\Delta > 0$

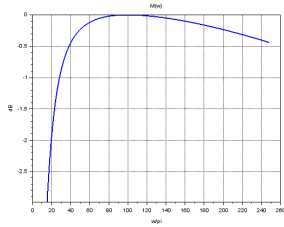


Rysunek 3: $\Delta = 0$

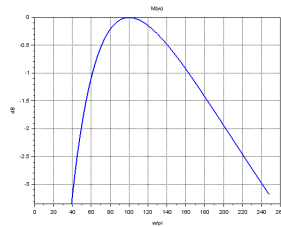


Rysunek 4: $\Delta < 0$

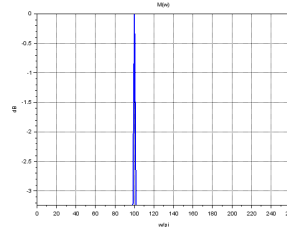
Dla lepszego zobrazowania opisanych wyżej sytuacji przycięto wykresy tak, by było na w nich widać, które częstotliwości są wygaszane o mniej niż 3 dB (rys. 5, rys.6, rys. 7). Jak widać, im mniejsza wartość R , tym wykres charakterystyki amplitudowej staje się coraz bardziej stromy, a pasmo przepustowe coraz węższe.



Rysunek 5: $\Delta > 0$



Rysunek 6: $\Delta = 0$



Rysunek 7: $\Delta < 0$

W trakcie badania naszego sygnału pożądanym efektem będzie silne wyciszenie częstotliwości innych niż częstotliwość środkowa. Po analizie charakterystyk amplitudowych możemy spodziewać się, że najlepiej spisze się filtr z tak dobranymi parametrami, że $\Delta < 0$. Wtedy to **częstość drgań gasnących** wyniesie [4]:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2},$$

gdzie $\delta = \frac{R}{2L}$.

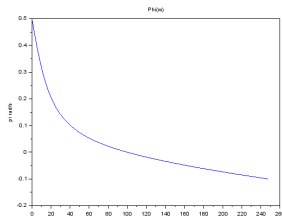
Jest to częstość, z jaką obwód oscyluje, gdy nie działa na niego żadna siła zewnętrzna.

Im mniejsza wartość R , tym bardziej wartość pulsacji własnej jest zbliżona do teoretycznej **pulsacji rezonansowej**, równej

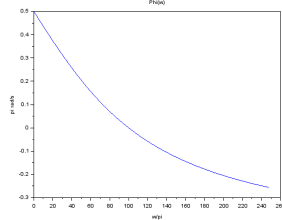
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Stąd wniosek, że przy słabym tłumieniu zachodzi zjawisko **rezonansu**.

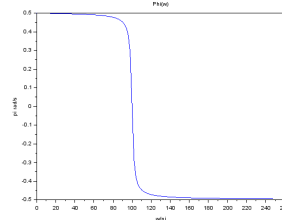
W kolejnym kroku przyjrzymy się charakterystyce fazowej. Dla dużych wartości R (rys. 8) wartość $\Phi(\omega)$ zmniejsza się dość szybko, jednak wraz ze wzrostem ω tempo spadku staje się coraz wolniejsze. Dla krytycznej wartości R (rys.9) spadek dla $0 < \omega < \omega_C$ następuje wolniej niż w poprzednim przypadku, szybciej zaś dla $\omega > \omega_C$. Wykres ten najbardziej przypomina funkcję liniową. Gdy R jest małe (rys. 10), $\Phi(\omega)$ dla $0 < \omega < \omega_C$ przyjmuje wartości bliskie $\frac{\pi}{2}$, zaś dla $\omega > \omega_C$ przyjmuje wartości bliskie $-\frac{\pi}{2}$.



Rysunek 8: $\Delta > 0$



Rysunek 9: $\Delta = 0$

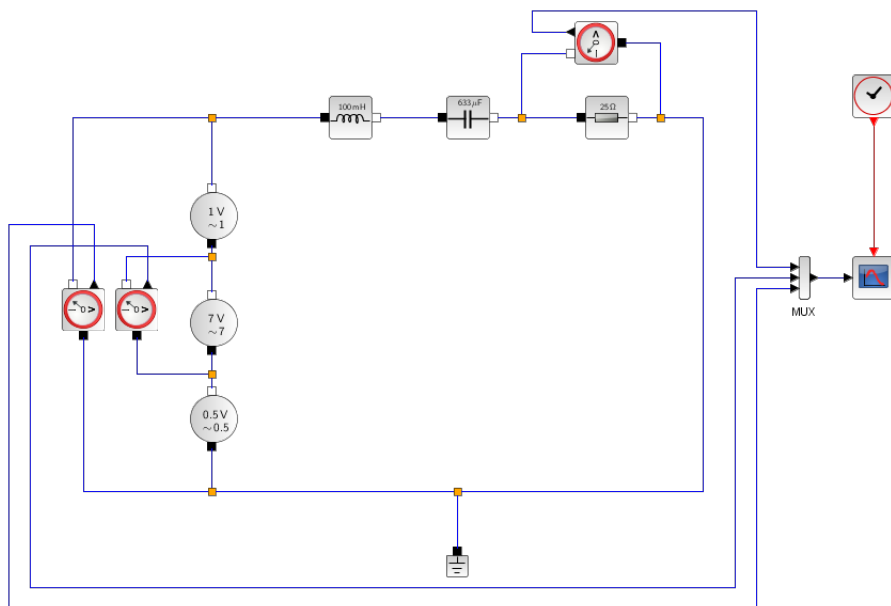


Rysunek 10: $\Delta < 0$

4 Symulacje

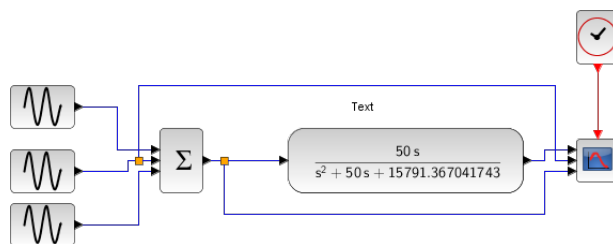
Aby sprawdzić działanie zaprojektowanego filtra wykonano trzy symulacje w programie Xcos.

Pierwsza z nich (rys. 11) została wykonana przy użyciu bloków elektrycznych. Woltomierze zostały podłączone tak, by na jednym wykresie prezentowany był sygnał wejściowy, środkowa składowa sygnału wejściowego oraz sygnał wyjściowy.



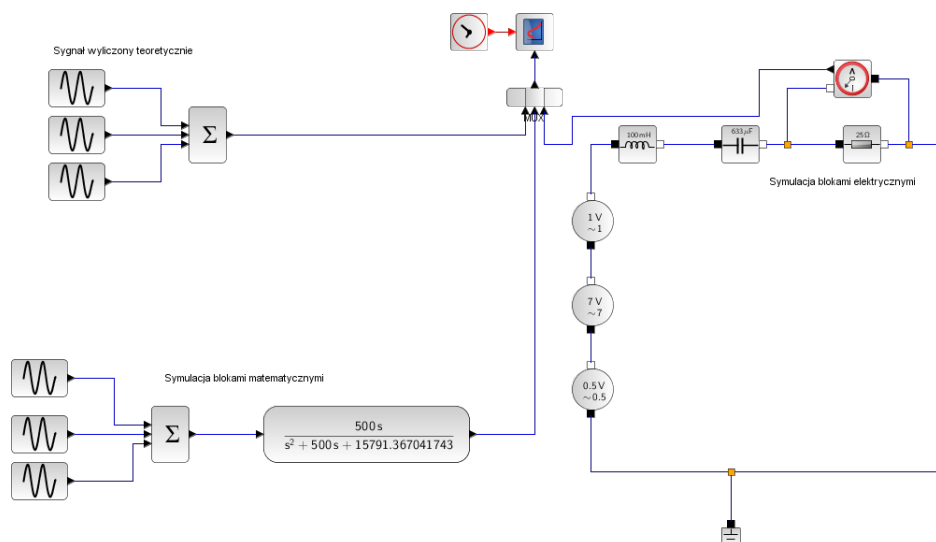
Rysunek 11: Schemat filtra wykonanego w Xcos przy użyciu bloków elektrycznych.

Druga z nich (rys. 12) została wykonana przy użyciu bloków matematycznych. Podobnie jak w poprzednim przypadku wynikiem jej działania były wykres trzech sygnałów: wejściowego, jego środkowej składowej oraz sygnału wyjściowego.



Rysunek 12: Schemat filtra wykonanego w Xcos przy użyciu bloków matematycznych.

Zadaniem trzeciej symulacji (rys. 13) było porównanie sygnałów wyjściowych uzyskanych w wyniku działania dwóch poprzednich symulacji z wyliczonym, teoretycznym sygnałem.



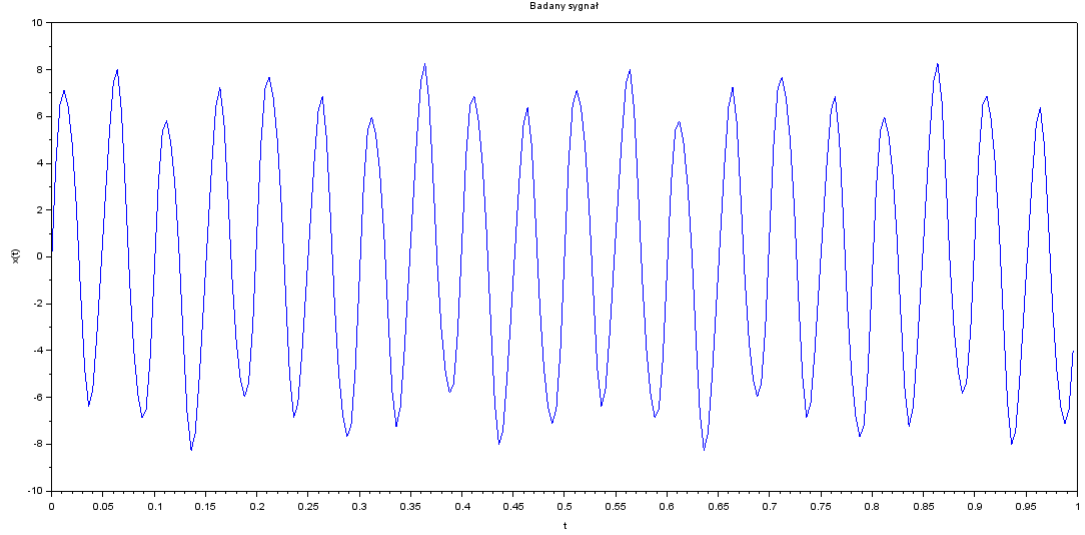
Rysunek 13: Schemat symulacji służącej do porównywania sygnałów.

5 Zastosowanie filtra dla własnego sygnału

Badanym w projekcie sygnałem będzie:

$$x(t) = \sin(12\pi t) + 7 \sin(40\pi t) + 0.5 \sin(100\pi t).$$

Jego wykres zaprezentowano poniżej (rys. 14).



Rysunek 14: Wykres badanego sygnału.

Rozpatrzmy trzy przypadki wspomniane w paragrafie 1.3:

1. $\Delta < 0, R < 2\sqrt{\frac{L}{C}},$
2. $\Delta = 0, R = 2\sqrt{\frac{L}{C}},$
3. $\Delta > 0, R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$

Wartości L i C pozostaną stałe i będą wynosiły:

- $L = 0.1 \text{ H}$
- $C = \frac{1}{160\pi^2} F \approx 0.00063325739776461 \text{ F}.$

Parametry te dobrane są tak, by filtr przepuszczał ”środkową” składową naszego sygnału, czyli tę o częstotliwości 20 Hz.

$$\omega_C = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 40\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f_C = \frac{1}{2\pi} \omega_C = 20 \text{ Hz}$$

$$1. \mathbf{R} = 5 \, \Omega, \quad \Delta < 0$$

• **Bieguny**

$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 25\Omega$, zatem mamy tu do czynienia z sytuacją, gdy oba bieguny są zespolone i sprzężone.

$$p_1 = \frac{-R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \approx -25 - 123.15i$$

$$p_2 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \approx -25 + 123.15i$$

• **Odpowiedź impulsowa**

Dla przyjętych parametrów R, L, C transmitancja operatorowa wyraża się wzorem

$$H(s) = \frac{50s}{s^2 + 50s + 15791.367041743}$$

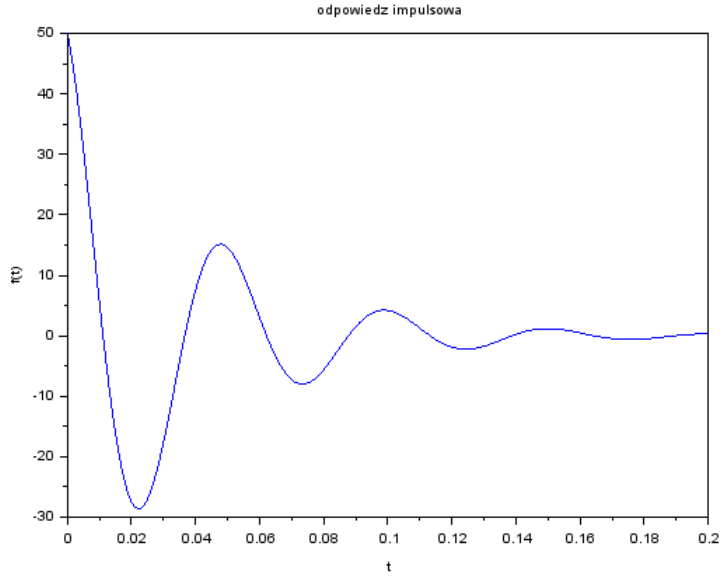
Odpowiedź impulsową otrzymujemy odwracając transformatę Laplace'a:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = 50e^{-25t} \cos(123.15180t) - 10.15007e^{-25t} \sin(123.15180t)$$

Jak można zauważyć na wykresie (rys. 15) odpowiedź impulsowa wyraźnie oscyluje. Co więcej, oscyluje z częstotliwością podobną do częstotliwości, którą nasz filtr ma przepuszczać, gdyż:

$$123.15180 \approx 39.2\pi.$$

Możemy się zatem spodziewać, że w wyniku działania filtra otrzymamy sygnał bardzo zbliżony do składowej $7 \sin(40\pi t)$ sygnału wejściowego.



Rysunek 15: Odpowiedź impulsowa.

- **Współczynnik Q, współczynnik tłumienia**

Dla wskazanych wartości parametrów R, L, C wartości współczynników Q oraz tłumienia wynoszą:

$$- Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}} = 0.8\pi \approx 2.51$$

$$- \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \approx 0.1989.$$

Wartość współczynnika Q jest kilka razy większa od 0.5 (jest to wartość dla przypadku krytycznego), zaś współczynnik tłumienia kilka razy mniejszy od 1 (wartość dla przypadku krytycznego), zatem zjawisko rezonansu powinno być dobrze widoczne.

- **Charakterystyka amplitudowa**

Spadek o 3 dB następuje dla:

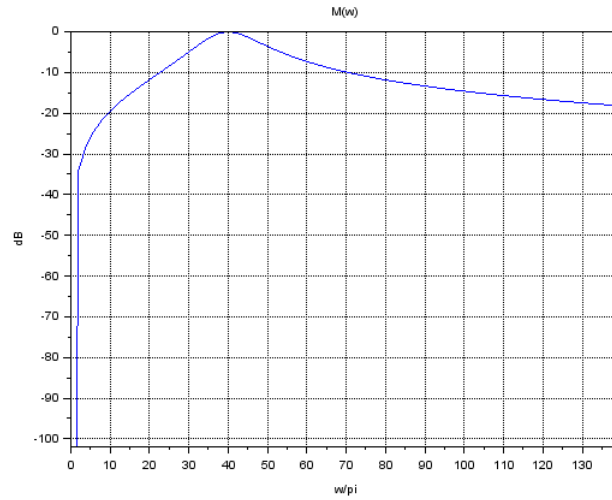
$$\omega_L = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \approx 32.83\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_H = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \approx 48.74\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

zaś szerokość pasma przepustowego to:

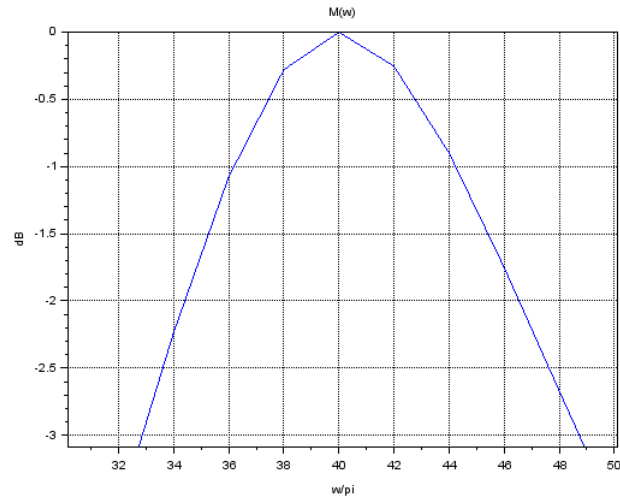
$$\beta = \frac{R}{L} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 15.92\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Jak można zauważyć na wykresie (rys. 16) w okolicach $\omega = 40\pi$ następuje wyraźny wzrost charakterystyki amplitudowej.



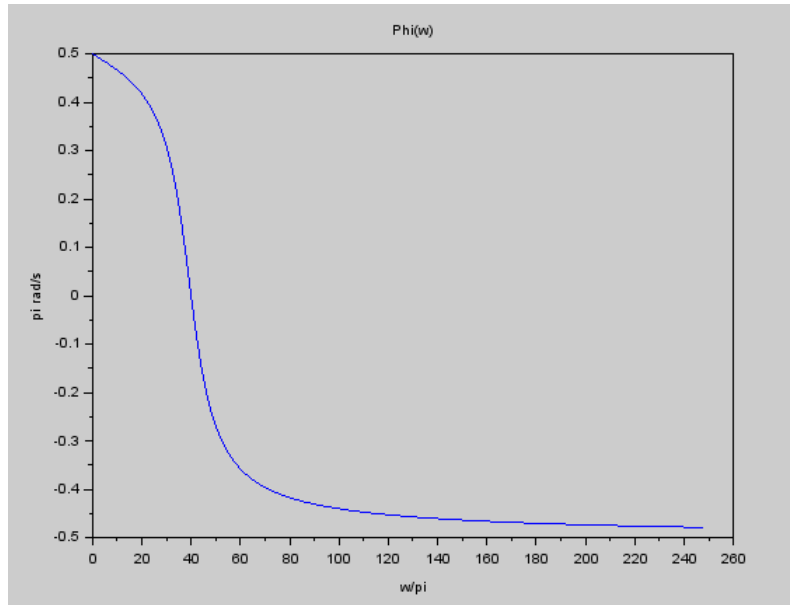
Rysunek 16: Charakterystyka amplitudowa

Na wykresie (rys. 17) przedstawiono dodatkowo przebieg charakterystyki amplitudowej dla częstotliwości z pasma przepustowego. Można zauważyć, że im pulsacja jest bardziej oddalona od ω_C , tym szybciej następuje spadek charakterystyki amplitudowej.



Rysunek 17: Przebieg charakterystyki amplitudowej dla częstotliwości z pasma przepustowego.

- Charakterystyka fazowa



Rysunek 18: Charakterystyka fazowa.

Przebieg charakterystyki fazowej jest zgodny ze wcześniejszymi obliczeniami. Pomiędzy $\omega = 0$ a $\omega \approx 60\pi$ następuje wyraźny spadek.

- Filtracja własnego sygnału

Sprawdźmy, jak będzie wyglądał sygnał po filtracji. W tym celu policzymy wartości $M(\omega)$ oraz $\Phi(\omega)$ dla każdej ze składowych.

$$M(12\pi) = 0.13005754304843112$$

$$\Phi(12\pi) = 1.4403693113325484$$

Nastąpi zatem wyciszenie o 17.717289 dB oraz przesunięcie w fazie o około $1.44 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

$$M(40\pi) = 1$$

$$\Phi(40\pi) \approx 0.$$

Nie nastąpi wyciszenie, zaś przesunięcie fazowe jest znikomo małe.

$$M(100\pi) = 0.186158191033231$$

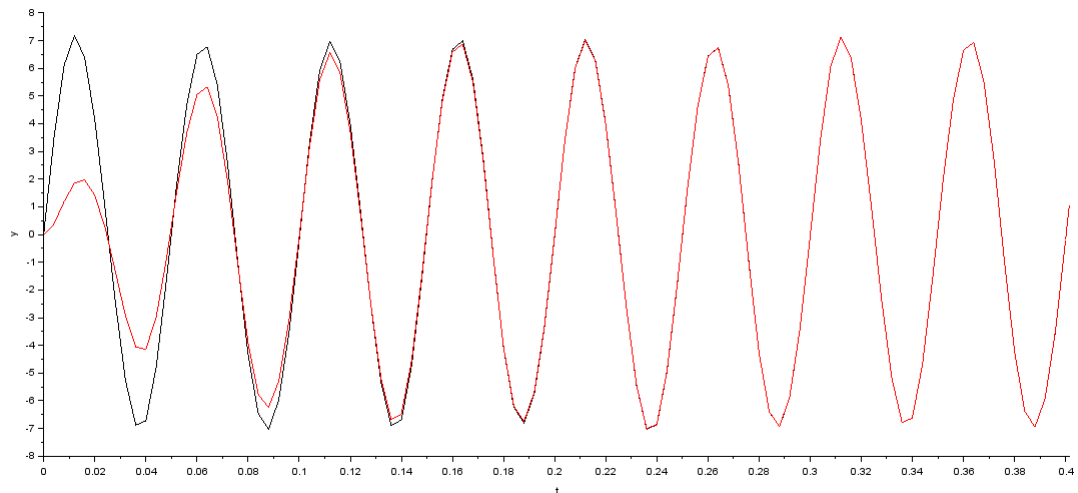
$$\Phi(100\pi) = -1.3835457991497915$$

Nastąpi wyciszenie o 21.903535 dB oraz przesunięcie w fazie o około $-1.38 \frac{rad}{s}$.

Wynika z tego, że sygnał wyjściowy będzie miał postać:

$$x(t) \approx 0.13 \sin(12\pi t - 1.44) + 7 \sin(40\pi t) + 0.09 \sin(100\pi t + 1.38)$$

Wykonano porównanie teoretycznego sygnału wyjściowego z sygnałami wyjściowymi uzyskanymi w wyniku symulacji blokami elektrycznymi oraz matematycznymi w programie Xcos. Wyniki przedstawiono na wykresie (rys. 19).



Rysunek 19: Porównanie wykresu teoretycznego sygnału (kolor czarny) z sygnałami wyjściowymi uzyskanym w wyniku działania programów z blokami elektrycznymi oraz matematycznymi (kolor czerwony i zielony).

• Obserwacje

W wyniku symulacji z wykorzystaniem bloków elektrycznych i matematycznych otrzymano dokładnie taki sam rezultat - ich wykresy pokryły się i widoczny jest jedynie kolor czerwony, odpowiadający blokom elektrycznym.

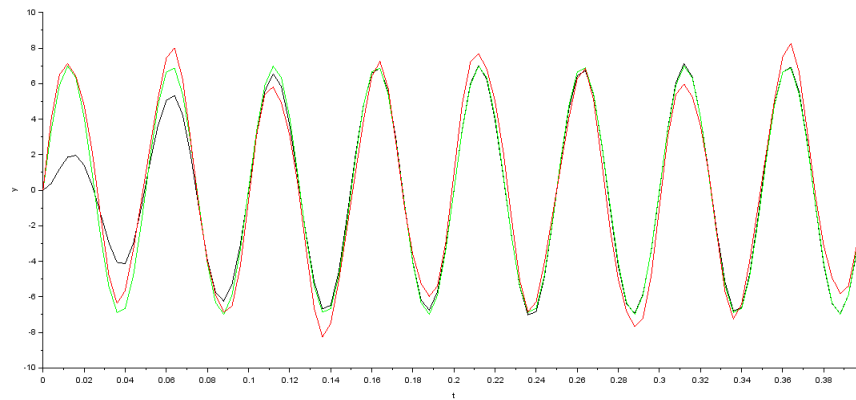
Widoczna jest natomiast różnica pomiędzy sygnałem teoretycznym a sygnałami z symulacji. Podczas gdy amplituda tego pierwszego od początku jest wysoka, sygnały z symulacji początkowo są słabsze i zaczynają pokrywać się z teoretycznym dopiero od pewnego momentu.

W kolejnym kroku wykonano symulację by sprawdzić, czy w wyniku działania filtra rzeczywiście otrzymano sygnał zbliżony do $7 \sin(40\pi t)$. W tym celu nałożono na siebie trzy wykresy: sygnału wyjściowego, środkowej składowej sygnału wejściowego oraz sygnału wyjściowego.

- **Symulacja przy użyciu bloków elektrycznych**

W wyniku symulacji przy użyciu bloków elektrycznych otrzymano poniższy wykres (rys. 20).

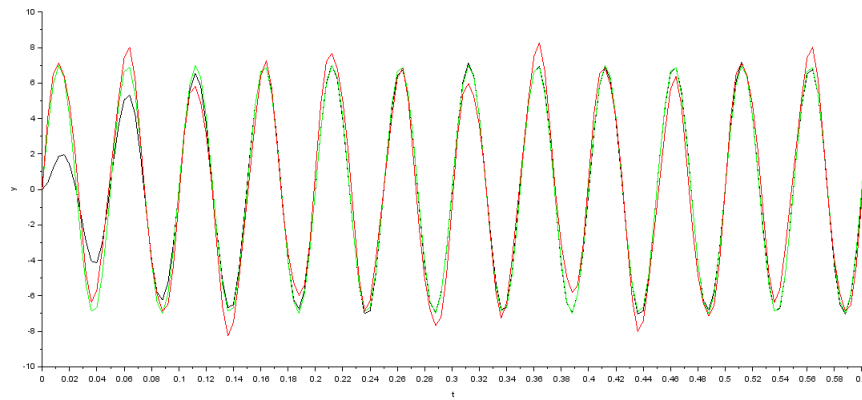
Sygnał wyjściowy początkowo ma niższą amplitudę, jednak po pewnym czasie zaczyna niemal dokładnie pokrywać się ze środkową składową sygnału wejściowego. Wyraźnie widać, że sygnał wejściowy różni się od pozostałych. Stąd wniosek, że zgodnie z przewidywaniami filtr bardzo dobrze spełnił swoje zadanie.



Rysunek 20: Porównanie wykresu sygnału wyjściowego (kolor czarny) z sygnałem wejściowym (kolor czerwony) oraz środkową składową sygnału wejściowego (kolor zielony).

- **Symulacja przy użyciu bloków matematycznych**

W wyniku symulacji przy użyciu bloków matematycznych uzyskano dokładnie taki sam efekt (rys. 21): od pewnego momentu wykres sygnału wyjściowego niemal dokładnie pokrywa się ze środkową składową sygnału wejściowego, a sygnał wejściowy różni się od pozostałych. Potwierdza to wcześniejsze stwierdzenie, że filtr bardzo skutecznie wygasza częstotliwości inne niż częstotliwość środkowa.



Rysunek 21: Porównanie wykresu sygnału wyjściowego (kolor czarny) z sygnałem wejściowym (kolor czerwony) oraz środkową składową sygnału wejściowego (kolor zielony).

2. $R = 8\pi \Omega \approx 25.13274123 \Omega, \quad \Delta = 0$

• **Bieguny**

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, zatem mamy do czynienia z sytuacją, gdy równanie

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

ma jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty postaci $-\frac{R}{2L}$.

$$p_1 = p_2 = \frac{-8\pi}{0.2} = -40\pi \approx -125.6637061.$$

• **Odpowiedź impulsowa**

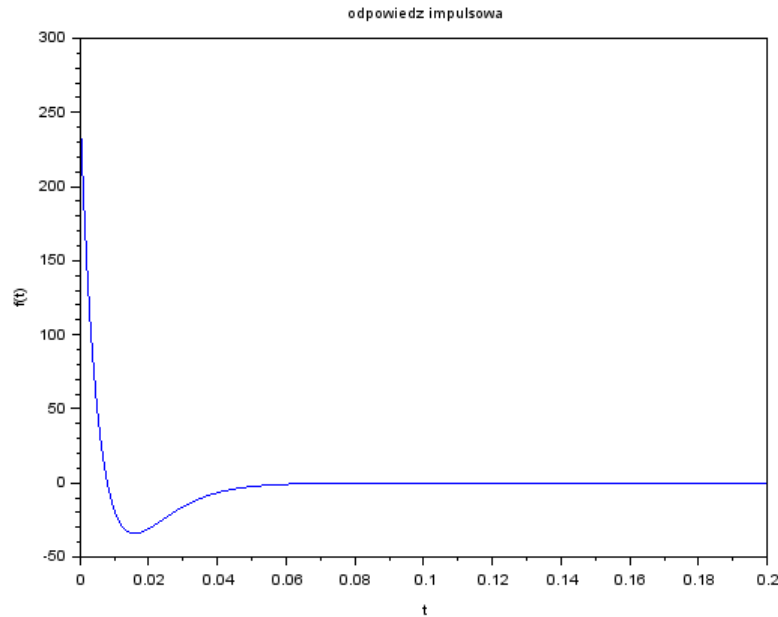
Dla przyjętych parametrów R, L, C transmitancja operatorowa wyraża się wzorem:

$$H(s) = \frac{251.3274123s}{s^2 + 251.3274123s + 15791.367041743}.$$

Odpowiedź impulsową otrzymujemy odwracając transformatę Laplace'a:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = 251.3274123e^{-125.66370t} \cos(9.03597t) - 3495.22181e^{-125.66370t} \sin(9.03597t)$$

Jak można zauważyć na wykresie (rys. 22) w odpowiedzi impulsowej nie występują oscylacje i po gwałtownym spadku na początku stabilizuje się i przyjmuje wartości bliskie 0.



Rysunek 22: Odpowiedź impulsowa.

- **Współczynnik Q, współczynnik tłumienia**

Dla wskazanych wartości R, L, C wartości współczynników Q oraz tłumienia wynoszą:

$$- Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}} = 0.5$$

$$- \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 1.$$

Wartości współczynników potwierdzają, że wartość R została dobrana tak, by występowało tłumienie krytyczne. Spodziewamy się zatem, że sygnał wyjściowy nie będzie tak zbliżony do środkowej składowej jak w poprzednim przypadku, z powodu mniejszej selektywności filtra.

- **Charakterystyka amplitudowa**

Spadek o 3 dB następuje dla:

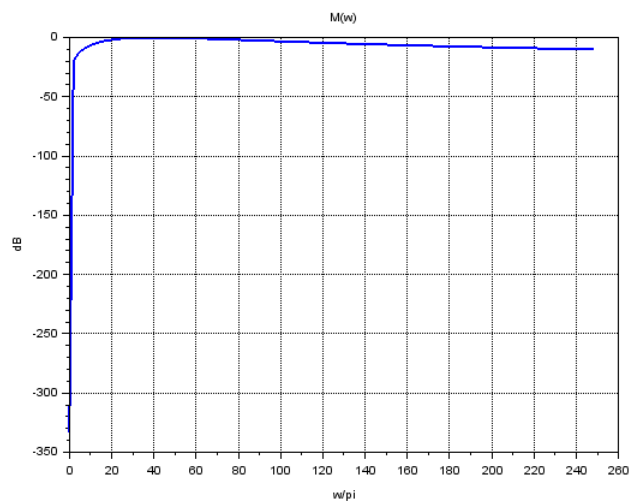
$$\omega_L = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \approx 16.57\pi \frac{rad}{s}$$

$$\omega_H = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \approx 96.57\pi \frac{rad}{s}.$$

Szerokość pasma przepustowego to:

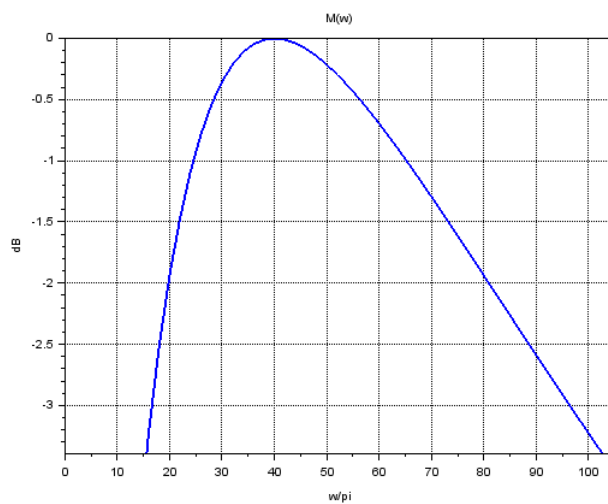
$$\beta = \frac{R}{L} = 251.3274123 \frac{rad}{s} \approx 80\pi \frac{rad}{s}$$

Przebieg charakterystyki amplitudowej (rys. 23) różni się znacząco od poprzedniego przypadku. Nie wiadać tak wyraźnego wzrostu charakterystyki amplitudowej w pobliżu ω_C , a dla wielu ω przyjmowana jest wartość bliska 0.



Rysunek 23: Charakterystyka amplitudowa.

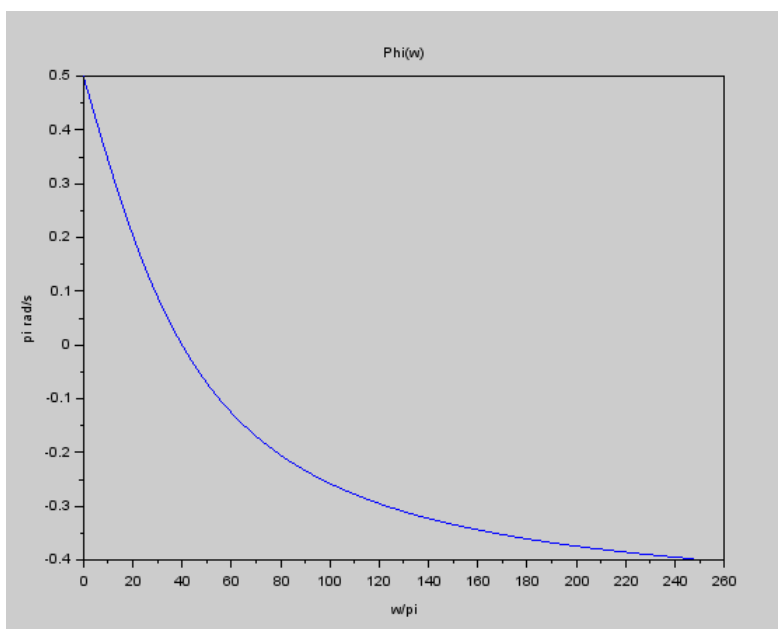
Dodatkowo na wykresie (rys. 24) przedstawiono przebieg charakterystyki amplitudowej dla częstotliwości z pasma przepustowego. Jest ona bardziej "spłaszczona" w pobliżu ω_C , zaś spadek dla $\omega > \omega_C$ jest niemal liniowy.



Rysunek 24: Przebieg charakterystyki amplitudowej dla częstotliwości z pasma przepustowego.

- **Charakterystyka fazowa**

Przebieg charakterystyki fazowej (rys. 25) jest zgodny ze wcześniejszymi obliczeniami. Spadek następuje znacznie wolniej niż w poprzednim przypadku.



Rysunek 25: Charakterystyka fazowa

- **Filtracja własnego sygnału**

Sprawdźmy, jak zmieni się sygnał po filtracji obliczając $M(\omega)$ oraz $\Phi(\omega)$ dla wszystkich składowych badanego sygnału.

$$M(12\pi) = 0.5504587155963295$$

$$\Phi(12\pi) = 0.9878827378391634$$

Nastąpi zatem wyciszenie o 5.185504951 dB oraz przesunięcie w fazie o około $0.99 \frac{rad}{s}$.

$$M(40\pi) = 1$$

$$\Phi(40\pi) \approx 0$$

Nie zmieni się amplituda, zaś przesunięcie w fazie jest znikomo małe.

$$M(100\pi) = 0.6896551724137933$$

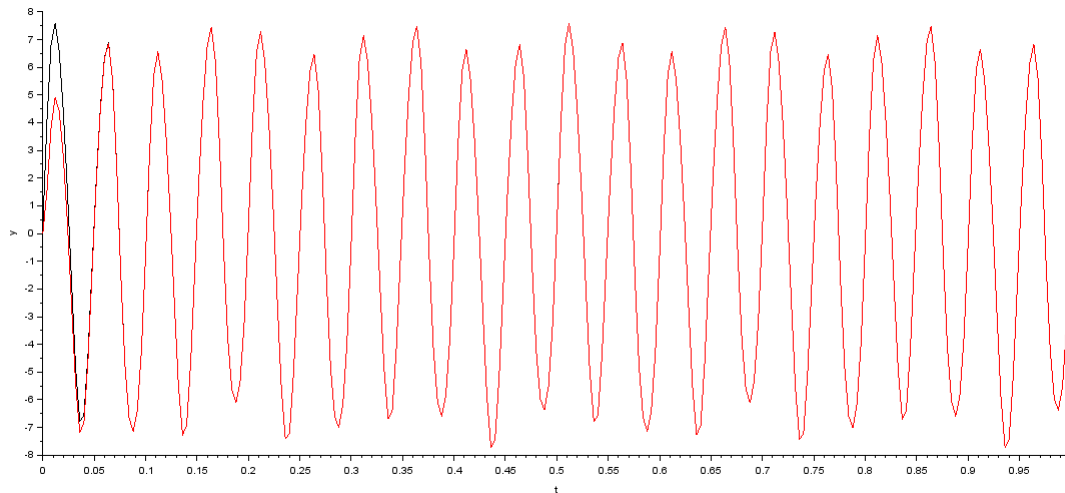
$$\Phi(100\pi) = -0.8097835725701668$$

Nastąpi zatem wyciszenie o 3.227360045 dB oraz przesunięcie w fazie o około $-0.81 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Sygnał wyjściowy będzie miał zatem postać:

$$x(t) \approx 0.55 \sin(12\pi t - 0.99) + 7 \sin(40\pi t) + 0.34 \sin(100\pi t + 0.81).$$

Wykonano porównanie teoretycznego sygnału wyjściowego z sygnałem uzyskanym w wyniku symulacji blokami elektrycznymi oraz matematycznymi w programie Xcos. Wyniki przedstawiono na rysunku (rys. 26).



Rysunek 26: Porównanie wykresu teoretycznego sygnału (kolor czerwony) z tym uzyskanym w wyniku działania programów z blokami elektrycznymi (czerwony) oraz matematycznymi (zielony).

• Obserwacje

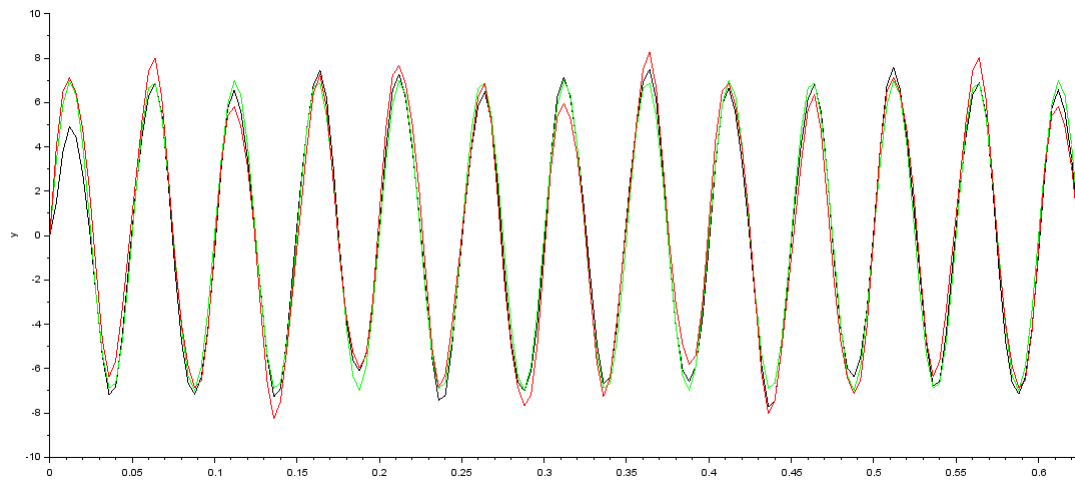
Podobnie jak w poprzednim przypadku, sygnały uzyskane w wyniku działania bloków elektrycznych i matematycznych dokładnie się pokryły, przez co widoczny jest jedynie kolor czerwony, odpowiadający blokom elektrycznym. Sygnał teoretyczny z początku ponownie ma niższą amplitudę niż ten uzyskany w wyniku symulacji, lecz po pewnym czasie sygnały zaczynają dokładnie się pokrywać.

W kolejnym kroku wykonano symulację by sprawdzić, czy w wyniku działania filtra otrzymano sygnał zbliżony do $7 \sin(40\pi t)$. W tym celu nałożono na siebie trzy wykresy: sygnału wyjściowego, środkowej składowej sygnału wejściowego oraz sygnału wyjściowego.

- **Symulacja przy użyciu bloków elektrycznych**

W wyniku działania symulacji przy użyciu bloków elektrycznych otrzymano poniższy wykres (rys. 27).

Sygnał wyjściowy nie pokrywa się ani z sygnałem wejściowym, ani z jego środkową składową. Wynikać to może z szerokości pasma przepustowego: nie tak małej, by inne składowe zostały wyciszone, ale i nie tak dużej, by sygnał wejściowy nie został naruszony.

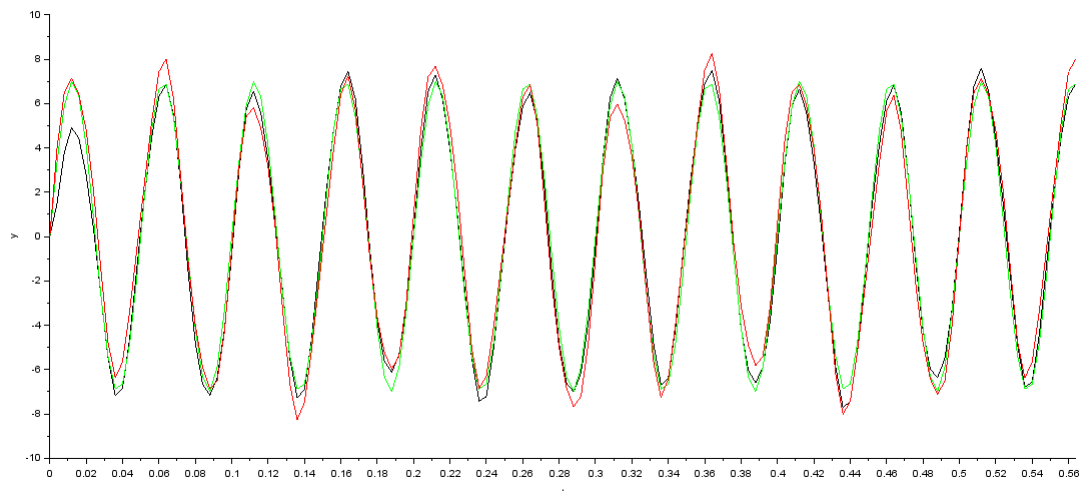


Rysunek 27: Porównanie sygnału wyjściowego (kolor czarny) z sygnałem wejściowym (kolor czerwony) i jego środkową składową (kolor zielony).

- **Symulacja przy użyciu bloków matematycznych**

W wyniku działania symulacji przy użyciu bloków matematycznych otrzymano poniższy wykres (rys. 28).

Ponownie otrzymano taki sam sygnał wyjściowy jak w wyniku symulacji blokami elektrycznymi. Nie pokrywa się on ani z sygnałem wejściowym, ani z jego środkową składową.



Rysunek 28: Porównanie sygnału wyjściowego (kolor czarny) z sygnałem wejściowym (kolor czerwony) i jego środkową składową (kolor zielony).

3. $R = 50 \Omega, \quad \Delta > 0$

• **Bieguny**

$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, zatem mamy do czynienia z sytuacją, gdy równanie

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste postaci

$$p_1 = \frac{-R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -466.1218012$$

$$p_2 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -33.87819879$$

• **Współczynnik Q, współczynnik tłumienia**

Dla wskazanych wartości parametrów R, L, C wartości współczynników Q oraz tłumienia wynoszą:

$$- Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}} \approx 0.25$$

$$- \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \approx 1.99.$$

Wartość współczynnika Q jest dwa razy razy mniejsza od 0.5 (jest to wartość dla przypadku krytycznego), zaś współczynnik tłumienia niemal dwa kilka razy większy od 1 (wartość dla przypadku krytycznego), zatem skutki silnego tłumienia powinny być dobrze widoczne. Możemy spodziewać się, że sygnał wyjściowy będzie zbliżony do sygnału wejściowego.

• **Odpowiedź impulsowa**

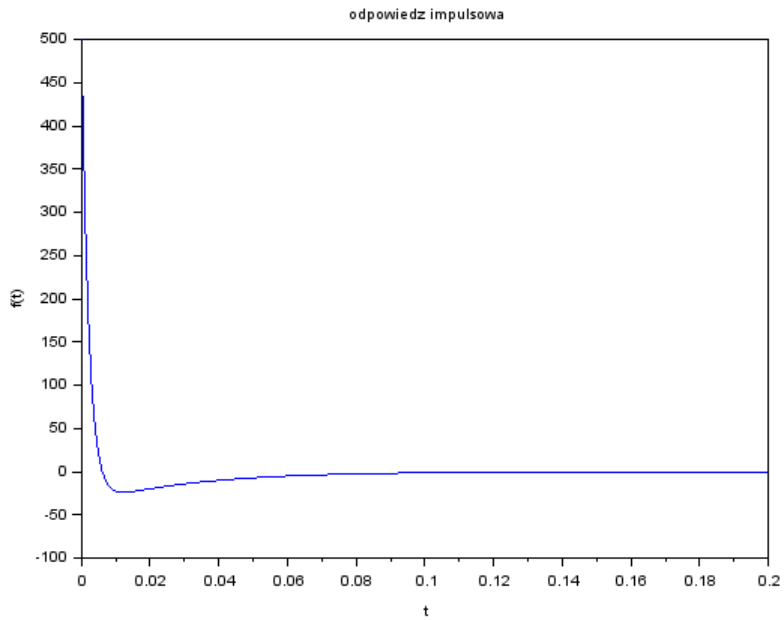
Dla przyjętych parametrów R, L, C transmitancja operatorowa wyraża się wzorem

$$H(s) = \frac{500s}{s^2 + 500s + 15791.367041743}$$

Odpowiedź impulsową otrzymujemy odwracając transformatę Laplace'a:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = 500e^{-250t} \cosh(216.12180t) - 578.37755e^{-250t} \sinh(216.12180t).$$

Jak można zauważyć na wykresie (rys. 29) odpowiedź impulsowa podobnie jak w poprzednim przypadku nie oscyluje, natomiast na początku gwałtownie spada, by później ustabilizować się i przyjmować wielkości bliskie zera.



Rysunek 29: Odpowiedź impulsowa.

- **Charakterystyka amplitudowa**

Spadek o 3 dB następuje dla:

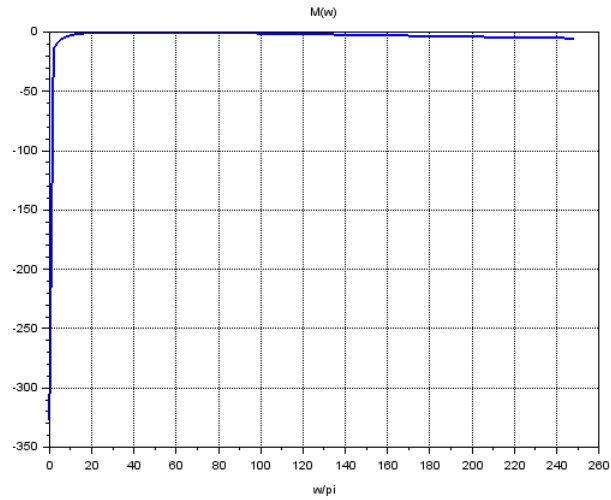
$$\omega_L = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \approx 9.49\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_H = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \approx 168.64\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Szerokość pasma przepuszczania:

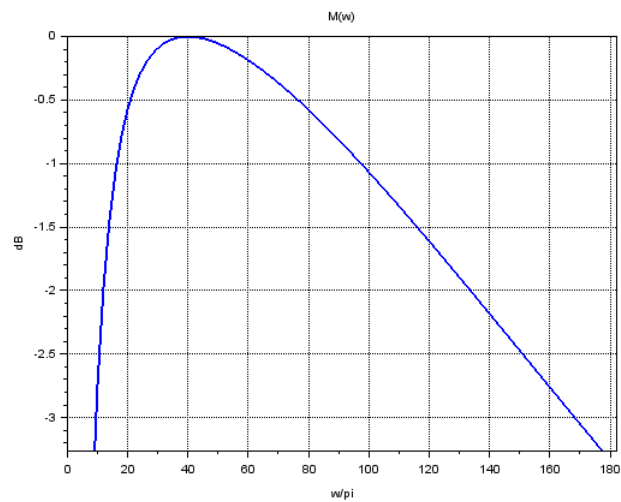
$$\frac{R}{L} = 500 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 159.15\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Z wykresu (rys. 30) można odczytać, że po gwałtownym skoku charakterystyka amplitudowa niemal wszędzie przyjmuje wartości bliskie 0. Nie widać żadnej "górkę" w okolicach ω_C .



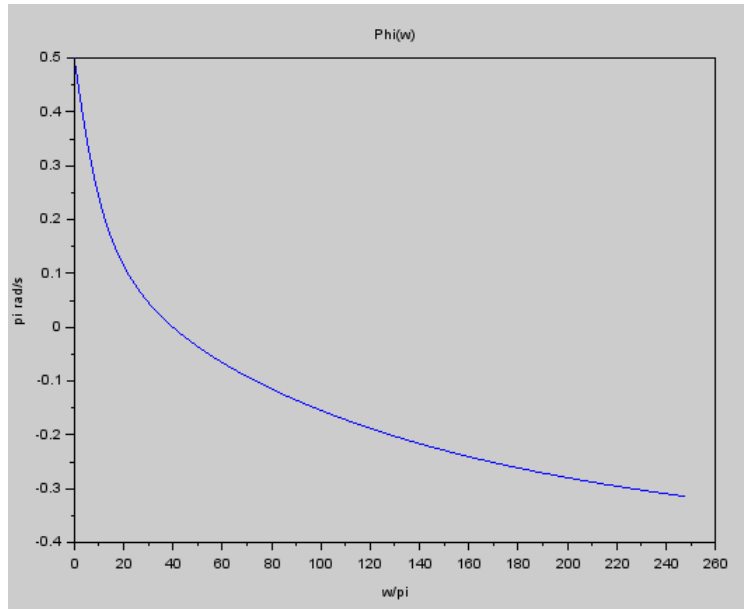
Rysunek 30: Charakterystyka amplitudowa.

Dodatkowo wykonano wykres (rys. 31) prezentujący przebieg charakterystyki amplitudowej dla częstotliwości z pasma przepustowego. Kształt jest bardzo zbliżony do poprzedniego przypadku, natomiast znacząco zwiększyła się sama szerokość pasma przepustowego.



Rysunek 31: Charakterystyka amplitudowa dla częstotliwości z pasma przepustowego.

- Charakterystyka fazowa



Rysunek 32: Charakterystyka fazowa.

Przebieg charakterystyki fazowej jest zgodny ze wcześniejszymi obliczeniami i bardzo podobny do przebiegu charakterystyki fazowej w przypadku krytycznym.

- Filtracja własnego sygnału

Sprawdzimy, jak zmieni się sygnał po filtracji poprzez wyliczenie $M(\omega)$ oraz $\Phi(\omega)$ dla każdej ze składowych sygnału wejściowego.

$$M(12\pi) = 0.7952572341072556$$

$$\Phi(12\pi) = 0.6513645771091773$$

Nastąpi wyciszenie o -1.9898474 dB oraz przesunięcie w fazie o około $0.66 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

$$M(40\pi) = 1$$

$$\Phi(40\pi) \approx 0$$

Nie nastąpi wyciszenie, zaś przesunięcie w fazie jest znikomo małe.

$$M(100\pi) = 0.884381179531838$$

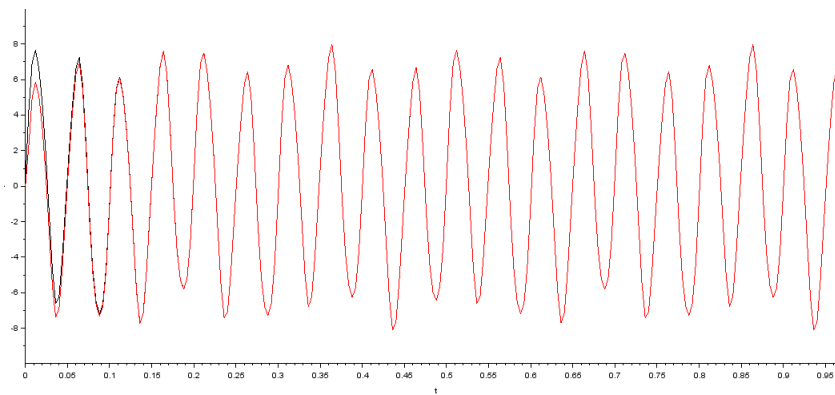
$$\Phi(100\pi) = -0.4856297488373263$$

Nastąpi wyciszenie o 1.0672102 dB oraz przesunięcie w fazie o około $-0.49 \frac{rad}{s}$.

Sygnał wyjściowy będzie miał zatem postać:

$$x(t) \approx 0.795 \sin(12\pi t - 0.65) + 7 \sin(40\pi t) + 0.44 \sin(100\pi t + 0.49).$$

Wykonano porównanie teoretycznego sygnału wyjściowego z sygnałem uzyskanym w wyniku symulacji blokami elektrycznymi oraz matematycznymi w programie Xcos. Wyniki przedstawiono na wykresie (rys. 33).



Rysunek 33: Porównanie wykresu teoretycznego sygnału (kolor czarny) z tym uzyskanym w wyniku działania programów z blokami elektrycznymi (kolor czerwony) oraz matematycznymi (zielony).

• Obserwacje

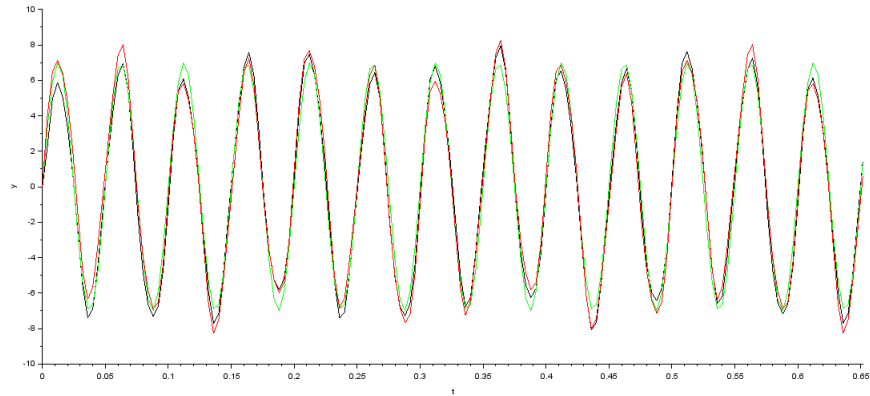
Podobnie jak w poprzednich przypadkach, sygnały wyjściowe uzyskane w wyniku symulacji przy użyciu bloków elektrycznych oraz matematycznych dokładnie się pokryły, w efekcie czego widoczny jest jedynie wykres koloru czerwonego, odpowiadający blokom elektrycznym.

Znów można zaobserwować, że amplituda sygnału teoretycznego jest z początku wyższa niż amplituda sygnałów uzyskanych w wyniku symulacji, po pewnym czasie jednak wszystkie trzy sygnały dokładnie się pokrywają.

W kolejnym kroku wykonano symulację by sprawdzić, czy w wyniku działania filtra otrzymano sygnał zbliżony do sygnału wejściowego. W tym celu nałożono na siebie trzy wykresy: sygnału wyjściowego, środkowej składowej sygnału wejściowego oraz sygnału wyjściowego.

- **Symulacja przy użyciu bloków elektrycznych**

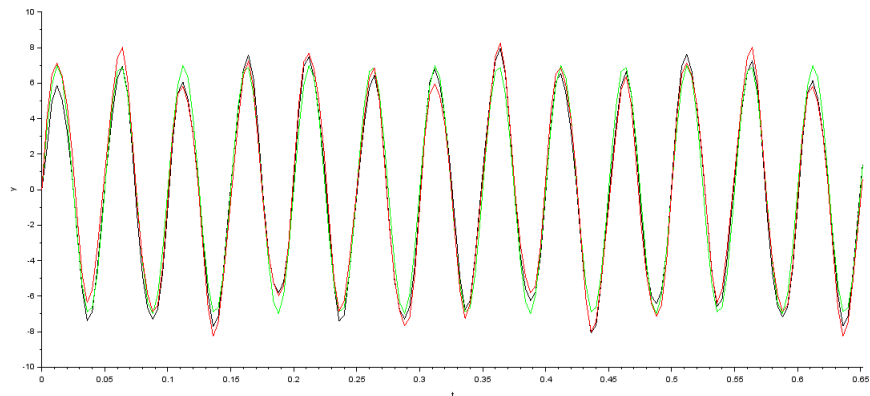
W wyniku działania symulacji przy użyciu bloków elektrycznych otrzymano poniższy wykres (rys. 34). Sygnał wyjściowy nie pokrywa się ani z sygnałem wejściowym, ani z jego środkową składową. Jest za to bardziej niż w poprzednim przypadku zbliżony do sygnału wejściowego. Może to wynikać z większej szerokości pasma przepustowego.



Rysunek 34: Porównanie sygnału wyjściowego (kolor czarny) z sygnałem wejściowym (kolor czerwony) i jego środkową składową (kolor zielony).

- **Symulacja przy użyciu bloków matematycznych**

W wyniku działania symulacji przy użyciu bloków matematycznych (rys. 35) otrzymano taki sam efekt, jak w przypadku symulacji za pomocą bloków elektrycznych.



Rysunek 35: Porównanie sygnału wyjściowego (kolor czarny) z sygnałem wejściowym (kolor czerwony) i jego środkową składową (kolor zielony).

6 Wnioski

- Szeregowy obwód RLC z wyjściem układu podłączonym do rezystora może pełnić rolę **filtra środkowoprzepustowego**.
- W zależności od doboru parametrów R , L , C mamy do czynienia z trzema przypadkami: obwodem silnie tłumionym, krytycznie tłumionym lub słabo tłumionym.
- Gdy obwód jest słabo tłumiony zachodzi zjawisko rezonansu. Wzmocnienie amplitudy dla częstotliwości rezonansowej jest tym silniejsze, im mniejsza wartość oporu R .
- Im mniejsza wartość R , tym filtr staje się bardziej selektywny, tzn. tym węższe jest pasmo przepustowe.
- W wyniku symulacji za pomocą bloków elektrycznych oraz matematycznych otrzymano dokładnie takie same sygnały wyjściowe. Świadczy to o poprawności ich działania.
- Im większa wartość R , tym bardziej sygnał wyjściowy był zbliżony kształtem oraz amplitudą do sygnału wejściowego. Jest to skutek przepuszczania przez filtr coraz większego zakresu częstotliwości.
- Dla małej wartości R udało się uzyskać pożądaną efekt, czyli sygnał wyjściowy bardzo dobrze pokrywający się ze składową $7 \sin(40\pi t)$ sygnału wejściowego. Została zachowana amplituda oraz nie nastąpiło przesunięcie fazowe.
- Sygnały wyjściowe otrzymane w wyniku symulacji początkowo miały niższą amplitudę niż sygnał teoretyczny, którego współczynniki zostały wyliczone na podstawie charakterystyk częstotliwościowych. Po pewnym czasie wszystkie trzy sygnały zaczęły się pokrywać, zatem obliczenia i symulacje zostały wykonane poprawnie.
- Odpowiedź impulsowa dla $\Delta < 0$ ma przebieg oscylacyjny, zaś dla $\Delta \leq 0$ oscylacje nie występują.
- W żadnym z przypadków nie udało się uzyskać filtru idealnego, czyli takiego, którego charakterystyka amplitudowa przyjmuje wartość 1 dla częstotliwości z pasma przepustowego oraz 0 dla pozostałych. W praktyce jest on niemożliwy do uzyskania.

Literatura

- [1] Stanisław Bolkowski *Elektrotechnika*, Wyd. trzecie, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2005, 2007
- [2] http://zet10.ipee.pwr.wroc.pl/record/377/files/TO2_ETK_W07-LaplaceiMoperatorowa_cz2.pdf
- [3] <https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/dobroc-ukladu;3893277.html>
- [] Adam Macura *Teoria obwodów. Obwody prądu zmiennego. Część I*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1997