

Lemma 1. Für jeden U_2 Schaltkreis β , gibt es einen äquivalenten Schaltkreis, welcher höchstens 2 mal so groß ist wie β , in dem nur NOT-Gatter nur bei den Variablen benutzt werden.

Bei einem U_2 Schaltkreis handelt es sich um einen Schaltkreis bei dem nur die Gatter AND, OR und NOT mit 2 Eingängen verwendet werden.

Als erstes werden die Gatter topologisch sortiert. Also Gatter die andere Gatter an ihren Eingängen haben kommen nach diesen.

Nun beginnen wir mit dem obersten Gatter. Sollte dessen Ausgang verneint sein, so wenden wir darauf die Regel von deMorgan¹ an.

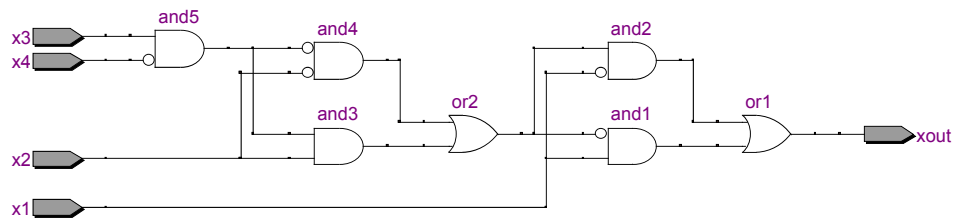
Sollten die Ausgänge verneint sein so verschieben wir diese Verneinung auf die Ausgänge der vorhergehenden Gatter, wobei sich doppelte Verneinungen aufheben.

Dies wird wiederholt für alle vorhergehenden Gatter.

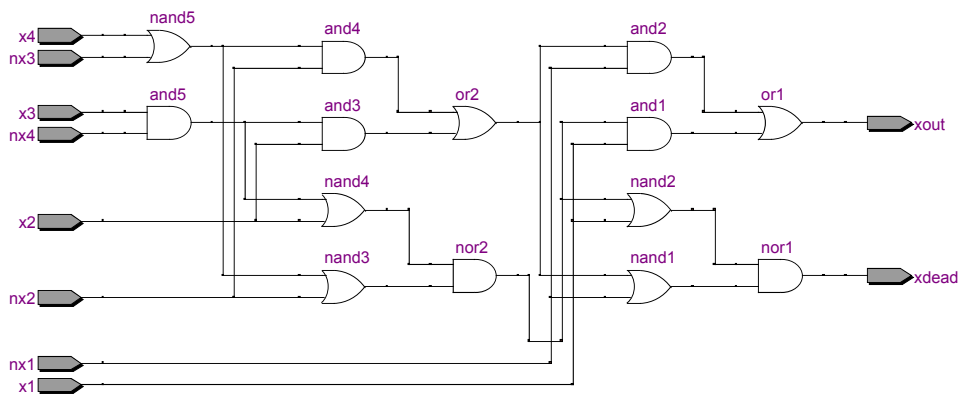
Für den Fall, dass ein Gatter negiert und nicht negiert verwendet wird, wird dieses Gatter verdoppelt.

□

Um das zu verdeutlichen nehmen wir einen beispiel Schaltkreis:

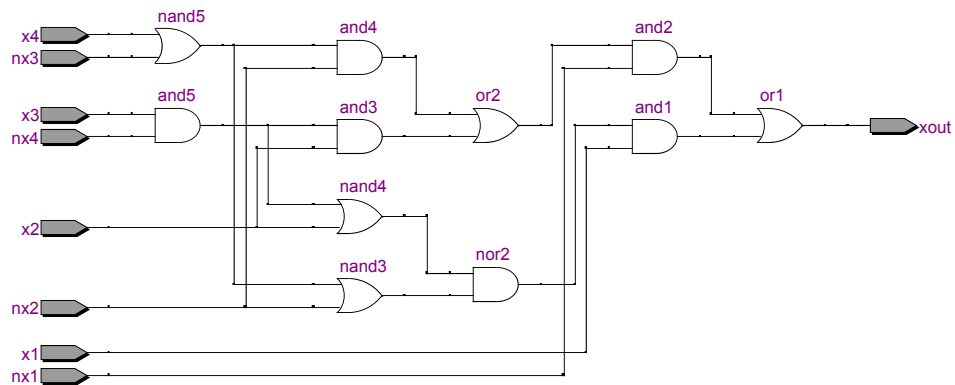


Dieser Schaltkreis ist um U_2 so wie es das Lemma bereits verlangt. Es hat eine $C(s) = 7$ dem zu folge sollte der neue Schaltkreis maximal eine von 14 haben. Zu erst stellen wir zu jedem Input auch sein Inverses bereit und von oben nach Unten (top down) stellen wir nun für jedes Gatter auch sein Inverses nach den Regeln von DeMorgan zu verfügung. Bei diesem Schritt kann es dazu kommen das wir zwei äquivalente Teilschaltkreise bekommen die wir zusammen fügen können.



¹ $a \wedge b = \overline{a \vee \overline{b}}$ Analog für OR

Dieser neue Schaltkreis hat nun eine Komplexität von 14, also hält er sich an das Lemma. Die Not-Gatter sind auch alle verschwunden und werden nun über die Inversen Inputs realisiert. Zum Schluss können wir noch „Müll“ entfernen. Also tote Gatter die wir nicht benötigen da ihre Signale ins Nirvana verschwinden.



Am Ende konnten wir wieder 3 Gatter entfernen und konnten somit den Schaltkreis optimieren. Die neue Komplexität ist nun 11 und damit ist diese geringer als das Zweifache der Komplexität des Urschaltkreises.