**Definition 1.** *In einem $U_2$ Schaltkreis gibt es nur Gatter der Form $(x^a \oplus y^b)^c$, diese sind Basisfunktionen auf dem AND $(\wedge)$ Operator. Durch die Regeln von DeMorgan[1] kann man diese jedoch auch mit dem OR $(\vee)$ Operator erzeugen.*

**Definition 2.** *Größenkomplexität ist die minimale Anzahl an Gatter, die man für die Synthese eines Schaltkreises braucht.*

**Lemma 1.** *Gegeben ist ein beliebiger $U_2$ Schaltkreis $\beta$. Für diesen gibt es einen Schaltkreis $\beta'$ zur AND, OR-Basis, der höchstens die zweifache Größenkomplexität hat wie $\beta$. In $\beta'$ werden nun auch keine internen NOT-Gatter mehr verwendet. Für jeden Eingang von $\beta$ wird auch sein Inverses bereit gestellt.*

**Corrolar 1.** *Sei $C(f)$ die Größenkomplexität zur Basis $U_2$. Sei $C'(f)$ die Größenkomplexität zur AND, OR-Basis mit zusätzlichen invertierten Eingängen, d.h. die minimal notwendige Anzahl Gatter um damit die Funktion $f$ zu realisieren. Dann ist $C'(f) \leq 2 \cdot C(f)$.*

$\forall\, \beta(\in U_2)\ \exists\, \beta'(\in AND/OR) : C'(\beta') \leq 2 \cdot C(\beta)$

Man hat die Gatter der Form $(x^a \oplus y^b)^c$, bei denen $\oplus$ die Operation $(\wedge)$ darstellt, wie schon beschrieben ist es mit dem $(\vee)$ genauso und die Variablen $a, b, c \in \{0, 1\}$ geben an, ob das Inverse oder die Projektion des Ein- oder Ausgangs benutzt werden soll. Man definiert bei $x^1$ das Inverse und bei $x^0$ die Projektion. Als Operator benutzt man $(\wedge)$, so kann man folgende Tabelle mit Hilfe der Regeln von DeMorgan erstellen.

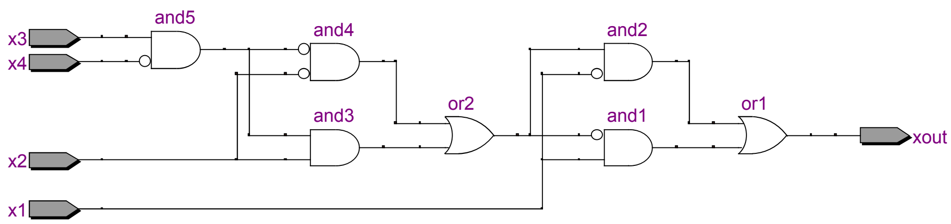
| $a$ | $b$ | $c = 0$ | $c = 0$ DeMorgan | $c = 1$ | $c = 0$ DeMorgan |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $(x^0 \wedge y^0)^0$ | $(x^1 \vee y^1)^1$ | $(x^0 \wedge y^0)^1$ | $(x^1 \vee y^1)^0$ |
| 0 | 1 | $(x^0 \wedge y^1)^0$ | $(x^1 \vee y^0)^1$ | $(x^0 \wedge y^1)^1$ | $(x^0 \vee y^1)^0$ |
| 1 | 0 | $(x^1 \wedge y^0)^0$ | $(x^0 \vee y^1)^1$ | $(x^1 \wedge y^0)^1$ | $(x^1 \vee y^0)^0$ |
| 1 | 1 | $(x^1 \wedge y^1)^0$ | $(x^0 \vee y^0)^1$ | $(x^1 \wedge y^1)^1$ | $(x^0 \vee y^0)^0$ |

Mit dieser Tabelle baut man einen beliebigen $U_2$ Schaltkreis um, sodass er das Lemma erfüllt. Man erstellt für jedes Gatter $z = (x^a \oplus y^b)^c$ zwei neue Gatter $z_0$, $z_1$ wobei $z_0 = (x^a \oplus y^b)^0$ und $z_1 = (x^a \oplus y^b)^1$ repräsentieren. Somit hat man für jedes Gatter die Projektion und das Inverse im neuen Schaltkreis. Diesen Schritt führt man für jedes Gatter und die Eingänge durch. Der neue Schaltkreis $\beta'$ hat nun die doppelte Größenkomplexität wie der alte $\beta$ Schaltkreis, weil man die Anzahl der Gatter verdoppelt hat. Jedoch kann man die Größenkomplexität noch etwas verringern, indem man die für den Ausgang irrelevanten Gatter entfernt. Somit gilt $C(\beta') \leq 2 \cdot C(\beta)$.

□

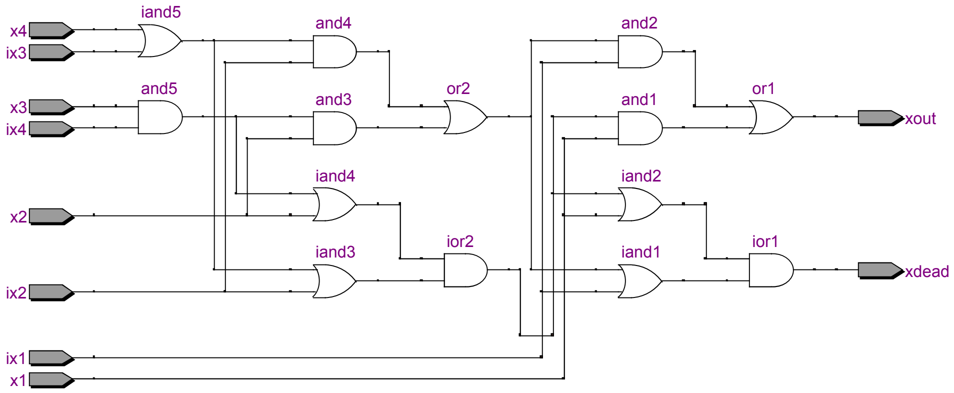
Nun folgt ein Beispiel:

Wir nehmen uns die Funktion: $x_{out} = (x_1 \oplus (\overline{x_2} \oplus (x_3 \wedge \overline{x_4})))^2$ und stellen dafür den entsprechenden $U_2$ Schaltkreis auf, dieser hat eine Größenkomplexität von 7.
Bemerkung: Die „Kreise" sind keine eigenständigen NOT-Gatter, weil im $U_2$ keine existieren, sondern gehören intern zum Gatter.




[1] $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$
[2] $\oplus = (a \wedge \overline{b}) or (\overline{a} \wedge b)$ (XOR)

Nun stellen wir in unserem neuen Schaltkreis für jedes Gatter die Projektion und sein Inverses bereit. Der neue Schaltkreis hat eine Größenkomplexit von 14 also $7 \cdot 2 = 14$ somit erfüllt er das Lemma.




Am Ende entfernen wir noch die für den Ausgang irrelevanten Gatter erreichen das unser Schaltkreis sogar kleiner als 14 geworden ist, nämlich 11.