In einem U_2 Schaltkreis gibt es nur Gatter der Form $(x^a \oplus y^b)^c$ enthält,die nur zwei Eingänget haben.

Lemma 1. *Gegeben ist ein beliebiger U_2 Schaltkreis β. Für diesen gibt es einen Schaltkreis β', der höchstens die zweifache Größenkomplexität hat wie β. In β' wurden alle Verneinungen entfernt und für jeden Eingänge von β wird auch sein Inverses bereit gestellt.*

$\forall\, \beta \in U_2\; \exists\, \beta' : C(\beta') \leq 2 \cdot C(\beta)$

Gucken wir uns zuerst die Gatter nochmal genauer an. Wir haben die Gatter der Form $(x^a \oplus y^b)^c$, wobei $\oplus$ die Operation $\wedge$ oder $\vee$ darstellt und die Variablen $a, b, c \in \{0, 1\}$ angeben ob man das Inverse oder die Projektion benutzt. Somit können wir sagen das x^1 das Inverse und x^0 die Projektion darstellt. Als Operation nehmen wir nun $\wedge$ an (mit $\vee$ ist es analog) so können wir folgene Tabelle mit hilfe der Regeln von DeMorgan[1] erstellen.

a	b	$c = 0$	$c = 0$ DeMorgan	$c = 1$	$c = 0$ DeMorgan
0	0	$(x \wedge y)$	$\overline{(\overline{x} \vee \overline{y})}$	$\overline{(x \wedge y)}$	$(\overline{x} \vee \overline{y})$
0	1	$(x \wedge \overline{y})$	$\overline{(\overline{x} \vee y)}$	$\overline{(x \wedge \overline{y})}$	$(x \vee \overline{y})$
1	0	$(\overline{x} \wedge y)$	$\overline{(x \vee \overline{y})}$	$\overline{(\overline{x} \wedge y)}$	$(\overline{x} \vee y)$
1	1	$(\overline{x} \wedge \overline{y})$	$\overline{(x \vee y)}$	$\overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})}$	$(x \vee y)$

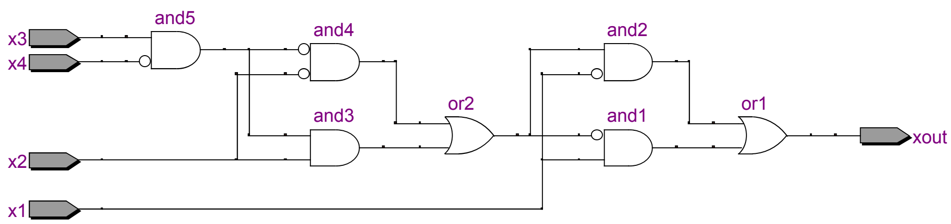
Mit dieser Tabelle stellen wir einen beliebigen U_2 Schaltkreis um sodass er das Lemma erfüllt. Wir beginnen am Ausgang (Top) und arbeiten uns zu dein Eingängen (Bottom) (Top-Down-Prinzip) und erstellen für jedes Gatter $z = (x^a \oplus y^b)^c$ zwei neue Gatter z_0, z_1 wobei $z_0 = (x^a \oplus y^b)^0$ und $z_1 = (x^a \oplus y^b)^1$ repräsentieren. Somit haben wir für jedes Gatter die Projektion und das Inverse in unserem neuen Schaltkreis. Dieser Schaltkreis hat eine Größenkomplexität von dem zweifachen der Größenkomplexität unseres alten Schaltkreises und erfüllt somit das Lemma indem wir alle Vermeinungen entfernt haben.

Am Ende können wir noch alle überflüssigen Gatter entfernen von denen der Ausgang nicht abhängig ist.

□

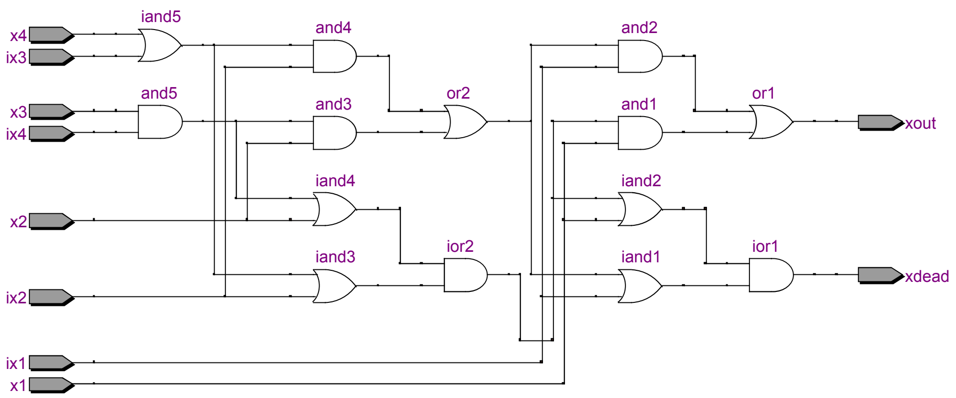
Nun folgt ein Beispiel:

Wir nehmen uns die Funktion: $x_{out} = (x_1 \oplus (\overline{x_2} \oplus (x_3 \wedge \overline{x_4})))$ und stellen dafür den entsprechenden U_2 Schaltkreis auf, Dieser hat eine Größenkomplexität von 7.



Nun gehen wir wie oben beschrieben nach dem Top-Down-Prinzip durch und stellen in unserem neuen Schaltkreis für jedes Gatter die Projektion und sein Inverses bereit. Hierbei können äquivalente Teilschaltkreise entstehen, die wir wieder zusammenfassen können. Unser neuer Schaltkreis hat eine Größenkomplexitvon 14 also $7 * 2 = 14$ somit erfüllt er das Lemma.

[1] $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$



Am Ende konnten wir noch überflüssige Gatter entfernen, weil von ihnen der Ausgang nicht abhängig war und erreichen das unser Schaltkreis sogar kleiner als 14 geworden ist, nämlich 11.