Monotone vs. Non-monotone Circuit Complexity

Johannes Honke, Marko Jahn, Stephan Mielke

BTU-Cottbus

20.09.2010

boolesche Funktionen

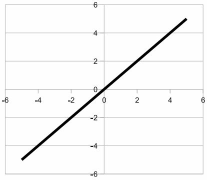
Eine Funktion ist eine Abbildung von einer Menge A in eine Menge B.
In unserem Fall: $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$
Also jedes Tupel von Elementen der Menge A $\{0,1\}$ wird genau auf ein Element der Menge B $\{0,1\}$ abgebildet.

Definition von Monotonie

Monotonie ist eine Eigenschaft von Funktionen.
$f : A \rightarrow B : \forall x_1, x_2 \in A : (x_1 \leq_A x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq_B f(x_2))$
Um die Mengen ordnen zu können, brauchen wir Ordnungsrelationen.
Wir benutzen hier das Symbol $\leq_A$ für die Ordnungsrelation über die Menge A und $\leq_B$ für die der Menge B.

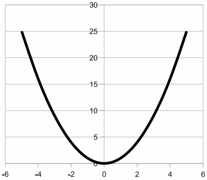
Beispiele

Allgemeine Beispiele für monotone Funktionen:



$$f(x) = m * x + n \quad m, n \in \mathbb{R} \; m \neq 0$$

Beispiele für NICHT monotone Funktionen:



$$f(x) = a * x^2 + b * x + c \quad a, b, c \in \mathbb{R} \; a \neq 0$$

Ordnungsfunktionen

Die monotone Eigenschaft von Funktionen wird durch 3 partielle Ordnungen erfüllt.

- reflexiv $\forall a \in A : (a, a) \in B$
- transitiv $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in B \wedge (b, c) \in B \Rightarrow (a, c) \in B$
- antisymmetrisch $\forall a, b \in A : (a, b) \in B \wedge (b, a) \in B \Rightarrow a = b$

Es ergeben sich z.B. folgende monotone Grundfunktionen:

Menge A		Menge B					
x_1	x_2	AND	OR	0	1	p_1	p_2
0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1

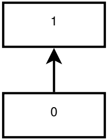


Abbildung: Anstieg der Tupel mit n = 1

Die Ordnungsrelation ist einfach von Unten nach Oben ablesbar.
Den reflexiv transitiven Abschluss selber bilden!

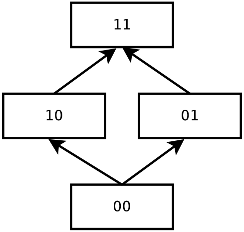


Abbildung: Anstieg der Tupel mit n = 2

Die Ordnungsrelation ist einfach von Unten nach Oben ablesbar.
Den reflexiv transitiven Abschluss selber bilden!

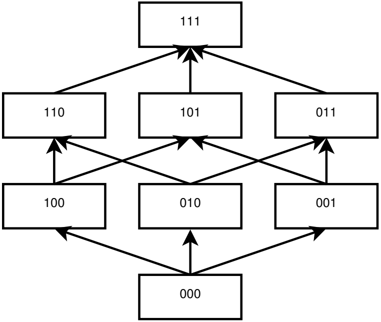


Abbildung: Anstieg der Tupel mit n = 3

Die Ordnungsrelation ist NICHT mehr einfach von Unten nach Oben ablesbar, weil z.B. das Tupel 010 und 101 nicht vergleichbar sind da zwar die Nullen zur Eins aufsteigen aber die Eins auf die Null zurück fällt.

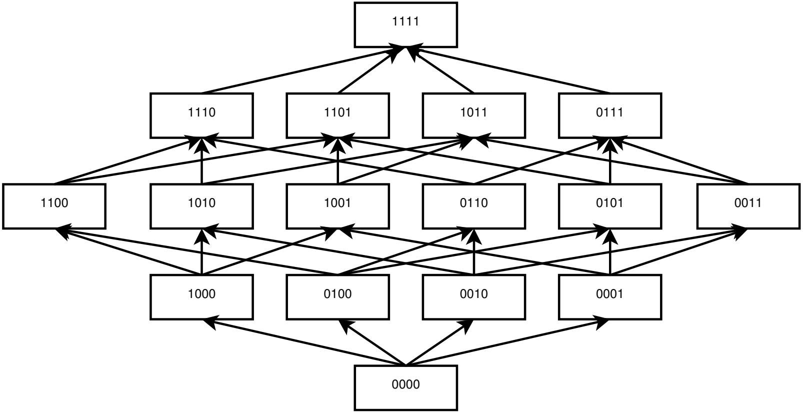


Abbildung: Anstieg des Tupels n = 4

Die Ordnungsrelation ist komplexer geworden, da viele Elemente von Unten nach Oben nicht mehr in der Relation enthalten sind.

Fragen und Antworten

Gibt es für jede monotone Funktion einen monotonen Schaltkreis?

Ja, die DNF besteht zwar aus NOT-Gattern, jedoch, wenn die Funktion monoton war, bleibt die Funktion bestehen, wenn man alle verneinten Variablen entfernt.

Berechnet jeder monotone Schaltkreis eine monotone Funktion?

Ja, da der Schaltkreis nur aus monotonen Grundgattern (AND, OR, 0, 1 und die Projektionen) bestehen darf, ist die daraus folgende Funktion auch immer monoton.

Komplexität in Worten

Die Komplexität ist ein Maß für den Aufwand einer Funktion. Dieser Aufwand unterteilt sich in Größe und Tiefe für den Schaltkreis. Je größer ein Schaltkreis ist, desto mehr Platz brauch er durch seine Gatter auf dem Chip und je tiefer er ist, desto mehr Zeit braucht ein Signal vom Anfang zum Ende des Schaltkreises.

Komplexität in Formeln

- $G(S)$ berechnet die Anzahl der Gatter des Schaltkreises
- $C(f) = min\{G(S)|$ S bestimmt f$\}$
- $S(f)$ bestimmt den kleinstmöglichen Schaltkreis für $f(x)$
- $C_M(f) = min\{G(S_M(f))\}$
- $S_M(f)$ bestimmt den kleinstmöglichen monotonen Schaltkreis

Theorem von Tardos

Für den Unterschied zwischen einem monotonen und einem nicht monotonen Schaltkreis in Bezug auf die Größe gilt, das seine nicht monotone Variante die untere Schranke für den Monotonen bildet.

Theorem (Tardos)

Der Abstand zwischen C_M und C ist exponentiell.

Der Abstand wächst exponentiell mit der Größe des Schaltkreises.

Definition von Slice-Funktionen

Definition

Eine Funktion $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ *ist eine Slice-Funktion, wenn es ein* $k \in \mathbb{N}$ *gibt sodass gilt:*
$\sum_{i=1}^{n} x_i < k \Rightarrow f(x) = 0$
$\sum_{i=1}^{n} x_i > k \Rightarrow f(x) = 1$

Eine boolesche Funktion ist eine Slice(teilbare)-Funktionen, wenn sie sich monoton verhält. Das k gibt an wie viele Eingänge auf 1 stehen müssten damit der Ausgang 1 wird.

Monotonie von Slice-Funktionen

Für eine gegebene Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ist der $k - te$ Slice von f, $f^{(k)}$ wie folgt definiert:

Definition

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \sum_{i=1}^{n} x_i < k \\ 1 & \sum_{i=1}^{n} x_1 > k \\ f(x) & \sum_{i=1}^{n} x_i = k \end{cases}$$

Der $k - te$ Slice einer booleschen Funktion ist immer monoton.

Slice-Funktionen im Schaltkreis

Lemma

Für jeden U_2 (Not und Monotone Gatter) Schaltkreis β gibt es einen äquivalenten monotonen Schaltkreis, welcher höchstens 2 mal so groß ist wie β.

Dieser Schaltkreis wird vom Ausgang aus zu den Eingängen in monotone Gatter umgewandelt (De Morgan'sche Regeln) und die Not Gatter werden bis zu den Eingängen verschoben.

die Komplexität von Slice-Funktionen

Behauptung

$C(f) \leq C(f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}) + h(n)$
$f \in U_2; f^{(k)}$ *ist der k-te Slice*

- $C(f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ ist die Gesamtkomplexität für den SK, der alle Slice-Funktionen $f^{(k)}$ von $f(x)$ gleichzeitig berechnet
- $h(n) \in \mathbb{N}$ die benötigte Komplexität für den Demultiplexer, der das Ergebnis auswählt
- $h \in \mathcal{O}(n)$
- n Anzahl der Eingänge

Schranken der Komplexität von Slice-Funktionen

Theorem

Wenn f eine Slice-Funktion ist, dann gilt:
$C(f) \leq C_M(f) \leq (C(f) + n^2 log\ n)$

Die untere Schranke von $C_M(f)$ ist $C(f)|f \in U_2$ und die obere $C(f) + n^2 log\ n$.

Schwellenwertfunktion

Die Schwellenwertfunktion $T_k^{n-1}(X_i)$
wobei:
X die Menge aller Eingänge des Schaltkreises ist.
$X_i = X - x_i$

Definition

$$T_k^{n-1}(X_i) = \begin{cases} 0 & \sum_{j=1}^{n} x_j < k \\ 1 & \sum_{j=1}^{n} x_j > k \\ \overline{x_i} & \sum_{j=1}^{n} x_j = k \end{cases}$$

behandelte Themen

- Monotonie
- Komplexität
- Slice-Funktionen
  - im Schaltkreis
  - Komplexität
  - Grenzen der Komplexität