1 Einführung: Funktionen - Stephan

Eine Funktion ist eine Abbildung von einer Menge A in eine Menge B.
In unserem Fall: $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$
Also jedes Tupel von Elementen der Menge A $\{0,1\}$ wird genau auf ein Element der Menge B $\{0,1\}$ abgebildet.

2 monotone Funktionen - Stephan

2.1 Definition

Monotonie ist eine Eigenschaft von Funktionen.
$f : A \rightarrow B : \forall x_1, x_2 \in A : (x_1 \leq_A x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq_B f(x_2))$
Um die Mengen ordnen zu können, brauchen wir Ordnungsrelationen.
Wir benutzen hier das Symbol $\leq_A$ für die Ordnungsrelation über die Menge A und $\leq_B$ für die der Menge B.

2.2 Allgemeine Beispiele

Allgemeine Beispiele für monotone Funktionen:
$f(x) = m * x + n$

Beispiele für NICHT monotone Funktionen:
$f(x) = a * x^2 + b * x + c$

2.3 Ordnungsfunktionen

Die monotone Eigenschaft von Funktionen wird durch 3 partielle Ordnungen erfüllt.

- reflexiv $\forall a \in A : (a,a) \in B$

- transitiv $\forall a,b,c \in A : (a,b) \in B \wedge (b,c) \in B \Rightarrow (a,c) \in B$

- antisymmetrisch $\forall a,b \in A : (a,b) \in B \wedge (b,a) \in B \Rightarrow a = b$

Es ergeben sich z.B. folgende monotone Grundfunktionen:

2.4 Ordnungsrelations-Beispiele

2.4.1 Ordnungsrelation Beispiel der Tupel mit n = 1

Die Ordnungsrelation ist einfach von Unten nach Oben ablesbar.

2.4.2 Ordnungsrelation Beispiel der Tupel mit n = 2

Die Ordnungsrelation ist einfach von Unten nach Oben ablesbar.

2.4.3 Ordnungsrelation Beispiel der Tupel mit n = 3

Die Ordnungsrelation ist NICHT mehr einfach von Unten nach Oben ablesbar, weil das Tupel 010 und 101 nicht die 3 partiellen Ordnungen erfüllen.

2.4.4 Ordnungsrelation Beispiel der Tupel mit n = 4

Die Ordnungsrelation ist komplexer geworden, da viele Tupel nicht mit denen der höheren Ebene die 3 partiellen Ordnungen erfüllen.

3 Fragen und Antworten - Marko

Frage 1. *Gibt es für jede monotone Funktion einen monotonen Schaltkreis?*
Ja, die DNF besteht zwar aus NOT-Gattern, jedoch, wenn die Funktion monoton war, bleibt die Funktion bestehen, wenn man alle verneinten Variablen entfernt.

Frage 2. *Berechnet jeder monotone Schaltkreis eine monotone Funktion?*
Ja, da der Schaltkreis nur aus monotonen Grundgattern (AND, OR, 0, 1 und die Projektionen) bestehen darf, ist die daraus folgende Funktion auch immer monoton.

4 Komplexität - Honke

4.1 in Worten

Die Komplexität ist ein Maß für den Aufwand einer Funktion. Dieser Aufwand stellt sich in Größe und Länge der booleschen Funktion dar, die durch einen Schaltkreis auf einem Chip realisiert werden soll. Je größer eine Funktion ist, desto mehr Platz brauch sie durch ihre Gatter auf dem Chip und je länger sie ist, desto mehr Zeit braucht ein Signal vom Anfang zum Ende des Schaltkreises.

4.2 in Formeln

- $G(S)$ berechnet die Anzahl der Gatter des Schaltkreises
- $C(f) = min\{G(S)|$ S berechnet f$\}$
- $S(f)$ berechnet den kleinstmöglichen Schaltkreis für $f(x)$
- $C_M(f) = min\{G(S_M(f))\}$
- $S_M(f)$ berechnet den kleinstmöglichen monotonen Schaltkreis

4.3 Theorem von Tardos

Für den Unterschied zwischen einem monotonen und einem nicht monotonen Schaltkreis in Bezug auf die Größe gilt, das seine nicht monotone Variante die untere Schranke für den Monotonen bildet.

Theorem 1 (Tardos). *Der Abstand zwischen C_M und C ist exponentiell.*

Der Abstand wächst exponentiell mit der Größe des Schaltkreises.

5 Slice-Funktionen - Marko

5.1 Definition

Definition 1. *Eine Funktion* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *ist eine Slice-Funktion, wenn es ein* $k \in N$ *gibt sodass gilt:*
$\sum_{i=1}^{n} x_i < k \Rightarrow f(x) = 0$
$\sum_{i=1}^{n} x_i > k \Rightarrow f(x) = 1$

Eine boolesche Funktion ist eine Slice(teilbare)-Funktionen,wenn sie sich monoton verhält. Das k gibt an wie viele Eingänge auf 1 stehen müssten damit der Ausgang 1 wird.

5.2 die Monotonie

Für eine gegebene Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ist der $k-te$ Slice von f, $f^{(k)}$ wie folgt definiert:

Definition 2.

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \sum_{i=1}^{n} x_i < k \\ 1 & \sum_{i=1}^{n} x_1 > k \\ f(x) & \sum_{i=1}^{n} x_i = k \end{cases}$$

Der $k-te$ Slice einer booleschen Funktion ist immer monoton.

5.3 im Schaltkreis - Honke

Lemma 1. *Für jeden* U_2 *(nicht monotonen) Schaltkreis* β *gibt es einen äquivalenten monotonen Schaltkreis, welcher höchstens 2 mal so groß ist wie* β*. Bei dem für jeden Eingang auch sein Inverses bereitgestellt wird.*

5.4 die Komplexität - Stephan

Behauptung 1. $C(f) \leq C(f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}) + h(n)$
$f \in U_2; f^{(k)}$ *ist der k-te Slice*

- $C(f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ ist die Gesamtkomplexität für den SK, der alle Slice-Funktionen $f^{(k)}$ von $f(x)$ gleichzeitig berechnet
- $h(n) \in N$ die benötigte Komplexität für den Demultiplexer, der das Ergebnis auswählt
- $h \in \mathcal{O}(n)$
- n Anzahl der Eingänge

5.5 Schranken der Komplexität - Marko

Theorem 2. *Wenn* f *eine Slice-Funktion ist, dann gilt:* $C(f) \leq C_M(f) \leq (C(f) + n^2 log\, n)$

Die untere Schranke von $C_M(f)$ ist $C(f)|f \in U_2$ und die obere $C(f) + n^2 + logn$.

Schwellenwertfunktion

Die Schwellenwertfunktion $T_k^{n-1}(X_i)$
wobei:
X die Menge aller Eingänge des SK ist.
$X_i = X - x_i$

Definition 3.

$$T_k^{n-1}(X_i) = \begin{cases} 0 & \sum_{j=1}^{n} x_j < k \\ 1 & \sum_{j=1}^{n} x_j > k \\ \overline{x_i} & \sum_{j=1}^{n} x_j = k \end{cases}$$