1.Логика. Булева алгебра. Булевы функции. Формы представления.

Булева алгебра – раздел математики, изучающий логические выражения и операции.

Высказывание – это предложение, относительно которого имеет смысл говорить, что его содержание истинно или ложно.

Элементарное высказывание – это высказывание, никакая часть которого сама уже не является высказыванием

Сложное высказывание – это высказывание, образованное из элементарных с помощью логических операций.

Операции над высказываниями являются предметом части математической логики, называемой **логикой высказываний**.

Обозначение высказываний: А, В, С,..., их значений: Л – ложь, И – истина.

Операции над высказываниями:

Пусть даны два произвольных высказывания А и В.

1) Отрицанием высказывания А называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание А ложно (обозначается $\overline{\mathrm{A}}, \neg \mathrm{A}, \mathrm{A}'$ и читается «не А»).

2) Конъюнкцией двух высказываний А и В называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны (обозначается $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}, \mathrm{A\&B}$ и читается «А и В»).

3) Дизъюнкцией двух высказываний А и В называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны (обозначается $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ и читается «А или В»).

4) Импликацией двух высказываний А и В называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда А истинно, а В – ложно (обозначается $\mathrm{A} \to \mathrm{B}, \mathrm{A} \supset \mathrm{B}, \mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$ и читается «А влечёт В» или «если А, то В» или «из А следует В»). Высказывание А называется посылкой импликации, а высказывание В – заключением импликации.

5) Эквивалентностью двух высказываний А и В называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения А и В совпадают (обозначается $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$ и читается «А эквивалентно В»).

6) Суммой по mod 2 двух высказываний А и В называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения А и В различны (обозначается $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$ и читается «А сумма по модулю 2 В»).

7) Штрих Шеффера – антиконъюнкция. Антиконъюнкцией двух высказываний А и В называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны (обозначается $\mathrm{A}|\mathrm{B}$ и читается «А штрих Шеффера В»).

8) Стрелка Пирса – антидизъюнкция. Антидизъюнкцией двух высказываний А и В называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны (обозначается $\mathrm{A} \downarrow \mathrm{B}$ и читается «А стрелка Пирса В»).

Булевой функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется произвольная n-местная функция, действующая из множества {0, 1} во множество {0, 1}.

Булевы Функции от одной переменной:

Булевы Функции от двух переменных:

	Переменная x	0	0	1	1	
	Переменная y	0	1	0	1	
Название	Обозначение					Фиктивные
константа 0 (нуль)	$f_0 = 0$	0	0	0	0	x, y
конъюнкция	$f_1 = x \wedge y$	0	0	0	1	
запрет по y	$f_2 = \overline{(x \to y)}$	0	0	1	0	
повтор x	$f_3 = x$	0	0	1	1	y
запрет по x	$f_4 = \overline{(y \to x)}$	0	1	0	0	
повтор y	$f_5 = y$	0	1	0	1	x
сумма по mod 2	$f_6 = x \oplus y$	0	1	1	0	
дизъюнкция	$f_7 = x \vee y$	0	1	1	1	
стрелка Пирса	$f_8 = x \downarrow y$	1	0	0	0	
эквивалентность	$f_9 = x \sim y$	1	0	0	1	
инверсия y	$f_{10} = \bar{y}$	1	0	1	0	x
конверсия	$f_{11} = y \to x$	1	0	1	1	
инверсия x	$f_{12} = \bar{x}$	1	1	0	0	y
импликация	$f_{13} = x \to y$	1	1	0	1	
штрих Шеффера	$f_{14} = x \mid y$	1	1	1	0	
константа 1 (единица)	$f_{15} = 1$	1	1	1	1	x, y

Формы представления (СКНФ, СДНФ, СПНФ)

Выражение $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ называют *многочленной конъюнкцией*,

а выражение $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k$ – *многочленной дизъюнкцией*.

Обобщенные законы дистрибутивности и обобщенные законы де Моргана:

1)

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_l) \equiv (A_1 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_2) \wedge \ldots \wedge (A_1 \vee B_l) \wedge$$
$$\wedge (A_2 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2) \wedge \ldots \wedge (A_2 \vee B_l) \wedge \ldots \wedge (A_k \vee B_1) \wedge (A_k \vee B_2) \wedge \ldots \wedge (A_k \vee B_l)$$

2)

$$(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k) \wedge (B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_l) \equiv (A_1 \wedge B_1) \vee (A_1 \wedge B_2) \vee \ldots \vee (A_1 \wedge B_l) \vee$$
$$\vee (A_2 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2) \vee \ldots \vee (A_2 \wedge B_l) \vee \ldots \vee (A_k \wedge B_1) \vee (A_k \wedge B_2) \vee \ldots \vee (A_k \wedge B_l)$$

3) $\overline{(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k)} = \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \ldots \vee \overline{A_k}$

4) $\overline{(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k)} = \overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \ldots \wedge \overline{A_k}$

Формулу называют *элементарной конъюнкцией*, если она является конъюнкцией одной или нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания.

Формула называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ), если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций. ДНФ записываются в виде $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k$, где A_i — это элементарные конъюнкции.

Формула A от k переменных называется *СДНФ*, если она является ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция есть конъюнкция k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем на i-м месте этой конъюнкции стоит либо переменная x_i, либо ее отрицание, и все элементарные конъюнкции в такой ДНФ попарно различны.

Представление в виде СДНФ удобно тем, что оно обязательно существует для любой, не равной тождественно нулю, логической функции и при этом однозначно.

Формулу называют *элементарной дизъюнкцией*, если она является дизъюнкцией одной или нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания.

Формула называется *конъюнктивной нормальной формой (КНФ)*, если она является конъюнкцией элементарных конъюнкций. КНФ записываются в виде $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$, где$A_i$ — это элементарные дизъюнкции.

Формула A от k переменных называется *СКНФ*, если она является КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция есть дизъюнкция k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем на i-м месте этой дизъюнкции стоит либо переменная x_i, либо ее отрицание, и все элементарные конъюнкции в такой КНФ попарно различны.

Представление в виде СКНФ удобно тем, что оно обязательно существует для любой, не равной тождественно единице логической, функции и при том однозначно.

Алгоритм построения СДНФ

1. Строим таблицу истинности для функции и отмечаем в ней наборы переменных, на которых значение функции равно единице.
2. Записываем для каждого отмеченного набора конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

Алгоритм построения СКНФ

1. Строим таблицу истинности для функции и отмечаем в ней наборы переменных, на которых значение функции равно нулю.
2. Записываем для каждого отмеченного набора дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — ее отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

Таким образом, получается, что любую логическую функцию можно представить формулой, в которой используются только логические операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.