24. Метод анализа иерархий. МАИ с весовыми коэффициентами. МАИ для нескольких матриц парного сравнения. Оценка согласованности в МАИ.

Метод анализа иерархий (МАИ) – один из методов теории принятия решений или методов экспертных оценок, разработанный американским математиком Т.Саати. В основе этого метода лежит понятие собственных значений и собственных векторов.

Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – множество альтернатив. В МАИ каждой альтернативе x_i ставится в соответствие число w_i, называемое приоритетом альтернативы x_i.

Приоритеты удовлетворяют свойствам $0 \le w_i \le 1, \forall i$ и $\sum w_i = 1$. Чем больше w_i, тем выше приоритетные альтернативы x_i. Оптимальной альтернативой является та, у которой w_i максимален.

В отличие от метода нечетных множеств МАИ ранжирует (упорядочивает) все альтернативы. Для определения альтернатив используется матрица парных (попарных) сравнений.

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix}$$

Число w_{ij} выражает во сколько раз альтернатива x_i лучше альтернативы x_j. Матрица W является обратносимметричной, то есть,

$$w_{ij} = \frac{1}{w_{ji}} \forall i, j.$$

В частности, $w_{ii} = 1, \ \forall i = 1, 2, ..., n.$

Если приоритеты альтернатив w_i заданы, то элементы матрицы W определяется по формуле

$$w_{ij} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Заметим, что вектор приоритетов

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}$$

является собственным вектором матрицы парных сравнений W. В самом деле,

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + w_1 + \dots + w_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_n + w_n + \dots + w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, w – собственный вектор матрицы W, соответствующий собственному значению n.

МАИ с весовыми коэффициентами

Пусть имеется множество альтернатив $X = \{x_1, ..., x_n\}$, на которых заданы несколько матриц парных сравнений $W_1, W_2, \dots, W_n$.

Ставится задача выбора оптимальных альтернатив с учетом всех признаков. Если лицо, принимающее решение (ЛПР) может определить важность признаков и выставить им весовые коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ такие, что $\lambda_i \ge 0, \ \ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$, то можно применить следующую схему решения задачи.

Алгоритм решения задачи методом анализа иерархий при известных весовых коэффициентах следующий:

1. Для каждого признака $W_i, \ i = 1, \dots, m$ находим приоритеты альтернатив $w_j^i, \ j = 1, 2, \dots, n.$

2. Определяем общие приоритеты по формуле $w_j = \lambda_1 w_j^1 + \dots + \lambda_m w_j^m$ для $j = 1, 2, \dots, n.$

3. Оптимальными альтернативами являются те, у которых w_j максимальны.

МАИ для нескольких матриц парного сравнения

Если лицо, принимающее решение, затрудняется с определением весовых коэффициентов, то можно составить матрицу парных сравнений на множестве признаков или экспертов. В результате вместо весовых коэффициентов мы имеем матрицу парных сравнений E. В этом случае задача решается следующим образом.

Алгоритм решения задачи в случае матрицы парных сравнений на множестве признаков (экспертов)

1. Для каждой матрицы парных сравнений $W_1, W_2, \ldots, W_m$ мы находим вектор приоритетов $w^i = \begin{pmatrix} w_1^i & w_2^i & \ldots & w_n^i \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.
2. Для матрицы E также находим вектор приоритетов $e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.
3. Общие приоритеты альтернатив находим по формуле $w_j = e_1 w_j^1 + \ldots + e_m w_j^m$.

Оценка согласованности в МАИ

Понятие согласованности мнений экспертов играет важную роль в теории принятия решений: чем лучше согласованность исходных данных, тем более достоверен результат. В метода анализа иерархий применяется следующий метод оценки согласованности, предложенный автором метода.

1. Вычисляется сумма $a_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ji}$ элементов каждого столбца матрицы W.
2. Вычисляется значение $\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$, где w_i – приоритеты.
3. Находится индекс согласованности $ИС = \dfrac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$.
4. Находится отношение согласованности $ОС = \dfrac{ИС}{ЧСС} \cdot 100\%$,

где $ЧСС$ – число случайных согласованностей. Оно выражает средний индекс согласованности большого количества случайных матриц данного порядка.

5. Если $ОС < 10\%$ (иногда можно допустить $ОС < 20\%$), то матрица парных сравнений признается хорошо согласованной.

Заметим, что можно доказать, что $\lambda_{\max} \geq n$ для любой матрицы, причем $\lambda_{\max} = n$ только в случае полной согласованности. Покажем, что если матрица W полностью согласована, то $\lambda_{\max} = n$ и, следовательно, $ИС = ОС = 0$.

Если матрица W полностью согласована, то $w_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$ для любых i, j. Тогда $a_i = \dfrac{w_1}{w_i} + \ldots + \dfrac{w_n}{w_i} = \dfrac{1}{w_i}(w_1 + \ldots + w_n) = \dfrac{1}{w_i}$. Отсюда $\lambda_{\max} = a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n = n$ и, следовательно, $ИС = ОС = 0$.