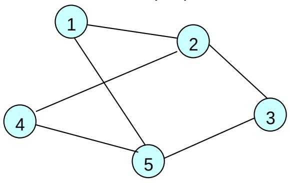
4. Дискретные структуры. Связанные графы. компоненты связности, вершинная и реберная связность. Двухсвязные графы. Виды и операции

Теория графов – раздел дискретной математики, изучающий свойства графов. Родоначальником теории графов считается Леонард Эйлер

Пусть V - непустое конечное множество,
$V^{(2)} = V \times V = \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\}$.

Пара (V, E), где $E \subseteq V^{(2)}$, называется неориентированным графом.

Элементы множества V называются вершинами графа, элементы множества E – ребрами.



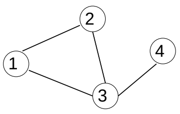
Т.о., граф – это конечное *множество V вершин и множество E ребер*.

Обозначение: V_G и E_G.

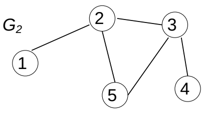
Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены цепью.

Пример.

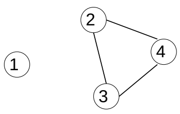
G_1



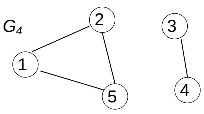
G_2



G_3



G_4



(цепь- марштур где все ребра различны)

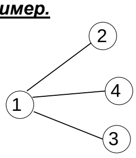
Всякий максимально связный подграф графа G называется *компонентой связности* графа G.

«максимально» означает, что он не содержится в связном подграфе с бо́льшим числом элементов.

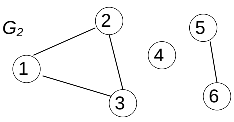
Множество вершин компоненты связности называется *областью связности графа*.

Пример.

G_1



G_2



Компонента связности
{1, 2, 3, 4}

Компоненты связности
{1, 2, 3}, {4}, {5, 6}

Теорема 1. Для любого графа либо он сам, либо его дополнение является связным.

Теорема 2. Пусть G – связный граф, $e \in E_G$. Тогда

1. если ребро e принадлежит какому-нибудь циклу графа G, то граф $G - e$ связен;
2. если ребро e не входит ни в один цикл, то граф $G - e$ имеет ровно две компоненты;

Теорема 3. (О числе ребер в графе) Если число компонент связности графа G равно k, то

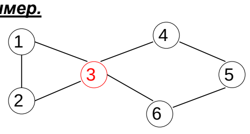
$$n - k \le m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

где m – число ребер, n – порядок графа G.

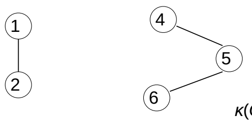
Числом вершинной связности $\kappa(G)$ *(каппа)* графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу. Если граф несвязный, то $\kappa(G) = 0$.

Пример.

G_1

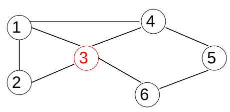


$G_1 - 3$

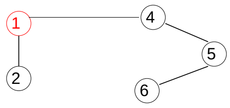


$\kappa(G_1) = 1$

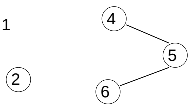
G_2



$G_2 - 3$



$G_2 - 3 - 1$

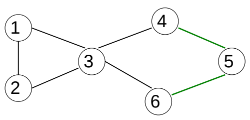


$\kappa(G_2) = 2$

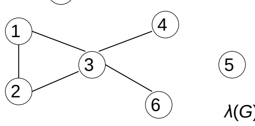
Пусть G – граф порядка $n > 1$. *Числом реберной связности* $\lambda(G)$ графа G называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Если граф одновершинный или несвязный, то $\lambda(G) = 0$.

Пример.

G



$G - \{4,5\} - \{5,6\}$



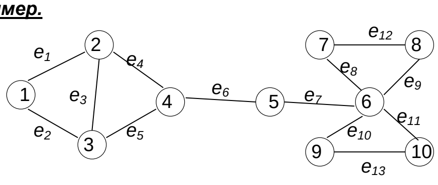
$\lambda(G) = 2$

Вершина v графа G называется *точкой сочленения* (или *разделяющей вершиной*), если граф $G - v$ имеет больше компонент связности, чем G

Ребро e графа G называется *мостом*, если его удаление увеличивает число компонент связности.

Пример.

G



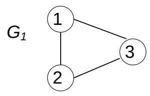
Точки сочленения: 4, 5, 6

Мосты: e_6, e_7.

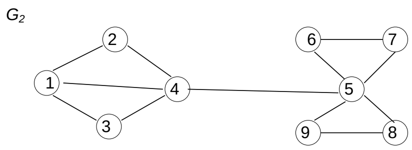
Неориентированный граф называется *двусвязным*, если он связен и не содержит точек сочленения.

Произвольный максимально возможный двусвязный подграф графа G называется *блоком* (*компонентой двусвязности*) этого графа.

Пример.



граф G_1 является двусвязным

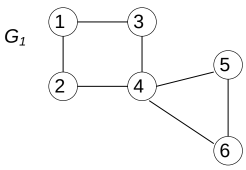


Блоки:
{1, 2, 4, 3}
{5, 6, 7}
{5, 8, 9}
{4, 5}

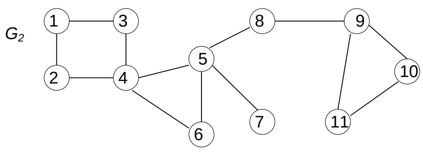
Неориентированный граф называется *реберно-двусвязным*, если он связный и не содержит мостов.

Произвольный максимально возможный реберно-двусвязный подграф графа G называется *листом* этого графа.

Пример.



Граф G_1 является реберно-двусвязным

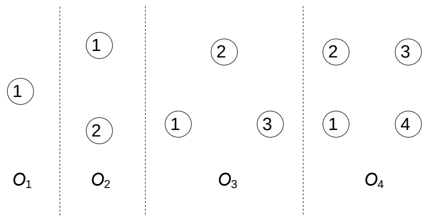


Листы:
{2, 1, 3, 4, 5, 6}
{7}
{9, 10, 11}
{8}

Пустой граф G – граф, в котором ребра отсутствуют.

O_n – пустой граф порядка n

Пример

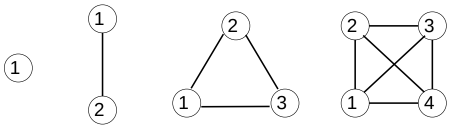


Полный граф G – граф, в котором любые две его вершины смежны.

K_n – полный граф порядка n

Число ребер: $m = |E_G| = \frac{n(n-1)}{2}$

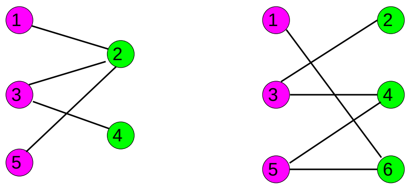
Пример



K_1 K_2 K_3 K_4

Граф $G(V, E)$ называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить так, что $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. При этом каждое ребро $e \in E$ соединяет вершины из разных множеств.

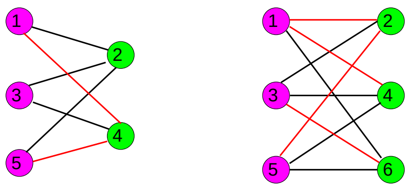
Пример.



Граф $G(V, E)$ называется *полным двудольным*, если любая вершина из одной доли смежны со всеми вершинными из другой доли.

Обозначение: K_{n_1, n_2}, если $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2$.

Пример.

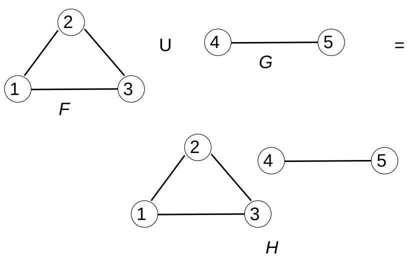


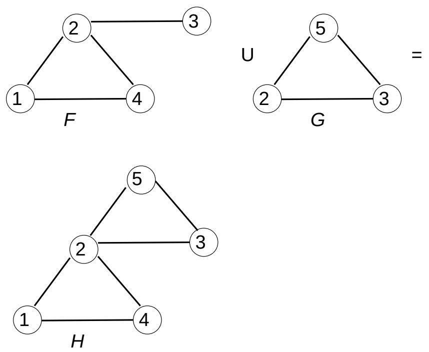
$K_{3,2}$ $K_{3,3}$

Объединение. Граф H называется *объединением* графов F и G, если $V_H = V_F \cup V_G$, $E_H = E_F \cup E_G$.

Обозначение $H = F \cup G$.

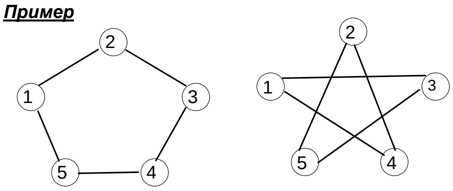
Пример





Дополнение графа до полного графа. Граф $\overline{G}$ называется *дополнением графа G до полного*, если у него $V_{\overline{G}} = V_G$, а $E_{\overline{G}}$ определяется следующим образом: вершины u и v смежны, если они не являются смежными в графе G.

Пример

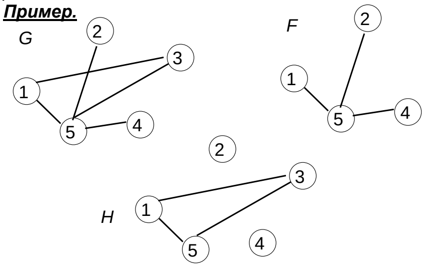


G

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \quad 10 - 5 = 5$$

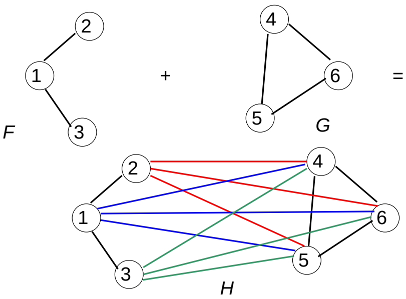
Дополнение подграфа F до графа G. Пусть F – подграф графа G. Граф H называется дополнением F до G, если у него $V_H = V_G$, а E_H определяется следующим образом: вершины u и v смежны, если они не смежны в графе F, но смежны в G.

Пример.



Соединение. Граф H называется соединением графов F и G, если $V_H = V_F \cup V_G$, $E_H = E_F \cup E_G \cup E_{FG}$, где E_{FG} – множество всех дуг, соединяющих вершины из разных графов. Обозначение: $H = F + G$

Пример.



Произведение. Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ – два графа. Произведением этих графов называется граф $G = G_1 \times G_2$, для которого

$V_G = V_1 \times V_2$ – декартово произведение множеств вершин исходных графов,

E_G определяется следующим образом: вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в графе G тогда и только тогда, когда

1) $u_1 = v_1$, а u_2 и v_2 смежны в G_2,

2) $u_2 = v_2$, а u_1 и v_1 смежны в G_1.

Пример.