2. Логические исчисления Булевы функции и таблицы истинности. Алгебра Жегалкина. Минимизация булевых функций. Карты Карно

Булева алгебра – раздел математики, изучающий логические выражения и операции.

Высказывание – это предложение, относительно которого имеет смысл говорить, что его содержание истинно или ложно.

Элементарное высказывание – это высказывание, никакая часть которого сама уже не является высказыванием

Сложное высказывание – это высказывание, образованное из элементарных с помощью логических операций.

Операции над высказываниями являются предметом части математической логики, называемой **логикой высказываний**.

Обозначение высказываний: A, B, C,..., их значений: Л – ложь, И – истина.

Операции над высказываниями:

Пусть даны два произвольных высказывания A и B.

1) Отрицанием высказывания A называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание A ложно (обозначается $\overline{\mathrm{A}}, \neg\mathrm{A}, \mathrm{A}'$ и читается «не A»).

2) Конъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны (обозначается $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}, \mathrm{A}\&\mathrm{B}$ и читается «A и B»).

3) Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны (обозначается $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ и читается «A или B»).

4) Импликацией двух высказываний A и B называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда A истинно, а B – ложно (обозначается $\mathrm{A} \to \mathrm{B}, \mathrm{A} \supset \mathrm{B}, \mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$ и читается «A влечёт B» или «если A, то B» или «из A следует B»). Высказывание A называется посылкой импликации, а высказывание B – заключением импликации.

5) Эквивалентностью двух высказываний A и B называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения A и B совпадают (обозначается $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$ и читается «A эквивалентно B»).

6) Суммой по mod 2 двух высказываний A и B называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения A и B различны (обозначается $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$ и читается «A сумма по модулю 2 B»).

7) Штрих Шеффера – антиконъюнкция. Антиконъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны (обозначается $\mathrm{A}|\mathrm{B}$ и читается «A штрих Шеффера B»).

8) Стрелка Пирса – антидизъюнкция. Антидизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны (обозначается $\mathrm{A} \downarrow \mathrm{B}$ и читается «A стрелка Пирса B»).

Булевой функцией $f(x_1, \dots, x_n)$ называется произвольная n-местная функция, действующая из множества {0, 1} во множество {0, 1}.

Булевы Функции от одной переменной:

Булевы Функции от двух переменных:

	Переменная x	0	0	1	1	
	Переменная y	0	1	0	1	
Название	Обозначение					Фиктивные
константа 0 (нуль)	$f_0 = 0$	0	0	0	0	x, y
конъюнкция	$f_1 = x \wedge y$	0	0	0	1	
запрет по y	$f_2 = \overline{(x \to y)}$	0	0	1	0	
повтор x	$f_3 = x$	0	0	1	1	y
запрет по x	$f_4 = \overline{(y \to x)}$	0	1	0	0	
повтор y	$f_5 = y$	0	1	0	1	x
сумма по mod 2	$f_6 = x \oplus y$	0	1	1	0	
дизъюнкция	$f_7 = x \vee y$	0	1	1	1	
стрелка Пирса	$f_8 = x \downarrow y$	1	0	0	0	
эквивалентность	$f_9 = x \sim y$	1	0	0	1	
инверсия y	$f_{10} = \bar{y}$	1	0	1	0	x
конверсия	$f_{11} = y \to x$	1	0	1	1	
инверсия x	$f_{12} = \bar{x}$	1	1	0	0	y
импликация	$f_{13} = x \to y$	1	1	0	1	
штрих Шеффера	$f_{14} = x \mid y$	1	1	1	0	
константа 1 (единица)	$f_{15} = 1$	1	1	1	1	x, y

Множество булевых функций, заданный в базисе Жегалкина с помощью операций S4={⊕,&(это коньюнкция),1} называется алгеброй Жегалкина.

Основные свойства.

1. **коммутативность**

H1⊕H2=H2⊕H1

H1&H2=H2&H1

2. **ассоциативность**

H1⊕(H2⊕H3)=(H1⊕H2)⊕H3

H1&(H2&H3)=(H1&H2)&H3

3. **дистрибутивность**

H1&(H2⊕H3)=(H1&H2)⊕(H1&H3)

4. **свойства констант**

H&1=H

H&0=0

H⊕0=H

5. H⊕H=0

H&H=H

Утверждение. Через операции алгебры Жегалкина можно выразить все другие булевы функции:

¬X=1⊕X

XvY=X⊕Y⊕XY

X~Y=1⊕X⊕Y

X→Y=1⊕X⊕XY

X↓Y=1⊕X⊕Y⊕XY

X|Y=1⊕XY

Определение. Полиномом Жегалкина (полиномом по модулю 2) от **n** переменных $X_1, X_2 \ldots X_n$ называется выражение вида:

$C_0 \oplus C_1X_1 \oplus C_2X_2 \oplus \ldots \oplus C_nX_n \oplus C_{12}X_1X_2 \oplus \ldots \oplus C_{12\ldots n}X_1X_2 \ldots X_n$,

где постоянные C_k могут принимать значения 0 ли 1.

Если **полином Жегалкина** не содержит произведений отдельных переменных, то он называется линейным (линейная функция).

Например, f=X⊕YZ⊕XYZ и f1=1⊕X⊕Y⊕Z - полиномы, причем вторая является линейной функцией.

Теорема. Каждая булева функция представляется в виде полинома Жегалкина единственным образом.

Приведем основные методы построения полиномов Жегалкина от заданной функции.

1. Метод неопределенных коэффициентов. Пусть $P(X_1, X_2 \ldots X_n)$ - искомый полином Жегалкина, реализующий заданную функцию $f(X_1, X_2 \ldots X_n)$. Запишем его в виде

$P = C_0 \oplus C_1X_1 \oplus C_2X_2 \oplus \ldots \oplus C_nX_n \oplus C_{12}X_1X_2 \oplus \ldots \oplus C_{12\ldots n}X_1X_2 \ldots X_n$

Найдем коэффициенты C_k. Для этого последовательно придадим переменным $X_1, X_2 \ldots X_n$ значения из каждой строки таблицы истинности. В итоге получим систему из 2^n уравнений с 2^n неизвестными, имеющую единственное решение. Решив ее, находим коэффициенты полинома $P(X_1,X_2 \ldots X_n)$.

2. Метод, основанный на преобразовании формул над множеством связок {¬,&}. Строят некоторую формулу **Ф** над множеством связок {¬,&}, реализующую данную функцию $f(X_1,X_2 \ldots X_n)$. Затем заменяют всюду подформулы вида ¬A на A⊕1, раскрывают скобки, пользуясь дистрибутивным законом (см. свойство 3), а затем применяют свойства 4 и 5.

Пример. Построить полином Жегалкина функции $f(X,Y)=X\to Y$

Решение.

1. (метод неопределенных коэффициентов). Запишем искомый полином в виде:

$P=C_0\oplus C_1X\oplus C_2Y\oplus C_{12}XY$

Пользуясь таблицей истинности

X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
X→Y	1	1	0	1

получаем, что

$f(0,0)=P(0,0)=C_0=1$

$f(0,1)=P(0,1)=C_0\oplus C_2=1$

$f(1,0)=P(1,0)=C_0\oplus C_1=0$

$f(1,1)=P(1,1)=C_0\oplus C_1\oplus C_2\oplus C_{12}=1$

Откуда последовательно находим, $C_0=1$, $C_1=1$, $C_2=0$, $C_{12}=1$

Следовательно: $x\to y=1\oplus X\oplus XY$.

2. (Метод преобразования формул.). Имеем:

$X\to Y=\neg X v Y=\neg(X\neg Y)=(X(Y\oplus 1))\oplus 1=1\oplus X\oplus XY$

Заметим, что преимущество алгебры Жегалкина (по сравнению с другими алгебрами) состоит в арифметизации логики, что позволяет выполнять преобразования булевых функций довольно просто. Ее недостатком по сравнению с булевой алгеброй является громоздкость формул.

Минимизация б. функций

1) с помощью алг. преобразований

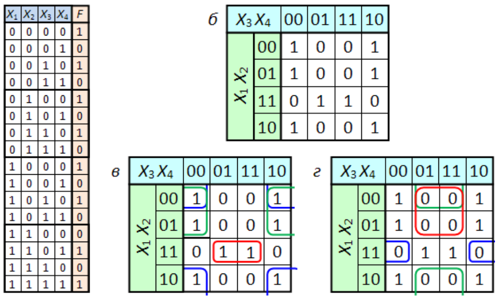
$a\vee b=b\vee a$	$a\wedge b=b\wedge a$	1 коммутативность, переместительность
$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$	$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$	2 ассоциативность, сочетательность
3.1 конъюнкция относительно дизъюнкции $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$	3.2 дизъюнкция относительно конъюнкции $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$	3 дистрибутивность, распределительность
$a\vee\neg a=1$	$a\wedge\neg a=0$	4 комплементность, дополнительность (свойства отрицаний)
$\neg(a\vee b)=\neg a\wedge\neg b$	$\neg(a\wedge b)=\neg a\vee\neg b$	5 законы де Моргана
$a\vee(a\wedge b)=a$	$a\wedge(a\vee b)=a$	6 законы поглощения
$a\vee(\neg a\wedge b)=a\vee b$	$a\wedge(\neg a\vee b)=a\wedge b$	7 Блейка-Порецкого
$a\vee a=a$	$a\wedge a=a$	8 Идемпотентность
$\neg\neg a=a$		9 инволютивность отрицания, закон снятия двойного отрицания
$a\vee 0=a$	$a\wedge 1=a$	
$a\vee 1=1$	$a\wedge 0=0$	10 свойства констант
дополнение 0 есть 1 $\neg 0=1$	дополнение 1 есть 0 $\neg 1=0$	
$(a\vee b)\wedge(\neg a\vee b)=b$	$(a\wedge b)\vee(\neg a\wedge b)=b$	11 Склеивание

2) с помощью карт карно

графический способ минимизации переключательных (булевых) функций, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями и устранение потенциальных гонок. Представляет собой операции попарного неполного склеивания и элементарного поглощения

Карты Карно рассматриваются как перестроенная соответствующим образом таблица истинности функции

Исходной информацией для работы с картой Карно является таблица истинности минимизируемой функции.



X_1	X_2	X_3	X_4	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

б

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

в

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

г

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

для двух переменных так будет выглядеть

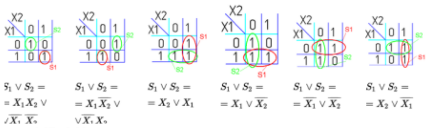
y \ x	0	1
0	$\bar{x}\,\bar{y}$	$x\,\bar{y}$
1	$\bar{x}\,y$	$x\,y$

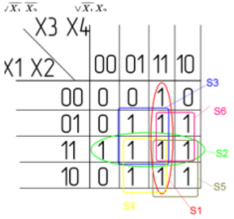
для трех:

z \ xy	00	01	11	10
0	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	$xy\bar{z}$	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$
1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	$\bar{x}yz$	xyz	$x\,\bar{y}\,z$

Если необходимо получить минимальную ДНФ, то в Карте рассматриваем только те клетки, которые содержат единицы, если нужна КНФ, то рассматриваем те клетки, которые содержат нули. Сама минимизация производится по следующим правилам (на примере ДНФ):

Объединяем смежные клетки, содержащие единицы, в область так, чтобы одна область содержала 2^n n целое число клеток (помним про то, что крайние строки и столбцы являются соседними между собой), в области не должно находиться клеток, содержащих нули;
Область должна располагаться симметрично оси(ей) (оси располагаются через каждые четыре клетки);
Несмежные области, расположенные симметрично оси(ей), могут объединяться в одну;
Область должна быть как можно больше, а количество областей как можно меньше;
Области могут пересекаться;
Возможно несколько вариантов покрытия.
Далее берём первую область и смотрим, какие переменные не меняются в пределах этой области, выписываем конъюнкцию этих переменных; если неменяющаяся переменная нулевая, проставляем над ней инверсию. Берём следующую область, выполняем то же самое, что и для первой, и т. д. для всех областей. Конъюнкции областей объединяем дизъюнкцией.
Например (для Карт на 2 переменные):





$f(X1, X2, X3, X4) = S1 \vee S2 \vee S3 \vee S4 \vee S5 \vee S6 =$
$= X3X4 \vee X1X2 \vee X2X4 \vee X1X4 \vee X1X3 \vee X2X3$