3. Дискретные структуры. Неориентировнные и ориентированные графы. Матрицы смежности и инцедентности. Элементы графов. Подграфы. Маршруты, цепи, циклы. Степени вершин графов.

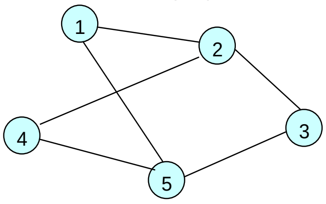
Теория графов – раздел дискретной математики, изучающий свойства графов. Родоначальником теории графов считается Леонард Эйлер

Пусть V - непустое конечное множество,

$V^{(2)} = V \times V = \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\}$.

Пара (V, E), где $E \subseteq V^{(2)}$, называется неориентированным графом.

Элементы множества V называются вершинами графа, элементы множества E – ребрами.



Т.о., граф – это конечное *множество V вершин и множество E ребер*.

Обозначение: V_G и E_G.

Вершины и ребра графа называются его элементами. Число вершин графа G называется его *порядком* и обозначается $|V_G|$. Если $|V_G| = n$, $|E_G| = m$, то граф G называют (n, m)–графом.

$|V_G| = n = 5$. $|E_G| = m = 6$. (5, 6) – граф

Граф порядка n называется помеченным, если его вершинам присвоены некоторые метки, например, номера $1, 2, 3, \ldots, n$.

Две вершины u и v графа *смежны*, если множество $\{u, v\}$ является ребром, и *не смежны* в противном случае.

1 и 5 – смежны, 2 и 5 – не смежны.

Если $e = \{u, v\}$ – ребро, то вершины u и v называют его *концами*.

Два ребра называются *смежными*, если они имеют общий конец.

{4, 5} и {5, 3} – смежны, {2, 3} и {1, 5} – не смежны.

Вершина v и ребро e называются *инцидентными*, если v является концом ребра e.

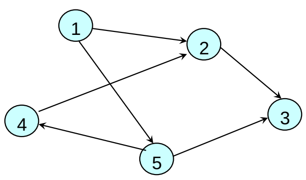
Вершина 2 и ребро {1, 2} – инцидентны.

Множество всех вершин графа G, смежных с некоторой вершиной v, называется *окружением вершины v* и обозначается $N_G(v)$.

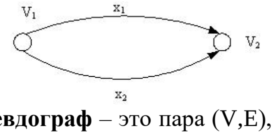
$N_G(5) = \{1, 3, 4\}$.

Ориентированный граф (орграф) – это пара (V, A), где V – множество вершин, A – множество ориентированных ребер, которые называются *дугами*, $A \subseteq V^2$.

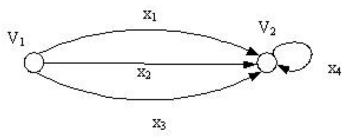
Если $a = (v_1, v_2)$ – дуга, то вершина v_1 называется ее началом, а вершина v_2 – концом.



Мультиграф – это пара (V,E), где V – непустое множество вершин, а E – комплект неупорядоченных пар вершин. То есть, в мультиграфе допускаются кратные ребра.



Псевдограф – это пара (V,E), где V – непустое множество вершин, а E – комплект неупорядоченных пар вершин, не обязательно различных. То есть, в псевдографе допускаются петли.



Рассмотрим граф с *n* вершинами и *m* ребрами

Матрица смежности – квадратная матрица *A* порядка *n*, элементы которой определяются следующим образом:

– для неориентированного графа

$$a_{ij} = \begin{cases} k, \text{ если } \{i, j\} \text{ – ребро,} \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases}$$

здесь *k* – количество ребер, соединяющих вершины *i* и *j*.

Если {*i*, *j*} - петля, то значение диагонального элемента равно 2.

Матрица смежности неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали.

– для ориентированного графа

$$a_{ij} = \begin{cases} k, \text{ если } (i, j) \text{ – дуга} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

здесь *k* – количество дуг, соединяющих вершины *i* и *j*.

Если (*i*, *j*) - петля, то значение диагонального элемента равно 1.

Матрица смежности ориентированного графа необязательно является симметричной.

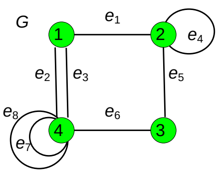
Матрица инцидентности – матрица *I* размера $n \times m$, элементы которой определяются следующим образом:

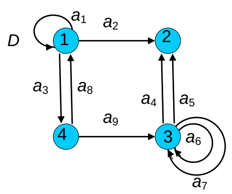
– для неориентированного графа

$$i_{ps} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } p \text{ инцидентна ребру } e_s, \\ 2, \text{ если в вершине } p \text{ ребро } e_s \text{ является петлей,} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

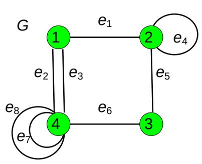
– для ориентированного графа

$$i_{ps} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } p \text{ является началом дуги } a_s, \\ -1, \text{ если вершина } p \text{ является концом дуги } a_s, \\ \pm 1, \text{ если } a_s \text{ – петля,} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

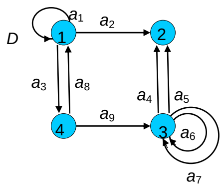




$$A_G = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_D = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



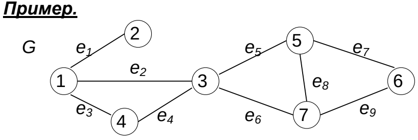
$$I_G = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$



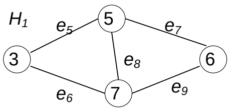
$$I_D = \begin{array}{c|ccccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ \hline 1 & \pm 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

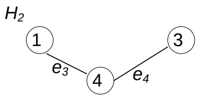
Граф H называется *подграфом* (или частью) графа G, если $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$.

Пример.



$V_G = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $E_G = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$





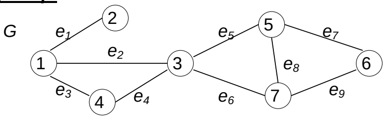
$V_{H1} = \{3,5,6,7\}$ $V_{H2} = \{1,3,4\}$

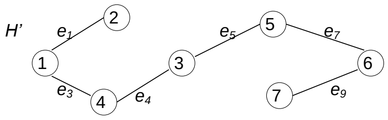
$E_{H1} = \{e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$ $E_{H2} = \{e_3,e_4\}$

Подграф H называется *остовным подграфом*, если $V_H = V_G$; в нем нет циклов.

Остов H покрывает вершины неориентированного графа G, если любая вершина графа G инцидентна хотя бы одному ребру из H.

Пример.





Последовательность вершин и ребер

$v_1, e_1, \dots, v_l, e_l, v_{l+1}$, такая что $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}, i = 1, \dots, l$,

называется маршрутом, соединяющим вершины v_1 и v_{l+1}.

Маршрут может быть задан:

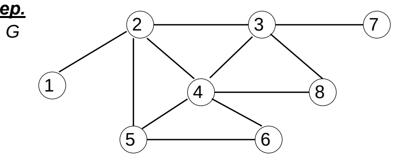
- либо только последовательностью вершин $v_1, \dots, v_l, v_{l+1}$;
- либо только последовательностью ребер $e_1, \dots, e_l$.

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны. Маршрут называется *простой цепью*, если все его ребра различны и все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны.

Маршрут называется *циклическим*, если $v_1 = v_{l+1}$. Циклическая цепь называется *циклом*; циклическая простая цепь – *простым циклом*.

Длина маршрута l – число ребер в нем.

Пример.



1) (3, 7) – простая цепь $l = 1$

2) (2, 3, 4, 6, 5) – простая цепь, $l = 4$

3) (4, 6, 5, 4, 6, 5, 4) – циклический маршрут, $l = 6$

4) (4, 3, 2, 4, 5, 6, 4) – цикл, не являющийся простым, $l = 6$

5) (1, 2, 3, 4, 2) – цепь, не являющаяся простой, $l = 4$

6) (5, 2, 4, 6, 5) – простой цикл, $l = 4$

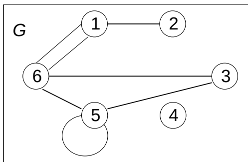
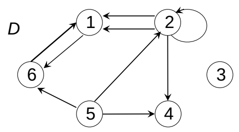
7) (7, 3, 4, 8, 4, 6, 5, 6, 4, 2, 1) – маршрут, $l = 10$

8) (4, 8, 3, 2, 4, 6, 5, 4) – цикл, не являющийся простым, $l = 7$

9) (8, 3, 4, 8) – простой цикл, $l = 3$

10) (2, 4, 7, 5, 1) – произвольная послед-ность вершин

Неориентированный граф	Ориентированный граф
Степенью вершины v графа G называется число инцидентных ей ребер.	Полустепенью исхода (захода) вершины v графа D называется число дуг, исходящих из вершины v (заходящих в вершину v).
Обозначение: $\rho(v)$	Обозначение: $\rho_1(v)$ – полустепень исхода $\rho_2(v)$ – полустепень захода
Петля вносит двойку в соответствующую степень вершины Если $\rho(v) = 0$, то вершина v называется *изолированной*. Если $\rho(v) = 1$, то вершина v называется висячей.	Петля вносит единицу в обе эти степени

	
$\rho(1) = 3$ $\rho(2) = 1$ $\rho(3) = 2$ $\rho(4) = 0$ $\rho(5) = 2+2=4$ $\rho(6) = 4$	$\rho_1(1) = 1$ $\rho_2(1) = 3$ $\rho_1(2) = 3+1=4$ $\rho_2(2) = 1+1 = 2$ $\rho_1(3) = 0$ $\rho_2(3) = 0$ $\rho_1(4) = 0$ $\rho_2(4) = 2$ $\rho_1(5) = 3$ $\rho_2(5) = 0$ $\rho_1(6) = 1$ $\rho_2(6) = 2$
$\sum_{i=1}^{n} \rho(i) = 2m$ $\|V_G\| = n, \|E_G\| = m$	$\sum_{i=1}^{n} \rho_1(v) = \sum_{i=1}^{n} \rho_2(v) = m$ $\|V_D\| = n, \|A_D\| = m$