22. Основные понятия теории игр. Игры с природой. Антагонистические дифференциальные игры. Кооперативные игры в форме характеристической функции. Ядро по Нейману-Монгерштерну. Вектор Шепли.

Отличительная особенность **игры с природой** состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком один. Игроку два (природа) не важен результат, либо он не способен к осмысленным решениям.

Различают два вида задач в играх с природой:

- Задача о принятии решений в условиях риска, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний;
- Задачи о принятии решений в условиях неопределенности, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы;

Теперь же, для принятия решения, у нас есть несколько критериев.

1. Критерий Вальда (максиминный). Игрок рассчитывает, что природа пойдет по наихудшему для него пути, и следует выбрать вариант с максимальной прибылью при самом плохом исходе, поэтому данный критерий считается пессимистическим. Представить его можно в виде max (min i)
2. Критерий максимума (максимаксный) является оптимистическим, т.е. мы надеемся на самый благоприятный для нас исход.представляется как max (max i).
3. Критерий Гурвица рекомендует стратегию, определяемую по формуле max (A*max i + (1-A)*min i), где A — степень оптимизма и изменяется в пределах от 0 до 1. Критерий выдает результат, учитывающий возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При A=1 данный критерий можно заменить критерием максимума, а при A=0 — критерием Вальда. Величина A зависит от степени ответственности игрока один: чем она выше, тем ближе A к единице.
4. Критерий Сэвиджа (минимаксный). Суть его заключается в выборе стратегии, не допускающей слишком высоких потерь. Для этого используется матрица рисков, в которой вычисляется максимальная прибыль при каждом варианте действия игрока, и среди результатов выбирается наименьший. Его формула выглядит как min (max i)
5. По критерию Байеса предлагается придать равные вероятности всем рассматриваемым стратегиям, после чего принять ту из них, при которой ожидаемый выигрыш окажется наибольшим. Критерий имеет один недостаток: не всегда можно точно определить вероятность того или иного события со стороны природы. Формулой для него является max (Σ q*i).

Основная задача состоит в том, чтобы найти оптимальные (или хотя бы рациональные) стратегии, наилучшим образом приводящие систему к цели при заданных внешних условиях. Для выбора стратегий в условиях неопределенности можно применять любые критерии, в условиях риска действеннее критерий Байеса. Однако выбор между самими критериями основывается обычно на интуиции, зависит от характера принимающего решение (в частности, его склонности к риску).

Если решение принимается в условиях неопределенности, то лучше использовать несколько критериев. В том случае, если рекомендации совпадают, можно с уверенностью выбирать наилучшее решение. Если рекомендации противоречивы, решение надо принимать более взвешенно, с учетом сильных и слабых сторон.

Кооперативные игры в форме характеристической функции:

Характеристической функцией игры с множеством игроков N называют вещественную функцию v, определенную на всех возможных коалициях $S \subseteq N$, при этом для любой пары непересекающихся коалиций T, S (T ⊂N, S ⊂ N) выполняется свойство супераддитивности:

$$v(T) + v(S) \le v(T \cup S), \quad v(\emptyset) = 0.$$

выполнение свойства означает, что возможности объединенной коалиции не меньше, чем возможности двух непересекающихся коалиций, действующих независимо друг от друга. Поэтому у игроков имеется мотив объединения в максимальную коалицию N.

Говорят, что игра $\Gamma = \langle N, v\rangle$ задана в форме характеристической функции, если указаны множество игроков N и характеристическая функция v.

Из свойства супераддитивности характеристической функции следует, что для любых непересекающихся коалиций S1, . . . , Sk

имеет место неравенство $\sum_{i=1}^{k} v(S_i) \le v(N).$

Значение характеристической функции - максимальный гарантированный выигрыш коалиции в некоторой бескоалиционной игре в нормальной форме.

Под кооперативной игрой будем понимать просто пару

$\langle N, v\rangle$, где v — характеристическая функция, удовлетворяющая неравенству

$$v(T) + v(S) \le v(T \cup S), v(\emptyset) = 0.$$

Под решением кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v\rangle$ в форме характеристической функции понимают правило, ставящее в соответствие каждой кооперативной игре Γ определенное подмножество s(Γ) множества дележей I(Γ).

Ядро(решение) по Нейману-Монгерштерну:

Решением по Нейману-Моргенштерну (Н-М решением) кооперативной игры называется такое множество R дележей, что:

1. Никакие два дележа из R не доминируют друг друга (внутренняя устойчивость);
2. Каким бы ни был дележ S R найдется дележ r R такой, что r dom s (внешняя устойчивость).

Под внутренней устойчивостью множества дележей, образующих решение, понимается не доминирование дележей внутри решения. Под внешней устойчивостью понимается свойство доминирования хотя-бы одним из дележей, входящих в решение, любого дележа не входящего в решение.

<u>Теорема</u>. Если некоторое Н-М решение кооперативной игры <I,v> состоит из единственного дележа x, то характеристическая функция v является несущественной. (Н-М решение существенной кооперативной игры не может состоять только из одного дележа).

Недостатки Н-М решения:

1. Известны примеры кооперативных игр, которые не имеют Н-М решения. Более того, в настоящее время не известны какие-либо критерии, позволяющие судить о наличии у игры Н-М решения. Тем самым заложенный в Н-М

решении принцип оптимальности не является универсально реализуемым и область его реализуемости пока остается неопределенной.
2. Кооперативные игры, если имеют Н-М решение, то, как правило, более одного. Поэтому принцип оптимальности, приводящий к Н-М решению не является полным: он не в состоянии указать игрокам единственной системы норм распределения выигрыша.
3. Решения существенных кооперативных игр состоят из более чем из одного дележа. Таким образом, даже выбор какого-либо конкретного Н-М решения еще не определяет выигрыша каждого из игроков.

Вектор Шепли:

Задача состоит в том, чтобы найти вектор распределения общего выигрыша между участниками игры: Ф(v) = (Ф1(v), Ф2(v),... Фn(v))
При этом необходимо, чтобы Ф(v) был дележом в условиях кооперативной игры, то есть отвечал бы требованиям индивидуальной и групповой рациональности.
Предлагаемое решение носит аксиоматический характер, то есть выводится формальным образом из некоторой полной и непротиворечивой системы аксиом. Эта система включает в себя: аксиому эффективности, аксиому симметрии и аксиому агрегации.
Аксиома эффективности: распределение выигрыша носителя игры (N) происходит только между игроками, входящими в носитель. Иными словами, все приращение выигрыша, достигаемое только за счет обьединения в коалицию (эффект супераддитивности), распределяется только между теми, кто его обеспечил. С другой стороны, все болваны получают только то, что они выиграли бы в одиночку или в составе коалиции.
Аксиома симметрии: игроки, входящие в игру симметрично, должны получать одинаковый доход. Здесь симметричность понимается как одинаковое влияние на характеристическую функцию. Это утверждение равносильно тому, что доход игрока не зависит от его номера или "имени".
Формально Фj(v) = Фpj(v), где p - целое положительное число.
Аксиома агрегации: если игрок принимает участие в двух играх с характеристическими функциями v’ и v”, то причитающаяся ему доля: Ф(v’ + v”) = Ф(v’) + Ф(v”), если множества игроков в обоих играх совпадают.

Теорема 1.16.1. (Шепли). *Существует единст* $\{\langle N, v\rangle\} \to R^n$, *определенная на множестве всех* *влетворяющая аксиомам 1–3, при этом компонент* *числяются по формулам:*

$$\varphi_i[v] = \sum_{\{S | i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \backslash i)],$$

где s обозначает количество игроков в коалиции S.