лекции по ТПР тут -> https://github.com/Arianr0d/All/blob/4- -1- / / / %20 %20 %20 %202%20 %20 .pdf(лекция 2), https://github.com/Arianr0d/All/blob/4- -1- / / / %20 %20 % 20 %203%20 %20 .pdf(лекция 3) и https://github.com/Arianr0d/All/blob/4- -1- / / / %20 %20 %20 %204%20 %20 .pdf(лекция 4).

33. Методы экспертных оценок. Метод нечетких множеств. Метод анализа иерархий.

Метод нечетких множеств

Метод нечёткых множеств

Задача теории принятия решений может быть поставлена следующим образом. Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – множество альтернативных решений некоторой задачи. Известны критерии выбора альтернативы и требуется найти оптимальную альтернативу.

Рассмотрим постановку задач для метода нечетких множеств. Для этого необходимо, чтобы на множестве альтернатив было задано нечеткое отношение предпочтения (н.о.п.) $\mu(x_i, x_j)$.

Здесь числа $\mu(x_i, x_j)$ выражают степень того, насколько альтернатива x_i не хуже альтернативы x_j.

Нечеткое отношение предпочтения является рефлексивным (любая альтернатива не хуже самой себя). $(\forall i \;\; \mu(x_i, x_i) = 1)$.

Н.о.п. $\mu(x_i, x_j)$ обычно задаются таблицей или матрицей следующего вида.

R	x_1	x_2	…	x_n
x_1	1	$\mu(x_1, x_2)$	…	$\mu(x_1, x_n)$
x_2	$\mu(x_2, x_1)$	1	…	$\mu(x_2, x_n)$
…	…	…	1	…
x_n	$\mu(x_n, x_1)$	$\mu(x_n, x_2)$	…	1

Рисунок 1 – Метод нечетких множеств

Отметим, что в общем случае $\mu(x_i, x_j) + \mu(x_j, x_i) \neq 1$, так как опросы экспертов могут проводится нестрого.

Также используется нечеткое отношение строгого предпочтения (н.о.с.п) $\mu^s(x_i, x_j)$. Число $\mu^s(x_i, x_j)$ выражает степень того, насколько альтернатива x_i лучше альтернативы x_j.
Находится оно по формуле: $\mu^s(x_i, x_j) = \mu(x_i, x_j) \setminus \mu(x_j, x_i)$.

Здесь н.о.п. $\mu(x_i, x_j)$ рассматриваются как нечеткое множество в $X \times X$. Таюже можно записать в виде матриц $R^s = R \setminus R^*$; где R^* – транспонированная матрица к R.

Заметим, что н.о.с.п. $\mu^s(x_i, x_j)$ является антирефлексным и антисимметричным. В самом деле, если $\mu^s(x_i, x_j) > 0$ то
$\mu^s(x_i, x_j) = \mu(x_i, x_j) \setminus \mu(x_j, x_i) \Rightarrow \mu^s(x_j, x_i) = 0$.

Важную роль в методе нечетких множеств играет степень недоминируемости альтернативности $\mu_{\text{н.д.}}(x_i)$. Число $\mu_{\text{н.д.}}(x_i)$ выражает степень того, насколько альтернатива x_i не хуже любой другой альтернативы. Множество всех степеней недоминируемости является нечетким множеством на множестве альтернатив.

Степени недоминируемости альтернатив может быть найдены по формуле : $\mu_{\text{н.д.}}(x_i) = 1 - \max(\mu^s(x_j, x_i))$

Оптимальными альтернативами в методе нечетких множеств являются те альтернативы, у которых степени недоминируемости максимальны.

Рассмотрим решение задачи с одним н.о.п. на множестве альтернатив. Алгоритм решения этой задачи следующий.

Рисунок 2 – Метод нечетких множеств

Алгоритм решения задачи теории принятия решений методом нечетких множеств в случае одного нечеткого отношения предпочтения

1. Находим н.о.с.п. $\mu^s(x_i, x_j)$ по формуле
$\mu^s(x_i, x_j) = \mu(x_i, x_j) \setminus \mu(x_j, x_i)$.

2. Находим степень недоминируемости альтернатив по формуле
$\mu_{\text{н.д.}}(x_i) = 1 - \max(\mu^s(x_j, x_i))$.

3. Оптимальными альтернативами являются те, у которых степени недоминируемости максимальны.

Несколько н.о.п на множестве альтернатив

Имеется множество альтернатив $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, на котором задано m нечетких отношений предпочтения $R_1, R_2, \ldots, R_m$.

При этом н.о.п. имеют различную важность которая выражается весовым коэффициентом λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Эти коэффициенты удовлетворяют условием:

1) $0 < \lambda_i < 1, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m.$
2) $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m - 1.$

Отношение $\dfrac{\lambda_i}{\lambda_j}$ показывает во сколько раз н.о.п. R_i важнее н.о.п. R_j. Требуется выбрать оптимальную альтернативу с учетом всех н.о.п. и их важности.

Рисунок 3 – Метод нечетких множеств

Алгоритм решения задачи теории принятия решений методом нечетких множеств в случае весовых коэффициентов

1) Составляем н.о.п. Q_1 по формуле $Q_1 = R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n$.
2) Находим н.о.с.п. $Q_1^s = Q_1 \setminus Q_1^*$.
3) Находим степени недоминируемости по н.о.п. Q_1 $\mu_{\text{н.д.}Q_1}(x_i)$.
4) Составляем н.о.п. $Q_2 = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \ldots + \lambda_m R_m$.
5) Находим н.о.с.п. $Q_2^s = Q_2 \setminus Q_2^*$.
6) Находим степень недоминируемости по н.о.п. Q_2 $\mu_{\text{н.д.}Q_2}(x_i)$.
7) Определяем окончательные степени недоминируемости по формуле $\mu_{\text{н.д.}}(x_i) = \min(\mu_{\text{н.д.}Q_1}(x_i), \mu_{\text{н.д.}Q_2}(x_i))$. Оптимальные альтернативы – те, у которых $\mu_{\text{н.д.}}(x_i)$ максимальны.

Пример

R_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,3	0,8	0,2
x_2	0,7	1	0,4	0,9
x_3	0	0,5	1	0,2
x_4	0,7	0,4	0,8	1

R_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,8	1	0,3
x_2	0	1	0,4	0,2
x_3	0,5	0,6	1	0,3
x_4	0,7	0,2	0,9	1

R_3	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0,3	0,7
x_2	0,4	1	0,5	0,9
x_3	0,2	0,1	1	0,8
x_4	0,3	0,7	0,3	1

R_4	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,7	0,2	0,8
x_2	0	1	0,3	1
x_3	0,9	0,4	1	0,6
x_4	0,5	0,3	0,4	1

R_5	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,7	0,4	0,8
x_2	0,6	1	0,2	0,5
x_3	0,7	0,9	1	0,3
x_4	0,6	0,2	0,4	1

$\lambda_1 = 0{,}2$
$\lambda_2 = 0{,}3$
$\lambda_3 = 0{,}1$
$\lambda_4 = 0{,}1$
$\lambda_5 = 0{,}3$

Рисунок 4 – Метод нечетких множеств

Q_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0,2	0,2
x_2	0	1	0,2	0,2
x_3	0	0,1	1	0,2
x_4	0,3	0,2	0,3	1

Q_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,58	0,63	0,52
x_2	0,36	1	0,34	0,58
x_3	0,47	0,6	1	0,36
x_4	0,61	0,3	0,62	1

Q_1^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0,2	0
x_2	0	0	0,1	0
x_3	0	0	0	0
x_4	0,1	0	0,1	0
max	0,1	0	0,2	0
$\mu_{\text{н.д.}Q_1}(x_i)$	0,9	1	0,8	1

Q_2^s	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0,22	0,16	0
x_2	0	0	0	0,28
x_3	0	0,26	0	0
x_4	0,09	0	0,26	0
max	0,09	0,26	0,26	0,28
$\mu_{\text{н.д.}Q_2}(x_i)$	0,91	0,74	0,74	0,72

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mu_{\text{н.д.}Q_1}(x_i)$	0,9	1	0,8	1
$\mu_{\text{н.д.}Q_2}(x_i)$	0,91	0,74	0,74	0,72
$\mu_{\text{н.д.}}(x_i)$	0,9	0,74	0,74	0,72

Ответ: оптимальная альтернатива x_1, $\mu_{\text{н.д.}}(x_i) = 0{,}9$.

Рисунок 5 – Метод нечетких множеств

Метод анализа иерархий

Принципы метода анализа иерархий

Собственные значения и собственные векторы матриц

Число λ называется собственным значением (числом) матрицы А, если существует вектор (столбец) v, для которого выполняется условие $Av = \lambda v$, при этом $v \neq 0$,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$$

то есть, $\exists v_i \neq 0$. Вектор v называется собственным вектором соответствует собственному значению λ.

Для нахождения собственного значения A можно решить уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

В самом деле, $Av = \lambda v = \lambda E v$, где E – единичная матрица, получаем $(A - \lambda E)v = 0$.

Это матричное уравнение задает систему линейных однородных уравнений, которая имеет ненулевое решение, тогда и только тогда, когда $|A - \lambda E| = 0$.

Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ представляет собой алгебраическое уравнение n-го порядка $P_n(\lambda)$, где $P_n(\lambda)$ – многочлен степени n. Старший коэффициент этого многочлена равен $(-1)^n$,то есть, отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + \dots$$

Из алгебры известно, что корни алгебраического уравнения $P_n(\lambda) = 0$ могут быть найдены точно только при $n \leq 3$. При $n \geq 4$ доказано, что не существует формул выражающих корни уравнения $P_n(\lambda) = 0$ через его коэффициенты в общем случае. В этих случаях для их нахождения могут использоваться приближенные методы.

Рисунок 6 – Метод анализа иерархий

По основной теории алгебры матрицы $P_n(\lambda)=0$ имеет n корней, некоторые из которых могут быть комплексными или совпадать. Если все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения $P_n(\lambda)=0$ найдены, то собственные векторы, которые им соответствуют, могут быть найдены из матричных уравнений

$$(A-\lambda_i E)v_i = 0,\ \ i = 1,2,\ldots,n.$$

Для каждого собственного значения λ_i, найдется по крайней мере один собственный вектор $v_i \neq 0$.

В случае кратных корней число векторов может быть различно, что видно по жордановой нормальной форме матриц. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

то $\lambda = 2$ – трехкратный корень. Собственный вектор будет один и кроме него будут два корневых или присоединенных вектора.

Если же

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

то $\lambda = 2$ – также трехкратный корень. Но он имеет три собственных вектора.

Заметим, что если v – собственный вектор, то для $\forall \alpha \neq 0,\ \ \alpha v$ – также собственный вектор для того же λ. Также, если v_1 и v_2 – два собственных вектора, соответствующие собственному значению λ, то и $v_1 + v_2$ – собственный вектор, соответствующий λ. Таким образом, множество собственных векторов, соответствуют собственному значению λ образует линейное пространство.

Рисунок 7 – Метод анализа иерархий

Пример 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 =$$

$$= (4-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4.$$

Для $\lambda_1 = 2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$v_1^1 + v_2^1 = 0,$$

$$v_1^1 = 1, \quad v_2^1 = -1.$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – одно из решений.

Для $\lambda_2 = 4$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$-v_1^2 + v_2^2 = 0,$$

$$v_1^2 = 1, \quad v_2^2 = 1.$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – одно из решений.

Рисунок 8 – Метод анализа иерархий

Метод анализа иерархий (МАИ)

Метод анализа иерархий (МАИ) – один из методов теории принятия решений или методов экспертных оценок, разработанный американским математиком Т.Саати. В основе этого метода лежит понятие собственных значений и собственных векторов.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – множество альтернатив. В МАИ каждой альтернативе x_i ставится в соответствие число w_i, называемое приоритетом альтернативы x_i.

Приоритеты удовлетворяют свойствам $0 < w_i < 1, \forall i$ и $\sum w_i = 1$. Чем больше w_i, тем выше приоритетные альтернативы x_i. Оптимальной альтернативой является та, у которой w_i максимален.

В отличие от метода нечетных множеств МАИ ранжирует (упорядочивает) все альтернативы. Для определения альтернатив используется матрица парных (попарных) сравнений.

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n1} & w_{n2} & \ldots & w_{nn} \end{pmatrix}$$

Число w_{ij} выражает во сколько раз альтернатива x_i лучше альтернативы x_j. Матрица W является обратносимметричной, то есть,

$$w_{ij} = \frac{1}{w_{ji}} \ \forall i, j.$$

В частности, $w_{ii} = 1, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$

Если приоритеты альтернатив w_i заданы, то элементы матрицы W определяется по формуле

$$w_{ij} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Рисунок 9 – Метод анализа иерархий

Заметим, что вектор приоритетов

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \ldots \\ w_n \end{pmatrix}$$

является собственным вектором матрицы парных сравнений W. В самом деле,

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \ldots & \frac{w_1}{w_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \ldots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + w_1 + \ldots + w_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n + w_n + \ldots + w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ \ldots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, w – собственный вектор матрицы W, соответствующий собственному значению n.

Рисунок 10 – Метод анализа иерархий