21. Основые понятия теории игр. Матричные игры. Нэш, Парето

Игра — это упрощенная формализованная модель реальной конфликтной ситуации. Формализация означает выработку определенных правил действия сторон в процессе игры: варианты действия сторон, исход игры при данном варианте, степень информированности каждой стороны о поведении всех других сторон.

Заинтересованные играющие стороны (в частности, лица) называются игроками. Причем одну играющую сторону может представлять как один игрок, так и целый коллектив.

Стратегией игрока называется любое возможное для игрока действие в рамках заданных правил игры. В условиях конфликта каждый игрок выбирает свою стратегию, в результате чего
складывается набор стратегий, называемых ситуацией.
Заинтересованность игроков в ситуации проявляется в том, что каждому игроку в каждой ситуации приписывается число, выражающее степень удовлетворения его интересов в этой ситуации и называемое его выигрышем в ней. Хотя не каждый выигрыш можно оценить количественно, но в теории игр качественные выигрыши не рассматриваются.

Игры можно классифицировать по следующим критериям:
1. Количество игроков. Если в игре участвуют две стороны, то ее называют игрой двух лиц. Если число сторон больше двух, ее называют игрой n лиц (или множественной). Наиболее глубоко проработаны игры двух лиц.
2. Количество стратегий игры. По этому критерию игры делятся на конечные и бесконечные. В конечной игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий. Игра является бесконечной, если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий.
3. Взаимоотношения сторон. По этому критерию игры подразделяются на бескоалиционные, коалиционные, кооперативные. Бескоалиционной называется игра, в которой игроки не имеют
права вступать в соглашения, образовывать коалиции. В коалиционной игре игроки могут вступать в соглашения, образовывать коалиции. Если коалиции определены заранее, то такая игра
называется кооперативной.
4. Характер выигрышей. По этому критерию игры подразделяются на игры с нулевой суммой и игры с ненулевой суммой. Игра с нулевой суммой означает, что сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю. Игры двух игроков с нулевой суммой относятся к классу антагонистических игр. При этом выигрыш одного игрока равен, естественно, проигрышу другого игрока. Игра, в которой нужно вносить взнос за право участия в ней, является игрой с ненулевой суммой. Экономические задачи теории игр относятся к обоим типам игр.
5. Вид функций выигрыша. По этому критерию игры подразделяются на матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные и так далее.

Конфликтная ситуация связана с определенного рода разногласиями сторон, но не обязательно предполагает наличие антагонистических противоречий. Конфликтная ситуация будет антагонистической, если увеличение выигрыша одной из сторон на некоторую величину приводит к уменьшению выигрыша другой стороны на такую же величину и наоборот. **Антагонистическая** игра – это математическая модель принятия решения заинтересованными сторонами в условиях антагонистической конфликтной ситуации.

В данной игре каждый участник имеет две стратегии: «орёл» и «решка». Множество ситуаций в игре состоит из четырёх элементов. В строках таблицы указаны стратегии первого игрока x, в столбцах — стратегии второго игрока y. Для каждой из ситуаций указаны выигрыши первого и второго игроков.

X \ Y	Орёл	Решка
Орёл	-1, 1	1, -1
Решка	1, -1	-1, 1

В аналитическом виде функция выигрыша первого игрока имеет следующую форму:

$$F_1(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ -1, & x = y \end{cases},$$

Игры с двумя игроками, в которых выигрыш одного из них равен проигрышу другого, известны как игры двух лиц с нулевой суммой или антагонистические. Матричная игра — конечная игра двух игроков с нулевой суммой. Предположим, что первый игрок имеет m стратегий Ai , i = 1, m , а второй игрок n стратегий B j , j = 1, n . Тогда игра может быть названа игрой m ´ n (эм на эн) или m ´ n игрой. Обозначим через aij значения выигрышей игрока A (соответственно — значения проигрышей игрока B), если первый игрок выбрал стратегию Ai , а второй игрок стратегию B j . В этом случае говорят, что имеет место ситуация { A , B } . Значения выигрышей aij (эффективностей) можем представить в виде платежной таблицы, называемой матрицей игры или платежной матрицей:

Биматричная игра — конечная игра двух игроков с ненулевой суммой. Выигрыш каждого игрока задается своей платежнойматрицей (таблица выше).

Если функция выигрышей

aij = f (i, j) (1.2)

является непрерывной, то игра называется непрерывной, если (1.2)

выпуклая, то игра называется выпуклой; если (1.2) можно пред-

ставить в виде суммы произведений функций одного аргумента —

сепарабельной.

6. Количество ходов. По этому критерию игры делятся

на одношаговые или многошаговые. Одношаговые заканчиваются после одного хода каждого игрока, и происходит распределение выигрышей. Многошаговые игры бывают позиционными,

стохастическими, дифференциальными и так далее.

7. Информированность сторон. По этому критерию разли-

чают игры с полной и неполной информацией. Игра определяется

как игра с полной информацией, если каждый игрок на каждом ходу игры знает все стратегии, примененные ранее другими игроками на предыдущих ходах. Если же игроку известны не все

стратегии предыдущих ходов других игроков, то игра называется игрой с неполной информацией.

8. Степень неполноты информации. По этому критерию игры делятся на статистические и стратегические. Стратегические игры проходят в условиях полной неопределенности. Статистические игры проводятся в условиях частичной неопределенности.

В статистической игре имеется возможность получения информации на основе статистического эксперимента, по результатам которого оценивается распределение вероятностей стратегий игроков. С теорией статистических игр тесно связана теория принятия экономических решений.

Изучение теории игр можно проводить с различных точек зрения. Решаются следующие задачи:

1. Выработка принципов оптимальности, то есть того, какое поведение игроков следует считать разумным или целесообразным.

2. Выяснение реализуемости принципов оптимальности, то есть установление существования оптимальных ситуаций (и стратегий).

3. Отыскание оптимальных ситуаций (реализация игры).

Отметим также, что оценка игроком ситуации путем указания его количественного выигрыша, вообще говоря, возможна не всегда, а иногда просто не имеет смысла. В этом случае численное значение выигрыша в каждой ситуации заменяют на сравнительную предпочтительность ситуаций для отдельных игроков. Тогда речь ведут о теории игр с предпочтениями, которая включает в себя теорию игр с выигрышами как частный случай.

Таким образом, основной целью теории игр является выработка рекомендаций для удовлетворительного поведения игроков в конфликте, то есть выявления для каждого из них «оптимальной стратегии». Понятие оптимальной стратегии — одно из важнейших понятий теории игр, может пониматься в различных смыслах в зависимости от показателя оптимальности (эффективности). Стратегия, оптимальная по одному показателю, может не быть оптимальной по другому. Поэтому чаще всего оптимальная стратегия, определенная в результате применения теории игр к реальным конфликтным ситуациям, является оптимальной теоретически и в большинстве случаев реально удовлетворительной.

Равновесие Нэша. Рациональный подход к нахождению решения игры предполагает, что каждый игрок i формирует "догадку" $s_{-i}^{(i)}$ о действиях остальных и выбирает в качестве s_i свой наилучший ответ на эту догадку. Как уже отмечалось, трудность здесь в том, как формировать эту догадку. Все же одно требование согласованности выглядит почти несомненным или, во всяком случае, желательным: догадки $s_{-i}^{(i)}$ должны совпадать с реальным выбором s_{-i}. В этом случае получается логически стройная картина: я выбираю s_i, потому что это лучший ответ на вашу s_{-i}, а ваш ответ наилучший на мою стратегию s_i. Можно сказать также, что равновесие Нэша устойчиво к откровению. Выбирая свою стратегию s_i, вы не знаете, что выбрали остальные. Изменится ли ваше решение, если вы узнаете действия остальных?

Определение. Ситуация s_N^* в игре называется *равновесием Нэша*, если для любого игрока i и любой его стратегии $s_i \in S_i$ выполняется неравенство

$$u_i(s_N^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Иначе говоря, s_i^* - наилучший ответ на s_{-i}^* для каждого игрока i. Это такая ситуация, что никому не выгодно отклоняться от нее, если остальные ее придерживаются.

Бескоалиционной неантагонистической игрой двух игроков (***1*** и ***2***)называется игра, в которой игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии, и выигрыш каждого из игроков в каждой ситуации игры определяется его собственнойфункцией выигрыша или матрицей игры.

Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется **биматричной**(матрицы игры двух игроков **A** и **B**). Биматричную игру можно также задать матрицей (**A**, **B**), элементы которой представляют собой пары чисел (a_{ij}, b_{ij}), i=1,…,m, j=1,…,n. Пример 9.1 Биматричная игра («семейный спор»)

	y_1	y_2
x_1	(4, 1)	(0, 0)
x_2	(0, 0)	(1, 4)

Игрок ***1*** («муж») и игрок ***2*** («жена») могут выбрать одно из двух вечерних развлечений: футбол (4, 1) или театр (1, 4). Игрок ***1*** («муж») предпочитает футбол, а игрок ***2*** («жена») — театр. Если их намерения не совпадают, то они остаются дома (0, 0) или (0, 0). При этом каждому из них предпочтительнее провести время вместе вне дома.

В антагонистической игре каждому из игроков невыгодно информировать своего противника о стратегии, которую он собирается применить. В неантагонистической игре каждому из игроков выгодно первому объявить о своей стратегии и договариваться о совместных действиях, иначе они оба могут проиграть.

В антагонистической игре ситуация равновесия (седловая точка, если она существует) совпадает с решением игры в чистых стратегиях (с точкой максимина и минимакса). В неантагонистических играх существует несколько различных подходов к определению ситуаций равновесия и к определению оптимальности поведения.

Для биматричной игры ситуация (x_k, y_l) называется **ситуацией равновесия** *по Нэшу*, если $a_{kl} \geq a_{ij}\, i = 1 \ldots m$

$b_{kl} \geq a_{kj}\, j = 1 \ldots n$ (9.1.1)

В примере 9.1 равновесными являются ситуации (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Важная особенность ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре заключается в том, что отклонение от нее двух игроков может привести к увеличению выигрыша одного из них или обоих.

Коалиция это некоторое подмножество множества игроков.

Для биматричной игры ситуация (x_k, y_l) называется **сильно равновесной**, если для любых коалиций

$$a_{kl} \geq a_{il}, \quad b_{kl} \geq b_{kj}, \quad a_{kl} + b_{kl} \geq a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n.$$

(9.1.2)

Это условие гарантирует нецелесообразность соглашения между игроками о вступлении в коалицию, так *как в любой коалиции одного из игроков это соглашение не устраивает.*

Любая сильно равновесная ситуация является равновесной.

В примере 9.1 равновесные ситуации (x_1, y_1) и (x_2, y_2) являются сильно равновесными.

Пример 9.2

	y_1	y_2
x_1	(5, 5)	(0, 10)
x_2	(10, 0)	(1, 1)

Здесь одна ситуация равновесия *по Нэшу* (x_2, y_2) (не сильно равновесная) дает игрокам выигрыши (1, 1). Однако если оба игрока сыграют (x_1, y_1), то они получат выигрыши (5, 5). Таким образом, ситуация (x_1, y_1) не является равновесной, но она лучшая для обоих игроков. При этом сильно равновесной ситуации в этой игре нет.

Ситуация (x_k, y_l) в биматричной игре называется **ситуацией оптимальной** *по Парето*, если не существует ситуации (x_r, y_s), для которой имеют место неравенства

$$a_{rs} \ge a_{kl}, \qquad b_{rs} \ge b_{kl}$$

(9.1.3)

и

$$a_{rs} > a_{kl}$$

(9.1.4)

или

$$b_{rs} > b_{kl}.$$

(9.1.5)*Оптимальность ситуации (x_k, y_l) по Парето означает, что не существует ситуации (x_r, y_s), которая была бы предпочтительнее ситуации (x_k, y_l) для всех игроков. В ситуации равновесия по Нэшу ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша, а в ситуации оптимальной по Парето все игроки, действуя совместно, не могут (даже не строго) увеличить выигрыш каждого.*Сильно равновесная ситуация являетсяоптимальной *по Парето*.В примере 9.2 ситуация (x_2, y_2) является равновесной, но не является оптимальной *по Парето*, а ситуация (x_1, y_1), наоборот, оптимальна *по Парето*, но не является равновесной.

В примере 9.1 обе равновесные ситуации (x_1, y_1) и (x_2, y_2) являются сильно равновесными и оптимальными *по Парето*.