12. Теория и системы массового обслуживания. Одноканальные СМО с отказами. Многоканальные СМО с отказами. Одноканальные СМО с ожиданием. Одноканальные СМО с неограниченной очередью. Многоканальные СМО с ожиданием. Основные характеристики СМО.

Предметом изучения теории массового обслуживания являются СМО.
Цель теории массового обслуживания – выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования СМО.
Для достижения этой цели ставятся задачи теории массового обслуживания, состоящие в установлении зависимостей эффективности функционирования СМО от ее организации (параметров): характера потока заявок, числа каналов и их производительности и правил работы СМО.

Системы массового обслуживания (СМО)

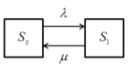
Система массового обслуживания (СМО) – система, которая производит обслуживание поступающих в неё требований. Обслуживание требований в СМО производится обслуживающими приборами. Классическая СМО содержит от одного до бесконечного числа приборов. В зависимости от наличия возможности ожидания поступающими требованиями начала обслуживания СМО подразделяются на:

- системы с отказами, в которых требования, не нашедшие в момент поступления ни одного свободного прибора, теряются;
- системы с неограниченной очередью, в которых имеется накопитель бесконечной ёмкости для буферизации поступивших требований, при этом ожидающие требования образуют очередь;
- системы с ограниченной очередью, в которых длина очереди не может превышать ёмкости накопителя; при этом требование, поступающее в переполненную СМО (отсутствуют свободные места для ожидания), теряется.

Одноканальные СМО с отказами

СМО называется системой с отказами, если заявка поступает в СМО в момент времени, когда заняты все каналы, покидает систему не обслуженной. Число λ называется интенсивностью потока заявок и показывает среднее число поступающих заявок в единицу времени. При этом число поступающих заявок в единицу времени является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона. Число μ называется интенсивностью работы канала и выражает среднее число заявок, которое может обслуживать канал за единицу времени.

Такая СМО может иметь два состояния:
S_0 – канал свободен;
S_1 – канал занят.
Схема состояний имеет вид:



Основные характеристики одноканальных СМО с отказами

1) Вероятность отказа (заявка не будет обслужена): $P_{\text{отк}} = p_1 = \dfrac{\rho}{1+\rho}$.

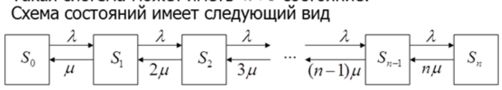
2) Относительная пропускная способность (доля обслуженных заявок): $q = 1 - P_{\text{отк}}$.

3) Абсолютная пропускная способность – это среднее количество обслуженных заявок в единицу времени: $A = \lambda q$.

Многоканальные СМО с отказами

Рассмотрим систему массового обслуживания с отказами, имеющую n каналов обслуживания.

Такая система может иметь $n+1$ состояние:
Схема состояний имеет следующий вид



Состояние S_0 означает, что все каналы свободны, состояние S_n означает, что обслуживанием заявок заняты n каналов. Переход из одного состояния в другое соседнее правое происходит скачкообразно под воздействием входящего потока заявок интенсивностью λ независимо от числа работающих каналов (верхние стрелки). Для перехода системы из одного состояния в соседнее левое неважно, какой именно канал освободится. Величина $n\mu$ характеризует интенсивность обслуживания заявок при работе в СМО n каналов (нижние стрелки).

Основные характеристики

1. Вероятность отказа: $P_{\text{отк}} = p_n$.

2. Относительная пропускная способность: $q = 1 - P_{\text{отк}}$.

3. Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda q$.

4. Среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = 1p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = \rho p_0 + 2\frac{\rho^2}{2}p_0 + \ldots + n\frac{\rho^n}{n!}p_0 =$$

$$= \rho p_0\left(1 + \rho + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \rho p_0\left(1 + \rho + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{n!} - \frac{\rho^n}{n!}\right) =$$

$$= \rho p_0\left(\frac{1}{p_0} - \frac{\rho^n}{n!}\right) = \rho(1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0) = \rho(1 - p_n) = \rho(1 - P_{\text{отк}}) = \rho q = \frac{\lambda q}{\mu} = \frac{A}{\mu}.$$

Одноканальные СМО с ожиданием

Пусть имеется СМО с одним каналом и ограниченной очередью на m мест. Такая система имеет $m+2$ состояния:

S_0 – канал свободен,

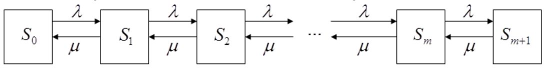
S_1 – канал занят, очереди нет,

S_2 – канал занят, в очереди одна заявка,

…,

S_{m+1} – канал занят, в очереди m заявок.

Схема перехода состояний имеет следующий вид.



Основные характеристики

1. Вероятность отказа: $P_{\text{отк}} = p_{m+1}$.
2. Относительная пропускная способность: $q = 1 - P_{\text{отк}}$.
3. Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda q$.
4. Среднее число занятых мест в очереди

$$\bar{\kappa} = 1\cdot p_2 + 2\cdot p_3 + \ldots + m\cdot p_{m+1} = \rho^2\cdot p_0 + 2\cdot\rho^3\cdot p_0 + \ldots + m\cdot\rho^{m+1}\cdot p_0 =$$
$$= \rho^2\cdot p_0\cdot\left(1 + 2\cdot\rho + \ldots + m\cdot\rho^{m-1}\right).$$

Одноканальные СМО с неограниченной очередью

Пусть имеется СМО с одним каналом и неограниченной очередью. Такая система имеет следующие состояния:

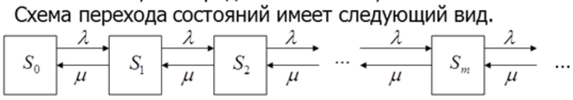
S_0 – канал свободен,

S_1 – канал занят, очереди нет,

S_2 – канал занят, в очереди одна заявка,

S_m – канал занят, в очереди $m-1$ заявка,

Схема перехода состояний имеет следующий вид.



Основные характеристики

1. Вероятность отказа $P_{\text{отк}} = 0$.
2. Относительная пропускная способность $q = 1$.
3. Абсолютная пропускная способность $A = \lambda$.
4. Среднее число занятых мест в очереди

$$\bar{\kappa} = 1\cdot p_2 + 2\cdot p_3 + \ldots + m\cdot p_{m+1} + \ldots = \rho^2\cdot p_0 + 2\cdot\rho^3\cdot p_0 + \ldots + m\cdot\rho^{m+1}\cdot p_0 + \ldots =$$
$$= \rho^2\cdot p_0\cdot\left(1 + 2\cdot\rho + \ldots + m\cdot\rho^{m-1} + \ldots\right) = \rho^2\cdot p_0\cdot r.$$

Многоканальные СМО с ожиданием

Пусть имеется СМО с n каналами обслуживания и ограниченной очередью на m мест. Такая система имеет следующие состояния:

S_0 – все каналы свободны,

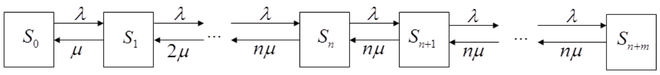
S_1 – занят 1 канал,

S_n – заняты все n каналов, очереди нет,

S_{n+1} – занято 1 место в очереди,

S_{n+m} – заняты все m мест в очереди.

Схема перехода состояний имеет следующий вид.



Основные характеристики

1. Вероятность отказа: $P_{\text{отк}} = p_{n+m}$.
2. Относительная пропускная способность: $q = 1 - P_{\text{отк}}$.
3. Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda q$.
4. Среднее число занятых каналов: $\bar{k} = \dfrac{A}{\mu}$.
5. Среднее число занятых мест в очереди

$$\bar{\kappa} = 1\cdot p_{n+1} + 2\cdot p_{n+2} + \ldots + m\cdot p_{n+m} = \frac{\rho^{n+1}}{n!\cdot n}p_0 + 2\frac{\rho^{n+2}}{n!\cdot n^2}p_0 + \ldots + m\frac{\rho^{n+m}}{n!\cdot n^m}p_0 =$$
$$= \frac{\rho^{n+1}}{n!\cdot n}p_0\left(1 + 2\frac{\rho}{n} + \ldots + m\frac{\rho^{m-1}}{n^{m-1}}\right).$$

Примеры систем массового обслуживания:

телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, станочные и другие технологические системы, системы управления гибких производственных систем и т.д.

СМО	Заявки	Каналы
Автобусный маршрут и перевозка пассажиров	Пассажиры	Автобусы
Производственный конвейер по обработке деталей	Детали, узлы	Станки, склады