17. Одномерные методы касательных и секущих для решения нелинейных уравнений. Метод Ньютона для решения СНУ. Соотношение секущих для СНУ. Метод Бройдена.

Классический метод Ньютона или *касательных* заключается в том, что если x_n — некоторое приближение к корню x_* уравнения $f(x) = 0, f \in C^1$, то следующее приближение определяется как корень касательной к функции $f(x)$, проведенной в точке x_n.

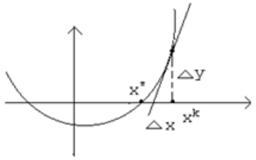
Уравнение касательной к функции $f(x)$ в точке x_n имеет вид:

$$f'(x_j) = \frac{y - f(x_n)}{x - x_n}$$

В уравнении касательной положим $y = 0$ и $x = x_{n+1}$.

Тогда алгоритм последовательных вычислений в методе Ньютона состоит в следующем:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Сходимость метода касательных квадратичная, порядок сходимости равен 2.

Таким образом, сходимость метода касательных Ньютона очень быстрая.

Метод секущих

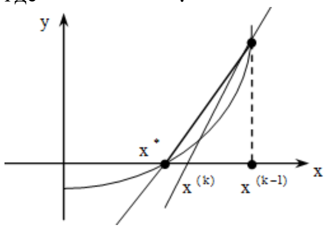
Чтобы избежать вычисления производной, метод Ньютона можно упростить, заменив производную на приближенное значение, вычисленное по двум предыдущим точкам:

$$f'(x_j) = (f(x_j) - f(x_{j-1}) / (x_j - x_{j-1})$$

Итерационный процесс имеет вид:

$$x_{j-1} = x_j - \frac{f_j(x_j - x_{j-1})}{f_j - f_{j-1}}$$

где $f_j = f(x_j)$.



Это двухшаговый итерационный процесс, поскольку использует для нахождения последующего приближения два предыдущих.

Порядок сходимости метода секущих ниже, чем у метода касательных.

Метод Ньютона для решения нелинейных систем уравнений

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)}) - F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

где $W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ — матрица Якоби.

Так как процесс вычисления обратной матрицы является трудоемким, преобразуем следующим образом:

$$\Delta x^{(k)} = -W^{-1}(x^{(k)}) \cdot F(x^{(k)}). \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

где $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ — поправка к текущему приближению

Умножим последнее выражение слева на матрицу Якоби
W(x(k)):

$$W(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -W(x^{(k)})W^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}) = -F(x^{(k}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ В результате получена система линейных алгебраических уравнений относительно поправки
$\Delta x^{(k)}$.После ее определения вычисляется следующее приближение

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$$

Метод секущих для решения нелинейных систем уравнений

Идея метода секущих (метода Бройдена) заключается в аппроксимации матрицы Якоби с использованием уже вычисленных значений функций, образующих систему.

<u>Алгоритм метода секущих для нелинейных систем:</u>

1. Задать начальное приближение $x^{(0)}$ и малое положительное число e.

2. Положить k=0 и $A_0 = W(x^{(0)})$, где W(x) — матрица Якоби.

3. Решить систему линейных алгебраических уравнений $A_k s_k = -F(x^{(k)})$ относительно s_k — поправки к текущему приближению.

4. Вычислить $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s_k$

5. Если $\|s_k\| \leqslant \varepsilon$, процесс завершить и положить $x_* = x^{(k+1)}$. Если $\|s_k\| > \varepsilon$, вычислить $y_k = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})$, $A_{k+1} = A_k + \frac{(y_k - A_k s_k) \cdot s_k^T}{s_k^T s_k}$ положить k=k+1 и перейти к п.3.