23. Нечеткие множества и нечеткие отношения. Метод нечетких множеств. Нечеткое отношение предпочтения на множестве экспертов. Оценка согласованности в методе нечетких множеств.

Нечеткое множество $A \subseteq X$ представляет собой набор пар $\left\{\left(x, \mu^A(x)\right)\right\}$, где $x \in X$ и $\mu^A : X \to [0,1]$ - функция принадлежности, которая представляет собой некоторую субъективную меру соответствия элемента x нечеткому множеству A.

$\mu^A(x)$ может принимать значения от нуля, который обозначает абсолютную не принадлежность, до единицы, которая, наоборот, говорит об абсолютной принадлежности элемента x нечеткому множеству A.

Иногда удобно рассматривать значение $\mu^A(x)$ как степень совместимости элемента x с размытым понятием, представленным нечетким множеством A.

Над нечёткими множествами определены некоторые операции
Следующие операции определяются с помощью обобщения операций над обычными множествами.

1) Объединение
$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
2) Пересечение
$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
3) Дополнение
$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$
4) Разность
$\mu_{A \setminus B}(x) = \max(\mu_A(x) - \mu_B(x), 0)$

Нечетким отношением R называется нечеткое множество, определенное на декартовом произведении $X \times Y$, которому соответствует функция принадлежности $\mu^R : X \times Y \to [0,1]$.

$\mu^R(x, y)$ отражает силу зависимости между $x \in X$ и $y \in Y$.

Отметим некоторые свойства нечётких отношений. Неч
отношение R называется рефлексивным, если для любого
$\mu_R(x,x) = 1$.

Примеры. "≤" , "=" – рефлексивные отношения,
"<" , ">" – нет.

Нечёткое отношение R называется антирефлексивным, если
любого $x \in X$ $\mu_R(x,x) = 0$.

Примеры. "<" , ">" – антирефлексивные отношения,
"≤" , "=" – нет.

Нечёткое отношение может не быть ни рефлексивным,
антирефлексивным.

Нечёткое отношение R называется симметричным, если для
любых $x, y \in X$, $\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$.

Нечёткое отношение R называется антисимметричным, если
любых $x, y \in X$ из условия $\mu_R(x,y) > 0$ следует $\mu_R(y,x) = 0$.

Нечёткое отношение может не быть ни симметричным,
антисимметричным.

Нечёткое отношение R называется транзитивным, если
любых $x, y, z \in X$, $\mu_R(x,y) \geq \min(\mu_R(x,z), \mu_R(z,y))$.

Метод нечётких множеств

Задача теории принятия решений может быть пост следующим образом. Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – мно альтернативных решений некоторой задачи. Известны кр выбора альтернативы и требуется найти оптимальную альтерн

Рассмотрим постановку задач для метода нечетких мн Для этого необходимо, чтобы на множестве альтернатив было нечеткое отношение предпочтения (н.о.п.) $\mu(x_i, x_j)$.

Здесь числа $\mu(x_i, x_j)$ выражают степень того, нас альтернатива x_i не хуже альтернативы x_j.

Нечеткое отношение предпочтения является рефлек (любая альтернатива не хуже самой себя). $(\forall i \;\; \mu(x_i, x_i) = 1)$.

Н.о.п. $\mu(x_i, x_j)$ обычно задаются таблицей или ма следующего вида.

R	x_1	x_2	...	x_n
x_1	1	$\mu(x_1, x_2)$	…	$\mu(x_1, x_n)$
x_2	$\mu(x_2, x_1)$	1	…	$\mu(x_2, x_n)$
...	…	…	1	…
x_n	$\mu(x_n, x_1)$	$\mu(x_n, x_2)$	…	1

Важную роль в методе нечетких множеств играет недоминируемости альтернативности $\mu_{\text{н.д.}}(x_i)$. Число $\mu_{\text{н.д.}}(x_i)$ степень того, насколько альтернатива x_i не хуже любо альтернативы. Множество всех степеней недоминируемости нечетким множеством на множестве альтернатив.

Степени недоминируемости альтернатив может быть по формуле : $\mu_{\text{н.д.}}(x_i) = 1 - \max(\mu^s(x_j, x_i))$

Оптимальными альтернативами в методе нечетких являются те альтернативы, у которых степени недомини максимальны.

Н.о.п. на множестве экспертов

Рассмотрим следующую задачу. Имеется множество аль $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, которые оцениваются несколькими э $e_1, e_2, ..., e_m$. Каждый эксперт составляет свое н.о.п. R_i. Кро известно н.о.п. на множестве экспертов, которое задается

матрицей $E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & & e_{2m} \\ & & & \\ e_{m1} & e_{m2} & & e_{mm} \end{pmatrix}$.

Элемент матрицы e_{ij}, выражает степень того, насколь эксперта e_i не менее важно, чем мнение эксперта e_j. является н.о.п., поэтому $0 \le e_{ij} \le 1$, для любых i, j и любого i, то есть мнение эксперта e_i не менее важн само.

Алгоритм решения задачи теории принятия реше
методом нечетких множеств в случае
нечеткого отношения предпочтения на множестве э

1) Для каждого н.о.п. R_i, $i = 1, 2, ..., m$ находим степень недоминируемости $\mu_{\text{н.д.}R_i}(x_j)$, $j = 1, 2, ..., n$.
2) Составляем матрицу $B_{m \times n}$, записывая в неё $\mu_{\text{н.д.}R_i}(x_j)$ п строкам.
3) Находим максминное произведение $C = B^* \circ E \circ B$, так к $E_{m \times m}$, $B_{m \times n}$ и $B^*_{n \times m}$, размер матрицы $C_{n \times n}$.
4) Для матрицы C, как для н.о.п., находим степени недоминируемости $\mu_{\text{н.д.}C}(x_j)$. Заметим, что C не является как c_{jj} может быть меньше 1.
5) Окончательные степени недоминируемости определяем $\mu_{\text{н.д.}}(x_j) = \min(\mu_{\text{н.д.}C}(x_j), c_{jj})$. Оптимальные альтернативы – те которых $\mu_{\text{н.д.}}(x_j)$ максимальна.

Определим максминное произведение матриц. Пусть матрицы $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$, максминным произведение называется матрица $C_{m\times n} = A \circ B$, элементы которой на формуле: $c_{ij} = \max(\min(a_{i1}, b_{1j}), \min(a_{i2}, b_{2j}), \ldots.., \min(a_{ik}, b_{kj}))$.

Оценка согласованности в методе нечетких мно

В методе нечетких множеств оценки согласованност применяется транзитивность. Транзитивность для отношения R определяется так: если x и y состоят в отноше и z состоят в отношении R, то x и z состоят в отношени любых x, y, z.

Другими словами, для любых x, y, z из того, что $\chi_R(x,$ $\chi_R(y,z)=1$, следует $\chi_R(x,z)=1$.

Для нечетких отношений транзитивность опр следующим образом: $\forall x,y,z$ $\mu_R(x,z) \ge \min(\mu_R(x,y), \mu_R(y,$ аналогично тому, что $\forall x,z$ выполнено $\mu_R(x,z) \ge \max_y(\min(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)))$.

Таким образом, если н.о.п. транзитивно, то $R \ge R \circ R$ или