13. Теория и системы массового обслуживания. Задача о распределении ресурсов. Задача о замене оборудования. Динамическая задача о распределении ресурсов. Задача о надежности с мультипликативными функциями. Задача складирования. Задача управления запасами с заданным расходом. Стохастическая задача о распределении ресурсов

Предметом изучения теории массового обслуживания являются СМО.
Цель теории массового обслуживания – выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования СМО.
Для достижения этой цели ставятся задачи теории массового обслуживания, состоящие в установлении зависимостей эффективности функционирования СМО от ее организации (параметров): характера потока заявок, числа каналов и их производительности и правил работы СМО.

Системы массового обслуживания (СМО)

Система массового обслуживания (СМО) – система, которая производит обслуживание поступающих в неё требований. Обслуживание требований в СМО производится обслуживающими приборами. Классическая СМО содержит от одного до бесконечного числа приборов. В зависимости от наличия возможности ожидания поступающими требованиями начала обслуживания СМО подразделяются на:

- системы с отказами, в которых требования, не нашедшие в момент поступления ни одного свободного прибора, теряются;
- системы с неограниченной очередью, в которых имеется накопитель бесконечной ёмкости для буферизации поступивших требований, при этом ожидающие требования образуют очередь;
- системы с ограниченной очередью, в которых длина очереди не может превышать ёмкости накопителя; при этом требование, поступающее в переполненную СМО (отсутствуют свободные места для ожидания), теряется.

Задача о распределении ресурсов

Имеются производства $X_1, X_2, \dots, X_n$, которые используют один вид ресурсов. Известны функции прибыли в каждом производстве. Они имеют вид $f_i(x_i)$, где x_i – количество ресурсов, вложенных в производство X_i. Известно также общее количество ресурсов k_1. Требуется определить способ распределения ресурсов между производствами, при котором общая прибыль будет максимальной.

Будем решать задачу обратным планированием. Введем обозначения:

k_i – количество ресурсов, вложенных в производства $X_i, X_{i+1}, \dots, X_n$;

$P_i(k_i)$ – максимальная прибыль в производствах $X_i, X_{i+1}, \dots, X_n$, если им выделено k_i единиц ресурсов.

Запишем рекуррентные соотношения (функциональные уравнения). Для последних двух производств имеем

$$P_{n-1}(k_{n-1}) = \max_{0 \le x_{n-1} \le k_{n-1}} (f_{n-1}(x_{n-1}) + f_n(k_{n-1} - x_{n-1})).$$

Для остальных производств: $P_i(k_i) = \max\limits_{0 \le x_i \le k_i} (f_i(x_i) + P_{i+1}(k_i - x_i))$.

Последовательно находим $P_{n-1}(k_{n-1})$, $P_{n-2}(k_{n-2})$, ..., $P_1(k_1)$. Зная k_1, последовательно находим $x_1, k_2, x_2, k_3, \dots, x_n$.

Для сокращения вычислений возможные значения k_i предварительно оцениваются неравенствами вида:

$$\max(a_i + a_{i+1} + \dots + a_n, k_1 - b_1 - \dots - b_{i-1}) \le k_i \le \min(b_i + b_{i+1} + \dots + b_n, k_1 - a_1 - \dots - a_{i-1}),$$

где $a_i \le x_i \le b_i$.

Если ограничения на x_i явно не заданы, то надо рассматривать весь возможный диапазон значений $0 \le x_i \le k_1$.

Задача о замене оборудования

Задача о замене оборудования рассматривается в различных формулировках. При этом ищется либо максимальная прибыль, либо минимальные затраты. В первом случае задача может быть сформулирована в следующем виде.

Имеется некоторое оборудование, которое эксплуатируется в течение некоторого периода (n месяцев). В начале любого месяца оборудование может быть заменено на новое. Прибыль от использования оборудования возраста t в течении k-го месяца определяется функцией $f_k(t)$.

Кроме того, при замене старое оборудование продается по стоимости $\varphi_k(t)$, стоимость нового оборудования в начале k-го месяца составляет p_k. Требуется найти план замены оборудования на n месяцев, дающий максимальную прибыль.

Обозначим $P_k(t)$ – максимальную прибыль от эксплуатации оборудования с k-го месяца до конца периода, если в начале k-го месяца возраст оборудования равен t.

Требуется найти план эксплуатации оборудования, при котором прибыль за весь период максимальна.

Обозначим u – управление в этой задаче, которое может принимать два значения: u_0 – не делается замена оборудования, u_1 – делается замена оборудования.

Запишем рекуррентные соотношения для целевой функции.

Для последнего месяца:

$$P_n(t) = \max\begin{cases} f_n(t),\, u = u_0, \\ -p_n + \varphi_n(t) + f_n(0),\, u = u_1. \end{cases}$$

Для остальных месяцев $(1 \le k \le n-1)$:

$$P_k(t) = \max\begin{cases} f_k(t) + P_{k+1}(t+1),\, u = u_0, \\ -p_k + \varphi_k(t) + f_k(0) + P_{k+1}(1),\, u = u_1. \end{cases}$$

Последовательно находим $P_n(t),\ P_{n-1}(t),\ \ldots,\ P_1(t)$. Заметим, что $P_1(0)$ задает максимальный доход за весь период. Здесь предполагается, что в начале периода оборудование является новым. Затем проводим прямую безусловную оптимизацию, определяя месяцы, когда проводятся замены оборудования.

Более часто рассматриваются и другие задачи о замене оборудования – задачи о минимизации расходов.

Пусть заданы функции: $r_k(t)$ – затраты на эксплуатацию оборудования возраста t в течение k-го месяца, p_k – стоимость нового оборудования в начале k-го месяца, $\varphi_k(t)$ – ликвидная стоимость оборудования возраста t в течение k-го месяца.

Кроме того, будем полагать, что в начале периода оборудование является новым, а в конце периода оборудование продается по ликвидной стоимости.

Обозначим $P_k(t)$ – минимальные затраты на эксплуатацию оборудования с k-го месяца до конца периода, если в начале k-го месяца возраст оборудования равен t.

Рекуррентные соотношения следующий вид.

Для последнего месяца

$$P_n(t) = \min\begin{cases} r_n(t) - \varphi_{n+1}(t+1),\, u = u_0, \\ p_n - \varphi_n(t) + r_n(0) - \varphi_{n+1}(1),\, u = u_1. \end{cases}$$

Для остальных месяцев

$$P_k(t) = \min\begin{cases} r_k(t) + P_{k+1}(t+1),\, u = u_0, \\ p_k - \varphi_k(t) + r_k(0) + P_{k+1}(1),\, u = u_1. \end{cases}$$

Обратной условной оптимизацией находим $P_n(t),\ P_{n-1}(t),\ \ldots,\ P_1(t),$ затем прямой оптимизацией – план замены оборудования.

Динамическая задача о распределении ресурсов

Имеются два производства X и Y, которые используют один вид ресурсов. Прибыль в производствах X и Y в течение месяца задаётся функциями $f(x)$ и $g(y)$, где x и y – количество ресурсов, вложенных в производство X и Y. Функция остатков ресурсов в производствах X и Y имеет вид $\varphi(x)$ и $\psi(y)$.

В начале каждого месяца ресурсы, оставшиеся в производствах, перераспределяются между ними. Общее количество ресурсов равно k_1 и дополнительные ресурсы не вкладываются, при этом прибыль изымается из производства.

Требуется найти план производства на n месяцев, дающий максимальную прибыль.

Обозначим k_i – количество имеющихся ресурсов в начале i-го месяца, $P_i(k_i)$ – максимальную прибыль с i-го месяца до конца периода, если в начале i-го месяца имеется k_i единиц ресурсов.

Запишем функциональные уравнения.

Для последнего месяца

$$P_n(k_n) = \max_{0 \le x_n \le k_n}(f(x_n) + g(k_n - x_n)),$$

для остальных месяцев

$$P_i(k_i) = \max_{0 \le x_i \le k_i}(f(x_i) + g(k_i - x_i) + P_{i+1}(\varphi(x_i) + \psi(k_i - x_i))).$$

Последовательно находим $P_n(k_n), P_{n-1}(k_{n-1}), \ldots, P_1(k_1)$.

После этого определяем план производства на каждый месяц. Значения $k_i,\ i = 2, 3, \ldots n$ можно предварительно оценить.

Задачи с мультипликативными функциями

Рассмотрим задачу о надежности. Имеется некоторый прибор, который использует n различных узлов. Элементы могут отказать, поэтому для повышения надежности они могут дублироваться (параллельно). Известны стоимости узлов прибора с учетом количества элементов и их надежности. Элементы работают независимо.

Требуется найти конструкцию прибора стоимостью не выше k_1 и максимальной надежности.

Заданы x_i – стоимости i-го узла и p_i – вероятности безотказной работы i-го узла в зависимости от количества элементов m.

Обозначим $P_i(k_i)$ – максимальную вероятность безотказной работы узлов с i-го по n-й, если на них выделено k_i единиц средств.

Функциональные уравнения имеют вид

$$P_{n-1}(k_{n-1}) = p_{n-1}(x_{n-1})p_n(k_{n-1} - x_{n-1}), \quad P_i(k_i) = p_i(x_i)P_{i+1}(k_i - x_i), \quad (1 \le i \le n-1),$$

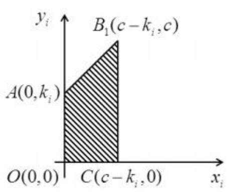
где x_i – количество средств, выделенных на i-й узел.

Задача складирования

Имеется склад ёмкости c единиц продукции. Рассматривается период в n месяцев. В начале каждого месяца запас продукции на складе пополняется и расходуется. Затраты на пополнение продукции пропорциональны количеству продукции и составляют α_i единиц на единицу поставляемой продукции (в начале i-го месяца). Доход от расхода продукции со склада составляет β_i единиц на единицу продукции. Известно количество единиц продукции на складе в начале первого месяца и оно равно k_1. Требуется определить план пополнения и расхода продукции, дающий максимальную прибыль.

Обозначим: k_i – количество продукции на складе в начале i-го месяца, x_i – количество продукции, пополняемой в начале i-го месяца, y_i – количество продукции, расходуемой в начале i-го месяца, $P_i(k_i)$ – максимальную прибыль с i-го месяца до конца периода, если в начале i-го месяца на складе k_i единиц продукции.

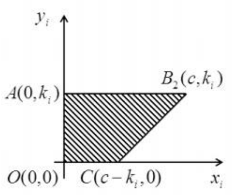
В этой задаче возможны три варианта: 1) пополнение перед расходом, 2) расход перед пополнением, 3) возможны оба случая.



Вариант 1

$x_i \le c-k_i,$

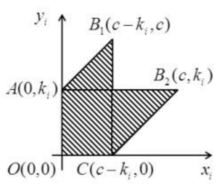
$y_i \le k_i + x_i.$



Вариант 2

$y_i \le k_i,$

$x_i \le c-k_i + y_i.$



Вариант 3

Заметим, что $k_i = k_{i-1} + x_{i-1} - y_{i-1}$ и прибыль за i-й месяц находится как $\beta_i y_i - \alpha_i x_i$.

Заметим также, что, поскольку прибыль за i-й месяц является линейной функцией и целевая функция $P_i(k_i)$ также является линейной, оптимальный план можно рассматривать только в вершинах области: O, A, B_1, B_2, C.

Запишем функциональные уравнения. Для последнего месяца имеем

$$P_n(k_n) = \max_{O,A,B_1,B_2,C}(\beta_n y_n - \alpha_n x_n) = \max\begin{cases} 0, (O), \\ \beta_n k_n, (A), \\ \beta_n c - \alpha_n(c-k_n), (B_1), \\ \beta_n c - \alpha_n c, (B_2), \\ -\alpha_n(c-k_n), (C), \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} \beta_n k_n, (A), \\ \alpha_n k_n + (\beta_n - \alpha_n)c, (B_1). \end{cases}$$

Здесь можно рассматривать только точки A и B_1.

Для остальных месяцев функция имеет вид

$$P_i(k_i) = \max\begin{cases} P_{i+1}(k_{i+1}), (O), \\ \beta_i k_i + P_{i+1}(k_{i+1}), (A), \\ \alpha_i k_i + (\beta_i - \alpha_i)c + P_{i+1}(k_{i+1}), (B_1), \\ \beta_i k_i - \alpha_i c + P_{i+1}(k_{i+1}), (B_2), \\ \alpha_i k_i - \alpha_i c + P_{i+1}(k_{i+1}), (C), \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} P_{i+1}(k_i), (O), \\ \beta_i k_i + P_{i+1}(0), (A), \\ \alpha_i k_i + (\beta_i - \alpha_i)c + P_{i+1}(0), (B_1), \\ \beta_i k_i - \alpha_i c + P_{i+1}(c), (B_2), \\ \alpha_i k_i - \alpha_i c + P_{i+1}(c), (C). \end{cases}$$

Задача управления запасами с заданным расходом

Имеется склад, на который в течение каждого месяца непрерывно и равномерно поступает продукция. В конце i-го месяца продукция со склада вывозится в количестве k_i единиц. Известно количество продукции на складе в начале первого месяца, которое составляет k_0 единиц. Кроме того, может быть задано количество продукции на складе в конце n-го месяца, которое равно k_n.

Затраты на хранение продукции на складе в течение i-го месяца задаются функцией $\varphi(\overline{k_i})$, где $\overline{k_i}$ – среднее количество продукции на складе в течение i-го месяца. Поскольку продукция пополняется непрерывно и равномерно, среднее количество продукции на складе выражается формулой $\overline{k_i} = k_{i-1} + \frac{x_i}{2}$.

Затраты на пополнение продукции задаются функцией $\psi(x_i)$, где x_i – количество продукции, пополняемое в течение i-го месяца. Расходы на i-й месяц заданы и составляют y_i единиц.

Требуется найти оптимальный план пополнения продукции на n месяцев.

Будем решать задачу прямым планированием. Сначала выполним условную прямую оптимизацию, а затем обратную безусловную оптимизацию. Обозначим k_i – количество продукции на складе в конце i-го месяца. Введем целевые функции: $Q_i(k_{i-1}, x_i)$ – минимальные затраты на хранение и выполнение продукции с первого месяца до i-го, если в конце $(i-1)$-го месяца на складе имеется k_{i-1} единиц продукции и пополнение в течение i-го месяца составляет x_i единиц, $Q_i(k_i)$ – минимальные затраты на хранение и пополнение продукции с первого по i-й месяц, если в конце i-го месяца на складе k_i единиц продукции.

Значения k_i можно оценить. Сначала заметим, что $k_{n-1} = k_n - x_n + y_n$. Максимальное значение достигается при $x_n = 0$ и составляет $k_n + y_n$. Следовательно, $0 \le k_{n-1} \le k_n + y_n$. Далее аналогично получаем оценки для всех k_i.

Запишем рекуррентные соотношения.

Для первого месяца:

$$Q_1(k_0, x_1) = \varphi(\overline{k_1}) + \psi(x_1) = \varphi\left(k_0 + \frac{x_1}{2}\right) + \psi(x_1).$$

$$Q_1(k_1) = \min_{x_1} Q_1(k_0, x_1) = \min_{x_1} Q_1(k_1 - x_1 + y_1, x_1).$$

Для i-го месяца $(2 \le i \le n)$:

$$Q_i(k_{i-1}, x_i) = \varphi(\overline{k_i}) + \psi(x_i) + Q_{i-1}(k_{i-1}) = \varphi\left(k_{i-1} + \frac{x_i}{2}\right) + \psi(x_i) + Q_{i-1}(k_{i-1}).$$

$$Q_i(k_i) = \min_{x_i} Q_i(k_{i-1}, x_i) = \min_{x_i} Q_i(k_i - x_i + y_i, x_i).$$

По этим формулам последовательно находим $Q_1(k_1)$, $Q_2(k_2)$, ..., $Q_n(k_n)$. Если k_n задано, то $Q_n(k_n)$ задает искомое значение, если не задано, то надо взять $\min_{k_n} Q_n(k_n)$ (обычно при $Q_n(0)$). Затем находим значение x_i с помощью обратной безусловной оптимизации: x_n – из таблицы для k_n, x_{n-1} – из таблицы для k_{n-1} и так до x_1.

Стохастическая задача распределения ресурсов

Стохастические модели используют вероятностные методы и применяются в тех случаях, когда одна или несколько величин являются случайными и известны их законы распределения. Задачи такого рода возникают и в управлении запасами, и в динамическом программировании.

Рассмотрим стохастическую задачу распределения ресурсов для двух производств. Имеются два производства X и Y, которые используют один вид ресурсов. Функции дохода $f(x)$ и $g(y)$ и функции остатка $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ являются случайными. Данные об этих функциях известны законами распределения.

$f_1(x)$	$f_2(x)$	…	$f_n(x)$
$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	…	$\varphi_n(x)$
p_1	p_2	…	p_n

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$

$g_1(y)$	$g_2(y)$	…	$g_m(y)$
$\psi_1(y)$	$\psi_2(y)$	…	$\psi_m(y)$
q_1	q_2	…	q_m

$q_1 + q_2 + \ldots + q_m = 1.$

Тогда средние доходы и остатки будут находиться с помощью математического ожидания. Задачу можно решать обратным планированием, находя математическое ожидание общей прибыли за l месяцев. После этого можно найти и закон распределения прибыли.

Запишем функциональные уравнения. Для последнего l-го месяца

$$\overline{P_l}(k_l, x_l) = M(f(x_l) + g(k_l - x_l)),$$

где k_l – количество ресурсов в начале l-го месяца; x_l – количество ресурсов, выделяемых производству X на l-ый месяц; $\overline{P_l}(k_l, x_l)$ – математическое ожидание прибыли за l-ый месяц, если в начале l-го месяца имеется k_l единиц ресурсов, из которых x_l направляется в X.

$$\overline{P_l}(k_l) = \max_{0 \le x_l \le k_l} \overline{P_l}(k_l, x_l).$$