8. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины и их характеристики. Стандартные распределения.

Случайная величина – это величина, значения которой зависят от случая.
Виды случайных величин:
1) *дискретная* CBX – принимает конечное или счетное множество значений;
2) *непрерывная* CBX – принимает все значения из заданного промежутка.
Говорят, что задан *закон распределения* случайной величины X, если каждому значению x поставлена в соответствие вероятность его появления и сумма всех вероятностей равна числу 1.
Для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все ее возможные значения, нужно указать еще и их вероятность.
Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления.
Закон распределения можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) или графически (в виде многоугольника распределения).
Рассмотрим случайную величину X, которая принимает значения x_1, x_2, x_3 ... x_n с некоторой вероятностью p_i, где i = 1.. n.
Сумма вероятностей p_i равна 1.

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n + \cdots = 1$$

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей вида

x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
p_1	p_2	p_3		p_n	

называется рядом распределения дискретной случайной величины или просто рядом распределения. Эта таблица является наиболее удобной формой задания дискретной случайной величины.
Графическое представление этой таблицы называется многоугольником распределения.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание М дискретной случайной величины - это среднее значение случайной величины, равное сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$M(x) = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Дисперсия случайной величины — мера разброса случайной величины, равная математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(x) = M\left[x - M(x)\right]^2$$

Принимая во внимание свойства математического ожидания, легко показать что

$$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины (иногда применяется термин «***стандартное отклонение случайной величины***») называется число равное $\sigma = \sqrt{D(x)}$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называют определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox , то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Дисперсией непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называют определенный интеграл

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox , то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Так как $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, то можно использовать следующие формулы для вычисления дисперсии:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 \text{ или } D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 .$$

Замечание: Свойства математического ожидания и дисперсии дискретных случайных величин сохраняются и для непрерывных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется аналогично дискретному случаю:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

1. Стандартные распределения дискретных случайных величин

1**. Биномиальный закон распределения**

Определение. Дискретная случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с параметрами пир, если она принимает значения О, 1, 2,..., m,..., n с вероятностями

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} ,$$

где $0<p<1$, $q=1-p$.

Ряд распределения биномиального закона имеет вид:

x_i	0	1	2	...	m	...	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, а ее дисперсия

M(X)=np,   D(X)=npq.

2. Закон распределения Пуассона

Определение. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона с параметром X > 0, если она принимает значения 0, 1, 2,..., /я,... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda) , \qquad \textbf{(4.8)}$$

Ряд распределения закона Пуассона имеет вид:

x_i	0	1	2	...	m	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

M(X)=λ,   D(X)=λ.

3**. Геометрическое распределение**

Определение. Дискретная случайная величина X=т имеет геометрическое распределение с параметром p, если она принимает значения 1,2,..., /я... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X=m)=pq^{m-1} ,$$

Ряд геометрического распределения случайной величины имеет вид:

x_i	1	2	3	...	m	...
p_i	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	...

$$M(X)=\frac{1}{p} , \quad D(X)=\frac{q}{p^2} ,$$

Стандартные распределения непрерывных случайных величин

Равномерный закон распределения

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет равномерный закон распределения на отрезке [а, 6], если ее плотность вероятности ф(х) постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, т.е

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{при } a \le x \le b,\\ 0 & \text{при } x<a,\ x>b.\end{cases}$$

.

Функция распределения случайной величины X, распределенной по равномерному закону, есть

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x \le a,\\ (x-a)\ (b-a) & \text{при } a<x\le b,\\ 1 & \text{при } x>b,\end{cases} \quad M(X)=\frac{a+b}{2}, \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показательный (экспоненциальный) закон распределения

закон распределения

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет Показательный (экспоненциальный) закон распределения с параметром X > 0, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Функция распределения случайной величины X, распределенной по показательному (экспоненциальному) закону, есть

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0,\end{cases} \quad M(X)=\frac{1}{\lambda}, \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормальный закон распределения

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения (закон Гаусса) с параметрами а и сигма^2, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Теорема. Функция распределения случайной величины X, распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа Ф(х) по формуле:

$$F_N(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

M(X)=a

D(X)=сигма^2.

Функция распределения

Теоретическая функция распределения случайной величины X задается формулой: $F(x)=P(X<x)$, где $P(X<x)$ – вероятность того, что CBX принимает значение, меньшее x .

Свойства функции распределения

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. Функция распределения неубывающая.
3. Функция распределения непрерывна слева.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$.

Функция распределения дискретной CBX имеет вид:

$$F(x)=\sum_{x_k<x} P(X=x_k),$$

где $x_k<x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x, или иначе

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le x_1;\\ p_1, x_1<x\le x_2;\\ p_1+p_2, x_2<x\le x_3;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_{i=1}^{k-1} p_i, x_{k-1}<x\le x_k;\\ 1, x>x_k.\end{cases}$$

Свойства плотности распределения

1. $p(x) \ge 0$.
2. $F'(x)=p(x)$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1$.

Вероятность того, что CBX примет **значение из промежутка** $[\alpha;\beta)$ можно найти по формуле:

$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ или по формуле $P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx$

Вероятность того, что дискретная CBX примет **значение из промежутка** $[\alpha; \beta)$ равна сумме вероятностей всех ее значений, принадлежащих данному промежутку.

Числовые характеристики случайной величины

Математическое ожидание CBX – это среднее значение величины X или центр ее распределения.

Математическое ожидание дискретной CBX, находят по формуле:

$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, где $i = \overline{1, n}$.

Дисперсия или рассеивание CBX – это математическое ожидание квадрата отклонения величины X от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Дисперсию *дискретной* CBX можно найти по формуле:

$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$,

где $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$, где $i = \overline{1, n}$

Среднее квадратическое отклонение CBX – корень квадратный из ее дисперсии:

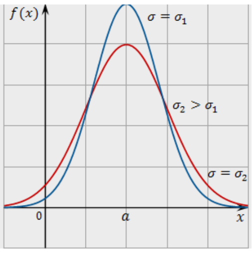
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Нормальное распределение.

Плотность вероятности нормально распределённой случайной величины X выражается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Кривая распределения (левый рисунок) симметрична относительно точки x=a (точка максимума). При уменьшении σ ордината точки максимума неограниченно возрастает, при этом кривая пропорционально сплющивается вдоль оси абсцисс, так что площадь под её графиком остаётся равной единицы (правый рисунок).



Нормальный закон распределения широко применяется в задачах практики. Объяснить причины этого впервые удалось Ляпунову. Он показал, что если случайная величина может рассматриваться как сумма большого числа малых слагаемых, то при достаточно общих условиях закон распределения этой случайной величины близок к нормальному независимо от того, каковы законы распределения отдельных слагаемых. А так как практически случайные величины в большинстве случаев бывают результатом действия множества причин, то нормальный закон оказывается наиболее распространённым законом распределения.

Укажем числовые характеристики нормально распределённой случайной величины (математическое ожидание и дисперсия):

$$M(X) = a; \qquad D[X] = \sigma^2$$

Таким образом, параметры a и σ нормального закона распределения представляют собой математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины. Принимая это во внимание, получим:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D[X]}} \exp\left(-\frac{(x - M(X))^2}{2D[X]}\right)$$

Эта формула показывает, что нормальный закон распределения полностью определяется математическим ожидание и дисперсией случайной величины. Таким образом, математическое ожидание и дисперсия полностью характеризуют нормально распределённую случайную величину. Разумеется, что в общем случае, когда характер закона распределения неизвестен, знание математического ожидания и дисперсии недостаточно для определения этого закона распределения.
Характеристическая функция нормального распределения случайной величины задаётся формулой

$$g(s) = \exp\left(ias - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\right)$$

Экспоненциальное распределение.
Экспоненциальным распределением называется частный случай гамма-распределения с параметрами a=1; b=λ>0, то есть то есть плотность вероятности в этом случае

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Используя свойства два плотности распределения, можно найти функцию распределения F(x)
 экспоненциального закона:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

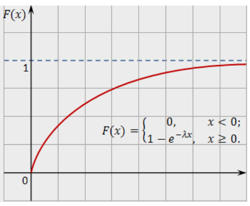
Основные характеристики (математическое ожидание и дисперсия) случайной величины X, распределённой по экспоненциальному, имеют вид

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Характеристическая функция экспоненциального распределения задаётся формулой

$$g(s) = \frac{\lambda}{\lambda - is}.$$

Кривая экспоненциального распределения вероятностей показана слева, а график функции распределения справа.



Статистический смысл параметра λ состоит в следующем: λ есть среднее число событий на единицу времени, то есть 1/λ есть средний промежуток времени между двумя последовательными событиями.
Экспоненциальное (показательное) распределение часто встречается в теории массового обслуживания (например, X — время ожидания при техническом обслуживании или X
 — продолжительность телефонных разговоров, ежедневно регистрируемых на телефонной станции) и теории надёжности

(например, X — срок службы радиоэлектронной аппаратуры).

Равномерное распределение.

Случайная величина X называется распределённой равномерно на отрезке [a;b], если её плотность распределения вероятностей постоянна на данном отрезке:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a;b],\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b].\end{cases}$$

Все возможные значения равномерно распределённой случайной величины лежат в пределах некоторого интервала; кроме того. в пределах этого интервала все значения случайной величины одинаково вероятны (обладаю одной и той же плотностью вероятности). Равномерно распределение реализуется в экспериментах, где наудачу ставиться точка на отрезке [a;b] (X — абсцисса поставленной точки). Равномерно распределённая случайная величина встречается также в измерительной практике при округлении отчётов измерительных приборов до целых делений шкал. Ошибка при округлении отчёте до ближайшего целого деления является случайной величиной X, которая может принимать с постоянной плотностью вероятности любое значение между двумя соседними целыми делениями.

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределённой случайной величины

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\qquad D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Характеристическая функция равномерного распределения задаётся формулой

$$g(s)=\frac{1}{is(b-a)}(e^{isb}-e^{isa}).$$

График плотности равномерного распределения изображён слева.

График вероятности изображён зеленым справа.