5. Конечные автоматы мили и мура. вероятностные конечные автоматы. Сети Петри. Матричное и графическое представление сетей Петри.

Конечный автомат – автомат, у которого множества значений внутренних состояний, входных и выходных сигналов конечны.

Конечный автомат можно представить как математическую схему (F-схему), характеризующуюся шестью элементами [4,5]:

1). Конечное множество входных сигналов V (входной алфавит).
Входные сигналы $v[t]$ в любой момент времени принимают значения из этого входного алфавита $v[t] \in V$, $t \in Z_0$.

2). Конечный внутренний алфавит X.
Состояние автомата $x[t]$ принимает значения из этого внутреннего алфавита: $x[t] \in X$, $t \in Z_0$

3). Конечный выходной алфавит Y.
$y[t] \in Y$, $t \in Z_0$

4). Начальное состояние (состояние в начальный момент времени).
$x_0 = x[0]$

5). Функция переходов.
Определяет состояние конечного автомата в некоторый момент времени t, если в предшествующий момент он был в каком-то состоянии $x[t-1]$ и на вход поступил сигнал $v[t]$:

$$x[t] = \varphi(x[t-1], v[t]). \qquad (1.1)$$

При заданном начальном состоянии конечный автомат может функционировать, даже если нет входного воздействия (автономный автомат).

6). Функции выходов определяется типом конечного автомата (рассмотрим автоматы Мили и Мура).

а). Конечный автомат Мили.
Для автомата Мили выход определяется состоянием автомата в предыдущий момент времени $x[t-1]$ и сигналом, поступающим на вход в данный момент $v[t]$:

$$y[t] = \psi(x[t-1], v[t]). \qquad (1.2)$$

б). Конечный автомат Мура.
Для автомата Мура выход определяется состоянием автомата в тот же момент времени и не зависит от входного сигнала:

$$y[t] = \tilde{\psi}(x[t]). \qquad (1.3)$$

Вероятностный конечный автомат – такой автомат, который не относит однозначно каждой паре (ξ'_β, σ_α) некоторую из пар (ξ'_β, τ_γ), а задает лишь условные вероятности появления пар (ξ'_β, τ_γ), при условии, что реализовалась пара (ξ'_β, σ_α) (σ_α – вариант сочетания алфавитов входов $\upsilon[t]$, ξ'_β, ξ'_β – варианты сочетания алфавитов состояний $x[t]$ в предыдущий и последующие моменты времени соответственно; τ_γ – вариант сочетания алфавитов выходов $y[t]$):

$$P(\xi_\beta, \tau_\Gamma / \xi_\beta, \sigma_\alpha) = P^{<\beta', \alpha>}{}_{\beta\,\Gamma}, \qquad (1.37)$$

где $P^{<\beta', \alpha>}{}_{\beta\,\Gamma}$ – вероятность перехода автомата в состояние ξ'_β и появления выходного сигнала τ_γ при условии, что автомат находится в состоянии $\xi'_\beta = \xi'_\beta$ и на его вход поступил сигнал σ_α.

Сети Петри

Реальные системы функционируют во времени и происходящие в них события длятся некоторое время. В синхронных моделях дискретных систем события явно привязаны к определенным моментам времени, в которые происходит одновременное изменение состояний всех компонентов системы, трактуемое как изменение общего состояния системы. Смена состояний происходит последовательно. Такой подход к моделированию сложных систем имеет ряд недостатков, избавиться от которых можно путем отказа от введения времени в модели дискретных систем. Модели такого типа называют асинхронными. Временные связи в них заменяются причинно-следственными, что в некоторых случаях позволяет более наглядно описать структурные особенности реальной системы.

Отказ от времени приводит к тому, что события в асинхронных моделях рассматриваются или как элементарные, или как составные, образованные из элементарных. При неформальном описании функционирования асинхронных моделей привлекаются временные отношения (раньше, позже, и т. д.), но следует помнить, что они представляют собой лишь результаты причинно-следственных отношений. В отличие от конечных автоматов, в терминах которых описываются глобальные изменения состояния реальной системы, сеть Петри конкретизирует внимание на локальных событиях (им соответствуют переходы сети), на локальных условиях (им соответствуют позиции), на локальных связях между событиями и условиями. Поэтому сеть Петри более адекватно чем конечные автоматы моделирует поведение распределенных асинхронных систем.

Важной особенностью сетей Петри является то, что они представляют собой удобный аппарат для моделирования параллельных процессов, т.е. процессов, протекающих в системе независимо один от другого. На выполнение таких процессов не накладываются какие-либо условия синхронизации.

Структура и функционирование сети Петри

Сеть Петри состоит из четырех элементов: множества позиций P, множества переходов T, входной функции I и выходной функции O. Входная и выходная функции связаны с переходами и позициями. Входная функция I отображает переход t_j в множество позиций $I(t_j)$, называемых входными позициями данного перехода. Выходная функция O отображает переход t_j в множество позиций $O(t_j)$, называемых выходными позициями данного перехода. Таким образом, структура сети Петри определяется ее позициями, переходами, входной и выходной функциями.

Дадим формальное определение сети Петри. Сеть Петри C – это четверка $C = (P, T, I, O)$. Здесь $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – конечное множество позиций, $n \geq 0$. $T = (t_1, t_2, ..., t_m)$ – конечное множество переходов, $m \geq 0$. Множество позиций и множество переходов не пересекаются. Функция $I: T \to P^\infty$ является входной функцией – отображением из переходов в комплекты позиций. $O: T \to P^\infty$ есть выходная функция – отображение из переходов в комплекты позиций.

Позиция p_i является входной позицией перехода t_j в том случае, если $p_i \in I(t_j)$; p_i является выходной позицией перехода t_j, если $p_i \in O(t_j)$.

С входными и выходными функциями связано понятие кратности позиций сети Петри. Кратность входной позиции p_i для перехода t_j есть число появлений данной позиции во входном комплекте перехода, $\#(p_i, I(t_j))$. Кратность выходной позиции p_i для перехода t_j есть число появлений данной позиции во выходном комплекте перехода, $\#(p_i, O(t_j))$. Кратность позиции может быть в пределах от нуля до бесконечности.

Входные и выходные функции используются для отображения позиций в комплекты переходов, но их также можно использовать для отображения переходов в комплекты позиций. Тогда $I: P \to T^\infty$, и $O: P \to T^\infty$. Такие входные и выходные функции называются расширенными. Определим, что в данном случае переход t_j является входом позиции p_i, если p_i есть выход t_j. Переход t_j является выходом позиции p_i, если p_i есть вход t_j.

Маркированная сеть Петри

Для полного описания функционирования сети Петри необходимо, помимо четверки $C = (P, T, I, O)$, задать еще маркировку сети. Маркировка μ есть присвоение фишек позициям сети Петри. Фишка – это примитивное понятие сетей Петри (подобно позициям и переходам). Количество и расположение фишек при выполнении сети могут изменяться.

Маркировка μ сети Петри $C = (P, T, I, O)$ есть функция, отображающая множество позиций $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ в множество неотрицательных целых чисел N: $\mu: P \to N$.

Маркированная сеть Петри $M = (C, \mu)$ есть совокупность структуры сети Петри $C = (P, T, I, O)$ и маркировки μ. Такая сеть может быть записана в виде $M = (P, T, I, O, \mu)$.

Так как количество фишек, которое может соответствовать каждой позиции, неограниченно, то в целом для сети Петри существует бесконечно много маркировок.

Правила функционирования сети Петри

Выполнение сети Петри зависит от ее маркировки. Фишки находятся в позициях и управляют выполнением переходов сети. Переход сети запускается удалением фишек из его входных позиций и образованием новых фишек в его выходных позициях. Переход может запуститься только в том случае, когда он разрешен. Если у сети Петри с некоторой маркировкой разрешены сразу несколько переходов, то сработать может только один из них, неизвестно какой. В этом заключается недетерминизм сети Петри.

Переход $t_j \in T$ в маркированной сети Петри $C = (P, T, I, O)$ с маркировкой μ разрешен, если для всех позиций $p_i \in P$ выполняется неравенство $\mu(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j))$. В результате запуска разрешенного перехода t_j образуется новая маркировка сети μ', определяемая для каждой позиции сети $p_i \in P$ соотношением:

$\mu'(p_i)=\mu(p_i)-\#(p_i,I(t_j))+\#(p_i,O(t_j))$.

Графическое представление сети Петри

Граф сети Петри обладает двумя типами узлов. Позиции сети обозначаются на графе кружками, а переходы – планками. Позиции и переходы графа соединяются ориентированными дугами. Дуга, направленная от позиции p_i к переходу t_j, определяет позицию, которая является входом перехода. Выходная позиция указывается дугой от перехода к позиции. Кратные входные и выходные позиции представляются кратными дугами.

Таким образом, граф сети Петри есть ориентированный мультиграф (то есть допускается существование кратных дуг от одной вершины к другой) $G=(V,A)$, где $V=(v_1,v_2,...,v_s)$ – множество вершин, а $A=(a_1,a_2,...,a_r)$ – множество дуг. Множество вершин V может быть разбито на два непересекающихся подмножества P и T (позиции и переходы). При этом для любой направленной дуги $a_i \in A$, если $a_i=(v_j,v_k)$, то либо $v_j \in P$, $v_k \in T$, либо $v_j \in T$ и $v_k \in P$.

Структуру сети Петри можно преобразовать в граф, и наоборот. Определим $V=P\cup T$. Определим A как комплект направленных дуг, такой, что для всех позиций $p_i \in P$ и переходов $t_j \in T$ верно $\#((p_i,t_j),A)=\#(p_i,I(t_j))$ и $\#((t_j,p_i),A)=\#(p_i,O(t_j))$. Тогда $G=(V,A)$ есть граф сети Петри со структурой $C=(P,T,I,O)$.

Представление сети Петри в матричном виде

Помимо графического и аналитического (с использованием структуры) представления, сеть Петри может быть представлена в матричном виде. Для сети Петри с множеством позиций $P=(p_1,p_2,...,p_n)$ и множеством переходов $T=(t_1,t_2,...,t_m)$ матрица будет иметь размер $m\times n$. Определить ее можно по формуле $R=R^+-R^-$, где

$$R^+=r_{ji}^+=\begin{cases}1, & p_i \in O(t_j);\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$$

$$R^-=r_{ji}^-=\begin{cases}1, & p_i \in I(t_j);\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}.$$

Следует заметить, что элементы матриц R^+ и R^- совпадают с кратностями входных и выходных позиций для всех переходов сети.

Условие разрешенности перехода t_j для сети с маркировкой μ может быть записано в виде $\mu \ge e(j)R^-$, где $e(j)$ – m-мерный вектор из нулей с единицей на j-м месте. Новую маркировку сети при срабатывании перехода t_j можно определить по формуле $\mu'=\mu+e(j)R$

Достижимость некоторой маркировки

Задача достижимости маркировки может быть сведена к определению некоторого неотрицательного целочисленного вектора λ размера $1\times m$. Пусть задана некоторая сеть Петри с маркировкой μ, множеством позиций $P=(p_1,p_2,...,p_n)$ и множеством переходов $T=(t_1,t_2,...,t_m)$. Чтобы определить достижимость маркировки μ', решают относительно вектора λ уравнение $\lambda R=\mu'-\mu$. Если существует хотя бы одно неотрицательное целочисленное решение, то маркировка μ' достижима из маркировки μ.