6. Решение линейных алгебраических уравнений и систем. Линеаризация

Решением системы линейных алгебраических уравнений называют набор значений неизвестных переменных $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$, обращающий все уравнения системы в тождества. Матричное уравнение $A \cdot X = B$ при данных значениях неизвестных переменных также обращается в тождество $A \cdot X \equiv B$.

Если система уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной.
Если система уравнений решений не имеет, то она называется несовместной.
Если СЛАУ имеет единственное решение, то ее называют определенной; если решений больше одного, то – неопределенной.
Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, то система называется однородной, в противном случае – неоднородной.
Прямые методы решения дают алгоритм, по которому можно найти точное решение систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы основаны на использовании повторяющегося процесса и позволяют получить решение в результате последовательных приближений.
Чтобы решить систему линейных алгебраических уравнений общего вида, сначала выясняем ее совместность, используя теорему Кронекера – Капелли (необх и дост). Если ранг основной матрицы не равен рангу расширенной матрицы, то делаем вывод о несовместности системы. Система уравнений Ax=b разрешима тогда и только тогда, когда {rank} A ={rank} (A,b)}, где (A,b) — расширенная матрица, полученная из матрицы A приписыванием столбца b
Если ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы, то выбираем базисный минор и отбрасываем уравнения системы, которые не участвуют в образовании выбранного базисного минора.
Если порядок базисного минора равен числу неизвестных переменных, то СЛАУ имеет единственное решение, которое находим любым известным нам методом.
Если порядок базисного минора меньше числа неизвестных переменных, то в левой части уравнений системы оставляем слагаемые с основными неизвестными переменными, остальные слагаемые переносим в правые части и придаем свободным неизвестным переменным произвольные значения. Из полученной системы линейных уравнений находим основные неизвестные переменные методом Крамера, матричным методом или методом Гаусса.

Метод Гаусса

Метод Гаусса позволяет в рамках единого подхода построить решения произвольной системы линейных алгебраических уравнений. Исходным является построение расширенной матрицы, которая получается так: к матрице коэффициентов системы *A* добавляют справа столбец правых частей *B*. При этом имеется естественное взаимно-однозначное соответствие: каждой строке расширенной матрицы отвечает уравнение системы. Метод Гаусса опирается на следующие простые соображения: существуют преобразования системы уравнений, которые не меняют набора решений системы. Перечислим эти преобразования с указанием того, как они влияют на расширенную матрицу.
1. Перестановка уравнений (перестановка строк расширенной матрицы).
2. Умножение уравнения на ненулевое число (умножение строки расширенной матрицы на ненулевое число).
3. Вычитание из одного уравнения другого, умноженного на произвольное число (вычитание из строки расширенной матрицы другой строки, умноженной на произвольное число).
4. Перестановка двух неизвестных (с учетом необходимости обратной замены переменных) (перестановка столбцов расширенной матрицы).

Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$ методом Гаусса.

шение.

Коэффициент a_{11} отличен от нуля, так что приступим к прямому ходу метода Гаусса, то есть, к исключению неизвестной переменной x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Для этого к левой и правой частям второго, третьего и четвертого уравнения прибавим левую и правую части первого уравнения, умноженные соответственно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{1}{3}$, $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$ и $-\frac{a_{41}}{a_{11}} = -\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4) = -1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-2) \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + \frac{2}{3}\cdot(3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4) = 9 + \frac{2}{3}\cdot(-2) \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4) = 4 + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

Метод Крамера

Пусть Δ - определитель основной матрицы системы, а $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ - определители матриц, которые получаются из *A* заменой *1-ого, 2-ого, …, n-ого* столбца соответственно на столбец свободных членов.

При таких обозначениях неизвестные переменные вычисляются по формулам метода Крамера как $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} \ldots$

1. Вычисляем определитель основной матрицы системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и убеждаемся, что он отличен от нуля.
2. Находим определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

которые являются определителями матриц, полученных из матрицы *A* заменой

Линеаризация — один из методов приближённого представления замкнутых нелинейных систем, при котором исследование нелинейной системы заменяется анализом линейной системы, в некотором смысле эквивалентной исходной. Методы линеаризации имеют ограниченный характер, т. е. эквивалентность исходной нелинейной системы и её линейного приближения сохраняется лишь для ограниченных пространственных или временных масштабов системы, либо для определенных процессов, причём, если система переходит с одного режима работы на другой, следует изменить и её линеаризированную модель. Применяя линеаризацию, можно выяснить многие качественные и особенно количественные свойства нелинейной системы.

Методы линеаризации

1. Метод логарифмирования — применяется к степенным функциям;
2. Метод обратного преобразования — для дробных функций;
3. Комплексный метод — для дробных и степенных функций.