14. ЭММM. Задача линейного программирования. Геометрический подход к решению задачи линейного программирования. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования. Двойственные задачи линейного программирования.

Постановка задачи линейного программирования

Линейной функцией n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется функция вида $L = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, $c_i = const$.

Задача линейного программирования может быть поставлена в виде:

$$L = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

где $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$ – система ограничений,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$ – условия неотрицательности.

Здесь функция L называется целевой функцией.

Другие постановки задачи линейного программирования могут быть сведены к данной:

1) если $L \to \min$, то можно рассмотреть $-L \to \max$. Те значения переменных, при которых $-L$ максимальна, дают значения , при которых L минимальна. При этом $L_{\min} = -(-L_{\max})$.

2) если имеются ограничения вида $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i$, то можно умножить его на -1 и рассмотреть ограничение $-a_{i1}x_1 - \ldots - a_{in}x_n \le -b_i$.

3) если имеется ограничение вида $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, то возможны 2 способа перехода к неравенствам. Первый способ – заменить равенство на 2 неравенства:

$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$ и $-a_{i1}x_1 - \ldots - a_{in}x_n \le -b_i$.

Второй способ – выразить переменную x_j, для которой $a_{ij} \ne 0$, через остальные переменные и подставить в целевую функцию и ограничения.

Геометрический метод решения задачи линейного программирования

Графическое решение задачи линейного программирования с двумя переменными и системой ограничений в виде линейных неравенств состоит из двух этапов:

1) построение на плоскости множества решений системы линейных неравенств, являющегося выпуклым многогранным множеством,

2) выбор в построенном множестве точки, доставляющей целевой функции требуемое (минимальное или максимальное) значение.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$L = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

На плоскости Ox_1x_2 строим прямые $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ для $i = 1,2,\ldots,m$.

Далее определяем полуплоскости, удовлетворяющие неравенствам $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$. Для этого берем точку, не лежащую на прямой и подставляем ее координаты в неравенство. Если неравенство верно, то берется полуплоскость, в которой лежит эта точка. Если неравенство не верно, то берется другая полуплоскость. Затем берем пересечение всех полуплоскостей, лежащее в первой координатной четверти. Полученное множество является областью допустимых решений (ОДР).

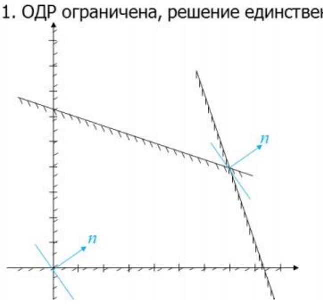
Область допустимых решений (ОДР) - множество всех наборов значений переменных, удовлетворяющее всем ограничениям и условиям неотрицательности.

Далее строим вектор нормали $\vec{n}(c_1, c_2)$. После этого через начало вектора проводим перпендикулярную к нему прямую, которая называется линией уровня.

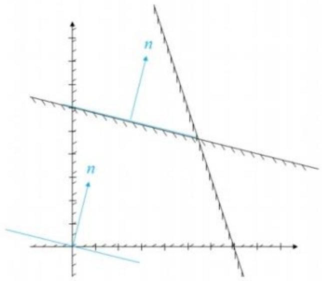
Затем перемещаем линию уровня в направлении, которое указывает вектор нормали, до последних точек пересечения с ОДР.

Рассмотрим различные случаи при решении задач линейного программирования геометрическим способом.

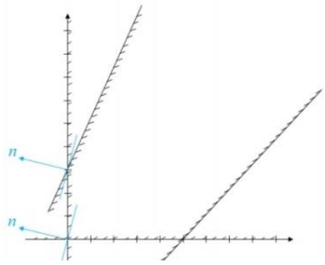
1. ОДР ограничена, решение единственно



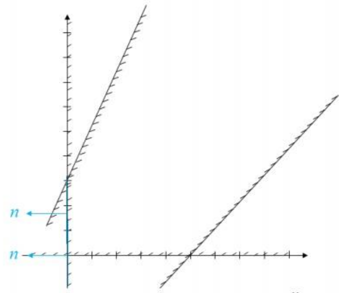
2. ОДР ограничена, решений бесконечно много



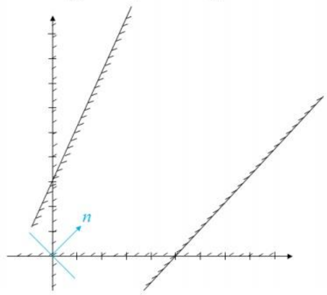
3. ОДР неограничена, решение единственно



4. ОДР неограничена, решений бесконечно много



5. ОДР неограничена, решений нет



6. ОДР пуста, решений нет

Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Введение

Слово SIMPLEX в обычном смысле означает простой, несоставной, в противоположность слову COMPLEX.

Данный метод получил несколько различных форм (модификаций) и был разработан в 1947 году Г. Данцигом.

Сущность симплекс-метода заключается в том, что если число неизвестных больше числа уравнений, то данная система неопределенная с бесчисленным множеством решений. Для решения системы все неизвестные произвольно подразделяют на базисные и свободные. Число базисных переменных определяется числом линейно независимых уравнений. Остальные неизвестные свободные. Им придают произвольные значения и подставляют в систему.

Любому набору свободных неизвестных можно придать бесчисленное множество произвольных значений, которые дадут бесчисленное множество решений. Если все свободные неизвестные приравнять к нулю, то решение будет состоять из значений базисных неизвестных. Такое решение называется базисным.

В теории линейного программирования существует теорема, которая утверждает, что среди базисных решений системы можно найти оптимальное, а в некоторых случаях и несколько оптимальных решений, но все они обеспечат экстремум целевой функции.

Таким образом, если найти какой-либо базисный план, а затем улучшить его, то получится оптимальное решение. На этом принципе и построен симплекс-метод.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу линейного программирования в виде

$$L = c_0 - (c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n) \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \le b_1, \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \le b_n, \\ x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0; \end{cases}$$

Сопоставим условиям этой задачи следующую таблицу (симплекс-таблицу)

	C	x_1	...	x_n
L	c_0	c_1	...	c_n
y_1	b_1	a_{11}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...
y_m	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}

Схема решения задачи

Решение задачи проводится в два этапа:

1. Нахождение опорного плана
2. Нахождение оптимального плана

На первом этапе будет найден опорный план, от которого можно осуществить переход к поиску оптимального плана или же будет показано, что не существует такого набора значений переменных, которое удовлетворяет всем ограничениям и условиям неотрицательности.

На втором этапе будет найдено минимальное значение целевой функции или будет показано, что решений нет.

Правила пересчета таблицы

В симплекс-таблице выделен некоторый элемент, который называется разрешающим. Этот элемент не находится в первой строке и в первом столбце.

1. К разрешающему элементу берется обратный. $a_{ij}' = \dfrac{1}{a_{ij}}.$

2. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент. $a_{ik}' = \dfrac{a_{ik}}{a_{ij}}, k \ne j.$

3. Элементы разрешающего столбца делятся на число с противоположным знаком к разрешающему элементу.

$$a_{lj}' = -\frac{a_{lj}}{a_{ij}}, l \ne i.$$

4. Остальные элементы таблицы пересчитываются по формуле.

$$a_{lk}' = a_{lk} - \frac{a_{lj} \cdot a_{ik}}{a_{ij}}$$

Нахождение опорного плана

Опорный план – набор значений переменных, удовлетворяющий всем ограничениям и условиям неотрицательности.

Переменные $x_1, \ldots, x_n$ – основные, а переменные $y_1, \ldots, y_m$ – дополнительные (эти переменные вводятся для ограничений).

Переменные, находящиеся в верхней строке симплекс-таблицы, называются свободными.

Переменные, находящиеся в левом столбце, называются базисными. Их значение вычисляется по свободным переменным.

На первом этапе решения задачи будет найден опорный план или показано, что ОДР пуста и задача решений не имеет.

Алгоритм нахождения опорного плана

1. Если все числа первого столбца, начиная со второй строки, неотрицательны, то опорный план найден и надо переходить ко второму этапу.
2. Для любого отрицательного элемента в первом столбце (начиная со второй строки) находим отрицательный элемент в этой строке в столбцах, начиная со второго. Любой из этих столбцов может быть взят в качестве разрешающего.
3. Если отрицательных элементов не найдется (больше нет в этой строке), то ОДР пуста и задача решений не имеет.

В самом деле, переменная, которой соответствует эта строка будет отрицательной, что противоречит ограничениям задачи.

4. Рассматриваются отношения элементов первого столбца к разрешающему столбцу для всех строк, начиная со второй. Строка, для которой это отношение минимально из всех положительных, берется в качестве разрешающего.
5. Разрешающий элемент – это элемент, находящийся на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца. Делаем пересчет таблицы и переходим к пункту 1.

После нахождения опорного плана осуществляется переход ко второму этапу задачи.

На втором этапе решения задачи будет найден оптимальный план или показано, что $L \to -\infty$ и решений нет.

Оптимальный план – опорный план, дающий минимальное значение целевой функции.

Алгоритм нахождения оптимального плана

1. Если все элементы первой строки, начиная со второго столбца, не положительны, то оптимальный план найден, задача решена.
$L = c_0 - (c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n)$ имеет минимум при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, если $c_1 < 0, \ldots, c_n < 0$. Если $c_j = 0$, то x_j может быть больше ноля.
2. Любой столбец, в котором в первой строке находится положительный элемент, может быть взят в качестве разрешающего. Первый столбец не рассматривается.
3. Рассмотрим отношение элементов первого столбца к элементам разрешающего столбца для всех строк, начиная со второй. Та строка, для которой это отношение минимально из всех положительных и 0, у которой в разрешающей строке положительный элемент, может быть взята в качестве разрешающей.
4. Если таких строк нет, то $L \to -\infty$. В самом деле имеется столбец вида

$$\begin{array}{l} x_j \\ c_j > 0 \\ a_{1j} \le 0 \\ \ldots \\ a_{mj} \le 0 \end{array}$$

Тогда

$$\begin{array}{l} L = c_0 - (\ldots + c_j \cdot x_j + \ldots) \\ y_1 = b_1 - (\ldots + a_{ij} \cdot x_j + \ldots) \ge 0 \\ \ldots \\ y_m = b_m - (\ldots + a_{mj} \cdot x_j + \ldots) \ge 0 \end{array}$$

Если $x_j \to +\infty$, то условие неотрицательности $x_j \ge 0$ выполняется.

Если $a_{ij} = 0$, то y_i не меняется, а если $a_{ij} < 0$, то y_i возрастает. В любом случае условие $y_i \ge 0$ не нарушается. При этом $L \to -\infty$. Следовательно, решений нет.

5. Разрешающий элемент – элемент, находящийся на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца. Делаем пересчет таблицы и переходим к пункту 1.

Постановка двойственной задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в виде

$L = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max;$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.$

Назовем эту задачу исходной.

Тогда двойственной к ней будет называться задача вида

$F = c_0 + b_1z_1 + \ldots + b_mz_m \to \min;$

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + \ldots + a_{m1}z_m \ge c_1; \\ \ldots \\ a_{1n}z_1 + \ldots + a_{mn}z_m \ge c_n; \end{cases}$$

$z_1 \ge 0, \ldots, z_m \ge 0.$

Двойственная задача линейного программирования ставится следующим образом.

1. В исходной задаче $L \to \max$, в двойственной $F \to \min$.

2. Коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи являются коэффициентами в правой части при ограничениях двойственной задачи.

3. Коэффициенты при переменных в целевой функции двойственной задачи равны свободным коэффициентам ограничений исходной задачи.

4. Свободный коэффициент функции F равен свободному коэффициенту функции L.

5. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи является транспонированной к соответствующей матрице исходной задачи.

6. Ограничения в исходной задаче имеют вид "$\le$", а в двойственной – "$\ge$".

Между решениями исходной задачи и двойственной имеется тесная связь.

Лемма (основное неравенство)

Лемма (основное неравенство)

Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ – допустимые наборы (то есть опорные планы) исходной и двойственной задач соответственно.

Тогда $L(x_1, \ldots, x_n) \le F(z_1, \ldots, z_m)$.

Доказательство.

Обозначим $y_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge 0$ для любого $i = 1, \ldots, m$ дополнительные переменные исходной задачи и $w_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}z_i - c_j \ge 0$ для любого $j = 1, \ldots, m$ дополнительные переменные двойственной задачи.

Рассмотрим

$\sum_{i=1}^{m} y_iz_i = \sum_{i=1}^{m}(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)z_i = \sum_{i=1}^{m} b_iz_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_ix_j \ge 0,$ поскольку $y_i \ge 0,\ z_i \ge 0$

для любого i. Отсюда $\sum_{i=1}^{m} b_iz_i \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_ix_j$.

Теперь рассмотрим

$\sum_{j=1}^{n} x_jw_j = \sum_{j=1}^{n} x_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}z_i - c_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_ix_j - \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \ge 0,$ поскольку $x_j \ge 0,\ w_j \ge 0$

для любого j. Отсюда $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_ix_j \ge \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$.

Сравниваем полученные неравенства и замечаем, что $\sum_{i=1}^{m} b_iz_i \ge \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$.

Тогда $L(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \le c_0 + \sum_{i=1}^{m} b_iz_i = F(z_1, \ldots, z_m)$.

Лемма доказана.

Теорема о двойственных задачах

Теорема (о двойственных задачах)

Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ – допустимые наборы исходной и двойственной задач соответственно. Равенство $L(x_1, \ldots, x_n) = F(z_1, \ldots, z_m)$ имеет место тогда и только тогда, когда $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(z_1, \ldots, z_m)$ являются решениями соответствующих задач.

Если L не ограничена сверху $(L \to \infty)$, то область допустимых решений двойственной задачи пуста.

Доказательство.

Если $L(x_1, \ldots, x_n) = F(z_1, \ldots, z_m)$ для допустимых наборов, то для любого допустимого набора $(x_1', \ldots, x_n')$ из основного неравенства $L(x_1', \ldots, x_n') \le F(z_1, \ldots, z_m) = L(x_1, \ldots, x_n)$.

Следовательно, $(x_1, \ldots, x_n)$ является решением исходной задачи. Для набора $(z_1, \ldots, z_m)$ – аналогично (доказать самостоятельно).

Достаточность данного утверждения принимаем без доказательства.

Докажем второе утверждение теоремы.

Предположим, что область допустимых решений не пуста и существует набор $(z_1, \dots, z_m)$ в двойственной задаче. Тогда для любого допустимого набора $(x_1, \dots, x_n)$ выполняется неравенство

$L(x_1,\dots,x_n) \le F(z_1,\dots,z_m) = M$.

Следовательно, функция L ограничена сверху, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Замечание.

Обратное ко второму утверждению неверно. Если область допустимых решений двойственной задачи пуста, то из этого не следует, что $L \to \infty$.

Область допустимых решений исходной задачи также может быть пуста.