Serie 7, Aufgabe 4

a) $y^{(4)} + 1.1 \cdot y''' - 0.1 y'' - 0.3 y = \sin x + 5$

$y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

$y'(0) = 2$

1. Schritt: Auflösen nach höchster Ableitung

$$y^{(4)} = \sin x + 5 - 1.1 \cdot y''' + 0.1 y'' + 0.3 y$$

2. Schritt: Hilfsfunktionen einführen

$z_1(x) = y(x)$

$z_2(x) = y'(x)$

$z_3(x) = y''(x)$

$z_4(x) = y'''(x)$

3. Schritte: Hilfsfunktion ableiten

$z_1'(x) = y'(x) \Rightarrow z_2$

$z_2'(x) = y''(x) \Rightarrow z_3$

$z_3'(x) = y'''(x) \Rightarrow z_4$

$z_4'(x) = y^{(4)}(x) = \sin x + 5 - 1.1 y''' + 0.1 y'' + 0.3 y$

$= \sin x + 5 - 1.1 \cdot z_4 + 0.1 z_3 + 0.3 z_1$

4. Schritte: Aufschreiben der DGL in vektorieller Form

$$z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \sin x + 5 - 1.1 y''' + 0.1 y'' + 0.3 y \end{pmatrix} = f(x, z)$$

$$\text{mit } z(0) = \begin{pmatrix} z_1(0) = y(0) \\ z_2(0) = y'(0) \\ z_3(0) = y''(0) \\ z_4(0) = y'''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufschreiben der DGL als Gleichungssystem

$$z' = Az + b \iff z'(x) = A(x) \cdot z(x) + b(x)$$

$$A = \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & -1.1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin x + 5 \end{pmatrix}$$

b) $x^2 y'' + x \cdot y' + (x^2 - n^2) \cdot y = 0$

$y(1) = y'(1) = 2$

1. Schritt:

$$x^2 \cdot y'' = -x \cdot y' - (x^2 - n^2) \cdot y \quad | : (x^2)$$

$$y'' = \frac{-x \cdot y' - (x^2 - n^2) \cdot y}{x^2}$$

2. Schritte

$z_1(x) = y(x)$

$z_2(x) = y'(x)$

$\cancel{z_3(x) = y''(x)}$

3. Schritt

$z_1'(x) = y'(x) \Rightarrow z_2$

$z_2'(x) = y''(x) \Rightarrow -\frac{x}{x^2} \cdot y' - \frac{(x^2 - n^2)}{x^2} \cdot y$

$\Rightarrow -\frac{1}{x} \cdot y' - \frac{(x^2 - n^2)}{x^2} \cdot y$

$\Rightarrow -\frac{1}{x} \cdot z_2 - \frac{(x^2 - n^2)}{x^2} \cdot z_1$

4. Schritt i vektoriell

$$z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{1}{x} \cdot z_2 - \frac{(x^2-n^2)}{x^2} \cdot z_1 \end{pmatrix} = f(x, z)$$

$$z_0 = z(1) = \begin{pmatrix} z_1(1) = y(1) \\ z_2(1) = y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lineares Gleichungssystem

$$A = \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{x^2-n^2}{x^2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$