Aufgabe 3, Serie 2

Trapezregel:

$$T_f = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Summierte Trapezregel

$$Tf(h) = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Intervall = $[a,b]$

n – Anzahl der Subintervalle

$x_i = a + ih$

$h = \frac{b-a}{n}$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \overbrace{\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{\substack{\text{Konstante} \\ h = \text{Schnittweite}}}}^{h} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \cdot h$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot h + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\cdot h + \dots$$

$$\dots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\cdot h = h\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)}{2} \dots \right.$$

$$\left. + \frac{+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})+f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \frac{2f(x_1)+2f(x_2)+\dots 2f(x_{n-1})}{2}\right) =$$

$$= h\cdot\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \frac{2(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n))}{2}\right) =$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots f(x_{n-1})\right)$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$f(x_0) = f(a) \Rightarrow$ Anfang vom Intervall

$f(x_n) = f(b) \Rightarrow$ Ende vom Intervall

$$\Rightarrow h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \Rightarrow Tf(h)$$

summierte Trapezregel

~~Aufgabe 4~~