

## Projet 10

---

# Problème de Riemann et discontinuités. Étude du tube à choc

### Fiche du projet

**Difficulté :** 3

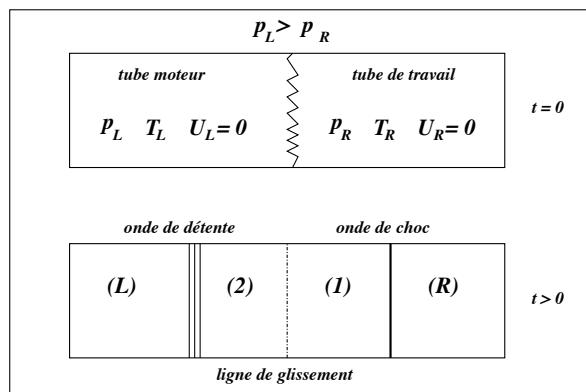
**Notions développées :** Système hyperbolique non-linéaire, équations d'Euler, schémas centrés : Lax-Wendroff, MacCormack ; schémas décentrés : Godunov, Roe

**Domaines d'application :** Tube à choc, écoulements supersoniques

## 10.1 PROBLÈME PHYSIQUE DU TUBE À CHOC

Le principe du tube à choc est le suivant : on considère un canal fermé à ses deux extrémités, contenant un gaz inerte qu'un diaphragme maintient dans des conditions thermodynamiques – pression, masse volumique et température – différentes (voir la figure 10.1). La rupture brutale du diaphragme provoque la formation immédiate d'une onde de discontinuité (onde de choc) qui se propage dans la section de basse pression. Ce dispositif, inventé en 1899 par Paul Vieille pour l'étude de déflagrations des charges explosives, constitue actuellement la soufflerie supersonique la plus éco-

nomique. Il sert à simuler les écoulements autour des projectiles, des avions supersoniques ou des navettes spatiales pendant la rentrée atmosphérique.



**Figure 10.1** Représentation schématique du tube à choc à l'instant initial ( $t = 0$ ) et des ondes qui se propagent dans le tube pour  $t > 0$ .

Considérons le tube à choc représenté schématiquement sur la figure 10.1. On appelle *tube moteur* la partie de plus grande pression ; dans notre cas, il s'agit de la partie gauche, caractérisée par la pression  $p_L$ , la masse volumique  $\rho_L$ , la température  $T_L$  et la vitesse initiale  $U_L = 0$ . La partie droite, décrite par les grandeurs  $p_R < p_L$ ,  $\rho_R$ ,  $T_R$  et  $U_R = 0$ , constitue le *tube de travail*. C'est dans cette partie qu'une éventuelle maquette d'avion sera placée.

A l'instant  $t = 0$  le diaphragme est rompu ; un processus d'égalisation des pressions s'établit alors. Le gaz à haute pression se détend par une onde de détente et s'écoule dans le tube de travail. Il crée une onde de choc dans le gaz à basse pression qui est comprimé. Le gaz détendu est séparé du gaz comprimé par une ligne de glissement, qui peut être assimilée à une membrane fictive qui se déplace avec une vitesse constante (voir la figure 10.1).

Les ondes de détente, de choc et les lignes de glissement se caractérisent par des discontinuités de certaines fonctions décrivant l'écoulement ( $p(x)$ , ou  $\rho(x)$ , ou  $T(x)$ , ou  $U(x)$ ).

## 10.2 SYSTÈME D'ÉQUATIONS D'EULER 1D

Pour décrire plus facilement les phénomènes physiques dans le tube à choc, on fait les hypothèses suivantes : le diaphragme s'ouvre instantanément et complètement ; le gaz est parfait ; on néglige les processus de diffusion moléculaire ; le tube est assez long pour ignorer les réflexions des ondes à ses extrémités.

Sous ces hypothèses, l'écoulement monodimensionnel (1D) qui s'établit dans le tube à choc est décrit par le système d'équations d'Euler [Bonnet et Luneau, 1989, Hirsh, 1988, LeVeque, 1992] :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ E \end{pmatrix}}_{W(x,t)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + p \\ (E + p)U \end{pmatrix}}_{F(W)} = 0, \quad (10.1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du gaz donnée par la loi d'état du gaz parfait

$$p = \rho \mathcal{R} T, \quad (10.2)$$

et  $E$  l'énergie totale

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2} U^2. \quad (10.3)$$

Les paramètres  $\gamma$  et  $\mathcal{R}$  sont deux constantes caractérisant le gaz parfait. Il est également utile de définir localement la vitesse du son  $a$ , le nombre de Mach ( $M$ ) et l'enthalpie totale ( $H$ ) :

$$a = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad M = \frac{U}{a}, \quad H = \frac{E + p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} U^2. \quad (10.4)$$

Si les inconnues du problème sont groupées dans le vecteur  $W = (\rho, \rho U, E)$ , le système d'EDP à résoudre devient (noter que la pression n'est pas une inconnue car elle s'exprime en fonction des composantes de  $W$  par la formule 10.3) :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) = 0, \quad (10.5)$$

avec la condition initiale (on note par  $x_0$  l'abscisse du diaphragme) :

$$W(x, 0) = \begin{cases} (\rho_L, \rho_L U_L, E_L), & x \leq x_0 \\ (\rho_R, \rho_R U_R, E_R), & x > x_0. \end{cases} \quad (10.6)$$

L'analyse mathématique du système d'EDP (10.5) considère sa forme *quasilinear* qui s'écrit (noter l'analogie avec l'équation de convection présentée dans le Projet 1 de cet ouvrage) :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (10.7)$$

avec la matrice jacobienne

$$A = \frac{\partial F}{\partial W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)U^2 & (3 - \gamma)U & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)U^3 - UH & H - (\gamma - 1)U^2 & \gamma U \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

Il est intéressant d'observer que la matrice  $A$  vérifie la relation remarquable suivante :

$$AW = F(W). \quad (10.9)$$

De plus, on peut facilement calculer ses valeurs propres :

$$\lambda^0 = U, \quad \lambda^+ = U + a, \quad \lambda^- = U - a, \quad (10.10)$$

et les vecteurs propres correspondants :

$$v^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ U \\ \frac{1}{2}U^2 \end{pmatrix}, \quad v^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ U+a \\ H+aU \end{pmatrix}, \quad v^- = \begin{pmatrix} 1 \\ U-a \\ H-aU \end{pmatrix}. \quad (10.11)$$

La matrice jacobienne  $A$  étant diagonalisable, avec des valeurs propres réelles, le système (10.7) est dit *hyperbolique*. Plus exactement, on peut décomposer  $A$  sous la forme :

$$A = P\Lambda P^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} U-a & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & U+a \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ U-a & U & U+a \\ H-aU & \frac{1}{2}U^2 & H+aU \end{pmatrix}. \quad (10.12)$$

On vérifiera que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \frac{U}{a}) & -\frac{1}{2}(\alpha_2 U + \frac{1}{a}) & \frac{\alpha_2}{2} \\ 1 - \alpha_1 & \alpha_2 U & -\alpha_2 \\ \frac{1}{2}(\alpha_1 - \frac{U}{a}) & -\frac{1}{2}(\alpha_2 U - \frac{1}{a}) & \frac{\alpha_2}{2} \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \frac{\gamma-1}{2} \frac{U^2}{a^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma-1}{a^2}. \quad (10.13)$$

Une propriété intéressante des systèmes hyperboliques (pour une analyse plus rigoureuse des systèmes hyperboliques, voir [Godlewski et Raviart, 1996]) est l'existence des courbes *caractéristiques* le long desquelles des variables particulières, appelées *invariants*, sont constantes. Cette manière particulière de propagation de l'information est très importante d'un point de vue pratique, car elle permet de calculer la solution en tout point  $P$  du plan  $(x, t)$  en réunissant les informations (invariants) apportées au point  $P$  par les caractéristiques venant de régions où la solution est déjà calculée.

De manière générale, l'équation décrivant une caractéristique est  $dx/dt = \lambda$ , avec  $\lambda$  valeur propre de la matrice jacobienne. L'invariant  $r$  correspondant étant constant le long de la caractéristique, il doit vérifier :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial r}{\partial t} + \lambda \frac{\partial r}{\partial x} = 0. \quad (10.14)$$

Pour l'équation de convection (voir le Projet 1)  $\partial u/\partial t + c \partial u/\partial x = 0$ , avec  $c = \text{const}$ , la seule caractéristique est la droite  $x = ct$  et l'invariant est la solution même,  $r = u$ . Dans le cas du système (10.7), il existe trois caractéristiques distinctes :

$$C^0 : \frac{dx}{dt} = U, \quad C^+ : \frac{dx}{dt} = U + a, \quad C^- : \frac{dx}{dt} = U - a, \quad (10.15)$$

avec les invariants correspondants (dans le cas d'un fluide d'entropie constante, ou *isentropique*<sup>1</sup>) :

$$r^0 = p/\rho^\gamma, \quad r^+ = U + \frac{2a}{\gamma - 1}, \quad r^- = U - \frac{2a}{\gamma - 1}. \quad (10.16)$$

Cette analyse en caractéristiques sera utilisée pour le calcul de la solution exacte du tube à choc.

**Définition 10.1** Le système d'EDP (10.5) – non-linéaire, hyperbolique – avec la condition initiale (10.6) – discontinue et constante par morceaux – constitue un problème de Riemann.

### 10.2.1 Adimensionnement des équations

Pour les applications numériques, il est convenable de travailler avec des grandeurs sans dimension (les erreurs d'arrondis sont réduites). Par conséquent, les grandeurs physiques intervenant dans les équations précédentes seront écrites sous la forme (l'état de référence est choisi en fonction des paramètres du tube de travail) :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^* \cdot \rho_R, & U &= U^* \cdot a_R, & a &= a^* \cdot a_R, & T &= T^* \cdot (\gamma T_R), \\ t &= t^* \cdot t_0, & x &= x^* \cdot (a_R t_0), & p &= p^* \cdot (\rho_R a_R^2) = p^* \cdot (\gamma \rho_R), & E &= E^* \cdot (\rho_R a_R^2). \end{aligned} \quad (10.17)$$

Les équations pour les variables sans dimension s'écrivent sous la même forme que précédemment :

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \underbrace{\begin{pmatrix} \rho^* \\ \rho^* U^* \\ E^* \end{pmatrix}}_{W^*(x^*, t^*)} + \frac{\partial}{\partial x^*} \underbrace{\begin{pmatrix} \rho^* U^* \\ \rho^* U^{*2} + p^* \\ (E^* + p^*) U^* \end{pmatrix}}_{F^*(W^*)} = 0, \quad (10.18)$$

avec l'équation d'état

$$p^* = \rho^* T^*, \quad (10.19)$$

et l'énergie totale

$$E^* = \frac{p^*}{\gamma - 1} + \frac{\rho^*}{2} U^{*2}. \quad (10.20)$$

La définition de la vitesse du son devient :

$$a^* = \sqrt{\gamma \frac{p^*}{\rho^*}} = \sqrt{\gamma T^*}, \quad (10.21)$$

et l'enthalpie totale :

$$H^* = \frac{H}{a_R^2} = \frac{(a^*)^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} U^{*2}. \quad (10.22)$$

1. Dans le cas général, les invariants sont données sous forme différentielle

$$dr^0 = dp - a^2 d\rho = 0, \quad dr^+ = dp + \rho a dU = 0, \quad dr^- = dp - \rho a dU = 0$$

et doivent être intégrés le long des caractéristiques correspondantes (voir la bibliographie complémentaire).

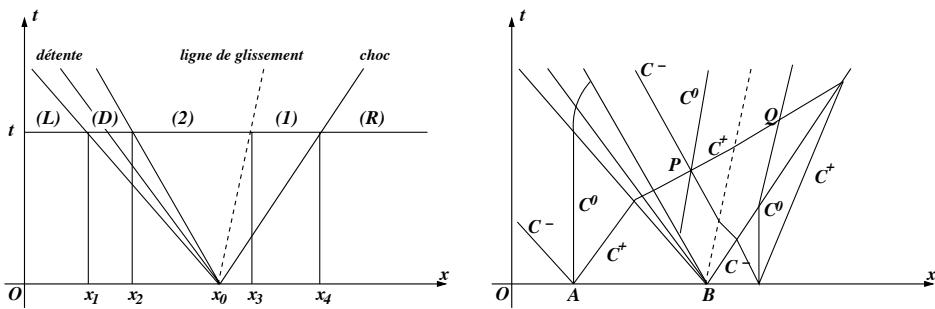
Pour simplifier la notation, les étoiles seront ignorées par la suite ; toutes les variables s'entendent sans dimension.

### 10.2.2 Solution exacte

Le problème du tube à choc comporte une solution exacte, obtenue par l'analyse des ondes (choc, détente, ligne de glissement) qui se propagent dans le dispositif (voir la figure 10.1). Dans le plan  $(x, t)$ , les trois ondes qui font le passage de (R) à (L) séparent deux zones intermédiaires, notées par les indices 1 et 2 (figure 10.2).

**Remarque 10.1 :** L'analyse des caractéristiques effectuée précédemment montre que la solution exacte  $W(x, t)$  ne dépend en fait que d'une seule variable :  $x/t$ .

Sans insister sur la signification physique des relations de saut à travers ces ondes (pour plus de détails, voir les ouvrages spécialisés mentionnés à la fin du projet), nous présentons seulement les étapes de construction de la solution exacte.



**Figure 10.2** Représentation dans le plan  $(x, t)$  des ondes qui se propagent dans le tube à choc et des caractéristiques correspondantes.

1. Les données du problème sont les paramètres (grandeurs sans dimension !) des zones (R) et (L) :

$$\text{Zone (R)} \quad \rho_R = 1, \quad p_R = 1/\gamma, \quad T_R = 1/\gamma, \quad U_R = 0 \quad (10.23)$$

$$\text{Zone (L)} \quad \rho_L, \quad p_L, \quad T_L, \quad U_L = 0 \quad (10.24)$$

2. Le passage de la zone (R) à la zone (1) se fait par une onde de choc instationnaire, de vitesse constante. Il faut déterminer le nombre de Mach du choc ( $M_s = U_s/a_R$ ), solution de l'équation suivante (appelée relation de compatibilité) :

$$M_s - \frac{1}{M_s} = a_L \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left\{ 1 - \left[ \frac{p_R}{p_L} \left( \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_s^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \right]^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \right\}. \quad (10.25)$$

3. Les paramètres de la zone (1) sont constants et donnés par les relations de saut de Rankine-Hugoniot à travers le choc :

$$\frac{p_1}{p_R} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_s^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (10.26)$$

$$\frac{\rho_R}{\rho_1} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_s^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (10.27)$$

$$U_1 = \frac{2}{\gamma+1} \left( M_s - \frac{1}{M_s} \right). \quad (10.28)$$

On peut également calculer  $T_1 = p_1/\rho_1$  et  $a_1 = \sqrt{\gamma T_1}$ .

4. Le passage à travers la ligne de glissement est caractérisé par une discontinuité de masse volumique seulement, la vitesse et la pression étant conservées. Par conséquent :

$$U_2 = U_1, \quad p_2 = p_1. \quad (10.29)$$

5. Les paramètres de la zone (2) peuvent être reliés aux paramètres de la zone (L) en utilisant les caractéristiques représentées sur la figure 10.2. En prenant les caractéristiques  $C^0$  et  $C^+$  passant par le point  $P$ , on obtient (voir les relations 10.15)

$$\rho_2 = \rho_L \left( \frac{p_2}{p_L} \right)^{1/\gamma}, \quad a_2 = a_L - \frac{\gamma-1}{2} U_2. \quad (10.30)$$

**Remarque 10.2 :** Noter que la relation de compatibilité (10.25) a été obtenue en combinant les formules (10.30), (10.29), (10.28) et (10.26).

Il reste à déterminer l'étendue de chaque zone (abscisses  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sur la figure 10.2) pour un temps  $t$  donné.

- Le faisceau de détente (D) est délimité à gauche par la caractéristique  $C^-$  partant du point  $B$ , considéré comme appartenant à la zone (L) et à droite par la caractéristique  $C^-$  partant du même point  $B$ , mais qui appartient cette fois à la zone (2). On peut donc écrire que :

$$x_1 = x_0 - a_L t, \quad x_2 = x_0 + (U_2 - a_2)t. \quad (10.31)$$

À l'intérieur du faisceau de détente ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ) les paramètres thermodynamiques ne sont plus constants. Un point à l'intérieur de la zone (D) est placé sur une caractéristique  $C^-$  partant de  $B$ , donc  $(x - x_0)/t = U - a$ . En utilisant de nouveau une caractéristique  $C^+$  venant de (L), on peut écrire que  $a + (\gamma - 1)U/2 = a_L$  et, finalement, la solution exacte dans la zone (D) :

$$U = \frac{2}{\gamma+1} \left( a_L + \frac{x - x_0}{t} \right), \quad a = \frac{2}{\gamma+1} \left( a_L - \frac{\gamma-1}{2} \frac{x - x_0}{t} \right), \quad p = p_L \left( \frac{a}{a_L} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (10.32)$$

- La ligne de glissement se propage avec la vitesse constante  $U_2 = U_1$ , donc :

$$x_3 = x_0 + U_2 t. \quad (10.33)$$

- Le choc se déplace aussi à vitesse constante  $U_s = M_s a_R$ , donc, en variables sans dimension :

$$x_4 = x_0 + M_s t. \quad (10.34)$$

### Exercice 10.1

Écrire un fonction qui calcule la solution exacte pour le tube à choc :

```
function uex=tchoc_exact(x,x0,t)
% Arguments d'entrée :
%      x      points de discrétisation (vecteur de dimension
n)
%      x0     position initiale de la membrane
%      t      le temps pour lequel la solution exacte est
calculée
% Argument de sortie :
%      uex    le vecteur de dimension (3,n) contenant la so-
lution exacte
%      uex(1,1:n)  la masse volumique ρ
%      uex(2,1:n)  la vitesse U
%      uex(3,1:n)  la pression p
```

Tracer la solution exacte pour  $x \in [0, 1]$ ,  $n = 81$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $t = 0.2$ . Les paramètres physiques (tube à choc de Sod) :  $\gamma = 1.4$ ,  $\rho_L = 8$ ,  $p_L = 10/\gamma$  seront définis comme variables globales.

La solution exacte est représentée sur la figure 10.3. Elle est obtenue avec les programmes décrits dans le paragraphe 10.4 (page 227).

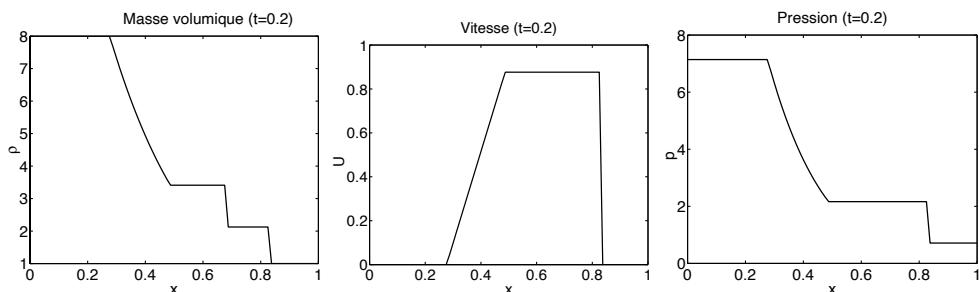


Figure 10.3 Solution exacte du tube à choc de Sod pour  $t = 0.2$ .

## 10.3 RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

Le système d'Euler (10.18) peut être résolu numériquement en utilisant les méthodes de discrétisation *élémentaires* (voir le Projet 1 pour quelques exemples). En particulier, on peut appliquer une méthode d'Euler (ou de Runge-Kutta) pour l'intégration en temps et des schémas aux différences finies centrées pour la discrétisation spatiale. Nous allons voir cependant que ces méthodes ne sont pas adaptées à la *capture* des discontinuités présentes dans la solution car elles génèrent des oscillations numériques. Ce comportement sera illustré en présentant les schémas centrés de Lax-Wendroff et de MacCormack. Nous donnerons ensuite un exemple de schéma décentré (le schéma de Roe), qui prend en compte le caractère hyperbolique du système d'Euler et permet une meilleure résolution numérique.

### 10.3.1 Schémas centrés (Lax-Wendroff et MacCormack)

Historiquement, les premiers schémas utilisés pour la résolution des systèmes hyperboliques ont été les schémas centrés de Lax-Wendroff et MacCormack. Ils sont encore utilisés dans certains codes industriels. Considérons d'abord le système (10.18) écrit sous la forme

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) = 0, \quad (10.35)$$

et la discrétisation habituelle du domaine de définition  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$  :

– en espace

$$x_j = (j - 1)\delta x, \quad \delta x = \frac{1}{N_x - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_x \quad (10.36)$$

– et en temps

$$t^n = (n - 1)\delta t, \quad \delta t = \frac{T}{N_t - 1}, \quad n = 1, 2, \dots, N_t. \quad (10.37)$$

La solution numérique  $W_j^{n+1}$  (pour l'instant  $t_{n+1}$  et la position  $x_j$ ) sera calculée en deux pas, un pas de prédiction et un pas de correction, précisés sur la figure 10.4.

Quelques remarques sur ces deux schémas :

1. Les deux schémas sont explicites. Les deux pas de calcul sont représentés schématiquement sur la figure 10.4 pour chaque méthode. Observons que les schémas permettent de calculer seulement les composantes  $j = 2, \dots, (n - 1)$  de la solution. Pour les composantes  $j = 1$  et  $j = n$  des conditions aux limites doivent être prescrites. Selon l'hypothèse du tube infini, on va imposer  $W_1^n = W_L$  et  $W_n^n = W_R$  pour chaque instant de temps  $t_n$ , ce qui revient pratiquement de garder constantes la première et la dernière composante du vecteur solution.

2. Le schéma de Lax-Wendroff estime dans le pas de prédiction la solution aux interfaces  $(j + 1/2)$  et  $(j - 1/2)$  en utilisant des différences décentrées en avant pour la dérivée spatiale. Ces valeurs sont utilisées dans le pas de correction pour la discrétisation de la dérivée spatiale avec des différences centrées.

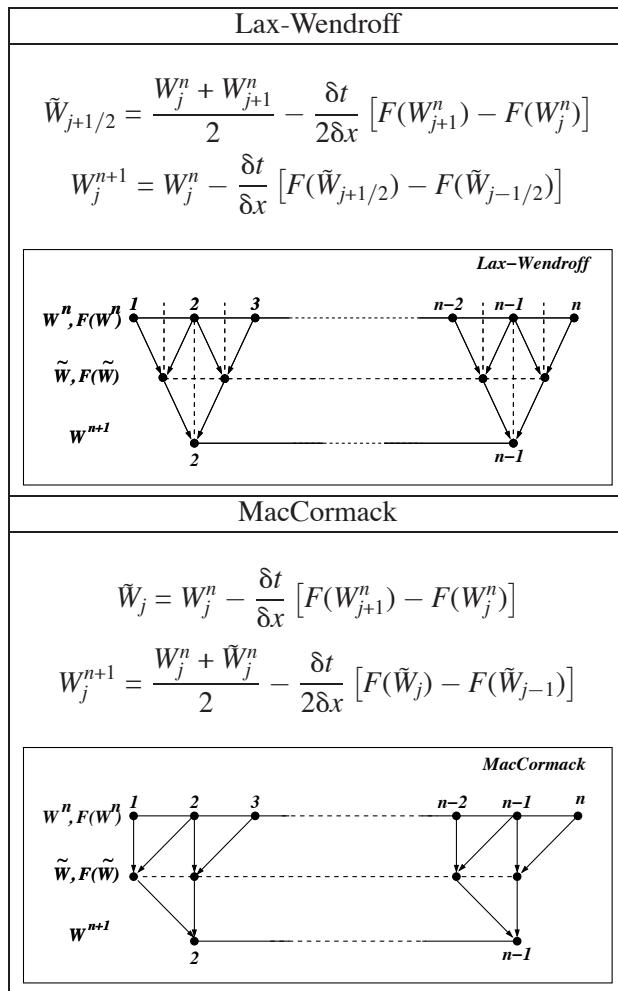


Figure 10.4 Schémas centrés de Lax-Wendroff et MacCormack.  
Rapésentation schématique du calcul de la solution.

3. Le schéma de MacCormack est basé sur un développement de Taylor ; il construit la solution suivant la relation

$$W_j^{n+1} = W_j^n + \left( \frac{\overline{\partial W}}{\partial t} \right)_j \delta t, \quad (10.38)$$

où

$$\left( \frac{\overline{\partial W}}{\partial t} \right)_j = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_j^n + \left( \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} \right)_j \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\tilde{W}_j - W_j^n}{\delta t} - \frac{F(\tilde{W}_j) - F(\tilde{W}_{j-1})}{\delta x} \right] \quad (10.39)$$

est une approximation de la dérivée première en temps.

Observons que des différences décentrées alternées (avant-arrière) sont utilisées dans les deux pas du schéma pour approcher la dérivée spatiale.

4. Les deux schémas utilisent trois points de calcul ( $j - 1, j, j + 1$ ) pour atteindre une précision à l'ordre deux en temps et en espace.

5. L'information est cherchée de deux cotés du point de calcul  $j$  sans tenir compte de sa propagation par les caractéristiques. Par analogie avec l'équation de convection (voir le Projet 1), on peut dériver une condition de stabilité (ou condition CFL) qui s'écrit de manière générale

$$\max\{|\lambda|\} \cdot \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1,$$

avec  $\lambda$  valeur propre de la matrice jacobienne  $\partial F / \partial W$ , interprétée ici comme la vitesse de propagation de l'onde caractéristique associée ( $dx/dt = \lambda$ ). Suivant (10.15), on obtient comme condition de stabilité :

$$(|U| + a) \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1. \quad (10.40)$$

En pratique, cette condition sera utilisée pour le calcul du pas de temps sous la forme

$$\delta t = cfl \cdot \frac{\delta x}{|U| + a}, \quad \text{avec} \quad cfl < 1. \quad (10.41)$$

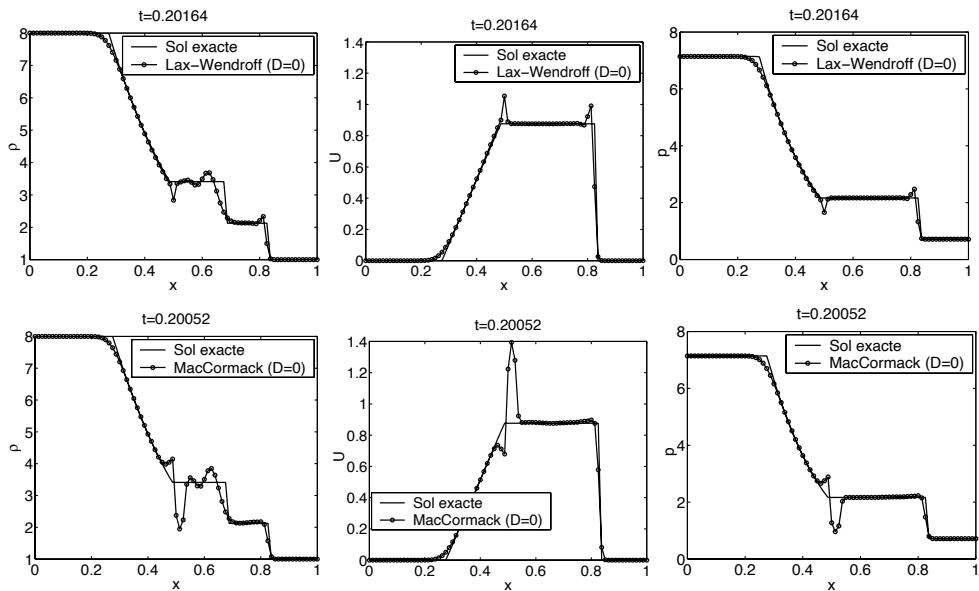
## Exercice 10.2

Reprendre l'exercice précédent (même paramètres physiques et numériques) en calculant la solution numérique à  $t = 0.2$  par les schémas de Lax-Wendroff et MacCormack. Comparer les résultats avec la solution exacte. Commenter.

Indications :

- le pas de temps sera calculé dans une fonction  
`function dt = calc_dt(w, dx, cfl)` On prendra  $cfl = 0.95$ .
- utiliser une fonction pour le calcul du vecteur  $F(W)$  :  
`function f = flux_centre(w)`
- suivre la figure 10.4 pour mettre en œuvre les différents calculs (les boucles for peuvent être évitées) ;
- à la fin du calcul, représenter  $(\rho, U, p)$ , en superposant la solution numérique et la solution exacte.

Les résultats obtenus avec les deux schémas centrés sont présentés sur la figure 10.5. La solution numérique développe des oscillations au voisinage des discontinuités, en particulier au voisinage du choc. L'amplitude des oscillations est plus importante pour le schéma de MacCormack. Le programme qui utilise ce schéma est décrit dans le paragraphe 10.4 (page 227).



**Figure 10.5** Résultats pour le tube à choc de Sod. Calcul avec le schéma de Lax-Wendroff (en haut) et le schéma de MacCormack (en bas).

### Dissipation artificielle

La solution numérique obtenue par les schémas centrés présente des oscillations au voisinage des discontinuités. Ces oscillations peuvent être réduites en ajoutant à l'équation initiale (10.35) un terme de dissipation :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) - \delta x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( D(x) \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0. \quad (10.42)$$

Le terme de dissipation étant proportionnel au gradient  $\partial W / \partial x$ , il aura une influence négligeable dans les régions de faible variation de la solution et un effet bien connu de lissage des gradients et d'amortissement des oscillations au niveau des discontinuités (voir l'analyse de l'équation de la chaleur dans le Projet 1).

Les coefficient  $D(x)$ , également appelé *viscosité artificielle*, doit être positif pour avoir une action stabilisante sur la solution. Plusieurs techniques ont été développées pour prescrire la forme de  $D(x)$  et corriger la solution  $W^{n+1}$  en tenant compte de la dissipation artificielle (voir la bibliographie complémentaire). Nous présentons ici la technique la plus simple qui consiste à prendre  $D(x) = D = \text{const}$  et à résoudre par les schémas centrés l'équation (10.42) écrite sous la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F^*(W) = 0, \quad \text{avec} \quad F^*(W) = F(W) - D \delta x^2 \frac{\partial W}{\partial x}. \quad (10.43)$$

Pour respecter le principe des schémas de Lax-Wendroff et MacCormack (voir figure 10.4), le nouveau vecteur  $F^*(W)$  sera discrétisé différemment dans les deux pas :

- pas de prédiction (différences décentrées en arrière)

$$F^*(W_j) = F(W_j) - (D\delta x)(W_j - W_{j-1}) \quad (10.44)$$

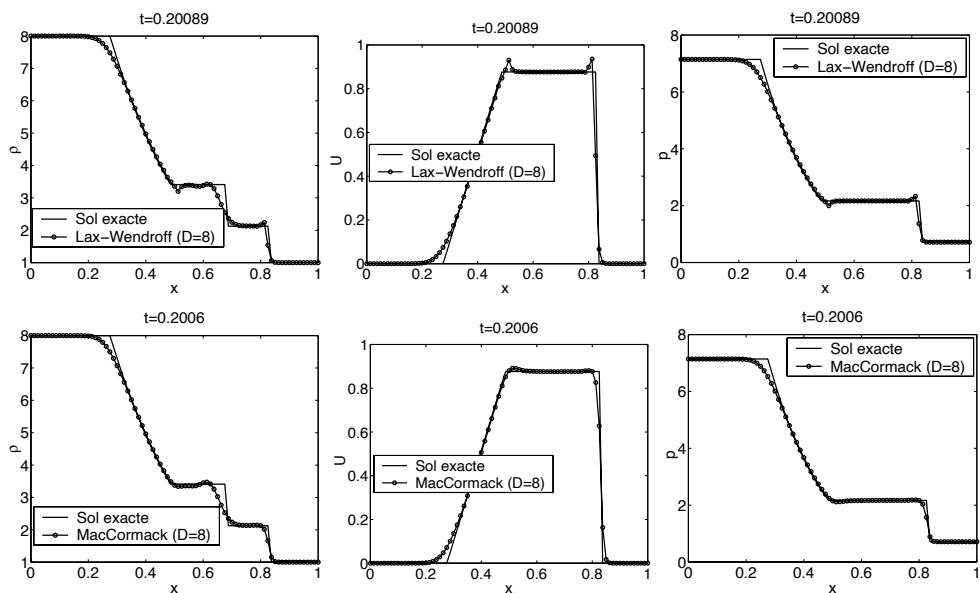
- pas de correction (différences décentrées en avant)

$$F^*(\tilde{W}_j) = F(\tilde{W}_j) - (D\delta x)(\tilde{W}_{j+1} - \tilde{W}_j). \quad (10.45)$$

### Exercice 10.3

Ajouter la dissipation artificielle dans les schémas de Lax-Wendroff et MacCormack suivant les équations (10.44)-(10.45). Observer l'influence sur la solution du coefficient de viscosité artificielle  $D$ . On prendra  $0 \leq D \leq 10$ . Que peut-on dire sur le calcul du pas de temps ?

Les résultats (figure 10.6) montrent que la dissipation artificielle permet de réduire les oscillations, mais cette technique n'apporte pas une solution réelle au problème. Plus la viscosité artificielle est augmentée, plus la solution est détériorée au niveau des autres discontinuités. En particulier, le saut de masse volumique ( $\rho$ ) caractérisant la ligne de glissement est totalement lissé par la viscosité artificielle. Des techniques plus sophistiquées utilisent une dissipation artificielle sélective, suivant les composantes du vecteur solution (voir la bibliographie complémentaire).



**Figure 10.6** Résultats pour le tube à choc de Sod. Calcul avec le schéma de Lax-Wendroff (en haut) et le schéma de MacCormack (en bas) avec un terme de dissipation artificielle.

### 10.3.2 Schémas décentrés (Roe)

L'origine des oscillations numériques générées par les schémas centrés vient du fait que ces schémas ignorent le caractère hyperbolique de l'écoulement, c'est-à-dire la propagation de l'information par les caractéristiques. Ces informations essentielles sont prises en compte dans la construction des schémas décentrés.

**Définition 10.2** Un schéma est dit décentré (upwind en anglais) s'il utilise une discrétisation qui dépend de la direction de propagation de l'onde physique ou du signe de la vitesse de convection des caractéristiques.

On peut distinguer deux types de schémas décentrés :

1. les schémas de type décomposition du flux (*flux splitting* en anglais) : le flux  $F(W)$  est discrétisé différemment, suivant le signe de la vitesse de propagation des ondes caractéristiques, autrement dit, le schéma utilise seulement l'information sur le signe des valeurs propres de la matrice jacobienne (10.8) du système.
2. les schémas de type Godunov : des propriétés dérivées de la solution exacte du système d'Euler sont directement introduites dans la discrétisation.

Nous présentons dans la suite un exemple de schéma de Godunov, le schéma de Roe.

#### a) Schémas de type Godunov

Dans les schémas de type Godunov la variable  $W$  est considérée constante sur chaque *cellule*  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  et l'évolution de la solution en temps est calculée par la résolution exacte du problème de Riemann à l'interface des intervalles élémentaires.

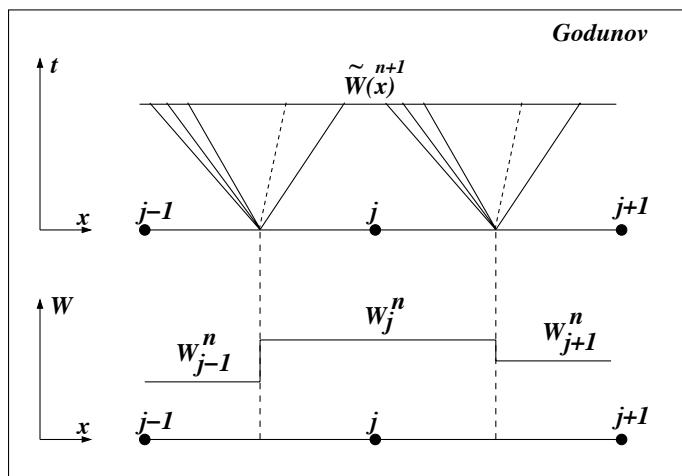


Figure 10.7 Calcul de la solution par le schéma de type Godunov.

Les étapes de construction de la solution numérique sont (voir la figure 10.7) :

*Étape 1.* Construction de la fonction constante par morceaux

$$W^n(x) = W_j^n, \quad x \in ](j - 1/2)\delta x, (j + 1/2)\delta x[ \quad (10.46)$$

*Étape 2.* Calcul de la solution  $\tilde{W}^{n+1}(x)$  en résolvant exactement les problèmes de Riemann aux interfaces  $(j - 1/2)$  et  $(j + 1/2)$ . Cette étape impose une restriction sur le pas de temps sous la forme

$$\max_j (|U| + a)_{j+1/2}^n \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1/2, \quad (10.47)$$

qui interdit aux ondes issues des interfaces voisines de se toucher.

*Étape 3.* La solution  $W^{n+1}$ , constante par morceaux, est obtenue en calculant la moyenne sur chaque cellule :

$$W_j^{n+1} = \frac{1}{\delta x} \int_{(j-1/2)\delta x}^{(j+1/2)\delta x} \tilde{W}^{n+1}(x) dx. \quad (10.48)$$

On peut montrer que le schéma de Godunov peut s'écrire sous la forme suivante, dite *conservative* :

$$\frac{W_j^{n+1} - W_j^n}{\delta t} + \frac{\Phi(W_j^n, W_{j+1}^n) - \Phi(W_j^n, W_{j-1}^n)}{\delta x} = 0, \quad (10.49)$$

avec le vecteur *flux* défini de manière générale par

$$\Phi(W_j^n, W_{j+1}^n) = F(\tilde{W}_{j+1/2}^{n+1}). \quad (10.50)$$

L'avantage de la forme conservative est d'être valable sur tout le domaine de définition, même en présence de discontinuités. La forme exacte du vecteur flux sera précisée pour le schéma de Roe.

### b) Schéma de Roe

Parmi les schémas de type Godunov, le schéma de Roe a gagné une grande popularité grâce à sa simplicité et à son ingéniosité. L'idée du schéma est de résoudre à l'interface  $j + 1/2$  un problème de Riemann linéaire (10.7), écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + A_{j+1/2} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} = 0, \quad \text{avec} \quad \tilde{W}(x, n\delta t) = \begin{cases} W_j^n, & x \leq (j + 1/2)\delta x \\ W_{j+1}^n, & x > (j + 1/2)\delta x \end{cases} \quad (10.51)$$

La difficulté de cette approche est de définir la matrice  $A_{j+1/2}$  qui dépend de  $W_j^n$  et  $W_{j+1}^n$ . De manière générale, elle doit satisfaire aux conditions suivantes :

1. Le caractère hyperbolique du système doit être gardé, donc  $A_{j+1/2}$  va s'écrire sous la forme (voir la décomposition 10.12)

$$A_{j+1/2} = P_{j+1/2} \Lambda_{j+1/2} P_{j+1/2}^{-1} \quad (10.52)$$

Afin de tenir compte du signe de la vitesse de propagation des ondes caractéristiques, il est utile de définir les matrices :

- $\text{sign}(A_{j+1/2}) = P_{j+1/2}(\text{sign}(\Lambda))P_{j+1/2}^{-1}$ , où  $\text{sign}(\Lambda)$  est la matrice diagonale, dont la diagonale est formée des signes des valeurs propres  $\lambda_l$  :  $\text{sign}(\Lambda) = \text{diag}(\text{sign}\lambda_l)$ .
- $|A_{j+1/2}| = P_{j+1/2}|\Lambda|P_{j+1/2}^{-1}$ , avec  $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_l|)$ .

2. La forme linéaire du problème de Riemann doit être consistante avec le problème initial : pour tout  $u$ , on a

$$A_{j+1/2}(u, u) = A(u, u). \quad (10.53)$$

3. Le schéma doit être *conservatif* : pour tous  $u$  et  $v$ , on a

$$F(u) - F(v) = A_{j+1/2}(u, v)(u - v). \quad (10.54)$$

Une fois la matrice  $A_{j+1/2}$  définie, le schéma de Roe peut s'écrire sous la forme conservative (10.49), avec le flux numérique défini par :

$$\Phi(W_j^n, W_{j+1}^n) = \frac{1}{2} \{ F(W_j^n) + F(W_{j+1}^n) - (\text{sign}(A_{j+1/2})) [F(W_{j+1}^n) - F(W_j^n)] \}, \quad (10.55)$$

ou, si on tient compte de (10.54)

$$\Phi(W_j^n, W_{j+1}^n) = \frac{1}{2} \{ F(W_j^n) + F(W_{j+1}^n) - |A|_{j+1/2} [W_{j+1}^n - W_j^n] \}. \quad (10.56)$$

Suivant (10.49), le schéma de Roe s'écrit simplement :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\delta t}{\delta x} [\Phi(W_j^n, W_{j+1}^n) - \Phi(W_j^n, W_{j-1}^n)]. \quad (10.57)$$

Pour le calcul de la matrice  $A_{j+1/2}$ , l'idée originale de Roe a été d'exprimer les vecteurs  $W$  et  $F(W)$  de l'équation (10.18) comme des formes quadratiques des composantes du vecteur  $Z = \sqrt{\rho}(1, U, H)$  :

$$W = \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ \frac{1}{\gamma} z_1 z_3 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} z_2^2 \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} z_1 z_3 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} z_2^2 \\ z_2 z_3 \end{pmatrix}, \quad (10.58)$$

et d'appliquer la relation générale, valable pour deux formes quadratiques  $f, g$  quelconques :

$$(fg)_{j+1} - (fg)_j = \bar{f}(g_{j+1} - g_j) + \bar{g}(f_{j+1} - f_j), \quad \text{avec} \quad \bar{f} = \frac{f_{j+1} + f_j}{2}.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} W_{j+1} - W_j \\ F(W_{j+1}) - F(W_j) \end{cases} = \begin{pmatrix} \bar{B}(Z_{j+1} - Z_j) \\ \bar{C}(Z_{j+1} - Z_j) \end{pmatrix} \implies F(W_{j+1}) - F(W_j) = (\bar{C} \bar{B}^{-1})(W_{j+1} - W_j), \quad (10.59)$$

cette dernière relation correspondant exactement à la condition (10.54). La matrice cherchée sera donnée par :

$$A_{j+1/2} = (\bar{C} \bar{B})^{-1}. \quad (10.60)$$

Une propriété remarquable de cette matrice (facile à vérifier par calcul direct) est qu'elle peut être calculée à partir de la forme (10.8) en remplaçant les variables ( $\rho, U, H$ ) par leurs *moyennes de Roe* :

$$\bar{\rho}_{j+1/2} = R_{j+1/2} \rho_j, \quad \bar{U}_{j+1/2} = \frac{R_{j+1/2} U_{j+1} + U_j}{1 + R_{j+1/2}}, \quad \bar{H}_{j+1/2} = \frac{R_{j+1/2} H_{j+1} + H_j}{1 + R_{j+1/2}}, \quad (10.61)$$

$$\bar{a}_{j+1/2}^2 = (\gamma - 1) \left( \bar{H}_{j+1/2} - \frac{\bar{U}_{j+1/2}^2}{2} \right), \quad \text{avec} \quad R_{j+1/2} = \sqrt{\frac{\rho_{j+1}}{\rho_j}}.$$

Les formules des vecteurs et valeurs propres (10.10), (10.11) s'appliquent également pour la matrice  $A_{j+1/2}$  en prenant les moyennes de Roe (10.61). Ces relations remarquables simplifient considérablement le calcul des flux numériques dans (10.56), ce qui a fait le succès du schéma.

**Remarque 10.3 :** Le schéma de Roe est d'ordre un en temps et en espace.

## Exercice 10.4

Résoudre le problème du tube à choc en appliquant le schéma de Roe (10.57). Comparer avec les résultats obtenus avec les schémas centrés.

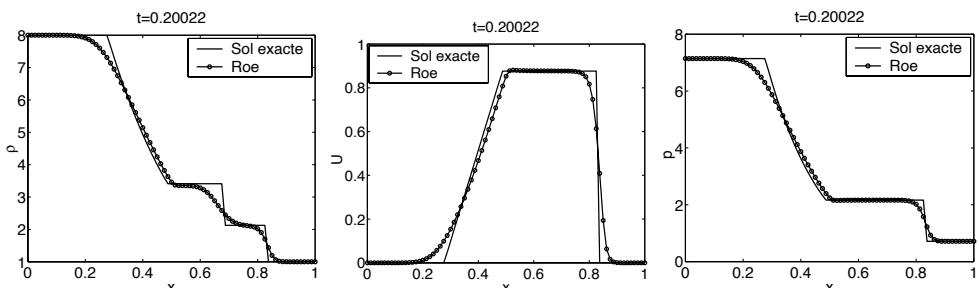


Figure 10.8 Résultats pour le tube à choc de Sod. Calcul avec le schéma de Roe.

Les résultats numériques obtenus (voir la figure 10.8) montrent que le schéma de Roe permet de bien capturer les chocs, mais il s'avère très dissipatif au niveau des autres types de discontinuités (onde de détente et ligne de glissement). Des méthodes plus performantes peuvent être développées dans le cadre des schémas de type Godunov en augmentant la précision en espace. Par exemple, on pourrait utiliser des fonctions linéaires par morceaux pour approcher la solution dans les étapes 1 et 3 du

schéma de Godunov et obtenir des schémas à l'ordre deux. Les schémas utilisés actuellement pour résoudre le système d'Euler incluent plus d'informations physiques dans leur structure (conservation d'entropie, conservativité, etc.) afin de mieux résoudre les discontinuités. La description de ces schémas dépasse le cadre de cette présentation *introductive* ; le lecteur intéressé est dirigé vers les ouvrages spécialisés mentionnés dans la bibliographie [Fletcher, 1991, Hirsh, 1988, LeVeque, 1992, Saad, 1998].

## 10.4 SOLUTIONS ET PROGRAMMES

Commençons par présenter le script MATLAB *tchoc\_ex.m* contenant la fonction qui calcule la solution exacte pour un temps  $t$  donné. La relation de compatibilité (10.25) est implémentée sous forme de fonction dans le script *mach\_choc.m*. Cette dernière fonction sera utilisée comme argument d'entrée dans la commande MATLAB *fzero* pour calculer la racine  $M_s$  de la relation de compatibilité. La solution exacte qui contient les valeurs de  $(\rho, U, p)$  est ensuite calculée suivant les relations mathématiques exposées. Remarquons juste l'utilisation de la commande MATLAB *find* pour séparer les différentes zones de l'écoulement.

Le programme principal pour le projet entier est dans le fichier *tchoc.m*. Après la définition des variables globales (qui sont essentiellement les paramètres des zones (R) et (L)) et la discrétisation du domaine spatial, la solution est initialisée avec les données du tube à choc de Sod. Les calculs utilisent trois vecteurs principaux :

- *usol* pour la solution finale  $(\rho, U, p)$  ;
- *w* pour la variable  $W = (\rho, \rho U, E)$  ;
- *F* pour la variable  $F(W)$ , calculée à partir de *W*.

Le programme permet de choisir parmi les trois schémas implémentés ; quand un schéma centré est sélectionné, le coefficient de viscosité artificielle doit être introduit à la console. La solution numérique est tracée sur les mêmes graphiques que la solution exacte en utilisant la fonction *plot\_graph* qui se trouve dans le fichier *plot\_graph.m* .

Les principales fonctions utilisées par le programme principal sont les suivantes (elles ont été écrites dans un souci de lisibilité du programme par rapport aux formules mathématiques) :

- *trans\_usol\_w.FF* : calcul de  $W = (\rho, \rho U, E)$  à partir de *usol*  $= (\rho, U, p)$  ;
- *trans\_w\_usol.FF* : calcul de *usol*  $= (\rho, U, p)$  à partir de  $W = (\rho, \rho U, E)$  ;
- *trans\_w\_f.FF* : calcul de  $F = (\rho U, \rho U^2 + p, (E + p)U)$  à partir de  $W = (\rho, \rho U, E)$  ;
- *calc\_dt.FF* : calcul de  $\delta t = cfl \cdot \delta x / (|U| + a)$  à partir de  $W = (\rho, \rho U, E)$ .

Revenons maintenant à la programmation des schémas numériques. Les capacités de calcul vectoriel de MATLAB ont été exploitées pour la plupart des calculs.

Ce type d'écriture compacte permet de faire plus facilement l'analogie entre les lignes de programme et les relations analytiques. Par exemple, pour le schéma de MacCormack, on utilise comme guide pour la programmation la figure 10.4. Le vecteur  $F(W)$  sera calculé pour tous les points  $j = 1, \dots, n$ , tandis que la solution intermédiaire  $\tilde{W}$  est évaluée seulement aux points  $j = 1, \dots, n - 1$ . On peut éviter les boucles `for` pour ce calcul en écrivant

```
wtilde=0.5*(w(:,1:n-1)+w(:,2:n))-0.5*dt/dx*(F(:,2:n)-F(:,1:n-1));
```

ce qui est en fait l'équivalent du pas de prédiction (voir la figure 10.4), effectué pour tous les  $j = 1, \dots, n - 1$ . La même technique est utilisée pour le pas de correction, le vecteur solution  $W^{n+1}$  ayant seulement les composantes  $j = 2, \dots, n - 1$  calculées par le schéma numérique.

La dissipation artificielle est introduite en utilisant les relations (10.44) et (10.45) sous forme vectorielle ; la commande MATLAB `diff` est utilisée pour calculer les différences  $W_{j+1} - W_j$ . Suivant les hypothèses sur les conditions aux limites, le vecteur contenant le terme de dissipation est complété par des zéros pour  $j = 1$  (pas de prédiction) et, respectivement,  $j = n - 1$  (pas de correction).

Une attention particulière a été accordée au schéma de Roe qui nécessite un calcul plus laborieux du flux numérique  $\Phi$ . Ce calcul est effectué dans la fonction `flux_roe.m`. Afin de réduire l'encombrement mémoire, la partie du flux évaluée aux interfaces ( $j + 1/2$ ) a été calculée en utilisant une boucle `for` et plusieurs variables locales facilement identifiables par rapport aux relations analytiques. Remarquons également que la formule analytique de  $P_{j+1/2}^{-1}$  a été préférée à l'utilisation de la commande MATLAB `inv` (calcul de l'inverse d'une matrice).

## BIBLIOGRAPHIE

- [Bonnet et Luneau, 1989] A. BONNET, J. LUNEAU, *Aérodynamique : Théories de la Dynamique des Fluides*, Editions Cépadès, 1989.
- [Fletcher, 1991] C. A. J. FLETCHER : *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 1991.
- [Godlewski et Raviart, 1996] E. GODLEWSKI ET P.-A. RAVIART : *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer Verlag, 1996.
- [Hirsh, 1988] C. HIRSCH : *Numerical computation of internal and external flows*, John Wiley & Sons, 1988.
- [LeVeque, 1992] R. LEVEQUE : *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, 1992.
- [Saad, 1998] M. SAAD, *Compressible Fluid Flow*, Pearson Education, 1998.