Гамма-функция

Гамма-функция — математическая функция, обычно обозначается $\Gamma(z)$. Была введена Леонардом Эйлером, а своим обозначением гамма-функция обязана Лежандру[1].

Гамма-функция чрезвычайно широко применяется в науке. Среди основных областей её применения — математический анализ, теория вероятностей, комбинаторика, статистика, атомная физика, астрофизика, гидродинамика, сейсмология и экономика. В частности, гамма-функция используется для обобщения понятия факториала на множества действительных и комплексных значений аргумента.

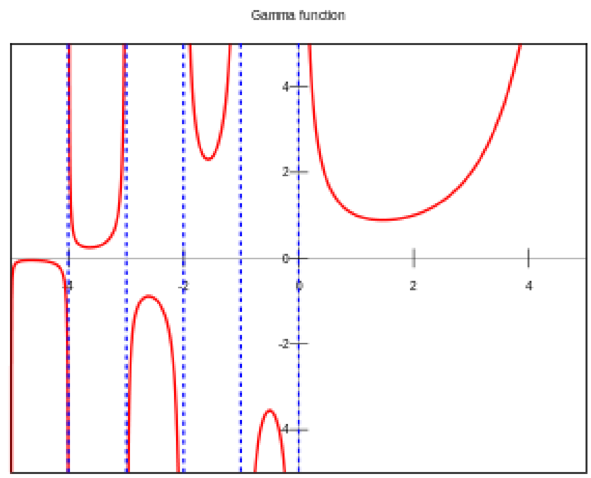


График гамма-функции действительной переменной

Содержание

Определения

Интегральное определение

Если вещественная часть комплексного числа z положительна, то гамма-функция определяется через абсолютно сходящийся интеграл

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

Это определение было получено Лежандром из оригинального определения Эйлера (1730 г.)

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^1 (-\ln x)^{z-1}\,dx$$

через замену переменной $x = e^{-t}$, и на сегодняшний день именно определение Лежандра известно как классическое определение гамма-функции. Интегрируя по частям классическое определение, легко видеть, что $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Для приближённого вычисления значений гамма-функции удобнее третья формула, также полученная из определения Эйлера путём применения равенства $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ и замены переменной $x = y^2$:

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z+1}}{z} \int\limits_0^1 y(-\ln y)^z\,dy.$$

Интеграл в этой формуле сходится при $\operatorname{Re}(z) > -1$, хотя она обычно используется для положительных вещественных значений аргумента (предпочтительные значения — вблизи 1). В случае вещественного аргумента $z > 0$ подынтегральная функция имеет единственную особую точку — устранимый разрыв при $y = 0$, и если доопределить её в этой точке значением 0, она станет непрерывной на всём отрезке $[0; 1]$. Таким образом, интеграл является собственным, что упрощает численное интегрирование.

Существует непосредственное аналитическое продолжение исходной формулы на всю комплексную плоскость, кроме целых чисел, называемое интегралом Римана — Ханкеля:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{i2\pi z} - 1} \int\limits_L t^{\,z-1} e^{-t}\,dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Здесь контур L — любой контур на комплексной плоскости, обходящий точку $t = 0$ против часовой стрелки, концы которого уходят на бесконечность вдоль положительной вещественной оси.

Последующие выражения служат альтернативными определениями гамма-функции.

Определение по Гауссу

Оно верно для всех комплексных z, за исключением 0 и отрицательных целых чисел

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

Определение по Эйлеру

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

Определение по Вейерштрассу

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

где $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,57722$ — постоянная Эйлера — Маскерони[1].

Примечание: иногда используется альтернативная, так называемая *пи-функция*, которая является обобщением факториала и связана с гамма-функцией соотношением $\Pi(z) = \Gamma(z+1)$. Именно этой функцией (а не Г-функцией) пользовались Гаусс, Риман, и многие другие немецкие математики XIX века.

Свойства

Если z — целое неотрицательное число,

$$\Gamma(z+1) = z!\,.$$

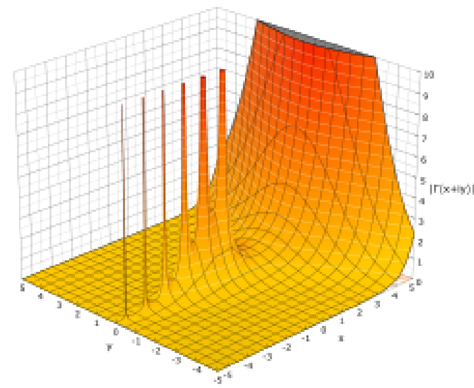


График модуля гамма-функции на комплексной плоскости.

Основное свойство гамма-функции — это её рекуррентное уравнение

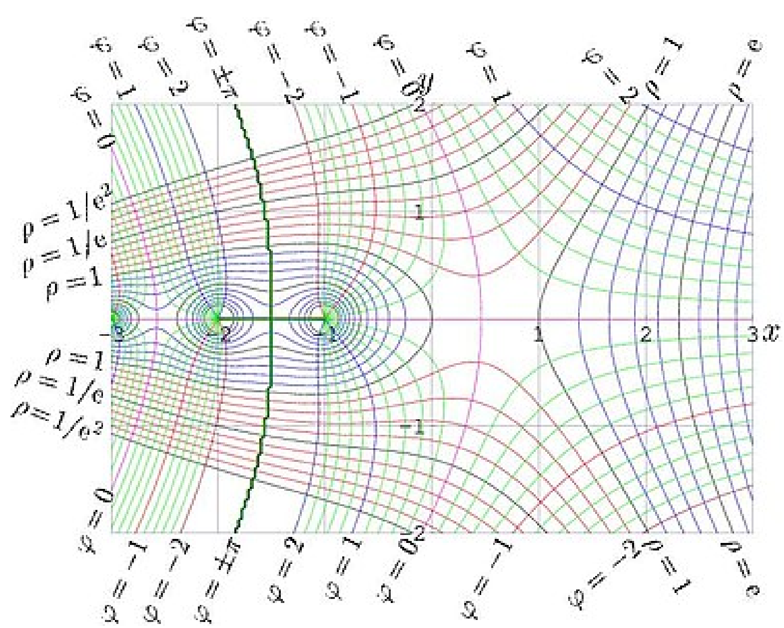
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

которое при фиксированном начальном условии единственным образом определяет логарифмически выпуклое решение, то есть саму гамма-функцию (теорема о единственности)[2].

Для гамма-функции справедлива формула дополнения Эйлера:

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Также справедлива и формула умножения Гаусса:



Амплитуда и фаза факториала комплексного аргумента.

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz} \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(nz),$$

Частный случай этой формулы при n=2 был получен Лежандром:

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\,\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z).$$

Гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости. $\Gamma(z)$ является мероморфной на комплексной плоскости и имеющей простые полюсы в точках $z=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$[1]

Гамма-функция имеет полюс первого порядка в $z=-n$ для любого натурального n и нуля; вычет в этой точке задаётся так:

$$\operatorname{Res}_{z=-n}\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Полезное свойство, которое может быть получено из предельного определения:

$$\overline{\Gamma(z)}=\Gamma(\overline{z}).$$

Гамма-функция дифференцируема бесконечное число раз, и $\Gamma'(x)=\psi(x)\Gamma(x)$, где $\psi(x)$, часто называют «пси-функцией» или дигамма-функцией. Гамма-функция и бета-функция связаны следующим соотношением:

$$\mathrm{B}(x,\ y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Логарифм гамма-функции

По целому ряду причин наряду с гамма-функцией часто рассматривают и логарифм гамма-функции — первообразную дигамма-функции. Для него справедливы следующие интегральные представления:

$$\ln\Gamma(z)\;=\;\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]\frac{e^{-xz}}{x}\,dx\,,\qquad \operatorname{Re}z>0$$

и

$$\ln\Gamma(z)\;=\;\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+2\int\limits_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(x/z)}{e^{2\pi x}-1}\,dx\,,\qquad \operatorname{Re}z>0$$

данные Жаком Бине в 1839-м году (эти формулы ещё часто называют первой и второй формулой Бине соответственно для логарифма гамма-функции)[3]. Несколько отличные интегральные формулы для логарифма гамма-функции также появлялись в работах Мальмстена, Лерха и некоторых других. Так, Мальмстен получил формулу, схожую с первой формулой Бине[3]

$$\ln\Gamma(z)\;=\int\limits_0^{\infty}\left[z-1-\frac{1-e^{-(z-1)x}}{1-e^{-x}}\right]\frac{e^{-x}}{x}\,dx\,,\qquad \operatorname{Re}z>0$$

а Лерх показывает, что все интегралы вида

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{2\pi x}\cos\varphi-1}{e^{4\pi x}-2e^{2\pi x}\cos\varphi+1}\operatorname{arctg}\frac{u}{x}\,dx\,,\qquad 0<u\leqslant 1\,,\quad 0<\varphi<2\pi u$$

также сводятся к логарифмам гамма-функции. В частности, формула, аналогичная второй формуле Бине с «сопряжённым» знаменателем, имеет следующий вид:

$$\ln\Gamma(z) = -\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\left\{1-\ln\left(z-\frac{1}{2}\right)\right\}+\frac{1}{2}\ln 2\pi - 2\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\left[x/(z-\frac{1}{2})\right]}{e^{2\pi x}+1}\,dx, \qquad \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$$

(см. упр. 40 в[4])

Кроме того, Мальмстен также получил ряд интегральных формул для логарифма гамма-функции, содержащих гиперболические функции с логарифмом в подынтегральном выражении (или, что то же, логарифм логарифма с полиномами). В частности,

$$\ln\Gamma(z) = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\ln\sin\pi z - \frac{2z-1}{2}\ln 2\pi - \frac{\sin 2\pi z}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{\operatorname{ch} x - \cos 2\pi z}\,dx\,, \qquad 0 < \operatorname{Re} z < 1$$

(см. упр. 2, 29-h, 30 в[4])

Ярослав Благушин показал, что при рациональном аргументе $z = k/n$, где k и n целые положительные числа, такие, что k не превосходит n, справедливо следующее представление:

$$\ln\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(n-2k)\ln 2\pi}{2n} + \frac{1}{2}\left\{\ln\pi - \ln\sin\frac{\pi k}{n}\right\} +$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{\gamma+\ln r}{r}\cdot\sin\frac{2\pi r k}{n} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi k}{n}\cdot\int\limits_0^\infty \frac{e^{-nx}\cdot\ln x}{\operatorname{ch} x - \cos\dfrac{2\pi k}{n}}\,dx\,, \qquad k \neq \frac{n}{2}$$

(см. приложение C[5], а также упр. 60 и 58[4])

Более того, и в более общих случаях интегралы, содержащие гиперболические функции с логарифмом (или арктангенсом) в подынтегральном выражении, часто сводятся к логарифмам гамма-функции и её производным, в том числе и комплексного аргумента, см. напр. упр. 4-b, 7-a и 13-b в[4].

Логарифм гамма-функции также тесно связан с аналитическим продолжением обобщённой дзета-функции

$$\ln\Gamma(z) = \zeta'(0,z) - \zeta'(0) = \zeta'(0,z) + \frac{1}{2}\ln 2\pi$$

Это важнейшее взаимоотношение, выведенное Лерхом, позволяет получить большое количество интегральных представлений для логарифма гамма-функции через известные формулы для обобщённой дзета-функции.

Ряд Фурье для логарифма гамма-функции имеет следующий вид

$$\ln\Gamma(x) = \left(\frac{1}{2}-x\right)(\gamma+\ln 2) + (1-x)\ln\pi - \frac{1}{2}\ln\sin\pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2\pi n x\cdot\ln n}{n}\,, \qquad 0 < x < 1$$

Эта формула обычно приписывается Эрнсту Куммеру, который её вывел в 1847 г. (в авторитетной литературе[3][6][7] этот ряд даже называется рядом Куммера для логарифма гамма-функции). Однако недавно было открыто, что эта формула была получена ещё в 1842 г. Карлом Мальмстеном (см. Ярослав Благушин[4][8]).

Помимо разложения в ряд Фурье, существуют и другие разложения в ряды. Одно из самых известных это ряд Стирлинга

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{n=1}^{N} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)z^{2n-1}} + O(z^{-2N-1}), \qquad |\arg z| < \frac{\pi}{2}$$

В его стандартной вариации

$$\ln\Gamma(z) = z\ln z + O(z)$$

где коэффициенты B_{2n} означают числа Бернулли.

Из определения гамма-функции по Вейерштрассу следует ещё одно важное представление рядом[9]

$$\ln\Gamma(z) = -\gamma z - \ln z + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z}{n} - \ln\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right].$$

Частные значения

Гамма-функция целого и полуцелого аргументов выражается через элементарные функции. В частности

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$
$$\Gamma(2) = 1! = 1$$
$$\Gamma(3) = 2! = 2$$
$$\Gamma(4) = 3! = 6$$
$$\Gamma(5) = 4! = 24$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \tfrac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\cdot\left[\binom{n-\frac{1}{2}}{n} n!\right]$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi} = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}/\left[\binom{-\frac{1}{2}}{n} n!\right]$$

Поиск значения гамма-функции в точках 1/4 и 1/3 являлся объектом подробных изысканий Эйлера, Гаусса и Лежандра, однако им не удалось подсчитать эти значения в замкнутом виде[1].

Существуют следующие представления в незамкнутом виде для Γ(1/4)

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{AGM}(\sqrt{2}, 1)}}$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right) = (2\pi)^{\frac{3}{4}} \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{th}\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{4}) = A^3 e^{-\frac{G}{\pi}} \sqrt{\pi} 2^{\frac{1}{6}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^{k(-1)^k}$$

где AGM — функция арифметико-геометрического среднего, G — постоянная Каталана и A — постоянная Глейшера—Кинкелина.

Обобщения

В классическом интегральном определении гамма-функции пределы интегрирования фиксированы. Рассматривают также неполную гамма-функцию, определяемую аналогичным интегралом с переменным верхним либо нижним пределом интегрирования. Различают верхнюю неполную гамма-функцию, часто обозначаемую как гамма-функцию от двух аргументов:

$$\Gamma(a, z) = \int\limits_{z}^{\infty} e^{-t} t^{a-1}\, dt$$

и нижнюю неполную гамма-функцию, аналогично обозначаемую строчной буквой «гамма»:

$$\gamma(a, z) = \int\limits_{0}^{z} e^{-t} t^{a-1}\, dt.$$

Иногда неполную гамма функцию определяют как[10]:

$$I(z, a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int\limits_{0}^{z} e^{-t} t^{a-1}\, dt.$$

См. также

- Список объектов, названных в честь Леонарда Эйлера
- K-функция
- G-функция Барнса
- Бета-функция
- Гамма-распределение
- Неполная гамма-функция

Примечания

1. *Davis, P. J.* Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function (http://mathdl.maa.org/mathDL/22/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=3104) (англ.) // American Mathematical Monthly : journal. — 1959. — Vol. 66, no. 10. — P. 849—869. — doi:10.2307/2309786 (https://dx.doi.org/10.2307%2F2309786).
2. *Kingman, J. F. C.* A Convexity Property of Positive Matrices (англ.) // The Quarterly Journal of Mathematics : journal. — 1961. — Vol. 12, no. 1. — P. 283—284. — doi:10.1093/qmath/12.1.283 (https://dx.doi.org/10.1093%2Fqmath%2F12.1.283). — .
3. Harry Bateman and Arthur Erdélyi *Higher Transcendental Functions [in 3 volumes]*. Mc Graw-Hill Book Company, 1955.
4. Iaroslav V. Blagouchine *Rediscovery of Malmsten's integrals, their evaluation by contour integration methods and some related results.* The Ramanujan Journal, vol. 35, no. 1, pp. 21-110, 2014. (https://link.springer.com/article/10.1007/s11139-013-9528-5) PDF (https://www.researchgate.net/publication/257381156_

Rediscovery_of_Malmsten's_integrals_their_evaluation_by_contour_integration_methods_and_some_related_results)
5. Iaroslav V. Blagouchine *A theorem for the closed-form evaluation of the first generalized Stieltjes constant at rational arguments and some related summations* Journal of Number Theory (Elsevier), vol. 148, pp. 537—592, 2015. (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X14002820)
6. E.T. Whittaker and G. N. Watson *A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions, with an account of the principal transcendental functions (third edition). Cambridge at the University Press, 1920.*
7. H.M. Srivastava and J. Choi *Series Associated with the Zeta and Related Functions*. Kluwer Academic Publishers. The Netherlands, 2001
8. *Blagouchine, Iaroslav V.* Erratum and Addendum to "Rediscovery of Malmsten's integrals, their evaluation by contour integration methods and some related results" (англ.) // Ramanujan J. : journal. — 2016. — Vol. 42, no. 3. — P. 777—781. — doi:10.1007/s11139-015-9763-z (https://dx.doi.org/10.1007%2Fs11139-015-9763-z).
9. Д. С. Кузнецов. *Специальные функции* (2-е изд.). Высшая Школа, Москва, 1965.
10. *Неполная гамма-функция* — статья из Математической энциклопедии

Литература и ссылки

- В. Я. Арсенин. *Математическая физика: основные уравнения и специальные функции*, глава X, сс. 225—233. Наука, Москва, 1966.
- М. А. Евграфов. *Аналитические функции*, глава VI, сс. 267—273. Наука, Москва, 1968.
- М. А. Евграфов и др. *Сборник задач по теории аналитических функций*, сс. 307—316. Наука, Москва, 1969.
- Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (7-е изд.), глава XIV, сс. 750—794. Наука, Москва, 1969.
- А. И. Маркушевич. *Теория аналитических функций* (2-е изд.), том 2, сс. 303—324. Наука, Москва, 1968.
- Н. Н. Лебедев. *Специальные функции и их приложения* (2-е изд.), глава I, сс. 11—27. ФМ, Москва, 1963.
- А. Ф. Никифоров и В. Б. Уваров. *Специальные функции математической физики*, сс. 263—268. Наука, Москва, 1978.
- R. Campbell. *Les intégrales eulériennes et leurs applications*, Dunod, Paris, 1966.
- M. Godefroy. *La fonction Gamma; Théorie, Histoire, Bibliographie*, Gauthier-Villars, Paris, 1901.
- E. Artin. *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Teubner, Leipzig, 1931.
- N. Nielson. *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Teubner, Leipzig, 1906.