

Метод квадратних коренів

$$A \cdot X = B, \quad A = U^T \cdot U,$$

$$U^T \cdot U \cdot X = B,$$

$$U^T \cdot Y = B, \quad U \cdot X = Y$$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 14 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 52 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 + 14x_3 = 52. \end{cases}$$

1) Знаходження матриці U та транспонованої до неї U^T

$$U_{1,1} := \sqrt{A_{1,1}} \quad U_{1,1} \rightarrow \sqrt{2}$$

$$U_{1,2} := \frac{A_{1,2}}{U_{1,1}} \quad U_{1,2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$U_{1,3} := \frac{A_{1,3}}{U_{1,1}} \quad U_{1,3} \rightarrow 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$U_{2,2} := \sqrt{A_{2,2} - (U_{1,2})^2} \quad U_{2,2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$U_{2,3} := \frac{A_{2,3} - U_{1,2} \cdot U_{1,3}}{U_{2,2}} \quad U_{2,3} \rightarrow \sqrt{2}$$

$$U_{3,3} := \sqrt{A_{3,3} - (U_{1,3})^2 - (U_{2,3})^2} \quad U_{3,3} \rightarrow 2$$

$$U \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \cdot \sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad U^T \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 2 \cdot \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Перевірка:

$$U^T \cdot U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

2) Розв'язання системи $U^T \cdot Y = B$

$$Y_1 := \frac{B_1}{(U^T)_{1,1}} \quad Y_1 \rightarrow 8 \cdot \sqrt{2}$$

$$Y_2 := \frac{B_2 - (U^T)_{2,1} \cdot Y_1}{(U^T)_{2,2}} \quad Y_2 \rightarrow 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$Y_3 := \frac{B_3 - (U^T)_{3,1} \cdot Y_1 - (U^T)_{3,2} \cdot Y_2}{(U^T)_{3,3}} \quad Y_3 = 6$$

$$Y \rightarrow \begin{bmatrix} 8 \cdot \sqrt{2} \\ 4 \cdot \sqrt{2} \\ 6 \end{bmatrix}$$

3) Розв'язання системи $U \cdot X = Y$

$$X_3 := \frac{Y_3}{U_{3,3}} \quad X_3 = 3$$

$$X_2 := \frac{Y_2 - U_{2,3} \cdot X_3}{U_{2,2}} \quad X_2 = 2$$

$$X_1 := \frac{Y_1 - U_{1,2} \cdot X_2 - U_{1,3} \cdot X_3}{U_{1,1}} \quad X_1 = 1$$

$$X \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Перевірка:

Розв'язання системи $L*Y=B$

$$Y := \text{lsolve}(U^T, B) \quad Y \rightarrow \begin{bmatrix} 8 \cdot \sqrt{2} \\ 4 \cdot \sqrt{2} \\ 6 \end{bmatrix}$$

Розв'язання системи $U*X=Y$

$$X := \text{lsolve}(U, Y) \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Розв'язання вихідної системи $A*X=B$

$$X := \text{lsolve}(A, B) \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$