Дана система рівнянь

$$4 \cdot x1 + 4 \cdot x2 - 3 \cdot x3 = -3$$
$$8 \cdot x1 + 9 \cdot x2 + x3 = 0$$
$$8 \cdot x1 + 7 \cdot x2 - 5 \cdot x3 = -4$$

Розширена матриці системи:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & -3 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Спосіб 1: розв'язання СЛАР методом Гауса

Прямий хід методу Гауса

1) Виключаємо змінну x1

Перше рівняння ділимо на 4

$$x1 + x2 - \frac{3}{4} \cdot x3 = \frac{-3}{4}$$
$$8 \cdot x1 + 9 \cdot x2 + x3 = 0$$
$$8 \cdot x1 + 7 \cdot x2 - 5 \cdot x3 = -4$$

або в матричній формі

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 8 & 9 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Від другого рівняння віднімаємо перше рівняння, помножене на вісім

$$x1 + x2 - \frac{3}{4} \cdot x3 = \frac{-3}{4}$$
$$(8 \cdot x1 - 8 \cdot x1) + (9 \cdot x2 - 8 \cdot x2) + \left(x3 + 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot x3\right) = 0 + 8 \cdot \frac{3}{4}$$
$$8 \cdot x1 + 7 \cdot x2 - 5 \cdot x3 = -4$$

Від третього рівняння віднімаємо перше рівняння, помножене на вісім

$$x1 + x2 - \frac{3}{4} \cdot x3 = \frac{-3}{4}$$
$$(8 \cdot x1 - 8 \cdot x1) + (9 \cdot x2 - 8 \cdot x2) + \left(x3 + 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot x3\right) = 0 + 8 \cdot \frac{3}{4}$$
$$(8 \cdot x1 - 8 \cdot x1) + (7 \cdot x2 - 8 \cdot x2) + \left(-5 \cdot x3 + 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot x3\right) = -4 + 8 \cdot \frac{3}{4}$$

Спрощуємо

$$x1 + x2 - \frac{3}{4} \cdot x3 = \frac{-3}{4}$$
$$x2 + 7 \cdot x3 = 6$$
$$-x2 + x3 = 2$$

або в матричній формі

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Аналогічно виключаємо змінну x2 з двох останніх рівнянь системи

$$x2 + 7 \cdot x3 = 6$$
$$-x2 + x3 = 2$$

Від 2-го рівняння віднімаємо 1-е, помножене на -1

$x2 + 7 \cdot x3 = 6$

$(-x2 + x2) + (x3 + 7 \cdot x3) = 2 + 6$

Спрощуємо

$$\begin{aligned} x2 + 7 \cdot x3 &= 6 \\ 8 \cdot x3 &= 8 \end{aligned} \qquad \text{або} \qquad \begin{aligned} x2 + 7 \cdot x3 &= 6 \\ x3 &= 1 \end{aligned}$$

Отримуємо систему

$$\begin{aligned} x1 + x2 - \frac{3}{4} \cdot x3 &= \frac{-3}{4} \\ x2 + 7 \cdot x3 &= 6 \\ x3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{або в матричній формі} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Зворотній хід методу Гауса

$$\begin{aligned} x1 + x2 - \frac{3}{4} \cdot x3 &= \frac{-3}{4} \\ x2 &= 6 - 7 \cdot 1 \qquad \text{або} \qquad x2 = -1 \\ x3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x1 &= \frac{-3}{4} - (-1) + \frac{3}{4} \cdot 1 \qquad \text{або} \qquad x1 = 1 \\ x2 &= -1 \\ x3 &= 1 \end{aligned}$$

Отже
$$\begin{aligned} x1 &= 1 \\ x2 &= -1 \\ x3 &= 1 \end{aligned}$$

Спосіб 2: розв'язання СЛАР методом LU-розкладу

Дана система рівнянь

$$4\cdot x1+4\cdot x2-3\cdot x3=-3$$
$$8\cdot x1+9\cdot x2+x3=0$$
$$8\cdot x1+7\cdot x2-5\cdot x3=-4$$

1) Знайдемо LU-розклад матриці

$$A:=\begin{bmatrix}4 & 4 & -3\\ 8 & 9 & 1\\ 8 & 7 & -5\end{bmatrix}$$

Елементарні нижні трикутні матриці:

$$L1:=\begin{bmatrix}\frac{1}{A_{1,1}} & 0 & 0\\ -\frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} & 1 & 0\\ -\frac{A_{3,1}}{A_{1,1}} & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad L1=\begin{bmatrix}0.25 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad A1:=L1\cdot A \qquad A1=\begin{bmatrix}1 & 1 & -0.75\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$L2:=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{A1_{2,2}} & 0\\ 0 & -\frac{A1_{3,2}}{A1_{2,2}} & 1\end{bmatrix} \qquad L2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad A2:=L2\cdot L1\cdot A \qquad A2=\begin{bmatrix}1 & 1 & -0.75\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

$$L3:=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{A2_{3,3}}\end{bmatrix} \qquad L3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.125\end{bmatrix} \qquad A3:=L3\cdot L2\cdot L1\cdot A \qquad A3=\begin{bmatrix}1 & 1 & -0.75\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$U:=A3 \qquad U=\begin{bmatrix}1 & 1 & -0.75\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

U - верхня трикутна матриця з одиничною головною діагоналлю

Знайдемо обернені матриці:

$$L1^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 8 & 1 & 0\\ 8 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad L2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad L3^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

$$L:=L1^{-1}\cdot L2^{-1}\cdot L3^{-1}$$

$$L=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 8 & 1 & 0\\ 8 & -1 & 8\end{bmatrix}$$

L - нижня трикутна матриця з ненульовими діагональними елементами

Перевірка:

$$L\cdot U=\begin{bmatrix}4 & 4 & -3\\ 8 & 9 & 1\\ 8 & 7 & -5\end{bmatrix}$$

Отже,

$$A=\begin{bmatrix}4 & 4 & -3\\ 8 & 9 & 1\\ 8 & 7 & -5\end{bmatrix}$$

2) Розв'яжемо СЛАР   A*X=B   методом LU-розкладу

A=L*U,   тоді   L*U*X=B.

Отже,   розв'язання СЛАР   A*X=B   зводиться до розв'язання двох систем рівнянь з трикутними матрицями

Нехай

$$A=\begin{bmatrix}4&4&-3\\8&9&1\\8&7&-5\end{bmatrix} \qquad B:=\begin{bmatrix}-3\\0\\-4\end{bmatrix}$$

Примітка 1. LU-розклад матриці A знайдено вище

$$U=\begin{bmatrix}1&1&-0.75\\0&1&7\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix}4&0&0\\8&1&0\\8&-1&8\end{bmatrix}$$

Примітка 2. Визначник матриці A дорівнює визначнику матриці L

$$|L|=32 \qquad |A|=32$$

2.1) Розв'язання системи   L*Y=B

$$Y_1:=\frac{B_1}{L_{1,1}} \qquad Y_1=-0.75$$

$$Y_2:=\frac{B_2-L_{2,1}\cdot Y_1}{L_{2,2}} \qquad Y_2=6$$

$$Y_3:=\frac{B_3-L_{3,1}\cdot Y_1-L_{3,2}\cdot Y_2}{L_{3,3}} \qquad Y_3=1$$

2.2) Розв'язання системи   U*X=Y

$$X_3:=\frac{Y_3}{U_{3,3}} \qquad X_3=1$$

$$X_2:=\frac{Y_2-U_{2,3}\cdot X_3}{U_{2,2}} \qquad X_2=-1$$

$$X_1:=\frac{Y_1-U_{1,2}\cdot X_2-U_{1,3}\cdot X_3}{U_{1,1}} \qquad X_1=1$$

Перевірка:

Розв'язання системи   L*Y=B

$$Y:=\mathrm{lsolve}(L,B) \qquad Y=\begin{bmatrix}-0.75\\6\\1\end{bmatrix}$$

Розв'язання системи   U*X=Y

$$X:=\mathrm{lsolve}(U,Y) \qquad X=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Розв'язання вихідної системи   A*X=B

$$X:=\mathrm{lsolve}(A,B) \qquad X=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$