Розв'язати СЛАР A*X=B методом LU-розкладу

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 11 & 3 \\ 12 & 14 & 6 & 4 \\ 3 & 8 & -3 & -11 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1. LU-розклад матриці A

Знайдемо елементарні нижні трикутні матриці:

$$L1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{1,1}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{A_{3,1}}{A_{1,1}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{A_{4,1}}{A_{1,1}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L1 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A1 := L1 \cdot A \quad A1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.667 & 1.333 & 0.333 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -10 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -12 \end{bmatrix}$$

$$L2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A1_{2,2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A1_{3,2}}{A1_{2,2}} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{A1_{4,2}}{A1_{2,2}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A2 := L2 \cdot L1 \cdot A \quad A2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.667 & 1.333 & 0.333 \\ 0 & 1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$L3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A2_{3,3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A2_{4,3}}{A2_{3,3}} & 1 \end{bmatrix} \quad L3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A3 := L3 \cdot L2 \cdot L1 \cdot A \quad A3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.667 & 1.333 & 0.333 \\ 0 & 1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$L4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A3_{4,4}} \end{bmatrix} \quad L4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.333 \end{bmatrix} \quad A4 := L4 \cdot L3 \cdot L2 \cdot L1 \cdot A \quad A4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.667 & 1.333 & 0.333 \\ 0 & 1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$U := A4$ U - верхня трикутна матриця з одиничною головною діагоналлю

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0.667 & 1.333 & 0.333 \\ 0 & 1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.667 & 1.333 & 0.333 \\ 0 & 1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Знайдемо обернені матриці:

$$L1^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad L4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$L := L1^{-1} \cdot L2^{-1} \cdot L3^{-1} \cdot L4^{-1}$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

L - нижня трикутна матриця з ненульовими діагональними елементами

Перевірка:

$$L \cdot U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 11 & 3 \\ 12 & 14 & 6 & 4 \\ 3 & 8 & -3 & -11 \end{bmatrix}$$

Отже,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 11 & 3 \\ 12 & 14 & 6 & 4 \\ 3 & 8 & -3 & -11 \end{bmatrix}$$

2. Розв'язання СЛАР A*X=B методом LU-розкладу

A=L*U, тоді L*U*X=B.

Отже, розв'язання СЛАР A*X=B зводиться до розв'язання двох систем рівнянь з трикутними матрицями

Нехай

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 11 & 3 \\ 12 & 14 & 6 & 4 \\ 3 & 8 & -3 & -11 \end{bmatrix} \qquad B:=\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Примітка 1. LU-розклад матриці A знайдено вище

$$U\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Примітка 2. Визначник матриці A дорівнює визначнику матриці L

$|L|=-18 \qquad |A|=-18$

Розв'язання системи L*Y=B

$$Y_1:=\frac{B_1}{L_{1,1}} \qquad Y_1=1$$

$$Y_2:=\frac{B_2-L_{2,1}\cdot Y_1}{L_{2,2}} \qquad Y_2=-2$$

$$Y_3:=\frac{B_3-L_{3,1}\cdot Y_1-L_{3,2}\cdot Y_2}{L_{3,3}} \qquad Y_3=6$$

$$Y_4:=\frac{B_4-L_{4,1}\cdot Y_1-L_{4,2}\cdot Y_2-L_{4,3}\cdot Y_3}{L_{4,4}} \qquad Y_4=-1$$

Розв'язання системи U*X=Y

$$X_4:=\frac{Y_4}{U_{4,4}} \qquad X_4=-1$$

$$X_3:=\frac{Y_3-U_{3,4}\cdot X_4}{U_{3,3}} \qquad X_3=3$$

$$X_2:=\frac{Y_2-U_{2,3}\cdot X_3-U_{2,4}\cdot X_4}{U_{2,2}} \qquad X_2=2$$

$$X_1:=\frac{Y_1-U_{1,2}\cdot X_2-U_{1,3}\cdot X_3-U_{1,4}\cdot X_4}{U_{1,1}} \qquad X_1=-4$$

Перевірка:

Розв'язання системи   L*Y=B

$$Y := \mathrm{lsolve}(L, B) \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Розв'язання системи   U*X=Y

$$X := \mathrm{lsolve}(U, Y) \qquad X = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Розв'язання вихідної системи   A*X=B

$$X := \mathrm{lsolve}(A, B) \qquad X = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$