

Лабораторна робота №4

Виконав студент групи ІС-31 Коваль Богдан

1. Задамо матрицю А вказавши змінні (відповідно варіанту):

$$t := 1$$

$$k := -8$$

$$a := 0.11 \cdot t$$

$$b := 0.02 \cdot k$$

$$d := 0.015 \cdot t$$

$$g := 0.02 \cdot k$$

Завдання. Обчислити власні значення та власні вектори матриці А методом Данилевського

$$A := \begin{bmatrix} 6.26 + a & 1.1 - b & 0.97 + g & 1.24 - d \\ 1.1 - b & 4.16 - a & 1.3 & 0.16 \\ 0.97 + g & 1.3 & 5.44 + a & 2.1 \\ 1.24 - d & 0.16 & 2.1 & 6.1 - a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6.37 & 1.26 & 0.81 & 1.225 \\ 1.26 & 4.05 & 1.3 & 0.16 \\ 0.81 & 1.3 & 5.55 & 2.1 \\ 1.225 & 0.16 & 2.1 & 5.99 \end{bmatrix}$$

1) Знаходження власних значень матриці А

Етап 1:

1.1) Зведемо матрицю А до нормальної форми Фробеніуса

$$M3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{4,1} & A_{4,2} & 1 & A_{4,4} \\ -A_{4,3} & -A_{4,3} & A_{4,3} & -A_{4,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Е - одинична матриця

$$M3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.583 & -0.076 & 0.476 & -2.852 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.225 & 0.16 & 2.1 & 5.99 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A1 := M3^{-1} \cdot A \cdot M3$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 5.898 & 1.198 & 0.386 & -1.085 \\ 0.502 & 3.951 & 0.619 & -3.548 \\ 2.207 & 3.942 & 12.112 & -30.732 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Етап 2:

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ A1_{3,1} & 1 & A1_{3,3} & A1_{3,4} \\ -A1_{3,2} & A1_{3,2} & -A1_{3,2} & -A1_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.207 & 3.942 & 12.112 & -30.732 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.56 & 0.254 & -3.072 & 7.796 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A2 := M2^{-1} \cdot A1 \cdot M2 = \begin{bmatrix} 5.227 & 0.304 & -3.296 & 8.256 \\ 4.793 & 16.733 & -83.418 & 125.655 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Етап 3:

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & A2_{2,2} & A2_{2,3} & A2_{2,4} \\ A2_{2,1} & -A2_{2,1} & -A2_{2,1} & -A2_{2,1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M1 = \begin{bmatrix} 0.209 & -3.491 & 17.404 & -26.216 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M1^{-1} = \begin{bmatrix} 4.793 & 16.733 & -83.418 & 125.655 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A3 := M1^{-1} \cdot A2 \cdot M1 \quad A3 = \begin{bmatrix} 21.96 & -169.42 & 545.851 & -617.179 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицю P, що має нормальну форму Фробеніуса

$$P := A3$$

$$P = \begin{bmatrix} 21.96 & -169.42 & 545.851 & -617.179 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2) Знаходимо власні значення як корені характеристичного рівняння

$$\lambda^4 - 21.96 \cdot \lambda^3 + 169.42 \cdot \lambda^2 - 545.851 \cdot \lambda + 617.179$$

$$v := \begin{bmatrix} 617.179 \\ -545.851 \\ 169.42 \\ -21.96 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda := \text{polyroots}(v) \quad \lambda = \begin{bmatrix} 2.68068 \\ 4.44187 \\ 5.62842 \\ 9.20903 \end{bmatrix}$$

Порівняння значення отриманих в програмі

$$\lambda^4 - 21.96 \cdot \lambda^3 + 169.41988 \cdot \lambda^2 - 545.85101 \cdot \lambda + 617.17885$$

$$v_p := \begin{bmatrix} 617.17885 \\ -545.85101 \\ 169.04128 \\ -21.96 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_p := \text{polyroots}(v) \quad \lambda_p = \begin{bmatrix} 2.68068 \\ 4.44187 \\ 5.62842 \\ 9.20903 \end{bmatrix}$$

Перевірка. Порівняємо власні значення, знайдені методом Данилевського та власні значення, знайдені засобами Mathcad та значення отримані за допомогою власної програми.

Розрахунок в
MathCad

$$\lambda = \begin{bmatrix} 2.681 \\ 4.442 \\ 5.628 \\ 9.209 \end{bmatrix}$$

Розрахунок у влас.
програмі

$$\lambda_p = \begin{bmatrix} 2.68068 \\ 4.44187 \\ 5.62842 \\ 9.20903 \end{bmatrix}$$

Розрахунок вбудованою
функцією MathCad

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} 9.209 \\ 5.628 \\ 4.442 \\ 2.681 \end{bmatrix}$$

Порівняємо
 $\lambda = \lambda_p = 1$

Результат 1, отже значення з програми **правильні**.

2) Знаходження власних векторів матриці A

2.1) Знайдемо власні вектори матриці P (значення підставляємо із програми)

$$\lambda_1 := 2.68068 \quad \lambda_2 := 4.44187 \quad \lambda_3 := 5.62842 \quad \lambda_4 := 9.20903$$

$$y_1 := \begin{bmatrix} \lambda_1^3 \\ \lambda_1^2 \\ \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y_2 := \begin{bmatrix} \lambda_2^3 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y_3 := \begin{bmatrix} \lambda_3^3 \\ \lambda_3^2 \\ \lambda_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y_4 := \begin{bmatrix} \lambda_4^3 \\ \lambda_4^2 \\ \lambda_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y1 = \begin{bmatrix} 19.26349 \\ 7.18605 \\ 2.68068 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y3 = \begin{bmatrix} 178.30335 \\ 31.67911 \\ 5.62842 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y2 = \begin{bmatrix} 87.63902 \\ 19.73021 \\ 4.44187 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y4 = \begin{bmatrix} 780.98315 \\ 84.80623 \\ 9.20903 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2) Обчислимо матрицю подібності $S = M3 \cdot M2 \cdot M1$

$$S := M3 \cdot M2 \cdot M1 \quad S = \begin{bmatrix} 0.209 & -3.491 & 17.404 & -26.216 \\ -0.117 & 2.208 & -12.816 & 22.473 \\ -0.113 & 1.868 & -8.7 & 10.728 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3) Знайдемо власні вектори матриці A

$$x1 := S \cdot y1 = \begin{bmatrix} -0.63049 \\ 1.73569 \\ -1.34032 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x2 := S \cdot y2 = \begin{bmatrix} 0.49276 \\ -1.1221 \\ -0.93916 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x4 := S \cdot y4 = \begin{bmatrix} 0.92433 \\ 0.49784 \\ 0.95575 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x3 := S \cdot y3 = \begin{bmatrix} -1.6566 \\ -0.53319 \\ 0.83479 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x1 - \lambda1 \cdot x1 = \begin{bmatrix} 2.274 \cdot 10^{-4} \\ -1.273 \cdot 10^{-4} \\ -1.23 \cdot 10^{-4} \\ -9.326 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix} \quad A \cdot x2 - \lambda2 \cdot x2 = \begin{bmatrix} 5.485 \cdot 10^{-4} \\ -3.071 \cdot 10^{-4} \\ -2.966 \cdot 10^{-4} \\ -5.329 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x3 - \lambda3 \cdot x3 = \begin{bmatrix} 8.562 \cdot 10^{-4} \\ -4.794 \cdot 10^{-4} \\ -4.629 \cdot 10^{-4} \\ -6.217 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix} \quad A \cdot x4 - \lambda4 \cdot x4 = \begin{bmatrix} 0.002 \\ -0.001 \\ -0.001 \\ 2.487 \cdot 10^{-14} \end{bmatrix}$$

Власні вектори матриці A, знайдені засобами Mathcad:

$$\text{eigenvecs}(A, "L") = \begin{bmatrix} 0.533 & 0.762 & 0.268 & 0.253 \\ 0.287 & 0.245 & -0.61 & -0.697 \\ 0.55 & -0.384 & -0.51 & 0.538 \\ 0.576 & -0.46 & 0.544 & -0.401 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{матриця, що містить всі} \\ \text{нормовані власні вектори} \\ \text{матриці A} \end{array}$$