Приклад. Визначити число додатних та від'ємних коренів, а також їх межі для рівняння $x^5+2\cdot x^4-5\cdot x^3+8\cdot x^2-7\cdot x-3=0$

$P(x):=x^5+2\cdot x^4-5\cdot x^3+8\cdot x^2-7\cdot x-3$ - поліном п'ятого степеню

$a5:=1$ $a4:=2$ $a3:=-5$ $a2:=8$ $a1:=-7$ $a0:=-3$

$n:=5$ отже, рівняння має п'ять коренів

1) Оцінимо модулі коренів за теоремою 3

Теорема 3 (про оцінку модулів коренів рівняння (1))

Нехай $A=\max\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\}$, $B=\max\{|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_1|\}$, де a_k, $k=\overline{0,n}$ — коефіцієнти рівняння $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$.

Тоді модулі всіх коренів x_i^* $(i=1,2,\ldots,\mathrm{n})$ рівняння задовольняють нерівність

$$\frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}}<|x_i^*|\le 1+\frac{A}{|a_n|},\quad i=1,2,\ldots,\mathrm{n}. \tag{2}$$

Наслідок. Числа $r=\dfrac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}}$ та $R=1+\dfrac{A}{|a_n|}$ є відповідно нижньою і верхньою межами додатних коренів алгебраїчного рівняння $r<x_i^{*+}<R$. Аналогічно числа $-R$ та $-r$ є нижньою і верхньою межами від'ємних коренів рівняння $-R<x_i^{*-}<-r$.

$A:=\max(|a4|,|a3|,|a2|,|a1|,|a0|)=8$

$B:=\max(|a5|,|a4|,|a3|,|a2|,|a1|)=8$

$r:=\dfrac{1}{1+\frac{B}{|a0|}}\rightarrow\dfrac{3}{11}=0.273$ $R:=1+\dfrac{A}{|a5|}\rightarrow 9$

Отже, за наслідком з теореми 3 додатні корені рівняння лежать в інтервалі (3/11; 9), а від'ємні - (-9;

2) Застосуємо теореми 4 та 5 для уточнення отриманих результатів

Теорема 4 (теорема Лагранжа про верхню межу додатних коренів рівняння (1))

Нехай $a_n>0$ та a_i — перший від'ємний коефіцієнт в послідовності $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$; C — найбільше з абсолютних значень від'ємних коефіцієнтів. Тоді за верхню межу додатних коренів рівняння (1) може бути прийняте число

$$R=1+\sqrt[n-i]{\frac{C}{a_n}}. \tag{3}$$

2.1) Знайдемо верхню межу додатних коренів за теоремою 3

$a5=1 \quad a4=2 \quad a3=-5 \quad a2=8 \quad a1=-7 \quad a0=-3$

$a3$ - перший від'ємний коефіцієнт, отже $i:=3$

$C:=\max(|-5|,|-7|,|-3|)=7$

$R:=1+\sqrt[n-i]{\frac{C}{a5}} \rightarrow \sqrt{7}+1=3.646$

2.2) Знайдемо нижню межу додатних коренів

Теорема 5 (про нижню і верхню межі додатних та від'ємних коренів алгебраїчного рівняння)

Нехай R — верхня межа додатних коренів рівняння $P_n(x)=0$,

R_1 — верхня межа додатних коренів рівняння $P^1(x)=x^n P_n(\frac{1}{x})=0$,

R_2 — верхня межа додатних коренів рівняння $P^2(x)=P_n(-x)=0$,

R_3 — верхня межа додатних коренів рівняння $P^3(x)=x^n P_n(-\frac{1}{x})=0$.

Тоді додатні корені x_i^{*+} та від'ємні корені x_i^{*-} рівняння (1) задовольняють нерівності

$$\frac{1}{R_1} \le x_i^{*+} \le R; \qquad -R_2 \le x_i^{*-} \le -\frac{1}{R_3}. \tag{4}$$

Складемо рівняння P1(x)

$P1(x):=x^5 \cdot \left(\frac{1}{x^5}+2\,\frac{1}{x^4}-5\cdot\frac{1}{x^3}+8\cdot\frac{1}{x^2}-7\cdot\frac{1}{x}-3\right)$

$P1(x):=-3\cdot x^5-7\cdot x^4+8\cdot x^3-5\cdot x^2+2\cdot x+1$ або

$P1(x):=3\cdot x^5+7\cdot x^4-8\cdot x^3+5\cdot x^2-2\cdot x-1$

Знайдемо верхню межу додатних коренів полінома P1(x) за теоремою 3

$a5:=3 \quad a4:=7 \quad a3:=-8 \quad a2:=5 \quad a1:=-2 \quad a0:=-1$

$a3$ - перший від'ємний коефіцієнт, отже $i:=3$

$C:=\max(|-8|,|-2|,|-1|)=8$

$R1:=1+\sqrt[n-i]{\frac{C}{a5}} \rightarrow \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}+1=2.633$

$\frac{1}{R1}=0.38$ - нижня межа додатних коренів рівняння P(x)=0

$R=3.646$

Таким чином, **додатні корені** рівняння P(x)=0 належать інтервалу **(0,38;**

2.3) Уточнимо межі від'ємних коренів

Складемо рівняння P2(x)

$P2(x) := x^5 - 2 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3$

Знайдемо верхню межу додатних коренів полінома P2(x) за теоремою 3

$a5 := 1 \quad a4 := -2 \quad a3 := -5 \quad a2 := -8 \quad a1 := -7 \quad a0 := 3$

$a4$ - перший від'ємний коефіцієнт, отже $i := 4$

$C := \max(|-2|, |-5|, |-8|, |-7|) = 8$

$R2 := 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a5}} \rightarrow 9 = 9$

Складемо рівняння P3(x)

$P3(x) := x^5 \cdot \left(-\frac{1}{x^5} + 2\,\frac{1}{x^4} + 5 \cdot \frac{1}{x^3} + 8 \cdot \frac{1}{x^2} + 7 \cdot \frac{1}{x} - 3\right)$

$P3(x) := -3 \cdot x^5 + 7 \cdot x^4 + 8 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$ або

$P3(x) := 3 \cdot x^5 - 7 \cdot x^4 - 8 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1$

Знайдемо верхню межу додатних коренів полінома P3(x) за теоремою 3

$a5 := 3 \quad a4 := -7 \quad a3 := -8 \quad a2 := -5 \quad a1 := -2 \quad a0 := 1$

$a4$ - перший від'ємний коефіцієнт, отже $i := 4$

$C := \max(|-7|, |-8|, |-5|, |-2|) = 8$

$R3 := 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a5}} \rightarrow \frac{11}{3} = 3.667$

$-\frac{1}{R3} = -0.273$ - верхня межа від'ємних коренів рівняння P(x)=0

$-R2 = -9$

Таким чином, **від'ємні корені** рівняння P(x)=0 лежать в інтервалі **(-9;**

3) Дослідимо структуру коренів рівняння $x^5 + 2 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 3$ =0

Теорема 7 (теорема Гюа про необхідну умову дійсності всіх коренів алгебраїчного рівняння)

Якщо алгебраїчне рівняння (1) має дійсні коефіцієнти та всі його корені є дійсними, то квадрат кожного некрайнього коефіцієнта більше добутку двох його сусідніх коефіцієнтів, тобто виконуються нерівності

$$a_k^2 > a_{k-1} \cdot a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

$P(x) := x^5 + 2 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 3$

$a5 := 1 \quad a4 := 2 \quad a3 := -5 \quad a2 := 8 \quad a1 := -7 \quad a0 := -3$

$a4^2 > a5 \cdot a3 = 1$
$a3^2 > a4 \cdot a2 = 1$
$a2^2 > a3 \cdot a1 = 1$
$a1^2 > a2 \cdot a0 = 1$

за теоремою 7 виконується необхідна умова дійсності коренів рівняння (але теорема Гюа є лише необхідною умовою, вона не гарантує відсутність комплексно-спряжених коренів

Наслідок (про наявність комплексних коренів). Якщо при якому-небудь k виконано нерівність

$$a_k^2 \le a_{k-1} \cdot a_{k+1},$$

то рівняння (1) має принаймні одну пару комплексних коренів.

4) За теоремою 6 визначимо число додатних і від'ємних коренів

Теорема 6 (теорема Декарта про кількість дійсних коренів алгебраїчних рівнянь)

Число S_1 додатних коренів (з урахуванням їх кратності) алгебраїчного рівняння $P_n(x)=0$ дорівнює числу змін знаків у послідовності коефіцієнтів $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ (коефіцієнти, рівні нулю, не враховують) многочлена $P_n(x)$ або менше цього числа на парне число. Число S_2 від'ємних коренів (з урахуванням їх кратності) алгебраїчного рівняння $P_n(x)=0$ дорівнює числу змін знаків у послідовності $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ многочлена $P_n(-x)$ або менше цього числа на парне число.

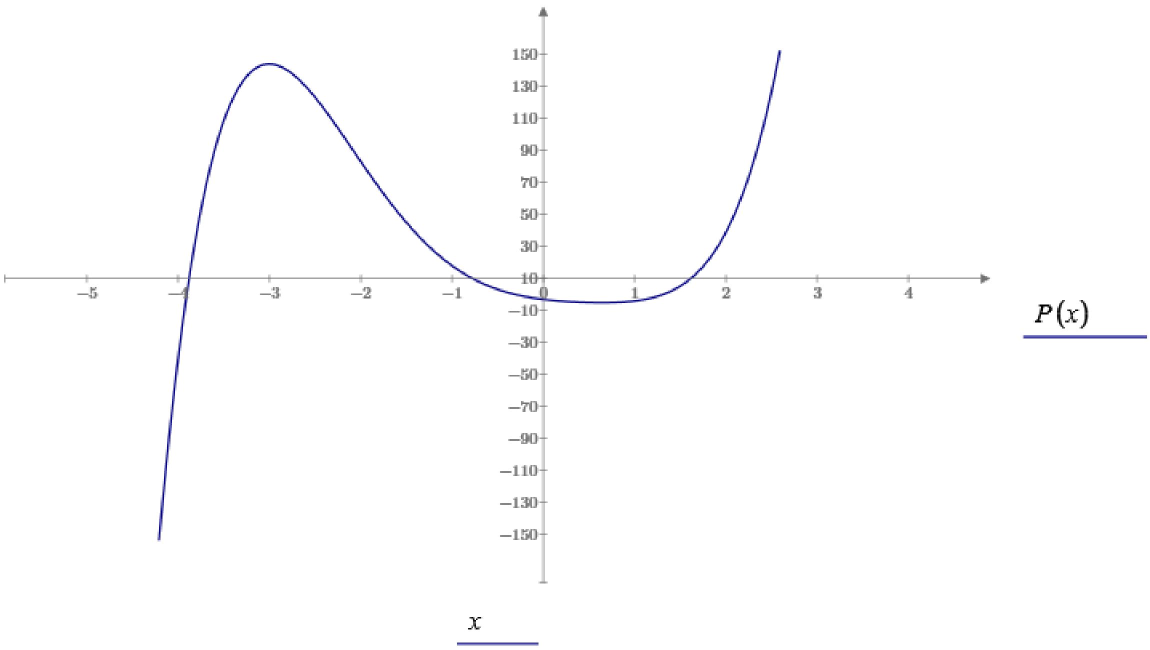
Коефіцієнти многочлена P(x): 1, 2, -5, 8, -7, -3.

Оскільки число змін знака S1=3, то число додатних коренів дорівнює трьом, або менше на парне число, тобто дорівнює одиниці.

Коефіцієнти многочлена P(-x): -1, 2, 5, 8, 7, -3.

Оскільки число змін знака S2=2, то число від'ємних коренів дорівнює двом, або менше на парне число, тобто їх взагалі немає.

Перевірка. 1. Побудуємо графік функції $P(x) = x^5 + 2 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 3$



2. Знайдемо корені рівняння за допомогою функції polyroots

$$x^5 + 2 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 3 = 0$$

$$v := \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 8 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x := \text{polyroots}(v) = \begin{bmatrix} -3.91 \\ -0.3 \\ 0.45 + 1.32i \\ 0.45 - 1.32i \\ 1.31 \end{bmatrix}$$