Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи

Лабораторна робота № 7

Чисельне інтегрування функцій

Зміст

1 Теоретичні відомості

Чисельне інтегрування функцій

Квадратурна формула може бути записана у вигляді

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k); \quad x_k \in [a,b] \tag{1.1}$$

Величини A_k називаються квадратурними коефіцієнтами, x_k – квадратурними вузлами, а права частина формули – квадратурною сумою. Функція *p(x)* називається функцією ваги.

Інтегрування, що грунтується на інтерполяційних формулах

При обчисленні квадратурних коефіцієнтів вузли x_k обираються рівновіддаленими. Інтерполяційні квадратури з такими вузлами прийнято називати *формулами Ньютона-Котеса.*

Припустимо, що відрізок інтегрування скінченний. Поділимо його на *n* рівних частин довжини *h = (b-a)/n*, так що $x_k = x_0 + hk$. Інтерполяційну формулу запишемо у наступному вигляді:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^{n} B_k^n f(a+kh) \tag{1.2}$$

$$B_k^n = \frac{A_k}{b-a} = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx. \tag{1.3}$$

Для сталої вагової функції $p(x) = 1$ формула Ньютона-Котеса має вигляд

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^{n} B_k^n f(a+kh) \tag{1.4}$$

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nh!(n-k)!} \int_a^b \frac{q(q-1)...(q-n)}{q-k} dq. \tag{1.5}$$

Таблиця, що наведена нижче, містить значення коефіцієнтів B_k^n. Для кожного *n* має місце співвідношення симетрії: $B_k^n = B_{n-k}^n$, тому в таблицю включені лише коефіцієнти з індексами $k \le n/2$.

Таблиця 1. Значення коефіцієнтів B_k^n $(k \le n/2)$

n / k	0	1	2	3
1	1/2			
2	1/6	4/6		
3	1/8	3/8		
4	7/90	32/90	12/90	
5	19/288	75/288	50/288	
6	41/840	216/840	27/840	272/840

Задамо деякі точки $a_i \in [-1,1]$ й побудуємо інтерполяційний поліном $L_m(x)$, що співпадає з *f(x)* у вузлах

$$x_i = (b+a)/2 + a_i(b-a)/2.$$

Формула трапеції

Найпростіша інтерполяційна квадратурна формула одержується при $m = 2$; $a_1 = -1$; $a_2 = 1$.

Тоді коефіцієнти при A_k *; k = 0, 1, 2* обчислюються за формулою

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \frac{\left|x^2 - 1\right|}{2} dx = \frac{2}{3}; \quad A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{1-x}{2} dx = 1; \quad A_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1+x}{2} dx = 1 .$$

На відрізку [a,b] одержуємо наступну формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[y_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n \right]. \qquad (1.6)$$

Формула (1.6) має назву формули *трапецій.* Оцінка похибки цієї формули:

$$\left|R_2(f)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right|. \qquad (1.7)$$

Формула Сімпсона

При значеннях параметрів $m = 4;\ a_1 = -1;\ a_2 = a_3 = 0;\ a_4 = 1$ одержуємо

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x^2(x^2-1)}{4!} dx = \frac{1}{90}; \quad A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x^2(x-1)}{-2} dx = \frac{1}{3};$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^2-1) dx = -\frac{4}{3}; \quad A_3 = \frac{1}{3}.$$

Тоді, розбивши [a, b] на *2n* підінтервалів, маємо формулу Сімпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[2\sum_{i=1}^{n} (2y_{2i-1} + y_{2i}) + y_0 + y_{2n} \right]. \qquad (1.8)$$

Оцінка похибки цієї формули:

$$\left|R_4(f)\right| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|. \qquad (1.9)$$

Квадратурна формула Гауса

При побудові квадратурних формул, що грунтуються на інтерполяційних формулах, використовувалися рівновіддалені вузли. Для побудови квадратурних формул Гауса вузли формуются іншим шляхом.

Побудуємо квадратурну формулу у вигляді

$$I = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i), \qquad (1.10)$$

що буде точною для поліномів найбільш високого степеню при найменшій кількості вузлів. Коефіцієнти A_i та вузли x_i визначимо за умови, щоб формула була точною для $2m$ функцій $x^{k-1}, k = \overline{1,2m}$. З цієї умови та (9.16) одержуємо наступні $2m$ рівнянь

$$\int_a^b x^{k-1} dx = \sum_{i=1}^{2m} A_i x^{k-1}; \quad k = \overline{1,2m}.$$

Якщо розв'язати цю систему рівнянь й заміcтити одержані значення A_i та x_i у рівнянні (9.16), одержимо квадратурну формулу Гауса, що буде точною для поліномів степеню $\le 2m-1$.

Нехай

$$y(x) = \sum_{i=1}^{2m} b_i x^{i-1}.$$

Тоді

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_{i=1}^{2m} b_i \int_a^b x^{i-1}dx = \sum_{i=1}^{m} A_i \sum_{i=1}^{2m} b_i x^{i-1} = \sum_{i=1}^{m} A_i y(x_i).$$

Будемо шукати розв'язок цієї системи рівнянь за допомогою поліномів Лежандра. З цієї метою домножимо перше та наступні m рівнянь системи на $(-1)^k C_m^k C_{m-k}^k$; $k=\overline{1,m}$ й складемо одержані $m+1$ рівнянь:

$$\int_a^b (-1)^k C_m^k C_{m-k}^k x^i dx = \sum_{i=1}^{m} A_i \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_m^k C_{m-k}^k x_i^k.$$

За визначенням поліномів Лежандра

$$\int_a^b L_m(x)dx = \sum_{i=1}^{m} A_i L_m(x_i).$$

Якщо виконати ці ж дії із наступними m рівняннями, то одержимо для k-го рівняння

$$\int_a^b x^{k-1} L_m(x)dx = \sum_{i=1}^{m} x_i^{k-1} A_i L_m(x_i), k=\overline{1,m}.$$

За умови ортогональності поліномів Лежандра

$$\int_a^b x^{k-1} L_m(x)dx = 0; k=\overline{1,m}.$$

одержимо

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{k-1} A_i L_m(x_i) = 0; k=\overline{1,m}.$$

Якщо в якості вузлів $\overline{x_i}$ взяти корені поліномів Лежандра, то одержимо вузли для квадратурної формули Гауса

$$L_m(\overline{x_i}) = 0.$$

У такому разі для визначення коефіцієнтів квадратурної формули (1.9) одержуємо наступну систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} &A_1 + A_2 + \ldots + A_m = 1; \\ &\overline{x}_1 A_1 + \overline{x}_2 A_2 + \ldots + \overline{x}_m A_m = 1/2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\overline{x}_1^{m-1} A_1 + \overline{x}_2^{m-1} A_2 + \ldots + \overline{x}_m^{m-1} A_m = 1/m. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Інтеграл буде дорівнювати

$$I = \sum_{i=1}^{m} A_i f(x_i) \quad . \tag{1.12}$$

У випадку відрізку довільної довжини $[a,b]$ заміною змінної

$$x = (b+a)/2 + z(b-a)/2 \tag{1.13}$$

приходимо до обчислення інтегралу на відрізку [-1,1].

Похибка квадратурної формули Гауса оцінюється нерівністю

$$|R_m(f)| \le \frac{(m!)^4 (b-a)^{m-1}}{(2m+1)[(2m)!]^3} \max_{\xi\in[a,b]} \left| f^{(2m)}(\xi) \right|. \tag{1.14}$$

РЕАЛІЗАЦІЯ КВАДРАТУРНОЇ ФОРМУЛИ ГАУСА

1. Для визначення кількості m (як правило, обчислення починають з 2-х) членів у формулі Гауса оцінити похибку за нерівністю (1.14). Якщо одержана таким чином похибка перевищує бажану точність інтегрування, то треба m збільшити на 1.
2. У випадку, коли відрізок інтегрування довільний, але скінчений, заміною (1.13) привести його до [-1,1].

3. Обчислити або взяти з таблиць корені поліномів Лежандра $L_m(x)=0$ та вагові коефіцієнти A_i.
4. Обчислити значення функції.
5. Обчислити значення інтегралу за формулою (1.12).

2 Завдання

1. Реалізувати програму, яка обчислює інтеграл за допомогою формули трапеції або Сімпсона, в залежності від варіанту. Точність обчислень має бути 0,0001. Мінімальну кількість кроків визначити за формулами (1.7) або (1.9) в залежності від варіанту. Оцінити похибку результату.

2. Реалізувати програму, яка обчислює інтеграл за допомогою квадратурної формули Гауса (для всіх варіантів). Оцінити похибку результату.

3. Обчислити визначений інтеграл у Mathcad та порівняти реальну похибку кожного метода (це різниця між розрахованим значенням інтегралу і значенням у MathCad) з аналітичною похибкою кожного методу. Реальна похибка має бути не більша ніж аналітична.

3 Варіанти завдань

$$\int_a^b f(x)dx$$

Функція для 1-10 варіантів:

$$f(x)=\frac{\cos(x)}{x+1}$$

Функція для 11-20 варіантів:

$$f(x)=(x+1)\sin x$$

Функція для 21-30 варіантів:

$$f(x)=\frac{\lg(x^2+1)}{x}$$

Таблиця 2. Варіанти завдань

№ вар.	Границі інтегрування	
	a	b
1,11,21,31	0.7	1.4
2,12,22	1	3
3,13,23	0.8	1.6
4,14,24	0.7	1.5
5,15,25	1	3
6,16,26	0.5	1.4
7,17,27	2	5
8,18,28	1.4	2.1
9,19,29	0.1	1.1
10,20,30	0.8	1.7

Парні варіанти – метод трапецій, непарні – метод Сімпсона.

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі у вигляді вихідного інтегралу;
- обчислення інтегралу за допомогою формули трапеції або Сімпсона, та квадратурної формули Гауса;
- перевірочний розрахунок інтегралу за допомогою програми Mathcad;
- висновки;
- лістинг програми.