Приклад 3. Знайти наближено за формулою Сімпсона визначений інтеграл, поклавши *n*=8

$$I := \int_0^1 \frac{2\cdot x}{1+x^2}\,dx = 0.6931472$$ - точне значення інтеграла

$$f(x) := \frac{2\cdot x}{1+x^2} \qquad a := 0 \qquad b := 1$$

1) Знайдемо значення інтеграла за допомогою *формули Сімпсона*

Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування [a, b] на *n* рівних частин та обчислимо значення підінтегральної функції у відповідних точках.

$n := 8$

Обчислимо крок розбиття *h*: $h := \frac{b-a}{n} = 0.125$

```
x := | for i ∈ 0..n
     |    x_i ← a + i·h
     | return x

y := | for i ∈ 0..n
     |    y_i ← f(x_i)
     | return y
```

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ 0.25 \\ 0.375 \\ 0.5 \\ 0.625 \\ 0.75 \\ 0.875 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2461538 \\ 0.4705882 \\ 0.6575342 \\ 0.8 \\ 0.8988764 \\ 0.96 \\ 0.9911504 \\ 1 \end{bmatrix}$$

За формулою Сімпсона отримаємо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 2\sum_{j=1}^{n-2} y_j \right),$$

де i – непарні цілі числа, j – парні цілі числа.

```
I_h := | S ← 0
       | S1 ← 0
       | S2 ← 0
       | for i ∈ 1..n−1
       |    | if mod(i, 2) = 0
       |    |    S2 ← S2 + y_i
       |    | else
       |    |    S1 ← S1 + y_i
       | S ← h/3 · (y_0 + y_n + 4·S1 + 2·S2)
       | return S
                                       = 0.6931682
```

Зменшуємо крок розбиття вдвічі 4

Обчислимо крок розбиття *h*: $h := \frac{b-a}{n} = 0.25$

```
x := | for i ∈ 0..n
     |    x_i ← a + i·h
     | return x

y := | for i ∈ 0..n
     |    y_i ← f(x_i)
     | return y
```

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4705882 \\ 0.8 \\ 0.96 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$I\_2h := \left\| \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ S1 \leftarrow 0 \\ S2 \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} \text{if } \operatorname{mod}(i,2) = 0 \\ \quad \| \; S2 \leftarrow S2 + y_i \\ \text{else} \\ \quad \| \; S1 \leftarrow S1 + y_i \end{array} \right. \\ S \leftarrow \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + y_n + 4 \cdot S1 + 2 \cdot S2\right) \\ \text{return } S \end{array} \right. = 0.6935294$$

Застосуємо першу формулу Рунге $\approx \left|I_h - I_{2h}\right| / (2^r - 1)$

$$\Delta\_h := \frac{|I\_h - I\_2h|}{2^4 - 1} = 0.0000241$$

$\varepsilon := 0.0001$ $\qquad \Delta\_h < \varepsilon = 1$ $\qquad$ отже, *h* - шукане значення кроку

За другою формулою Рунге знайдемо уточнене значення інтеграла $I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h}) / (2^r - 1)$

$$I\_ym := I\_h + \frac{I\_h - I\_2h}{2^4 - 1} = 0.6931441$$

$$I\_Simpson := I\_ym$$

2) Оцінимо похибку методу Сімпсона

2.1) Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку) за формулою

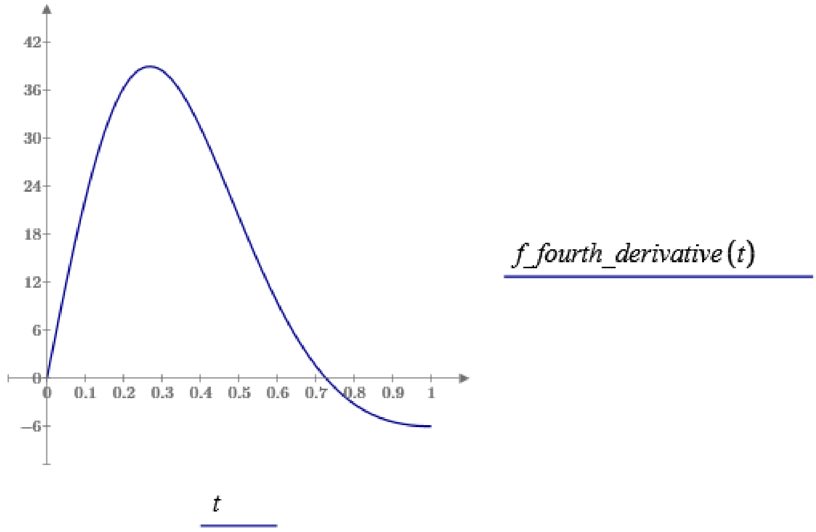
$$\left|R_4(f)\right| \le \frac{(b-a)^5}{180 n^4} \max_{x \in [a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

Знайдемо похідну четвертого порядку підінтегральної функції

$$f\_fourth\_derivative(t) := \frac{d^4}{dt^4} f(t) \rightarrow \frac{48 \cdot t^5 - 480 \cdot t^3 + 240 \cdot t}{t^{10} + 5 \cdot t^8 + 10 \cdot t^6 + 10 \cdot t^4 + 5 \cdot t^2 + 1}$$

За графіком похідної визначимо найбільше за модулем значення похідної на відрізку [0, 1]

$t := 0, 0.01..1$



Обчислимо найбільше за модулем значення похідної на відрізку [*a*, *b*]:

$$f\_max\_value := \begin{array}{l} max \leftarrow 0 \\ t \leftarrow a \\ \textbf{while } t \le b \\ \quad \textbf{if } |f\_fourth\_derivative(t)| > max \\ \quad\quad max \leftarrow |f\_fourth\_derivative(t)| \\ \quad t \leftarrow t + 0.00001 \\ \textbf{return } max \end{array} = 38.9855716$$

Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку)

$$\Delta\_analytical := \frac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} \cdot f\_max\_value = 0.000846$$

2.2) Обчислимо істинну абсолютну похибку (реальну похибку)

$$\Delta\_real := |I - I\_Simpson| = 0.0000031$$

Отже, реальна похибка не перевищує аналітичну похибку

$$\Delta\_real < \Delta\_analytical = 1$$