6 ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ТА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

6.1 Квадратурні формули чисельного інтегрування. Метод Рунге

При розв'язанні багатьох задач, які зустрічаються в геометрії, техніці, економіці тощо доводиться обчислювати визначені інтеграли типу

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

де $f(x)$ – інтегрована на відрізку $[a, b]$ функція. З курсу вищої математики відомо, що для знаходження такого інтегралу можна скористатися формулою Ньютона-Лейбніца.

Проте на практиці доволі часто зустрічаються випадки, коли первісну неможливо чи не вдається виразити через елементарні функції. Може статися, що аналітичний вираз первісної, якщо його вдалося знайти, має досить складний і незручний для обчислень вигляд. Крім того, підінтегральна функція може бути задана таблично чи графічно. У цих випадках для обчислення визначених інтегралів користуються чисельними методами. Формули, які використовують для наближеного обчислення інтегралів, називають *квадратурними формулами*. Ідея побудови таких формул полягає в тому, що підінтегральну функцію замінюють іншою, наприклад, інтерполяційним многочленом, а потім знаходять інтеграл від нової функції.

Практичне розв'язання задач часто потребує обчислення похідної функції. Коли аналітичний вираз функції чи знайденої похідної складний, або, коли функція задана таблично, тоді використовують чисельне диференціювання.

Для побудови формул чисельного диференціювання функцію $f(x)$ інтерполюють многочленом $P_n(x)$, відтак вважають, що похідні від функції наближено рівні відповідним похідним від многочлена, тобто $f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x)$ для всіх $k \in \mathrm{N}$.

Формули чисельного інтегрування

Найбільш відомими методами знаходження визначених інтегралів є:

- формули прямокутників;
- методи Ньютона – Котеса, Гаусса, Чебишова, які основані на використанні так званих квадратурних формул, отриманих заміною $f(x)$ інтерполяційними багаточленами;
- методи Монте – Карло, основані на використанні статистичних моделей.

Визначений інтеграл від заданої на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ подають у вигляді

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n), \quad x_i \in [a;b].$$

Формули чисельного інтегрування такого типу називають *квадратурними формулами*, коефіцієнти A_i – квадратурними коефіцієнтами, x_i – квадратурними вузлами. При обчисленні квадратурних коефіцієнтів, як правило, вузли x_i обирають рівновіддаленими. Інтерполяційні квадратури з такими вузлами прийнято називати *формулами Ньютона-Котеса.*

Розглянемо спочатку найбільш прості квадратурні формули, що у випадку невід'ємної підінтегральної функції $f(x) \geq 0$ мають ясний геометричний зміст – наближене обчислення площі $S = \int_a^b f(x)\,dx$ відповідної криволінійної трапеції при рівномірному розбитті відрізка $[a,b]$, $a < b$ зі сталим кроком $\Delta x_i = h = \dfrac{b-a}{n}$, $i = \overline{1,n}$.

Метод прямокутників. З курсу вищої математики відомо, що за означенням визначений інтеграл є границею його інтегральних сум, тобто $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, де точки ξ_i вибирають довільно з проміжків розбиття, довжини яких позначаються числами Δx_i. На цій формулі грунтується виведення квадратурної формули методу прямокутників.

Розіб'ємо відрізок $[a,\, b]$ на n рівних частин. Тоді величина Δx_i рівна $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n} = h$, і справедлива така наближена рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = h\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i).$$

Число h називається *кроком квадратурної формули.*

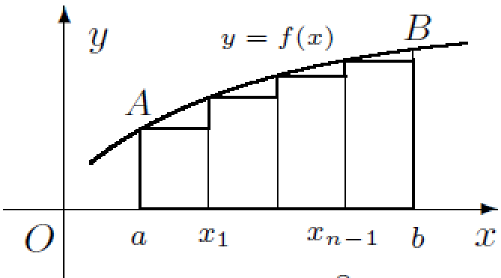
Якщо в останній формулі точки ξ_i сумістити з лівими кінцями відрізків розбиття, тобто $\xi_0 = x_0$, $\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1}$, то отримаємо *формулу лівих прямокутників*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}). \quad (1)$$

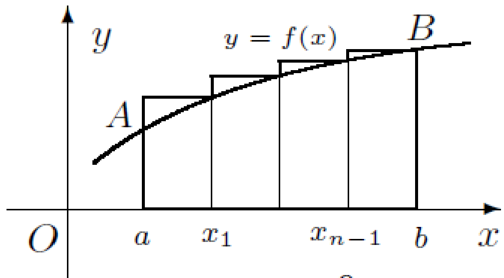
Якщо ж точки ξ_i сумістити з правими кінцями відрізків розбиття, тобто $\xi_0 = x_1$, $\xi_1 = x_2, \ldots, \xi_{n-1} = x_n$, то отримаємо *формулу правих прямокутників*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} = h(y_1 + y_2 + \cdots + y_n). \quad (2)$$

Геометричний зміст формули прямокутників полягає в тому, що криволінійна трапеція $aABb$ замінюється східчастою фігурою, складеною з прямокутників. На малюнку 8 зображено випадок лівих прямокутників, на малюнку 9 – випадок правих прямокутників.



мал. 8

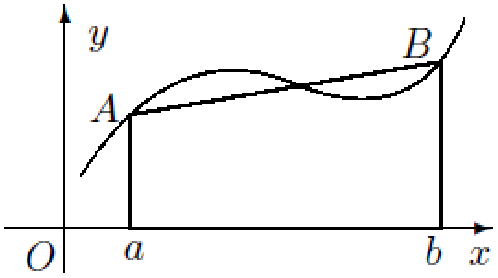


мал. 9

Якщо похідна $f'(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за цими формулами можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ_n^* за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^2/(2n))M_1},$$

де $M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$. Тобто, похибка формул прямокутників має порядок $1/n$. Іншими словами, ці формули характеризуються першим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 1$.



мал. 10

Метод трапецій. Наближене значення інтеграла можна порахувати іншим способом. Для цього на відрізку $[a, b]$ дугу AB графіка підінтегральної функції $y = f(x)$ замінимо хордою. Відтак вважатимемо, що значення визначеного інтеграла наближено рівне площі утвореної трапеції $aABb$ (див. мал. 10)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

Зрозуміло, що точність обчислень зросте, якщо $[a, b]$ поділити на кілька частин і застосувати останню формулу до кожного з новоутворених відрізків. На практиці відрізок інтегрування ділять на рівні частини, тоді довжина кожної з них дорівнює $\dfrac{b-a}{n}$, де n – кількість відрізків розбиття. У цьому випадку отримаємо формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_i+y_{i+1}}{2}\,.$$

Оскільки величини $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ під знаком суми зустрічаються двічі, то останнє співвідношення переписують наступним чином

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right]$$

Цю рівність називають *формулою трапецій.* Інколи її записують так

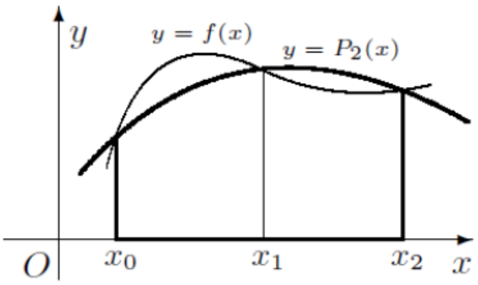
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0+2y_1+\cdots+2y_{n-1}+y_n),\ \text{де}\ h=\frac{b-a}{n}.$$

Якщо друга похідна $f''(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за формулою трапецій можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ_n^* за допомогою співвідношення:

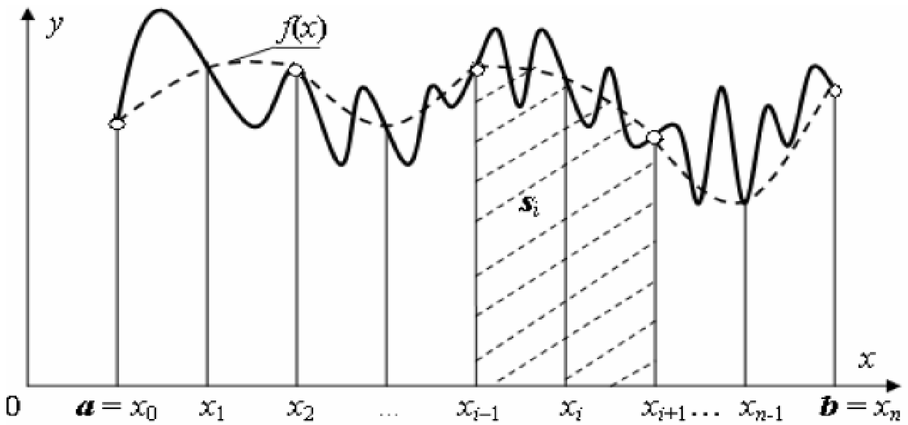
$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^3/(12n^2))M_2},$$

де $M_2 = \max_{x\in[a;b]} |f''(x)|$. Тобто, похибка формули трапецій має порядок $1/n^2$. Іншими словами, ця формула характеризується другим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 2$.

Метод Сімпсона (метод парабол). Точність чисельного інтегрування помітно зростає, якщо підінтегральну функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ замінити квадратичною функцією (рисунок 11), яка у вузлах x_0, x_1, x_2 співпадає з функцією $f(x)$.



Для наближеного обчислення інтеграла за методом Сімпсона крива підінтегральної функції замінюється на відрізки квадратичних парабол, проведених через кінці кожних трьох сусідніх ординат значень функції $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$; $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$; …; $f(x_{n-2})$, $f(x_{n-1})$, $f(x_n)$. При цьому весь проміжок інтегрування розбивають на парну кількість n відрізків $[x_i - h, x_i + h]$. Отже, площу криволінійної трапеції наближено замінюємо на суму $n/2$ площин під параболами. На рисунку 12 параболи накреслено напівжирними штриховими лініями, які з'єднують через одне значення функцій; площина під параболою (s_i) зазначена нахиленими штриховими лініями).



У точці x_i проміжку $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ підінтегральну функцію $f(x)$ розкладемо у ряд Тейлора, унаслідок чого здобудемо:

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)/1!(x - x_i) + f''(x_i)/2!(x - x_i)^2 + f'''(x_i)/3!(x - x_i)^3 + \dots$$

Обмежуючись першими трьома доданками, які становлять поліном другого степеня, та замінивши похідні значеннями функції

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h};\qquad f''(x_i)=\frac{f(x_{i-1})+f(x_{i+1})-2f(x_i)}{h^2}$$

і після підставлення до виразу, матимемо

$$s_i=\frac{h}{3}\left(f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})\right).$$

Обчислимо тепер наближене значення S інтеграла на проміжку $[a, b]$:

$$S=\frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)+\ldots+f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right).$$

Спростивши формулу обчислення S, здобудемо остаточну формулу Сімпсона:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left(y_0+y_n+4\sum_{i=1}^{n-1}y_i+2\sum_{j=1}^{n-2}y_j\right),$$

де $h=\dfrac{b-a}{n}$, i – непарні цілі числа, j – парні цілі числа.

Якщо на відрізку $[a;b]$ існує обмежена четверта похідна $f^{IV}(x)$, то істинна абсолютна похибка $\Delta_n=|R_n|$ обчислення інтеграла за формулою парабол оцінюється граничною абсолютною похибкою Δ_n^* так:

$$\boxed{\Delta_n=|R_n|\le\Delta_n^*=((b-a)^5/(180n^4))M_4},$$

де $M_4=\max\limits_{x\in[a;b]}|f^{IV}(x)|$. Тобто, похибка формули Симпсона має порядок $1/n^4$. Іншими словами, ця формула характеризується четвертим порядком точності: $\Delta_n^*=O(h^r)$, де $r=4$.

Зауваження. Усі розглянуті формули тим точніші, чим густіше розбиття: $R_n\to 0$ при $n\to\infty$. При одному й тому ж значенні n формула Симпсона – найбільш точна з них. При практичному застосуванні чисельного інтегрування треба віддати перевагу формулі парабол, коли підінтегральна функція $f(x)$ досить гладка, тобто має неперервні похідні високих порядків. Якщо ж функція

$f(x)$ має лише кусково-гладку першу похідну, то кращою може бути формула трапецій. У загальному випадку, ефективність тієї чи іншої квадратурної формули залежить від поведінки функції $f(x)$ та її похідних на відрізку інтегрування.

Приклад 1. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^1 (x+2)^{-1} dx$, застосовуючи при $n = 4$ формули: а) лівих прямокутників, б) трапецій, в) Симпсона. Оцінити допущені абсолютні похибки. Обчислення проводити з округленням до п'ятого десяткового знака після коми. Одержані результати порівняти з точним значенням інтеграла, обчисленим за формулою Ньютона – Лейбниця:

$$I = \int_0^1 (x+2)^{-1} dx = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 \approx 0{,}40547 .$$

□ Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n = 4$ рівних частин точками $x_0 = a = 0$, $x_1 = 0{,}25$, ..., $x_4 = b = 1$. Обчислимо значення y_0, y_1, ..., y_4 підінтегральної функції $y = 1/(x+2)$, що відповідають указаним точкам, і запишемо результат у таблицю:

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0,25	0,5	0,75	1
y_k	0,5	0,44444	0,4	0,36364	0,33333

а) Знайдемо значення інтеграла за допомогою формули лівих прямокутників:

$$I_n \approx ((b-a)/4)(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = ((1-0)/4) \times$$

$$\times (0{,}5 + 0{,}44444 + 0{,}4 + 0{,}36364) = 1{,}70808/4 \approx 0{,}42702 .$$

Знайдемо і порівняємо граничну Δ_n^* та істинну $\Delta_n = | I - I_n |$ абсолютні похибки.

Щоб обчислити граничну абсолютну похибку Δ_n^*, знайдемо похідну підінтегральної функції: $y' = -1/(x+2)^2$. Найбільше за модулем значення цієї похідної на відрізку $[0;1]$ дорівнює $M_1 = |y'(0)| = 0{,}25$. Тоді $\Delta_n^* = ((1-0)^2/(2\cdot 4))\cdot 0{,}25 \approx 0{,}03125$.

Істинна абсолютна похибка $\Delta_n = |0{,}40547 - 0{,}42702| \approx$ $\approx 0{,}02155$. Можемо переконатися, що істинна похибка не перевищує граничної: $\Delta_n = 0{,}02155 < 0{,}03125 = \Delta_n^*$.

б) Обчислимо наближене значення інтеграла за формулою трапецій:

$$I_n \approx ((b-a)/4)\cdot(y_0/2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4/2) = ((1-0)/4)\times$$
$$\times(0{,}5/2 + 0{,}44444 + 0{,}4 + 0{,}36364 + 0{,}33333/2) \approx 0{,}40619.$$

Знайдемо граничну Δ_n^* та істинну Δ_n абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y''(x) = 6/(x+2)^4; \quad M_2 = |y''(0)| = 0{,}25;$$
$$\Delta_n^* = ((1-0)^3/(12\cdot 4^2))\cdot 0{,}25 \approx 0{,}0013;$$
$$\Delta_n = |0{,}40547 - 0{,}40619| \approx 0{,}00072; \quad \Delta_n < \Delta_n^*.$$

в) Обчислимо наближене значення визначеного інтеграла за формулою Симпсона:

$$I_n \approx ((b-a)/(3\cdot 4))\cdot(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) =$$
$$= ((1-0)/(3\cdot 4))\cdot(0{,}5 + 0{,}33333 + 4\cdot(0{,}44444 +$$
$$+ 0{,}36364) + 2\cdot 0{,}4) = 4{,}86565/12 \approx 0{,}40547$$

Знайдемо граничну Δ_n^* та істинну Δ_n абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y^{IV} = 24/(x+2)^5; \quad M_4 = |y^{IV}(0)| = 0{,}75;$$
$$\Delta_n^* = ((1-0)^5/(180\cdot 4^4))\cdot 0{,}75 \approx 0{,}00002;$$
$$\Delta_0 = |0{,}40547 - 0{,}40547| \approx 0{,}00000; \quad \Delta_n < \Delta_n^*.$$

Порівнюючи результати обчислень, можна зробити висновок, що найближче до точного значення інтеграла, як очікувалося, дає формула парабол. ■

Приклад 2. Застосовуючи формулу Симпсона, обчислити наближено визначений інтеграл $I=\int_0^1 x^3 e^{x^3}dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

□ За умовою треба знайти значення інтеграла до третього десяткового знака після коми (з точністю $\varepsilon = 0{,}001$). Тому обчислення будемо проводити з округленням до четвертого (запасного) знака після коми.

Продиференціюємо підінтегральну функцію $y = x^3 e^{x^3}$:

$$y' = 3e^{x^3}(x^5+x^2);\quad y'' = 3e^{x^3}(3x^7+8x^4+2x);\quad y''' = 6e^{x^3}(9x^9 +$$

$$+45x^6+38x^3+2);\quad y^{IV} = 3e^{x^3}(27x^{11}+216x^8+384x^5+120x^2).$$

Оскільки четверта похідна $y^{IV} > 0$ і на відрізку інтегрування $[0;1]$ її похідна (п'ята)

$$y^{(5)} = 3e^{x^3}(81x^{13}+945x^{10}+2880x^7+ +2280x^4+240x) \geq 0,$$

то $|\, y^{IV} \,| = y^{IV}$ монотонно зростає і набуває найбільшого значення при $x=1$:

$$M_4 = \max_{x\in[0;1]} |\, y^{IV}(x)\,| = y^{IV}(1) = 2241e \approx 6091{,}6655.$$

Отже, гранична абсолютна похибка:

$$\Delta_n^* = ((1-0)^5/(180n^4))M_4 \approx 33{,}8426/n^4.$$

Нерівність $\Delta_n^* \leq \varepsilon$ розв'язуємо підбором:

$$33{,}8426/n^4 \leq 0{,}001;\quad n=14:\ 33{,}8426/14^4 < 0{,}0009 < 0{,}001;$$

а при $n=13$: $33{,}8426/13^4 > 0{,}0011 > 0{,}001$, отже при $n \geq 14$ виконується нерівність $\Delta_n^* < 0{,}001$.

Візьмемо $n = 20$. Такий вибір виправданий тим, що при цьому значенні n крок інтегрування h буде скінченним десятковим дробом: $h = 1/20 = 0{,}05$. Таким чином, розіб'ємо відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n = 20$ рівних частин точками $x_0 = a = 0$, $x_1 = 0{,}05$, $x_2 = 0{,}1$, ..., $x_{20} = b = 1$. Обчислимо значення y_0, y_1, ..., y_{20} підінтегральної функції $y = x^3 e^{x^3}$ у відповідних точках і занесемо результат у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
y_k	0	0,0001	0,001	0,0034	0,0081	0,0159

k	6	7	8	9	10	11	12
x_k	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
y_k	0,0277	0,0448	0,0682	0,0998	0,1416	0,1965	0,2681

k	12	13	14	15	16	17
x_k	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85
y_k	0,2681	0,3614	0,4833	0,6433	0,8534	1,1349

k	18	19	20
x_k	0,9	0,95	1
y_k	1,5112	2,0208	2,7183

Далі за формулою парабол знайдемо наближене значення інтеграла:

$$I_n \approx ((b-a)/(3\cdot 20))\cdot(y_0 + y_{20} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11} + y_{13} + y_{15} + y_{17} + y_{19}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10} + y_{12} + y_{14} + y_{16} + y_{18})) = (1/60)\cdot(0 + 2{,}7183 + 4(0{,}0001 + 0{,}0034 + 0{,}0159 + 0{,}0448 + 0{,}0998 + 0{,}1965 + 0{,}3614 + 0{,}6433 + 1{,}1349 + 2{,}0208) + 2\cdot(0{,}001 + 0{,}0081 + 0{,}0277 + 0{,}0682 + 0{,}1416 + 0{,}2681 + 0{,}4833 + 0{,}8534 + 1{,}5112)) = 0{,}458785 \approx 0{,}459.\ \blacksquare$$

ВИБІР КРОКУ ІНТЕГРУВАННЯ І ПРАКТИЧНА ОЦІНКА ПОХИБКИ

Величина кроку h повинна бути такою, щоб забезпечити задану точність ε обчислення за прийнятою квадратурною формулою, не допускаючи при цьому значних перевитрат обчислювальних ресурсів. Розглянемо основні способи вибору кроку інтегрування. При цьому похибками значень функції у вузлах і похибками заокруглення знехтуємо.

Вибір кроку за аналітичною оцінкою залишкового члена. Нехай потрібно обчислити інтеграл з точністю ε за квадратурною формулою, для якої відомий аналітичний вираз граничної абсолютної похибки Δ_h^*, що служить оцінкою залишкового члена R_n: $|R_n| \le \Delta_h^*$. Вибирають крок h таким, щоб виконувалась нерівність $\Delta_h^* < \varepsilon$.

Апостеріорна оцінка похибки методом Рунге з автоматичним вибором кроку інтегрування

Практична оцінка похибки і вибір кроку за правилом Рунге. В аналітичні вирази оцінки похибки розглянутих квадратурних формул входять величини $M_r = \max\limits_{x\in[a;b]} |f^{(r)}(x)|$ ($r = 1$ – для формул лівих і правих прямокутників, $r = 2$ – для формули трапецій, $r = 4$ – для формули Симпсона), знаходження яких нерідко приводить до громіздких обчислень або взагалі неможливе. Тоді можна скористатися методом Рунге (методом подвоєння кроку).

Згідно з ним обчислюють інтеграл I за вибраною квадратурною формулою два рази: спочатку з кроком $2h$, потім з кроком h, тобто подвоюють число n. Як результат отримують два значення інтеграла I_{2h} та I_h. Для наближеної оцінки граничної абсолютної похибки використовують першу формулу Рунге

$$\boxed{\Delta_h^* \approx \left|I_h - I_{2h}\right| \big/ (2^r - 1)}.$$

Якщо $\Delta_h^* \approx \left|I_h - I_{2h}\right| \big/ (2^r - 1) < \varepsilon$, то h – шукане значення кроку. При цьому за другою формулою Рунге знаходять уточнене значення інтеграла

$$\boxed{I_{ym} \approx I_h + \left(I_h - I_{2h}\right) \big/ (2^r - 1)}.$$

Якщо ж $\Delta_h^* \approx |I_h - I_{2h}| / (2^r - 1) \geq \varepsilon$, то розрахунок повторюють з вдвічі меншим кроком $h/2$ і т.д.

За початковий крок можна прийняти $h \approx \sqrt[r]{\varepsilon}$.

Зауваження 1. Для підтвердження можливості застосування методу Рунге до прийнятої квадратурної формули на практиці перевіряють справедливість нерівності

$$\boxed{\left| 2^r \left(I_{h/2} - I_h\right) / \left(I_h - I_{2h}\right) - 1 \right| < 0{,}1}.$$

Зауваження 2. Розглянуті вище квадратурні формули прямокутників, трапецій і парабол зручні тим, що при зменшенні вдвоє кроку h всі обчислені раніше значення підінтегральної функції можуть бути використані повторно.

Приклад. Знайти наближено за формулою Симпсона визначений інтеграл $I = \int_0^1 \frac{2x\,dx}{1+x^2}$, поклавши $n = 8$. Оцінити граничну абсолютну похибку Δ_h^* одержаного наближення I_h, користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку). За цим же методом знайти уточнене наближене значення інтеграла I_{ym}. Обчислити абсолютну похибку Δ_{ym} цього наближення I_{ym}, одержавши точне значення інтеграла I за формулою Ньютона – Лейбниця.

Вказівка. Похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до сьомого десяткового знака після коми.

□ Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n = 8$ рівних частин з кроком $h = (b-a)/n = (1-0)/8 = 0{,}125$ точками x_k, $k = \overline{0,n}$ і обчислимо відповідні значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ підінтегральної функції $f(x)$. Запишемо результат у таблицю:

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0,125	0,25	0,375	0,5
y_k	0,0000000	0,2461538	0,4705882	0,6575342	0,8000000

k	5	6	7	8
x_k	0,625	0,75	0,875	1
y_k	0,8988764	0,9600000	0,9911504	1,0000000

Далі за формулою парабол при кроці $h = 0{,}125$ дістанемо наближені значення інтеграла I_h і I_{2h}:

$$I_h = (h/3)\cdot(y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)) =$$

$$= (0{,}125/3)\cdot(0 + 1 + 4(0{,}2461538 + 0{,}6575342 + 0{,}8988764 +$$

$$+ 0{,}9911504 + 2(0{,}4705882 + 0{,}8 + 0{,}96)) = 0{,}6931682\,;$$

$$I_{2h} = (2h/3)\cdot(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) = (2\cdot 0{,}125/3)\cdot(0 +$$

$$+ 1 + 4(0{,}4705882 + 0{,}96) + 2\cdot 0{,}8) = 0{,}6935294\,.$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx \frac{|I_h - I_{2h}|}{2^r - 1} = \frac{|0{,}6931682 - 0{,}6935294|}{2^4 - 1} = 0{,}0000241\,.$$

Оскільки $\Delta_h^* \approx 0{,}0000241 < 0{,}5\cdot 10^{-4}$,то значення I_h повинно бути вірним до четвертого знака після коми.

Знайдемо уточнене значення інтеграла $I_{ут}$ за другою формулою Рунге:

$$I_{ут} \approx I_h + (I_h - I_{2h})/(2^r - 1) = 0{,}6931682 + (0{,}6931682 -$$

$$- 0{,}6935294)/(2^4 - 1) = 0{,}6931441\,.$$

За формулою Ньютона – Лейбниця обчислимо точне значення інтеграла I:

$$I = \int_0^1 \frac{2x\,dx}{1 + x^2} = \left| u = 1 + x^2;\ du = 2x\,dx;\ u_1 = 1;\ u_2 = 2 \right| = \int_1^2 \frac{du}{u} =$$

$$= \ln|u|\,\Big|_1^2 = \ln 2 = 0{,}6931472\,.$$

Тоді

$$\Delta_{ут} = \left| I - I_{ут} \right| = \left| 0{,}6931472 - 0{,}6931441 \right| = 0{,}0000031\,. \quad ■$$