Приклад. Застосовуючи квадратурну формулу Гауса, обчислити з точністю 0,0001 визначений інтеграл

$$I := \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = 0.7853982$$ - точне значення інтеграла

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} \qquad a := 0 \qquad b := 1 \qquad \varepsilon := 0.0001$$

1) Визначимо m - кількість членів у формулі Гауса, необхідну для забезпечення заданої точності ε. Для цього застосуємо формулу оцінки похибки формули Гауса

$$\left|R_m(f)\right| \le \frac{(m!)^4 (b-a)^{m-1}}{(2m+1)[(2m)!]^3} \max_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(2m)}(\xi)\right|$$

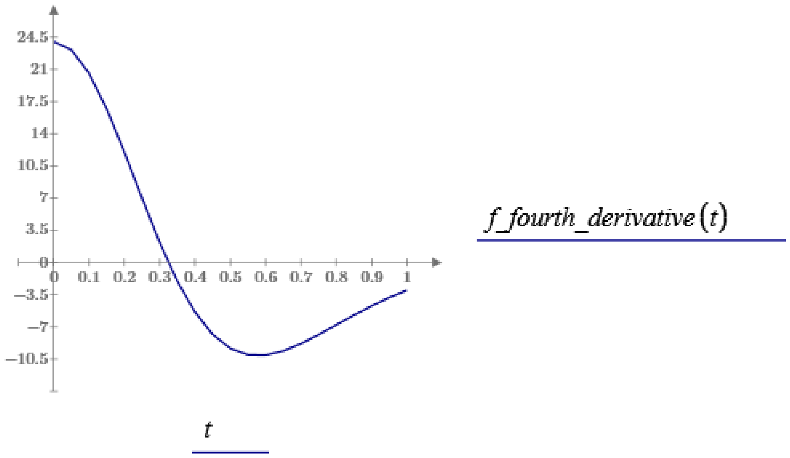
Нехай $m := 2$

Знайдемо похідну четвертого порядку підінтегральної функції

$$f\_fourth\_derivative(t) := \frac{d^4}{dt^4} f(t) \rightarrow \frac{120\cdot t^4 - 240\cdot t^2 + 24}{t^{10} + 5\cdot t^8 + 10\cdot t^6 + 10\cdot t^4 + 5\cdot t^2 + 1}$$

Побудуємо графік похідної 4-го порядку на відрізку [a, b]

$t := 0, 0.05 .. 1$



Обчислимо найбільше за модулем значення похідної на відрізку [*a*, *b*]:

```
f_max_value := | max ← 0
               | t ← a
               | while t ≤ b
               |   | if |f_fourth_derivative(t)| > max
               |   |   | max ← |f_fourth_derivative(t)|
               |   | t ← t + 0.00001
               | return max
= 24
```

Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку)

$$\Delta\_analytical := \frac{(m!)^4\cdot(b-a)^{m-1}}{(2\cdot m+1)\cdot((2\cdot m)!)^3}\cdot f\_max\_value = 0.0055556$$

$$\Delta\_analytical < \varepsilon = 0$$

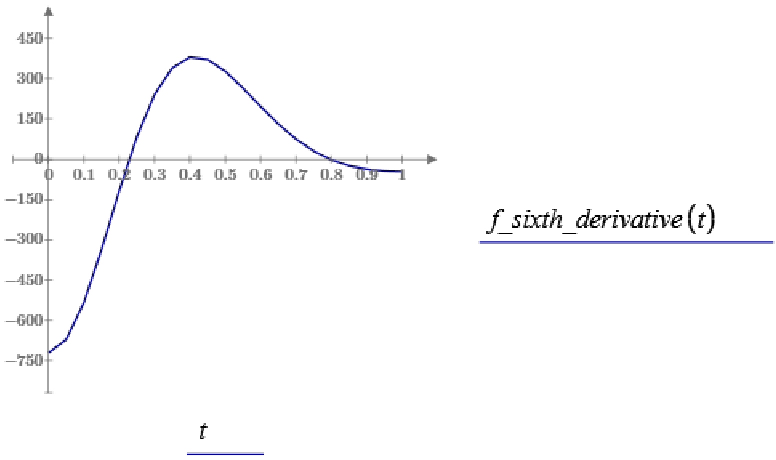
Нехай $m := 3$

Знайдемо похідну 6-го порядку підінтегральної функції

$$f\_sixth\_derivative(t) := \frac{d^6}{dt^6} f(t) \rightarrow \frac{5040 \cdot t^6 - 25200 \cdot t^4 + 15120 \cdot t^2 - 720}{t^{14} + 7 \cdot t^{12} + 21 \cdot t^{10} + 35 \cdot t^8 + 35 \cdot t^6 + 21 \cdot t^4 + 7 \cdot t^2 + 1}$$

Побудуємо графік похідної 6-го порядку на відрізку [a, b]

$t := 0, 0.05 .. 1$



Обчислимо найбільше за модулем значення похідної на відрізку [*a*, *b*]:

$$f\_max\_value := \begin{array}{l} max \leftarrow 0 \\ t \leftarrow a \\ \textbf{while } t \le b \\ \quad \textbf{if } |f\_sixth\_derivative(t)| > max \\ \quad \quad max \leftarrow |f\_sixth\_derivative(t)| \\ \quad t \leftarrow t + 0.00001 \\ \textbf{return } max \end{array} = 720$$

Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку)

$$\Delta\_analytical := \frac{(m!)^4 \cdot (b-a)^{m-1}}{(2 \cdot m + 1) \cdot ((2 \cdot m)!)^3} \cdot f\_max\_value = 0.0003571$$

$$\Delta\_analytical < \varepsilon = 0$$

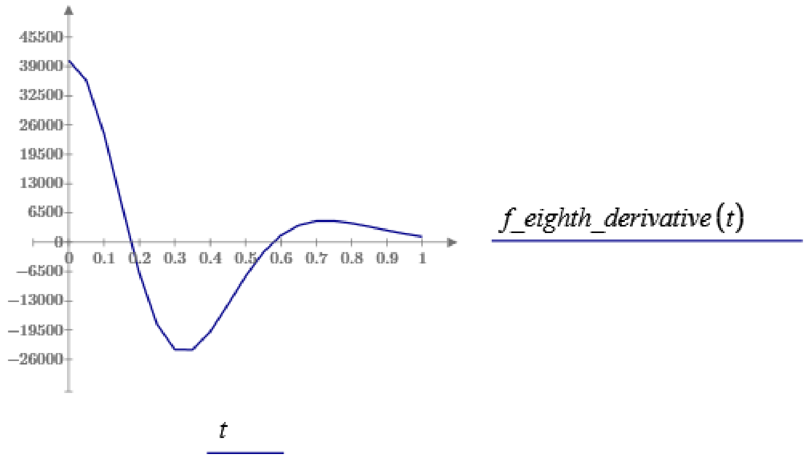
Нехай $m := 4$

Знайдемо похідну 8-го порядку підінтегральної функції

$$f\_eighth\_derivative(t) := \frac{d^8}{dt^8} f(t) \rightarrow \frac{362880 \cdot t^8 - 3386880 \cdot t^6 + 5080320 \cdot t^4 - 1451520 \cdot t^2 + 40320}{t^{18} + 9 \cdot t^{16} + 36 \cdot t^{14} + 84 \cdot t^{12} + 126 \cdot t^{10} + 126 \cdot t^8 + 84 \cdot t^6 + 36 \cdot t^4 + 9 \cdot t^2 + 1}$$

Побудуємо графік похідної 8-го порядку на відрізку [a, b]

$t := 0, 0.05 .. 1$



Обчислимо найбільше за модулем значення похідної на відрізку [*a*, *b*]:

```
f_max_value :=  ‖ max ← 0                                        | = 40320
                ‖ t ← a
                ‖ while t ≤ b
                ‖   ‖ if |f_eighth_derivative(t)| > max
                ‖   ‖   ‖ max ← |f_eighth_derivative(t)|
                ‖   ‖ t ← t + 0.00001
                ‖ return max
```

Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку)

$$\Delta\_analytical := \frac{(m!)^4 \cdot (b-a)^{m-1}}{(2 \cdot m+1) \cdot ((2 \cdot m)!)^3} \cdot f\_max\_value = 0.0000227$$

$$\Delta\_analytical < \varepsilon = 1$$

Отже, при $m = 4$ виконується нерівність $\Delta\_analytical \le \varepsilon$.

2) Знайдемо значення інтегралу за допомогою *квадратурної формули Гауса* при $m = 4$

Зробимо заміну змінної

$$x = \frac{b+a}{2} + t \cdot \frac{b-a}{2} \qquad \text{або} \qquad x = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \cdot (t+1) \qquad \text{або} \qquad t = 2 \cdot x - 1$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\frac{1}{4} \cdot (t+1)^2} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{4}{4+(t+1)^2} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \frac{1}{4+(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

Після заміни змінної інтеграл має наступний вигляд:

$$J := 2 \cdot \int_{-1}^{1} \frac{1}{4+(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = 0.7853982 \qquad\qquad I = 0.7853982$$

$$f(t) := \frac{1}{4+(t+1)^2}$$ - підінтегральна функція

Візьмемо з таблиці корені поліномів Лежандра (вузли) та вагові коефіцієнти Ai

$t_1 := -0.861136$ $\quad$ $t_4 := 0.861136$

$t_2 := -0.339981$ $\quad$ $t_3 := 0.339981$

$A_1 := 0.347855$ $\quad$ $A_4 := 0.347855$

$A_2 := 0.652145$ $\quad$ $A_3 := 0.652145$

Обчислимо значення інтегралу за допомогою *квадратурної формули Гауса*

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$$I\_Gauss := A_1 \cdot f(t_1) + A_2 \cdot f(t_2) + A_3 \cdot f(t_3) + A_4 \cdot f(t_4) = 0.3927015$$

$$I\_Gauss = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4+(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$J := 2 \cdot I\_Gauss = 0.785403$ $\quad$ $I = 0.7853982$

$$J = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \frac{1}{4+(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

3) Обчислимо істинну абсолютну похибку (реальну похибку)

$$\Delta\_real := |I - J| = 0.0000048$$

Отже, реальна похибка не перевищує аналітичну похибку

$$\Delta\_real < \Delta\_analytical = 1$$