Приклад 2. Застосовуючи формулу Сімпсона, обчислити наближено визначений інтеграл з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$

$$I := \int_0^1 x^3 \cdot e^{x^3}\, dx = 0.4587925$$ - точне значення інтеграла

$$f(x) := x^3 \cdot e^{x^3} \qquad a := 0 \qquad b := 1$$

1) Визначимо мінімальну кількість кроків n, необхідну для забезпечення заданої точності ε, за формулою оцінки похибки методу Сімпсона

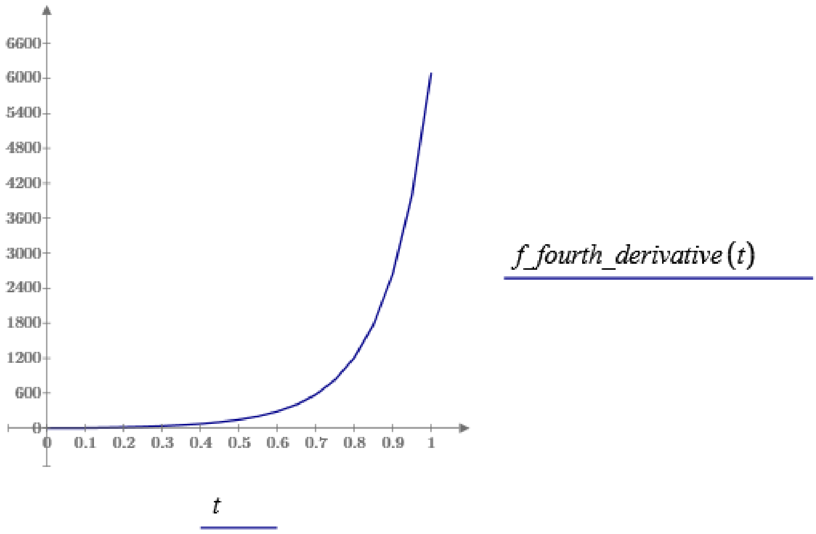
$$|R_4(f)| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

Знайдемо похідну четвертого порядку підінтегральної функції

$$f\_fourth\_derivative(t) := \frac{d^4}{dt^4} f(t) \to \left(81 \cdot t^{11} + 648 \cdot t^8 + 1152 \cdot t^5 + 360 \cdot t^2\right) \cdot e^{t^3}$$

За графіком похідної визначимо найбільше за модулем значення похідної на відрізку [a, b]

$$t := 0, 0.05 .. 1$$



Отже, найбільше за модулем значення похідної на відрізку [a, b] в точці x=1

$$|f\_fourth\_derivative(1)| = 6091.6695776$$

Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку)

$$\Delta\_analytical := \frac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} \cdot |f\_fourth\_derivative(1)| \xrightarrow{simplify} \frac{249 \cdot e}{20 \cdot n^4}$$

Нерівність $\Delta\_analytical \le \varepsilon$ розв'язуємо підбором:

$$\varepsilon := 0.0001 \qquad \frac{249 \cdot e}{20 \cdot n^4} \le \varepsilon$$

при $n := 24$ $\quad \frac{249 \cdot e}{20 \cdot n^4} = 0.000102 \qquad \frac{249 \cdot e}{20 \cdot n^4} < \varepsilon = 0$

при $n := 25$ $\quad \frac{249 \cdot e}{20 \cdot n^4} = 0.0000866 \qquad \frac{249 \cdot e}{20 \cdot n^4} < \varepsilon = 1$

Отже, при $n \ge 25$ виконується нерівність $\Delta\_analytical \le \varepsilon$.

2) Знайдемо значення інтеграла за допомогою *формули Сімпсона*

Візьмемо $n := 40$

Обчислимо крок розбиття *h*:

$$h := \frac{b-a}{n} \rightarrow \frac{1}{40} = 0.025$$

Отже, розіб'ємо відрізок інтегрування [a, b] на *n* рівних частин та обчислимо значення підінтегральної функції у відповідних точках.

$$x := \left\| \begin{array}{l} \textbf{for } i \in 0..n \\ \quad \| x_i \leftarrow a + i \cdot h \\ \textbf{return } x \end{array} \right. \qquad y := \left\| \begin{array}{l} \textbf{for } i \in 0..n \\ \quad \| y_i \leftarrow f(x_i) \\ \textbf{return } y \end{array} \right.$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.025 \\ 0.05 \\ 0.075 \\ 0.1 \\ 0.125 \\ 0.15 \\ 0.175 \\ 0.2 \\ 0.225 \\ 0.25 \\ 0.275 \\ 0.3 \\ 0.325 \\ 0.35 \\ 0.375 \\ 0.4 \\ 0.425 \\ 0.45 \\ 0.475 \\ 0.5 \\ 0.525 \\ 0.55 \\ 0.575 \\ 0.6 \\ 0.625 \\ 0.65 \\ 0.675 \\ 0.7 \\ 0.725 \\ 0.75 \\ 0.775 \\ 0.8 \\ 0.825 \\ 0.85 \\ 0.875 \\ 0.9 \\ 0.925 \\ 0.95 \\ 0.975 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0000156 \\ 0.000125 \\ 0.0004221 \\ 0.001001 \\ 0.0019569 \\ 0.0033864 \\ 0.0053882 \\ 0.0080643 \\ 0.0115211 \\ 0.0158711 \\ 0.0212339 \\ 0.0277389 \\ 0.035527 \\ 0.0447532 \\ 0.0555899 \\ 0.0682299 \\ 0.0828907 \\ 0.0998189 \\ 0.1192958 \\ 0.1416436 \\ 0.1672329 \\ 0.1964915 \\ 0.2299148 \\ 0.2680781 \\ 0.3116513 \\ 0.3614167 \\ 0.4182898 \\ 0.4833449 \\ 0.5578458 \\ 0.6432826 \\ 0.7414168 \\ 0.8543361 \\ 0.984521 \\ 1.1349269 \\ 1.3090841 \\ 1.5112218 \\ 1.7464209 \\ 2.0208033 \\ 2.3417674 \\ 2.7182818 \end{bmatrix}$$

За формулою Сімпсона отримаємо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 2\sum_{j=1}^{n-2} y_j \right),$$

де i – непарні цілі числа, j – парні цілі числа.

```
I_Simpson := | S ← 0
             | S1 ← 0
             | S2 ← 0
             | for i ∈ 1 .. n−1
             |   | if mod(i,2) = 0
             |   |   | S2 ← S2 + y_i
             |   | else
             |   |   | S1 ← S1 + y_i
             | S ← h/3 · (y_0 + y_n + 4·S1 + 2·S2)
             | return S
```

$= 0.4587941$ $\quad I = 0.4587925$

3) Оцінимо похибку отриманого результату

Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку)

$$\Delta\_analytical := \frac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} \cdot \left| f\_fourth\_derivative(1) \right| = 0.0000132$$

Обчислимо істинну абсолютну похибку (реальну похибку)

$$\Delta\_real := \left| I - I\_Simpson \right| = 0.0000016$$

Отже, реальна похибка не перевищує аналітичну похибку

$$\Delta\_real < \Delta\_analytical = 1$$