Приклад 1. Обчислити наближено визначений інтеграл, застосовуючи при n=4 формули:
а) лівих прямокутників; б) трапецій; в) Сімпсона

$$I := \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx = 0.40547$$ - точне значення інтеграла

$a := 0$ $b := 1$ $n := 4$ $h := \frac{b-a}{n} = 0.25$ - крок

$$f(x) := \frac{1}{x+2} \qquad x := \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad f(x) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.44444 \\ 0.4 \\ 0.36364 \\ 0.33333 \end{bmatrix}$$

$y_0 := f(x_0) = 0.5$ $y_1 := f(x_1) = 0.44444$ $y_2 := f(x_2) = 0.4$ $y_3 := f(x_3) = 0.36364$ $y_4 := f(x_4) = 0.33333$

а) **Формула лівих прямокутників**

а.1) Знайдемо значення інтеграла за допомогою *формули лівих прямокутників*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}).$$

$$I\_left\_rectangles := h \cdot (y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = 0.42702$$

а.2) Оцінимо похибку методу лівих прямокутників

а.2.1) Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку) за формулою

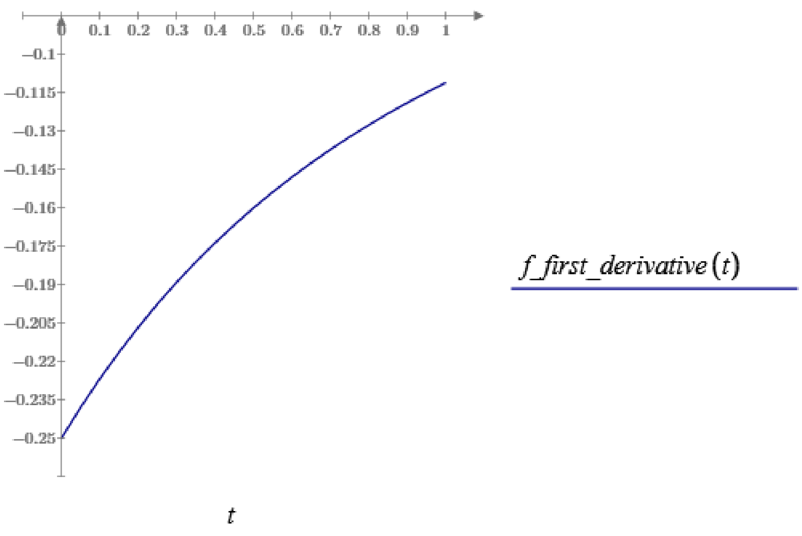
$$|R_1(f)| \le \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

Знайдемо похідну підінтегральної функції

$$f\_first\_derivative(t) := \frac{d}{dt} f(t) \to -\frac{1}{t^2 + 4\cdot t + 4}$$

За графіком похідної визначимо найбільше за модулем значення похідної на відрізку [0, 1]

$t := 0, 0.05 .. 1$



Отже, найбільше за модулем значення похідної на відрізку [0, 1]   в точці x=0

$$|f\_first\_derivative(0)| = 0.25$$

Гранична абсолютна похибка (аналітична похибка):

$$\Delta\_analytical := \frac{(b-a)^2}{2 \cdot n} \cdot |f\_first\_derivative(0)| = 0.03125$$

а.2.2) Обчислимо істинну абсолютну похибку (реальну похибку)

$$\Delta\_real := |I - I\_left\_rectangles| = 0.02156$$

Отже, реальна похибка не перевищує аналітичну похибку

$$\Delta\_real < \Delta\_analytical = 1$$

б) **Формула трапецій**

б.1) Знайдемо значення інтеграла за допомогою *формули трапецій*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n),\ \text{де}\ h = \frac{b-a}{n}$$

$$I\_trapezium := \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 + y_4\right) = 0.40619$$

б.2) Оцінимо похибку методу трапецій

б.2.1) Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку) за формулою

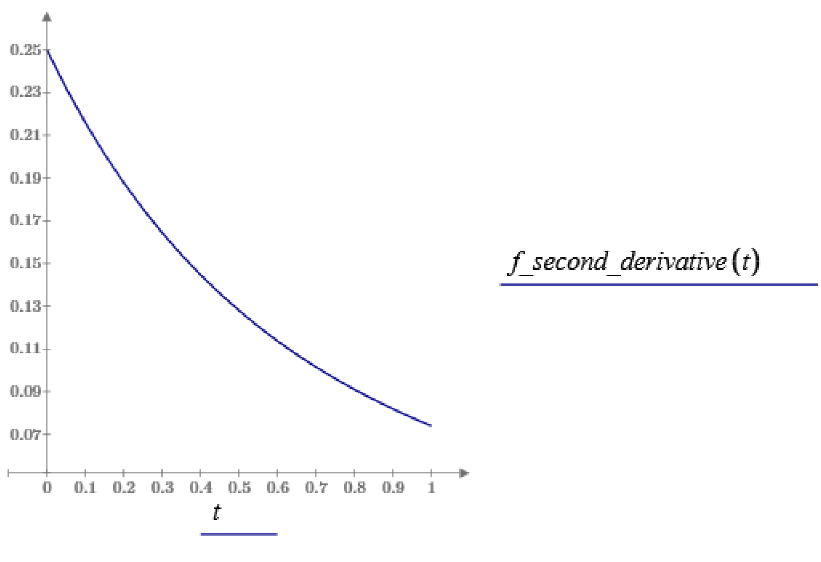
$$|R_2(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Знайдемо похідну другого порядку підінтегральної функції

$$f\_second\_derivative(t) := \frac{d^2}{dt^2} f(t) \rightarrow \frac{2}{t^3 + 6 \cdot t^2 + 12 \cdot t + 8}$$

За графіком похідної визначимо найбільше за модулем значення похідної на відрізку [0, 1]

$$t := 0, 0.05 .. 1$$



Отже, найбільше за модулем значення похідної на відрізку [0, 1]   в точці x=0

$$|f\_second\_derivative(0)| = 0.25$$

Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку)

$$\Delta\_analytical := \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2} \cdot |f\_second\_derivative(0)| = 0.0013$$

б.2.2) Обчислимо істинну абсолютну похибку (реальну похибку)

$$\Delta\_real := |I - I\_trapezium| = 0.00072$$

Отже, реальна похибка не перевищує аналітичну похибку

$$\Delta\_real < \Delta\_analytical = 1$$

в) **Формула Сімпсона (метод парабол)**

в.1) Знайдемо значення інтеграла за допомогою *формули Сімпсона*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 2\sum_{j=1}^{n-2} y_j \right),$$

де i – непарні цілі числа, j – парні цілі числа.

$$I\_Simpson := \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + y_4 + 4 \cdot \left(y_1 + y_3\right) + 2 \cdot y_2\right) = 0.40547$$

в.2) Оцінимо похибку методу Сімпсона

в.2.1) Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку) за формулою

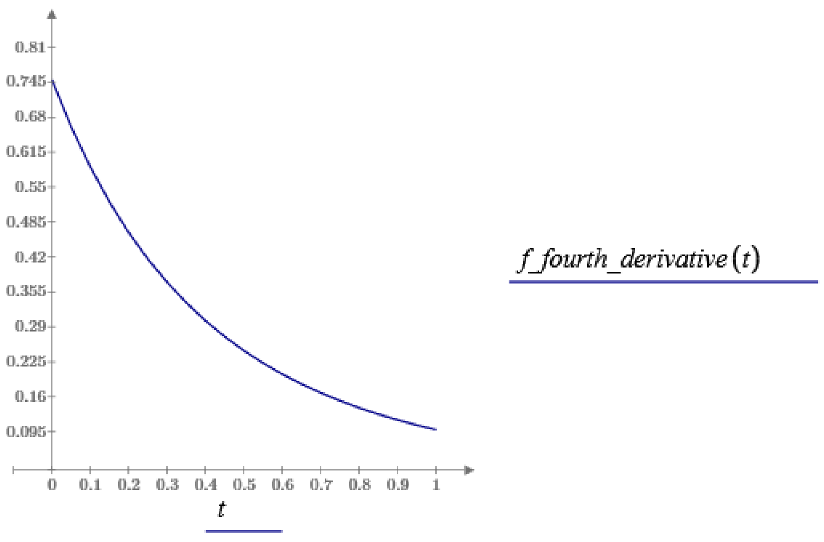
$$|R_4(f)| \le \frac{(b-a)^5}{180 n^4} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

Знайдемо похідну четвертого порядку підінтегральної функції

$$f\_fourth\_derivative(t) := \frac{d^4}{dt^4} f(t) \rightarrow \frac{24}{t^5 + 10 \cdot t^4 + 40 \cdot t^3 + 80 \cdot t^2 + 80 \cdot t + 32}$$

За графіком похідної визначимо найбільше за модулем значення похідної на відрізку [0, 1]

$$t := 0, 0.05 .. 1$$



Отже, найбільше за модулем значення похідної на відрізку [0, 1]   в точці x=0

$$|f\_fourth\_derivative(0)| = 0.75$$

Обчислимо граничну абсолютну похибку (аналітичну похибку)

$$\Delta\_analytical := \frac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} \cdot |f\_fourth\_derivative(0)| = 0.00002$$

в.2.2) Обчислимо істинну абсолютну похибку (реальну похибку)

$$\Delta\_real := |I - I\_Simpson| = 0.00001$$

Отже, реальна похибка не перевищує аналітичну похибку

$$\Delta\_real < \Delta\_analytical = 1$$